

Dynamisk respons av lange slanke hengebruer

Simen Løvøy Hegge
Mats Danefeer Skevik Hole

Bygg- og miljøteknikk (2-årig)
Innlevert: juni 2016
Hovedveileder: Einar Norleif Strømmen, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk

MASTEROPPGAVE 2016

Konstruksjonsteknikk

for

Mats Hole & Simen Løvøy Hegge

DYNAMISK RESPONS AV LANGE SLANKE HENGEBRUER

Aerodynamic response of slender suspension bridges

I Norge er det for tiden under planlegging en rekke meget slanke brukonstruksjoner, for eksempel Halsafjorden, Julsundet og Nordfjorden, alle som klassiske hengebroer, enten med enkelt eller splittet kassetverrsnitt i hovedbæreren. Disse broene har hovedspenn mellom ca. 1550 og 2050 m. De er svært utsatt for den dynamiske lastvirkningen fra vind. Halsafjorden som er den lengste med et spenn på ca. 2050 m er på grensen av det som tidligere er bygget av denne typen konstruksjoner. Prosjektene er spesielt krevende med hensyn til virvel-avløsning og bevegelsesinduserte krefter, dvs. med hensyn til å oppnå en konstruktiv utførelse som ikke medfører uakseptable virvelavløsningssvingninger ved lave vindhastigheter og tilstrekkelig sikkerhet mot en uakseptabelt lav stabilitetsgrense i koblede vertikal og torsjonssvingninger ("flutter"). Hensikten med denne oppgaven er å se på mulige utførelser av fjordkryssinger i denne spennvidden med tanke på å oppnå gunstige aerodynamiske egenskaper, og hvor det legges spesiell vekt på kryssinger i form av en eller annen variant av den klassiske hengebroen. Arbeidet foreslås lagt opp etter følgende plan:

1. Studentene setter seg inn i teorien for hengebroen som konstruksjonssystem.
2. Studentene setter seg inn i teorien for dynamisk respons og aerodynamisk stabilitet av slanke broer (se for eksempel *Strømmen: Theory of bridge aerodynamics, Springer 2006*).
3. For en eller flere aktuelle utførelser og spennvidder (avtales med veileder) skal det foretas en utredning med sikte på å kvantifisere de viktigste mekaniske egenskapene (dvs. aktuelle masse- og stivhetsegenskaper). Det skal foretas beregninger av de aktuelle egenfrekvensene og tilhørende egensvingeformene som er avgjørende for broens dynamiske egenskaper. I den grad det er mulig kan beregningene baseres på regnemaskinprogrammet Alvsat (eller innhentes fra Vegdirektoratet/Bruavdelingen).
4. For de samme tilfellene som er behandlet under punkt 3 skal det foretas beregninger av vindindusert dynamisk respons. Studentene kan selv velge om de vil legge vekt på virvelavløsning, «buffeting» eller stabilitet. For å kunne ta tilstrekkelig hensyn til bevegelsesinduserte krefter skal responsberegningene utføres i modalkoordinater i Matlab, enten i tidsplanet eller i frekvensplanet. I den grad tiden tillater det kan studentene velge å undersøke om en eller flere massedempere kan bedre systemets dynamiske egenskaper.

Studentene kan selv velge hvilke problemstillinger de ønsker å legge vekt på. Oppgaven skal gjennomføres i samarbeid med Dr.ing. Bjørn Isaksen og Siv.ing. Kristian Berntsen i Vegdirektoratet.

NTNU, 2016-01-14



Einar Strømmen

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på et 2-årig masterstudium i bygg- og miljøteknikk, fagretning konstruksjon ved Norges Teknisk-Naturvitenskaplige Universitet (NTNU) og teller 30 studiepoeng. Vi er to studenter, begge med en bachelorgrad fra høyskole, som har samarbeidet om oppgaven. Målet med studiene på NTNU vært å styrke våre teoretiske kunnskaper. Vi har derfor prøvd å velge teoretisk utfordrende fag. I løpet av studiet har vi begge tatt tre fag innen dynamikk, noe som viste seg både å være svært interessant samt å by på mange utfordringer. Valget av masteroppgave falt derfor på en dynamisk analyse av hengebruer som uten tvil har vært det mest teoretisk utfordrende vi har begitt oss ut på.

Opgaven er skrevet i samarbeid med Statens vegvesen som for tiden jobber med mange utfordrende fjordkryssinger i forbindelse med prosjektet *fergefri E39*. Mange av fjordkryssingene er med lange og slanke hengebruer som er svært utsatt for dynamiske lastvirkninger. Julsundet er en av disse broene der vi ser på hvordan en massedemper kan benyttes for å redusere svingningene som oppstår. Oppgaven har mottatt økonomisk støtte fra Statens vegvesen.

Etter anbefaling fra Einar N. Strømmen er teksten skrevet på en slik måte at vi selv skal kunne benytte denne oppgaven om 10 år for å huske hva vi lærte. Teksten er derfor skrevet med forbehold om en del grunnleggende kunnskap innen konstruksjonsdynamikk.

Vi ønsker også å nevne at mye av teorien er basert på, og mange av figurene er inspirert av, Einar N. Strømmens bøker *Structural Dynamics* [8] og *Theory of Bridge Aerodynamics* [2].

Avslutningsvis ønsker vi å takke vår hovedveileder Professor Dr. Ingeniør Einar N. Strømmen ved NTNU for gode svar på alle spørsmål samt sitt hovedfokus på studentenes læringsutbytte. Vi ønsker også å takke vår veileder og kontaktperson Sivilingeniør Kristian Berntsen ved Statens vegvesen som har bidratt med all nødvendig informasjon om bruene samt svart på alle våre spørsmål.

Trondheim 07. juni 2016



Simen Løvøy Hegge



Mats D. Skevik Hole

Sammendrag

Ettersom det for tiden planlegges flere grensesprengende fjordkryssinger i Norge er prosjektering av hengebruer et viktig tema innen konstruksjonsteknikk. Denne masteroppgaven tar for seg en av disse bruene og undersøker de aerodynamiske egenskapene til den. Med ett hovedspenn på 1625 m skal denne bruene krysse Julsundet i Møre og Romsdal. Dette er lengre enn noen annen hengebru som er bygget i Norge per dags dato. Hensikten med studien er å undersøke hvordan en massedemper (TMD) påvirker responsen til enkelte egensvingeformer. Responsen beregnes når bruene utsettes for buffeting-vindlast med stedsvindhastighet for Julsundet.

Opgaven løses i sin helhet teoretisk og de fleste beregningene utføres i Matlab, der ALVSAT benyttes til å validere noen resultater. I tillegg benyttes Mathcad og Excel for mindre beregninger. Ved hjelp av teori presentert i Einar N. Strømmens lærebok *Structural Dynamics* [8] lages det en matlab-rutine for beregning av egensvingeformer og egenfrekvenser. Disse brukes videre i beregning av respons med en svingeform og en komponent i frekvensplanet. Også disse beregningene utføres i Matlab og baseres på teori fra læreboken *Theory of Bridge Aerodynamics* [2] av samme forfatter. Responsen beregnes med og uten massedemper, og det undersøkes hvordan andre svingeformer og ulike plasseringer av massedemperen påvirker resultatet. Statens vegvesen har oppgitt inputparametere som har muliggjort disse beregningene.

Det viser seg at en massedemper ikke påvirker responsen til 2. vertikale svingeform betydelig når bruene utsettes for buffeting-vindlast med en karakteristisk middelvindhastighet. Bare en mindre reduksjon forekommer. Massedemperens vekt blir så stor at antagelsen om ingen punktlaster langs bruspenet ved løsning av egenverdiproblemet vanskelig lar seg forsvare. I tillegg vil bruens og demperens relative respons bli for stor. Dermed er det lite aktuelt å bruke massedemper for å dempe ut responsen av 2. vertikale egensvingesvingeform. Derimot vil 1. egensvingeform i torsjon reduseres betydelig av en massedemper. Også her må massedemperen være tung og trenger stor plass til vandring. Likevel kan det være aktuelt å bruke massedemper for dette tilfellet da det teoretisk er å foretrekke en demper i torsjon framfor vertikalretning. Andre svingeformer enn det demperen er optimalisert for påvirkes i veldig liten grad, og en alternativ plassering av demperen vil ikke være effektivt.

Summary

Since there are several groundbreaking fjord crossings under planning in Norway now, the design of suspension bridges has become an important subject in structural engineering. This master thesis looks at one of these bridges and studies its aerodynamic properties. The suspension bridge in focus is the 1625 m long bridge over Julsundet in Møre og Romsdal. At present time, no suspension bridge in Norway has a span of this size. The purpose of this thesis is to find out how a tuned mass damper (TMD) will affect the dynamic response of a chosen set of mode shapes. The response is calculated when the bridge is exposed to buffeting load with a mean wind velocity characteristic for Julsundet.

The task is solved theoretically and Matlab is mainly used for calculations, while ALVSAT is applied for validating some of the results. Mathcad and Excel is also used, however only for small parts of the calculations. Theory from the book *Structural Dynamics* [8] written by Professor Einar N. Strømmen gives the framework to make a Matlab script for solving the eigenvalue problem. The response is calculated in frequency domain with the theory of single mode single component presented in the book *Theory of Bridge Aerodynamics* [2]. The focus in this thesis is how a TMD affects the response, how it affects other mode shapes and how moving the damper affects the result. Input parameters given by the Norwegian public roads administration has made the calculations possible.

Results shows that the second vertical mode shape is not affected significantly by a tuned mass damper when buffeting wind load excites the bridge at a mean wind velocity characteristic for Julsundet. Another negative aspect is that the weight of the damper will be huge. The large weight makes the assumption of no point loading along the span when solving the eigenvalue problem difficult to defend. In addition to a small response reduction and a considerable damper weight, the relative response between the bridge and the damper will be large. Therefore, a mass damper is not relevant in this case. In contrast, the first torsional mode shape is significantly reduced. The mass and response of the damper will be large in this case as well. Nevertheless this mass damper could be relevant because it is theoretically preferred compared to a vertical damper. In addition, moving the damper will be inefficient and it does not significantly affect other mode shapes.

Innholdsfortegnelse

FORORD	III
SAMMENDRAG	V
SUMMARY	VII
INNHALDSFORTEGNELSE	IX
FIGURER	XII
TABELLER	XIV
1 INNLEDNING	1
2 TEORI	4
2.1 Hengebruer	4
2.2 Statisk horisontalkraft og konstruktivt areal.....	6
2.3 Egensvingeformer og egenfrekvenser	9
2.3.1 Horisontalbevegelse	10
2.3.2 Vertikalbevegelse	16
2.3.3 Torsjon	20
2.4 Auto-spektraltetthet	24
2.5 Tidsplansimulering	26
2.6 Maksrespons	27
2.7 Vindteori.....	29
2.7.1 Definisjon av akser og komponenter.....	30
2.7.2 Vindfeltets karakteristiske egenskaper.....	32
2.8 Buffeting vindlast	34
2.9 Buffeting responsberegninger.....	38
2.10 Massedemper	43
2.10.1 Virtuelt arbeid for vertikalsvingning.....	45
2.10.2 Virtuelt arbeid for torsjon.....	48
2.10.3 Responsspektrum med massedemper.....	51
2.10.4 Optimale TMD-egenskaper.....	61

3	BEREGNINGER.....	64
3.1	Inputparametere	64
3.2	Statisk horisontalkraft og konstruktivt areal.....	67
3.3	Egensvingeformer og egenfrekvenser	68
3.4	Demping	78
3.5	Vindfeltets karakteristiske egenskaper	79
3.6	Aerodynamiske deriverte.....	84
3.7	Numeriske beregninger.....	87
3.7.1	Diskretisering av x-aksen	87
3.7.2	Diskretisering av frekvensaksen.....	88
3.8	Relevante egensvingeformer	90
3.9	Vertikalrespons med TMD	92
3.9.1	Optimalisering av TMD	92
3.9.2	Responsspekter, maksrespons og tidsplansimulering	97
3.9.3	Responsberegninger	100
3.10	Torsjonsrespons med TMD	103
3.10.1	Optimalisering av TMD	103
3.10.2	Responsspekter, maksrespons og tidsplansimulering	106
3.10.3	Responsberegninger	109
3.11	Relativ respons	110
4	DISKUSJON.....	112
4.1	z-retning.....	112
4.2	θ -retning	115
4.3	Betydning av plassering og frekvens til TMD.....	116
4.4	Unøyaktighet ved nullpunkter	117
4.5	Relativ respons	118
5	KONKLUSJON.....	119
6	REFERANSER.....	120
	VEDLEGG.....	121
A	EGENSVINGEFORMER – HOVEDKODE.....	122
A1	Statisk horisontalkraft og konstruktivt areal.....	124
A2	Egensvingeformer y-retning	125

A3	Egensvingeformer z-retning	128
A4	Egensvingeformer θ -retning	130
A5	Sammenstilling egensvingeformer	132
B	ALVSAT TILFELLE 1.....	137
C	ALVSAT TILFELLE 4.....	145
D	BUFFETINGRESPONS – HOVEDKODE.....	153
D1	Egensvingeformer og diskretisering av frekvens-aksen	165
D2	JAF z-retning	169
D3	JAF θ -retning.....	171
D4	Aerodynamiske deriverte.....	173
D5	Demping	177
D6	Frekvens-respons-funksjoner.....	179
D7	Frekvens responsfunksjon med TMD z-retning	181
D8	Frekvens responsfunksjon med TMD θ -retning.....	182
D9	Optimering TMD egenskaper z-retning	183
D10	Optimering TMD egenskaper θ -retning	195
D11	Responsspektrum z-retning	206
D12	Responsspektrum θ -retning	207
D13	Maksrespons	208
D14	Tidsplansimulering	209

Figurer

Figur 1.1 - Typisk oppførsel for hengebruer	2
Figur 2.1 - Forskjellige typer hengebruer.....	5
Figur 2.2 - Bærevirkning hengebru	6
Figur 2.3 - Infinitesimal element med statiske krefter	7
Figur 2.4 - Hengebru med viktige parametere	10
Figur 2.5 - Tverrsnitt og infinitesimal element y-retning.....	11
Figur 2.6 - Infinitesimal element av en kabel (ovenfra).....	12
Figur 2.7 - Tverrsnitt og infinitesimalelement z-retning.....	17
Figur 2.8 - Tverrsnitt og infinitesimal element - torsjon.....	21
Figur 2.9 - Irregulære svingninger over tid	24
Figur 2.10 - Maksrespons fra tidsplansimulering.....	28
Figur 2.11 - Vindhastighet og turbulensprofil.....	29
Figur 2.12 - Definisjon av akser og komponenter.....	31
Figur 2.13 - Sannsynlighetsfordeling av vind i hovedretningen	32
Figur 2.14 - Tverrsnitt påvirket av buffeting vindlast.....	35
Figur 2.15 - Egensvingeformer	39
Figur 2.16 - Massedemper.....	43
Figur 2.17 - Virtuell vertikalforskyvning for brubjelken	45
Figur 2.18 - Virtuell arbeid vertikalforskyvning med massedemper	46
Figur 2.19 - Virtuell torsjon for brubjelken.....	48
Figur 2.20 - Virtuell torsjon med massedemper.....	49
Figur 2.21 - Optimering av TMD mtp. frekvens-respons-funksjonen	62
Figur 2.22 - Dempet system og udempet TMD-system.....	63
Figur 3.1 - Oppriss og tverrsnitt Julsundet.....	65
Figur 3.2 - SS, NA og M tverrsnitt avstivningsbærer	68
Figur 3.3 - Egenfrekvenser som funksjon av dx-størrelse	69
Figur 3.4 - Egensvingeform med forskjellige dx-størrelse	70
Figur 3.5 - Sammenligning egensvingeformer y-retning	71
Figur 3.6 - Utvikling av egenfrekvenser for ALVSAT-tilfeller.....	74
Figur 3.7 - De 22 første egensvingeformene for Julsundet	77

Figur 3.8 - Demping	79
Figur 3.9 - Kartutsnitt Julsundet.....	81
Figur 3.10 - Middelvindhastighetsprofil for Julsundet.....	82
Figur 3.11 - Aerodynamiske deriverte	86
Figur 3.12 - Betydningen av dx for JAF	88
Figur 3.13 - Tilfredsstillende $\Delta\omega$ -størrelse.....	89
Figur 3.14 – Fin og grov $\Delta\omega$ på frekvensaksen.....	90
Figur 3.15 - Frekvens-respons-funksjoner for de 20 første svingeformene.....	91
Figur 3.16 - Plassering av TMD på ϕ_{z2}	92
Figur 3.17 - Vurdering av masseforhold for ϕ_{z2}	94
Figur 3.18 - Vurdering av frekvens for ϕ_{z2}	95
Figur 3.19 - Vurdering av dempefaktor for ϕ_{z2}	96
Figur 3.20 - Responsspekter for ϕ_{z2} ved $x_r = L/2$	97
Figur 3.21 - Tidsplansimulering av 2. svingeform vertikalretning	99
Figur 3.22 - 2. ekstremalpunkt ϕ_{z2} ved $x_r = 225$ m.....	100
Figur 3.23 - TMD på ϕ_{z2} og ϕ_{z1} ved $x_r = 408$ m og $x_r = L/2$	101
Figur 3.24 - TMD på ϕ_{z2} og ϕ_{z3} ved $x_r = 611$ m og $x_r = L/2$	101
Figur 3.25 - Plassering av TMD på $\phi_{\theta1}$	103
Figur 3.26 - Vurdering av masseforhold for $\phi_{\theta1}$	104
Figur 3.27 - Vurdering av frekvens for $\phi_{\theta1}$	105
Figur 3.28 - Vurdering av dempefaktor for $\phi_{\theta1}$	106
Figur 3.29 - Responsspekter $\phi_{\theta1}$ ved $x_r = L/2$	107
Figur 3.30 - Tidsplansimulering av 1. svingeform i torsjon.....	108
Figur 3.31 - 2. svingeform torsjon.....	109
Figur 3.32 - 3. svingeform torsjon.....	110
Figur 3.33 - Tidsplansimulering av relativ respons torsjon	111
Figur 3.34 - Tidsplansimulering av relativ respons vertikalt	111
Figur 4.1 - Effekten av massedemperen i torsjon.....	116
Figur 4.2 - Unøyaktighet for nullpunktet til ϕ_{z1}	117

Tabeller

Tabell 3.1 - Inputverdier Julsundet	66
Tabell 3.2 - Tabell NA.A2.4 (B)	67
Tabell 3.3 - ALVSAT tilfeller	72
Tabell 3.4 - Egenfrekvenser Matlab og ALVSAT tilf. 1	73
Tabell 3.5 - Egenfrekvenser Matlab og ALVSAT tilf. 4	75
Tabell 3.6 - Veiledende dempefaktorer	78
Tabell 3.7 - Tabell NA.4.1 - Terrengruhetskategorier og tilhørende parametere	81
Tabell 3.8 - Turbulensintensiteter	83
Tabell 3.9 - Faktorer til Kaimal og kospektrum	83
Tabell 3.10 - Inputverdier til AD-beregning	85
Tabell 3.11 - Verdier av AD-er	86
Tabell 4.1 - Resultater z-retning	114
Tabell 4.2 - Resultater torsjon	115

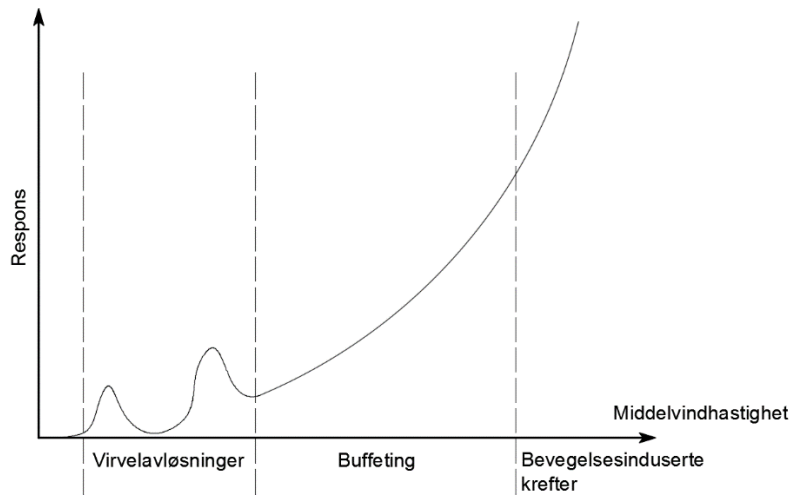
1 Innledning

Bruer kan konstrueres på mange forskjellige måter, men hengebruer skiller seg ut på grunn av deres egenskap til å spenne over lange avstander. De er i bruk for spenn opptil nesten 2000 m, noe som gjør de til en attraktiv brutype [1].

Hengebru som konsept har vært i bruk helt fra begynnelsen av vår tidsregning. Likevel var det ikke før i 1823 i Geneva at Marc Seguin bygde den første permanente bruen konstruert med oppspente jernkabler. I løpet av resten av 1800-tallet ble mange hengebruer bygd i både Europa og Nord-Amerika, men flere av disse kollapset under stormer. Beskrivelser fra øyevitner ble gitt, og ord som *bølgende*, *vridende* og *svingende* var gjengangere, noe som indikerte en form for dynamisk respons. På denne tiden ble vind kun behandlet som en uavhengig, statisk horisontalkraft, og interaksjon mellom vinden og konstruksjonen ble ikke vurdert. Ikke bare var det kollaps som var problemet, men på begynnelsen av 1900-tallet opplevde også flere hengebruer problemer med store svingninger. For eksempel *Fykesundbruen* i Norge og *Golden Gate Bridge* i USA, begge bygget i 1937, hadde problemer med dette [1].

Det er ingen tvil om at kollapsen av *Tacoma Narrows Bridge* i 1940, kanskje en av verdens mest berømte brukkollaps, var en viktig hendelse for utviklingen av hengebruer. Før dette var det lagt få ressurser inn i den teoretiske og eksperimentelle forståelsen av vindens effekt på slike bruer. På grunn av kostnadene og størrelsen til *Tacoma Narrows Bridge* ble ingeniørene i kjølvannet av kollapset usikre på designkonseptene sine. I årene som fulgte ble det derfor rettet mer og mer fokus på den dynamiske lastvirkningen fra vind og feltet har utviklet seg markant siden [1].

I dagens litteratur deles ofte den dynamiske lastvirkningen inn i tre separate deler, se figur 1.1. For lave vindhastigheter oppstår virvelavløsninger på lesiden av konstruksjonen. For høyere vindhastigheter oppstår det som kalles buffeting som i hovedsak forårsakes av eksisterende turbulens i vindfeltet. Ved svært høye vindhastigheter oppstår interaksjon mellom vinden og konstruksjonen og dette blir kalt bevegelsesinduserte krefter. Ved beregninger av konstruksjonens respons blir disse tre tilfellene behandlet separat selv om det i virkeligheten ikke er noen klare grenser mellom de, eller noen vindhastigheter de forekommer helt alene [2].



Figur 1.1 - Typisk oppførsel for hengebruer

I Norge planlegges det for tiden en rekke store fjordkryssinger i forbindelse med prosjektet *fergefri E39*. Her er *Halsaffjorden*, *Nordfjorden* og *Julsundet* eksempler på lange slanke hengebruer som vurderes. Disse har hovedspenn på mellom 1550 m og 2050 m og er følgelig svært utsatt for dynamisk lastvirkning fra vind. Dette er store og svært kostbare konstruksjoner, for eksempel hadde Hardangerbruen med sitt hovedspenn på 1310 m en prislapp på 2.3 mrd. kr justert til 2012-verdi [3]. Derfor er det særdeles viktig å unngå for store svingninger og i verstefall kollaps. For å oppnå dette er det blant annet mulig å splitte brutverrsnittet eller å montere massedempere.

Tidligere masteroppgaver innenfor dynamiske analyser av lange slanke hengebruer har vist at splitting av tverrsnittet gir gunstige effekter med tanke på de bevegelsesinduserte kreftene ved å betydelig øke den kritiske vindhastigheten [4] [5]. Altså vindhastigheten der en form for ustabilitet oppstår ved at en liten økning i vindhastigheten fører til en stor økning i responsen (se bevegelsesinduserte krefter i figur 1.1). Massedempere er derimot mer aktuelle ved lave vindhastigheter, dvs. ved virvelavløsninger, da de er effektive for svingninger med små amplituder. For eksempel har de med suksess vært tatt i bruk for å redusere vertikalsvingninger på *Forcheim Bridge* i Tyskland [1]. Tidligere masteroppgaver har vist at massedempere kan gi gunstige effekter ved å redusere svingninger som følge av virvelavløsninger (lave vindhastigheter), samt å øke den kritiske vindhastigheten (høye vindhastigheter) [6] [7].

I denne rapporten skal det ses på en av de tidligere nevnte bruene, nærmere bestemt Julsundet. Med sitt hovedspenn på 1625 m vil den knytte Otrøya i nærheten av Molde til fastlandet, en rute som ellers kun er mulig med ferge. Da tidligere masteroppgaver allerede har vist effekten

som splitting av tverrsnittet har ved høye vindhastigheter samt effekten montering av massedempere har ved både lave og høye vindhastigheter oppstår et nytt interessant spørsmål. Hvordan er effekten av disse løsningene ved mellomliggende vindhastigheter, dvs. buffeting. Rapporten tar kun for seg en av løsningene og har derfor som mål å svare på følgende spørsmål.

Hvorvidt er det aktuelt, og hvor effektivt er det å redusere svingninger som følge av buffeting vindlast ved karakteristisk middelvindhastighet ved bruk av en massedemper?

For å svare på dette spørsmålet er rapporten bygd opp på følgende måte.

- Kapittel 2 – Teori
Hengebruers virkemåte presenteres kort før teorien for beregning av egensvingeformer med tilhørende egenfrekvenser. Deretter presenteres vindteori og matematiske begrep utledes helt fram til ferdige ligninger som beskriver bruens respons med og uten massedempere.
- Kapittel 3 – Beregninger
Beregningene basert på inputparametere gitt av Statens vegvesen presenteres med tilhørende resultat samt diskusjoner rundt valg av rette parametere.
- Kapittel 4 – Diskusjon
En oppsummering og diskusjon rundt de viktigste resultatene.
- Kapittel 5 – Konklusjon
En konklusjon som gir et konkret svar på problemstillingen.

2 Teori

I dette kapitlet skal den nødvendige teorien som leder til, og inkluderer, dynamisk respons med massedempere gjennomgå. Teorien presenteres i hovedsak i samme rekkefølge som beregningene utføres i kapittel 3.

Først skal det grunnleggende rundt hengebroer ses på der bærevirkning, konstruksjonsdeler og aksesystem defineres. Deretter er målet å utlede uttrykk som kan bestemme egensvingeformer med tilhørende egenfrekvenser for både horisontal og vertikal bevegelse, samt ren torsjon. For å bestemme dette må først horisontalkraften og det nødvendige konstruktive tverrsnittsarealet i hovedkablene beregnes. Siden de mekaniske egenskapene til bruene oppgis av Statens vegvesen er teori for beregning av disse ikke inkludert.

Når teorien bak egensvingeformene og egenfrekvensene er på plass kan utledningen av uttrykk for responsen begynne. Responsen skal løses i frekvensdomenet framfor tidsdomenet og derfor vil grunnleggende teori om spektraltetthet gjennomgå først. Tidsplansimuleringer og teorien bak hvordan man finner den maksimale responsen basert på spektraltettheten presenteres rett etter.

Deretter anses det som hensiktsmessig å gjennomgå grunnleggende vindteori før denne defineres som en buffeting-vindlast. Når vindlasten er definert presenteres grunnleggende beregning av responsspekteret i modalkoordinater med antagelsen om en svingeform og en responskomponent. Med teori innenfor både buffeting-vindlast og responsspektrum kombineres disse til buffeting-respons.

Til slutt presenteres teorien om massedempere og uttrykket for responsspektrum med én massedemper utledes. Avslutningsvis vil teorien bak de optimale egenskapene til massedemperen gjennomgå.

2.1 Hengebruer

Som nevnt skal det grunnleggende rundt denne typen bruer gjennomgå først. Hengebruer kan konstrueres på forskjellige måter. De kan bygges som skråstagbruer illustrert i figur 2.1.c der vekten av brubjelken overføres via hengestag direkte til tårnene. Eksempler på dette er

Uddevallabruen i Sverige eller den berømte *Millau-bruen* i Frankrike. Det kan også lages hengebroer der både hovedspennet og sidespennene henger i bærekablene illustrert i figur 2.1.a. Både *Akashi-Kaikyo-bruen* i Japan (verdens lengste spenn – 1991 m [1]) og *Golden Gate Bridge* i San Francisco er gode eksempler på dette.



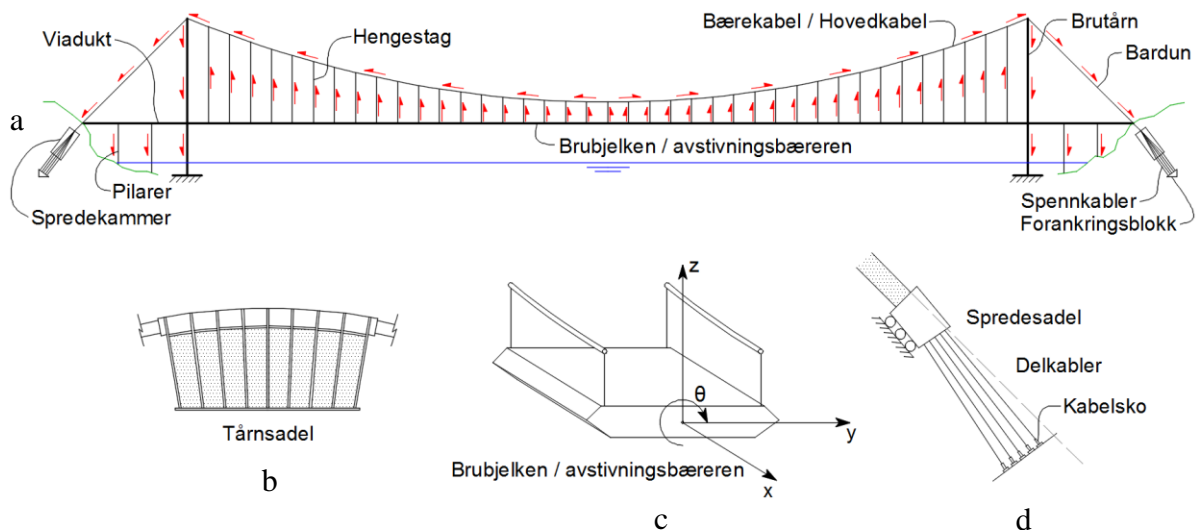
Figur 2.1 - Forskjellige typer hengebroer

Julsundet er en type hengebru der kun hovedspennet henger i bærekablene og sidespennene bygges som separate bruer understøttet av pilarer illustrert i figur 2.1.b. *Hardangerbruen* og *Hålogalandsbruen* i Norge er bruer av denne typen. I motsetning til *Akashi-Kaikyo-bruen* og *Golden Gate Bridge* krummes bærekablene kun i hovedspennet og ikke i sidespennene. Det skal i det følgende gås nærmere inn på denne typen hengebroer.

Her er bærekablene opphengt mellom tårnene, og hengestag overfører vekten av brubjelken til bærekablene. Bærekablene må forankres godt ved hver ende av bruene da en hvilken som helst belastning på brubjelken transformeres til strekk i bærekablene. Den delen av bærekabelen som går fra tårnet til forankringen kalles bardun og må ofte ha et større tverrsnittsareal enn selve bærekabelen da vinkelen i forhold til brutårnet er mindre (se figur 2.2.a).

Kabelforankringen består av et sprekammer og en forankringsblokk som illustrert i figur 2.2.a. I sprekammeret føres bærekabelen over en spredesadel og deles i individuelle delkabler som vist i figur 2.2.d. Legg merke til at disse delkablene kun føres i en vinkel under bærekabelens tangent da dette tillater at delkablene legges lag for lag i løpet av konstruksjonsfasen. Kraften fra hver delkabel overføres via en kabelsko til en spennkabel. Disse spennkablene føres så ned til en forankringsblokk hvor strekket fra bærekabelen overføres til grunnen [1].

På toppen av tårnene, som ofte bygges i betong, monteres en tårnsadel for bærekabelen som illustrert i figur 2.2.b. Størstedelen av tårnsadelen er sammensatt av et gitter av langsgående og radielle stålplater sveist sammen. Det er bare selve sadelsporet, der kabelen ligger, som er fremstilt av støpestål. Tårnsadelen overfører vertikalkreftene fra bærekabelen til tårnene og radiusen er vanligvis valgt å være 12 ganger bærekabelens diameter [1].



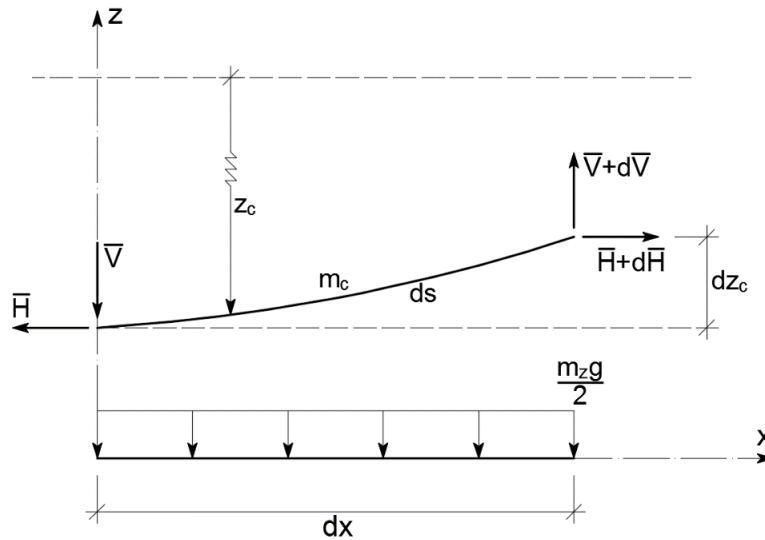
Figur 2.2 - Bærevirkning hengebru

De «separate» bruene i sidespennene kalles viadukter og bygges som regel i betong støttet opp av pilarer som illustrert i figur 2.2.a. Avstivningsbærerer kan konstrueres som et lukket stålverrsnitt bygget i seksjoner med avstivninger på innsiden som vist i figur 2.2.c. Etter at bærekabelen er montert løftes seksjonene opp og festes i hengestagene. Det er flere forskjellige prosedyrer for dette, men det er vanligst å begynne med den midterste seksjonen for så å løfte påfølgende seksjoner på plass [8].

Aksesystemet til bruene er definert i figur 2.1.c der x -aksen representerer lengden på bruene, z -aksen representerer vertikalretningen, y -aksen representer horisontalretning og θ indikerer avstivningsbærerens rotasjon.

2.2 Statisk horisontalkraft og konstruktivt areal

Som det nevnes i det foregående delkapittelet vil enhver belastning på brubjelken føre til strekk i bærekablene. Den statiske horisontalkraften \bar{H} er derfor viktig å beregne da systemets stivhetsegenskaper (den geometriske stivheten) er svært avhengig av denne, og følgelig systemets egensvingeformer samt egenfrekvenser [8]. Den kan beregnes ved å se på momentlikevekten av en bærekabel over halve hovedspennet. Et infinitesimal element av bruene er illustrert i figur 2.3 der z_c er høyden fra toppen av tårnet til kabelen, m_c og m_z er massen til henholdsvis kabelen og brubjelken pr. lengdeenhet, og \bar{V} er den statiske vertikalkraften i kabelen.



Figur 2.3 - Infinitesimal element med statiske krefter

Ved å se på statisk likevekt i x -retning på infinitesimal elementet dx i figur 2.3 oppnås følgende.

$$\sum F_x = -\bar{H} + \bar{H} + d\bar{H} = 0 \Rightarrow d\bar{H} = 0 \quad (2.1)$$

Noe som betyr at den statiske horisontalkraften ikke endrer seg langs bruspennet.

Statisk momentlikevekt om toppen av et brutårn gir

$$\sum M = \int_0^{L/2} \left(\frac{m_z g}{2} dx + m_c g ds \right) x - \bar{H} e_c = 0 \quad (2.2)$$

der e_c er illustrert i figur 2.4. Videre beregnes

$$\bar{H} e_c = g \int_0^{L/2} \left(\frac{m_z}{2} + m_c \frac{ds}{dx} \right) x dx = g \int_0^{L/2} \left(\frac{m_z}{2} + m_c \sqrt{1 + \left(\frac{dz_c}{dx} \right)^2} \right) x dx \quad (2.3)$$

der det ved hjelp av Pytagoras er innført at

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz_c}{dx} \right)^2} \quad (2.4)$$

Ved å anta at kablene følger en grunn kurve (på engelsk *shallow curve*), som vil si at forholdet mellom kabelsiget og kabellengden (se figur 2.4) bør være $e_c/L > 1/10$, kan det vises at vertikalavstanden fra toppen av tårnene til kabelen kan uttrykkes slik [8]

$$z_c(x) \approx 4e_c \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2.5)$$

Som innført i ligning 2.3 gir den statiske horisontalkraften

$$\bar{H} = \frac{m_z g L^2}{16e_c} \left(1 + \frac{2m_c}{m_z} \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{e_c}{L}\right)^2\right)\right) \quad (2.6)$$

Det nødvendige konstruktive tverrsnittsarealet i bærekablene beregnes i henhold til Statens vegvesens *Håndbok N400 Bruprosjektering*. Pkt. 13.3.3 angir at ved kontroll i bruddgrensetilstand (ULS) skal dimensjonerende kapasitet av bærekabler settes til [9]

$$F_{Rd} = \frac{F_{uk}}{1.5\gamma_m} \quad (2.7)$$

Der kabelens spesifiserte minimale bruddlast er

$$F_{uk} = A_c f_{uk} \quad (2.8)$$

og

- γ_m er materialfaktoren gitt lik 1.2.
- A_c er bærekabelens konstruktive tverrsnittsareal.
- f_{uk} er bærekabelens bruddstyrke.

Den dimensjonerende kapasiteten til bærekabelen må være større eller lik den største statiske normalkraften som kan oppstå. Denne vil være ved $x = 0$ og $x = L$ og kan finnes ved hjelp av Pytagoras slik

$$\bar{N} = \sqrt{\bar{H} + \bar{V}} \quad (2.9)$$

der \bar{V} er den statiske vertikalkraften ved et av tårnene. \bar{V} kan regnes ut på samme måte som \bar{H} ved å anta at bærekablene følger en grunn kurve og se på infinitesimalelementet i figur 2.3. Vertikal likevekt for halve bærekabelen gir da

$$\bar{V} = \int_0^{L/2} \left(\frac{m_z g}{2} dx + m_c g ds\right) = g \int_0^{L/2} \left(\frac{m_z}{2} + m_c \frac{ds}{dx}\right) dx \quad (2.10)$$

Innfører ligning 2.4 og 2.5 og integrerer over halve lengden som gir følgende

$$\bar{V} = \frac{m_z g L}{2} \left(1 + \frac{2m_c}{m_z} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{e_c}{L}\right)^2\right)\right) \quad (2.11)$$

Bærekabelens minste konstruktive tverrsnittsareal kan da bestemmes ved å kombinere ligning 2.7 og 2.8.

$$A_c = \frac{1.5 \cdot \bar{N} \cdot \gamma_m}{f_{uk}} \quad (2.12)$$

der \bar{N} er spesifisert i ligning 2.9.

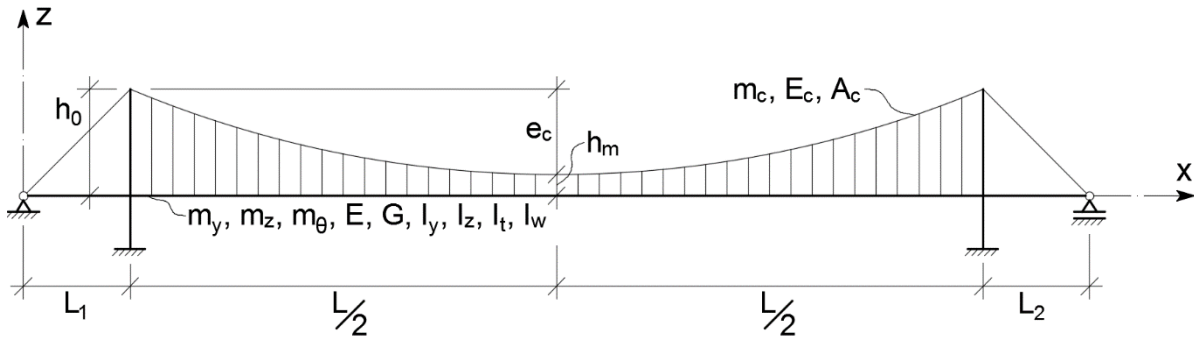
2.3 Egensvingeformer og egenfrekvenser

Ved beregning av egensvingeformer med tilhørende egenfrekvenser må brubjelken og kablene ses på som ett system. For å forenkle problemet er følgende antagelser tatt ved utledning av teorien i dette delkapittelet.

- Skjærsenteret og nøytralaksen til avstivningsbæreren antas å sammenfalle.
- Hengebruene antas å være symmetrisk om z-aksen.
- Ingen overhøyde på avstivningsbæreren
- Elastisiteten til hengestag, barduner og brutårn neglisjeres.
- Responsen i x-retning antas å kunne neglisjeres.
- Ingen punktlaster langs hovedspennet

Basert på disse forutsetningene vil kablene og brubjelken bevege seg i harmoni med hverandre og den dynamiske bevegelsen kan deles opp i tre uavhengige komponenter [8]. En horisontalbevegelse (y-retning), en vertikalbevegelse (z-retning) og en torsjonsbevegelse (θ -retning). Responskomponentene har derfor ingen kobling mellom seg. For eksempel vil ikke en ren svingning i y-retning føre til noen torsjonsbevegelse, noe som ville oppstått ved kobling mellom responskomponentene.

Figur 2.4 gir et overordnet bilde av hengebruene med tilhørende parametere som er viktige for å avgjøre egenfrekvenser og egensvingeformer. m_y , m_z og m_θ er brubjelkens masse og massetregghetsmoment pr. lengdeenhet mot bevegelse i henholdsvis y-, z- og θ -retning.



Figur 2.4 - Hengebru med viktige parametere

Som det blir nevnt i kapittel 2.8 endres bruens stivhetsegenskaper seg når responsen og middelvindhastigheten V øker, noe som igjen fører til at egenfrekvensene endres. Ved utregning av egensvingeformer og tilhørende egenfrekvenser antas bruene å være i vakuum. Altså at middelvindhastigheten V er null.

2.3.1 Horisontalbevegelse

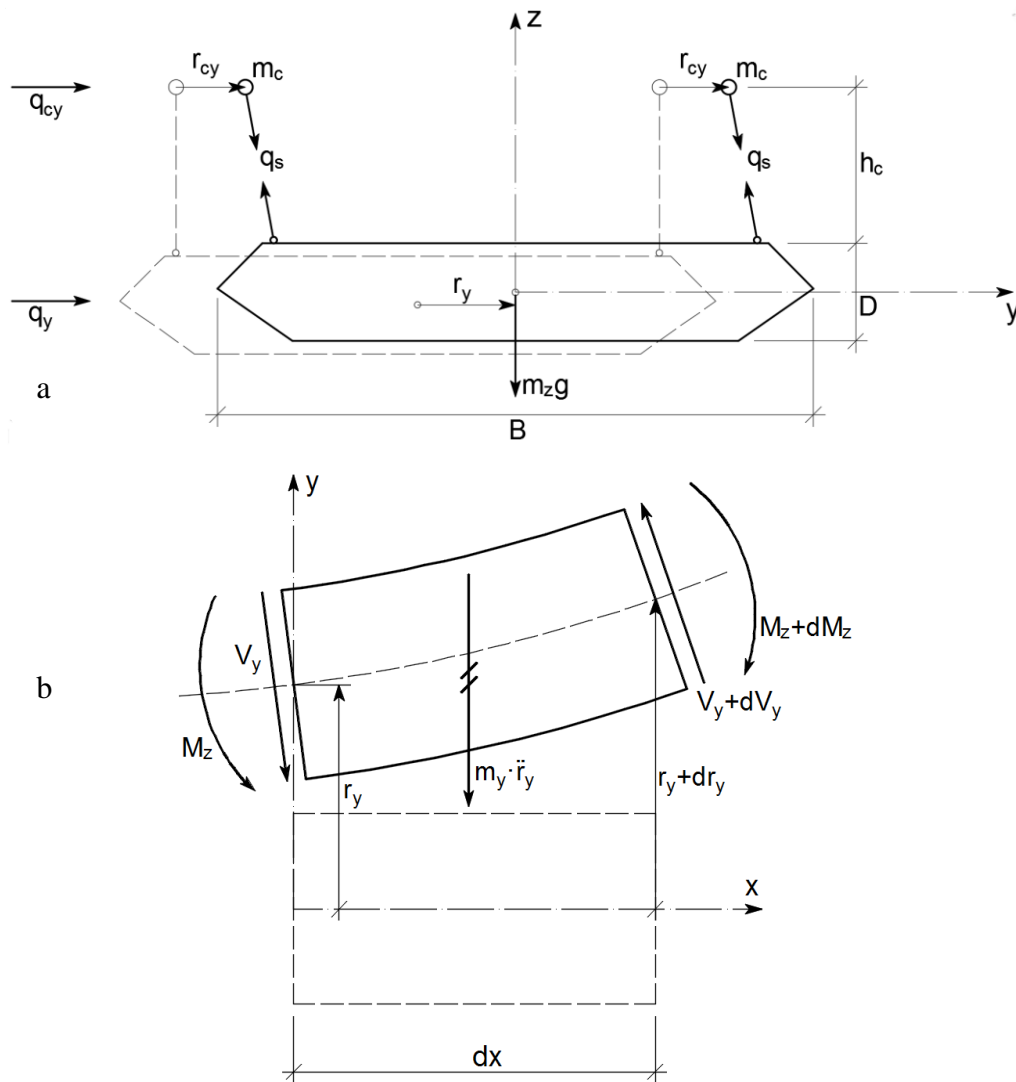
Horisontalbevegelsen illustreres i figur 2.5.a der bruene og kablene er påkjent av de dynamiske lastene $q_y(x, t)$ og $q_{cy}(x, t)$. Som det framgår av figuren er det viktig å skille på forskyvningen til kablene og forskyvningen til brubjelken, henholdsvis $r_{cy}(x, t)$ og $r_y(x, t)$. Vekten av brubjelken føres gjennom hengestagene til kabelen med lasten $q_s = m_z g / 2$. Denne lasten regnes, i likhet med de dynamiske lastene og responsen, per lengdeenhet og ikke som punktlaster fra hvert hengestag.

Ved å se på infinitesimal elementet dx av brubjelken i figur 2.5.b og benytte D'Alemberts prinsipp om øyeblikkelig likevekt oppnås følgende ligninger

$$\sum F_y = m_y \ddot{r}_y + c_y \dot{r}_y - \frac{d}{dx} V_y + 2q_s \frac{r_y - r_{cy}}{h_c} - q_y = 0 \quad (2.13)$$

$$\sum M = dM_z - V_y \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad V_y = \frac{d}{dx} M_z \quad (2.14)$$

der c_y er brubjelkens demping per lengdeenhet mot bevegelse i y -retning.



Figur 2.5 - Tverrsnitt og infinitesimal element y-retning

Ved hjelp av Naviers hypotese kan det vises at momentet som følger av bøyning om z-aksen kan uttrykkes slik [8]

$$M_z = -r_y'' EI_z \quad (2.15)$$

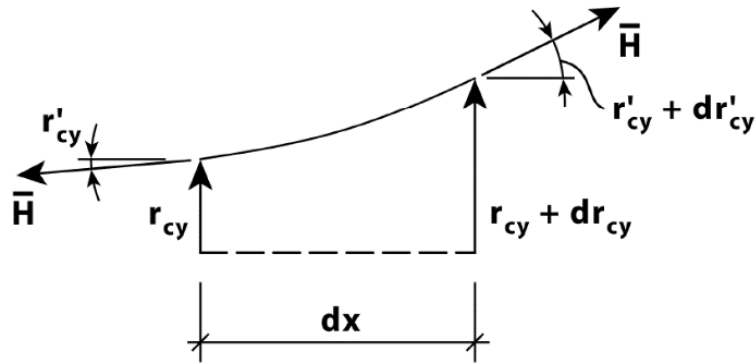
Ved å kombinere ligning 2.13, 2.14 og 2.15 kan brubjelkens likevekt i y-retning uttrykkes med følgende differensialligning

$$m_y \ddot{r}_y + c_y \dot{r}_y + EI_z \frac{d^4 r_y}{dx^4} + 2q_s \frac{r_y - r_{cy}}{h_c} = q_y \quad (2.16)$$

Ved å se på øyeblikkelig likevekt i y-retning etter D'Alemberts prinsipp på et tilsvarende element (se figur 2.6) til en av kablene oppnås følgende differensialligning

$$m_c \ddot{r}_{cy} + c_{cy} \dot{r}_{cy} - \bar{H} \frac{d^2 r_{cy}}{dx^2} - q_s \frac{r_y - r_{cy}}{h_c} = q_{cy} \quad (2.17)$$

der c_{cy} er kabelens demping av bevegelse i y-retning.



Figur 2.6 - Infinitesimal element av en kabel (ovenfra) [8]

For å kunne regne ut egensvingeformer og egenfrekvenser er det nødvendig å se på et tilfelle uten demping og uten last. Altså et tilfelle der bruene får svinge slik den ønsker, uten ytre påkjenninger. Dvs. at c_y , c_{cy} , $q_c(x, t)$ og $q_{cy}(x, t)$ alle er lik null. Antar så at løsningen kan beskrives med en harmonisk fourier serie. Her deles responsen $r(x, t)$ opp i en formfunksjon $\phi(x)$ gange en harmonisk del.

$$\begin{aligned} r_y(x, t) &= \phi_y(x) \cdot e^{i\omega t} \\ r_{cy}(x, t) &= \phi_{cy}(x) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \text{der} \quad \begin{aligned} \phi_y(x) &= \sum_{n=1}^N a_{y_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \phi_{cy}(x) &= \sum_{n=1}^N a_{cy_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Når dette er løsningen til et udempet og ubelastet system vil formfunksjonen $\phi(x)$ være egensvingeformen i den angitte retningen.

Ved å anta at kablene følger en grunn kurve kan høyden fra brubjelken til kabelen uttrykkes slik

$$h_c(x) = h_m + e_c - z_c(x) = h_m + e_c \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)^2 \quad (2.19)$$

der $z_c(x)$ er definert i ligning 2.5.

Innføring av ligning 2.18 og 2.19 i ligning 2.16 gir følgende likevektsligning for brubjelken.

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \left(EI_z \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 a_{y_n} + \frac{m_z g (a_{y_n} - a_{cy_n})}{h_m + e_c \left(1 - 2 \frac{x}{L} \right)^2} - m_y \omega^2 a_{y_n} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\} = 0 \quad (2.20)$$

Lignende for kabelen innføres ligning 2.18 og 2.19 i ligning 2.17 som gir følgende resultat.

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \left(2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_{cy_n} - \frac{m_z g (a_{y_n} - a_{cy_n})}{h_m + e_c \left(1 - 2 \frac{x}{L} \right)^2} - 2m_c \omega^2 a_{cy_n} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\} = 0 \quad (2.21)$$

Ved hjelp av Galerkins metode kan en, eller et koblet sett med, udempede og ubelastede harmoniske differensialligninger konverteres til et numerisk egenverdiproblem [8]. Denne metode tilhører en type beregningsmetoder kalt *methods of weighted residuals* (MWR) eller *metoder for vektete rester*. I MWR løses en lineær differensialligning $L(r(x, t)) = 0$, der L er en operator som indikerer en lineær ligning, gjennom en antatt tilnærmet løsning [10]

$$r_a(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \psi_n(x) \quad (2.22)$$

hvor $\psi_n(x)$ er valgte analytiske funksjoner og $a_n(t)$ er de ukjente. a_n reduseres til konstanter og tiden introduseres ved hjelp av Eulers formel

$$r_a(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x) e^{i\omega t} \right\} \quad (2.23)$$

Differensialligningen blir dermed redusert til et sett med algebraiske ligninger [10]. Den tilnærmede løsningen $r_a(x, t)$ settes så inn i $L(r(x, t))$ og gir

$$L(r_a(x, t)) = L \left(\sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x) e^{i\omega t} \right) = \sum_{n=1}^N a_n L(\psi_n(x) e^{i\omega t}) = R(x) \neq 0 \quad (2.24)$$

Som det framgår av ligning 2.24 blir svaret på differensialligningen $\neq 0$ når det brukes en antatt løsning, og resten $R(x)$ står igjen. Ved å integrere denne resten over domenet D (domenet kan for eksempel være lengden L eller arealet A) og tvinge den til å være lik 0 blir faktoren a_n den eneste ukjente og ligningen kan løses.

$$\int_D R(x) dD = \int_D \left(\sum_{n=1}^N a_n L(\psi_n(x) e^{i\omega t}) \right) dD = 0 \quad (2.25)$$

Integrasjonen fører til at $R(x)$ totalt sett er null over D , men kan likevel være positiv i noen deler av D og negativ i andre deler.

Ligning 2.25 gir kun en ligning med en ukjent. For å utvide dette til flere ligninger med flere ukjente kan ligning 2.25 ganges med en valgt funksjon $w_p(x)$ der $p = 1, 2, \dots, N$, og $w_p(x)$ er lineært uavhengig av hverandre for alle p . Det er dette som er den vektete funksjonen i MWR.

$$\int_D w_p(x)R(x)dD = \int_D w_p(x) \left(\sum_{n=1}^N a_n L(\psi_n(x)e^{i\omega t}) \right) dD = 0 \quad (2.26)$$

Det Galerkin foreslo var å velge den vektende funksjonen lik formfunksjonen som allerede var valgt [10]. Altså at $w_p(x) = \psi_n(x)$. Integrasjonen over D utføres så N ganger og gir dermed et sett med numeriske ligninger som kan presenteres på matriseform.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pn} & \cdots & A_{pN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{Nn} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

$$\text{der } A_{pn} = \int_D \psi_p(x) \cdot L(\psi_n(x)e^{i\omega t}) dD \quad (2.28)$$

Denne metoden anvendes så gjennom fortløpende å multiplisere ligning 2.20 med $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ for så å integrere over lengden L . Altså multipliserer først ligning 2.20 med $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{1\pi x}{L}\right)$, integrerer og utfører summasjon fra n til N . Multipliserer så ligning 2.20 med $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$, integrerer og utfører summasjon fra n til N , osv. Dette kan uttrykkes på følgende måte

$$\sum_{n=1}^N [(\alpha_{pn} + \gamma_{pn})a_{y_n} - \gamma_{pn}a_{cy_n} - \omega^2 \tilde{m}_{y_n} a_{y_n}] = 0 \quad (2.29)$$

der faktorene er definert i ligning 2.30 til 2.32

$$\alpha_{pn} = EI_z \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} EI_z \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\gamma_{pn} = \frac{m_z g}{e_c} \frac{2}{L} \int_0^L \left\{ \frac{\sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{1 + \frac{h_m}{e_c} - 4\frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)} \right\} dx \begin{cases} = 0 & \text{Hvis } p \text{ er partall} \\ & \text{og } n \text{ er oddetall} \\ = 0 & \text{Hvis } p \text{ er oddetall} \\ & \text{og } n \text{ er partall} \\ \neq 0 & \text{Ellers} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\tilde{m}_{y_n} = \tilde{m}_{y_p} = m_y \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} m_y & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.32)$$

Lignende for kabelen multipliseres ligning 2.21 fortløpende med $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ for så å integrere over lengden L . Da oppnås følgende ligninger

$$\sum_{n=1}^N [-\gamma_{pn} a_{y_n} + (\beta_{pn} + \gamma_{pn}) a_{cy_n} - \omega^2 \tilde{m}_{c_n} a_{cy_n}] = 0 \quad (2.33)$$

der faktorene er definert i ligning 2.31, 2.34 og 2.35.

$$\beta_{pn} = 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\tilde{m}_{cy_n} = \tilde{m}_{cy_p} = 2m_c \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 2m_c & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.35)$$

Ligning 2.29 og 2.33 kan presenteres på matriseform (på lignende måte som i ligning 2.27) og representerer slik et egenverdiproblem.

$$(\mathbf{K}_y - \omega^2 \mathbf{M}_y) \mathbf{a}_y = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

Der \mathbf{K}_y representerer stivhetsmatrisen

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_{11} & \cdots & \mathbf{Y}_{1n} & \cdots & \mathbf{Y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{Y}_{pn} & \vdots \\ \mathbf{Y}_{p1} & \cdots & \mathbf{\Omega}_{pn} & \cdots & \mathbf{Y}_{pN} \\ \vdots & \mathbf{Y}_{pn} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N1} & \cdots & \mathbf{Y}_{Np} & \cdots & \mathbf{\Omega}_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{\Omega}_{pn} = \begin{bmatrix} \alpha_{pn} - \gamma_{pn} & -\gamma_{pn} \\ -\gamma_{pn} & \beta_{pn} + \gamma_{pn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{pn} = \gamma_{pn} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{M}_y representerer massematrisen

$$\mathbf{M}_y = \text{diag}[\tilde{\mathbf{m}}_{y1} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{m}}_{yp} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{m}}_{yN}]$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_{yp} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{yp} & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{cyp} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

og \mathbf{a}_y er egenvektoren som representerer fourieramplitudene

$$\mathbf{a}_y = [\mathbf{a}_{y1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{yp} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{yN}]^T$$

$$\mathbf{a}_{yp} = [a_{yn} \quad a_{cyn}]^T \quad (2.39)$$

\mathbf{K}_y og \mathbf{M}_y er $N \times N$ -matriser og \mathbf{a}_y er en N lang vektor. Ved å løse egenverdi-problemet i ligning 2.36 burde dette gi N egenfrekvenser og N egenvektorer, men da elementene i både \mathbf{K}_y og \mathbf{M}_y inneholder 2×2 -matriser og elementene i \mathbf{a}_y inneholder 2×1 -vektorer gir dette en størrelse som er dobbelt så stor. Altså \mathbf{K}_y og \mathbf{M}_y er i realiteten $2N \times 2N$ -matriser og \mathbf{a}_y er en $2N$ lang vektor. Dette er fordi ligning 2.29 og 2.33 stokkes annenhver over hverandre i \mathbf{K}_y , \mathbf{M}_y og \mathbf{a}_y . Egenverdi-problemet i ligning 2.37 gir derfor $2N$ egenfrekvenser og $2N$ egenvektorer, dobbelt så mye som forespeilet. Konsekvensene av dette diskuteres nærmere i kapittel 3.3.

2.3.2 Vertikalbevegelse

Siden elastisiteten til hengestagene neglisjeres vil den dynamiske bevegelsen i z -retning (illustrert i figur 2.8.a) være lik for både kabelen og avstivningsbæreren. Dvs. at $r_z(x, t) = r_{cz}(x, t)$.

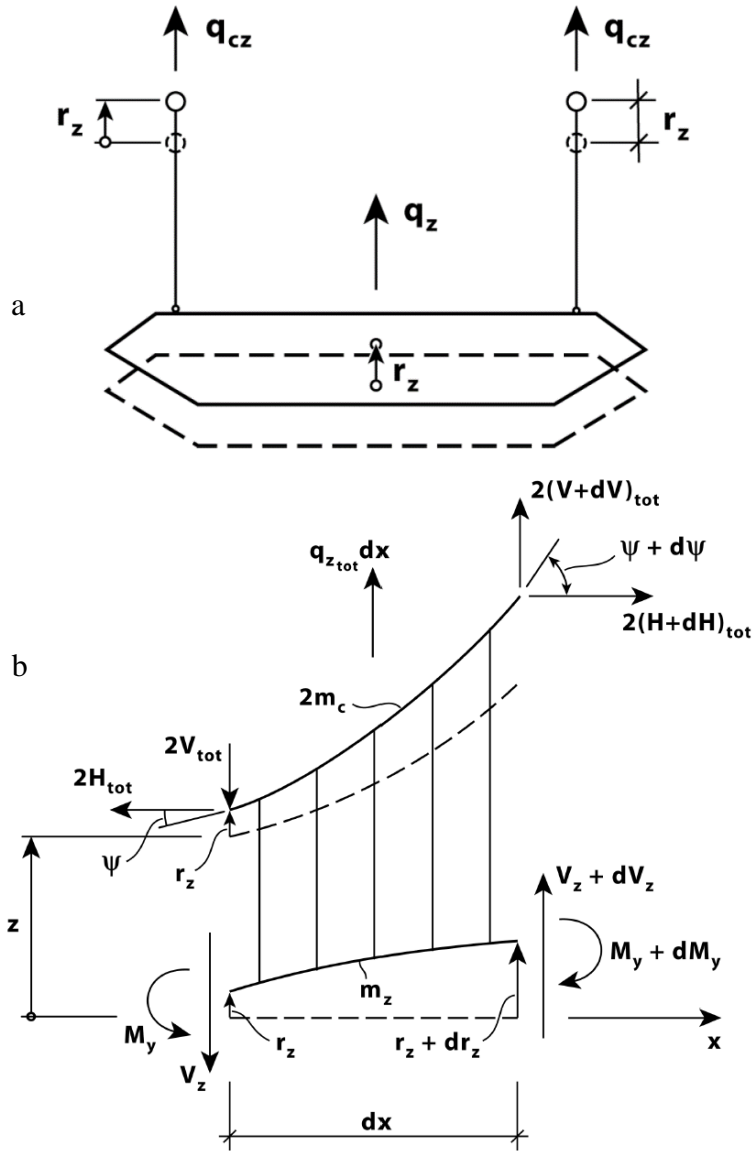
$q_{z_{tot}}(x, t)$ i figur 2.8.b inneholder både den dynamiske lasten på avstivningsbæreren $q_z(x, t)$ og den dynamiske lasten på en kabel $q_{cz}(x, t)$ (se figur 2.8.a).

Ved å se på infinitesimal elementet dx av brubjelken i figur 2.8.b og benytte D'Alemberts prinsipp om øyeblikkelig likevekt oppnås følgende ligning

$$\sum F_z = (2m_c ds + m_z dx) \cdot (\ddot{r}_z(x, t) + g) + c_z dx \dot{r}_z(x, t) - 2dV_{tot}(x, t) - dV_z(x, t) - q_{z_{tot}}(x, t) dx = 0 \quad (2.40)$$

der c_z er demping mot bevegelse i z -retning og

$$V_{tot}(x, t) = \bar{V}(x) + V(x, t) \quad \text{og} \quad q_{z_{tot}}(x, t) = q_z(x, t) + q_{cz}(x, t) \quad (2.41)$$



Figur 2.7 - Tverrsnitt og infinitesimalt element z-retning [8]

Fra figur 2.8.b kan det vises at

$$\tan \psi = \frac{V_{tot}(x, t)}{H_{tot}(t)} = \frac{\bar{V}(x) + V(x, t)}{\bar{H} + H(t)} = \frac{d}{dx} (z(x) + r_z(x, t)) = z'(x) + r_z'(x, t) \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow \bar{V}(x) + V(x, t) = (\bar{H} + H(t))(z'(x) + r_z'(x, t))$$

Hvor $\bar{V}(x) = \bar{H}z'(x)$ er den statiske delen og $V(x, t) = H(t)z'(x) + r_z'(x, t)(\bar{H} + H(t))$ er den dynamiske delen.

Innfører Naviers hypotese (se ligning 2.15) hvor $V_z(x, t) = \frac{d}{dx} M_y(x, t) = -EI_y r_z'''(x, t)$, samt ligning 2.42 i ligning 2.40. Ved å gjenkjenne at $2d\bar{V} = 2m_c g ds + m_z g dx$ pga. statisk likevekt oppnås bruens differensialligning for dynamisk bevegelse i z-retning.

$$\begin{aligned} \left(2m_c \frac{ds}{dx} + m_z\right) \ddot{r}_z(x, t) + c_z \dot{r}_z(x, t) - 2 \left(Hz''(x) + r_z''(x, t)(\bar{H} + H(t)) \right) \\ + EI_y r_z'''(x, t) = q_{z_{tot}}(x, t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ved å anta at kabelen følger en grunn kurve (se antagelser til ligning 2.5) kan det vises at den dynamiske delen av horisontalkraften er som følger [8]

$$H(t) = -\frac{E_c A_c}{l_e} \frac{8e_c}{L^2} \int_0^L r_z(x, t) dx \quad \text{der} \quad l_e = L \left[1 + 8 \left(\frac{e_c}{L} \right)^2 \right] \quad (2.44)$$

og at $ds/dx \approx 1$.

Ser på det ubelastede og udempede tilfelle og innfører ligning 2.44 i ligning 2.43. Ser også at variabelen z i figur 2.7.b er $h_r + h_c(x)$ (der h_r er vist i figur 2.8.a) som gir $z'' = 8 \left(e_c/L^2 \right)$.

Ved dette oppnås følgende

$$(2m_c + m_z) \ddot{r}_z(x, t) + \frac{128e_c^2 E_c A_c}{L^4} \int_0^L r_z(x, t) dx - 2\bar{H} r_z''(x, t) + EI_y r_z'''(x, t) = 0 \quad (2.45)$$

der E_c og A_c gjelder for én kabel og er identisk for begge kablene.

Antar så at løsningen kan beskrives med en harmonisk fourierserie. Her deles responsen $r(x, t)$ opp i en formfunksjon $\phi(x)$ gange en harmonisk del.

$$r_z(x, t) = \phi_z(x) e^{i\omega t} \quad \text{der} \quad \phi_z(x) = \sum_{n=1}^N a_{z_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.46)$$

Når dette er løsningen til et udempet og ubelastet system vil formfunksjonen $\phi(x)$ være egensvingeformen til den angitte retningen.

Ved å innføre ligning 2.46 i ligning 2.45 samt Galerkins metode (presentert i kapittel 2.3.1) gjennom forløpende å multiplisere ligning 2.45 med $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ for så å integrere over lengden L , oppnås følgende

$$\sum_{n=1}^N [(\kappa_{pn} + \lambda_{pn}) a_{z_n} + \mu_{pn} a_{z_n} - \omega^2 \tilde{m}_{z_n} a_{z_n}] = 0 \quad \text{der} \quad p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.47)$$

og

$$\kappa_{pn} = EI_y \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} EI_y \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\lambda_{pn} = 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\mu_{pn} = \frac{128e_c^2 E_c A_c}{L^4} \frac{2}{l_e} \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.50)$$

$$\mu_{pn} = \begin{cases} \left(\frac{32e_c}{\pi L} \right)^2 \frac{E_c A_c}{L \cdot l_e} \frac{1}{pn} & \text{for } p \& n = 1,3,5, \dots \\ 0 & \text{for } p \text{ eller } n = 2,4,6, \dots \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{zn} = \tilde{m}_{zp} = (2m_c + m_z) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.51)$$

$$\tilde{m}_{zn} = \tilde{m}_{zp} = \begin{cases} (2m_c + m_z) & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

Ligning 2.47 kan presenteres på matrisform og representerer slik et egenverdiproblem.

$$(\mathbf{K}_z - \omega^2 \mathbf{M}_z) \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

der

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} \kappa_{11} + \lambda_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \kappa_{np} + \lambda_{np} & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \kappa_{NN} + \lambda_{NN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} & \cdots & \mu_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{p1} & \cdots & \mu_{pn} & \cdots & \mu_{pN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1} & \cdots & \mu_{pN} & \cdots & \mu_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{z1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tilde{m}_{zp} & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \tilde{m}_{zN} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} a_{z1} \\ \vdots \\ a_{zp} \\ \vdots \\ a_{zN} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Ved å løse egenverdi problemet i ligning 2.52 oppnås N egenfrekvenser og N egenvektorer som inneholder forskyvningsamplitudene (fourieramplitudene) til egensvingeformene $\phi(x)$ i ligning 2.46.

2.3.3 Torsjon

Den dynamiske bevegelsen i torsjon illustreres i figur 2.8.a. Når elastisiteten til hengestagene neglisjeres vil forskyvningen til kabelen ved $y = b_c/2$ være $r_z(x, t) = (b_c/2) \cdot r_\theta(x, t)$ og ved $y = -b_c/2$ vil den være $r_z(x, t) = -(b_c/2) \cdot r_\theta(x, t)$. Det er derfor ikke nødvendig å skille på den dynamiske responsen til kablene og brubjelken. $q_\theta(x, t)$ representerer den dynamiske torsjonslasten pr. lengdeenhet som virker på skjærsenteret (SS) til avstivningsbæreren.

Den dynamiske likevekten i z-retning i ligning 2.42 er

$$V(x, t) = H(t)z'(x) + r_z'(x, t)(\bar{H} + H(t)) \quad (2.55)$$

Antar at $H(t) \ll \bar{H}$ og setter inn $r_z(x, t)$ for $y = b_c/2$ og $y = -b_c/2$ som gir

$$\begin{aligned} V_{y=\frac{b}{2}}(x, t) &= -|H(t)|z'(x) + \bar{H} \frac{b_c}{2} r_\theta'(x, t) \\ V_{y=-\frac{b}{2}}(x, t) &= |H(t)|z'(x) - \bar{H} \frac{b_c}{2} r_\theta'(x, t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ved å se på infinitesimal elementet dx av avstivningsbæreren i figur 2.8.b og benytte D'Alemberts prinsipp om øyeblikkelig likevekt oppnås følgende ligning

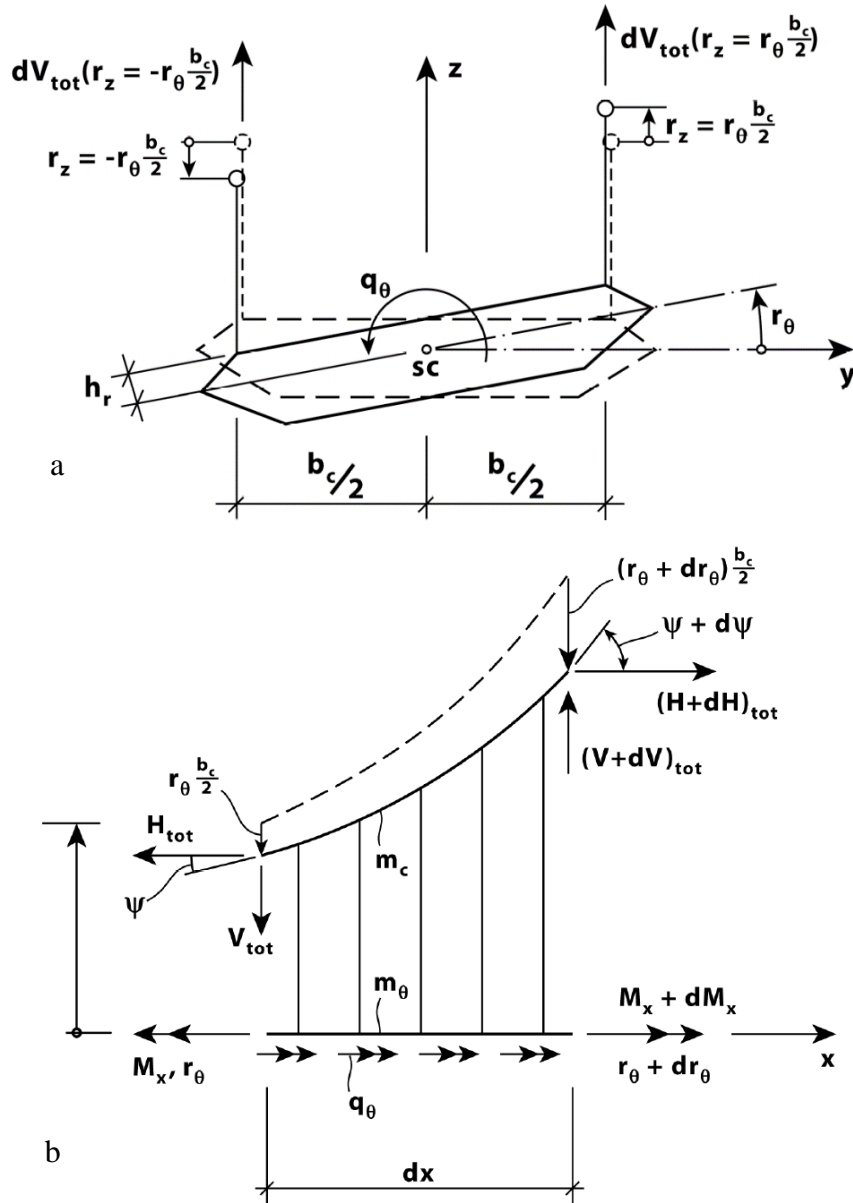
$$\begin{aligned} \sum M_\theta &= dM_x(x, t) + q_\theta(x, t)dx - c_\theta dx \dot{r}_\theta(x, t) \\ &\quad - \left(m_\theta dx + 2m_c ds \left(\frac{b_c}{2} \right)^2 \right) \ddot{r}_\theta(x, t) + dV_{tot_{y=\frac{b}{2}}}(x, t) \\ &\quad \cdot \left(\frac{b_c}{2} - r_\theta(x, t)h_r \right) - dV_{tot_{y=-\frac{b}{2}}}(x, t) \cdot \left(\frac{b_c}{2} + r_\theta(x, t)h_r \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

der c_θ er bruens demping mot torsjonsbevegelser og

$$dV_{tot_{y=\pm\frac{b}{2}}}(x, t) = d\bar{V} + dV_{y=\pm\frac{b}{2}}(x, t) = m_c g ds + \frac{m_z g}{2} dx + dV_{y=\pm\frac{b}{2}}(x, t) \quad (2.58)$$

Kombinerer ligning 2.56 til 2.58 som gir følgende

$$\begin{aligned} \left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \right) \ddot{r}_\theta(x, t) + c_\theta \dot{r}_\theta(x, t) + |H(t)|b_c z'' - \bar{H} \frac{b_c^2}{2} r_\theta''(x, t) \\ + (2m_c + m_z)gh_r r_\theta(x, t) - M'_x(x, t) = q_\theta(x, t) \end{aligned} \quad (2.59)$$



Figur 2.8 - Tverrsnitt og infinitesimal element - torsjon [8]

Innføring av $z'' = 8 \left(e_c / L^2 \right)$, $M'_x(x, t) = GI_t r''_\theta(x, t) - EI_w r''''_\theta(x, t)$ [8] og $|H(t)|$ fra ligning 2.44 gir

$$\begin{aligned}
 & \left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \right) \dot{r}_\theta(x, t) + c_\theta \dot{r}_\theta(x, t) + 32 \left(\frac{e_c b_c}{L^2} \right)^2 \frac{E_c A_c}{l_e} \int_0^L r_\theta(x, t) dx \\
 & - \bar{H} \frac{b_c^2}{2} r''_\theta(x, t) + (2m_c + m_z) g h_r r_\theta(x, t) - GI_t r''_\theta(x, t) \\
 & + EI_w r''''_\theta(x, t) = q_\theta(x, t)
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Ser på det udempede og ubelastede tilfellet og antar at løsningen kan beskrives med en harmonisk fourierserie. Her deles responsen $r(x, t)$ opp i en formfunksjon $\phi(x)$ ganget en harmonisk del.

$$r_{\theta}(x, t) = \phi_{\theta}(x) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{der} \quad \phi_{\theta}(x) = \sum_{n=1}^N a_{\theta_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.61)$$

Når dette er løsningen til et udempet og ubelastet system vil formfunksjonen $\phi(x)$ gi egensvingeformen for den angitte retningen.

Ved å innføre ligning 2.61 i ligning 2.60 samt Galerkins metode (presentert i kapittel 2.3.1) gjennom forløpende multiplikasjon av ligning 2.60 med $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ for så å integrere over lengden L , oppnås følgende

$$\sum_{n=1}^N [(\Omega_{pn} + \vartheta_{pn} + \nu_{pn})a_{\theta_n} + \chi_{pn}a_{\theta_n} - \omega^2 \tilde{m}_{\theta_n} a_{\theta_n}] = 0 \quad \text{der} \quad p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.62)$$

og

$$\Omega_{pn} = \left[GI_t + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI_w \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.63)$$

$$\Omega_{pn} = \begin{cases} \left[GI_t + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI_w \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

$$\vartheta_{pn} = \frac{\bar{H}b_c^2}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{\bar{H}b_c^2}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\nu_{pn} = (2m_c + m_z)gh_r \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.65)$$

$$\nu_{pn} = \begin{cases} (2m_c + m_z)gh_r & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

$$\chi_{pn} = 32 \left(\frac{e_c b_c}{L^2} \right)^2 \frac{E_c A_c}{l_e} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\chi_{pn} = \begin{cases} \left(\frac{16e_c b_c}{\pi L} \right)^2 \frac{E_c A_c}{L l_e} \frac{1}{pn} & \text{for } p \text{ \& } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } p \text{ eller } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\tilde{m}_{\theta_n} = \left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \right) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\tilde{m}_{\theta_n} = \begin{cases} \left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \right) & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.67)$$

Ligning 2.62 kan presenteres på matrisform og representerer slik et egenverdiproblem.

$$(\mathbf{K}_\theta - \omega^2 \mathbf{M}_\theta) \mathbf{a}_\theta = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

Der stivhetsmatrisen er

$$\mathbf{K}_\theta = \mathbf{K}_{\Omega\vartheta\nu} + \mathbf{K}_\chi$$

$$\mathbf{K}_{\Omega\vartheta\nu} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} + \vartheta_{11} + \nu_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & \Omega_{pn} + \vartheta_{pn} + \nu_{pn} & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & \Omega_{pn} + \vartheta_{pn} + \nu_{pn} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{K}_\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \cdots & \chi_{1n} & \cdots & \chi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{p1} & \cdots & \chi_{pn} & \cdots & \chi_{pN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N1} & \cdots & \chi_{Nn} & \cdots & \chi_{NN} \end{bmatrix}$$

og massematrisen og egenvektoren er

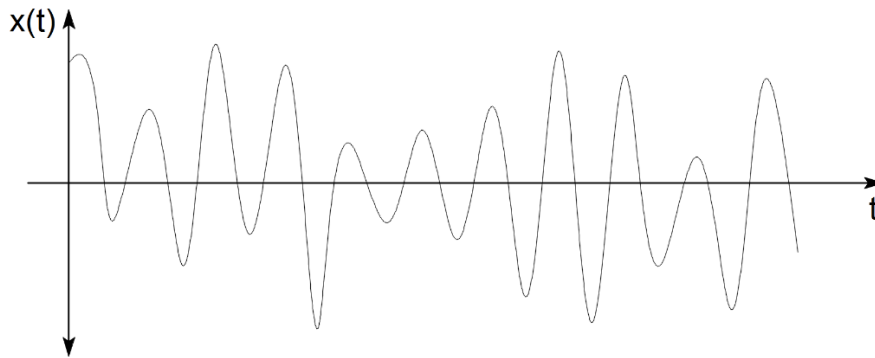
$$\mathbf{M}_\theta = \left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \right) \mathbf{I} \quad \mathbf{a}_\theta = \begin{bmatrix} a_{\theta_1} \\ \vdots \\ a_{\theta_p} \\ \vdots \\ a_{\theta_N} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

der \mathbf{I} er identitetsmatrisen.

Ved å løse egenverdiproblemet i ligning 2.68 oppnås N egenfrekvenser og N egenvektorer som inneholder forskyvningsamplitudene til eigensvingeformene $\phi(x)$ i ligning 2.61.

2.4 Auto-spektralitet

Som det ble nevnt innledningsvis i kapitlet skal responsen løses i frekvensplanet framfor tidsplanet. Da er det som kalles spektralitet svært sentralt. Ved senere utledning av den dynamiske responsen, både med og uten massedemper, er det uttrykket for spektralitet som er det endelige resultatet. Dette kalles responsspekteret. Ved hjelp av responsspekteret er det mulig å både simulere responsen i tidsplanet samt å finne maksimal respons. Først er det viktig å definere det teoretiske grunnlaget rundt spektralitet for så å benytte dette til å finne maksimal respons. For å definere spektralitet er det naturlig å ta utgangspunkt i en tidsavhengig prosess som vist i figur 2.9. Prosessen $x(t)$ kan representere vindturbulens, svingninger til en bru, en bølgehøyde eller en hvilken som helst prosess som varierer tilfeldig over tid.



Figur 2.9 - Irregulære svingninger over tid

Prosessens $x(t)$ kan beskrives som en sum av harmoniske komponenter

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N X_k(\omega_k, t) \quad (2.71)$$

hvor $\omega_k = k \cdot \Delta\omega$, $\Delta\omega = 2\pi/T$ og hver av de harmoniske komponentene kan skrives som

$$X_k(\omega_k, t) = c_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2.72)$$

der amplituden er uttrykt ved $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ og fasevinkelen $\varphi = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$. Konstantene a_k og b_k er definert som

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega_k t) \\ \sin(\omega_k t) \end{bmatrix} dt \quad (2.73)$$

Auto-spektralitet er frekvensdomenets svar på varians, og definisjonen av spektralitet til en frekvens ω_k er

$$S_x(\omega_k) = \frac{E[X_k^2]}{\Delta\omega} \quad (2.74)$$

Variansen til en harmonisk komponent X_k kan beregnes med formelen

$$E[X_k^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k^2 dt \quad (2.75)$$

og dermed kan spektralitet skrives

$$S_x(\omega_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T \cdot \Delta\omega} \int_0^T [c_k \cos(\omega_k t + \varphi)]^2 dt \quad (2.76)$$

Perioden til en av de harmoniske funksjonene er $T_k = 2\pi/\omega_k$, og dermed er $T = nT_k$. Hvis $n \rightarrow \infty$ vil spektralitet uttrykkes slik

$$S_x(\omega_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_k \cdot \Delta\omega} n \int_0^{T_k} \left[c_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \varphi_k\right) \right]^2 dt = \frac{c_k^2}{2\Delta\omega} \quad (2.77)$$

En alternativ måte å dele prosessen $x(t)$ opp i harmoniske komponenter er i et komplekst format

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k(\omega_k, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k(\omega_k) \cdot e^{i\omega_k t} \quad (2.78)$$

hvor d_k er den komplekse fourieramplituden definert ved

$$d_k = \frac{1}{2}(a_k - i \cdot b_k) \quad (2.79)$$

Finner så variansen av en kompleks komponent og dividerer på $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} \frac{E[X_k^* X_k]}{\Delta\omega} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(d_k^* e^{-i\omega_k t})(d_k e^{i\omega_k t})}{\Delta\omega} dt = \frac{d_k^* d_k}{\Delta\omega} = \dots \\ &= \frac{(a_k + i \cdot b_k)(a_k - i \cdot b_k)}{4\Delta\omega} = \frac{c_k^2}{4\Delta\omega} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Uttrykket i ligning 2.80 er halvparten av verdien i ligning 2.77. Dvs. at dette er den tosidige spektralitet til en frekvens som inneholder både positive og negative verdier av ω . Den tosidige spektralitet defineres dermed som

$$S_x(\pm\omega_k) = \frac{E[X_k^* X_k]}{\Delta\omega} = \frac{d_k^* d_k}{\Delta\omega} = \frac{c_k^2}{4\Delta\omega} \quad (2.81)$$

Når T og $N \rightarrow \infty$ blir både den ensidige og tosidige spektraltettheten kontinuerlige funksjoner.

Variansen for det ensidige og tosidige spekteret blir henholdsvis

$$\sigma_x^2 = \int_0^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.82)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\pm\omega) d\omega \quad (2.83)$$

Fourierintegralet er definert som

$$a_k(\omega_k) = \int_0^T x(t) e^{i\omega_k t} dt = T d_k \quad (2.84)$$

Ved hjelp av fourierintegralet kan den tosidige spektraltettheten til en frekvens skrives

$$S_x(\pm\omega_k) = \frac{d_k^* d_k}{\Delta\omega} = \frac{\left(\frac{a_k^*}{T}\right) \left(\frac{a_k}{T}\right)}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{2\pi T} a_k^* a_k \quad (2.85)$$

Dersom T og $N \rightarrow \infty$ blir spektraltettheten en kontinuerlig funksjon

$$S_x(\pm\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} a_k^* a_k \quad (2.86)$$

Det ensidige spekteret er dobbelt så stort som det tosidige spekteret og skrives derfor

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} a_k^* a_k \quad (2.87)$$

2.5 Tidsplansimulering

Å simulere hvordan et punkt på brua svinger med tiden henger tett sammen med teorien presentert i kapittel 2.4. Der vises det hvordan en funksjon $x(t)$ kan deles opp i en sum av harmoniske funksjoner, og hvordan spektraltettheten kan finnes ved å bruke amplitudene til frekvensene. Se ligning 2.77. Ved ett-punkts tidsplansimulering brukes spektraltettheten for å hente ut amplitudene til hver frekvens. Så lages harmoniske funksjoner for hver frekvens som summeres til en funksjon $x(t)$. Altså tas resultatet fra frekvensplanet til tidsplanet. Det er ikke mulig å simulere nøyaktig samme funksjon som man startet opp med. Dette er fordi det ikke er

mulig å finne igjen fasevinklene til de harmoniske funksjonene i spekteret. Skal fasevinkelen finnes må det settes opp et spekter for dette også. Selv om den simulerte prosessen ikke er identisk med den opprinnelige er den nyttig. Dersom inndelingen av frekvens $\Delta\omega$ er fin nok vil variansen til den simulerte prosessen være lik den opprinnelige. Det vil si at den simulerte prosessen inneholder de samme statistiske egenskapene som den opprinnelige.

Simuleringen starter ved å dele opp responsspekteret, altså spektraltettheten til responsen, og ta ut en verdi for hver frekvens. For frekvens ω_k er denne verdien $S_x(\omega_k)$. Videre omformes ligning 2.77 til å uttrykke amplituden til den harmoniske funksjonen til frekvensen ω_k

$$c_k = \sqrt{2S_x(\omega_k)\Delta\omega} \quad (2.88)$$

Dermed kan man finne den harmoniske funksjonen for hver frekvens med hjelp av ligning 2.72. Disse summeres så igjen til funksjonen $x(t)$, som beskrevet i ligning 2.71. Når simuleringen utføres velges fasevinklene φ_k tilfeldig mellom 0 og 2π .

2.6 Maksrespons

Når bruas respons antas å være en stokastisk variabel som er normalfordelt og stasjonær kan maksimal respons beregnes etter formelen

$$r_{maks} = \bar{r}(x_r) + r_{maks}(x_r, t) = \bar{r}(x_r) + k_p \sigma_r(x_r) \quad (2.89)$$

der $\bar{r}(x_r)$ er gjennomsnittsresponsen som for en hengebru vil være den statiske responsen. Siden rapporten fokuserer på dynamikk er det ikke beregnet noen statisk respons og gjennomsnittet er derfor lik null. Forventet maksimal respons over en tidsperiode T kan da skrives slik

$$r_{maks}(x_r) = k_p \sigma_r(x_r) \quad (2.90)$$

Der $\sigma_r(x_r)$ er standardavviket til responsen ved en bestemt plassering x_r langs bruspenet. Standardavviket er kvadratroten av variansen, og variansen kan regnes ut ved å integrere responsspekteret, som vist i ligning 2.82.

k_p kalles toppfaktoren. Denne faktoren er avhengig av prosessen som studeres og varierer derfor fra prosess til prosess. Vanligvis har k_p verdier fra 2 til 5 [2], og kan beregnes ved formelen

$$k_p = \sqrt{2\ln[f_r(0) \cdot T]} + \frac{\gamma}{\sqrt{2\ln[f_r(0) \cdot T]}} \quad (2.91)$$

der γ er en konstant som settes tilnærmet lik 0.5772 [2], mens $f_r(0)$ er en gjennomsnittlig frekvens for hvor ofte prosessen krysser null på vei opp. Altså fra minussiden til plussiden. Denne frekvensen kan beregnes med formelen

$$f_r(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_{\dot{r}}}{\sigma_r} \quad (2.92)$$

der $\sigma_{\dot{r}}$ er standardavviket til den deriverte responsen. Ved hjelp av fouriertransformasjon og definisjonen av spektraltetthet kan det enkelt vises hvordan man finner dette. Fouriertransformasjon av responsen kan forenklet skrives

$$r = a_r e^{i\omega t} \quad (2.93)$$

Deriverer med hensyn på tiden

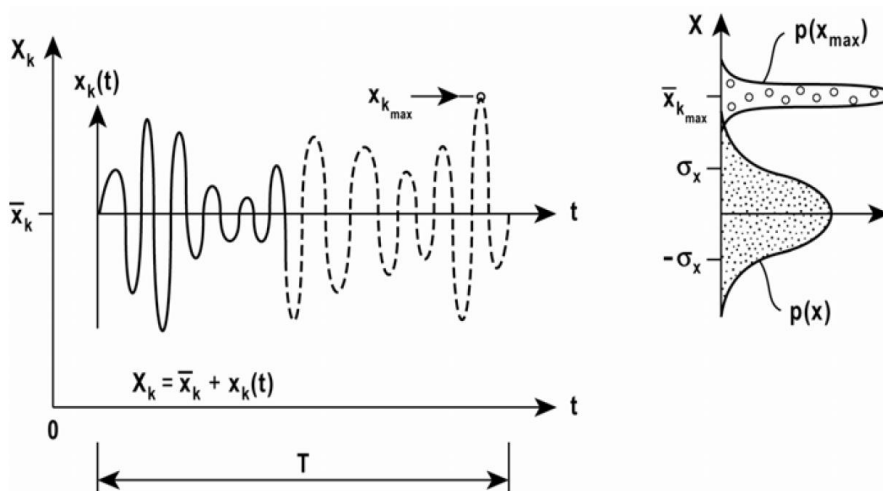
$$\dot{r} = a_r i\omega e^{i\omega t} \quad (2.94)$$

Bruker definisjon av responsspekter fra ligning 2.87

$$S_{\dot{r}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} [a_r i\omega]^* \cdot [a_r i\omega] = \omega^2 S_r \quad (2.95)$$

Da kan standardavviket til den deriverte prosessen regnes ut med formelen

$$\sigma_{\dot{r}} = \sqrt{\int_0^\infty S_{\dot{r}} d\omega} = \sqrt{\int_0^\infty \omega^2 S_r d\omega} \quad (2.96)$$



Figur 2.10 - Maksrespons fra tidsplansimulering [2]

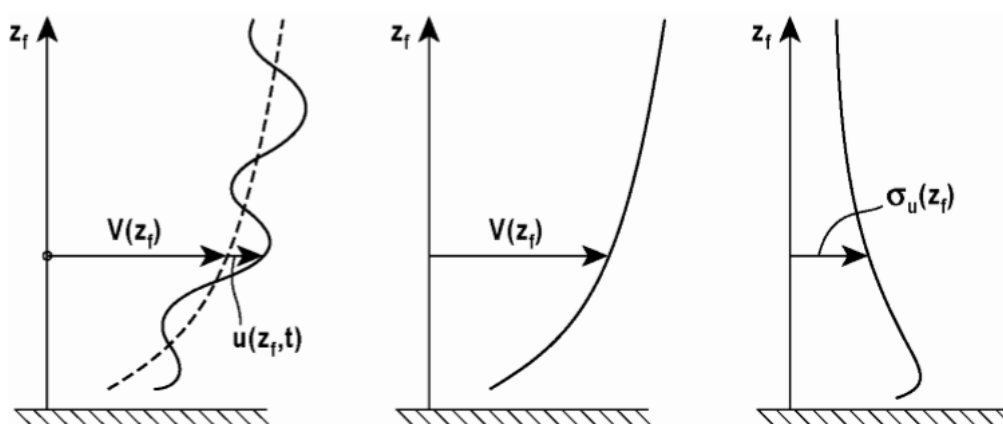
Denne beregningen gir som tidligere nevnt en forventet verdi av maksimal respons i en bestemt periode T . Prinsippet kan illustreres med figur 2.10

Hver simulering over en periode har en maksrespons. Når det utføres mange simuleringer vil maksimal respons opptre som en stokastisk variabel med en sannsynlighetsfordeling som vist i figur 2.10. Det betyr at den beregnede maksimale responsen ikke er den absolutte maksimale verdien prosessen kan ha, men et gjennomsnitt av ekstrepunkter fra et bestemt antall simuleringer av prosessen.

2.7 Vindteori

Nå er grunnlaget innen frekvensdomenet lagt og det er definert hvordan spektraltettheten kan benyttes for å hente ut den maksimale verdien til en stokastisk prosess. Utfordringen ligger nå i å finne en matematisk definisjon av vindlast og beregne responsspektrumet til en hengebru basert på dette. Som det ble nevnt i innledningen til kapittelet anses det som hensiktsmessig å gjennomgå grunnleggende vindteori først for så å definere denne som en buffeting-vindlast.

Vind er luftmasser i bevegelse. Bevegelsen skyldes temperaturforskjeller i atmosfæren som igjen skaper trykkforskjeller. Kald luft er tyngre enn varm luft og faller derfor mot bakken. Slik skaper den kalde luften et høytrykk. Der hvor jordoverflaten er varm vil luften varmes opp og stige. Dermed skapes det et lavtrykk i varmere områder. For å utjevne trykkforskjellen vil luftmassene bevege seg fra områder med høytrykk til områder med lavtrykk og det er denne prosessen som skaper vind [11].



Figur 2.11 - Vindhastighet og turbulensprofil [2]

Trykkforskjellen er opphavet til den såkalte trykkgradienten som virker relativt høyt oppe i atmosfæren og som ikke er påvirket av jordoverflatens ruhet. Området mellom gradienten og jordoverflaten kalles det atmosfæriske grenselaget. Her varierer vindhastigheten fra nesten null ved jordoverflaten og øker med høyden opp til trykkgradienten. Den lave vindhastigheten ved bakkenivå skyldes at vinden hindres av terrengets ruhet og topografi. Dette er også opphavet til turbulens i vindfeltet, og derfor er vinden mer turbulent nærmere bakken enn høyere oppe i atmosfæren. Figur 2.11 viser hvordan middelvindhastigheten $V(z_f)$ øker med høyden z_f og hvordan turbulensen $\sigma_u(z_f)$ minker med høyden. Variasjonen i turbulens u er her angitt med standardavviket som er et statistisk mål for spredning av verdier. Et større standardavvik vil derfor betyr mer turbulens. Som det framgår av figuren er turbulensens standardavvik størst nær bakken.

2.7.1 Definisjon av akser og komponenter

I aerodynamikk på bruer antas vindens hovedretning å virke vinkelrett på bruene. Derfor defineres vindstrømmens akse-system som et kartesisk koordinatsystem med aksene x_f, y_f og z_f , der x_f er definert normalt på konstruksjonens x -akse (se figur 2.12).

Vindhastighetsvektoren som virker i hovedretningen x_f deles opp i en middelvindkomponent V pluss en turbulenskomponent u som vist i figur 2.12. I tillegg virker turbulenskomponentene v og w i henholdsvis y_f - og z_f -retningen. Middelvindhastigheten er avhengig av posisjonen i rommet, mens turbulenskomponentene er avhengig av både tid og posisjon. Dermed kan det komplette vindfeltet beskrives med vektoren

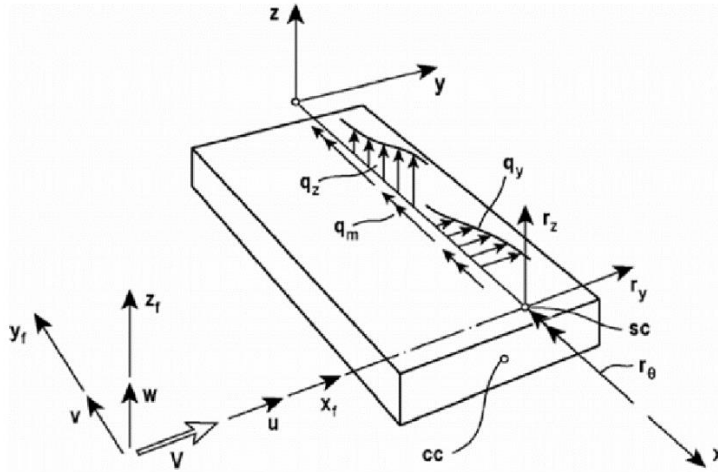
$$U(\mathbf{p}, t) = [V(\mathbf{p}) + u(\mathbf{p}, t), v(\mathbf{p}, t), w(\mathbf{p}, t)] \quad (2.97)$$

hvor \mathbf{p} er posisjonsvektoren

$$\mathbf{p} = [x_f, y_f, z_f] \quad (2.98)$$

Siden bruas overhøyde neglisjeres vil z_f være konstant og gitt av bruens høyde over terrenget. Når det i tillegg antas at vindretningen virker normalt på konstruksjonen kan vindhastighetsvektoren forenkles slik at den bare varierer i tid og langs bruspennet.

$$U(y_f, t) = [V + u(y_f, t), w(y_f, t)] \quad (2.99)$$



Figur 2.12 - Definisjon av akser og komponenter [2]

Vindhastigheten, som måles i meter per sekund, vil gi en trykkraft på bruene i Newton per meter langs bruspenet. Vindhastighetstrykket $q_{U(t)}$ beregnes etter Bernoulli's likning

$$q_{U(t)} = \frac{1}{2} \rho [U(t)]^2 \quad (2.100)$$

hvor ρ er luftens densitet. Denne settes vanligvis til $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ [9].

Vindhastighetstrykket vil medføre at bruene opplever ulike lasteffekter som er avhengig av middelvindhastigheten V . I kapittel 1 skiller man mellom tre typer dynamiske lasteffekter som vist i figur 1.1. Ved lave hastigheter kan det oppstå virvelavløsningsvingninger. Ved veldig høye hastigheter vil selve bruens svingninger samvirke med vindtrykket. Dette kalles bevegelsesinduserte lasteffekter. Ved så høye middelvindhastigheter kan det oppstå stabilitetsproblemer. Det vil si at en liten økning i vindhastigheten gir en stor responsøkning. Buffeting er den tredje typen lasteffekt og kommer av at vindstrømmen i seg selv inneholder turbulens. Altså varierer den totale lasten på grunn av trykkvariasjoner i vinden. Buffeting oppstår ofte i mellomliggende vindhastigheter. Man behandler disse tre aspektene hver for seg når man konstruerer bruer, selv om det i virkeligheten ikke vil være klare skiller imellom de. For eksempel kan bevegelsesinduserte effekter oppstå i både det som kan virke som virvelavløsningsproblemer eller buffeting.

Siden vindhastigheten i hovedretningen deles opp i en gjennomsnittsverdi og en varierende komponent vil også vindlasten og responsen deles opp tilsvarende. Derfor er det vanlig å skrive lastkomponentene som [9]

$$\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_y(x) \\ \bar{q}_z(x) \\ \bar{q}_\theta(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_y(x, t) \\ q_z(x, t) \\ q_\theta(x, t) \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

og responsen som

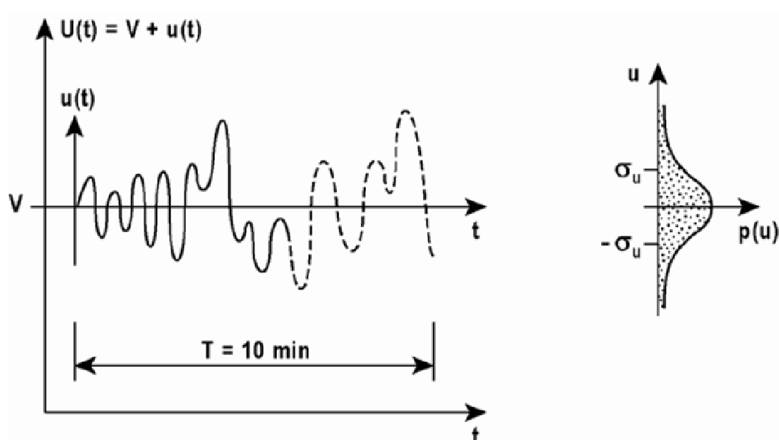
$$\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \bar{r}_y(x) \\ \bar{r}_z(x) \\ \bar{r}_\theta(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_y(x, t) \\ r_z(x, t) \\ r_\theta(x, t) \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

der symboler med strek over representerer den statiske middelveidien og symboler uten strek den varierende dynamiske komponenten.

2.7.2 Vindfeltets karakteristiske egenskaper

Siden vind er en tilfeldig prosess vil utfallet av målinger over tid variere. Derfor trenger man statistiske metoder for å kontrollere hvilke hastigheter og turbulenser som kan oppstå ved et bestemt sted. Slike irregulære prosesser kalles stokastisk prosesser, og ved å behandle vinden som en stokastisk variabel kan sannsynligheten for et bestemt utfall beregnes.

Vindfeltets statistiske egenskaper antas å være stasjonært og homogent. Det vil si at gjennomsnittet og standardavviket ikke endres i tid og rom. Det antas også at turbulenskomponentene u , v og w er normalfordelte, der u -komponenten har gjennomsnitt omkring middelvindhastigheten V , og v - og w -komponenten har null som gjennomsnitt. Figur 2.13 viser hvordan målinger av turbulens i hovedretningen kan gjøres om til en sannsynlighetsfordeling med gjennomsnittsverdi V .



Figur 2.13 - Sannsynlighetsfordeling av vind i hovedretningen [2]

Middelvindhastigheten for stedet som undersøkes kan finnes i standarder og tekniske spesifikasjoner. En teoretisk beskrivelse av vindhastigheten ved varierende høyde z_f er gitt ved [2]

$$\frac{V_{10}(z_f)}{V_{10}(10)} = \begin{cases} k_T \cdot \ln\left(\frac{z_f}{z_0}\right) & \text{for } z_f > z_{min} \\ k_T \cdot \ln\left(\frac{z_{min}}{z_0}\right) & \text{for } z_f < z_{min} \end{cases} \quad (2.103)$$

der indeksen 10 viser at målingene er utført over en periode på 10 minutter og k_T , z_{min} og z_0 er terrengavhengige faktorer. Ligning 2.103 er vist på venstre side av figur 2.11.

En annen viktig faktor ved bestemmelse av vindfeltets karakteristiske egenskaper er den integrale lengdeskalaen, også kalt den gjennomsnittlige virvelstørrelsen, som for u -komponenten beregnes slik [9].

$${}^{xf}L_u(z_f) = \begin{cases} {}^{xf}L_u(z_{f0}) \left(\frac{z_f}{z_{f0}}\right)^{0.3} & \text{for } z_f > z_{min} \\ {}^{xf}L_u(z_{f0}) \left(\frac{z_{min}}{z_{f0}}\right)^{0.3} & \text{for } z_f < z_{min} \end{cases} \quad (2.104)$$

der ${}^{xf}L_u(z_{f0})$ er en referanse-lengdeskala lik 100 m og z_{f0} er referansehøyden lik 10 m. For tilnærmet homogene strømningsforhold er lengdeskalaen for w -komponenten gitt som

$${}^{xf}L_w(z_f) = \frac{1}{12} {}^{xf}L_u(z_f) \quad (2.105)$$

Som det framgår av ligning 2.99 er det kun u - og w -komponenten som er av interesse, ikke v -komponenten. Det fokuseres derfor ikke noe videre på v -komponenten.

Det er foreslått flere matematiske uttrykk for å beskrive vindens turbulens i frekvensdomenet. Et av disse kalles *Kaimals auto-spektraltetthet for turbulenskomponenter* og er gitt ved [9]

$$\frac{f \cdot S_n(f)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n \cdot \hat{f}_n}{(1 + 1.5 \cdot A_n \cdot \hat{f}_n)^{5/3}} \quad (2.106)$$

der $\hat{f}_n = f \cdot {}^{xf}L_n/V$, f er frekvensen i Hz og $n = u$ eller w . A_u og A_w er konstanter som kan finnes i standarder og tekniske spesifikasjoner eller bestemmes ved å gjennomføre målinger på det aktuelle stedet. I denne rapporten er det foretrukket å benytte benevnning rad/s på frekvenser og turbulensspekteret definert derfor slik

$$\frac{S_n(\omega)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n^{x_f} L_u(z_f)}{2\pi V \left(1 + 1.5 A_n \frac{x_f L_u(z_f)}{2\pi V}\right)^{\frac{5}{3}}} \quad (2.107)$$

Ved beregning av den dynamiske responsen i frekvensplanet er også det normaliserte kospektrumet viktig. Dette er gitt ved [9]

$$\hat{C}_{o_{nn}}(\Delta s, f) = \frac{Re[S_{nn}(\Delta s, f)]}{S_n(f)} = \exp\left(-c_{ns} \frac{f \Delta s}{V}\right) \quad (2.108)$$

der $s = x_f, y_f, z_f$ og frekvensen f er gitt i Hz. For frekvenser oppgitt i rad/s kan det normaliserte kospektrumet skrives som

$$\hat{C}_{o_{nn}}(\Delta s, \omega) = \exp\left(-c_{ns} \frac{\omega \Delta s}{2\pi V}\right) \quad (2.109)$$

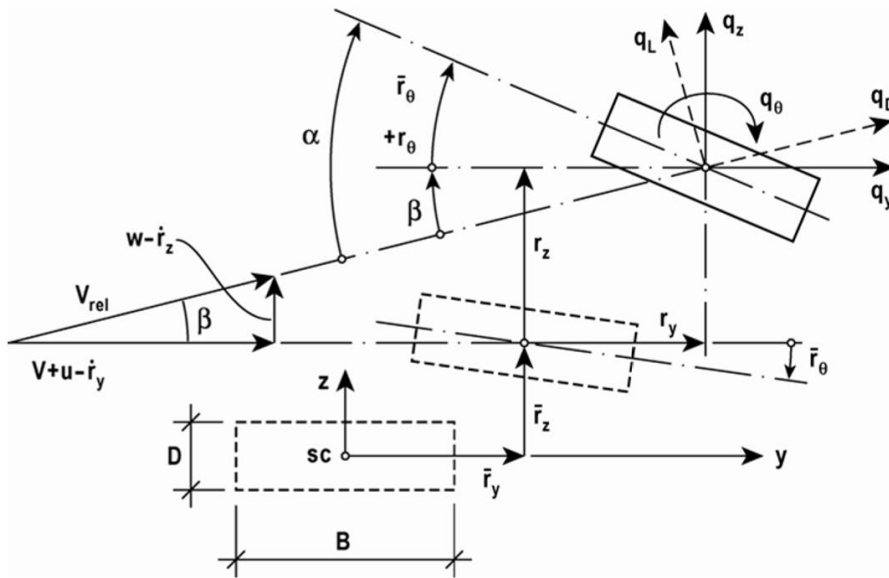
der Δs angir avstanden mellom de betraktete punkt.

2.8 Buffeting vindlast

Når vindlasten betraktes innenfor buffeting-teori ses det på effektene som skapes av vindens totale last inkludert last som kommer av konstruksjonens bevegelser. I tillegg tas det hensyn til vinkelen vindhastigheten påvirker bruene med. Den totale vindlasten som er relevant for bruer kommer av vindhastigheten og turbulensen beskrevet i likning 2.99. Lasten som kommer av konstruksjonens svingninger oppstår på grunn av hastigheten til forskyvningene, altså \dot{r}_y, \dot{r}_z og \dot{r}_θ . Figur 2.14 viser utgangspunktet for hvordan man kan betrakte vinden som last på en bru ved hjelp av buffeting teori.

Som det framgår av figuren vil middelvindhastigheten gi en initial forskyving og rotasjon. Dette er den statiske responsen beskrevet med \bar{r}_y, \bar{r}_z og \bar{r}_θ , og det er om denne posisjonen brubjelken svinger. Svingningene skyldes turbulenskomponentene u og w . Vindhastigheten inkludert konstruksjonens hastighet, altså den relative hastigheten mellom vinden og konstruksjonen, kan dekomponeres i y - og z -retning ved hjelp av Pytagoras.

$$V_{rel}^2 = (V + u - \dot{r}_y)^2 + (w - \dot{r}_z)^2 \quad (2.110)$$



Figur 2.14 - Tverrsnitt påvirket av buffeting vindlast [2]

Videre kan vinkelen til hastighetsvektoren, se figur 2.14, finnes ved

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{w - r_z}{V + u - \dot{r}_y} \right) \quad (2.111)$$

I dette tilfellet kan det antas at vinklene og rotasjonene er relativt små og at middelvindhastigheten er mye større enn turbulenskomponentene. Dermed kan uttrykket i ligning 2.110 og 2.111 forenkles til

$$V_{rel}^2 = V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y \quad (2.112)$$

$$\beta = \frac{w - r_z}{V} \quad (2.113)$$

Vindhastighetstrykket i retningen til V_{rel} virker på tverrsnittets skjærsenter og er ved hjelp av Bernoulli's likning (se 2.100) gitt ved

$$\begin{bmatrix} q_D(x, t) \\ q_L(x, t) \\ q_M(x, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 \cdot \begin{bmatrix} D \cdot C_D(\alpha) \\ B \cdot C_L(\alpha) \\ B^2 \cdot C_M(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

der C_D , C_L og C_M er lastkoeffisienter som normaliseres med konstruksjonenes dimensjoner D og B [12]. De senkede bokstavene D , L og M står for Drag, Løft og Moment. Lastkoeffisientene er avhengige av vinkelen α mellom V_{rel} og konstruksjonenes rotasjon (se figur 2.14). α er gitt ved

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha_f = \bar{r}_\theta + r_\theta + \frac{w - r_z}{V} \quad (2.115)$$

Lastkoeffisientene vil altså variere når konstruksjonen roterer. Som en forenkling beregnes disse som lineære funksjoner om en gjennomsnittsvinkel $\bar{\alpha}$ og skrives

$$C_i(\alpha) = C_i(\bar{\alpha}) + \alpha_f \cdot C'_i(\bar{\alpha}) \quad (2.116)$$

hvor $i = D, L, M$ og $C'_i(\bar{\alpha})$ er stigningen til lastkoeffisientens funksjon ved vinkelens middelverdi. For å gjøre skrivearbeidet enklere betegnes lastkoeffisientene

$$C_i(\bar{\alpha}) = \bar{C}_i \quad \text{og} \quad C'_i(\bar{\alpha}) = C'_i \quad (2.117)$$

For å bestemme vindlasten i konstruksjonens aksesystem benyttes en transformasjonsmatrise.

$$\begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_L \\ q_D \\ q_M \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Der det antas små vinkler slik at $\cos(\beta) \approx 1$ og $\sin(\beta) \approx \beta$. Kombinerer ligning 2.114 og 2.118 og ser bort fra ledd som antas å være små. Da kan det totale vindhastighetstrykket i konstruksjonens aksesystem defineres ved

$$\begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \rho V \left(\frac{V}{2} + u - \dot{r}_y \right) \left\{ \begin{bmatrix} D\bar{C}_D \\ B\bar{C}_L \\ B^2\bar{C}_M \end{bmatrix} + \left(r_\theta + \frac{w - \dot{r}_z}{V} \right) \begin{bmatrix} DC'_D \\ BC'_L \\ B^2C'_M \end{bmatrix} + \frac{w - \dot{r}_z}{V} \begin{bmatrix} -B\bar{C}_L \\ D\bar{C}_D \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.119)$$

Som på matriseform kan skrives

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v} + \mathbf{C}_{ae} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \cdot \mathbf{r} \quad (2.120)$$

hvor

$$\mathbf{v}(x, t) = [u \quad w]^T \quad (2.121)$$

$$\mathbf{r}(x, t) = [r_y \quad r_z \quad r_\theta]^T \quad (2.122)$$

$$\mathbf{q}_{tot}(x, t) = \begin{bmatrix} \bar{q}_y(x) \\ \bar{q}_z(x) \\ \bar{q}_\theta(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_y(x, t) \\ q_z(x, t) \\ q_\theta(x, t) \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$\bar{\mathbf{q}}(x) = \begin{bmatrix} \bar{q}_y(x) \\ \bar{q}_z(x) \\ \bar{q}_\theta(x) \end{bmatrix} = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} (D/B)\bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ B\bar{C}_M \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

$$\mathbf{B}_q(x) = \frac{\rho VB}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) \\ 2\bar{C}_L & (C'_L + (D/B)\bar{C}_D) \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

$$\mathbf{C}_{ae}(x) = -\frac{\rho VB}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) & 0 \\ 2\bar{C}_L & (C'_L + (D/B)\bar{C}_D) & 0 \\ 2B\bar{C}_M & BC'_M & 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

$$\mathbf{K}_{ae}(x) = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (D/B)C'_D \\ 0 & 0 & C'_L \\ 0 & 0 & BC'_M \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

$\mathbf{B}_q \mathbf{v}$ er den dynamiske lasten, mens $\mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{r}}$ og $\mathbf{K}_{ae} \mathbf{r}$ er bevegelsesinduserte laster på grunn av konstruksjonens svingninger. For å forbedre buffeting teorien byttes innholdet i \mathbf{C}_{ae} og \mathbf{K}_{ae} ut med aerodynamiske deriverte (AD-er). Disse er ofte bestemt ved vindtunelltester. For kvasi-statiske beregninger er de aerodynamiske deriverte oppgitt ved

$$\begin{bmatrix} P_1^* & H_1^* & A_1^* \\ P_2^* & H_2^* & A_2^* \\ P_3^* & H_3^* & A_3^* \\ P_4^* & H_4^* & A_4^* \\ P_5^* & H_5^* & A_5^* \\ P_6^* & H_6^* & A_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\bar{C}_D \frac{D}{B} \frac{V}{B\omega_i(V)} & -\left(C'_L + \bar{C}_D \frac{D}{B}\right) \frac{V}{B\omega_i(V)} & -C'_M \frac{V}{B\omega_i(V)} \\ 0 & 0 & 0 \\ C'_D \frac{D}{B} \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 & C'_L \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 & C'_M \left(\frac{V}{B\omega_i(V)}\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\bar{C}_L - C'_D \frac{D}{B}\right) \frac{V}{B\omega_i(V)} & -2\bar{C}_L \frac{V}{B\omega_i(V)} & -2\bar{C}_M \frac{V}{B\omega_i(V)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

Koeffisientene i matrisen deles opp i en aerodynamisk demping- og stivhetsmatrise

$$\hat{\mathbf{C}}_{ae} = \begin{bmatrix} P_1^* & P_5^* & BP_2^* \\ H_5^* & H_1^* & BH_2^* \\ BA_5^* & BA_1^* & B^2 A_2^* \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{\mathbf{K}}_{ae} = \begin{bmatrix} P_4^* & P_6^* & BP_3^* \\ H_6^* & H_4^* & BH_3^* \\ BA_6^* & BA_4^* & B^2 A_3^* \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Verdiene i matrisene er dimensjonsløse og for å finne \mathbf{C}_{ae} og \mathbf{K}_{ae} utføres multiplikasjonene

$$\mathbf{C}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \cdot \omega_i(V) \cdot \hat{\mathbf{C}}_{ae} \quad \text{og} \quad \mathbf{K}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \cdot [\omega_i(V)]^2 \cdot \hat{\mathbf{K}}_{ae} \quad (2.130)$$

Som det kan ses fra formel 2.128 er AD-ene blant annet avhengig av vindhastighet, egenfrekvens og tverrsnittet. Dette kommer fram i faktoren $V/B\omega_i(V)$, som kalles den reduserte vindhastigheten. Den reduserte vindhastigheten fører i utgangspunktet til at responsberegninger som inneholder aerodynamiske deriverte krever iterasjoner. Grunnen til

dette er at når $V = 0$ vil egenfrekvensen bare være avhengig av systemets stivhet. Men når $V \neq 0$ vil de aerodynamiske deriverte påvirke \mathbf{K}_{ae} og dermed endre systemets stivhet. Når stivheten endres vil også egenfrekvensen endres. Med endret egenfrekvens endres også de aerodynamiske deriverte igjen. Dermed endres stivheten på nytt og nye egenfrekvensen regnes ut igjen. Iterasjoner er derfor nødvendig. Ved beregninger som ikke er i nærheten av en stabilitetsgrense vil ikke dette være av betydning. I denne oppgaven er vindhastigheten godt under kritisk vindhastighet, som er hastigheten ved en stabilitetsgrense. Følgelig trengs det ikke iterasjoner.

2.9 Buffeting responsberegninger

Einar N. Strømmen presenterer i boken *Theory of Bridge Aerodynamics* tre måter å beregne responsen i frekvensplanet [2]:

- En svingeform med en responskomponent
- En svingeform med tre responskomponenter
- Multi-svingeform

En svingeform med en responskomponent antar at hver svingeform kun har en responskomponent og at de andre responskomponentene er relativt sett svært små, eller lik null. Altså at

$$\boldsymbol{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \boldsymbol{\phi}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \boldsymbol{\phi}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_\theta \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

der indeks i angir svingeformens nummerering. Det betyr at skjærsenter og nøytralakse må sammenfalle slik at det ikke er noen kobling mellom responskomponentene.

En svingeform med tre responskomponenter derimot antar at hver svingeform har tre responskomponenter (se figur 2.15).

$$\boldsymbol{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{yi} \\ \phi_{zi} \\ \phi_{\theta i} \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

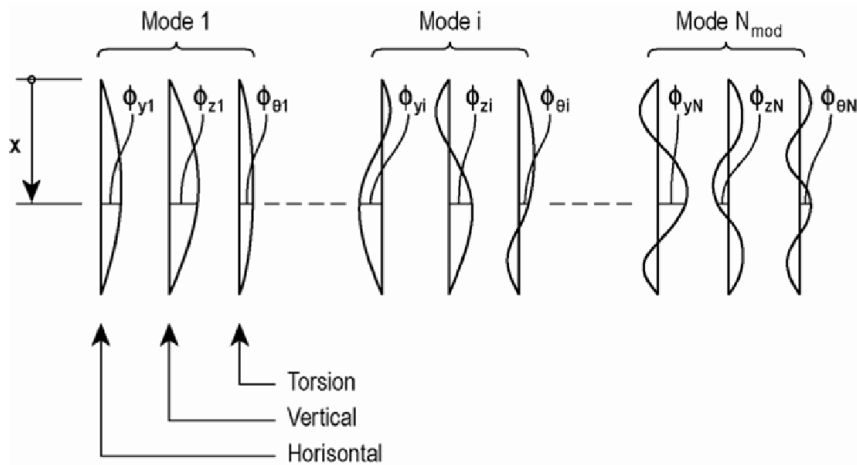
Det er altså en kobling mellom responskomponentene som betyr at skjærsenter og nøytralakse ikke sammenfaller. For både en svingeform med en responskomponent og en svingeform med

tre responskomponenter er det antatt at egenfrekvensene er godt nok spredt på frekvensaksen slik at svingeformene ikke påvirker hverandre.

En multi-svingeform-metode tar hensyn til alle svingeformene (alle som er valgt) på en gang (se figur 2.15).

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{y1} & & \phi_{yi} & & \phi_{yN_{mod}} \\ \phi_{z1} & \cdots & \phi_{zi} & \cdots & \phi_{zN_{mod}} \\ \phi_{\theta 1} & & \phi_{\theta i} & & \phi_{\theta N_{mod}} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

der N_{mod} er antall svingeformer som er valgt å bli inkludert i beregningene. Denne metoden kan benyttes for både sammenfallende, og ikke-sammenfallende skjærsenter og nøytralakse. Det er heller ikke nødvendig at egenfrekvensene er godt nok spredt på frekvensaksen.



Figur 2.15 - Egensvingeformer [2]

Ved utledning av utrykkene som benyttes ved beregning av egensvingeformer og egenfrekvenser i kapittel 2.3 er en av antagelsene at skjærsenteret og nøytralaksen sammenfaller. Det er altså ingen kobling mellom responskomponentene. Da formålet med denne rapporten i hovedsak er læring antas det også at egenfrekvensene er godt nok spredt på frekvensaksen og metoden med en svingeform og en responskomponent benyttes derfor.

Når egensvingeformen $\phi_i(x)$, egenfrekvensen ω_i og dempingsforholdet ζ_i er kjent, kan responsen til en svingeform uttrykkes som

$$r(x, t) = \phi_i(x) \cdot \eta_i(t) \quad (2.134)$$

og den dynamiske lasten skrives

$$q_{tot}(x, t) = q(x, t) + q_{ae}(x, t, r, \dot{r}, \ddot{r}) \quad (2.135)$$

Dette gir den modal bevegelseslikningen for en svingeform i

$$\tilde{M}_i \cdot \ddot{\eta}_i(t) + \tilde{C}_i \cdot \dot{\eta}_i(t) + \tilde{K}_i \cdot \eta_i(t) = \tilde{Q}_i(t) + \tilde{Q}_{ae_i}(t, \eta_i, \dot{\eta}_i, \ddot{\eta}_i) \quad (2.136)$$

hvor de modale faktorene er

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_i \\ \tilde{C}_i \\ \tilde{K}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_L \phi_i^2 m dx \\ 2\tilde{M}_i \omega_i \zeta_i \\ \omega_i^2 \tilde{M}_i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i(t) \\ \tilde{Q}_{ae_i}(t, \eta_i, \dot{\eta}_i, \ddot{\eta}_i) \end{bmatrix} = \int_{L_{exp}} \phi_i \cdot \begin{bmatrix} q \\ q_{ae} \end{bmatrix} dx \quad (2.137)$$

For å ta bevegelseslikningen fra tidsplanet til frekvensplanet benyttes fouriertransformasjon som gir den modale frekvensavhengige bevegelseslikningen

$$(-\tilde{M}_i \omega^2 + \tilde{C}_i i \omega + \tilde{K}_i) \cdot a_{\eta_i}(\omega) = a_{\tilde{Q}_i}(\omega) + a_{\tilde{Q}_{ae_i}}(\omega, \eta_i, \dot{\eta}_i, \ddot{\eta}_i) \quad (2.138)$$

Der fourieramplituden til de bevegelsesinduserte kreftene er gitt ved

$$a_{\tilde{Q}_{ae_i}}(\omega, \eta_i, \dot{\eta}_i, \ddot{\eta}_i) = (-\tilde{M}_{ae_i} \omega^2 + \tilde{C}_{ae_i} i \omega + \tilde{K}_{ae_i}) \cdot a_{\eta_i} \quad (2.139)$$

Konstruksjonens aerodynamiske tverrsnittsparemetre er

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{ae_i} \\ \tilde{C}_{ae_i} \\ \tilde{K}_{ae_i} \end{bmatrix} = \int_{L_{exp}} \phi_i^2 \begin{bmatrix} m_{ae} \\ c_{ae} \\ k_{ae} \end{bmatrix} dx \quad (2.140)$$

der m_{ae} , c_{ae} og k_{ae} er kjente koeffisienter. Ved å omformulere likning 2.138 finnes uttrykket

$$a_{\eta_i}(\omega) = \frac{\hat{H}_i(\omega)}{\tilde{K}_i} \cdot a_{\tilde{Q}_i}(\omega) \quad (2.141)$$

der $\hat{H}_i(\omega)$ er den dimensjonsløse frekvens-respons-funksjonen gitt ved

$$\hat{H}_i(\omega) = \left[1 - \kappa_{ae_i} - (1 - \mu_{ae_i}) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 + 2i(\zeta_i - \zeta_{ae_i}) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) \right]^{-1} \quad (2.142)$$

hvor $\kappa_{ae_i} = \tilde{K}_{ae_i} / \omega_i^2 \tilde{M}_i$, $\mu_{ae_i} = \tilde{M}_{ae_i} / \tilde{M}_i$, $\zeta_{ae_i} = \tilde{C}_{ae_i} / (2\omega_i \tilde{M}_i)$ og ω er lastfrekvensen. Responsen i frekvensdomenet finnes ved bruk av spektraltetthet. Ligning 2.87 gir det modale responspekteret som

$$S_{\eta_i}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \cdot (a_{\eta_i}^* \cdot a_{\eta_i}) \Rightarrow S_{\eta_i}(\omega) = \frac{|\hat{H}_i(\omega)|^2}{\tilde{K}_i^2} \cdot S_{\tilde{Q}_i}(\omega) \quad (2.143)$$

Fouriertransformasjon av likning 2.134 sammen med definisjonen av spektraltetthet gir sammenhengen mellom det modale lastspekteret og responspekteret

$$S_{r_i}(x_r, \omega) = \phi_i^2(x_r) \cdot S_{\eta_i}(\omega) = \phi_i^2(x_r) \cdot \frac{|\widehat{H}_i(\omega)|^2}{\bar{K}_i^2} \cdot S_{\tilde{Q}_i}(\omega) \quad (2.144)$$

der x_r er punktet på x -aksen hvor responsspektrumet beregnes. Nå er uttrykket for responsen i frekvensplanet funnet ved hjelp av metoden for en svingform med en responskomponent. Det som gjenstår er å finne et uttrykk for det modale lastspekteret samt å tilpasse frekvens-respons-funksjonen til buffeting teori. Det dynamiske lastbidraget i buffeting er gitt i likning 2.12 og 2.125. Altså brukes $\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{v}$ til å finne spektraltettheten $S_{\tilde{Q}_i}(\omega)$.

Som vist i likning 2.137 kan den modale lasten beregnes som

$$\tilde{Q}_m = \int_{L_{exp}} \phi_m(x) \cdot q_m(x, t) dx \quad \text{hvor } m = y, z \text{ eller } \theta \quad (2.145)$$

Fouriertransformasjon på begge sider gir da

$$a_{\tilde{Q}_m}(\omega) = \int_{L_{exp}} \phi_m(x) \cdot a_{q_m}(x, \omega) dx \quad (2.146)$$

Definisjon av spektraltettheten til den modale lasten er gitt ved uttrykket

$$S_{\tilde{Q}_m}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (a_{\tilde{Q}_m}^* \cdot a_{\tilde{Q}_m}) \quad (2.147)$$

Ved å sette inn fourieramplitudene for lasten og anta at turbulensens kryss-spekter kan neglisjeres vil man komme fram til uttrykket

$$S_{\tilde{Q}_m}(\omega) = \left[\frac{\rho V^2 B}{2} \cdot J_m(\omega) \right]^2 \quad (2.148)$$

der $J_m(\omega)$ kalles *Joint Acceptance Function* (JAF) som for y -, z - og θ -retning er gitt ved

$$J_y^2(\omega) = \iint_{L_{exp}} \phi_y(x_1) \cdot \phi_y(x_2) \cdot \left\{ \left(2 \frac{D}{B} \bar{C}_D I_u \right)^2 \cdot \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} + \left[\left(\frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \right) I_w \right]^2 \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} \right\} dx_1 dx_2 \quad (2.149)$$

$$J_z^2(\omega) = \iint_{L_{exp}} \phi_z(x_1) \cdot \phi_z(x_2) \cdot \left\{ (2 \bar{C}_L I_u)^2 \cdot \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} + \left[\left(C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D \right) I_w \right]^2 \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} \right\} dx_1 dx_2 \quad (2.150)$$

$$J_\theta^2(\omega) = \iint_{L_{exp}} \phi_\theta(x_1) \cdot \phi_\theta(x_2) \cdot \left\{ (2 \bar{C}_M I_u)^2 \cdot \frac{S_{uu}(\Delta x, \omega)}{\sigma_u^2} + (C'_M I_w)^2 \frac{S_{ww}(\Delta x, \omega)}{\sigma_w^2} \right\} dx_1 dx_2 \quad (2.151)$$

hvor $I_n(z_f) = \sigma_n(z_f)/V(z_f)$ er turbulensintensiteten for retning $n = u, v, w$. Ved å videre bruke at $\tilde{K}_m = \omega_m^2 \cdot \tilde{M}_m$ og at $\tilde{M}_m = \tilde{m}_y \int_L \phi_m^2 dx$ kan standardavviket til de ulike responskomponentene skrives som

$$\sigma_m(x_r) = |\phi_m(x_r)| \cdot \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_m} \cdot \left(\frac{V}{B\omega_m}\right)^2 \left[\int_0^\infty |\hat{H}_m(\omega)|^2 \cdot \hat{J}_m^2(\omega) d\omega \right]^{1/2} \quad (2.152)$$

hvor den normaliserte JAF uttrykkes slik

$$\hat{J}_m(\omega) = J_m / \int_L \phi_m^2 dx \quad (2.153)$$

og frekvens-respons-funksjonen slik

$$\hat{H}_m(\omega) = \left[1 - \kappa_{ae_m} - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + 2i(\zeta_m - \zeta_{ae_m}) \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) \right]^{-1} \quad (2.154)$$

Faktorene i de ulike retningene er gitt ved

$$\begin{bmatrix} \kappa_{ae_y} \\ \zeta_{ae_y} \end{bmatrix} = \frac{\rho B^2}{\tilde{m}_y} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_y^2 dx}{\int_L \phi_y^2 dx} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} P_4^* \\ \frac{1}{4} P_1^* \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_{ae_z} \\ \zeta_{ae_z} \end{bmatrix} = \frac{\rho B^2}{\tilde{m}_z} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} H_4^* \\ \frac{1}{4} H_1^* \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

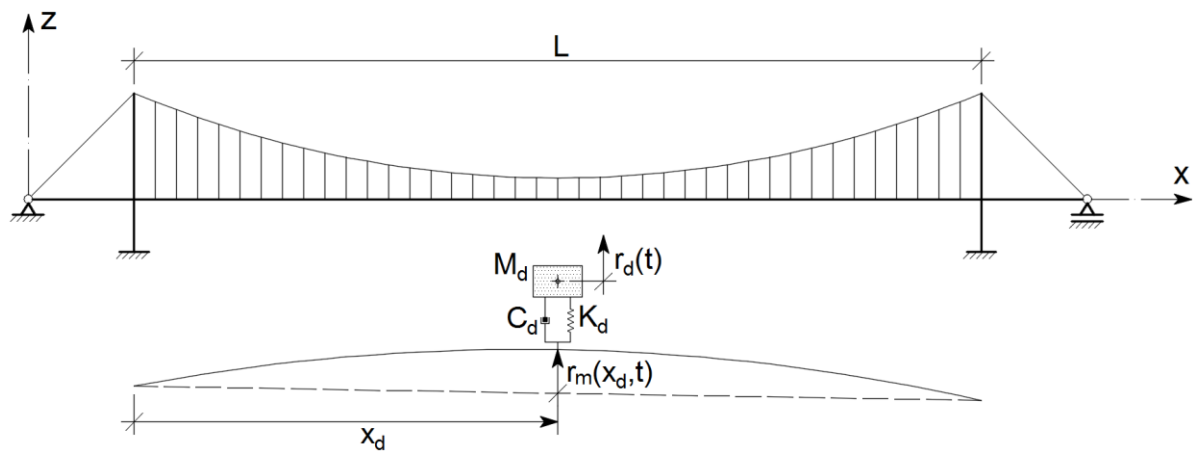
$$\begin{bmatrix} \kappa_{ae_\theta} \\ \zeta_{ae_\theta} \end{bmatrix} = \frac{\rho B^2}{\tilde{m}_\theta} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A_3^* \\ \frac{1}{4} A_2^* \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

Legg merke til at i likning 2.157 neglisjeres den aerodynamiske massen ved å se bort fra faktoren μ_{ae_i} som er inkludert i likning 2.142. Verdiene P_i^* , H_i^* og A_i^* hentes fra matrisen i likning 2.128, dersom ikke annet er oppgitt.

2.10 Massedemper

En massedemper, eller en *Tuned Mass Damper* (TMD), er en innretning som monteres på konstruksjoner for å redusere utslagene til svingninger som oppstår. Dette er mest relevant for høye bygninger eller bruer, men massedempere anvendes også i mange andre konstruksjoner. For eksempel brukes massedempere i fly-vinger, golv som utsettes for vibrasjoner og i kjøretøy for å nevne noen.

Massedempere reduserer energien i systemet. Virkemåten er slik at når konstruksjonen svinger vil en påmontert masse M_d svinge i mottakt og dermed reduseres systemets svingeutslag ved hjelp av demperen C_d og fjæren K_d . Prinsippet er illustrert i figur 2.16. Massen monteres i en hensiktsmessig posisjon x_d på konstruksjonen, avhengig av hvilke svingeformer som ønskes redusert. Svingeformen er illustrert med utslaget $r_m(x, t)$ der $m = y, z, \theta$. Massedemperen er svært effektiv når det gjelder å dempe ut resonanssvingninger, eller svingninger i nærheten av resonans [8]. Dempere kan også plasseres flere steder på konstruksjonen og gis ulike frekvenser.



Figur 2.16 - Massedemper

Massedempere på hengebruer har i teorien vist seg effektiv med tanke på stabilitetsproblemer. Det vil si at ved en høy middelvindhastighet kan bruene oppleve at responsen øker betydelig ved en liten økning i vindhastighet (se figur 1.1). Denne grensen defineres som kritisk vindhastighet og tidligere masteroppgaver har vist at denne grensen kan økes ved å påmontere massedempere [6]. Hvor mye kritisk vindhastighet kan økes er avhengig av bruene som undersøkes.

Massedempere kan være effektive mot vibrasjoner i både y -, z - og θ -retning, men i y -retning har de vist seg å være ganske dyr i forhold til alternative dempesystemer. Her har det som kalles *Tuned Liquid Damper* (TLD) vist seg å være effektivt. TLD-er er enkle å montere og kostnadseffektive da de i hovedsak består av en beholder fylt med vann til et gitt nivå for å treffe den rette frekvensen [1]. Da massedempere mot svingninger i y -retning er relativt sett dyre i tillegg til at svingninger i y -retning sjeldent er noe problem er det i denne oppgaven valgt å kun se på svingninger i vertikal z -retning og i torsjon [13]. Antagelsen om en svingeform med en responskomponent gjelder fortsatt og disse retningene betraktes derfor hver for seg.

I det følgende vil likevektsligningen for svingninger i z -retning og θ -retning utledes ved hjelp av D'Alemberts prinsipp om øyeblikkelig likevekt samt prinsippet om virtuelt arbeid. Etter dette skal det vises at disse likevektsligningene kan uttrykkes på en generell matriseform der utledningen av det generelle responspektrumet følger.

Før likevektsligningene utledes skal prinsippet om virtuelt arbeid presenteres kort. Det kan generelt deles opp i to delprinsipp:

- Virtuelle forskyvningers prinsipp (VFP)
- Virtuelle krefters prinsipp (VKP)

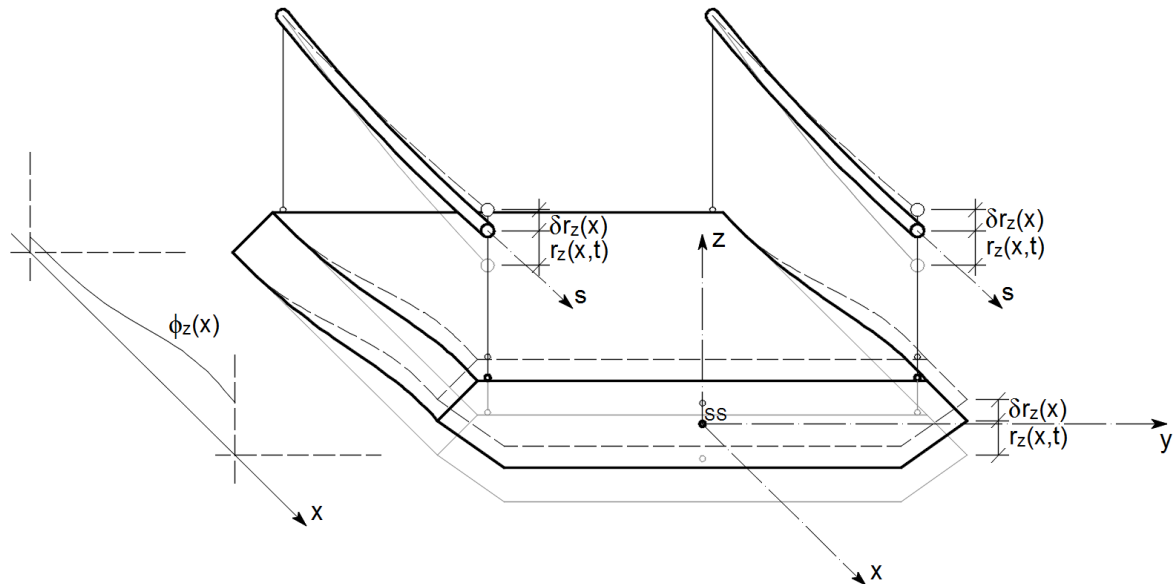
Det skal i det følgende benyttes VFP der et belastet system som er i likevekt gis en virtuell forskyvning δr (der symbolet δ angir at det er virtuelt) som igjen fører til virtuelle tøyninger $\delta \epsilon$ innad i konstruksjonen.

$$F \delta r = \int_V \sigma \delta \epsilon dV \quad (2.158)$$

Likevekten angir at spenningene σ skal samsvare med, dvs. beregnes fra, den ytre belastningen F , og den kinematiske kompatibiliteten krever at de virtuelle tøyningene skal samsvare med det virtuelle forskyvningsfeltet. Det virtuelle forskyvningsfeltet er tilfeldig og den eneste restriksjonen som kreves er at det er tidsuavhengig [8]. I det følgende benyttes likevel også restriksjonen om at det virtuelle forskyvningsfeltet skal samsvare med de geometriske randbetingelsene for systemet. Dvs. at δr , $\delta r'$, $\delta r''$ og $\delta r'''$ alle er null ved opplagerposisjonene når dette kreves av randbetingelsene [8]. Dette medfører at opplagerkreftene til hengebruene ikke vil utføre noe arbeid og følgelig ikke er inkludert i beregningene etter VFP.

2.10.1 Virtuelt arbeid for vertikalsvingning

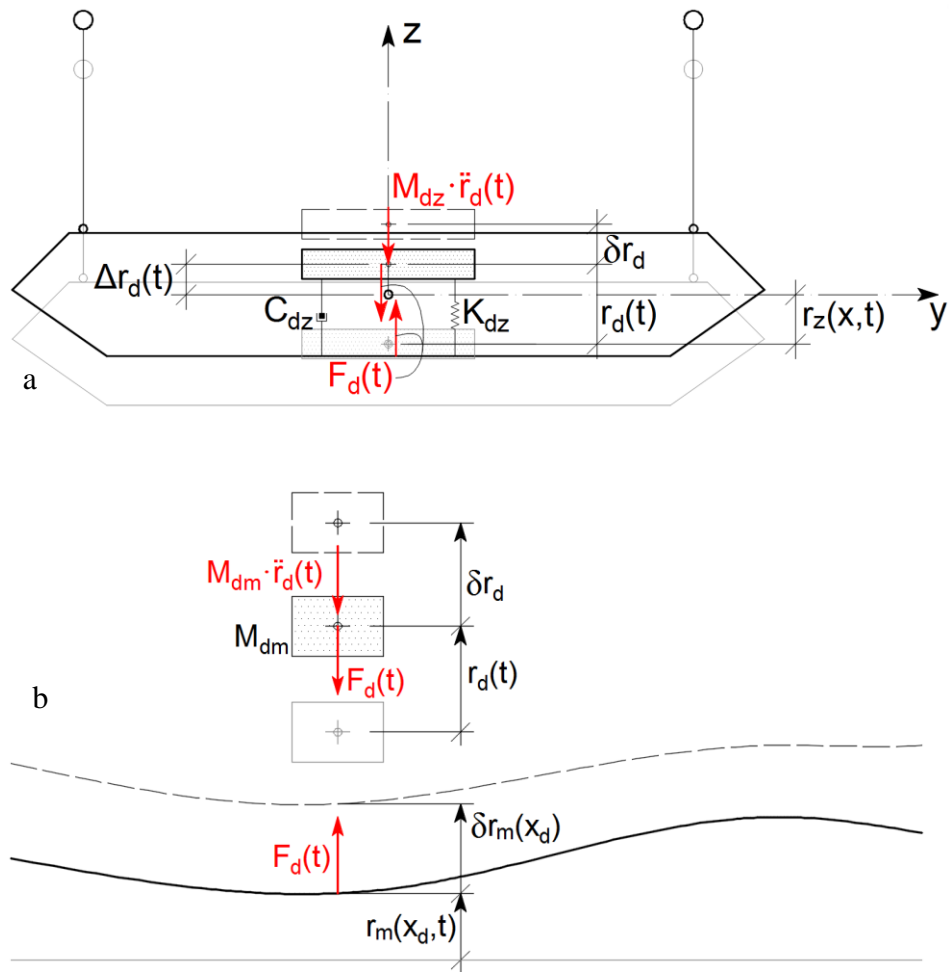
Svingningene i z-retning med virtuelle forskyvninger illustreres i figur 2.17 der grå farge indikerer initialposisjonen, tykk linje representerer bruens forskyvning $r_z(x, t)$ og stiplet linje er den tidsuavhengige, virtuelle forskyvningen $\delta r_z(x)$.



Figur 2.17 - Virtuell vertikalforskyvning for brubjelken

Kreftene som følge av forskyvningene er vist i figur 2.7.b. I tillegg kommer nå kreftene fra den monterte massedemperen som illustrert i figur 2.18.a. Initial posisjon er vist med grå farge, forskyvningen $r_d(t)$ er vist med tykk linje og den virtuelle forskyvningen δr_d er med stiplet linje. Kraften $F_d(t)$ virker både på massedemperen og på brubjelken som vist i figur 2.18.a og illustrert kun med krefter i figur 2.18.b (der $m = z$ i dette tilfellet) og er som følger.

$$F_d(t) = C_{d_z} \dot{r}_d(t) + K_{d_z} r_d(t) \quad (2.159)$$



Figur 2.18 - Virtuelt arbeid vertikalforskyvning med massedemper

Etter D' Alemberts prinsipp og VFP kan likevektsligningen for vertikalsvingninger med massedemper uttrykkes slik

$$\begin{aligned}
 \int_{L_{exp}} q_{z_{tot}}(x,t) \delta r_z(x) dx - \int_0^L m_z(x) \ddot{r}_z(x,t) \delta r_z(x) dx - 2 \int_0^L m_c(s) \ddot{r}_z(x,t) \delta r_z(x) dx \\
 - \int_0^L c_z(x) \dot{r}_z(x,t) \delta r_z(x) dx - \int_0^L m_z(x) g \delta r_z(x) dx \\
 - 2 \int_0^L m_c(s) g \delta r_z(x) dx + 2 \int_0^L \left(\frac{m_z(x)}{2} + m_c(s) \right) g \delta r_z(x) dx \\
 + F_d(t) \delta r_z(x_d) - F_d(t) \delta r_d - M_{dz} \ddot{r}_d(t) \delta r_d = \int_V \sigma \delta \epsilon dV
 \end{aligned} \tag{2.160}$$

der L_{exp} angir den eksponerte delen av bruspenet, x_d angir demperens plassering langs x -aksen (se figur 2.16) og $F_d(t)$ er angitt i ligning 2.159. $\int_V \sigma \delta \epsilon dV$ gir et uttrykk som beskriver stivheten til konstruksjonen. Da egenverdi-problemet allerede er løst i kapittel 2.3 er det ikke nødvendig å utlede dette uttrykket. Så lenge den modale massen med tilhørende egenfrekvens er kjent kan den modale stivheten regnes ut av disse. Se ligning 2.179.

Holder på antagelsen om at bærekabelen følger en grunn kurve slik at $ds \approx dx$. Ser da at de statiske kreftene kansellerer hverandre. Da tverrsnittet er konstant langs hele lengden er både massen og dempeegenskapene konstant og $m_z(x)$, $m_c(x)$, $c_z(x)$ er følgelig uavhengig av x . Introduserer også modale frihetsgrader for både de reelle og virtuelle forskyvningene og holder på antagelsen om en svingform med en responskomponent (der bevegelsen til massedemperen vil representere en egen svingform).

$$\begin{aligned} r_z(x, t) &= \phi_z(x) \eta_z(t) & \delta r_z(x) &= \phi_z(x) \delta \eta_z \\ r_d(t) &= 1 \eta_d(t) & \delta r_d(t) &= 1 \delta \eta_d \end{aligned} \quad (2.161)$$

Dette medfører at ligning 2.160 kan uttrykkes slik

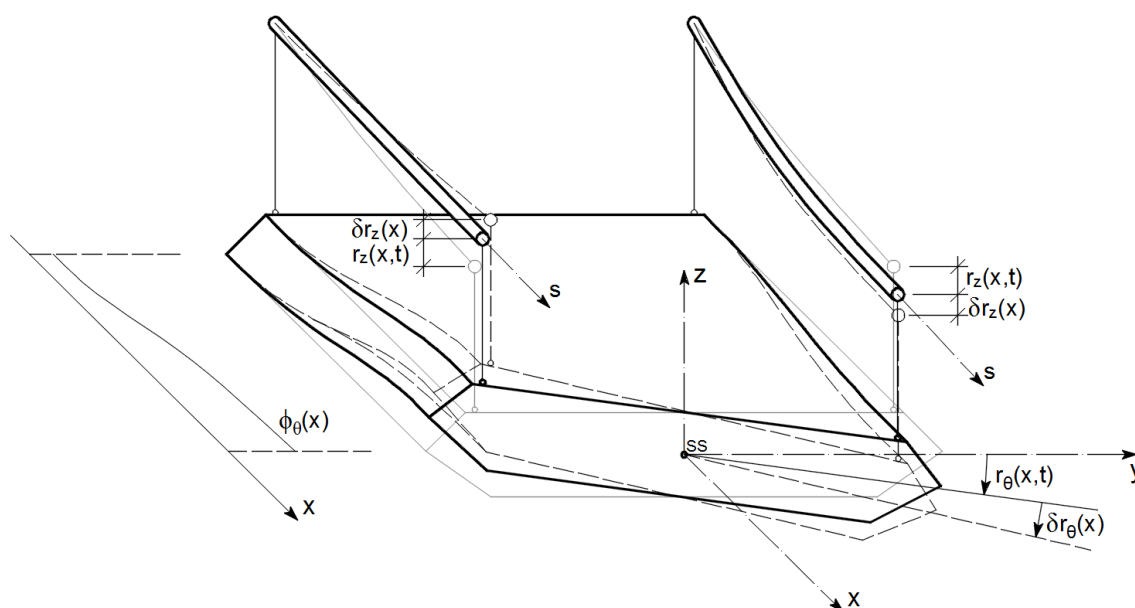
$$\begin{aligned} m_{z_{tot}} \int_0^L \phi_z^2(x) dx \ddot{\eta}_z(t) \delta \eta_z + c_z \int_0^L \phi_z^2(x) dx \dot{\eta}_z(t) \delta \eta_z \\ - \{C_{d_z} \dot{\eta}_d(t) + K_{d_z} \eta_d(t) - C_{d_z} \phi_z(x_d) \dot{\eta}_z(t) \\ - K_{d_z} \phi_z(x_d) \eta_z(t)\} \phi_z(x_d) \delta \eta_z \\ + \{M_{d_z} \ddot{\eta}_d(t) + C_{d_z} \dot{\eta}_d(t) + K_{d_z} \eta_d(t) - C_{d_z} \phi_z(x_d) \dot{\eta}_z(t) \\ - K_{d_z} \phi_z(x_d) \eta_z(t)\} \delta \eta_d - \int_V \sigma \delta \epsilon dV \\ = \int_{L_{exp}} q_{z_{tot}}(x, t) \phi_z(x) dx \delta \eta_z \end{aligned} \quad (2.162)$$

Dette er den modale likevektsligningen for ren vertikalsvingning med én massedemper der den totale massen er

$$m_{z_{tot}} = m_z + 2m_c \quad (2.163)$$

2.10.2 Virtuelt arbeid for torsjon

Etter at brudekket har rotert $r_\theta(x, t)$ fra initial posisjon (angitt med grå farge) i figur 2.19 gis det i tillegg en virtuell, tidsuavhengig rotasjon $\delta r_\theta(x)$ (angitt med stiplet linje). Legg merke til at positiv rotasjon ved utledning av egensvingeformene var mot urviseren, mens her er positiv rotasjon med urviseren. Resultatmessig (altså de endelige resultat med responspektrum og lignende) utgjøre ikke dette noen forskjell da fortegnet på egensvingeformene er uten betydning.



Figur 2.19 - Virtuell torsjon for brubjelken

Kreftene som følge av rotasjonen er vist i figur 2.8.b. Massedemperen illustreres i figur 2.20.b som et stag med konsentrerte masser i hver ende der en fjær og en demper er festet til hver masse. Staget, altså demperen, har rotert $r_d(t)$ fra initial posisjon (angitt med grå farge) og får en virtuell rotasjon δr_d . Kraften $F_d(t)$ virker både på massedemperen og på avstivningsbærerens som vist i figur 2.20.a (se også figur 2.18.b der $m = \theta$ i dette tilfellet) og inneholder kreftene fra demperen og fjæren.

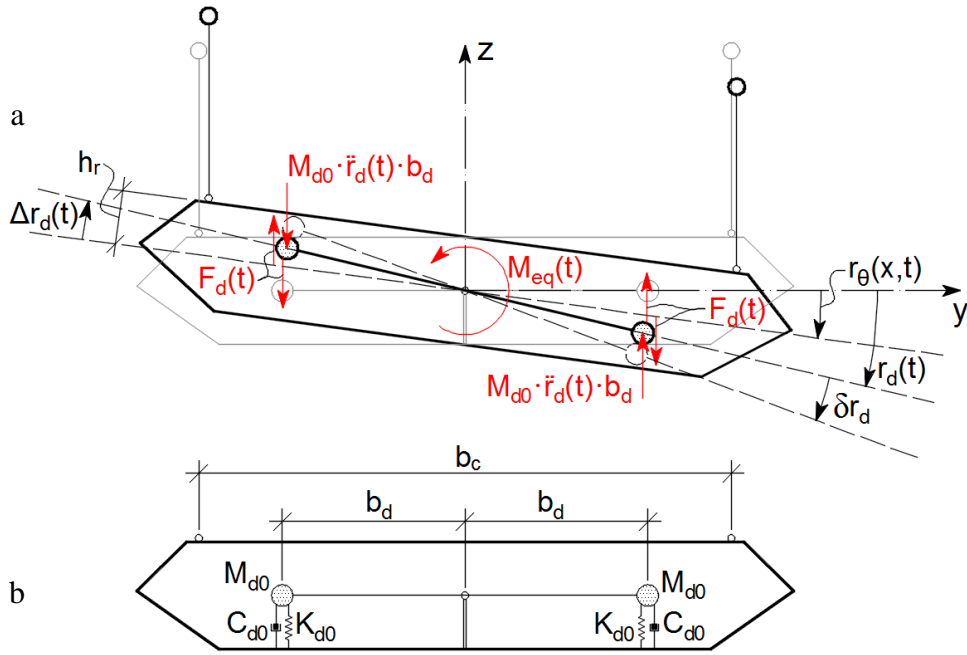
$$F_d(t) = C_{d0}\dot{r}_d(t)b_d + K_{d0}r_d(t)b_d \quad (2.164)$$

Det ekvivalente momentet som virker pga. massedemperen er da gitt av

$$M_{eq}(t) = 2F_d(t)b_d = 2C_{d0}b_d^2\dot{r}_d(t) + 2K_{d0}b_d^2r_d(t) \quad (2.165)$$

Der dempeegenskapene og stivhetsegenskapene til massedemperen mot rotasjon er som følger

$$C_{d\theta} = 2C_{d0}b_d^2 \text{ og } K_{d\theta} = 2K_{d0}b_d^2 \quad (2.166)$$



Figur 2.20 - Virtuell torsjon med massedemper

Likevektsligningen for torsjon av brudekket kan da finnes ved å sette opp ytre arbeid lik indre arbeid etter ligning 2.158.

$$\begin{aligned}
 & \int_{L_{exp}} q_{\theta_{tot}}(x, t) \delta r_\theta(x) dx - \int_0^L m_\theta(x) \ddot{r}_\theta(x, t) \delta r_\theta(x) dx \\
 & - \int_0^L m_c(s) \ddot{r}_{z_{y=-\frac{b}{2}}}(x, t) \delta r_{z_{y=-\frac{b}{2}}}(x) ds - \int_0^L m_c(s) \ddot{r}_{z_{y=\frac{b}{2}}}(x, t) \delta r_{z_{y=\frac{b}{2}}}(x) ds \\
 & - \int_0^L c_\theta(x) \dot{r}_\theta(x, t) \delta r_\theta(x) dx - \int_0^L m_c(s) g \left(\frac{b_c}{2} - r_\theta(x, t) h_r \right) \delta r_\theta(x) dx \\
 & + \int_0^L m_c(s) g \left(\frac{b_c}{2} + r_\theta(x, t) h_r \right) \delta r_\theta(x) dx \tag{2.167} \\
 & + \int_0^L \left(\frac{m_z(x)}{2} + m_c(s) \right) g \left(\frac{b_c}{2} - r_\theta(x, t) h_r \right) \delta r_\theta(x) dx \\
 & - \int_0^L \left(\frac{m_z(x)}{2} + m_c(s) \right) g \left(\frac{b_c}{2} + r_\theta(x, t) h_r \right) \delta r_\theta(x) dx \\
 & + M_{eq}(t) \delta r_\theta(x_d) - M_{eq}(t) \delta r_d - 2M_{d0} b_d^2 \ddot{r}_d(t) \delta r_d = \int_V \sigma \delta \epsilon dV
 \end{aligned}$$

Med antagelsen om uendelig stive hengestag defineres sammenhengen mellom z og θ for både de reelle og virtuelle forskyvningene.

$$\begin{aligned} r_{z_{y=\frac{b}{2}}}(x, t) &= -\frac{b_c}{2} r_\theta(x, t) & \delta r_{z_{y=\frac{b}{2}}}(x) &= -\frac{b_c}{2} \delta r_\theta(x) \\ r_{z_{y=-\frac{b}{2}}}(x, t) &= \frac{b_c}{2} r_\theta(x, t) & \delta r_{z_{y=-\frac{b}{2}}}(x) &= \frac{b_c}{2} \delta r_\theta(x) \end{aligned} \quad \text{og} \quad (2.168)$$

Setter inn $M_{eq}(t)$ som definert i ligning 2.165. Introduserer også for denne retningen modale frihetsgrader for både reelle og virtuelle forskyvninger, og holder på antagelsen om en svingeform med en responskomponent.

$$\begin{aligned} r_\theta(x, t) &= \phi_\theta(x) \eta_\theta(t) & \delta r_\theta(x) &= \phi_\theta(x) \delta \eta_\theta \\ r_d(t) &= 1 \eta_d(t) & \delta r_d(t) &= 1 \delta \eta_d \end{aligned} \quad (2.169)$$

Holder også på antagelsen at bærekabelen følger en grunn kurve slik at $ds \approx dx$ og at tverrsnittet er konstant over lengden slik at $m_\theta(x)$, $m_c(x)$ og $c_\theta(x)$ er uavhengig av x . Dette fører til at ligning 2.167 kan uttrykkes slik

$$\begin{aligned} m_{\theta_{tot}} \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \ddot{\eta}_\theta(t) \delta \eta_\theta + c_\theta \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \dot{\eta}_\theta(t) \delta \eta_\theta \\ - \{C_{d_\theta} \dot{\eta}_d(t) + K_{d_\theta} \eta_d(t) - C_{d_\theta} \phi_\theta(x_d) \dot{\eta}_\theta(t) \\ - K_{d_\theta} \phi_\theta(x_d) \eta_\theta(t)\} \phi_\theta(x_d) \delta \eta_\theta \\ + \{M_{d_\theta} \ddot{\eta}_d(t) + C_{d_\theta} \dot{\eta}_d(t) + K_{d_\theta} \eta_d(t) - C_{d_\theta} \phi_\theta(x_d) \dot{\eta}_\theta(t) \\ - K_{d_\theta} \phi_\theta(x_d) \eta_\theta(t)\} \delta \eta_d - \int_V \sigma \delta \epsilon dV \\ - m_z g h_r \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \eta_\theta(t) \delta \eta_\theta = \int_{L_{exp}} q_{\theta_{tot}}(x, t) \phi_\theta(x) dx \delta \eta_\theta \end{aligned} \quad (2.170)$$

Dette er likevektsligningen for ren torsjon med én massedemper der det totale treghetsmomentet for bruene og treghetsmomentet for massedemperen er henholdsvis

$$m_{\theta_{tot}} = m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \quad \text{og} \quad M_{d_\theta} = 2M_{d_0} b_d^2 \quad (2.171)$$

Da leddet $m_z g h_r \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \eta_\theta(t) \delta \eta_\theta$ i ligning 2.170 er avhengig av forskyvningen $\eta_\theta(t)$ og ikke hastighet eller akselerasjon vil dette være et bidrag til stivheten i likhet med volumintegralet $\int_V \sigma \delta \epsilon dV$. Legg merke til at dette leddet samstemmer ikke med tilsvarende

ledd i ligning 2.60 som sier $(2m_c + m_z)gh_r r_\theta(x, t)$. Enten burde leddet i ligning 2.170 inneholde $2m_c + m_z$ eller så burde leddet i ligning 2.60 kun inneholde m_z . Hva som er korrekt uttrykk er fortsatt et ubesvart spørsmål, men beregningene i rapporten baserer seg på teorien i kapittel 2.3.3. Det er altså antatt at ligning 2.60 inneholder det korrekte uttrykket.

Siden egenverdioproblemet allerede er løst basert på teorien i kapittel 2.3.3 er det ikke nødvendig å utlede volumintegralet noe videre. Så lenge den modale massen med tilhørende egenfrekvens er kjent kan den modale stivheten regnes ut av disse som vist i ligning 2.179.

2.10.3 Responsspektrum med massedemper

Nå er både den modale likevektsligningen for svingninger i z-retning med én massedemper definert (se ligning 2.162) og den modale likevektsligningen for ren torsjon med én massedemper definert (se ligning 2.170). Dette kan presenteres på en generell matriseform som følger

$$\delta\boldsymbol{\eta}_m^T [\tilde{\mathbf{M}}_{m0} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{m0}(t) + \tilde{\mathbf{C}}_{m0} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{m0}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{m0} \boldsymbol{\eta}_{m0}(t)] = \delta\boldsymbol{\eta}_m^T \tilde{\mathbf{R}}_{m0}(t) \quad (2.172)$$

Den virtuelle forskyvningen $\delta\boldsymbol{\eta}_m^T$ går mot hverandre som gir

$$\tilde{\mathbf{M}}_{m0} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{m0}(t) + \tilde{\mathbf{C}}_{m0} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{m0}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{m0} \boldsymbol{\eta}_{m0}(t) = \tilde{\mathbf{R}}_{m0}(t) \quad (2.173)$$

der indeks m står for z eller θ og de generaliserte frihetsgradene er definert som

$$\boldsymbol{\eta}_{m0}(t) = \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \delta\boldsymbol{\eta}_m = \begin{bmatrix} \delta\eta_m \\ \delta\eta_d \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

Den modale massematrisen er definert som

$$\tilde{\mathbf{M}}_{m0} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_m & 0 \\ 0 & M_{d_m} \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad \begin{aligned} \tilde{M}_z &= m_{z_{tot}} \int_0^L \phi_z^2(x) dx \\ \tilde{M}_\theta &= m_{\theta_{tot}} \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \end{aligned} \quad (2.175)$$

Siden $m_m(x) = m_m$ er $\tilde{m}_m = m_m$.

Den modale dempematrixen er definert som

$$\tilde{\mathbf{C}}_{m0} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_m + C_{d_m} \phi_m^2(x_d) & -C_{d_m} \phi_m(x_d) \\ -C_{d_m} \phi_m(x_d) & C_{d_m} \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad \begin{aligned} \tilde{C}_z &= c_z \int_0^L \phi_z^2(x) dx \\ \tilde{C}_\theta &= c_\theta \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \end{aligned} \quad (2.176)$$

Den modale stivhetsmatrixen er definert som

$$\tilde{\mathbf{K}}_{m0} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_m + K_{d_m} \phi_m^2(x_d) & -K_{d_m} \phi_m(x_d) \\ -K_{d_m} \phi_m(x_d) & K_{d_m} \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

der bruens modale stivhet er \tilde{K}_m . For z- og θ -retning er denne

$$\begin{aligned} \tilde{K}_z &= - \int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ \tilde{K}_\theta &= - \int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - m_z g h_r \int_0^L \phi_\theta^2(x) dx \end{aligned} \quad (2.178)$$

Som nevnt i de to forrige delkapitlene er det ikke nødvendig å utlede mer spesifikke uttrykk for den modale stivheten da denne kan regnes ut basert på den modale massen \tilde{M}_m og tilhørende egenfrekvens ω_m .

$$\tilde{K}_m = \omega_m^2 \tilde{M}_m \quad (2.179)$$

Det modale lastbidraget er definert som

$$\tilde{\mathbf{R}}_{m0}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{R}_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad \begin{aligned} \tilde{R}_z(t) &= \int_{L_{exp}} q_{z_{tot}}(x, t) \phi_z(x) dx \\ \tilde{R}_\theta(t) &= \int_{L_{exp}} q_{\theta_{tot}}(x, t) \phi_\theta(x) dx \end{aligned} \quad (2.180)$$

Bruen og demperens bevegelse er beskrevet, som gitt i ligning 2.162 og 2.169, med de modale frihetsgradene

$$r_m(x, t) = \phi_m(x) \eta_m(t) \quad \text{og} \quad r_d(t) = 1 \cdot \eta_d(t) \quad (2.181)$$

Introduserer relative, modale frihetsgrader (se figur 2.18.a og figur 2.20.a) som følger

$$\Delta r_d(t) = 1 \cdot \Delta \eta_d(t) = r_d(t) - r_m(x_d, t) = 1 \cdot \eta_d(t) - \phi_m(x_d) \eta_m(t) \quad (2.182)$$

Av dette sees det at

$$\Delta\eta_d(t) = 1 \cdot \eta_d(t) - \phi_m(x_d)\eta_m(t) \quad (2.183)$$

Frihetsgradene kan da presenteres på matrisform som

$$\begin{bmatrix} r_m(x, t) \\ r_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_m(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_m(x, t) \\ r_m(x_d, t) + \Delta r_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_m(x) & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \Delta\eta_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.184)$$

Dermed finnes forholdet mellom de modale frihetsgradene $\boldsymbol{\eta}_{m0}(t)$ og de relative modale frihetsgradene $\boldsymbol{\eta}_m(t)$ slik

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{m0}(t) &= \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_m(x_d) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \phi_m(x) & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \Delta\eta_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \Delta\eta_d(t) \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\Psi}_m \boldsymbol{\eta}_m(t) \end{aligned} \quad (2.185)$$

Setter dette inn i ligning 2.173 og premultipliserer med $\boldsymbol{\Psi}_m^T$

$$\boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{M}}_{m0} \boldsymbol{\Psi}_m \ddot{\boldsymbol{\eta}}_m(t) + \boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{C}}_{m0} \boldsymbol{\Psi}_m \dot{\boldsymbol{\eta}}_m(t) + \boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{K}}_{m0} \boldsymbol{\Psi}_m \boldsymbol{\eta}_m(t) = \boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{R}}_{m0}(t) \quad (2.186)$$

Som gir bevegelsesligningen for systemet i relative modal koordinater

$$\tilde{\mathbf{M}}_m \ddot{\boldsymbol{\eta}}_m(t) + \tilde{\mathbf{C}}_m \dot{\boldsymbol{\eta}}_m(t) + \tilde{\mathbf{K}}_m \boldsymbol{\eta}_m(t) = \tilde{\mathbf{R}}_m(t) \quad (2.187)$$

Hvor den nye, modale massematrisen, dempematriksen, stivhetsmatrisen og lastmatrisen er som følger

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_m &= \boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{M}}_{m0} \boldsymbol{\Psi}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{M}_m & 0 \\ 0 & M_{d_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{M}_m + \phi_m^2(x_d)M_{d_m} & \phi_m(x_d)M_{d_m} \\ \phi_m(x_d)M_{d_m} & M_{d_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_m &= \boldsymbol{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{C}}_{m0} \boldsymbol{\Psi}_m \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{C}_m + \phi_m^2(x_d)C_{d_m} & -\phi_m(x_d)C_{d_m} \\ -\phi_m(x_d)C_{d_m} & C_{d_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_m & 0 \\ 0 & C_{d_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_m &= \mathbf{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{K}}_{m0} \mathbf{\Psi}_m \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{K}_m + \phi_m^2(x_d)K_{d_m} & -\phi_m(x_d)K_{d_m} \\ -\phi_m(x_d)K_{d_m} & K_{d_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{K}_m & 0 \\ 0 & K_{d_m} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.190}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_m(t) = \mathbf{\Psi}_m^T \tilde{\mathbf{R}}_{m0}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{R}_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.191}$$

Den totale jevnt fordelte lasten for z - og θ -retning hentes fra buffeting teorien presentert i kapittel 2.8

$$\begin{aligned}
q_{z_{tot}}(x, t) &= \frac{\rho VB}{2} [2\bar{C}_L \quad (C'_L + (D/B)\bar{C}_D)] \begin{bmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} + \frac{\rho B^2}{2} \omega_z(V) H_1^* \dot{r}_z(x, t) \\
&\quad + \frac{\rho B^2}{2} [\omega_z(V)]^2 H_4^* r_z(x, t)
\end{aligned} \tag{2.192}$$

$$\begin{aligned}
q_{\theta_{tot}}(x, t) &= \frac{\rho VB}{2} [2B\bar{C}_m \quad BC'_m] \begin{bmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} + \frac{\rho B^2}{2} \omega_\theta(V) B^2 A_2^* \dot{r}_\theta(x, t) \\
&\quad + \frac{\rho B^2}{2} [\omega_\theta(V)]^2 B^2 A_3^* r_\theta(x, t)
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Den modale lasten i ligning 2.191 kan da uttrykkes slik

$$\tilde{R}_m(t) = \tilde{R}_{v_m}(t) + \tilde{C}_{ae_m} \dot{\eta}_m(t) + \tilde{K}_{ae_m} \eta_m(t) \tag{2.194}$$

hvor $\tilde{R}_{v_m}(t)$ er den modale dynamiske lasten forbundet med turbulenskomponentene $u(x, t)$ og $w(x, t)$, og er gitt ved

$$\tilde{R}_{v_z} = \int_{L_{exp}} \phi_z(x) \frac{\rho VB}{2} [2\bar{C}_L \quad (C'_L + (D/B)\bar{C}_D)] \begin{bmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} dx \tag{2.195}$$

$$\tilde{R}_{v_\theta} = \int_{L_{exp}} \phi_\theta(x) \frac{\rho VB}{2} [2B\bar{C}_m \quad BC'_m] \begin{bmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} dx$$

der \tilde{C}_{ae_m} er den modale, bevegelsesinduserte lasten forbundet med konstruksjonens hastighet gitt ved

$$\tilde{C}_{ae_z} = \int_{L_{exp}} \phi_z^2(x) \frac{\rho B^2}{2} \cdot \omega_z(V) \cdot H_1^* dx \quad (2.196)$$

$$\tilde{C}_{ae_\theta} = \int_{L_{exp}} \phi_\theta^2(x) \frac{\rho B^4}{2} \cdot \omega_\theta(V) \cdot A_2^* dx$$

og \tilde{K}_{ae_m} er den modale, bevegelsesinduserte lasten forbundet med konstruksjonens forskyvning gitt ved

$$\tilde{K}_{ae_z} = \int_{L_{exp}} \phi_z^2(x) \frac{\rho B^2}{2} \cdot [\omega_z(V)]^2 \cdot H_4^* dx \quad (2.197)$$

$$\tilde{K}_{ae_\theta} = \int_{L_{exp}} \phi_\theta^2(x) \frac{\rho B^4}{2} \cdot [\omega_\theta(V)]^2 \cdot A_3^* dx$$

For å løse bevegelseslikningen benyttes en fouriertransformasjon av de tidsavhengige variablene som fører ligningen fra tidsplanet til frekvensplanet.

$$\boldsymbol{\eta}_m(t) = \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\eta_m}(\omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.198)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_m(t) = \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_m}}(\omega) e^{i\omega t} + i\omega \tilde{\mathbf{C}}_{ae_m} \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\eta_m}(\omega) e^{i\omega t} + \tilde{\mathbf{K}}_{ae_m} \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\eta_m}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.199)$$

$$\mathbf{a}_{\eta_m}(\omega) = \begin{bmatrix} a_{\eta_m}(\omega) \\ a_{\Delta\eta}(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_m}}(\omega) = \begin{bmatrix} a_{\tilde{R}_{v_m}}(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.200)$$

hvor

$$a_{\tilde{R}_{v_z}}(\omega) = \int_{L_{exp}} \phi_z(x) \frac{\rho VB}{2} [2\bar{C}_L \quad (C'_L + (D/B)\bar{C}_D)] \begin{bmatrix} a_u(\omega) \\ a_w(\omega) \end{bmatrix} dx \quad (2.201)$$

$$a_{\tilde{R}_{v_\theta}}(\omega) = \int_{L_{exp}} \phi_\theta(x) \frac{\rho VB}{2} [2B\bar{C}_m \quad BC'_m] \begin{bmatrix} a_u(\omega) \\ a_w(\omega) \end{bmatrix} dx$$

Den transformerte bevegelseslikningen (se ligning 2.187) blir da

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_m \mathbf{a}_{\eta_m} + i\omega \tilde{\mathbf{C}}_m \mathbf{a}_{\eta_m} + \tilde{\mathbf{K}}_m \mathbf{a}_{\eta_m} = \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_m}} + i\omega \tilde{\mathbf{C}}_{ae_m} \mathbf{a}_{\eta_m} + \tilde{\mathbf{K}}_{ae_m} \mathbf{a}_{\eta_m} \quad (2.202)$$

hvor den aerodynamiske dempe- og stivhetsmatrisene er gitt ved

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ae_m} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{ae_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \tilde{\mathbf{K}}_{ae_m} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ae_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

Faktoriserer, legger sammen like ledd og premultipliserer med $\tilde{\mathbf{K}}_m^{-1}$

$$\left[-\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_m + i\omega \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_m - i\omega \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae_m} + \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{ae_m}\right] \mathbf{a}_{\eta_m} = \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{vm}} \quad (2.204)$$

Som vanligvis skrives

$$\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega) \mathbf{a}_{\eta_m} = \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{vm}} \quad (2.205)$$

der $\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega)$ er en matrise som inneholder de inverse frekvens-respons-funksjonene. Denne omskrives ledd for ledd ved å innføre at $\tilde{\mathbf{K}}_m = \omega_m^2 \tilde{\mathbf{M}}_m$, $\tilde{\mathbf{K}}_{d_m} = \omega_{d_m}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{d_m}$, $\tilde{\mathbf{C}}_m = 2\tilde{\mathbf{M}}_m \omega_m \zeta_m$ og $\tilde{\mathbf{C}}_{d_m} = 2\tilde{\mathbf{M}}_{d_m} \omega_{d_m} \zeta_{d_m}$. Det første leddet kan da uttrykkes slik

$$\begin{aligned} -\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_m &= - \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_m \phi_m^2(x_d) & \mu_m \phi_m(x_d) \\ \phi_m(x_d) & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= -\hat{\omega}_m^2 (\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}_m) \end{aligned} \quad (2.206)$$

Det andre leddet kan uttrykkes slik

$$i\omega \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_m = 2i \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_{d_m} \end{bmatrix} = 2i \hat{\omega}_m \boldsymbol{\zeta}_m \quad (2.207)$$

Ved å innføre at $\boldsymbol{\zeta}_{ae_m} = 1/2 \text{diag}(\omega_m) (\tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae_m})$ kan det vises at det tredje leddet uttrykkes slik

$$i\omega \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae_m} = 2i \frac{\omega}{\text{diag}(\omega_m)} \boldsymbol{\zeta}_{ae_m} = 2i \hat{\omega}_m \boldsymbol{\zeta}_{ae_m} \quad (2.208)$$

Og det fjerde leddet uttrykkes slik

$$\tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{ae_m} = \begin{bmatrix} \kappa_{ae_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa}_{ae_m} \quad (2.209)$$

hvor $\mu_m = \frac{M_d}{\tilde{M}_m}$, $\zeta_m = \frac{\tilde{c}_m}{2\tilde{M}_m \omega_m}$, $\zeta_{d_m} = \frac{c_{d_m}}{2M_{d_m} \omega_{d_m}}$. Det modale aerodynamiske dempeforholdet for z og θ er gitt ved å anta at responsen ikke er i nærheten av en stabilitetsgrense og dermed er egenfrekvensen $\omega_m \approx \omega_m(V) \approx \omega_m(V=0)$.

$$\zeta_{ae_z} = \frac{\tilde{c}_{ae_z}}{2\tilde{M}_z \omega_z} = \frac{\int_{L_{exp}} \phi_z^2(x) \frac{\rho B^2}{2} \cdot \omega_z(V) \cdot H_1^* dx}{2\omega_z m_{z_{tot}} \int_L \phi_z^2(x) dx} = \frac{\rho B^2}{m_{z_{tot}}} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_z^2(x) dx}{\int_L \phi_z^2(x) dx} \cdot \frac{H_1^*}{4} \quad (2.210)$$

$$\zeta_{ae\theta} = \frac{\tilde{C}_{ae\theta}}{2\tilde{M}_\theta\omega_\theta} = \frac{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2(x) \frac{\rho B^4}{2} \cdot \omega_\theta(V) \cdot A_2^* dx}{2\omega_\theta m_{\theta tot} \int_L \phi_\theta^2(x) dx} = \frac{\rho B^4}{m_{\theta tot}} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2(x) dx}{\int_L \phi_\theta^2(x) dx} \cdot \frac{A_2^*}{4} \quad (2.210)$$

Det modale aerodynamiske stivhetsbidraget for z og θ er gitt ved samme antagelse om egenfrekvensen og er som følger

$$\kappa_{aez} = \frac{\tilde{K}_{aez}}{\omega_z^2 \tilde{M}_z} = \frac{\int_{L_{exp}} \phi_z^2(x) \frac{\rho B^2}{2} \cdot [\omega_z(V)]^2 \cdot H_4^* dx}{\omega_z^2 m_z \int_L \phi_z^2(x) dx} = \frac{\rho B^2}{m_{z tot}} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_z^2(x) dx}{\int_L \phi_z^2(x) dx} \cdot \frac{H_4^*}{2} \quad (2.211)$$

$$\kappa_{ae\theta} = \frac{\tilde{K}_{ae\theta}}{\omega_\theta^2 \tilde{M}_\theta} = \frac{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2(x) \frac{\rho B^4}{2} \cdot [\omega_\theta(V)]^2 A_3^* dx}{\omega_\theta^2 m_{\theta tot} \int_L \phi_\theta^2(x) dx} = \frac{\rho B^4}{m_{\theta tot}} \cdot \frac{\int_{L_{exp}} \phi_\theta^2(x) dx}{\int_L \phi_\theta^2(x) dx} \cdot \frac{A_3^*}{2}$$

$\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega)$ kan da skrives slik

$$\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega) = [(\mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa}_{ae_m}) - \hat{\boldsymbol{\omega}}_m^2(\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}_m) + 2i\hat{\boldsymbol{\omega}}_m(\boldsymbol{\zeta}_m - \boldsymbol{\zeta}_{ae_m})] \quad (2.212)$$

Som ved å sette inn matrisene definert i ligning 2.206 til 2.209 blir

$$\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 - \kappa_{ae_m} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \mu_m \phi_m^2(x_d) & \mu_m \phi_m(x_d) \\ \phi_m(x_d) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.213)$$

$$+ 2i \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) & 0 \\ 0 & \zeta_{d_m} \end{bmatrix}$$

Som forenklet kan uttrykkes slik

$$\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} D_{1_m} & -\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \mu_m \phi_m(x_d) \\ -\left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \phi_m(x_d) & D_{2_m} \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

der

$$D_{1_m} = (1 - \kappa_{ae_m}) - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d)) + 2i \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) \quad (2.215)$$

$$D_{2_m} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 + 2i \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right) \zeta_{d_m}$$

Inverterer for å finne frekvens-respons-funksjonen

$$\hat{\mathbf{H}}_m(\omega) = \frac{1}{\det(\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega))} \begin{bmatrix} D_{2m} & \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \mu_m \phi_m(x_d) \\ \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \phi_m(x_d) & D_{1m} \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

der determinanten beregnes som

$$\det(\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega)) = D_{1m}D_{2m} - \left(-\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \mu_m \phi_m(x_d)\right) \left(-\left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \phi_m(x_d)\right) \quad (2.217)$$

og utvides slik

$$\begin{aligned} \det(\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega)) &= (1 - \kappa_{ae_m}) + 2i \frac{\omega}{\omega_m} (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) + (1 - \kappa_{ae_m}) 2i \frac{\omega}{\omega_{d_m}} \zeta_{d_m} \\ &\quad - (1 - \kappa_{ae_m}) \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 - (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d)) \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \\ &\quad - 4(\zeta_m - \zeta_{ae_m}) \zeta_{d_m} \frac{\omega}{\omega_m} \frac{\omega}{\omega_{d_m}} - (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d)) 2i \zeta_{d_m} \frac{\omega}{\omega_{d_m}} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \\ &\quad - 2i(\zeta_m - \zeta_{ae_m}) \frac{\omega}{\omega_m} \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 + (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d)) \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \\ &\quad - \mu_m \phi_m^2(x_d) \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.218)$$

og kan faktoriseres til

$$\begin{aligned} \det(\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega)) &= (1 - \kappa_{ae_m}) + 2 \left[(\zeta_m - \zeta_{ae_m}) + \frac{\omega_m}{\omega_{d_m}} \zeta_{d_m} (1 - \kappa_{ae_m}) \right] \left(i \frac{\omega}{\omega_m} \right) \\ &\quad + \left[1 + \mu_m \phi_m^2(x_d) + (1 - \kappa_{ae_m}) \left(\frac{\omega_m}{\omega_{d_m}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\omega_m}{\omega_{d_m}} (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) \zeta_{d_m} \right] \left(i \frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\omega_m}{\omega_{d_m}} \left[\frac{\omega_m}{\omega_{d_m}} (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) + (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d)) \zeta_{d_m} \right] \left(i \frac{\omega}{\omega_m} \right)^3 \\ &\quad + \left(\frac{\omega_m}{\omega_{d_m}}\right)^2 \left(i \frac{\omega}{\omega_m} \right)^4 \end{aligned} \quad (2.219)$$

Definerer $\hat{\omega}_m = \frac{\omega}{\omega_m}$ og $\alpha_m = \frac{\omega_m}{\omega_{d_m}}$ og forenkler uttrykket ved å definere koeffisientene

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2[(\zeta_m - \zeta_{ae_m}) + \alpha_m \zeta_{d_m} (1 - \kappa_{ae_m})] \\
a_2 &= 1 + \mu_m \phi_m^2(x_d) + (1 - \kappa_{ae_m}) \alpha_m^2 + 4\alpha_m (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) \zeta_{d_m} \\
a_3 &= 2\alpha_m [\alpha_m (\zeta_m - \zeta_{ae_m}) + (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d)) \zeta_{d_m}] \\
a_4 &= \alpha_m^2
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Determinanten til den inverse frekvens-respons-funksjonen kan da presenteres på følgende måte

$$\det(\hat{\mathbf{H}}_m^{-1}(\omega)) = (1 - \kappa_{ae_m}) + a_1(i\hat{\omega}_m) + a_2(i\hat{\omega}_m)^2 + a_3(i\hat{\omega}_m)^3 + a_4(i\hat{\omega}_m)^4 \tag{2.221}$$

Tilsvarende settes opp for de diagonale elementene D_{1_m} og D_{2_m} i ligning 2.215

$$\begin{aligned}
D_{1_m} &= (1 - \kappa_{ae_m}) + 2(\zeta_m - \zeta_{ae_m})(i\hat{\omega}_m) + (1 + \mu_m \phi_m^2(x_d))(i\hat{\omega}_m)^2 \\
D_{2_m} &= 1 + 2\zeta_{d_m} \alpha_m (i\hat{\omega}_m) + \alpha_m^2 (i\hat{\omega}_m)^2
\end{aligned} \tag{2.222}$$

Forenkler dette uttrykket med å definere følgende koeffisienter

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2\zeta_d \alpha \\
b_2 &= \alpha^2 \\
c_1 &= 2(\zeta_z - \zeta_{ae_z}) \\
c_2 &= (1 + \mu \phi_z^2(x_d))
\end{aligned} \tag{2.223}$$

D_{1_m} og D_{2_m} kan da skrives som

$$\begin{aligned}
D_{1_m} &= (1 - \kappa_{ae_m}) + c_1(i\hat{\omega}_m) + c_2(i\hat{\omega}_m)^2 \\
D_{2_m} &= 1 + b_1(i\hat{\omega}_m) + b_2(i\hat{\omega}_m)^2
\end{aligned} \tag{2.224}$$

I tillegg forenkles elementene som ikke ligger på diagonalen i ligning 2.216 til

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\omega}{\omega_{d_m}}\right)^2 \phi_m(x_d) &= -\left(\frac{\omega_m}{\omega_{d_m}}\right)^2 \phi_m^2(x_d)(i\hat{\omega}_m)^2 = d_2(i\hat{\omega}_m)^2 \\
\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \mu_m \phi_m(x_d) &= -\mu_m \phi_m(x_d)(i\hat{\omega}_m) = e_2(i\hat{\omega}_m)
\end{aligned} \tag{2.225}$$

hvor

$$\begin{aligned}
d_2 &= -\alpha_m^2 \phi_m^2(x_d) \\
e_2 &= -\mu_m \phi_m(x_d)
\end{aligned} \tag{2.226}$$

Dermed blir frekvens-respons-matrisen

$$\hat{\mathbf{H}}_m(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{H}_{mm}(\omega) & \hat{H}_{md_m}(\omega) \\ \hat{H}_{d_m m}(\omega) & \hat{H}_{d_m d_m}(\omega) \end{bmatrix} \tag{2.227}$$

der

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{mm}(\omega) &= \frac{1 + b_1(i\hat{\omega}_m) + b_2(i\hat{\omega}_m)^2}{(1 - \kappa_{ae_m}) + a_1(i\hat{\omega}_m) + a_2(i\hat{\omega}_m)^2 + a_3(i\hat{\omega}_m)^3 + a_4(i\hat{\omega}_m)^4} \\
\hat{H}_{md_m}(\omega) &= \frac{e_2(i\hat{\omega}_m)}{(1 - \kappa_{ae_m}) + a_1(i\hat{\omega}_m) + a_2(i\hat{\omega}_m)^2 + a_3(i\hat{\omega}_m)^3 + a_4(i\hat{\omega}_m)^4} \\
\hat{H}_{d_m m}(\omega) &= \frac{d_2(i\hat{\omega}_m)^2}{(1 - \kappa_{ae_m}) + a_1(i\hat{\omega}_m) + a_2(i\hat{\omega}_m)^2 + a_3(i\hat{\omega}_m)^3 + a_4(i\hat{\omega}_m)^4} \\
\hat{H}_{d_m d_m}(\omega) &= \frac{(1 - \kappa_{ae_m}) + c_1(i\hat{\omega}_m) + c_2(i\hat{\omega}_m)^2}{(1 - \kappa_{ae_m}) + a_1(i\hat{\omega}_m) + a_2(i\hat{\omega}_m)^2 + a_3(i\hat{\omega}_m)^3 + a_4(i\hat{\omega}_m)^4}
\end{aligned} \tag{2.228}$$

I ligning 2.148 oppgis det generelle modale last spekteret for responsberegninger i buffeting. For z- og θ -retning kan dette uttrykkes som

$$\begin{aligned}
S_{\tilde{R}_{v_z}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_z}}^* \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_z}} = \left[\frac{\rho V^2 B}{2} J_z(\omega) \right]^2 \\
S_{\tilde{R}_{v_\theta}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_\theta}}^* \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_\theta}} = \left[\frac{\rho V^2 B^2}{2} J_\theta(\omega) \right]^2
\end{aligned} \tag{2.229}$$

Uttrykket for den kvadrerte JAF, $J_z^2(\omega)$ og $J_\theta^2(\omega)$ finnes i ligning 2.150 og 2.151. Videre benyttes lastspekteret til beregning av det modale responspekteret tilsvarende det som er vist i kapittel 2.9, men nå med matriser. Dermed blir det modale lastspekteret

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\eta_m}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_{\eta_m}^*(\omega) \mathbf{a}_{\eta_m}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{\eta_m \eta_m}(\omega) & S_{\eta_m \Delta \eta}(\omega) \\ S_{\Delta \eta \eta_m}(\omega) & S_{\Delta \eta \Delta \eta}(\omega) \end{bmatrix} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left(\hat{\mathbf{H}}_m(\omega) \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_m}} \right)^* \left(\hat{\mathbf{H}}_m(\omega) \tilde{\mathbf{K}}_m^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_{v_m}} \right)^T \\
&= \frac{S_{\tilde{R}_{v_m}}(\omega)}{\tilde{\mathbf{K}}_m^2} \begin{bmatrix} |\hat{H}_{mm}(\omega)|^2 & \hat{H}_{mm}^*(\omega) \hat{H}_{d_m m}(\omega) \\ \hat{H}_{d_m m}^*(\omega) \hat{H}_{mm}(\omega) & |\hat{H}_{d_m m}(\omega)|^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.230}$$

Sammenhengen mellom reell respons og responsen i modalkoordinater (se ligning 2.184) er gitt ved

$$\begin{bmatrix} r_m(x, t) \\ \Delta r_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_m(x_d) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_m(t) \\ \Delta \eta_d(t) \end{bmatrix} \tag{2.231}$$

Som etter fouriertransformasjon skrives

$$\mathbf{a}_{r_m} = \mathbf{\Psi}_0 \mathbf{a}_{\eta_m} \tag{2.232}$$

Responsspekteret med én massedemper er da gitt ved

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{r_m}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_{r_m}^*(\omega) \mathbf{a}_{r_m}^T(\omega) = \begin{bmatrix} S_{r_m r_m}(\omega) & S_{r_m \Delta r_d}(\omega) \\ S_{\Delta r_d r_m}(\omega) & S_{\Delta r_d \Delta r_d}(\omega) \end{bmatrix} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\Psi_0 \mathbf{a}_{\eta_m}(\omega))^* (\Psi_0 \mathbf{a}_{\eta_m}(\omega))^T \quad (2.233) \\
 &= \frac{S_{\tilde{r}_{vm}}(\omega)}{\tilde{K}_m^2} \begin{bmatrix} \phi_m^2(x) |\hat{H}_{mm}(\omega)|^2 & \phi_m(x) \hat{H}_{mm}^*(\omega) \hat{H}_{d_m m}(\omega) \\ \phi_m(x) \hat{H}_{d_m m}^*(\omega) \hat{H}_{mm}(\omega) & |\hat{H}_{d_m m}(\omega)|^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

der de to mest interessante komponentene er

$$\begin{aligned}
 S_{r_m r_m}(x, \omega) &= \frac{S_{\tilde{r}_{vm}}(\omega)}{\tilde{K}_m^2} \phi_m^2(x) |\hat{H}_{mm}(\omega)|^2 \\
 S_{\Delta r_d \Delta r_d}(\omega) &= \frac{S_{\tilde{r}_{vm}}(\omega)}{\tilde{K}_m^2} |\hat{H}_{d_m m}(\omega)|^2
 \end{aligned} \quad (2.234)$$

som henholdsvis er responsen til brubjelken med massedemper og den relative responsen mellom brubjelken og demperen. Ut fra dette kan variansen til disse tilfellene bestemmes ved å integrere spektrene.

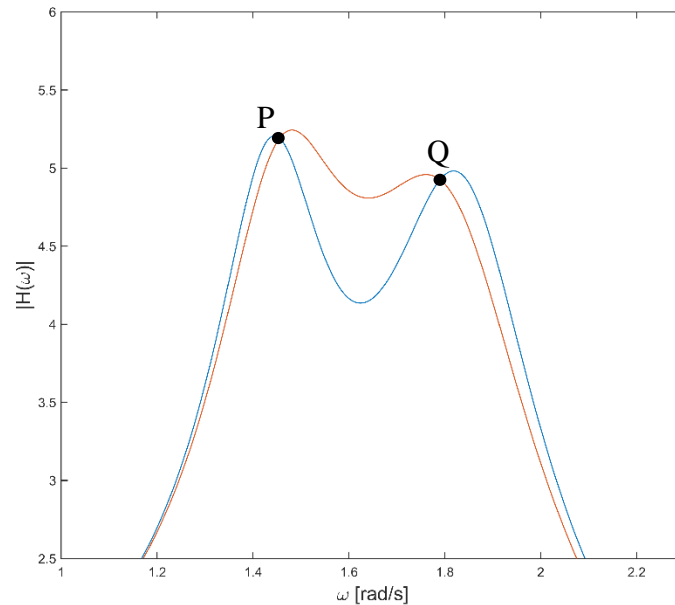
2.10.4 Optimale TMD-egenskaper

For å kunne ta ut mest mulig energi av systemet må massedemperens egenskaper være optimalisert for dette. Da er det i hovedsak tre faktorer som kan justeres. Det er den modale dempefaktoren ζ_{d_m} , masseforholdet μ_m og massedemperens frekvens ω_{d_m} . Både Den Hartog og R. Luft foreslår optimale verdier for den modale dempefaktoren ζ_{d_m} og massedemperens frekvens ω_{d_m} basert på masseforholdet μ_m .

Den Hartog søker å minimere toppunktet til frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}(\omega)|$ [14]. Ved å øke ω_{d_m} trekkes punktet P i figur 2.21 opp samtidig som punktet Q trekkes ned, og omvendt ved å senke ω_{d_m} . Den minimale topphøyden vil da være den verdien av ω_{d_m} som gir lik topphøyde for både Q og P.

Den Hartog foreslår dermed følgende optimering for massedemperens frekvens [14]:

$$\omega_{d_m} = \frac{\omega_m}{1 + \mu_m} \quad (2.235)$$



Figur 2.21 - Optimering av TMD mtp. frekvens-respons-funksjonen

Selv om punktene P og Q ligger på samme høyde kan fortsatt toppunktet være høyere enn P eller Q ved å endre på den modale dempefaktoren ζ_{d_m} . I figur 2.21 er frekvens-respons-funksjonen plottet for to forskjellige verdier av ζ_{d_m} og man ser tydelig at toppunktet er over både P og Q. Den Hartog leter derfor etter den verdien av ζ_{d_m} som gir null stigning i punktene P og Q. Null stigning i punktet P oppnås med følgende verdi for den modale dempefaktoren [14]

$$\zeta_{d_m} = \sqrt{\frac{\mu_m(3 - \sqrt{3})}{8(1 + \mu_m)^3}} \quad (2.236)$$

og null stigning i punktet Q oppnås med [14]

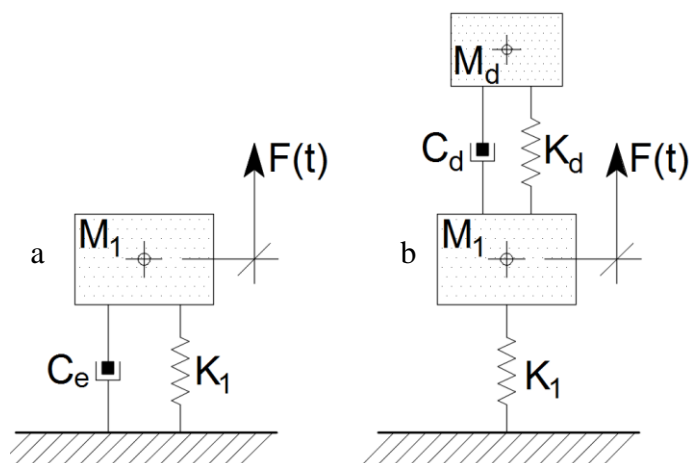
$$\zeta_{d_m} = \sqrt{\frac{\mu_m(3 + \sqrt{3})}{8(1 + \mu_m)^3}} \quad (2.237)$$

Den Hartog foreslår ganske enkelt et gjennomsnitt av disse som den optimale modale dempefaktoren [14]

$$\zeta_{d_m} = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1 + \mu_m)^3}} \quad (2.238)$$

R. Luft søker etter den maksimale dempingen som kan oppnås [15]. Dette gjøres ved å sammenligne det dempete systemet a i figur 2.22 (med masse M_1 , stivhet K_1 og demping C_e),

med det udempede TMD-systemet *b* i figur 2.22 (fortsatt med masse M_1 og stivhet K_1). I begge systemene er masse M_1 utsatt for lasten $F(t)$ som er antatt å ha spektraldensitet tilsvarende hvit støy, dvs. konstant energitetthet i frekvensplanet. System *a* regnes da som ekvivalent til system *b* hvis forskyvningens standardavvik er likt for begge systemene.



Figur 2.22 - Dempet system og udempet TMD-system

Den ekvivalente demperen C_e i system *a* representerer da dempingen som TMD-en innfører. Det ekvivalente dempeforholdet er da en funksjon av masseforholdet μ_m , frekvensforholdet α_m og det modale dempeforholdet ζ_{d_m} og kan uttrykkes slik

$$\zeta_e = \frac{\zeta_{d_m} \alpha_m^3 \mu_m}{\alpha_m^4 + [4\zeta_{d_m}^2 (1 + \mu_m) - (\mu_m + 2)] \alpha_m^2 + (1 + \mu_m)^2} \quad (2.239)$$

Ved et konstant masseforhold er dette kun en funksjon av frekvensforholdet og dempeforholdet. Maks punktet kan da finnes ved sette den partiellderiverte av ζ_e med hensyn på ζ_{d_m} og α_m lik null. R. Luft foreslår dermed en optimal frekvens lik [15]

$$\omega_{d_m} = \frac{\omega_m}{\sqrt{1 + \frac{3\mu_m}{2}}} \quad (2.240)$$

og en optimal dempefaktor lik [15]

$$\zeta_{d_m} = \sqrt{\frac{\mu_m}{4} \left(1 - \frac{3\mu_m}{4}\right)} \quad (2.241)$$

3 Beregninger

I dette kapitlet presenteres beregninger med tilhørende resultater samt diskusjon rundt valg av korrekte parametere. Kapitlet er i hovedsak oppbygd på samme måte som teorien i kapittel 2 selv om inndelingen ikke er identisk. Først presenteres inputparametere og oversiktstegninger over Julsundet gitt av Statens vegvesen. Deretter beregnes statisk horisontalkraft og det nødvendige konstruktive tverrsnittsarealet for bærekablene før egensvingeformer med tilhørende egenfrekvenser beregnes. Her diskuteres kort hva som er korrekte løsninger for svingning i y -retning og alle egenfrekvensene sammenlignes med beregninger i ALVSAT. Så presenteres valg av dempefaktorer for de forskjellige svingeformene.

Før beregning av den dynamiske responsen kan begynne bestemmes de nødvendige værddata for Julsundet etter gjeldende standarder. Basert på den karakteristiske middelvindhastigheten kan de aerodynamiske deriverte for broens tverrsnitt beregnes. Da teorien i kapittel 2 er utledet med analytiske funksjoner og Matlab benytter numeriske beregninger diskuteres korrekt diskretisering av både x -aksen og frekvens-aksen.

Før beregningen av den dynamiske responsen med massedemper kan gjennomføres diskuteres det kort hvilke svingeformer det er aktuelt å se på. Den dynamiske responsen regnes først for vertikal z -retning og deretter for torsjon i θ -retning. Begge disse beregningene er bygd opp ved at de optimale egenskapene til massedemperen bestemmes før responsspektrum og maksrespons beregnes. Deretter ses det på hvordan massedemperen vil påvirke andre svingeformer enn den er optimert for og for z -retning beregnes i tillegg responsen for en alternativ plassering av massedemperen. Avslutningsvis beregnes den relative responsen mellom massedemperen og bruene da denne er vel så interessant som bruens respons.

3.1 Inputparametere

Oppriss og tverrsnitt av Julsundet slik det er gitt av Statens vegvesen er presentert i figur 3.1 og de mekaniske egenskapene er vist i tabell 3.1.

Tabell 3.1 - Inputverdier Julsundet [16]

Geometri		
L	1625 m	Lengde hovedspenn
B	32 m	Bredde brubjelke
D	4 m	Høyde tverrsnitt brubjelke
h_s	65 m	Seilingshøyde (fra MSL til uk. avstivningsbærer)
e_c	162,5 m	Største kabelheng for bærekabel
b_c	28 m	c/c avstand mellom bærekabler
h_m	5,025 m	Korteste hengestagslengde
h_r	2,032 m	Avstand fra skjærsenter til topp avstivningsbærer
Stivhetsdata		
I_y	3,189 m ⁴	2. ordens arealmoment om y-akse, avstivningsbærer
I_z	97,51 m ⁴	2. ordens arealmoment om z-akse, avstivningsbærer
I_t	8,409 m ⁴	St. Venants torsjonskonstant
I_w	75,76 m ⁶	Hvelvingsparameter
Masse		
m_y	16600 kg/m	Masse pr. meter brubjelke for bevegelse i y-retning
m_z	16600 kg/m	Masse pr. meter brubjelke for bevegelse i z-retning
m_c	3200 kg/m	Masse pr. meter en hovekabel
m_θ	1250000 kg·m ² /m	Massetreghetsmoment rotasjon brubjelken
m_h	355 kg/m	Masse pr. meter hengestag
m_{feste}	97 kg/m	Masse pr. meter øvre hengestagsfeste
Bærekabel		
A_c	0,375 m ²	Konstruktivt tverrsnittsareal i hver bærekabel
E_c	200 GPa	Elastisitetsmodul bærekabel
f_{uk}	1770 MPa	Bruddstyrke bærekabel
Lastkoeffisienter		
C_D	1,025	Drag med 6% økning pga. hengestag
C_L	-0,367	Løft
C_M	-0,038	Moment
C_L'	2π	Løft - stigningstall
C_M'	$\pi/2$	Moment - stigningstall

3.2 Statisk horisontalkraft og konstruktivt areal

Som det nevnes i kapittel 2.2 er den statiske horisontalkraften \bar{H} viktig da systemets stivhetsegenskaper er svært avhengig av denne, og følgelig er egensvingeformer samt egenfrekvenser svært avhengig også. Den statiske horisontalkraften er beregnet til å være (se vedlegg A1 for beregninger).

$$\bar{H} = 2.39 \cdot 10^8 N \quad (3.1)$$

Ved beregning av minimum konstruktivt tverrsnittsareal i bærekabelen må trafikklasterne også tas hensyn til. *NA-rundskriv 07/2015 - Trafikklast i håndbok N400 Bruprosjektering* fra Statens vegvesen [16] supplerer trafikklasterne gitt i håndbok N400 og skal leses som *forskrift for trafikklaster* fram til den faktiske forskrift er ferdig utarbeidet. Pkt. 5 i dette forskriftet gjelder for dimensjonering av konstruksjonselementer som får lastvirkning fra trafikklaster med influenslengder større enn 500 m. Her beregnes trafikklasterne i hvert kjørefelt som en linjelast lik 9 kN/m og gang og sykkel felt som en linjelast lik 2 kN/m. Eventuelt restareal belastes ikke. Alle kjørefelt og gangfelt belastes samtidig over den maksimale lengden av influenslinjen som har samme fortegn. For Julsundet vil dette være lik hovedspennet på 1625 m. Som det framgår av figur 3.1 har Julsundet fire kjørefelt samt et gang og sykkel felt. Dette gir da en total linjelast pr. meter bruspenn lik

$$q_{last} = 4 \cdot 9 kN/m + 2 kN/m = 38 kN/m \quad (3.2)$$

Denne må legges til m_z (angitt i ligning 3.4).

Lastfaktorene bestemmes i henhold til *NS-EN 1990 tabell NA.A2.4 (B)* gjengitt i tabell 3.2.

Tabell 3.2 - Tabell NA.A2.4 (B) [17]

Vedvarende og forbigående dimensjonerende situasjoner	Permanente laster		Forspenning	Dominerende variabel last (*)	Øvrige variable laster (*)
	Ugunstig	Gunstig			
(Ligning 6.10 a)	$\gamma_{G,j,sup} G_{k,j,sup}$	$\gamma_{G,j,inf} G_{k,j,inf}$	$\gamma_p P$	$\gamma_{Q,1} \psi_{0,1} Q_{k,1}$	$\gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$
(Ligning 6.10 b)	$\xi \gamma_{G,j,sup} G_{k,j,sup}$	$\gamma_{G,j,inf} G_{k,j,inf}$	$\gamma_p P$	$\gamma_{Q,1} Q_{k,1}$	$\gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$

Ligning 6.10 b i tabellen benyttes der kun ugunstige permanente laster og dominerende variable laster er av interesse og

- $\xi = 0.89$.
- $\gamma_{G,j,sup} = 1.35$.
- $\gamma_{Q,1} = 1.35$ for vegtrafikk fra kjøretøy og fotgjengere.

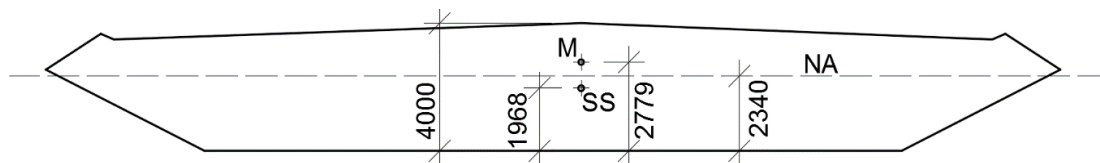
Beregningen av minimum konstruktivt tverrsnittsareal i bærekabelen utføres i henhold til teorien presentert i kapittel 2.2 og blir da (se vedlegg A1 for beregninger)

$$A_c = 0.3715m^2 \quad (3.3)$$

Dette er noe lavere enn inputparameterne gitt i tabell 3.1 der $A_c = 0.375 m^2$. Siden dette er et forprosjekt har Statens vegvesen overdimensjonert kabelen for sikkerhetsskyld [16]. Beregningene utføres derfor med A_c slik den er gitt av Statens vegvesen.

3.3 Egensvingeformer og egenfrekvenser

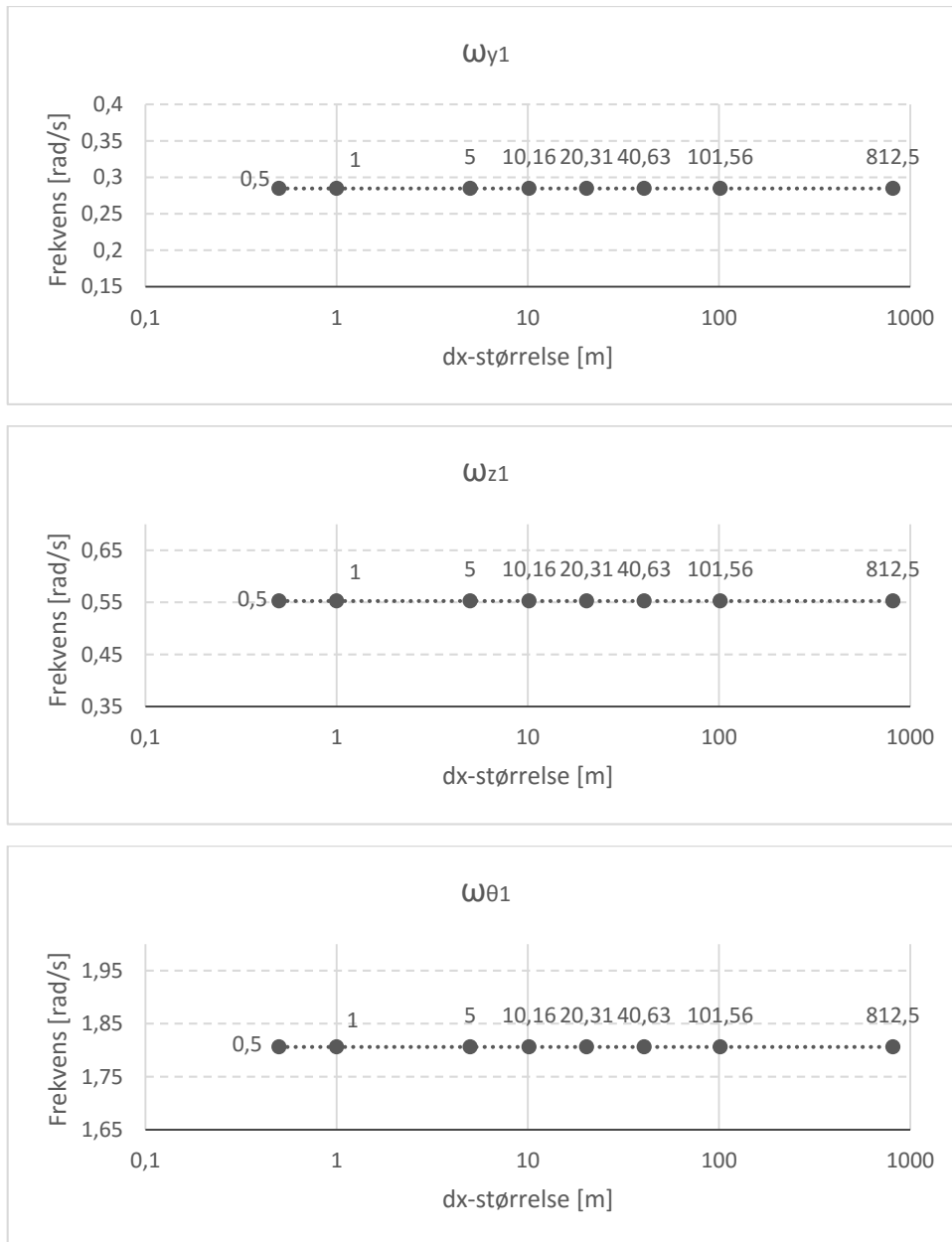
Egensvingeformene og egenfrekvensene beregnes etter teoriene presentert i kapittel 2.3. En av forutsetningene ved utledningen av denne teorien er at skjærsenteret og nøytralaksen til brubjelkens tverrsnitt sammenfaller. Dette er ikke tilfellet for Julsundet. Som det illustreres i figur 3.2 har skjærsenteret (SS) og nøytralaksen (NA) en eksentrisitet i forhold til hverandre på 372 mm, noe som utgjør 9.3% av den totale høyden.



Figur 3.2 - SS, NA og M tverrsnitt avstivningsbærer

Dette fører egentlig til en kobling mellom egensvingeformene. Altså vil en ren horisontalsvingning vil også føre til torsjonssvingninger. Dette kompliserer beregningene av egensvingeformer og egenfrekvenser betydelig og det er vanskelig å si hvor stor betydning 372 mm har. Målet med denne rapporten er først og fremst læring og derfor antas det at denne eksentrisiteten er uten betydning og neglisjeres.

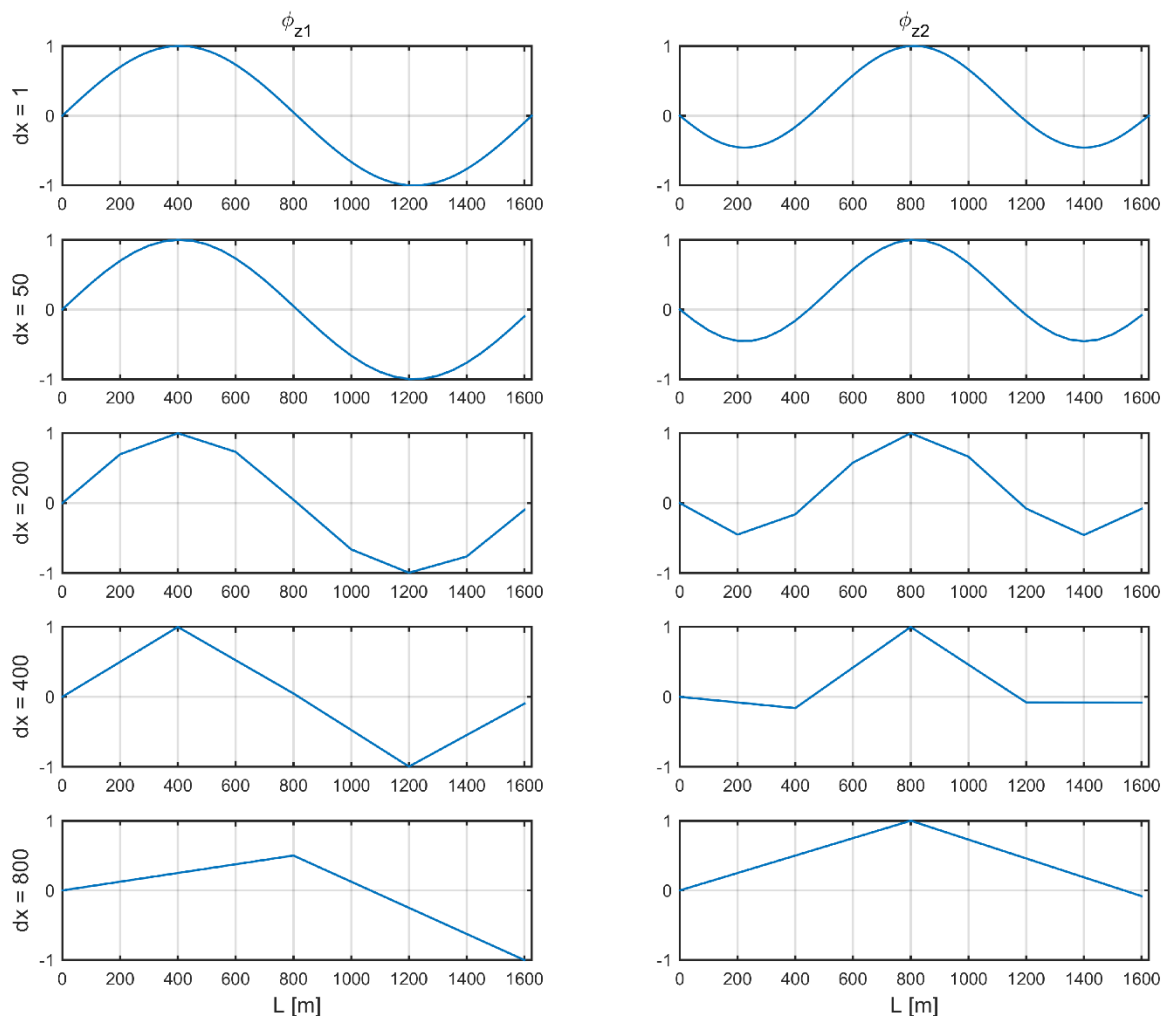
Teorien i kapittel 2.3 presenteres med analytiske funksjoner, men beregninger i Matlab løses numerisk. Et viktig spørsmål er da hva tilfredsstillende inndeling av x -aksen er. Altså hva er et tilstrekkelig lite dx -element? Figur 3.3 viser endringen for den første egenfrekvensen for de tre retningene y , z og θ ved endring av dx -størrelsen. Her er endringen av ubetydelig verdi og det samme gjelder for de andre egenfrekvenser også.



Figur 3.3 - Egenfrekvenser som funksjon av dx-størrelse

Dette bekreftes ved å se på ligningene i kapittel 2.3. Der er kun integralet γ_{pn} i ligning 2.31 avhengig av x , men da denne integrasjonen utføres av Matlabs egen integrasjonsfunksjon (se vedlegg A2) har følgelig dx ingen betydning.

Det som derimot påvirkes av inndelingen av x -aksen er egensvingeformene. Dette er som sagt analytiske funksjoner som tilnærmes numerisk og som det illustreres i figur 3.4, for ϕ_{z1} og ϕ_{z2} med forskjellige dx -størrelser, har inndelingen av x -aksen betydning.



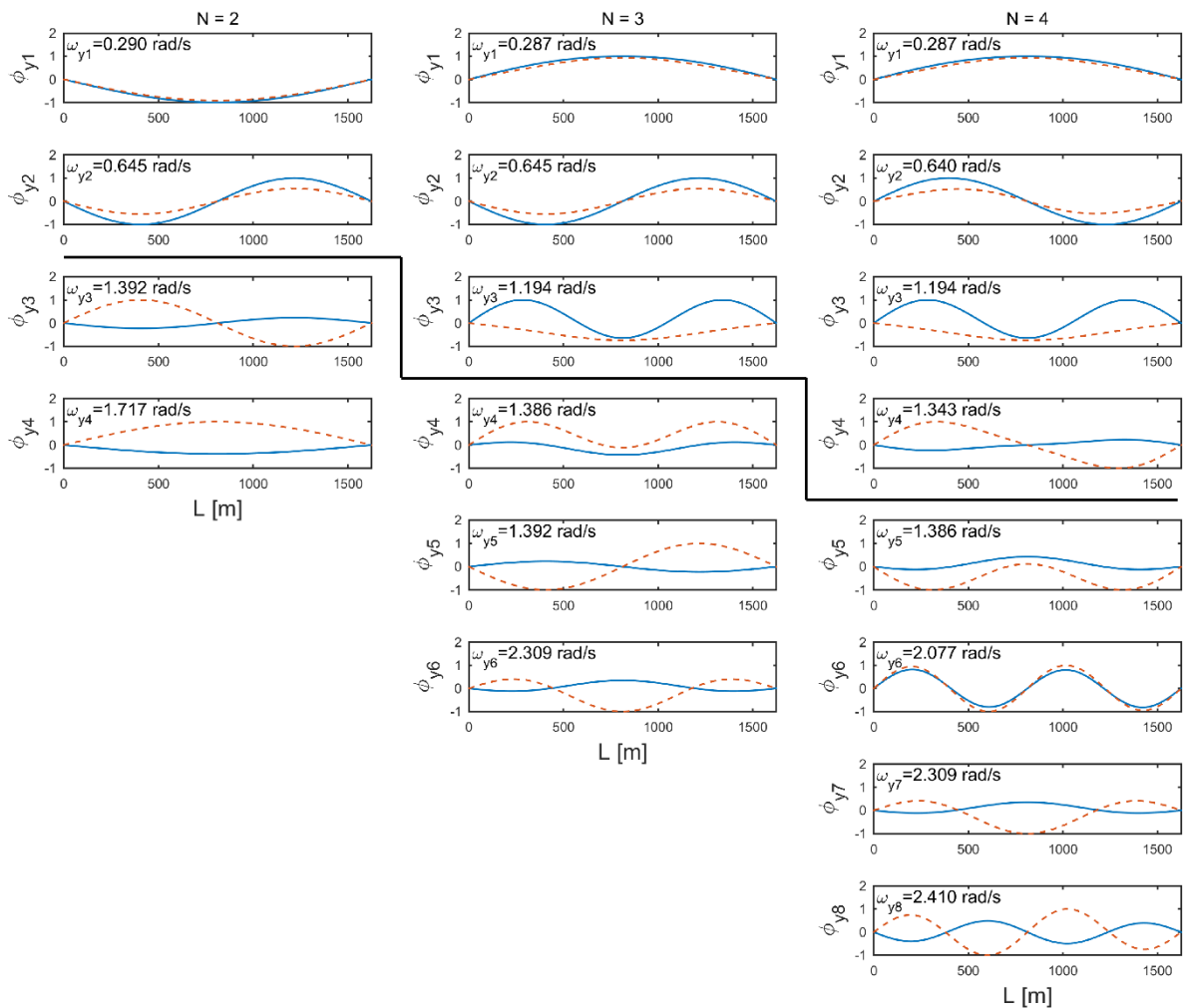
Figur 3.4 - Egensvingeform med forskjellige dx-størrelse

Hvis sluttresultatet var egensvingeformene ville inndelingen av x -aksen være en vurderingssak med tanke på presentasjon, men da disse skal benyttes i beregninger av responspektrum er dx -størrelse av betydning. Dette diskuteres nærmere i kapittel 3.7.1.

Som det nevnes i kapittel 2.3.1 vil beregning av egensvingeformer og egenfrekvenser for vertikal y -bevegelse gi dobbelt så mange resultater som forespeilet. Altså når N for eksempel er valgt til å være to vil regnestykket gi fire mulige svar. Spørsmålet blir da om alle disse svarene kan brukes.

Som det framgår av figur 3.5 konvergerer egenfrekvensen til ϕ_{y1} ved $N = 3$ og ϕ_{y2} ved $N = 4$. Egenfrekvensen til ϕ_{y3} vil konvergere ved $N = 5$ osv. for høyere egenfrekvenser. Det ses også av figur 3.5 at egensvingeformen er den samme for alle N , men ikke for siste halvdel av resultatene. Altså $N = 2$ gir fire egensvingeformer, men kun de to første stemmer for alle N .

Og $N = 3$ gir seks egensvingeformer, men kun de tre første stemmer for alle N , osv. Første halvdel av resultatene stemmer derfor for alle N . Det betyr ikke at det ikke er noen resultater som stemmer overens for forskjellige N i andre halvdel. For eksempel er ϕ_{y3} for $N = 2$ den samme som ϕ_{y5} for $N = 3$, og ϕ_{y4} og ϕ_{y6} for $N = 3$ stemmer med henholdsvis ϕ_{y5} og ϕ_{y7} for $N = 4$. Siste halvdel gir dermed også en del svar som samstemmer for forskjellige verdier av N , men ved forskjellig nummerering av egensvingeform. Det som også er viktig å merke seg er at ingen av svarene i siste halvdel har tilsvarende svar i første halvdel. Derfor forkastes siste halvdel av egensvingeformene i y -retning og kun de N første egensvingeformene og egenfrekvensene benyttes. Det er ikke utført noen videre undersøkelser i denne rapporten om hva siste halvdel av resultatene representerer.



Figur 3.5 - Sammenligning egensvingeformer y -retning

Når egensvingeformene beregnes neglisjeres elastisiteten til hengestagene (se kapittel 2.3.1) og dermed ekskluderes disse fra beregningene og følgelig inkluderes ikke vekten heller. Halve vekten av hengestagene legges derfor til i m_z og andre halvdel i m_c [8]. Dermed blir (se tabell 3.1 for inputverdier)

$$\begin{aligned} m_z &= 16600 \text{ kg/m} + 2 \cdot 355 \text{ kg/m} \cdot \frac{1}{2} = 16955 \text{ kg/m} \\ m_c &= 3200 \text{ kg/m} + \frac{1}{2} \cdot 355 + 97 \text{ kg/m} = 3474.5 \text{ kg/m} \end{aligned} \quad (3.4)$$

De 14 første, samt den 22., 28., 34. og 39. egenfrekvensen beregnet i Matlab er sammenlignet med det som er beregnet med dataprogrammet ALVSAT. Det viste seg imidlertid å være forholdsvis store avvik for noen av egenfrekvensene (se tabell 3.4). Verken Matlab beregningene eller beregningene i ALVSAT tar hensyn til virkningene av tårnene. ALVSAT inkluderer både overhøyden til avstivningsbæreren samt virkningen av bardunene, noe som ikke gjøres i Matlab. For å undersøke hvorvidt dette er årsakene til avvikene er ALVSAT beregningene gjennomført for fire forskjellige tilfeller presentert i tabell 3.3.

Tabell 3.3 - ALVSAT tilfeller

ALVSAT tilfeller	Forklaring
Tilfelle 1	Beregningene inkluderer overhøyden til avstivningsbæreren samt lengden og vinkelen til bardunene. Dette er tilfellet nærmest virkeligheten.
Tilfelle 2	Beregningene inkluderer lengden og vinkelen til bardunene, men ekskluderer overhøyde til avstivningsbæreren (dvs. 0 m overhøyde)
Tilfelle 3	Beregningene inkluderer overhøyden på avstivningsbæreren, men ekskluderer lengden og vinkelen til bardunene (dvs. 0 lengde og vinkel)
Tilfelle 4	Beregningene ekskluderer overhøyden til avstivningsbæreren samt lengden og vinkelen til bardunene. Dette er nærmest tilfellet programmert i Matlab.

Tilfelle 1 er sammenlignet med Matlab-resultatene og presentert i tabell 3.4 (se vedlegg B for beregninger) der følgende forkortelser benyttes av ALVSAT:

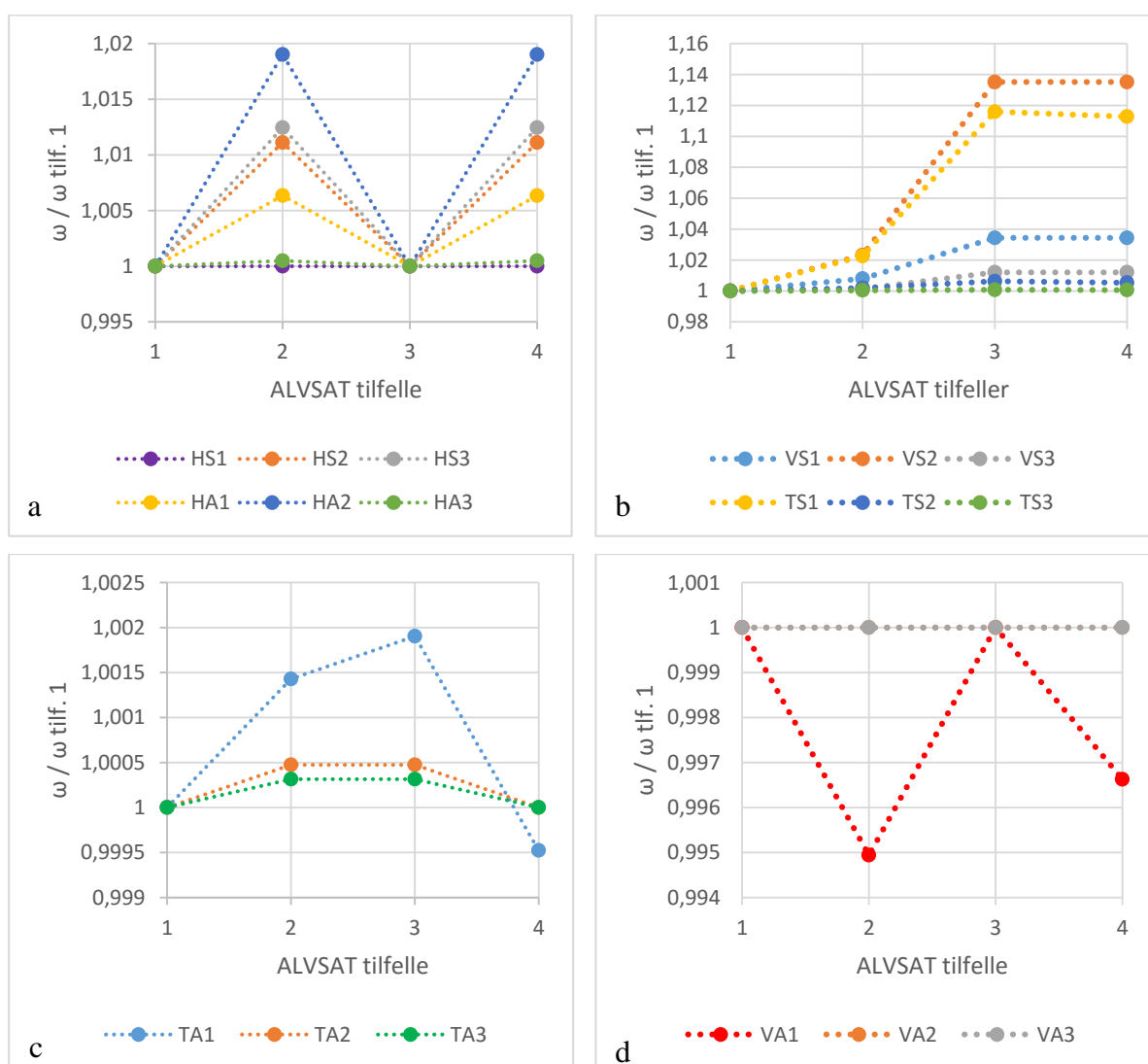
- HS = Horisontal Symmetrisk
- HA = Horisontal Asymmetrisk
- VS = Vertikal Symmetrisk
- VA = Vertikal Asymmetrisk
- TS = Torsjon Symmetrisk
- TA = Torsjon Asymmetrisk

Både den 2. 6. og 12. egenfrekvensen har store avvik i forhold til hverandre. Differansen er også inkludert da et prosentmessig avvik for høyere egensvingeformer ikke nødvendigvis er så stort selv om differansen er stor. Hva som er for stor differanse er vanskelig å vurdere, men her er alle differanser over 0.03 rad/s markert (noe som utgjør ca. 20% av den gjennomsnittlige frekvensavstanden mellom svingeformene).

Tabell 3.4 - Egenfrekvenser Matlab og ALVSAT tilf. 1

Matlab		ALVSAT (tilf. 1)		Avvik [%]	Differanse
Svingeform	ω [rad/s]	Svingeform	ω [rad/s]		
1	0,287	HS1	0,284	1,0	0,003
2	0,552	VA1	0,593	7,4	0,041
3	0,640	HA1	0,630	1,6	0,010
4	0,771	VS1	0,757	1,8	0,014
5	1,138	VA2	1,158	1,8	0,020
6	1,171	VS2	1,036	11,5	0,135
7	1,193	HS2	1,170	1,9	0,023
8	1,341	HA2	1,315	1,9	0,026
9	1,385	HS3	1,365	1,4	0,020
10	1,492	VS3	1,496	0,3	0,004
11	1,788	VA3	1,817	1,6	0,029
12	1,806	TS1	1,596	11,6	0,210
13	2,076	HA3	2,061	0,7	0,015
14	2,147	TA1	2,101	2,1	0,046
22	3,230	TS2	3,197	1,0	0,033
28	4,231	TA2	4,220	0,3	0,011
34	5,289	TS3	5,279	0,2	0,010
39	6,333	TA3	6,328	0,1	0,005

De fire tilfellene er presentert i figur 3.6 der x -aksen representerer ALVSAT-tilfeller og y -aksen viser egenfrekvensene i forhold til egenfrekvensen i ALVSAT tilfelle 1 ($\omega_i/[\omega_i \text{ tilf. 1}]$). Som det framgår av figur 3.6.a påvirkes alle de horisontale svingeformene, både symmetriske og asymmetriske, kun av overhøyden til avstivningsbæreren. HA2 påvirkes mest der en helt flat avstivningsbærer gir en endring på 1.9% i forhold til en avstivningsbærer med ca. 20 m overhøyde. Bardunene har derfor ingen påvirkning på de horisontale svingeformene.



Figur 3.6 - Utvikling av egenfrekvenser for ALVSAT-tilfeller

Figur 3.6.b viser at de symmetriske svingeformene for både vertikalbevegelse og torsjon følger samme trend. Tilfelle 2 gir en liten økning i egenfrekvens, tilfelle 3 gir en stor økning i egenfrekvens og tilfelle 4 (altså kombinasjonen av tilfelle 2 og 3) gir en litt mindre økning enn

tilfelle 3. Dette betyr at virkningen til bardunene har stor betydning for disse svingeformene og overhøyden til avstivningsbæreren er av mindre betydning. For eksempel opplever VS2 og TS1 en endring på henholdsvis 13.5% og 11.6% i tilfelle 3.

Figur 3.6.c viser utviklingen til de asymmetriske svingeformene i torsjon. Disse endringene antas å være ubetydelig da største forskjell er i underkant av 2‰. Dette kan likeså godt være pga. avrunderinger og verken virkningen av bardunene eller overhøyden til avstivningsbæreren har noen betydning her.

Figur 3.6.d viser at de vertikale asymmetriske svingeformene heller ikke påvirkes i betydelig grad av verken bardunene eller overhøyden. Det er kun VA1 som viser merkelig oppførsel, men endringene er fortsatt i underkant av 0.5%.

I likhet med tilfelle 1 i tabell 3.4 sammenlignes egenvingeformene for tilfelle 4 med beregningene gjennomført i Matlab og presenteres i tabell 3.5 (se vedlegg C for beregninger). Dette tilfellet er nærmest de antagelsene gjort ved beregninger i Matlab. Nå er de store avvikene til 6. og 12. egenfrekvens, altså VS2 og TS1 forsvunnet. Dette er de egenfrekvensene som ble mest påvirket av virkningen til bardunene i figur 3.6.b.

Tabell 3.5 - Egenfrekvenser Matlab og ALVSAT tilf. 4

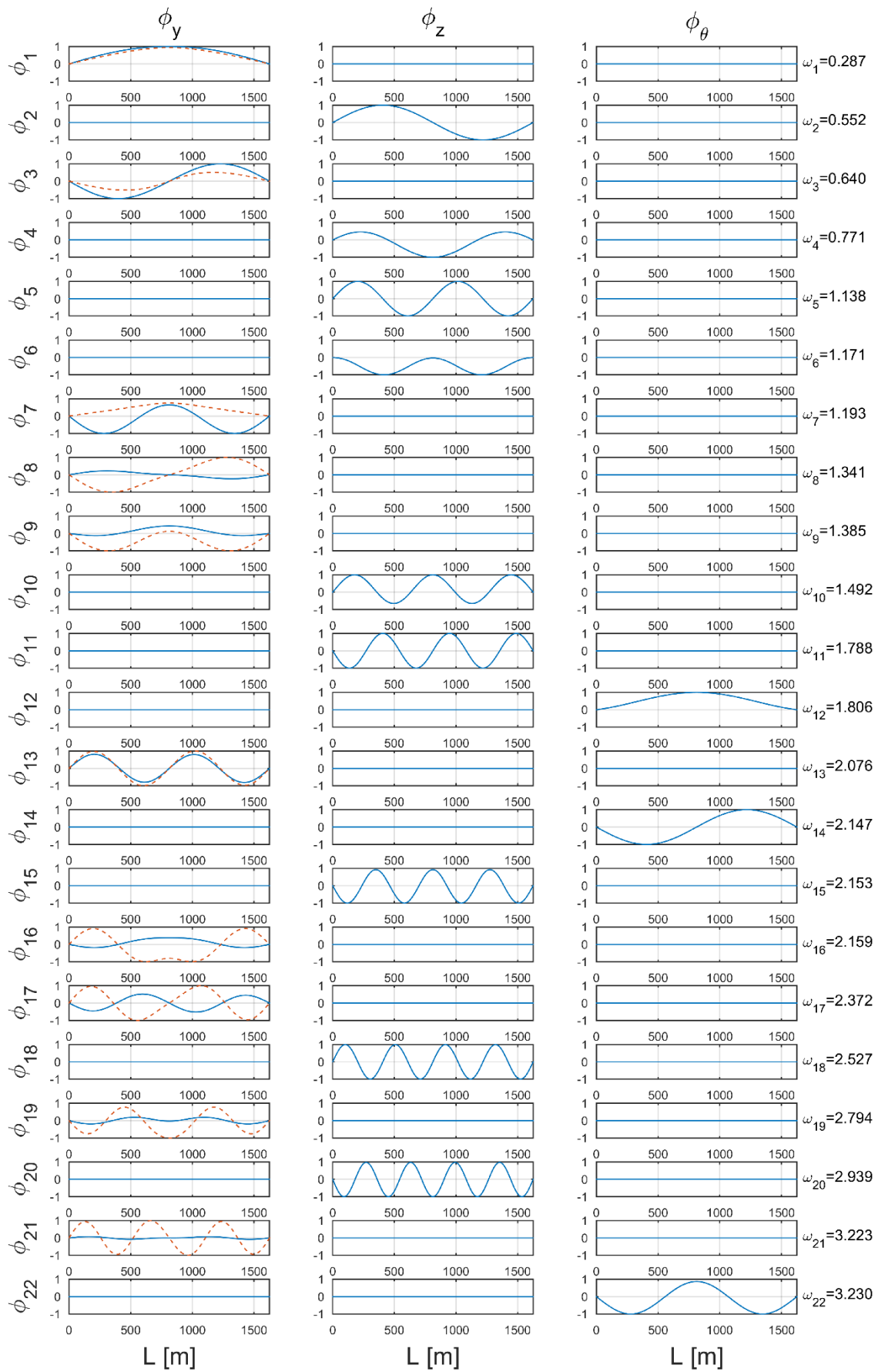
Matlab		ALVSAT (tilf. 4)		Avvik [%]	Differanse
Svingeform	ω [rad/s]	Svingeform	ω [rad/s]		
1	0,287	HS1	0,284	1,0	0,003
2	0,552	VA1	0,591	7,1	0,039
3	0,640	HA1	0,634	0,9	0,006
4	0,771	VS1	0,783	1,6	0,012
5	1,138	VA2	1,158	1,8	0,020
6	1,171	VS2	1,176	0,4	0,005
7	1,193	HS2	1,183	0,8	0,010
8	1,341	HA2	1,340	0,1	0,001
9	1,385	HS3	1,382	0,2	0,003
10	1,492	VS3	1,514	1,5	0,022
11	1,788	VA3	1,817	1,6	0,029
12	1,806	TS1	1,776	1,7	0,030
13	2,076	HA3	2,062	0,7	0,014
14	2,147	TA1	2,100	2,2	0,047
22	3,230	TS2	3,214	0,5	0,016
28	4,231	TA2	4,220	0,3	0,011
34	5,289	TS3	5,282	0,1	0,007
39	6,333	TA3	6,328	0,1	0,005

I tillegg til y -, z - og θ -retning regner også ALVSAT i x -retning. Forskyvning i x -retning fører til deformasjoner i vertikalretning som ligner på VA1 [13]. Dette kan være grunnen til det fortsatt store avviket til 2. egenfrekvens.

Som det framgår av tabell 3.5 er resultatene fra Matlab svært like resultatene fra ALVSAT og det kan derfor antas at beregningene i Matlab er korrekte.

Det er også verdt å nevne at selve programkoden til ALVSAT ikke er studert. Det er derfor vanskelig å si noe om uønskede konsekvenser av å fjerne overhøyden til brubjelken eller lengden og vinkelen til bardunene. Dette er en mulig feilkilde ved sammenligning av egenfrekvensene.

De 22 første egensvingeformene med tilhørende egenfrekvenser som beregnet i Matlab er vist i figur 3.7 der stippet linje representerer kablene.



Figur 3.7 - De 22 første eigensvingeformene for Julsundet

3.4 Damping

Damping er et vanskelig tema innenfor konstruksjonsdynamikk og baserer seg i stor grad på tidligere forsøk. Det er vanskelig å gjennomføre forsøk for høye egensvingeformer og derfor er det som regel kun de modale dempeegenskapene for de laveste egensvingeformene som kan finnes i litteraturen [8]. For hengebruer er det ofte vanlig å anta en modal dempefaktor på 0.005 for de laveste egensvingeformene for alle retninger [16]. Det er rimelig å anta at dempefaktoren øker for høyere egensvingeformer [8], men det er vanskelig å bestemme noen spesifikke verdier. Veiledende verdier som en første tilnærming på hva som kan forventes for denne typen bruer er oppgitt i tabell 3.6.

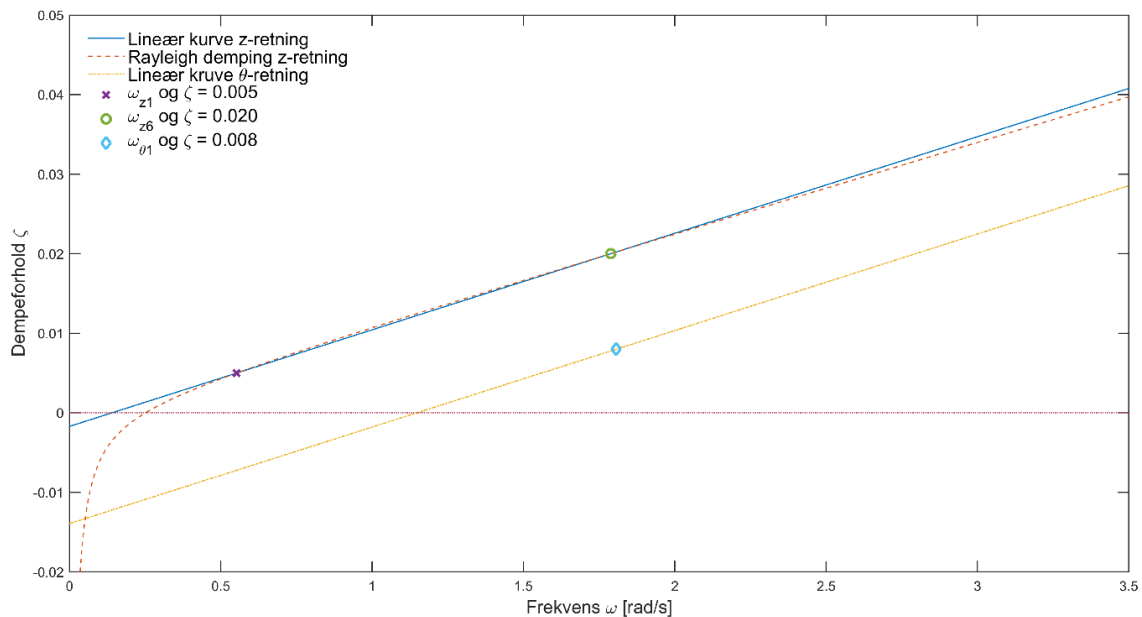
Tabell 3.6 - Veiledende dempefaktorer [13]

Svingeform (egenfrekvens ω_{mi})	Dempefaktor ζ
ω_{z1}	0.005
ω_{z6}	0.020
$\omega_{\theta 1}$	0.008

Håndbok *N400 Bruprosjektering* pkt. 8.5.4 bestemmer at ved beregning av den dynamiske responsen til stålkonstruksjoner kan, dersom ikke mer nøyaktige verdier dokumenteres, dempingen antas å være i området mellom 0.005 og 0.008 [9]. Det står ikke noe om hvilke svingeformer dette gjelder, men antageligvis er dette for de første svingeformene. Verdiene i tabell 3.6 virker derfor å være fornuftige.

Dette er kun dempeverdier for tre egensvingeformer, noe som ikke er nok i dette tilfellet. For å bestemme dempeegenskaper til alle egensvingeformene basert på denne tabellen kan teorien om Rayleigh damping basert på to punkt (ω_1 , ω_2 , ζ_1 og ζ_2) benyttes [8].

Som det framgår av figur 3.8 kan Rayleigh dempingen for z-retning enkelt tilnærmes med en lineær graf. Variasjonen som oppstår pga. dette er svært liten og når det i tillegg er snakk om faktorer som er såpass usikre antas det at den lineære tilnærmingen er god nok. Dempefaktorene for svingninger i θ -retning illustreres også i figur 3.8 og antas å ha samme stigningstall som z-retning, men gjennom punktet oppgitt i tabell 3.6. Som det skal diskuteres i kapittel 3.8 er det i hovedsak svingninger i z-, og θ -retning som er av interesse og dermed er dempeegenskapene i y-retning av liten betydning. Det velges derfor en konstant dempefaktor på 0.005 for alle svingeformer i y-retning.



Figur 3.8 - Damping

3.5 Vindfeltets karakteristiske egenskaper

Bruen tilhører *vindlastklasse III*. Som i Statens vegvesen *håndbok N400 Bruprosjektering* pkt. 5.4.3.1 defineres for bruer med høyeste egensvingeperiode $\geq 2s$ ($T_{y1} = 21.9s$) og spennvidden $\geq 300m$ [9]. Dette omfatter brukonstruksjoner med utpreget dynamisk lastvirkning fra vind. For bruer i vindlastklasse I hadde det vært tilstrekkelig å kun definere middelvindhastigheten og turbulensintensiteten, men i henhold til N400 pkt. 5.4.3.2 skal værdataen til bruer i vindlastklasse II og III også inkludere bestemmelse av integrale lengdeskalaer, ettpunks turbulensspekter (vindspektrum) og normaliserte kospekter. Disse faktorene beskriver vindfeltets karakteristiske egenskaper og er tilstrekkelig for å kunne beregne buffeting vindlasten. Alle faktorene bestemmes på bakgrunn av bestemmelser gitt i N400 pkt. 5.4.3.2.

Først beregnes middelvindhastigheten også kalt stedsvindhastigheten. Dette er den delen av vindfeltet som ansees konstant ved en gitt høyde. Altså varierer den ikke med tiden, bare med høyden over terrenget. N400 pkt. 5.4.3.2 angir den til å være

$$V_m(z_f, T, R) = V_{b,0} \cdot C_{dir} \cdot C_{season} \cdot C_{alt} \cdot C_{prob} \cdot C_0(z_f) \cdot C_r(z_f) \quad (3.5)$$

Der z_f er høyden over terrenget, $T = 600s$ (en statistisk midlingsperiode) og $R = 1/p$ der R er returperioden og p er sannsynligheten for overskridelse. Koeffisientene i likningen 3.5 finnes i vindlaststandardens nasjonale tillegg under punkt NA.4.2(2)P [18].

$V_{b,0}$ er referansevindhastigheten og bestemmes utfra hvilken kommune konstruksjonen ligger i. Julsundet ligger i Møre og Romsdal fylke, Midsund kommune og tabell NA.4(901.1) i NS-EN 1991-1-4:2005+NA:2009 gir da følgende referansevindhastighet

$$V_{b,0} = 30 \text{ m/s} \quad (3.6)$$

C_{alt} er en faktor som tar hensyn til at vinden øker med økende høyde over havet. Bestemmelse av denne er gitt i punkt NA.4.2(2)P (901.1). For hengebruene over Julsundet settes denne faktoren til 1 siden $V_{b,0} = V_b = 30 \text{ m/s}$, der V_b er en terskelverdi som bestemmer en grense for når C_{alt} øker vindhastigheten. Altså vil beregningen av midlevindhastigheten for steder med referansevindhastighet $V_{b,0} \geq 30 \text{ m/s}$ ikke bli påvirket av C_{alt} .

C_{dir} er en retningsfaktor som tar hensyn til at referansevindhastigheten er gitt med maksimalverdi, uavhengig av vindretning. Altså kan vindhastigheten reduseres dersom man vet med sikkerhet hvilken vindretning som påvirker brua. Konservativt settes denne lik 1 ved beregning av stedsvindhastighet.

NA.4.2(2)P (901.3) omhandler faktoren C_{season} som er en reduksjonsfaktor som avhenger av årstiden. Denne kan også konservativt settes lik 1.

C_{prob} tar hensyn til hvilken returperiode som brukes i prosjekteringen. I følge håndbok N400 punkt 5.4.3.3 brukes det en returperiode på 50 år for å beskrive vindfeltet som virker på konstruksjonen i ferdigtilstand. Punkt NA.4.2(2)P gir at C_{prob} da settes lik 1.

$C_0(z_f)$ er en terrengformfaktor som tar hensyn til terrengets innvirkning på vindhastigheten. Konstruksjoner som ligger ved åser eller skråninger kan oppleve at vindfeltet forsterkes og dette tas hensyn til ved terrengformfaktoren. For bruer vil ikke $C_0(z_f)$ påvirke vindfeltet siden havet gir et flatt terreng. Derfor settes også terrengformfaktoren lik 1.

Terrengets ruhet har stor innvirkning på stedsvindhastigheten. Faktoren $C_r(z_f)$ tar hensyn til dette og er gitt ved likning 4.4 i NS-EN 1991-1-4:2005 og gjengitt her

$$C_r(z) = k_r \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{for} \quad z_{min} \leq z \leq z_{max} \quad (3.7)$$

$$C_r(z) = C_r(z_{min}) \quad \text{for} \quad z \leq z_{min}$$

For å skille mellom ulike terrenggruher er det beskrevet 5 terrengkategorier. Disse er gitt i tabell 3.7.

Tabell 3.7 - Tabell NA.4.1 - Terrengruhetskategorier og tilhørende parametere [18]

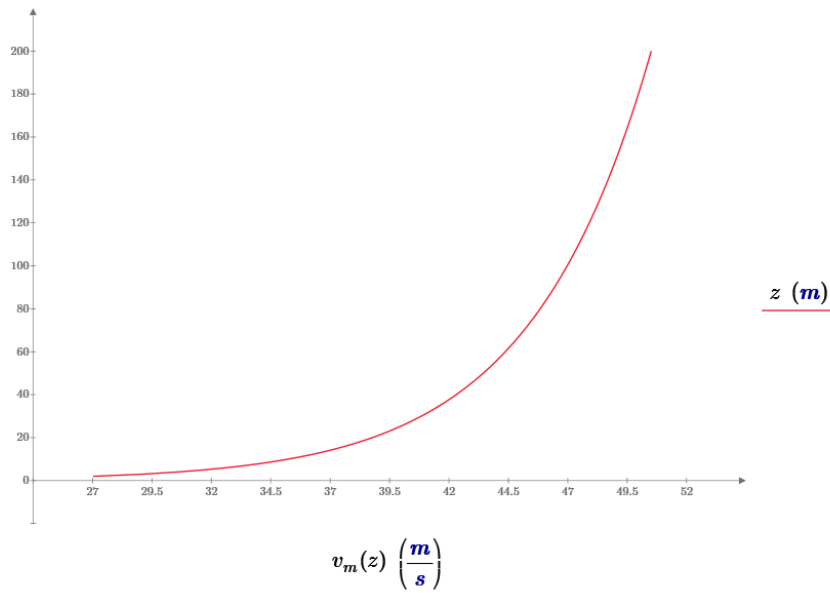
Kategorinummer	Terrengruhetskategori	k_r	z_0 (m)	z_{min} (m)
0	Åpent opprørt hav	0,16	0,003	2
I	Kystnær, opprørt sjø. Åpne vidder og strandsoner uten trær eller busker	0,17	0,01	2
II	Landbruksområde, område med spredte små bygninger eller trær	0,19	0,05	4
III	Sammenhengende småhusbebyggelse, industriområder eller skogsområder	0,22	0,3	8
IV	Byområde der minst 15 % av arealet er dekket med bygninger og deres gjennomsnittlige høyde overskrider 15 m. Barskogområder	0,24	1,0	16

Hver kategori gir verdier for å beregne likning 3.7. Kategorinummer 0 gir høyeste hastighet, mens kategorinummer IV medfører laveste hastighet.



Figur 3.9 - Kartutsnitt Julsundet [19]

Hengebruene over Julsundet skal spenne fra Julholmen til Nautneset. Se figur 3.9. Det som skjærer Julsundet fra Norskehavet er øyen Gossa. Gossa er en relativt lav øy. Den har noen åser, men mesteparten av øyen har en høyde over havet på ca. 40 m. Derfor er det valgt å bruke terrengkategori I som beskriver områder som er kystnær med opprørt sjø. Med parameterverdier fra tabell 3.7 blir vindprofilen for stedsvindhastigheten for Julsundet som vist i figur 3.10.



Figur 3.10 - Middelvindhastighetsprofil for Julsundet

Hengebruene har en seilingshøyde på 65 m over middelvannstand og tverrsnittets skjærsenter ligger 1968 mm fra underkant (se figur 3.1 og 3.2). Dette medfører at $z_f \approx 67m$ og beregnet middelvindhastighet for bruens midtpunkt blir da

$$V_m(z_f = 67m, T = 600s, R = 50\text{år}) = 45 \frac{m}{s} \quad (3.8)$$

I følge N400 pkt. 5.4.3.2 skal det for bruer i vindlastklasse III med spennvidde $> 300m$ alltid gjennomføres vindmålinger på brustedet. Til sammenligning har foreløpige vindmålinger på stedet gitt en middelvindhastighet lik 36.7 m/s [16].

Brubjelken har en radius som gjør at høyeste punkt er midt på bruene og laveste punkt er ved tårnene. Krumningen utgjør en høydeforskjell på ca. 20 m. Selv om dette er en betydelig høydeforskjell, vil ikke middelvindhastigheten endres med mere enn 1.8 m/s. Derfor antas det samme vindhastighet over hele bruspenet.

Ved beregninger av buffetingrespons er det viktig at middelvindhastigheten ikke er i nærheten av en stabilitetsgrense. For Julsundet ligger stabilitetsgrensen i overkant av 70 m/s [16] og buffetingberegninger med en middelvindhastighet på 45 m/s er derfor gyldig.

Turbulensintensiteten defineres som standardavviket av turbulensen dividert med middelvindhastigheten. Turbulensintensiteten i vindens hovedstrømsretning bestemmes etter *NS-EN 1991-1-4:2005+NA:2009* pkt. 4.4 [18] og er gitt ved

$$I_v(z_f) = k_l / [c_0(z_f) \ln(z_f/z_0)] \quad (3.9)$$

$c_0(z_f)$ bestemmer virkningen av terrengform, men i henhold til pkt. 4.3.3 kan denne ses bort fra ved typen terreng som områdene rundt Julsundet har. Pkt. NA.4.4 gir faktoren $k_l = 1$ og z_0 er angitt i tabell 3.7.

For tilnærmet homogene strømningsforhold er turbulensintensiteten for w -komponenten gitt av

$$I_w = 0.25 \cdot I_u \quad (3.10)$$

Tabellen nedenfor sammenligner de beregnede verdiene etter *NS-EN 1991-1-4* og de foreløpige vindmålingene på stedet.

Tabell 3.8 - Turbulensintensiteter

	Beregnet verdi	Foreløpige vindmålinger
I_u	0.113	0.14
I_w	0.028	0.06

Som det framgår av tabellen viser de foreløpige vindmålingene at turbulensen er verre enn det som beregnes i standarden. Vindmålingene for Julsundet er ikke ferdig ved utarbeidelsen av denne rapporten og standardens verdier benyttes derfor i videre beregninger.

Både Kaimals auto-spektralitet for turbulenskomponenter gitt i ligning 2.207 og det normaliserte kospektrumet gitt i ligning 2.209 er avhengig av faktorer. Disse faktorene er gitt i N400 og oppsummert i tabell 3.9.

Tabell 3.9 - Faktorer til Kaimal og kospektrum

Kaimal	Kospektrum
$A_u = 6.8$	$c_{uyf} = 10$
$A_w = 9.4$	$c_{wyf} = 6.5$

3.6 Aerodynamiske deriverte

Som vist i figur 2.14 vil vinden medføre at bruene settes i bevegelse. Det kan utfra figuren sees at teorien for buffeting respons tar med konstruksjonens svingninger. Disse svingningene vil gi et bidrag til den totale lasten. Det er dette bidraget som kalles bevegelsesinduserte krefter. De bevegelsesinduserte kreftene kommer til uttrykk i den aerodynamiske stivhet- og dempematrisen. Se ligning 2.129 og 2.130.

For å forbedre teorien bytter man ut innholdet i \mathbf{C}_{ae} og \mathbf{K}_{ae} med aerodynamiske deriverte, ofte forkortet til AD-er. Håndbok *N400 Bruprosjektering* pkt. 5.4.3.6 oppgir at disse størrelsene skal bestemmes med seksjonsmodellundersøkelser i vindtunneler. AD-ene er funksjoner av frekvens, middelvindhastighet og tverrsnittet. På grunn av oppsettet i vindtunneltesten blir dette modale størrelser som ikke uten videre kan brukes i original koordinater i fullskala beregninger [13].

AD-ene som inkluderes i dempe- og stivhetsmatrisen vil igjen bli inkludert i frekvens-respons-funksjonen som er avgjørende for responsen til bruene. Slik sett vil disse koeffisientene være av stor betydning for bruas respons.

Ved beregning av AD-er i denne oppgaven har Statens vegvesen oppgitt inputverdier. Disse er gitt som såkalte *indical function pairs* og er målt ved første symmetriske svingform i torsjon samt andre symmetriske vertikale svingform. Funksjonene kan regnes om til aerodynamiske deriverte i frekvensplanet ved formlene

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi}{\hat{V}} H_1^* &= \frac{dC_L}{d\alpha} \left[1 - \sum_{i=1}^N a_{iLy} \frac{\pi^2}{b_{iLy}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right] \\
 \frac{2}{\hat{V}^2} H_4^* &= \frac{dC_L}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^N a_{iLy} \frac{b_{iLy}}{b_{iLy}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right] \\
 \frac{4\pi}{\hat{V}^3} H_2^* &= \frac{dC_L}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^N -a_{iL\alpha} \frac{b_{iL\alpha}}{b_{iL\alpha}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right] \\
 \frac{4\pi^2}{\hat{V}^2} H_3^* &= \frac{dC_L}{d\alpha} \left[1 - \sum_{i=1}^N a_{iL\alpha} \frac{\pi^2}{b_{iL\alpha}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right] \\
 \frac{2\pi}{\hat{V}} A_1^* &= \frac{dC_M}{d\alpha} \left[1 - \sum_{i=1}^N a_{iMy} \frac{\pi^2}{b_{iMy}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\frac{2}{\hat{V}^2} A_4^* = \frac{dC_M}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^N a_{iMy} \frac{b_{iMy}}{b_{iMy}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right]$$

$$\frac{4\pi}{\hat{V}^3} A_2^* = \frac{dC_M}{d\alpha} \left[\sum_{i=1}^N -a_{iM\alpha} \frac{b_{iM\alpha}}{b_{iM\alpha}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right]$$

$$\frac{4\pi^2}{\hat{V}^2} A_3^* = \frac{dC_M}{d\alpha} \left[1 - \sum_{i=1}^N a_{iM\alpha} \frac{\pi^2}{b_{iM\alpha}^2 \hat{V}^2 + \pi^2} \right]$$

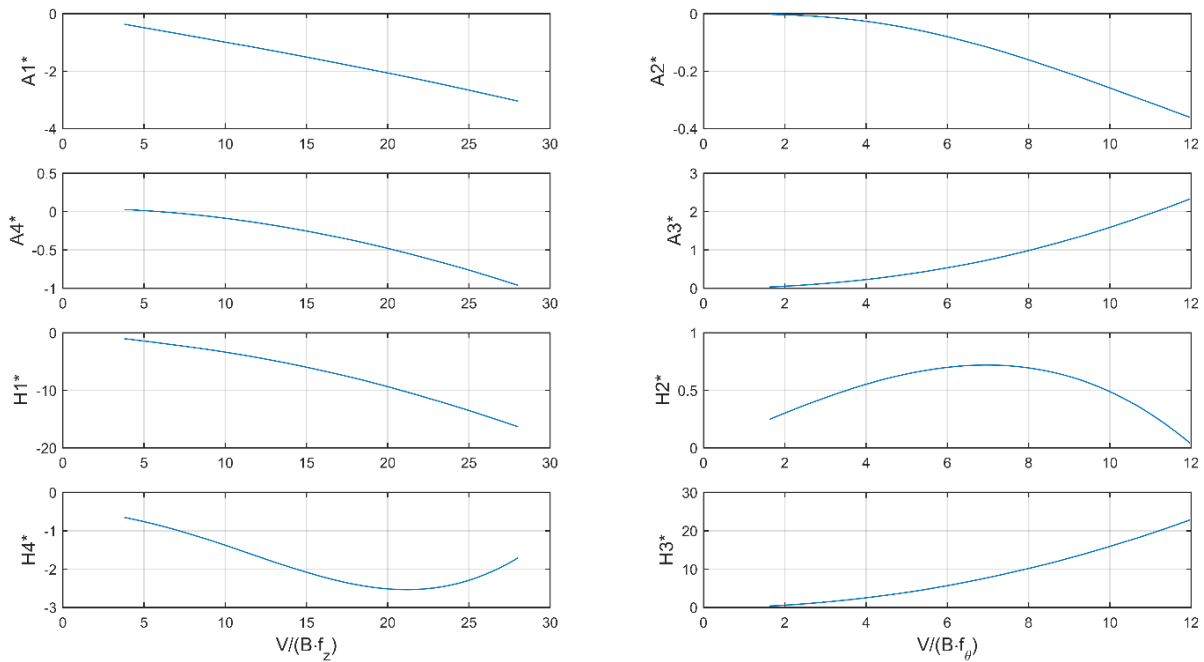
Hvor $\hat{V} = V/(B \cdot f_n)$ er den reduserte vindhastigheten, der V er middelvindhastigheten, B er bredden av brutverrsnittet og f_n er egenfrekvensen i Hz til egensvingeform n . De deriverte lastkoeffisientene er oppgitt som $\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi$ og $\frac{dC_M}{d\alpha} = \frac{\pi}{2}$. Koeffisientene a og b er gitt i tabell 3.10.

Tabell 3.10 - Inputverdier til AD-beregning

	$\Phi_{Ly}(H_1^*, H_4^*)$	$\Phi_{L\alpha}(H_2^*, H_3^*)$	$\Phi_{My}(A_1^*, A_4^*)$	$\Phi_{M\alpha}(A_2^*, A_3^*)$
a_1	2.257E+01	5.418E-01	3.227E+01	1.068E+00
b_1	4.337E-02	3.120E-02	1.091E-02	3.424E-02
a_2	-6.113E-01	1.210E-01	1.558E+00	3.662E-01
b_2	3.508E+00	3.569E-02	2.663E+01	2.061E-01
a_3	-2.128E+01	-1.00E+03	-3.088E+01	-7.775E-01
b_3	4.743E-02	3.220E+03	1.195E-02	9.641E-02

Ved hjelp av denne informasjonen kan de aerodynamiske deriverte regnes ut som funksjoner av den reduserte vindhastigheten og plottes. Se figur 3.11.

Vindhastighetsintervallet er fra 15 m/s til 110 m/s. Bredden B til brutverrsnittet er 32 m, $f_z = \frac{\omega_{z2}}{2\pi} = 0.123 \text{ Hz}$ og $f_\theta = \frac{\omega_{\theta 1}}{2\pi} = 0.287 \text{ Hz}$. Dermed er de aerodynamiske deriverte for ulike vindhastigheter tilgjengelig for videre bruk ved beregning av bevegelsesinduserte krefter i frekvens-respons-funksjonen. I denne oppgaven er det beregnet en stedsvindhastigheten for Julsundet og det er denne som bestemmer verdien av AD-ene videre i beregningene. Den beregnede stedsvindhastigheten er gitt i ligning 3.8 og fører til en redusert vindhastighet for z-retning på $\hat{V}_z \approx 11.43$, og for torsjon $\hat{V}_\theta \approx 4.90$.



Figur 3.11 - Aerodynamiske deriverte

Tabell 3.11 gir verdiene av AD-ene ved den beregnede middelvindhastigheten.

Tabell 3.11 - Verdier av AD-er

AD for z-retning	Beregnet verdi	AD for θ -retning	Beregnet verdi
A_1^*	-1.1391	A_2^*	-0.0468
A_4^*	-0.1296	A_3^*	0.3461
H_1^*	-4.0514	H_2^*	0.6341
H_4^*	-1.5894	H_3^*	3.7686

Som beskrevet i kapittel 3.8 er det i oppgaven valgt å se på første svingeform i torsjon og andre svingeform i vertikal retning. Den aerodynamiske dempingen i z-retning vil være avhengig av H_1^* og aerodynamisk stivhet i z-retning vil være avhengig av H_4^* . For torsjon vil aerodynamisk demping og stivhet bestemmes av henholdsvis A_2^* og A_3^* . Det kan dermed settes opp følgende aerodynamiske koeffisienter for de ulike tilfellene som brukes videre i beregningene av respons, både med og uten massedemper.

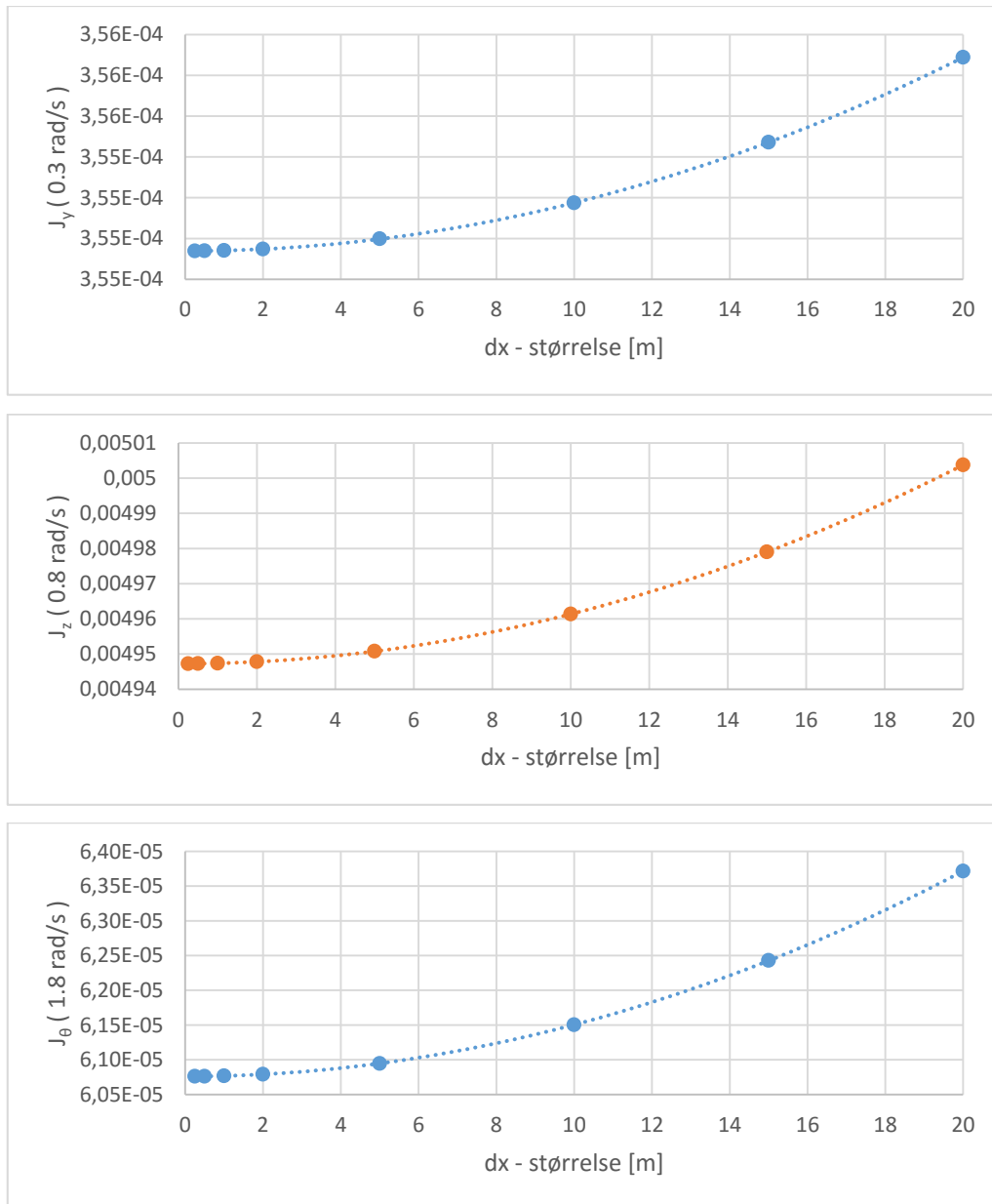
$$\begin{aligned}
c_{ae_z} &= H_1^* \frac{\rho B^2}{2} \omega_z \\
k_{ae_z} &= H_4^* \frac{\rho B^2}{2} \omega_z^2 \\
c_{ae_\theta} &= A_2^* \frac{\rho B^4}{2} \omega_\theta \\
k_{ae_\theta} &= A_3^* \frac{\rho B^4}{2} \omega_\theta^2
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

3.7 Numeriske beregninger

Teorien i kapittel 2 presenteres med analytiske funksjoner, men beregninger i Matlab løses numerisk. Da er det viktig med fin inndeling (dvs. liten stegstørrelse) langs de aksene som representeres med analytiske funksjoner. Finere inndeling betyr at svarene nærmer seg korrekt løsning, men betyr også mer krevende beregninger for datamaskinen. Derfor søkes det etter den størst mulige stegstørrelsen som fortsatt gir korrekt svar. For teoriene presentert i kapittel 2 er det inndelingen av x -aksen og frekvensaksen som er aktuelt.

3.7.1 Diskretisering av x -aksen

Som det nevnes i kapittel 3.3 er korrekt inndeling av x -aksen et viktig spørsmål. Det hadde ingen betydning for beregningen av egenfrekvensene, men for beregning av responsen vil det ha betydning. JAF beskrevet i ligning 2.149 til 2.151 er svært avhengig av inndelingen av x -aksen på grunn av dobbeltintegralet over egensvingeformen. En for stor dx -størrelse vil ikke representere egensvingeformen korrekt (se figur 3.4 for eksempler). JAF for y -, z - og θ -retning er beregnet med forskjellige dx -størrelser for én bestemt frekvens og presentert i figur 3.12. Valg av frekvens har liten betydning da det er effekten av dx som er av interesse. Som det framgår av figuren konvergerer resultatene ved en dx -størrelse lik 1 m for både y , z og θ . Det antas at beregningene av JAF er mest avhengig av dx -størrelsen og at en tilfredsstillende dx -størrelse for JAF også betyr en tilfredsstillende dx -størrelse for øvrige beregninger. I følgende beregninger velges derfor $dx = 1$ m.

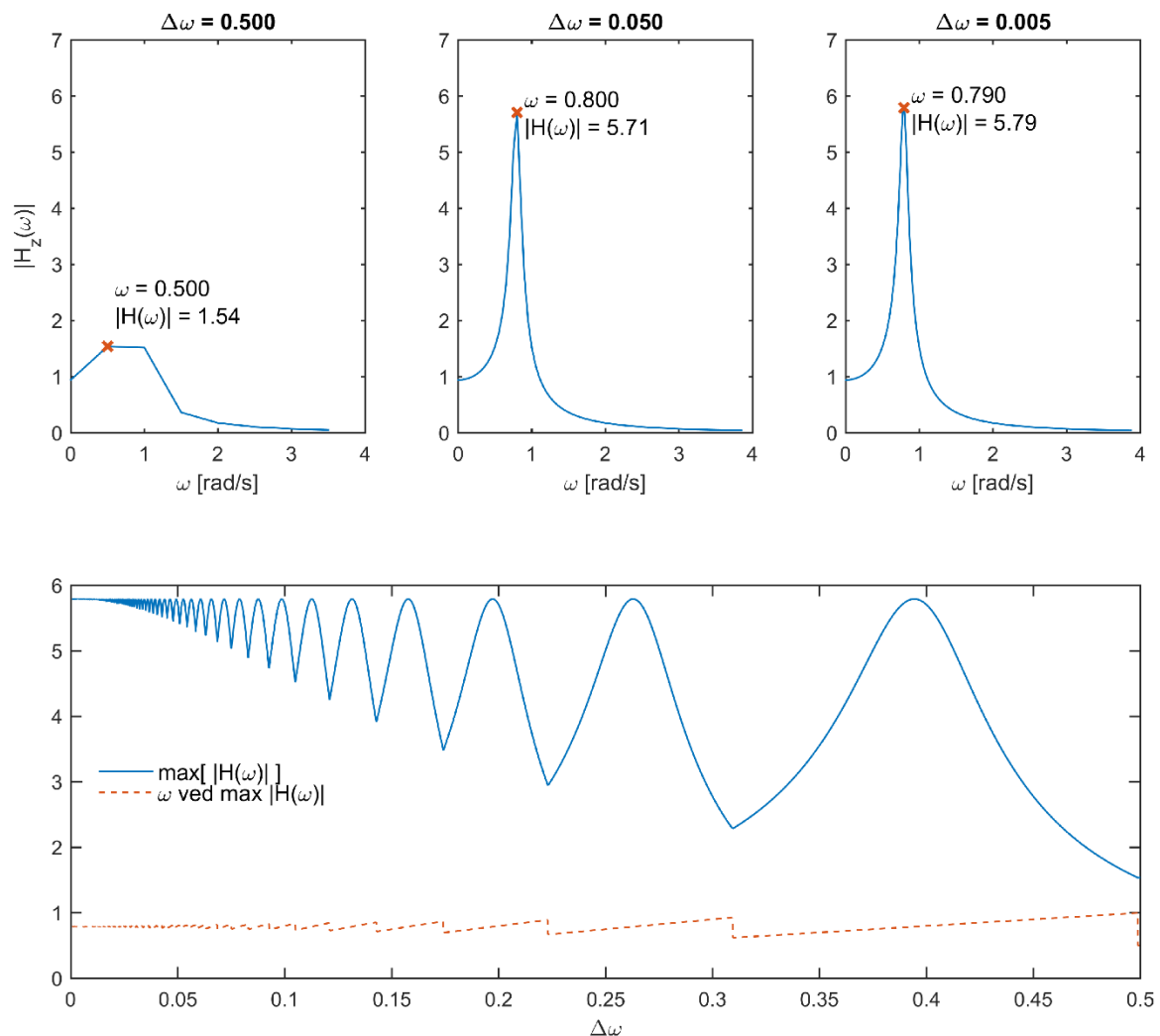


Figur 3.12 - Betydningen av dx for JAF

3.7.2 Diskretisering av frekvensaksen

Vel så viktig som inndelingen av x -aksen er inndelingen av frekvensaksen. Det er svært viktig at toppene på frekvens-respons-funksjonene beskrives korrekt i beregningene. Øvre del av figur 3.13 viser frekvens-respons-funksjonen for andre vertikale svingeform med tre forskjellige verdier av $\Delta\omega$ der toppunktet er markert med tilhørende verdier. Konsekvensen av for stor inndeling av frekvensaksen kommer veldig til syne for $\Delta\omega = 0.5$, men selv ved finere inndeling der resultatet kan framstå som bra (for eksempel ved $\Delta\omega = 0.05$) er det fortsatt avvik.

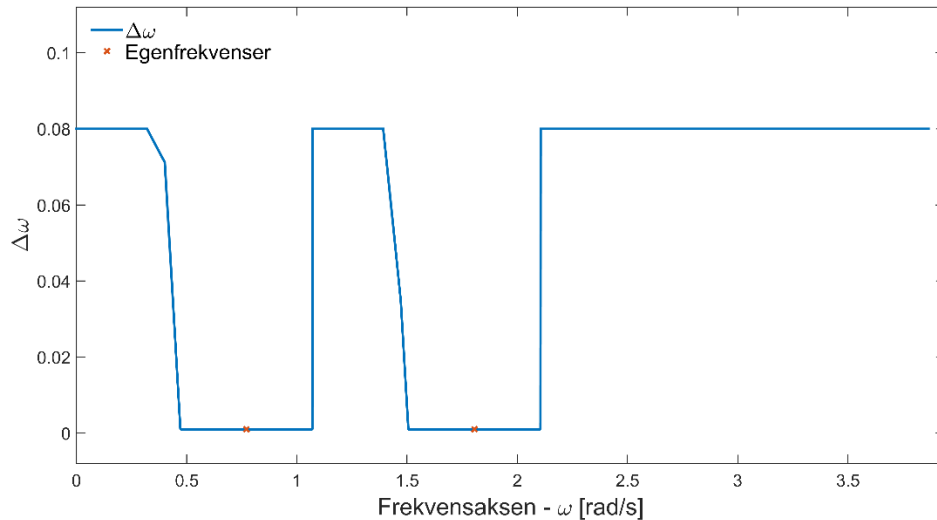
Nedre del av figur 3.13 viser hvordan toppunktet (heltrukken linje) med tilhørende frekvens (stiplet linje) utvikler seg for forskjellige verdier av $\Delta\omega$. Ved en $\Delta\omega = 0.005$ ser resultatet ut til å konvergere. Det antas derfor at dette er en tilfredsstillende inndeling av frekvensaksen som vil gi korrekte resultater ved videre beregninger.



Figur 3.13 - Tilfredsstillende $\Delta\omega$ -størrelse

Det som også framgår av øvre del av figur 3.13 er at inndelingen på frekvensaksen for frekvenser som både er lavere og høyere enn egenfrekvensen ikke behøver å være så fin. For frekvenser over 2 rad/s vil en $\Delta\omega$ så høy som 0.5 gi en god nok beskrivelse av funksjonen. Grunnen til dette er at for frekvenser over 2 rad/s vil frekvens-respons-funksjonen være forholdsvis flat. For en $\Delta\omega = 0.05$ er dette godt nok mye nærmere egenfrekvensen enn 2 rad/s. Da en veldig fin inndeling av frekvensaksen kan føre til lang beregningstid for Matlab velges det kun å ha fin inndeling rundt de egenfrekvensene som er av interesse. Figur 3.14 viser et

eksempel der det skal gjennomføres beregninger for andre vertikalsvingeform (ω_{z2}) og første torsjonssvingeform ($\omega_{\theta1}$). Det antas at tilfredsstillende resultater oppnås med en grov inndeling lik 0.08 rad/s og med båndbredden rundt egenfrekvensen på 0.3 rad/s.



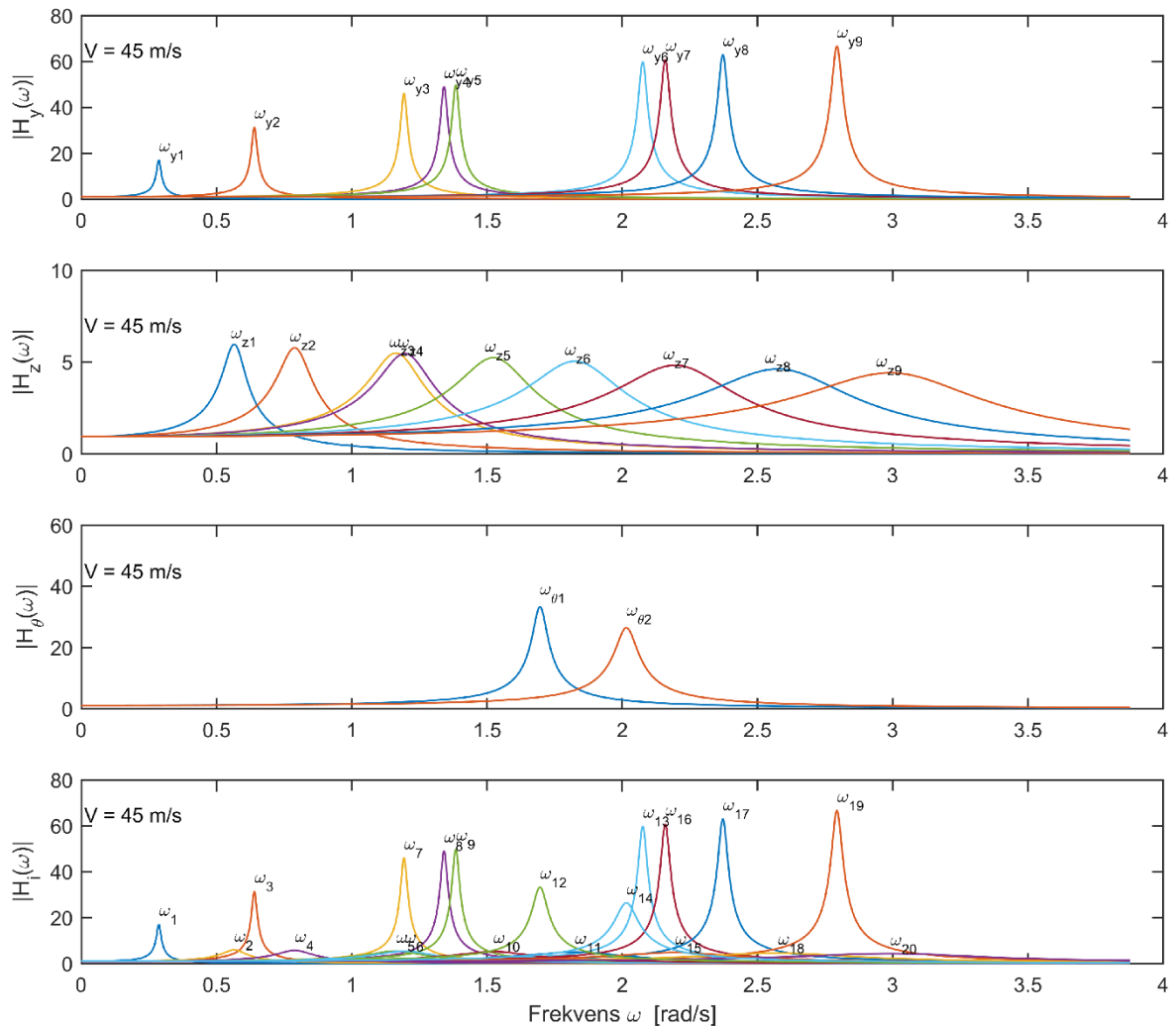
Figur 3.14 – Fin og grov $\Delta\omega$ på frekvensaksen

3.8 Relevante egensvingeformer

Teoriene presentert i kapittel 2.9 har forutsatt at problemet kan løses ved å regne en svingeform med en responskomponent (se ligning 2.131). Ved å se på egensvingeformene i figur 3.7 bekreftes det at denne antagelsen er ok. En annen viktig forutsetning er at egenfrekvensene er godt nok spredt utover frekvensaksen. Hva som er godt nok er et vanskelig spørsmål, men det kan vurderes ved å se på frekvens-respons-funksjonen $|H_{m_i}(\omega)|$ (der $m = y, z, \theta$) og i hvilken grad denne overlappes av andre frekvens-respons-funksjoner [13]. Frekvens-respons-funksjonene for de første 20 egensvingeformene er illustrert i figur 3.15. Her er det veldig tydelig at $|H_{m_i}(\omega)|$ overlapper hverandre. Både innenfor hver retning (de tre øverste plottene i figur 3.15) og der alle retningene er i en sammenstilling (nederste plott i figur 3.15).

Selv om dette ikke gir et konkret svar på om egenfrekvensene er spredt godt nok på frekvensaksen gir det en pekepinn om at de antagelig ikke er det. Det burde da benyttes en multi-svingeform metode for å løse problemet (se ligning 2.133). Likevel vil det ved kontroll i bruddgrensetilstanden ofte være tilstrekkelig med beregningsmetodene for en svingeform med en responskomponent [16]. Da formålet med denne rapporten i hovedsak er læring antas det

derfor at frekvensene er godt nok spredt på frekvensaksen og beregningsmetodene for en svingeform med en responskomponent benyttes videre.

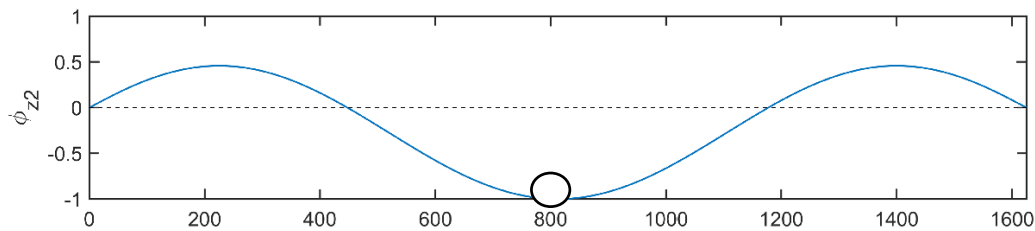


Figur 3.15 - Frekvens-respons-funksjoner for de 20 første svingeformene

I kapittel 3.3 er det regnet ut 22 egensvingeformer, men det er i hovedsak kun de laveste av disse som er av interesse. Som det nevnes i kapittel 2.10 er massedempere mot svingninger i y -retning relativt sett dyre i tillegg til at svingningene sjeldent er et problem. Derfor er resterende beregninger i denne rapporten kun for z - og θ -retning. De egensvingeformene som da er mest aktuelle å dempe ut er første torsjonssvingeform og den laveste vertikalsvingeformen med lignende form [13]. Responsberegningene med massedemper utføres derfor for andre svingeform i z -retning og første svingeform i θ -retning. Disse behandles separat i de to neste delkapitlene.

3.9 Vertikalrespons med TMD

Teorien for massedemperen er presentert i kapittel 2.10 og benyttes her for beregning av respons for andre svingeform i z-retning. Det første som må avgjøres før beregningene kan gjennomføres er hvor massedemperen skal plasseres. Den mest logiske plasseringen er der svingeformen har sitt største utslag. For denne svingeformen er det ved $L/2$ som illustrert i figur 3.16.



Figur 3.16 - Plassering av TMD på ϕ_{zz}

Nå som massedemperens plassering er bestemt kan egenskapene justeres for optimal effekt. Når dette er gjort beregnes responsspektrum og maksrespons før prosessen simuleres i tidsplanet. Deretter ses det på hvordan massedemperen vil påvirke andre svingeformer enn den er optimert for og en alternativ plassering av massedemperen vurderes.

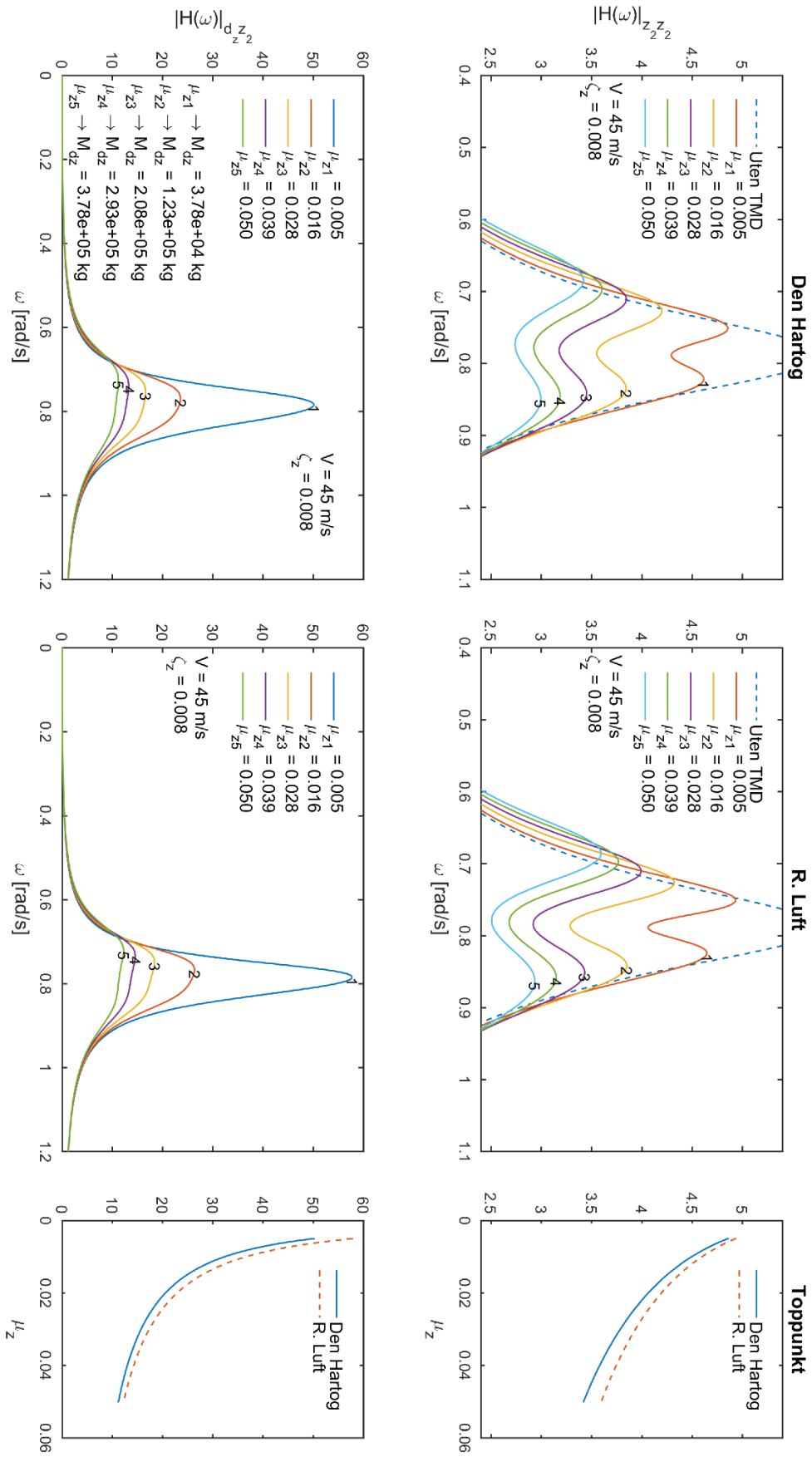
3.9.1 Optimalisering av TMD

Som det vises i kapittel 2.10.4 er det i hovedsak tre faktorer som vurderes ved optimalisering av TMD-er. Det er masseforholdet μ_d , frekvensen ω_d og dempefaktoren ζ_d . Først vurderes optimalt masseforhold før optimal frekvens bestemmes og til slutt vurderes den beste verdien for dempefaktoren.

Masseforholdet $\mu_z = M_d/\tilde{M}_z$ angir massedemperens masse som en prosentandel av den modale massen. Det som vanligvis kan forventes er en μ_z i størrelsesorden fra 0.005 til 0.05 [8]. Figur 3.17 viser både frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{z_2z_2}(\omega)|$ som benyttes ved beregning av brubjelkens respons og $|\hat{H}_{dz_2}(\omega)|$ som inngår i den relative responsen mellom brubjelken og massedemperen (se ligning 2.228). Disse er plottet for en middelvindhastighet på 45 m/s og med μ_z i intervallet 0.005 til 0.05 med tilhørende frekvenser og dempefaktorer som foreslått av både Den Hartog og R. Luft (se kapittel 2.10.4). Som det framgår av figuren vil en høyere verdi

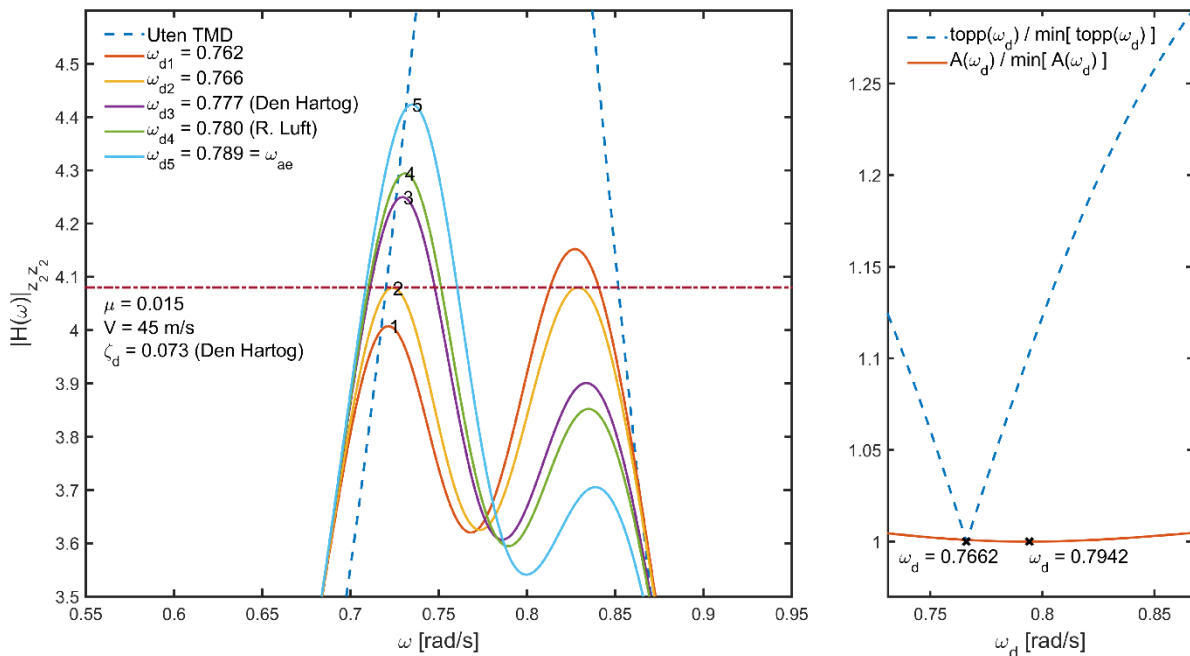
av μ_z gi en lavere frekvens-respons-funksjon for både brubjelken og den relative bevegelsen mellom brubjelken og massedemperen. Dette stemmer bra da en tyngre masse vil ha behov for å bevege seg mindre. Hva som er optimal verdi for μ_z blir derfor vanskelig å bestemme. Selvfølgelig vil en svært høy μ_z gi en veldig lav frekvens-respons-funksjon, men det er også et praktisk spørsmål involvert. Da den modale massen ofte er veldig stor vil massedemperens masse allerede ved en $\mu_z = 0.005$ være i overkant av 37.8 tonn, og ved en $\mu_z = 0.05$ er denne massen økt til over 378 tonn. Ikke bare er dette tungt i forhold til brubjelken som veier 16.6 tonn/m, men det skal også være plass til massen med den nødvendige vandringen for å dempe ut bevegelser. Rapporten går ikke inn på detaljer rundt den praktiske utførelsen av massedemperen. Problemstillingen belyses for å bevisstgjøre at selv om en høy μ_z gir gode resultater er det ikke nødvendigvis uproblematisk å velge en høy μ_z . Dette diskuteres nærmere i kapittel 4.

Masseforholdet kan enklere vurderes ved å se på hvordan toppunktet til frekvens-respons-funksjonen reduseres med økende verdier for μ_z i figur 3.17. Det søkes etter det punktet der gevinsten av å øke μ_z begynner å forsvinne. For $|\hat{H}_{z_2z_2}(\omega)|$ (brubjelkens bevegelser) er ikke dette så lett å se, men for $|\hat{H}_{d_zz_2}(\omega)|$ (relativ bevegelse mellom brubjelken og massedemperen) er det tydeligere. En $\mu_z = 0.015$ ser ut til å være i området hvor gevinsten begynner å avta. Denne forskjellen er også veldig tydelig mellom kurve 1 og 2 for $|\hat{H}_{d_zz_2}(\omega)|$ for både Den Hartog og R. Luft. Masseforholdet for å dempe ut bevegelsene til andre svingeform i z -retning velges derfor til 0.015.



Figur 3.17 - Vurdering av masseforhold for ϕ_{z2}

Figur 3.18 benyttes for å vurdere optimal frekvens til massedemperen. Venstre side viser frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{z_2 z_2}(\omega)|$ for brubjelken plottet for fem forskjellige frekvenser og med en dempefaktor i henhold til Den Hartogs forslag.

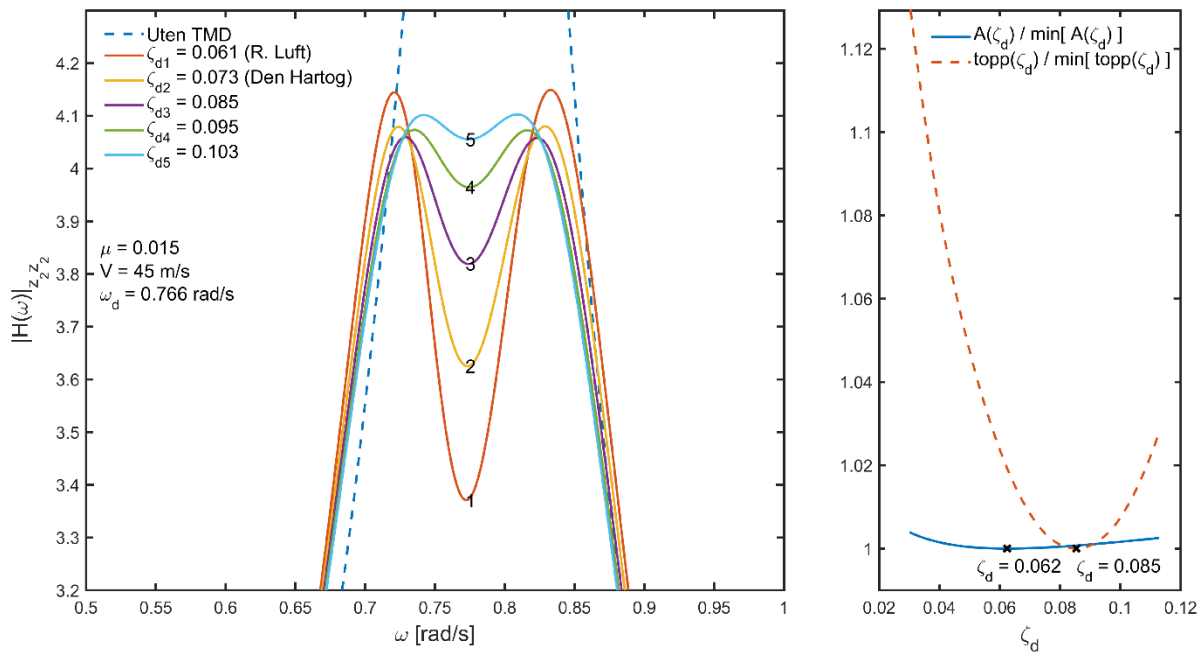


Figur 3.18 - Vurdering av frekvens for ϕ_{z2}

Høyre side av figur 3.18 viser frekvens-respons-funksjonens toppunkt og areal i forhold til minimumspunktet og som funksjon av massedemperens frekvens. Hvis det optimeres for lavest mulig areal vil toppunktet være 1.03% høyere enn minimum toppunkt. Hvis det derimot optimeres for lavest mulig toppunkt vil arealet kun være 0.1% høyere enn minimum areal. Det er da tydelig at det er bedre å optimere frekvensen for lavest toppunkt da man prøver å unngå relativt sett høy respons for enkelte frekvenser. Denne frekvensen fører til at toppene har samme høyde. Dette bør være i henhold til Den Hartogs forslag (angitt i ligning 2.235), men som det framgår av figur 3.18 er det for en noe lavere verdi. Dette kan være på grunn av de aerodynamiske kreftene inkludert i frekvens-respons-funksjonen, noe som ikke er tatt med i Den Hartogs beregninger. Massedemperens frekvens velges derfor til å være 0.7662 rad/s.

Figur 3.19 benyttes for å vurdere den optimale dempefaktoren. Venstre side er frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{z_2 z_2}(\omega)|$ plottet for fem forskjellige dempefaktorer. Mens frekvensen endrer skjevheten til toppene, endrer dempefaktoren høyden rundt og ved egenfrekvensen. Lavere dempefaktor gir lavere frekvens-respons-funksjon ved egenfrekvensen, men høyere toppunkt.

Høyre side av figur 3.19 viser både toppunktet og arealet under $|\hat{H}_{z_2 z_2}(\omega)|$ i forhold til minimumspunktet og som en funksjon av dempefaktoren. Hvis det skulle vært optimert for arealet hadde toppunktet vært 1.9% høyere enn minimum toppunkt, men hvis det blir optimert for toppunktet vil arealet bare være 0.1% høyere enn minimumsarealet. Det er også her tydelig at det er bedre å optimere dempefaktoren for lavest toppunkt enn for lavt areal. Den modale dempefaktoren for massedemperen til andre vertikale svingeform velges derfor å være 0.085.



Figur 3.19 - Vurdering av dempefaktor for ϕ_{z_2}

Legg merke til at R. Lufts optimering stemmer med dempefaktoren som gir lavest areal. Dette er fordi, som forklart i kapittel 2.10.4, at R. Luft søker etter den maksimale dempingen som kan oppnås i systemet. Dette vil være for det laveste arealet da det vil gi lavest standardavvik.

De valgte parameterne for andre vertikale svingeform oppsummeres her:

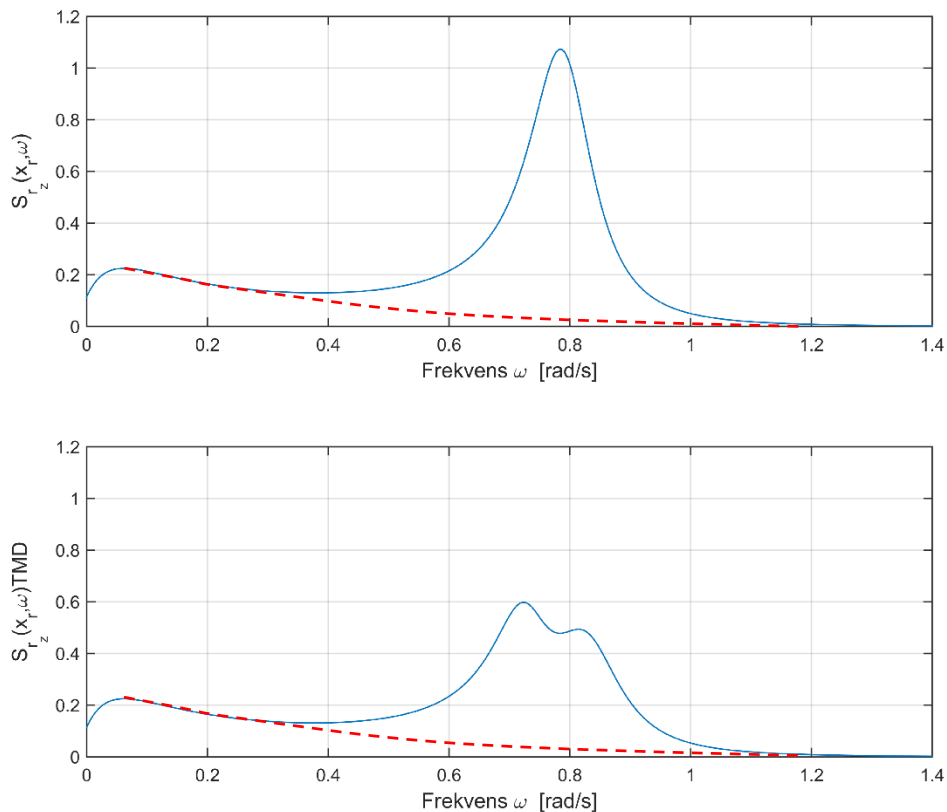
$$\mu_z = 0.015$$

$$\omega_{d_z} = 0.7662 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_{d_z} = 0.085$$

3.9.2 Responsspekter, maksrespons og tidsplansimulering

Et viktig steg i beregningen av dynamisk respons er responsspekteret. Det er i hovedsak dette som er resultatet ved beregninger i frekvensplanet. Som beskrevet i kapittel 2.4 er responsspekteret variansen til de ulike frekvensene. Dersom responsspekteret integreres over alle frekvensene finnes variansen til prosessen og dette er svært viktig ved beregning av maksimal respons. Responsspekteret kan også, som vist i kapittel 2.5, brukes til å simulere responsen i tidsplanet.



Figur 3.20 - Responsspekter for ϕ_{z2} ved $x_r = L/2$

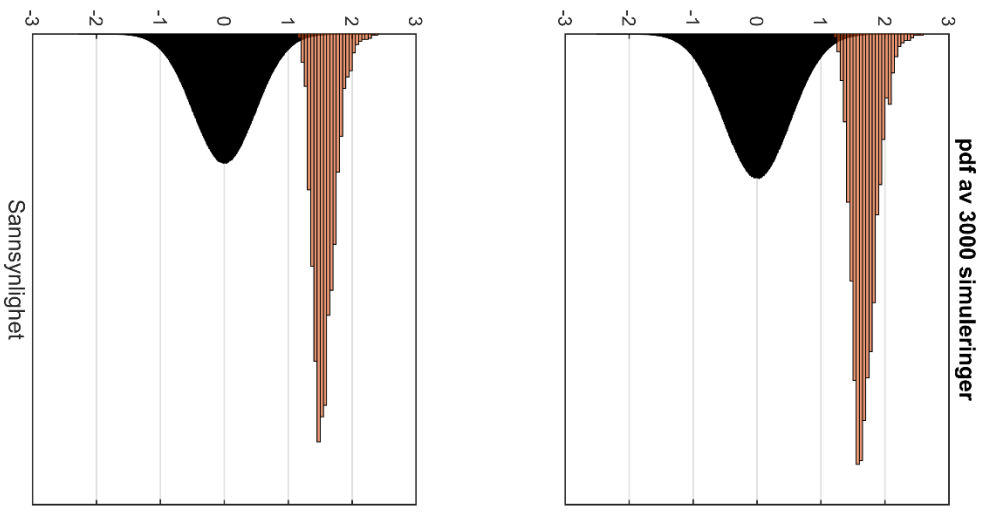
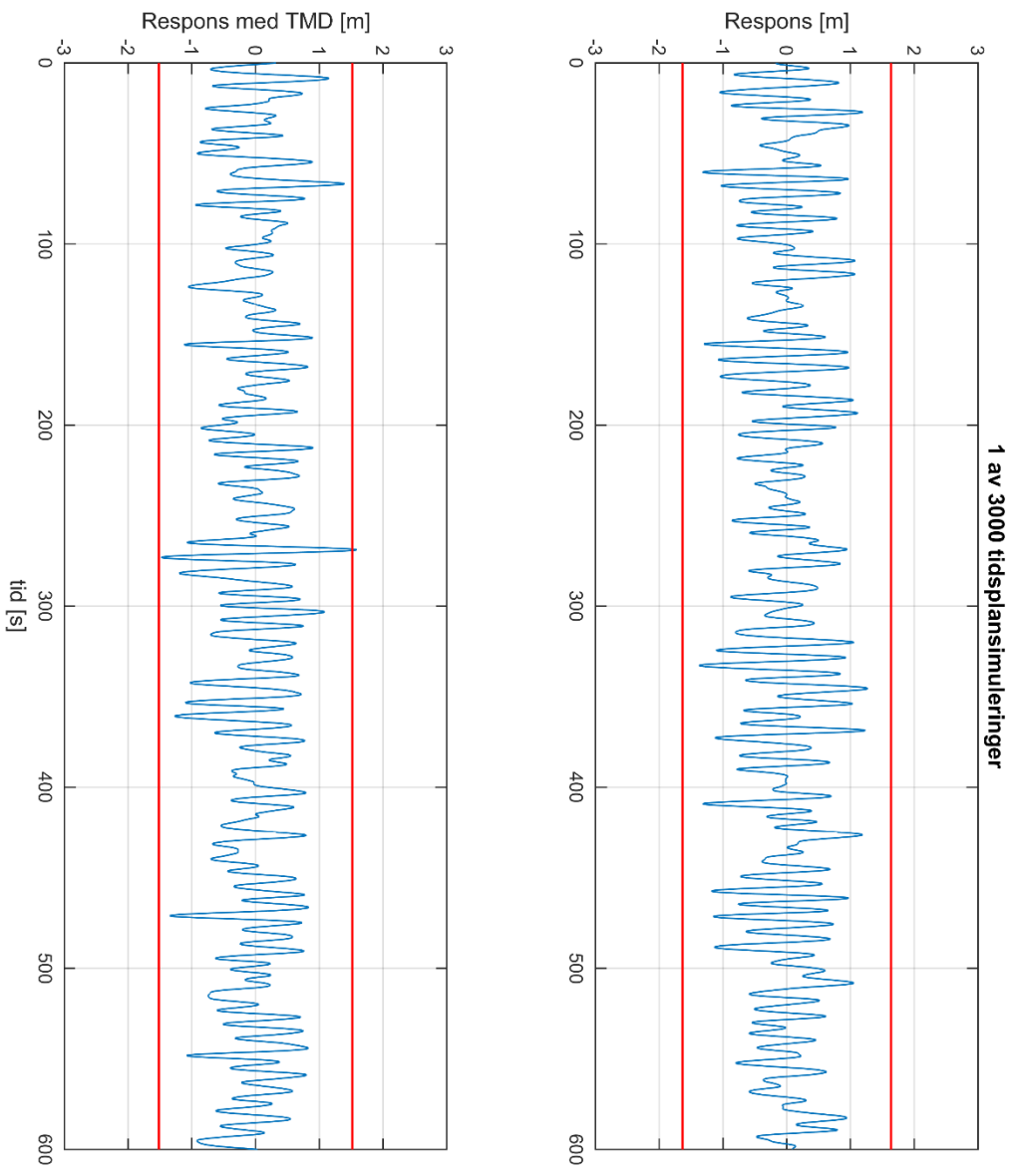
Figur 3.20 viser responsspekteret ved $L/2$ for andre vertikale svingeform. Øvre del av figuren er uten massedemper og nedre del av figuren er med massedemper. Legg merke til hvordan spekteret reduseres ved resonansfrekvensen ved implementering av massedemperen. Som nevnt i kapittel 2.10 er dette fordi massedemperen er svært effektiv for resonanssvingninger eller svingninger i nærheten av resonans. Det som ca. vil utgjøre den kvasi-statiske delen (bakgrunnsdelen) er markert med stiplet linje. Den kvasi-statiske delen opptar en betydelig del av arealet som betyr at mye av responsen ikke er i resonans. En massedemper vil i dette tilfellet ha dårligere effekt. Implementering av massedemperen minker likevel arealet og reduserer

dermed variansen til responsen som igjen fører til lavere maksrespons. Effekten av dette illustreres i figur 3.21.

Standardavviket for andre vertikale svingeform ved $L/2$ uten massedemper er 0.530 m. Toppfaktoren beregnes etter teori presentert i kapittel 2.6 og er 3.0868 som gir maksrespons lik 1.636 m (se ligning 2.90).

Ved å foreta samme operasjon for spekteret med massedemper viser det seg at standardavviket til responsen av andre vertikale svingeform midt på brua reduseres. Standardavviket med massedemper blir nå 0.494 m, toppfaktoren blir 3.0883 og maksimal respons beregnes til 1.518 m. Maksrespons er altså redusert med 7.17%.

For å bedre illustrere resultatet er det utført tidsplansimuleringer av responsen for andre vertikale svingeform med og uten TMD. Simuleringene er beregnet med teori presentert i kapittel 2.5 og figur 3.21 viser resultatet. Det er utført 3000 simuleringer og plottet viser én tilfeldig simulering sammen med beregnet maksrespons. Utfra plottet kan det legges merke til at responsen av denne simuleringen overskrider beregnet maksimal respons enkelte steder. Det er fordi beregnet maksrespons er fra hele responsen og ikke en absolutt maks respons. Prosessen vil inneholde tidsplansimuleringer som har både større og mindre maksverdi enn beregnet maks. Histogrammene i figur 3.21 henter verdier fra alle de 3000 simuleringene. Det er plottet to histogram for respons med og uten TMD, der det ene er maksrespons av hver simulering, mens det andre er selve responsen. Histogrammene er normalisert i Matlab som sannsynlighetstetthet. slik at arealet av hvert av histogrammene er lik 1. Som det framgår av histogrammene er responsen standard normalfordelt, mens for maksrespons er fordelingen skjev.



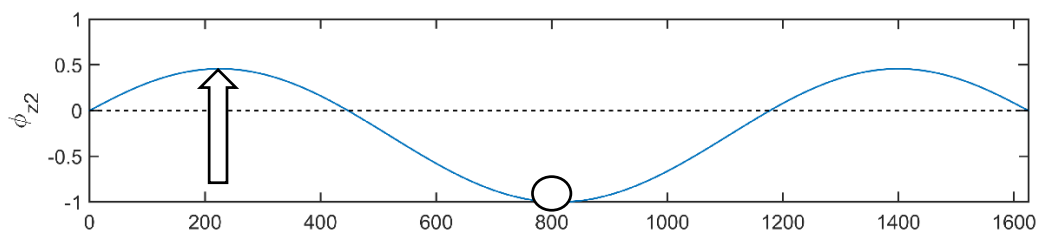
Figur 3.21 - Tidsplansimulering av 2. svingeform vertikalretning

3.9.3 Responsberegninger

Det er i denne oppgaven utført en undersøkelse om hvordan en massedemper optimalisert for en svingeform påvirker andre svingeformer. I tillegg er det sett på hvordan en alternativ plassering av massedemperen vil påvirke responsen for ulike svingeformer.

I det foregående kapittelet ble det vist hvordan en massedemper optimalisert for å dempe ut 2. vertikale svingeform påvirket responsen midt på bruens. Maksresponsen ble da redusert med 7.17%. Videre skal det undersøkes innvirkningen andre steder på bruens samt hvordan 1. og 3. vertikale svingeform påvirkes.

For 2. vertikale svingeform er det også interessant å undersøke responsen ved $x_r = 225$ m som illustrert i figur 3.22. I Matlab settes $x_r = 225$ m, samtidig som demperens plassering fortsatt er $x_d = L/2$. I de følgende avsnittene er det viktig å merke seg at responsen beregnes ved x_r og demperen plasseres ved x_d .



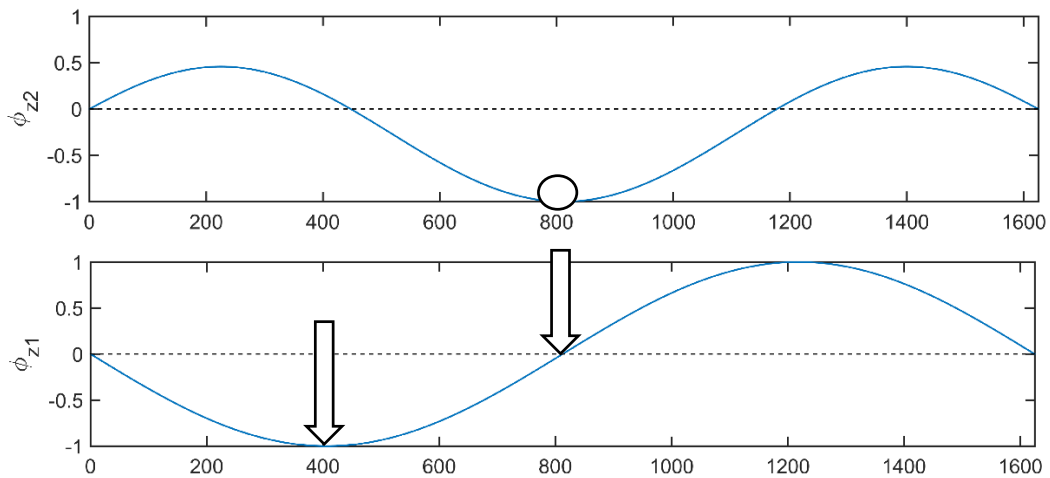
Figur 3.22 - 2. ekstremalpunkt ϕ_{z2} ved $x_r = 225$ m

Uten TMD beregnes standardavviket til responsen ved $x_r = 225$ m til å være 0.242 m og maksimal respons til 0.731 m. Med demper plassert på, og optimalisert for, bruens midtpunkt vil responsen ved $x_r = 225$ m reduseres med 7.18%. Altså beregnes standardavviket til 0.225 m og maks respons til 0.693 m. Dette er nesten prosentvis tilsvarende reduksjon som ved $L/2$.

Selv om massedemperen er optimalisert for 2. vertikale svingeform er det interessant å se hvordan responsen til de nærmeste svingeformene påvirkes. Vil den ha noen effekt? For 1. vertikale svingeform er det undersøkt hvordan responsen endres ved $L/2$ og ved ekstremalpunktet $x_r = 408$ m. Se figur 3.23. Demper er fortsatt plassert midt på bruspennet og optimalisert for 2. vertikale svingeform.

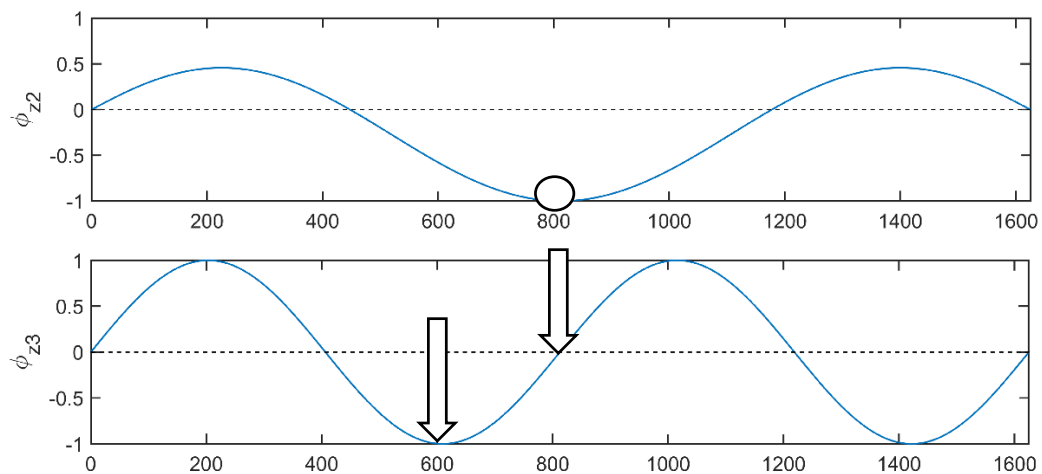
For $x_r = L/2$ uten TMD er standardavviket beregnet til å være 0.002 m, mens maksrespons forventes å være 0.005 m. Med TMD vil tallene være de samme. Når $x_r = 408$ m er standardavviket 0.726 m og maksrespons er 2.169 m. Også her vil verdiene være identiske for

beregning med TMD. Altså vil ikke en demper plassert på midten ha noe effekt på 1. vertikale svingform, noe som ikke er overraskende siden svingformen er konstant tilnærmet null ved $L/2$.



Figur 3.23 - TMD på ϕ_{z2} og ϕ_{z1} ved $x_r = 408$ m og $x_r = L/2$

For 3. vertikale egensvingform er det undersøkt hvordan responsen endres for midtpunktet og ved $x_r = 611$ m som er ett av z_3 sine ekstremalpunkter. Se figur 3.24. Demper er fortsatt plassert midt på bruspennet og optimalisert for å dempe ut z_2 .



Figur 3.24 - TMD på ϕ_{z2} og ϕ_{z3} ved $x_r = 611$ m og $x_r = L/2$

For $x_r = L/2$ uten TMD er standardavviket beregnet til å være 0.001 m, mens maksrespons forventes å være 0.002 m. Med TMD vil tallene være de samme. For $x_r = 611$ m er standardavviket 0.152 m og maks respons 0.486 m. Også her vil verdiene være identiske med

TMD. Altså vil ikke en demper plassert på midten ha noe effekt på 3. vertikale svingeform, noe som kan skyldes at 3. svingeform er konstant lik null ved $L/2$.

Det er også interessant å se om en alternativ plassering av demperen har noe å si for responsen til ulike svingeformer. Demperen plasseres på 2. vertikale svingeforms ekstremalpunkt, altså $x_d = 225$ m. Svingeform z_2 illustreres i figur 3.22. Demperen optimaliseres på samme måte som beskrevet i kapittel 3.9.1 og verdiene som brukes for denne plasseringen er

$$\mu_z = 0.012 \qquad \omega_{d_z} = 0.7816 \text{ rad/s} \qquad \zeta_{d_z} = 0.039$$

Det er naturlig å starte med å se hvordan 2. vertikale svingeforms respons dempes i samme punkt som demperens plassering, altså når $x_r = 225$ m. Uten TMD beregnes standardavviket til å være 0.242 m og maksimal respons til 0.747 m. Med TMD blir responsens maks lik 0.731 m og standardavviket 0.237 m. Dette tilsvarer en reduksjon på 2.09%.

Responsen for z_2 ved $x_r = L/2$ beregnes deretter. Uten massedemper er standardavviket 0.530 m og maksrespons er 1.636 m. Med massedemper beregnes standardavviket til 0.519 m og maksrespons til 1.602 m. Responsen reduseres her med 2.08%. Altså tilnærmet lik prosentvis reduksjon som ved $x_r = 225$ m.

Svingeform z_1 har nesten ingen respons ved $x_r = L/2$. Se figur 3.23 der TMD-en nå er plassert ved $x_d = 225$ m. Uten TMD er standardavvik og maksrespons henholdsvis 0.002 m og 0.005 m. Med TMD er tallene uendret. Altså har demperen ingen innvirkning på midtpunktet av 1. vertikale svingeform.

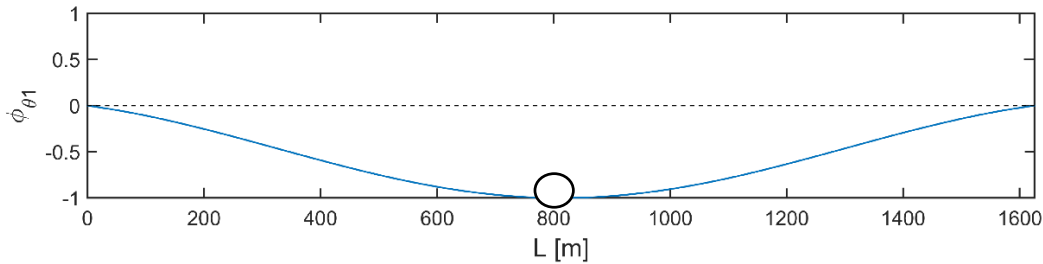
Så studeres responsen til 1. vertikale svingeforms ekstremalpunkt ved $x_r = 408$ m. Standardavviket blir her beregnet til å være 0.724 m og maksrespons 2.169 m. Dette tilsvarer en reduksjon på 0.47%.

3. vertikale svingeform har i likhet med 1. vertikale svingeform nesten ingen respons ved $x_r = L/2$. Demperen vil likevel ha en prosentmessig effekt på 1.28%, men denne vil ikke være merkbar. Dette er fordi det er tatt med mange desimaler og matematisk sett blir det en reduksjon, men denne vil ikke være merkbar selv ved mm-nivå. Verdiene med og uten TMD er praktisk talt identiske. Standardavvik og maksrespons er henholdsvis 0.001 m og 0.002 m.

Til slutt er det sett på hvordan 3. svingeforms ekstremalpunkt ved $x_r = 611$ m påvirkes. Beregnet standardavvik blir da 0.152 m og maksrespons 0.486 m. Med TMD blir standardavviket 0.150 m og maksrespons 0.480 m. En reduksjon på 1.28% som tilsvarer 6 mm.

3.10 Torsjonsrespons med TMD

Den mest logiske plasseringen av massedemper er som nevnt der svingeformen har sitt største utslag. For denne svingeformen er det også ved $L/2$ som illustrert i figur 3.25 og massedemperen plasseres derfor her.

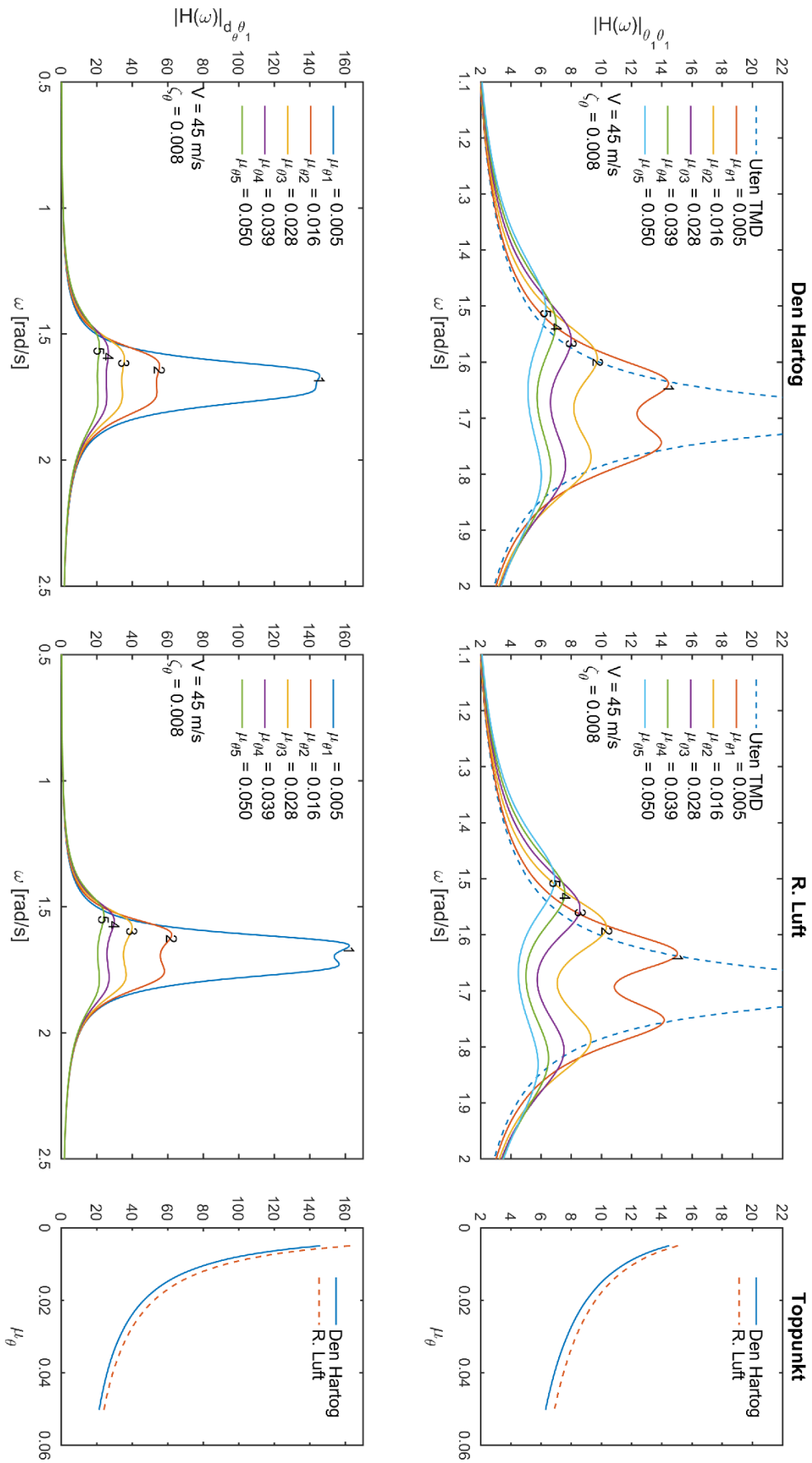


Figur 3.25 - Plassering av TMD på ϕ_{θ_1}

Nå som massedemperens plassering er bestemt kan egenskapene justeres for optimal effekt. Når dette er gjort beregnes responsspektrum og maksrespons før prosessen simuleres i tidsplanet. Deretter ses det på hvordan massedemperen vil påvirke andre svingeformer enn den er optimert for.

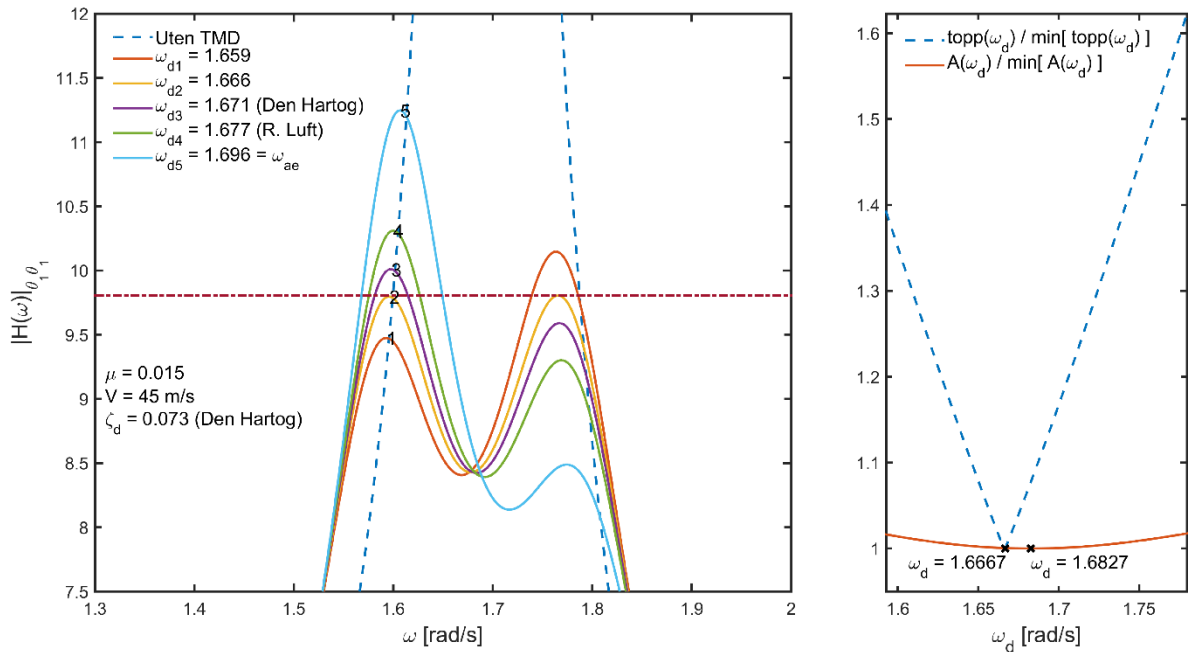
3.10.1 Optimalisering av TMD

Masseforholdet μ_θ vurderes i figur 3.26 der både frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{\theta_1\theta_1}(\omega)|$ for beregning av responsen til brubjelken og frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{d_\theta\theta_1}(\omega)|$ til beregning av relativ respons mellom brubjelken og massedemperen er vist. Disse er plottet med en middelvindhastighet på 45 m/s for 5 forskjellige μ_θ i intervallet 0.005 til 0.05 med tilhørende frekvenser og dempefaktorer som foreslått av både Den Hartog og R. Luft (se kapittel 2.10.4). Som det framgår av figuren, i likhet med figur 3.17, er at et høyere masseforhold gir en lavere frekvens-respons-funksjon. Rapporten går ikke inn på detaljer rundt den praktiske utførelsen av massedemperen. Problemstillingen er likevel viktig å belyse da det ikke er alle verdier av μ_θ som er praktisk mulig å gjennomføre. Valgt av rett μ_θ er derfor vanskelig, men den kan bestemmes ved å lete etter det område hvor gevinsten av å øke μ_θ begynner å avta. Ved å se på hvordan toppunktet til både $|\hat{H}_{\theta_1\theta_1}(\omega)|$ og $|\hat{H}_{d_\theta\theta_1}(\omega)|$ i figur 3.26 reduseres ved økende μ_θ ser det ut til at $\mu_\theta = 0.015$ er i dette området.



Figur 3.26 - Vurdering av masseforhold for $\phi_{\theta 1}$

Figur 3.27 benyttes for å vurdere optimal frekvens til massedemperen. Venstre side viser frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{\theta_1\theta_1}(\omega)|$ for brubjelken plottet for fem forskjellige frekvenser og med en dempefaktor i henhold til Den Hartogs forslag.

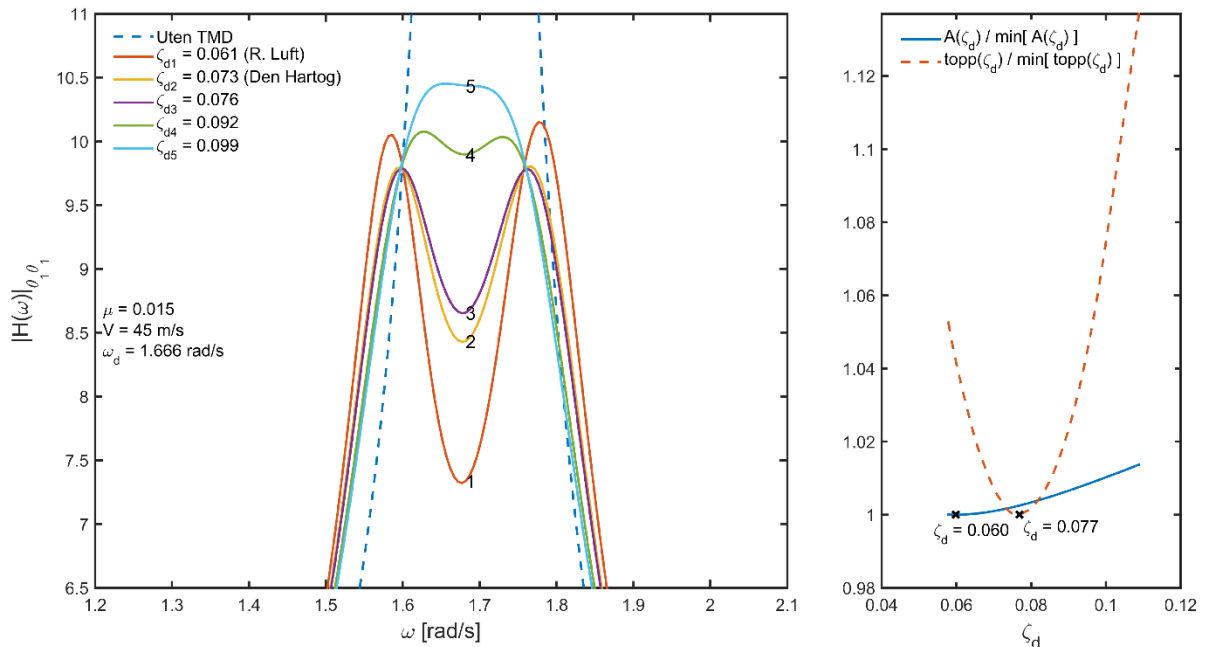


Figur 3.27 - Vurdering av frekvens for ϕ_{01}

Høyre side av figur 3.27 viser frekvens-respons-funksjonens toppunkt og areal i forhold til minimumspunktet og som funksjon av massedemperens frekvens. Hvis det optimeres for lavest mulig areal vil toppunktet være 7.8% høyere enn minimum toppunkt. Hvis det derimot optimeres for lavest mulig toppunkt vil arealet kun være 0.1% høyere enn minimum areal. Selv om arealet avgjør variansen er det ikke ønskelig med relativt sett for stor respons ved enkelte frekvenser. Det er derfor bedre å optimere frekvensen for lavt toppunkt da en økning på 0.1% i areal er ubetydelig. Denne frekvensen fører til at toppene har samme høyde. Dette burde være i henhold til Den Hartogs forslag (angitt i ligning 2.235), men som det framgår av figur 2.27 er det for en noe lavere verdi. Dette kan være på grunn av de aerodynamiske kreftene inkludert i frekvens-respons-funksjonen, noe som ikke er tatt med i Den Hartogs beregninger. Massedemperens frekvens velges derfor å være 1.6667 rad/s.

Figur 3.28 benyttes for å vurdere den optimale dempefaktoren. Venstre side er frekvens-respons-funksjonen $|\hat{H}_{\theta_1\theta_1}(\omega)|$ plottet for fem forskjellige dempefaktorer. Høyre side viser både toppunktet og arealet under $|\hat{H}_{\theta_1\theta_1}(\omega)|$ i forhold til minimumspunktet og som en funksjon av dempefaktoren. Hvis det skulle vært optimert for arealet hadde toppunktet vært 4.2% høyere

enn minimum toppunkt, men hvis det blir optimert for toppunktet vil arealet bare være 0.2% høyere enn minimumsarealet. Det er da tydelig at det er bedre å optimere for lavest toppunkt enn for lavt areal. Den modale dempefaktoren for massedemperen til første torsjonsvingeform velges derfor å være 0.076.



Figur 3.28 - Vurdering av dempefaktor for ϕ_{01}

I likhet med figur 3.19 stemmer også her R. Lufts optimering med dempefaktoren som gir lavest areal. Dette er fordi, som forklart i kapittel 2.10.4, at R. Luft søker etter den maksimale dempingen som kan oppnås i systemet. Dette vil være for det laveste arealet da det vil gi lavest standardavvik. De valgte parameterne oppsummeres her:

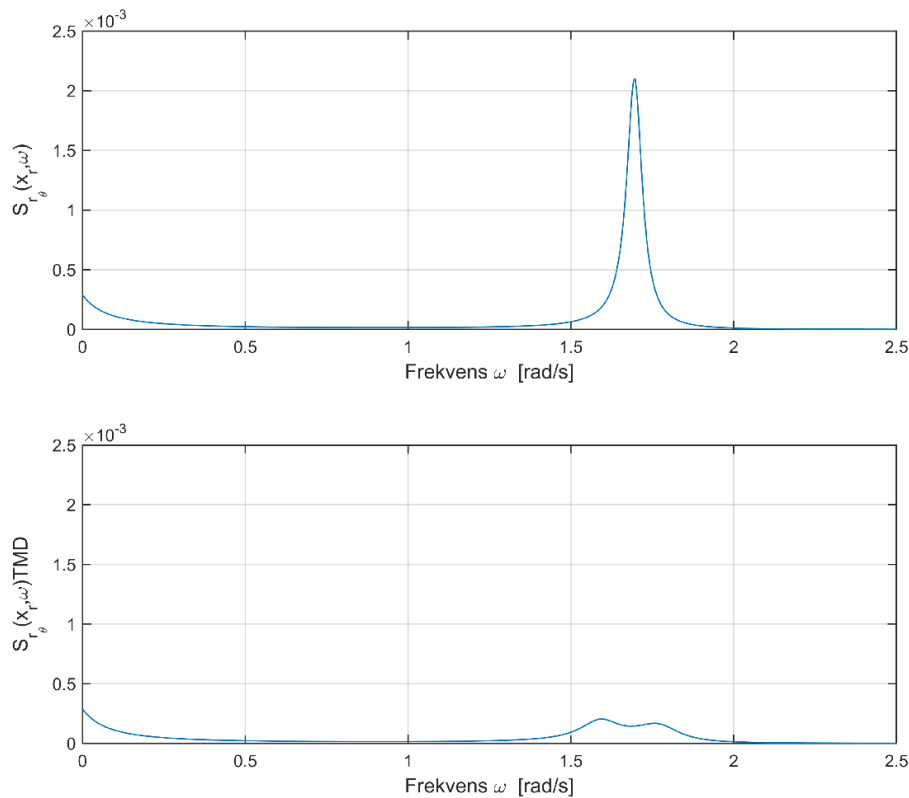
$$\mu_z = 0.015$$

$$\omega_{d_z} = 1.6667 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_{d_z} = 0.076$$

3.10.2 Responsspekter, maksrespons og tidsplansimulering

Tilsvarende som for 2. vertikale egensvingeform er det for 1. egensvingeform i torsjon regnet ut responsspekter og tilhørende varians, standardavvik og maksrespons. I tillegg er det ved hjelp av responsspekteret utført en ett-punkts tidsplansimulering av torsjonsresponsen. Figur 3.29 viser responsspekteret ved $L/2$ der øvre del er uten massedemper og nedre del er med massedemper.

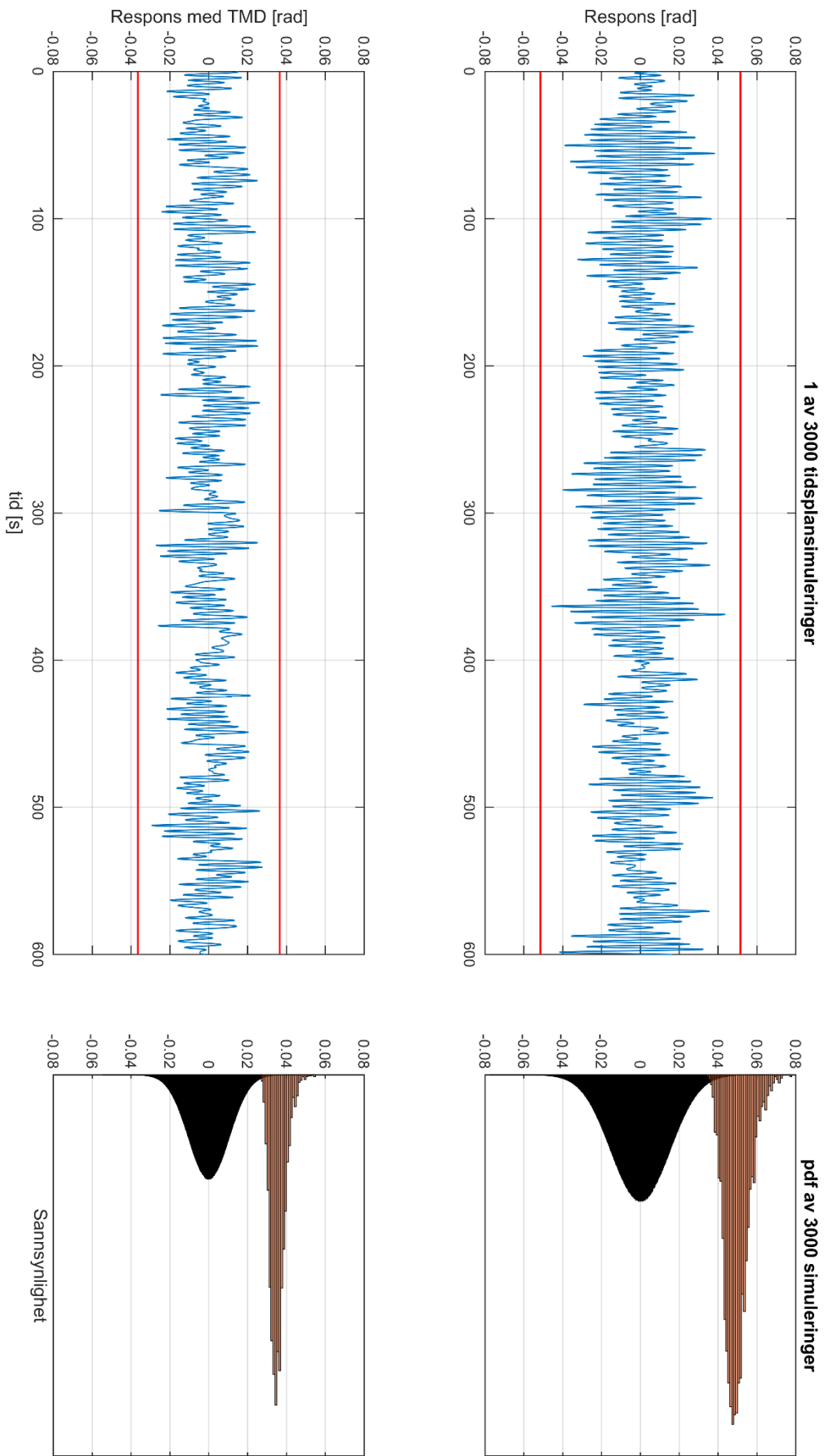


Figur 3.29 - Responsspekter $\phi_{\theta 1}$ ved $x_r = L/2$

Som kjent brukes spekteret til å finne variansen til responsen. Dette gjøres med hjelp av likning 2.82. Kvadratroten av variansen er standardavviket, som sammen med toppfaktoren brukes til å beregne maksrespons ved hjelp av likning 2.90.

Uten massedemper er beregnet standardavvik for 1. torsjonssvingeform lik 0.0154 rad, mens med massedemperen blir standardavviket 0.0111 rad. Toppfaktoren for prosessen med og uten massedemper er henholdsvis 3.2944 og 3.3370. Maksrespons uten massedemper blir 0.0515 rad og med massedemper 0.0365 rad. Dette tilsvarer en reduksjon av maksrespons med 29.13%.

I likhet med 2. vertikale svingeform er det også her utført en tidsplansimulering av responsen for å illustrere resultatet av beregningene. Det er teorien fra kapittel 2.5 som anvendes og figur 3.30 viser resultatet av bruens respons midt i spennet for 1.egensvingeform i torsjon. Også her er det plottet en tilfeldig simulering sammen med en rød linje som viser beregnet maksrespons og et histogram som viser responsens fordeling med data fra 3000 simuleringer. Som for 2. vertikale svingeform er det hentet ut maksverdier fra hver av de 3000 simuleringene og satt opp i et histogram. Den samme tendensen vises her som for 2. vertikale svingeform at responsen er standard normalfordelt, mens fordelingen til maksresponsen er skjev.

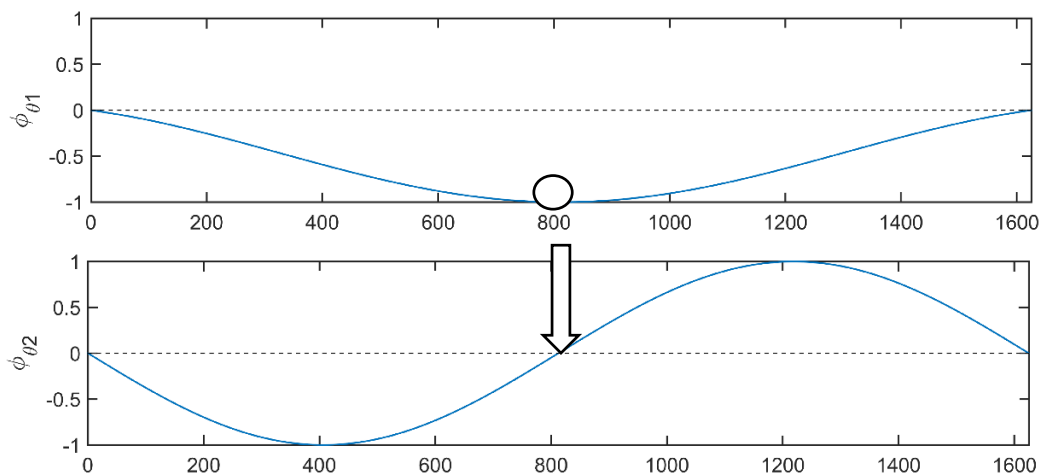


Figur 3.30 - Tidsplansimulering av 1. svingform i torsjon

3.10.3 Responsberegninger

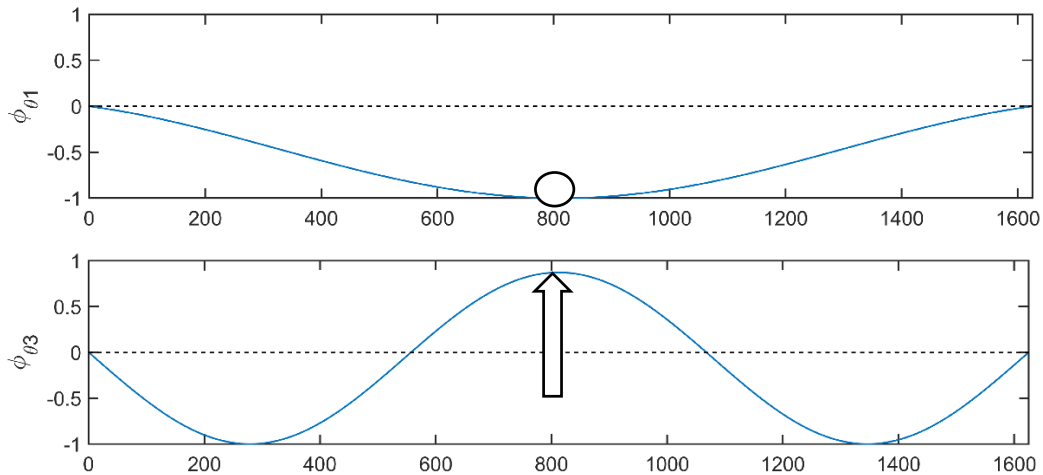
Det er undersøkt hvordan en TMD optimalisert for 1. egensvingform ved $x_d = L/2$ vil påvirke 2. og 3. svingform i torsjon. Det er ikke sett på alternativ plassering av massedemperen for torsjon siden det ikke er andre naturlig steder å dempe ut svingningene. Med det menes at denne svingformen har bare ett ekstremalpunkt og det er bare fokusert på dette punktet. Dermed er det her bare undersøkt hvordan demperen påvirker andre svingformer i torsjon.

I kapittel 3.10.2 er det beskrevet hvordan responsen midt på brua ved 1. torsjonssvingform dempes ut med 29.13%. Andre svingform i torsjon har et teoretisk nullpunkt ved $x_r = L/2$ som vist i figur 3.31 og dermed er det ikke noe respons å dempe ut. Ved beregninger av responsen var det ikke overaskende at både standardavvik og maksrespons med og uten massedemper ble null.



Figur 3.31 - 2. svingform torsjon

Da er 3. svingform mer interessant siden denne har et maks utslag ved demperens plassering, altså ved $x_r = L/2$. Figur 3.32 viser 3. svingform i torsjon. Uten massedemper vil forventet maksrespons være 0.0080 rad. Standardavviket beregnes til å være 0.0023. Med massedemper vil maksresponsen reduseres til 0.0079. Dette tilsvarer en reduksjon på 1.25%

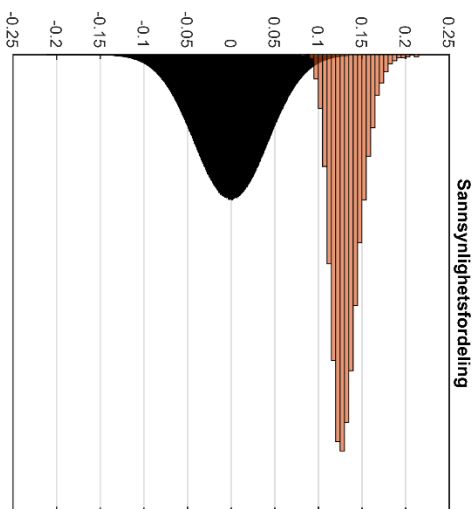
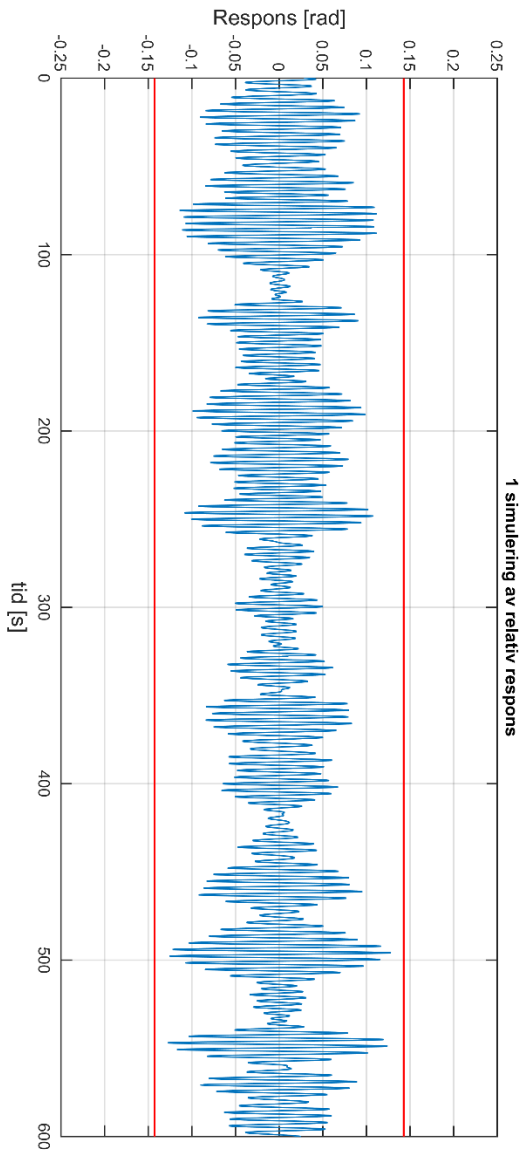


Figur 3.32 - 3. svingeform torsjon

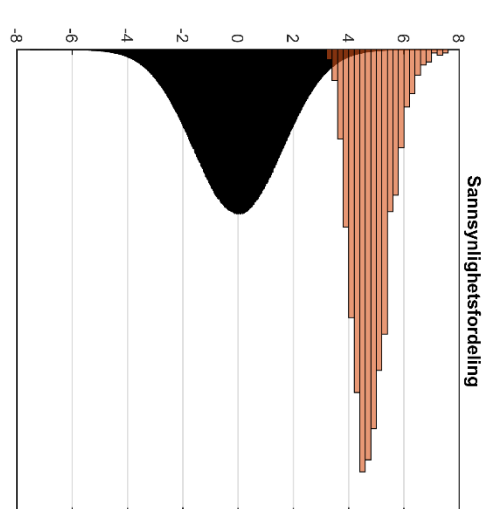
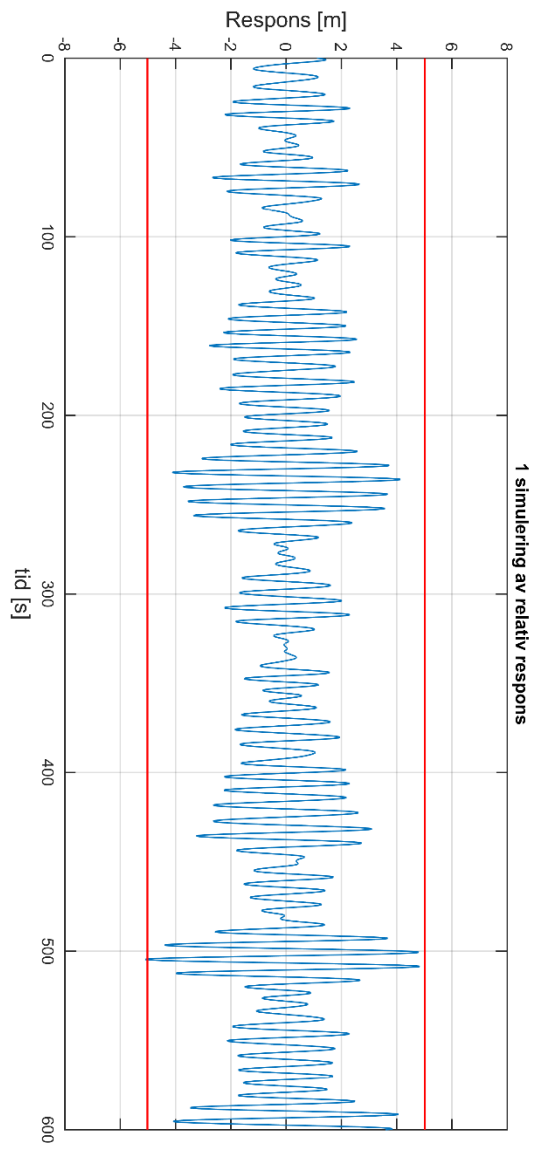
3.11 Relativ respons

Med relativ respons menes den relative responsen mellom brubjelken og demperen. For å gjøre noen praktiske vurderinger av løsningen er det avgjørende å vite noe om denne responsen. Det er beregnet en relativ respons for 2. vertikale svingeform og 1. svingeform i torsjon. For begge egensvingeformene er demperen plassert midt på bruene og optimalisert for å dempe ut maksimal respons. Figur 3.33 og figur 3.34 viser én tilfeldig tidsplansimulering for begge svingeformene med maks respons vist med rød linje samt sannsynlighetsfordelingen av respons og maksrespons.

Som det kan sees av figur 3.34 blir den maksimale relative responsen mellom brubjelken og demperen for 2. vertikale egensvingeform 5.0190 m. Denne er regnet ut ved hjelp av toppfaktor og standardavvik som vist i ligning 2.90, der beregnet standardavvik og toppfaktor er henholdsvis 1.6020 m og 3.1330. Samme beregning er utført for 1. svingeform i torsjon, og resultatet er en maks relativ respons på 0.1428 rad. Der standardavvik og toppfaktor er henholdsvis 0.0424 og 3.3680.



Figur 3.33 - Tidsplansimulering av relativ respons torsjon



Figur 3.34 - Tidsplansimulering av relativ respons vertikalt

4 Diskusjon

Resultatene for hvordan en massedemper påvirker den dynamiske responsen til hengebruene over Julsundet er satt opp i to tabeller. Tabell 4.1 er et sammendrag av resultatene for vertikalsvingninger. Den viser resultatene for hvordan en massedemper optimalisert for to forskjellige plasseringer på 2. vertikale svingeform vil påvirke 1., 2. og 3. vertikale svingeform. Tabell 4.2 er et sammendrag av resultatene for torsjon. Her er, som nevnt tidligere, massedemperen optimalisert for én plassering på 1. svingeform i torsjon og tabellen viser hvordan den påvirker 1., 2. og 3. svingeform i torsjon. Videre vil det diskuteres rundt hvorvidt det er aktuelt, og hvor effektivt det er med en massedemper for å dempe ut bevegelser ved en middelvindhastighet på 45 m/s. Derfor henger dette kapitlet tett sammen med kapittel 3.9 og 3.10 og bruker tabell 4.1 og 4.2 som diskusjonsgrunnlag. Først diskuteres vertikale svingninger, så torsjon og deretter betydningen av plasseringen og frekvensen til massedemperen. Til slutt vurderes unøyaktigheter ved nullpunkt og relativ respons.

4.1 z-retning

I vertikal retning er det undersøkt hvordan responsen for 2. egensvingeform kan dempes ut ved å plassere en massedemper i ekstremalpunktet med størst utslag, dvs. ved $L/2$. Den beregnede responsen uten massedemper er 1.636 m og med demper er den 1.518 m. Som vist i tabell 4.1 er dette en reduksjon på 7.17% noe som utgjør 11.8 cm. Dette er nesten ikke noen merkbar effekt. Som nevnt i kapittel 3.9.2 skyldes den lave reduksjonen at responsspekteret i dette tilfellet har en stor bakgrunnsdel som ikke påvirkes av demperen. Selv om svingninger på ± 1.636 m over en periode på 8.15 s kan føles dramatisk er det tvilsomt at dette blir fokusert på da middelvindhastigheten vil være 162 km/t. Til sammenligning er orkan ved middelvindhastigheter større enn 117 km/t [11]. Når det i tillegg sjeldent medfører noen strukturelle utfordringer i bruddgrensetilstand for svingninger i denne størrelsesorden [16] kan en trekke slutningen om at denne massedemperen ikke er så aktuell for denne svingeformen.

Det er også interessant å se om denne massedemperen vil ha noen gunstige effekter for andre svingeformer fordi et bredere bruksområde vil bety at løsningen er mer aktuell. Derfor er det undersøkt hvordan 1. og 3. vertikale svingeform påvirkes. Utfra tabell 4.1 ses det at når

demperen er plassert midt på bruspennet vil den ikke påvirke disse svingeformene. Grunnen til dette er at begge disse har nullpunkt ved $L/2$. Dermed vil ikke massedemperen ha noen relativ respons og svingeformen vil følgelig ikke dempes. Dette kan også begrunnes i ligning 2.234 der $\phi_m^2(L/2) = 0$. Slik sett kan en si at en massedemper optimalisert for å dempe ut maksrespons av 2. vertikale egensvingeform vil ikke påvirke 1. og 3. vertikale svingeform.

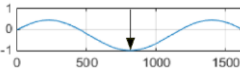
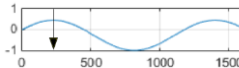
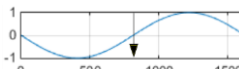
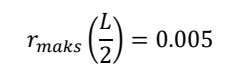

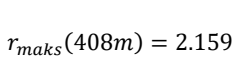
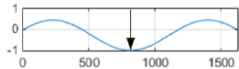
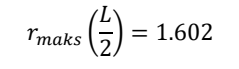
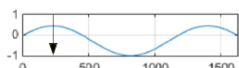
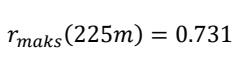
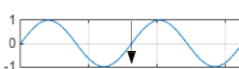
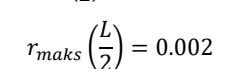

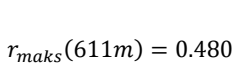
Både 1. og 3. vertikale svingeform har utslag i nærheten av 2. vertikale svingeforms 2. ekstremalpunkt. Altså ved $x_d = 225$ m. En massedemper plassert her vil kanskje gi et bredere bruksområdet og løsningen kan dermed bli mere aktuell. Som det framgår av tabell 4.1 reduseres responsen for 2. vertikale svingeform med 2.08% ved $L/2$ og 2.09% ved demperens plassering. Dette er en tendens man kan se når massedemperen var plassert midt på bruene også, nemlig at responsen ble redusert forholdsvis like mye ved $x_r = L/2$ som ved $x_r = 225$ m. Responsen reduseres nemlig prosentvis like mye over hele svingeformen, noe som framgår av ligning 2.234. Det eneste som endres i denne ligningen er verdien til $\phi_m^2(x)$, altså egensvingeformens utslag ved beregningspunktet x_r . Ellers vil resten av uttrykket være det samme og dermed lik prosentvis reduksjon. Derfor er det mer effektivt å sette massedemperen ved $L/2$, selv om man ønsker å dempe ut responsen ved 225 m. Dette fordi massedemperen plassert ved $L/2$ reduserer maks respons med 7.18%, mens når demperen er plassert ved 225m reduseres responsen bare med 2.09%. Å plassere massedemperen ved $L/7.22$ er derfor enda mindre aktuelt enn å plassere den ved $L/2$ da maks respons kun går fra å være 1.636 m til 1.602 m. Altså en endring på bare 3.4 cm. Basert på disse tilfellene kan det se ut som at det vil være best å plassere en massedemper der svingeformen har sitt største utslag.

Deretter undersøkes det hvordan 1. og 3. vertikale svingeform påvirkes av at demperen settes ved 225 m. Igjen er det ikke endringer av betydning for responsen. Første egensvingeform påvirkes ikke i det hele tatt ved feltmidte, mens ved ekstremalpunktet reduseres responsen med 0.47%. Dette utgjør faktisk en forskjell mindre enn en millimeter.

3. vertikale svingeform reduseres prosentmessig like mye både ved feltmidte og ved ekstremalpunktet. Reduksjonen på 1.28% utgjør 6 mm ved ekstremalpunktet og under 0 mm ved feltmidte. I praksis betyr dette at responsen ikke påvirkes.

Utfra dette kan det slås fast at ved å plassere demperen ved 225 m vil responsen dempes mindre og de andre svingeformene vil påvirkes mere enn når demperen står ved $L/2$. Dette betyr et bredere bruksområdet, men ved så lav effekt er løsningene likevel lite aktuell.

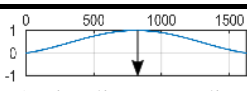
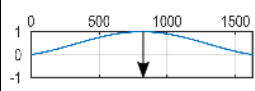
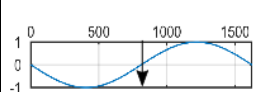
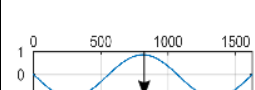
Tabell 4.1 - Resultater z-retning

		Plassering av demper		
Svingeform	Respons	 <p>Optimaliserte verdier: $\mu = 0.0150$ $\omega_d = 0.7664$ $\zeta_d = 0.0860$</p>	 <p>Optimaliserte verdier: $\mu = 0.0120$ $\omega_d = 0.7816$ $\zeta_d = 0.0390$</p>	Uten TMD
	Respons svingeform z ₁	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,002$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0,005$ Reduksjon maksrespons: 0.00%</p>	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,002$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0,005$ Reduksjon maksrespons: 0.00%</p>	$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,002$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0,005$ n/a
	Respons svingeform z ₁	 <p>$\sigma(408m) = 0,726$ $r_{maks}(408m) = 2,169$ Reduksjon maksrespons: 0.00%</p>	 <p>$\sigma(408m) = 0,724$ $r_{maks}(408m) = 2,159$ Reduksjon maksrespons: 0.47%</p>	$\sigma(408m) = 0,726$ $r_{maks}(408m) = 2,169$ n/a
Respons svingeform z ₂	Respons svingeform z ₂	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,494$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 1,518$ Reduksjon maksrespons: 7.17%</p>	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,519$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 1,602$ Reduksjon maksrespons: 2.08%</p>	$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,530$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 1,636$ n/a
	Respons svingeform z ₂	 <p>$\sigma(225m) = 0,225$ $r_{maks}(225m) = 0,693$ Reduksjon maksrespons: 7.18%</p>	 <p>$\sigma(225m) = 0,237$ $r_{maks}(225m) = 0,731$ Reduksjon maksrespons: 2.09%</p>	$\sigma(225m) = 0,242$ $r_{maks}(225m) = 0,747$ n/a
Respons svingeform z ₃	Respons svingeform z ₃	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,001$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0,002$ Reduksjon maksrespons: 0.00%</p>	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,001$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0,002$ Reduksjon maksrespons: 1.28%</p>	$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0,001$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0,002$ n/a
	Respons svingeform z ₃	 <p>$\sigma(611m) = 0,152$ $r_{maks}(611m) = 0,486$ Reduksjon maksrespons: 0.00%</p>	 <p>$\sigma(611m) = 0,150$ $r_{maks}(611m) = 0,480$ Reduksjon maksrespons: 1.28%</p>	$\sigma(611m) = 0,152$ $r_{maks}(611m) = 0,486$ n/a

4.2 θ -retning

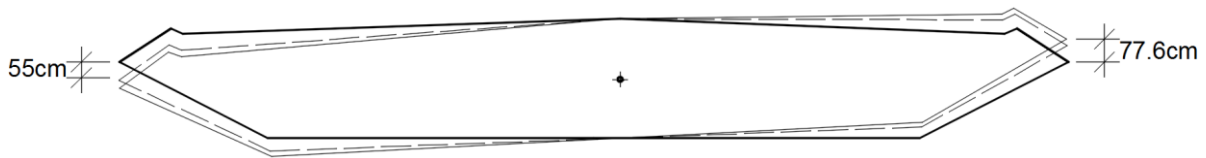
For torsjon er det undersøkt hvordan en massedemper plassert på 1. svingeforms ekstremalpunkt påvirker responsen. Første svingeform i torsjon reduserer her maksresponsen med 29,13%. En betydelig større reduksjon enn for vertikalretning. Det kan tyde på at det er lettere å redusere torsjonssvingninger enn vertikale svingninger, iallfall for dette tilfellet. Som nevnt tidligere er den gode effekten pga. responsspekteret i figur 3.29 som har en tydelig resonans del og nesten ikke noen bakgrunnsdel.

Tabell 4.2 - Resultater torsjon

		Plassering av demper	
Svingeform	Respons	 <p>Optimaliserte verdier: $\mu = 0.015$ $\omega_d = 1.6667 \text{ rad/s}$ $\zeta_d = 0.076$</p>	Uten TMD
svingeform θ_1	Respons	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0111$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0365$ Reduksjon maksrespons: 29.13%</p>	$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0154$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0515$ n/a
svingeform θ_2	Respons	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0000$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0001$ Reduksjon maksrespons: 0.00%</p>	$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0000$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0001$ n/a
svingeform θ_3	Respons	 <p>$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0023$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0079$ Reduksjon maksrespons: 1.25%</p>	$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0023$ $r_{maks}\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0080$ n/a

Figur 4.1 illustrerer rotasjon av tverrsnittet og viser hvor mye massedemperen reduserer responsen. I figuren er tykk heltrukket linje initialposisjonen. Heltrukken linje er maksrespons og stiplet linje er maksrespons med TMD. Her vises det at selv om reduksjonen er prosentmessig stor er betydningen av den forholdsvis liten. Forskyvning på 77.6 cm ytterst på tverrsnittet er i utgangspunktet ikke veldig mye og en reduksjon på 22.6 cm har derfor liten

betydning. Rotasjoner i denne størrelsesorden medfører sjeldent strukturelle utfordringer i bruddgrensetilstand [16].



Figur 4.1 - Effekten av massedemperen i torsjon

Den samme tendensen vises i torsjon som for vertikalretning når det kommer til påvirkning av andre svingeformer. Når demperen er plassert midt på bruene og svingeformen ikke har noe utslag i dette punktet vil ikke demperen ha noe effekt. Det kan ses på 2. svingeform i torsjon i tabell 4.2 som har nullpunkt ved $L/2$. Tredje svingeform i torsjon har en av ekstremalpunktene ved demperens plassering og responsen påvirkes derfor. Endringen på 1.25% er ikke stor, men det viser at demperen har innvirkning også her.

4.3 Betydning av plassering og frekvens til TMD

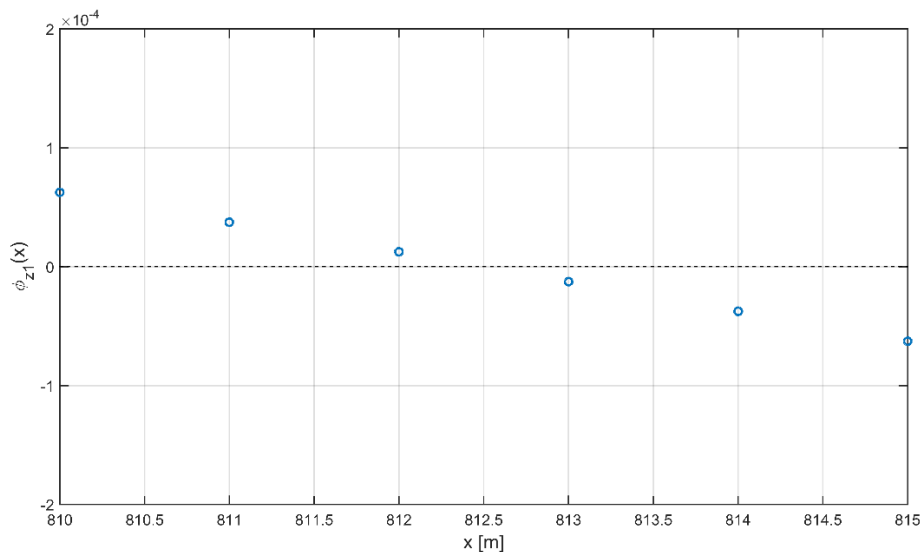
Resultatene tyder på at svingeformer med ekstremalpunkt som sammenfaller med demperens plassering, men som ikke er optimalisert for å dempe ut denne svingeformen, reduserer responsen veldig lite. Det tydeligste eksemplet på dette er for torsjon, der θ_1 og θ_3 har toppunkt ved $L/2$. Demperen er optimalisert for å ta ut θ_1 og dermed reduseres responsen veldig lite for θ_3 . En grunn til dette kan være forskjell i frekvens. θ_1 har en resonansfrekvens på 0.806 rad/s, mens θ_3 har en resonansfrekvens på 3.230 rad/s. Demperen optimaliseres for å ta ut responsen rundt frekvensene 0.806 rad/s. Dette betyr at demperen ikke svinger i mottakt til θ_3 sin resonansfrekvens og har derfor nesten ingen påvirkning på responsen.

For vertikal retning med demper plassert ved $x_d = 225$ m er det z_3 som dempes mer enn z_1 selv om frekvensen til z_1 er nærmere dempefrekvensen enn z_3 . Dette argumenterer mot at det er avstand fra resonansfrekvensen som er den eneste grunnen til at andre svingeformer reduseres mindre. En annen grunn til at 3. svingeform reduseres mer enn 1. kan være at 3. svingeform har et ekstremalpunkt i nærheten av demperen. $x_d = 225$ m og toppunktet til 3. svingeform er ved 204 m. Dermed kan det være at demperen virker på responsen selv om frekvensene ikke er nært hverandre. 1. svingeform har ekstremalpunkt ved 408 m, dermed er hverken frekvens eller

plassering i nærheten av demperen, og dermed vil den påvirke mindre. Slik sett kan det se ut som at både samsvarende frekvenser mellom bru og demper, og plassering av demper i forhold til maksrespons er viktig for å få mest mulig effekt av demperen.

4.4 Unøyaktighet ved nullpunkter

Ut fra resultatene sees det at responsen ikke er helt null i nullpunktene til egensvingeformene. Eksempler på dette finnes ved 1. og 3. vertikale svingeform. Responsen ved $L/2$ for z_1 er lik 5 mm og for z_3 er den 2 mm, når den teoretisk sett skal være lik null ved dette punktet. Trolig kommer dette av at inndeling av x -aksen ikke er fin nok. Ved beregningene er det brukt en $dx = 1\text{ m}$ og dermed vil Matlab som er ett numerisk verktøy ikke fange opp nøyaktig hvor nullpunktet er. Slik som illustrert for ϕ_{z_1} i figur 4.2. Dersom det ble brukt en finere inndeling, f.eks. $dx = 0.5\text{ m}$ ville responsen blitt null i svingeformenes nullpunkt. Uansett er dette ikke store unøyaktigheter. Beregnet maksrespons fra 1. vertikale egensvingeform er 2.169 m, så dersom det finnes unøyaktigheter i millimeter størrelse har dette ingen praktisk betydning.



Figur 4.2 - Unøyaktighet for nullpunktet til ϕ_{z_1}

4.5 Relativ respons

I kapittel 3.11 er det beregnet relativ respons av demper og brubjelken for 2. vertikale egensvingeform og 1. egensvingeform i torsjon. Dette er gjort for å kunne vurdere hvorvidt det er aktuelt med massedemper på hengebruene over Julsundet.

Den relative responsen i z-retning ble over 5 m. Det betyr at en slik demper ihvertfall ikke kan plasseres inne i brutverrsnittet. Det vil ikke være praktisk mulig siden brutverrsnittet er 4 m høyt. I tillegg er den beregnede massen til demperen i z-retning 1.5% av den modale massen. Dette tilsvarer en fysisk masse på 113.5 tonn. I forhold til brudekket som veier 16.6 tonn per meter vil en masse på 113.5 tonn midt i bruspenet utgjøre en stor endring i vekt for hengebruene. I tillegg er effekten av en slik massedemper en reduksjon av responsen på ca. 7%, noe som er ubetydelig. Når man tar demperens vandring, vekt og effekt i betraktning kan det tyde på at det vanskelig lar seg gjennomføre i praksis å dempe ut andre svingeform i z-retning for en karakteristisk vindlast på 45 m/s.

For torsjon er den beregnede relative responsen 0.1428 rad. For at tallet skal gi bedre mening er det beregnet hvor stort dette utslaget er i meter. For å ta et eksempel kan det tenkes at demperens masser er plassert 12 m fra senteret av brutverrsnittet. Se figur 2.20.b. Dette er 3/4 av halve tverrsnittsbredden på 16 m. En vinkel på 0.1428 rad over 12 m vil gi en relativ respons av massen og brubjelken på ca. 1.7 m. Massetregghetsmomentet til demperen skal være 1,5% av det modale massetregghetsmomentet. Dette tilsvarer et massetregghetsmomentet på $4,368 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. For å skape et slikt massetregghetsmoment er det behov for to masser på 15 tonn hver med en momentarm på 12 m. For torsjon er det mindre masse som skal til samtidig som responsen dempes betydelig mer enn for z-retning. Dermed kan det se ut som det er lettere å dempe ut 1. egensvingeform i torsjon framfor å dempe ut 2. egensvingeform i z-retning.

En ting er at massedemperen blir veldig tung slik at det er vanskelig å gjennomføre i praksis. Et annet aspekt med massedemperens tyngde er hvordan dette vil påvirke egenverdiproblemet. I denne oppgaven er det ikke gått inn på denne problemstillingen, men det er verdt å nevne at ved beregning av egenverdiproblemet er det antatt at det ikke virker noen punktlaster på bruene (se kapittel 2.3). Når demperens masse blir så tung som her, vil det ikke være riktig å se bort ifra denne tyngden i egenverdiproblemet. Det kan tenkes at det er mulig å neglisjere tyngden til θ -demperen, men for z-demperen vil vekten antagelig ha betydning.

5 Konklusjon

Den dynamiske responsen av hengebruen over Julsundet er studert ved en karakteristisk middelvindhastighet på 45 m/s. Beregningene er basert på teorien om en svingeform med en responskomponent og oppgaven har kommet fram til følgende konklusjoner.

- Responsen til 2. vertikale svingeform vil ikke dempes betydelig av en massedemper da bakgrunnsdelen i responsspekteret er forholdsvis stor.
- For 2. vertikale svingeform er det mest effektivt å plassere demperen midt på brua, selv om man ønsker å dempe ut responsen andre steder.
- Responsen for 1. svingeform i torsjon reduseres betydelig ved hjelp av en massedemper.
- En massedemper optimalisert for én svingeform vil, avhengig av frekvens og plassering, ha forholdsvis liten innvirkning på andre svingeformer.
- Responsen reduseres prosentvis like mye langs hele bruspenet.
- Det virker som den praktiske gjennomføringen av en massedemper er enklere for torsjon enn vertikalretning. Både med tanke på vandring av masse og vekt av demper. I tillegg til at effekten av TMD i torsjon er mye større enn i vertikal retning.

Problemstillingen presentert i kapittel 1 hadde som mål å svare på følgende spørsmål.

Hvorvidt er det aktuelt, og hvor effektivt er det å redusere svingninger som følge av buffeting vindlast ved karakteristisk middelvindhastighet ved bruk av en massedemper?

Utfra punktene over kan den endelige konklusjonen oppsummeres ved at det i vertikalretning ikke er aktuelt eller effektivt med massedemper. Med dette menes at det vanskelig lar seg gjennomføre i praksis, i tillegg til at responsen nesten ikke reduseres. For torsjon derimot kan det være aktuelt med massedemper ettersom vandringen ikke er alt for stor og responsen reduseres betydelig.

6 Referanser

1. Gimsing, N.J. and C.T. Georgakis, *Cable Supported Bridges : Concept and Design*. 3rd ed. ed. Cable Supported Bridges - Concept and Design. 2011, Hoboken: Wiley.
2. Strømmen, E., *Theory of Bridge Aerodynamics*. 2006: Springer.
3. Vegvesen, S. *Fakta om rv. 13 Hardangerbrua*. 2014 20.01.14 [cited 2016 28.04]; Available from: <http://www.vegvesen.no/vegprosjekter/Hardangerbrua/Fakta>.
4. Walbækken, S.L., et al., *Aerodynamic stability of slender suspension bridges*. 2013, Institutt for konstruksjonsteknikk.
5. Voigt, M., *Aerodynamisk stabilitet av lange slanke hengebruer*. 2013.
6. Gilberg, M.E., *Aerodynamisk stabilitet av lange slanke hengebruer*. 2013, NTNU.
7. Aaland, J.E., E.N. Strømmen, and B. Isaksen, *Aerodynamic Response of Slender Suspension Bridges*. 2014, Institutt for konstruksjonsteknikk.
8. Strommen, E.N., *Structural Dynamics*. 2013: Springer International Publishing.
9. Vegvesen, S., *Håndbok N400 Bruprosjektering*, Vegdirektoratet, Editor. 2015: vegvesen.no.
10. Fletcher, C.A.J., *Computational Galerkin Methods*. 2012: Springer Berlin Heidelberg.
11. Dannevig, P. and K.E. Harstveit. *Vind*. 03.01.2015 [cited 2016 23.05]; Available from: <https://snl.no/vind>.
12. Aas-Jakobsen, K. and k. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet Institutt for, *Time domain calculations of buffeting response for wind sensitive structures*. 1998, Department of Structural Engineering, Norwegian University of Science and Technology: Trondheim.
13. Strømmen, E.N., *Veiledning i forbindelse med masteroppgave*. 2016, NTNU.
14. Hartog, J.P.D., *Mechanical Vibrations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. 2013, Newburyport: Dover Publications.
15. Luft, R.W., *Optimal Tunde Mass Dampers for Buildings*. Journal of the Structural Division, 1979. **105**(12): p. 2766-2772.
16. Berntsen, K., *Veiledning i forbindelse med masteroppgave*. 2016, Vegdirektoratet.
17. Norge, S., *Eurocode: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner*. 2002.
18. Norge, S., *Eurocode 1: Laster på konstruksjoner Del 1-4: Allmenne laster*, in *Vindlaster*. 2005.
19. Kartverket. *Norgeskart.no*. 2016 [cited 2016 23.02.2016]; Available from: <http://www.norgeskart.no/#5/270865/7040150>.

Vedlegg

Beregningene er i hovedsak gjennomført med to hovedskript i Matlab. For å holde oversikt har det vært et mål å ha så lite beregninger som mulig i disse skriptene. Mesteparten av beregningene gjennomføres derfor i funksjoner. Funksjonene legges også som vedlegg med samme bokstav som hovedskriptet de tilhører og nummerert kronologisk.

Vedleggene er sortert i samme rekkefølge som beregningene er gjennomført i rapporten.

Første hovedskript er vedlegg A som beregner egenfrekvenser og egensvingeformer. Undervedlegg A1 til A4 er funksjonene til dette skriptet.

Vedlegg B og C inneholder resultatene fra ALVSAT beregningene. Dette er henholdsvis ALVSAT tilfelle 1 og tilfelle 4 (se tabell 3.3). Det justeres kun på to parametre der begge har verdi i tilfelle 1 og begge er null i tilfelle 4. I tilfelle 2 og 3 er henholdsvis den første og andre parameteren null. Derfor er kun tilfelle 1 og 4 tatt med i vedleggene ettersom tilfelle 2 og 3 kun er varianter av disse.

Andre og siste hovedskript er gitt i vedlegg D der undervedlegg D1 til D14 er funksjonene dette skriptet benytter. Det kan nevnes at vedlegg D ikke ble kjørt slik det presenteres her, men funksjonene ble kommentert inn og ut ettersom hva som til enhver tid skulle beregnes.

A Egensvingeformer – hovedkode

```
%{
Beregninger av egenfrekvenser og egensvingeformer
Laget av Simen L. Hegge & Mats Hole
NTNU, 2016

%-----%
ANTAGELSER
Antagelsene i dette skriptet er:
  - Massene er jevnt fordelt langs hele spennet.
  - Bruen er symmetrisk om z-aksen.
  - Elastisiteten til hengestagene er neglisjert.
%}

clear all
close all
clc

%-----%
% INPUT
L = 1625;           % [m] Lengden til hovedspennet
dx = 1;            % [m] Stegstørrelse i lengde-vektor

ec = 162.5;        % [m] Kabelheng ved brumidtre (maks kabelheng)
hm = 5.025;       % [m] Høyden til hengestang ved brumidtre
hr = 2.032;       % [m] Distanse fra SS til toppen av avstivningsbærer
bc = 28;          % [m] Horisontal avstand mellom bærekablene

my = 16600;       % [kg/m] Masse pr. meter brubjelke bevegelse i y-retning
mz = 16955;       % [kg/m] Masse pr. meter brubjelke bevegelse i z-retning
mt = 1.25*10^6;   % [kg*m^2/m] Massetregghetsmoment pr. meter brubjelke
mc = 3474.5;      % [kg/m] Masse pr. meter bærekabel (en kabel)

E = 210*10^9;     % [N/m^2] Elastisitetsmodul
Iy = 3.189;       % [m^4] Bøyestivhet om y-aksen
Iz = 97.51;       % [m^4] Bøyestivhet om z-aksen
It = 8.409;       % [m^4] Torsjonsstivhet avstivningsbærer
Iw = 75.76;       % [m^6] Hvelvingsparameter
v = 0.3;          % Poissons tall for stål
G = E/(2*(1+v)); % [N/m^2] skjærmodul

Ac = 0.375;       % [m^2] Konstruktivt areal i en bærekabel
Ec = 0.2*10^12;   % [N/m^2] Elastisitetsmodul bærekabler
fuk = 1770*10^6; % [N/m^2] Bruddstyrke bærekabel

N = 22;          % Antall svingeformer

%-----%
% BEREGNINGER

% Beregning av statisk horisontalkraft og konstruktivt tverrsnittsareal
[Ac_calc,H] = C_force_size(mz,mc,L,ec,fuk);
```

```

Ny = N;
Nz = N;
Nt = N;

% Beregning av egenfrekvenser og egensvingeformer y-, z- og theta-retning
[W_eig_y, Phi_y, Phi_cy] = Mode_shape_Y(L, dx, E, Iz, H, my, mz, mc, ec, hm, Ny);
[W_eig_z, Phi_z] = Mode_shape_Z(L, dx, E, Iy, H, mz, mc, ec, Ac, Ec, Nz);
[W_eig_t, Phi_t] =
Mode_shape_T(L, dx, H, mt, mc, ec, Ac, E, Ec, mz, It, Iw, bc, hr, Nt, G);

% Sortering av svingeformer
[W, Phi] =
Mode_shape(W_eig_y, W_eig_z, W_eig_t, Phi_y, Phi_cy, Phi_z, Phi_t, L, dx, N, Nz, Nt);

save('C:\Users\Simen\Google Drive\Masteroppgave\3 Dynamisk respons\1
Egensvingeformer og egenfrekvenser\Modeshapes_eigenvalues.mat', 'Phi', 'W')

```

A1 Statisk horisontalkraft og konstruktivt areal

```
function [Ac_calc,H] = C_force_size(mz,mc,L,ec,fyk)

% En funksjon som regner ut den statiske horisontalkraften og det
% konstruktive tverrsnittsarealet til bærekablene

%-----%
% INPUT
g = 9.80665;           % Tyngdekraft [m/s^2]
gamma_m = 1.2;        % Materialfaktor

% Input from NA. Rundskriv i SVV
m_traf = 9*10^3;      % Trafikklast pr. kjørefelt [N/m]
m_gang = 2*10^3;      % Gang og sykkel felt [N/m]

% Input fra NS-EN 1990 tabell NA.A2.4(B) (benytter 6.10.b in NS-EN 1990)
xi = 0.89;
gamma_Gjsup = 1.35;
gamma_Qi = 1.35;

gamma_g = xi*gamma_Gjsup; % Sikkerhetsfaktor permanent last
gamma_Q = gamma_Qi;      % Sikkerhetsfaktor variabel last

%-----%
% BEREGNINGER

% Kabelstørrelse
mc_Ed = gamma_g*mc;
mz_tot = gamma_g*mz+gamma_Q*4*(m_traf/g)+gamma_Q*(m_gang/g);

H_stat = ((mz_tot*g*L^2)/(16*ec))*...
          (1+((2*mc_Ed)/mz_tot)*(1+(4/3)*(ec/L)^2));
V_stat = ((mz_tot*g*L)/4)+mc_Ed*g*L*(0.5+(1/3)*(ec/L)^2);

N_stat = sqrt(H_stat^2+V_stat^2);

Ac_calc = (N_stat*1.5*gamma_m)/fyk;

% Statisk horisontalkraft
H = ((mz*g*L^2)/(16*ec))*(1+((2*mc)/mz)*(1+(4/3)*((ec/L)^2)));

end
```

A2 Egensvingeformer y-retning

```
function[W_eig_y,Phi_y,Phi_cy] =
Mode_shape_Y(L,dx,E,Iz,H,my,mz,mc,ec,hm,Ny)

% En funksjon som regner ut egensvingeformer og egenfrekvenser i y-retning
% Se Einar N. Strømmens "Structural Dynamics" kapittel 3.5.
% Alle ligningsnummer henviser til "Structural Dynamics".

%-----%
% INPUT
g = 9.80665;      % [m/s^2] Tyngdekraft
x = 0:dx:L;      % [m] Lengdevektor
N_plot = 4;      % Antall svingeformer som plottes

%-----%
% BEREGNINGER

% Konstruer stivhetsmatrisen Ky (Eq. 3.148)
for n = 1:Ny
    alfa(n) = E*Iz*((n*pi)/L)^4;          % Eq. 3.141.1
end

for n = 1:Ny
    beta(n) = 2*H*((n*pi)/L)^2;         % Eq. 3.145
end

for n = 1:Ny
    for p = 1:Ny
        fun_gamma = @(x_v) (sin((p*pi*x_v)/L).*sin((n*pi*x_v)/L))./(1+...
            (hm/ec)-4*(x_v/L).*(1-x_v/L));
        gamma(p,n) = ((mz*g*2)/(ec*L))*integral(fun_gamma,0,L); % Eq. 3.142
    end
end
gamma(abs(gamma)<10^-6) = 0;

j = 2;
Omega = [alfa(1)+gamma(1,1) -gamma(1,1) zeros(1,2*Ny-2)
        -gamma(1,1) beta(1)+gamma(1,1) zeros(1,2*Ny-2)]; % Eq. 3.148
for i = 2:Ny
    Omega = [Omega
            zeros(1,j) alfa(i)+gamma(i,i) -gamma(i,i) zeros(1,2*Ny-(j+2))
            zeros(1,j) -gamma(i,i) beta(i)+gamma(i,i) zeros(1,2*Ny-(j+2))];
    j = j+2;
end

Gamma = zeros(1,2*Ny);
for i = 1:Ny
    for j = 1:Ny
        if i == j
            G{j} = zeros(2);
        else
            G{j} = gamma(i,j)*[1 -1;-1 1]; % Eq. 3.148
        end
    end
    Gamma = [Gamma; cell2mat(G)];
end
Gamma(1,:) = [];
```

```

Ky = Omega+Gamma; % Eq. 3.148

% Konstruer massematrisen My (Eq. 3.149)
my_tilde = 0;
for n = 1:Ny
    my_tilde = [my_tilde my 0]; % Eq. 3.142.1
end
my_tilde(1) = [];

mc_tilde = 0;
for n = 1:Ny
    mc_tilde = [mc_tilde 2*mc 0]; % Eq. 3.145
end
mc_tilde(end) = [];

My = diag(my_tilde+mc_tilde); % Eq. 3.146

% Beregner egenfrekvensene % Eq. 3.150
[ay,l] = eig(Ky,My);
W_eig_y = sqrt(l)*ones(length(l),1);
W_eig_y(length(l)*0.5+1:end) = [];

% Beregning av svingeformer
for i = 1:Ny
    Phi_y(i,:) = zeros(1,length(x));
    Phi_cy(i,:) = zeros(1,length(x));
    j = 1;
    p = 2;
    for n = 1:Ny
        Phi_y(i,:) = Phi_y(i,)+ay(j,i)*sin(n*pi*x/L); % Eq. 3.139
        Phi_cy(i,:) = Phi_cy(i,)+ay(p,i)*sin(n*pi*x/L); % Eq. 3.139
        j = j+2;
        p = p+2;
    end
end

%-----%
% PLOT

figure
for i = 1:N_plot
    scale_fact = 1/(max(abs([Phi_y(i,:) Phi_cy(i,:)])));
    subplot(N_plot,1,i)
    plot(x,scale_fact*Phi_y(i,:))
    hold on
    plot(x,scale_fact*Phi_cy(i,:), '--')
    hold off
    if i == 1
        title('4 første svingeformer y-retning')
    end
    ylim([-1 1])
    xlim([0 L])
    grid on
    legend('Avstivningsbærer','Kabler','Location','eastoutside')

```

```
ylabel_text = sprintf('\Phi_{y%d}',i);
W_text = sprintf('\omega_{y%d}=%0.3f rad/s',i,W_eig_y(i,1));
ylabel(ylabel_text)
text(1.01*L,1,W_text)
end
xlabel('L [m]')

end
```

A3 Egensvingeformer z-retning

```
function [W_eig_z,Phi_z] = Mode_shape_Z(L,dx,E,Iy,H,mz,mc,ec,Ac,Ec,Nz)

% En funksjon som regner ut egensvingeformer og egenfrekvenser i z-retning
% Se Einar N. Strømmens "Structural Dynamics" kapittel 3.5.
% Alle ligningsnummer henviser til "Structural Dynamics".

%-----%
% INPUT
x = 0:dx:L;      % [m] Lengdevektor
N_plot = 4;      % Antall svingeformer som plottes

%-----%
% BEREGNINGER

% Verdier til stivhetsmatrisen
for n = 1:Nz;
    kappa(n) = E*Iy*((n*pi/L)^4); % Eq. 3.164
end
kappa =diag(kappa);

for n = 1:Nz;
    lambda(n) = 2*H*(n*pi/L)^2; % Eq. 3.164
end
lambda = diag(lambda);

% Effektive kabellengden % Eq. 3.159
le = L*(1+(8*(ec/L)^2));

my = zeros(Nz);
for p = 1:2:Nz;
    for n = 1:2:Nz;
        my(n,p) = ((32*ec/(pi*L))^2)*((Ec*Ac)/(L*le))*(1/(p*n)); % Eq. 3.165
    end
end

% Stivhetsmatrise % Eq. 3.169
Kz = kappa+lambda+my;

% Massematrise % Eq. 3.170
Mz = (2*mc+mz)*eye(Nz);

% Egenverdi problemet % Eq. 3.171
[az,l] = eig(Kz,Mz);

% Egenfrekvenser
W_eig_z = sqrt(l)*ones(length(l),1);

% Egensvingeformer
for i = 1:Nz
    Phi_z(i,:) = zeros(1,length(x));
    for n = 1:Nz
        Phi_z(i,:) = Phi_z(i,:)+az(n,i)*sin(n*pi*x/L); % Eq. 3.161
    end
end
end
```



```

%-----%
% PLOT

figure
for i = 1:N_plot
    scale_fact = 1/(max(abs(Phi_z(i,:))));
    subplot(N_plot,1,i)
    plot(x,scale_fact*Phi_z(i,:))
    if i==1
        title('4 første svingeformer z-retning')
    end
    ylim([-1 1])
    xlim([0 L])
    grid on
    ylabel_text = sprintf('\Phi_{z%d}',i);
    W_text = sprintf('\omega_{z%d}=%0.3f rad/s',i,W_eig_z(i,1));
    ylabel(ylabel_text)
    text(1.01*L,1,W_text)
end
xlabel('L [m]')

end

```

A4 Egensvingeformer θ -retning

```
function [W_eig_t,Phi_t] =
Mode_shape_T(L,dx,H,mt,mc,ec,Ac,E,Ec,mz,It,Iw,bc,hr,Nt,G)

% En funksjon som regner ut egensvingeformer og egenfrekvenser i theta-
% retning
% Se Einar N. Strømmens "Structural Dynamics" kapittel 3.5.
% Alle ligningsnummer henviser til "Structural Dynamics".

%-----%
% INPUT
g = 9.80665;      % [m/s^2] Tyngdekraft
x = 0:dx:L;      % [m] Lengdevektor
N_plot = 4;      % Antall svingeformer som plottes

%-----%
% BEREGNINGER

% Verdier til stivhetsmatrisen
for n = 1:Nt;
    omega(n) = ((n*pi/L)^2)*(G*It+((n*pi/L)^2)*E*Iw);      % Eq. 3.183
end
omega = diag(omega);

for n = 1:Nt;
    upsilon(n) = H*(bc^2/2)*((n*pi/L)^2);      % Eq. 3.184
end
upsilon = diag(upsilon);

for n = 1:Nt;
    nu(n) = (2*mc+mz)*g*hr;      % Eq. 3.185
end
nu = diag(nu);

% Effektiv kabellengde
le = L*(1+(8*(ec/L)^2));      % Eq. 3.159

chi = zeros(Nt);
for p = 1:2:Nt;
    for n = 1:2:Nt;
        chi(n,p) = ((16*ec*bc/(pi*L))^2)*(Ec*Ac)/(L*le*p*n);      % Eq. 3.187
    end
end

% Stivhetsmatrise
Kr = omega+upsilon+nu+chi;      % Eq. 3.191

% Massematrise
Mr = (mt+(mc*(bc^2/2)))*eye(Nt);      % Eq. 3.190

% Egenverdioproblemet
[ar,l] = eig(Kr,Mr);      % Eq. 3.192

l = l*ones(length(l),1);
A = [l'; ar];
```

```

B = sortrows(A');
B = B';
l = B(1, :);
ar = B;
ar(1, :) = [];

% Egenfrekvenser
W_eig_t = sqrt(l)';

% Egensvingeformer
for i = 1:Nt
    Phi_t(i, :) = zeros(1, length(x));
    for n = 1:Nt
        Phi_t(i, :) = Phi_t(i, :) + ar(n, i) * sin(n * pi * x / L);           % Eq. 3.161
    end
end

%-----%
% PLOT

figure
for i = 1:N_plot
    scale_fact = 1 / (max(abs(Phi_t(i, :))));
    subplot(N_plot, 1, i)
    plot(x, scale_fact * Phi_t(i, :))
    if i == 1
        title('4 første svingeformer \theta-retning')
    end
    ylim([-1 1])
    xlim([0 L])
    grid on
    ylabel_text = sprintf('\Phi_{\theta%d}', i);
    W_text = sprintf('\omega_{\theta%d}=%0.3f rad/s', i, W_eig_t(i, 1));
    ylabel(ylabel_text)
    text(1.01 * L, 1, W_text)
end
xlabel('L [m]')

end

```

A5 Sammenstilling egensvingeformer

```
function [W,Phi] =
Mode_shape(W_eig_y,W_eig_z,W_eig_t,Phi_y,Phi_cy,Phi_z,Phi_t,L,dx,N,Nz,Nt)

% En funksjon som sammenstiller alle svingeformene

%-----%
% INPUT
x = 0:dx:L;
Nx = length(x);
W_limit = 0.0001;

%-----%
% BEREGNINGER
W_z = W_eig_z;
W_t = W_eig_t;

p = 0;
for j = 1:length(W_eig_y)
    p = p+1;
    W_y(p,1) = W_eig_y(j);
    p = p+1;
    W_y(p,1) = W_eig_y(j)+W_limit;
end

W = [W_y;W_z;W_t];

p = 0;
for j = 1:length(W_eig_y)
    p = p+1;
    Phi_1(p,:) = [Phi_y(j,:) zeros(1,Nx) zeros(1,Nx)];
    p = p+1;
    Phi_1(p,:) = [Phi_cy(j,:) zeros(1,Nx) zeros(1,Nx)];
end

Phi_2 = [zeros(Nz,Nx) Phi_z zeros(Nz,Nx)];
Phi_3 = [zeros(Nt,Nx) zeros(Nt,Nx) Phi_t];

Phi = [Phi_1;Phi_2;Phi_3];

B = [W Phi];
A = sortrows(B);
W = sortrows(W);

%-----%
% PLOTTING

p = 1;
n = 1;
m = 1;
q = 1;
```

```

% Figur egenskaper
FontSizeLabel = 8;      % Label størrelse
FontSizeTitle = 8;     % Tittel størrelse
FontSizeAx = 4;        % Akse tall-størrelse
FontSizeTex = 5;       % Tekst størrelse
LineSizeAx = 0.25;    % Akse linje tykkelse
LineSizePlot = 0.25;  % Plotte linje tykkelse

SaveFig = 0;           % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'Egensvingeformer'; % Figurnavn
DPI = '-r200';        % Figurkvalitet
FigWidth = 24;        % Figur bredde [inch]
FigHeight = 40;       % Figur høyde [inch]

figure
for j = 1:N
    if A(q,1) == A(q+1,1)+W_limit || A(q,1) == A(q+1,1)-W_limit
        scale_fact = 1/(max(abs([A(q,2:Nx+1) A(q+1,2:Nx+1)])));
        subplot(N,3,p)
        hold on
        plot(x, scale_fact*A(q,2:Nx+1), 'LineWidth', LineSizePlot)
        plot(x, scale_fact*A(q+1,2:Nx+1), '--', 'LineWidth', LineSizePlot)
        hold off
        set(gca, 'FontSize', FontSizeAx, 'LineWidth', LineSizeAx)
        if j == 1
            title('\phi_{y}', 'FontWeight', 'normal', 'FontSize', FontSizeTitle)
        elseif j == N
            xlabel('L [m]', 'FontSize', FontSizeLabel)
        end
        xlim([0 L])
        ylim([-1 1])
        y_text = sprintf('\phi_{%d}', j);
        ylabel(y_text, 'FontSize', FontSizeLabel)
        box on
        grid on

        p = p+1;
        subplot(N,3,p)
        plot(x, zeros(1, Nx), 'LineWidth', LineSizePlot)
        set(gca, 'FontSize', FontSizeAx, 'LineWidth', LineSizeAx)
        if j == 1
            title('\phi_{z}', 'FontWeight', 'normal', 'FontSize', FontSizeTitle)
        elseif j == N
            xlabel('L [m]', 'FontSize', FontSizeLabel)
        end
        xlim([0 L])
        ylim([-1 1])
        box on
        grid on

        p = p+1;
        subplot(N,3,p)
        plot(x, zeros(1, Nx), 'LineWidth', LineSizePlot)
        set(gca, 'FontSize', FontSizeAx, 'LineWidth', LineSizeAx)
        if j == 1
            title('\phi_{\theta}', 'FontWeight', 'normal',
                'FontSize', FontSizeTitle)
        elseif j == N
            xlabel('L [m]', 'FontSize', FontSizeLabel)
        end
    end
end

```

```

xlim([0 L])
ylim([-1 1])
W_text = sprintf('\omega_{%d}=%0.3f rad/s',j,A(q,1));
te = text(1.03*L,0,W_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
box on
grid on

n = p+1;
m = p+1;
p = p+1;
q = q+1;

elseif A(q,Nx+round(0.01*Nx)) == 0
subplot(N,3,n)
plot(x,zeros(1,Nx),'LineWidth',LineStylePlot)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
if j == 1
    title('\phi_{y}','FontWeight','normal','FontSize',FontSizeTitle)
elseif j == N
    xlabel('L [m]','FontSize',FontSizeLabel)
end
xlim([0 L])
ylim([-1 1])
y_text = sprintf('\phi_{%d}',j);
ylabel(y_text,'FontSize',FontSizeLabel)
box on
grid on

n = n+1;
subplot(N,3,n)
plot(x,zeros(1,Nx),'LineWidth',LineStylePlot)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
if j == 1
    title('\phi_{z}','FontWeight','normal','FontSize',FontSizeTitle)
elseif j == N
    xlabel('L [m]','FontSize',FontSizeLabel)
end
xlim([0 L])
ylim([-1 1])
box on
grid on

n = n+1;
scale_fact=1/(max(abs(A(q,2+2*Nx:end)))));
subplot(N,3,n)
plot(x,scale_fact*A(q,2+2*Nx:end),'LineWidth',LineStylePlot)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
if j == 1
    title('\phi_{\theta}','FontWeight','normal',
        'FontSize',FontSizeTitle)
elseif j == N
    xlabel('L [m]','FontSize',FontSizeLabel)
end
xlim([0 L])
ylim([-1 1])
W_text = sprintf('\omega_{%d}=%0.3f rad/s',j,A(q,1));
te = text(1.03*L,0,W_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
box on
grid on

```

```

m = n+1;
p = n+1;
n = n+1;

else
    subplot(N,3,m)
    plot(x,zeros(1,Nx),'LineWidth',LineStylePlot)
    set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
    if j == 1
        title('\phi_{y}','FontWeight','normal','FontSize',FontSizeTitle)
    elseif j == N
        xlabel('L [m]','FontSize',FontSizeLabel)
    end
    xlim([0 L])
    ylim([-1 1])
    y_text = sprintf('\phi_{%d}',j);
    ylabel(y_text,'FontSize',FontSizeLabel)
    box on
    grid on

    m = m+1;
    scale_fact=1/(max(abs(A(q,2+Nx:1+2*Nx))));
    subplot(N,3,m)
    plot(x,scale_fact*A(q,2+Nx:1+2*Nx),'LineWidth',LineStylePlot)
    set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
    if j == 1
        title('\phi_{z}','FontWeight','normal','FontSize',FontSizeTitle)
    elseif j == N
        xlabel('L [m]','FontSize',FontSizeLabel)
    end
    xlim([0 L])
    ylim([-1 1])
    box on
    grid on

    m = m+1;
    subplot(N,3,m)
    plot(x,zeros(1,Nx),'LineWidth',LineStylePlot)
    set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
    if j == 1
        title('\phi_{\theta}','FontWeight','normal',
            'FontSize',FontSizeTitle)
    elseif j == N
        xlabel('L [m]','FontSize',FontSizeLabel)
    end
    xlim([0 L])
    ylim([-1 1])
    W_text = sprintf('\omega_{%d}=%0.3f rad/s',j,A(q,1));
    te = text(1.03*L,0,W_text);
    set(te,'FontSize',FontSizeTex)
    box on
    grid on

    n = m+1;
    p = m+1;
    m = m+1;

end
q = q+1;

```

```
end

% Lagrer figuren
if SaveFig == 1
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition', [0 0 FigWidth FigHeight])
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
end

A(:,1) = [];
A(q:end,:) = [];
Phi = A;

W(q:end) = [];

end
```


STRUCTURAL PARAMETERS :

LENGTH OF BRIDGE SPAN L = 1625.
 MINIMUM HANGER LENGTH HM = 5.025
 SAG OF MAIN CABLES F = 162.5
 HOGGING OF THE GIRDER NY = 20.26
 LENGTH OF SIDE SPAN SECOND. CABLE L1 = .0000
 SAG OF SECONDARY CABLES FS = .0000
 MASS OF GIRDER MG = .1700E+05
 MASS OF MAIN CABLES (ONE CABLE) MC = 3475.
 TENSION IN MAIN CABLE (ONE CABLE) H = .2390E+09
 RIGIDITY OF GIRDER EI = .2050E+14
 ACCELERATION OF GRAVITY G = 9.807
 TYPICAL DIMENSION OF GIRDER DG = 4.000
 TYPICAL DIMENSION OF ONE CABEL DC = .8000
 TYPICAL WIDTH OF THE GIRDER BG = 32.00
 TENSION IN GIRDER S0 = .0000
 TENSION IN SECOND. CABLES F0 = .0000
 INITIAL STRAIN IN SECOND. CABLES STR = .0000
 LENGTH OF BACKSTAYS IN % OF PI1 = .2030
 THE LENGTH OF THE BRIDGE SPAN PI2 = .1860
 CABLE SLOPE OF BACKSTAY 1: FI1 = .3800
 CABLE SLOPE OF BACKSTAY 2: FI2 = .5760
 DISTANCE BETWEEN POINT OF ATTACHMENT
 FOR HANGERS AND THE CENTER OF
 GYRATION HR = 2.032
 HALF THE DISTANCE BETWEEN
 THE CABLES BC = 14.0000
 MASS MOMENT OF INERTIA M = .2600E+07
 HORIZONTAL COMPONENT OF
 CROSS SECTION OF EACH CABLE AC = .3750
 BENDING STIFFNESS OF GIRDER EIX = .6700E+12
 WARPING RESISTANCE EIW = .1590E+14
 TORSIONAL STIFFNESS GIT = .6730E+12
 MODULUS OF ELASTICITY OF CABLE EC = .2000E+12

1DATA FOR FREQUENCY ANALYSES

	HOR	VER	TOR
NUMBER OF COEFFICIENTS (NFC) :	8	8	8
NUMBER OF NORMAL MODES (NNM) :	6	6	6

FREQUENCY RANGE FOR ITERATION SEARCH :

LOWER LIMIT FOR VERTICAL MODE VOMI = .0000
 UPPER LIMIT FOR VERTICAL MODE VOMA = .0000
 LOWER LIMIT FOR TORSIONAL MODE TOMI = .0000
 UPPER LIMIT FOR TORSIONAL MODE TOMA = .0000
 MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS NMAX = 30
 NO. OF INTERVALS IN
 FREQUENCY RANGE IN ASYM ITFR = 50
 BRIDGE HELD/FREE AT THE ENDS LC = 1
 LC=0 : FREE LC=1 : HELD AT ONE END

ENVIRONMENTAL DATA

ESDU SPECTRUM (ISTYP=2)

 WIND SPEED AT THE LEVEL OF THE BRIDGE (UREF) = 36.70
 INTEGRAL LENGTH SCALE OF U IN X-DIR (XLU) = 463.7
 TURBULENCE INTENSITY U COMPONENT = .1400
 CHARACTERISTIC HEIGHT ABOVE THE
 GROUND OF THE BRIDGE DECK = 70.00
 WIND VELOCITY 10 M ABOVE THE GROUND = 26.81
 TURBULENCE INTENSITY OF VERTICAL VELOCITY = .7725E-01
 INTEGRAL LENGTH SCALE OF U IN Y-DIR = 133.5
 INTEGRAL LENGTH SCALE OF U IN Z-DIR = 86.52

INTEGRAL LENGTH SCALE OF W IN X-DIR = 38.94
 INTEGRAL LENGTH SCALE OF W IN Y-DIR = 22.43
 INTEGRAL LENGTH SCALE OF W IN Z-DIR = 29.07
 ALFA VALUE IN MODIFIED VON KARMAN SPECTRUM = .5937
 BETA1 IN MODIFIED VON KARMAN SPECTRUM = .6383
 BETA2 IN MODIFIED VON KARMAN SPECTRUM = .3617
 TERRAIN ROUGHNESS (Z0) = .3301E-01

ESDU COHERENCE FUNCTION (ICTYP=2)

 DECAY FACTOR HORIZONTAL SEPARATION (U,W)= 1.000 1.000
 DECAY FACTOR VERTICAL SEPARATION (U,W) = 1.000 1.000
 AVERAGE CORRELATION BETWEEN LOADS
 ON GIRDER AND CABLES = .9000
 DENSITY OF AIR: = 1.250

COEFFICIENTS (FORM FACTORS)

CDG(1:5) :	1.025	.0000	.0000	.0000	1.025
CDDG(1:5):	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
CDC(1:5) :	1.000	.0000	.0000	.0000	1.000
CLG(1:5) :	-.3670	.0000	.0000	.0000	-.3670
CLDG(1:5):	3.624	.0000	.0000	.0000	3.624
CMG(1:5) :	-.3800E-01	.0000	.0000	.0000	-.3800E-01
CMDG(1:5):	1.182	.0000	.0000	.0000	1.182

1DATA FOR STATIC ANALYSIS

NUMBER OF INTERVAL FOR RESPONS CALCULATION
 HOR VER TOR
 20 20 20

DATA FOR DYNAMIC ANALYSES

	HOR	VER	TOR
CROSS TERMS BETWEEN MODES:	1	1	1
IRS :	0	0	0

DURATION OF STORM : 600.

CRITICAL DAMPING RATIOS :

CRDR(1,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(2,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(3,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(4,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(5,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(6,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02

1

 ***** HORIZONTAL RESPONSE *****

 ***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

EVALUATION OF SYMMETRIC MODES:

MODE	PERIOD	FREQUENCY
NO:	SEC	RAD/SEC
1	22.13787	.28382
2	5.36834	1.17041
3	4.60279	1.36508

MODE	FOURIER CONSTANTS :					
	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
	.1000E+01	.8819E+00	.2876E+00	-.8551E+00	-.2984E+00	.8393E+00
	.2077E-01	-.2946E-01	.1000E+01	-.3676E-02	.3805E+00	.1000E+01
	-.1101E-02	.4463E-02	.3799E-02	-.1685E-01	.7876E-02	-.3665E-01
	.1660E-03	-.1272E-02	-.3271E-03	.2747E-02	-.1029E-02	.9059E-02
	.4996E-04	.3792E-03	.9080E-04	-.1123E-02	.1920E-03	-.2678E-02
	-.8183E-05	.3407E-03	.1155E-04	-.3635E-03	-.5171E-04	.1048E-02
	.2360E-05	-.1334E-03	-.3318E-05	.1806E-03	-.3462E-05	-.3893E-03
	-.7383E-06	.3679E-04	.1067E-05	-.5005E-04	.1118E-05	-.8614E-04

OBSERVATION POINT	MODES OF VIBRATION					
	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
.00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00
40.63	.830E-01	.638E-01	.257E+00	-.739E-01	.680E-01	.289E+00
81.25	.165E+00	.127E+00	.501E+00	-.146E+00	.131E+00	.565E+00
121.88	.246E+00	.190E+00	.720E+00	-.216E+00	.184E+00	.819E+00
162.50	.325E+00	.252E+00	.901E+00	-.282E+00	.223E+00	.104E+01
203.13	.401E+00	.314E+00	.104E+01	-.345E+00	.244E+00	.122E+01
243.75	.474E+00	.374E+00	.112E+01	-.403E+00	.246E+00	.134E+01
284.38	.543E+00	.433E+00	.115E+01	-.457E+00	.227E+00	.142E+01
325.00	.607E+00	.491E+00	.112E+01	-.508E+00	.187E+00	.144E+01
365.63	.667E+00	.547E+00	.104E+01	-.555E+00	.129E+00	.140E+01
406.25	.722E+00	.601E+00	.908E+00	-.598E+00	.533E-01	.132E+01
446.88	.772E+00	.652E+00	.738E+00	-.639E+00	-.350E-01	.119E+01
487.50	.817E+00	.700E+00	.538E+00	-.676E+00	-.132E+00	.102E+01
528.13	.855E+00	.744E+00	.320E+00	-.712E+00	-.233E+00	.833E+00
568.75	.889E+00	.785E+00	.967E-01	-.746E+00	-.332E+00	.627E+00
609.38	.916E+00	.823E+00	-.119E+00	-.779E+00	-.425E+00	.418E+00
650.00	.939E+00	.855E+00	-.315E+00	-.809E+00	-.508E+00	.220E+00
690.63	.956E+00	.882E+00	-.479E+00	-.835E+00	-.577E+00	.450E-01
731.25	.968E+00	.901E+00	-.604E+00	-.855E+00	-.628E+00	-.922E-01
771.88	.976E+00	.913E+00	-.682E+00	-.867E+00	-.659E+00	-.180E+00
812.50	.978E+00	.917E+00	-.708E+00	-.872E+00	-.670E+00	-.210E+00

1

 ***** HORIZONTAL RESPONSE *****

 ***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

EVALUATION OF ASYMMETRIC MODES:/		
MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	9.97997	.62958
2	4.77726	1.31523
3	3.04801	2.06141

MODE	FOURIER CONSTANTS :					
	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
	.1000E+01	.4904E+00	-.1964E+00	.1000E+01	.8966E-02	-.2683E-01
	.1841E-01	-.4777E-01	-.5756E-01	.1529E+00	.8625E+00	.1000E+01
	-.1611E-02	.9511E-02	.3319E-02	-.2171E-01	-.1846E-02	.1577E-01
	.2949E-03	-.3043E-02	-.5822E-03	.6499E-02	.2598E-03	-.3327E-02
	-.6492E-04	.1051E-02	.1260E-03	-.2143E-02	-.5870E-04	.1095E-02
	.1871E-04	-.4332E-03	-.3652E-04	.8799E-03	-.5914E-05	-.4004E-03
	.1436E-05	.1733E-03	.1085E-04	-.3522E-03	.1479E-05	.1654E-03
	-.4923E-06	.1265E-04	-.3942E-05	.1659E-03	-.5081E-06	.1576E-04

MODES OF VIBRATION						
OBSERVATION POINT	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
.00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00
40.63	.162E+00	.650E-01	-.473E-01	.197E+00	.267E+00	.311E+00
81.25	.319E+00	.129E+00	-.923E-01	.386E+00	.508E+00	.590E+00
121.88	.468E+00	.191E+00	-.133E+00	.561E+00	.700E+00	.810E+00
162.50	.604E+00	.250E+00	-.167E+00	.716E+00	.824E+00	.948E+00
203.13	.724E+00	.305E+00	-.194E+00	.846E+00	.868E+00	.992E+00
243.75	.826E+00	.355E+00	-.212E+00	.946E+00	.827E+00	.935E+00
284.38	.906E+00	.399E+00	-.222E+00	.101E+01	.706E+00	.785E+00
325.00	.963E+00	.435E+00	-.222E+00	.105E+01	.516E+00	.556E+00
365.63	.995E+00	.463E+00	-.214E+00	.105E+01	.277E+00	.271E+00
406.25	.100E+01	.482E+00	-.200E+00	.102E+01	.108E-01	-.417E-01
446.88	.984E+00	.490E+00	-.179E+00	.962E+00	-.256E+00	-.350E+00
487.50	.941E+00	.487E+00	-.155E+00	.879E+00	-.497E+00	-.625E+00
528.13	.877E+00	.471E+00	-.130E+00	.778E+00	-.689E+00	-.839E+00
568.75	.791E+00	.442E+00	-.104E+00	.663E+00	-.813E+00	-.971E+00
609.38	.688E+00	.400E+00	-.791E-01	.541E+00	-.857E+00	-.101E+01
650.00	.569E+00	.344E+00	-.572E-01	.419E+00	-.817E+00	-.950E+00
690.63	.437E+00	.274E+00	-.387E-01	.301E+00	-.696E+00	-.802E+00
731.25	.297E+00	.192E+00	-.234E-01	.192E+00	-.506E+00	-.579E+00
771.88	.150E+00	.988E-01	-.109E-01	.928E-01	-.266E+00	-.303E+00
812.50	-.658E-07	-.437E-07	.468E-08	-.401E-07	.119E-06	.135E-06

1

 ***** VERTICAL RESPONSE *****

***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

***** SYMMETRIC MODES *****

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	8.30300	.75674
2	6.06378	1.03618
3	4.20087	1.49569

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	-.9546E+00	.1000E+01	.1222E+00
	.1000E+01	.9659E+00	.5838E-01
	.5860E-01	-.1793E+00	.1000E+01
	.1623E-01	-.3879E-01	-.1510E-01
	.6344E-02	-.1425E-01	-.4439E-02
	.2953E-02	-.6452E-02	-.1864E-02
	.1532E-02	-.3302E-02	-.9212E-03
	.8583E-03	-.1835E-02	-.5026E-03

MODES OF VIBRATION : 1 2 3

OBSERVATION
POINT :

.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.1979E+00	.1964E+00	.3925E+00
81.25	.3717E+00	.4089E+00	.7319E+00
121.88	.5037E+00	.6413E+00	.9706E+00
162.50	.5847E+00	.8818E+00	.1073E+01
203.13	.6120E+00	.1110E+01	.1023E+01
243.75	.5853E+00	.1305E+01	.8280E+00
284.38	.5051E+00	.1453E+01	.5182E+00
325.00	.3740E+00	.1545E+01	.1424E+00
365.63	.1975E+00	.1573E+01	-.2408E+00
406.25	-.1594E-01	.1533E+01	-.5722E+00
446.88	-.2564E+00	.1429E+01	-.8005E+00
487.50	-.5137E+00	.1268E+01	-.8900E+00

528.13	-.7774E+00	.1065E+01	-.8266E+00
568.75	-.1036E+01	.8358E+00	-.6199E+00
609.38	-.1277E+01	.5982E+00	-.3025E+00
650.00	-.1490E+01	.3699E+00	.7606E-01
690.63	-.1666E+01	.1698E+00	.4572E+00
731.25	-.1798E+01	.1487E-01	.7818E+00
771.88	-.1880E+01	-.8252E-01	.9994E+00
812.50	-.1908E+01	-.1157E+00	.1076E+01

1 ***** ASYMMETRIC MODES *****/

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	10.60110	.59269
2	5.42449	1.15830
3	3.45869	1.81664

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	.1000E+01	.3915E-02	.6131E-03
	-.3915E-02	.1000E+01	.2772E-03
	-.6120E-03	-.2796E-03	.1000E+01
	-.1656E-03	-.6206E-04	.0000E+00
	-.5846E-04	-.2067E-04	.0000E+00
	-.2445E-04	.0000E+00	.0000E+00
	-.1155E-04	.0000E+00	.0000E+00
	-.5980E-05	.0000E+00	.0000E+00

MODES OF VIBRATION : 1 2 3

OBSERVATION POINT :

.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.1540E+00	.3090E+00	.4540E+00
81.25	.3051E+00	.5878E+00	.8090E+00
121.88	.4498E+00	.8090E+00	.9877E+00
162.50	.5842E+00	.9511E+00	.9511E+00
203.13	.7048E+00	.1000E+01	.7071E+00
243.75	.8083E+00	.9511E+00	.3090E+00
284.38	.8919E+00	.8090E+00	-.1564E+00
325.00	.9533E+00	.5878E+00	-.5878E+00
365.63	.9908E+00	.3090E+00	-.8910E+00
406.25	.1003E+01	-.6880E-07	-.1000E+01
446.88	.9908E+00	-.3090E+00	-.8910E+00
487.50	.9533E+00	-.5878E+00	-.5878E+00
528.13	.8919E+00	-.8090E+00	-.1564E+00
568.75	.8083E+00	-.9511E+00	.3090E+00
609.38	.7048E+00	-.1000E+01	.7071E+00
650.00	.5842E+00	-.9511E+00	.9511E+00
690.63	.4498E+00	-.8090E+00	.9877E+00
731.25	.3051E+00	-.5878E+00	.8090E+00
771.88	.1540E+00	-.3090E+00	.4540E+00
812.50	-.6763E-07	.1376E-06	-.2064E-06

ONE START FREQUENCY TRIED IN ASYM

NUMBER OF ITERATIONS NECESSARY: 4

1 *****
 ***** TORSIONAL RESPONSE *****

***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

***** SYMMETRIC MODES *****

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	3.93772	1.59564
2	1.96504	3.19748
3	1.19025	5.27889

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	.1000E+01	.6123E-01	.1122E-01
	-.6131E-01	.1000E+01	.5600E-02
	-.1088E-01	-.6290E-02	.1000E+01
	-.3774E-02	-.1782E-02	-.1603E-02
	-.1738E-02	-.7663E-03	-.5322E-03
	-.9402E-03	-.4015E-03	-.2530E-03
	-.5645E-03	-.2369E-03	-.1423E-03
	-.3647E-03	-.1514E-03	-.8836E-04

MODES OF VIBRATION : 1 2 3

OBSERVATION POINT :

.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.5535E-01	.2338E+00	.3833E+00
81.25	.1141E+00	.4561E+00	.7090E+00
121.88	.1779E+00	.6553E+00	.9280E+00
162.50	.2461E+00	.8204E+00	.1007E+01
203.13	.3167E+00	.9418E+00	.9333E+00
243.75	.3885E+00	.1012E+01	.7186E+00
284.38	.4608E+00	.1028E+01	.3956E+00
325.00	.5330E+00	.9887E+00	.1347E-01
365.63	.6041E+00	.8962E+00	-.3693E+00
406.25	.6729E+00	.7556E+00	-.6945E+00
446.88	.7381E+00	.5747E+00	-.9125E+00
487.50	.7990E+00	.3639E+00	-.9900E+00
528.13	.8550E+00	.1351E+00	-.9151E+00
568.75	.9055E+00	-.9879E-01	-.6993E+00
609.38	.9494E+00	-.3247E+00	-.3755E+00
650.00	.9860E+00	-.5301E+00	.6785E-02
690.63	.1015E+01	-.7033E+00	.3893E+00
731.25	.1036E+01	-.8344E+00	.7138E+00
771.88	.1049E+01	-.9160E+00	.9307E+00
812.50	.1053E+01	-.9437E+00	.1007E+01

1 ***** ASYMMETRIC MODES *****/

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	2.99024	2.10123
2	1.48894	4.21989
3	.99288	6.32827

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.1000E+01	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.1000E+01
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

MODES OF VIBRATION : OBSERVATION POINT :	1	2	3
.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.1564E+00	.3090E+00	.4540E+00
81.25	.3090E+00	.5878E+00	.8090E+00
121.88	.4540E+00	.8090E+00	.9877E+00
162.50	.5878E+00	.9511E+00	.9511E+00
203.13	.7071E+00	.1000E+01	.7071E+00
243.75	.8090E+00	.9511E+00	.3090E+00
284.38	.8910E+00	.8090E+00	-.1564E+00
325.00	.9511E+00	.5878E+00	-.5878E+00
365.63	.9877E+00	.3090E+00	-.8910E+00
406.25	.1000E+01	-.6880E-07	-.1000E+01
446.88	.9877E+00	-.3090E+00	-.8910E+00
487.50	.9511E+00	-.5878E+00	-.5878E+00
528.13	.8910E+00	-.8090E+00	-.1564E+00
568.75	.8090E+00	-.9511E+00	.3090E+00
609.38	.7071E+00	-.1000E+01	.7071E+00
650.00	.5878E+00	-.9511E+00	.9511E+00
690.63	.4540E+00	-.8090E+00	.9877E+00
731.25	.3090E+00	-.5878E+00	.8090E+00
771.88	.1564E+00	-.3090E+00	.4540E+00
812.50	-.6880E-07	.1376E-06	-.2064E-06

ONE START FREQUENCY TRIED IN ASYM
NUMBER OF ITERATIONS NECESSARY: 5

***** CPU-TIME USED = 19.6400 *****

STRUCTURAL PARAMETERS :

LENGTH OF BRIDGE SPAN	L	=	1625.
MINIMUM HANGER LENGTH	HM	=	5.025
SAG OF MAIN CABLES	F	=	162.5
HOGGING OF THE GIRDER	NY	=	.0000
LENGTH OF SIDE SPAN SECOND. CABLE	L1	=	.0000
SAG OF SECONDARY CABLES	FS	=	.0000
MASS OF GIRDER	MG	=	.1700E+05
MASS OF MAIN CABLES (ONE CABLE)	MC	=	3475.
TENSION IN MAIN CABLE (ONE CABLE)	H	=	.2390E+09
RIGIDITY OF GIRDER	EI	=	.2050E+14
ACCELERATION OF GRAVITY	G	=	9.807
TYPICAL DIMENSION OF GIRDER	DG	=	4.000
TYPICAL DIMENSION OF ONE CABEL	DC	=	.8000
TYPICAL WIDTH OF THE GIRDER	BG	=	32.00
TENSION IN GIRDER	S0	=	.0000
TENSION IN SECOND. CABLES	F0	=	.0000
INITIAL STRAIN IN SECOND. CABLES	STR	=	.0000
LENGTH OF BACKSTAYS IN % OF	PI1	=	.0000
THE LENGTH OF THE BRIDGE SPAN	PI2	=	.0000
CABLE SLOPE OF BACKSTAY 1:	FI1	=	.0000
CABLE SLOPE OF BACKSTAY 2:	FI2	=	.0000
DISTANCE BETWEEN POINT OF ATTACHMENT FOR HANGERS AND THE CENTER OF GYRATION	HR	=	2.032
HALF THE DISTANCE BETWEEN THE CABLES	BC	=	14.0000
MASS MOMENT OF INERTIA	M	=	.2600E+07
HORIZONTAL COMPONENT OF CROSS SECTION OF EACH CABLE	AC	=	.3750
BENDING STIFFNESS OF GIRDER	EIX	=	.6700E+12
WARPING RESISTANCE	EIW	=	.1590E+14
TORSIONAL STIFFNESS	GIT	=	.6730E+12
MODULUS OF ELASTICITY OF CABLE	EC	=	.2000E+12

1DATA FOR FREQUENCY ANALYSES

	HOR	VER	TOR
NUMBER OF COEFFICIENTS (NFC) :	8	8	8
NUMBER OF NORMAL MODES (NNM) :	6	6	6

FREQUENCY RANGE FOR ITERATION SEARCH :

LOWER LIMIT FOR VERTICAL MODE	VOMI	=	.0000
UPPER LIMIT FOR VERTICAL MODE	VOMA	=	.0000
LOWER LIMIT FOR TORSIONAL MODE	TOMI	=	.0000
UPPER LIMIT FOR TORSIONAL MODE	TOMA	=	.0000
MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS	NMAX	=	30
NO. OF INTERVALS IN FREQUENCY RANGE IN ASYM	ITFR	=	50
BRIDGE HELD/FREE AT THE ENDS	LC	=	1
LC=0 : FREE LC=1 : HELD AT ONE END			

ENVIRONMENTAL DATA

ESDU SPECTRUM (ISTYP=2)

WIND SPEED AT THE LEVEL OF THE BRIDGE (UREF)	=	36.70
INTEGRAL LENGTH SCALE OF U IN X-DIR (XLU)	=	463.7
TURBULENCE INTENSITY U COMPONENT	=	.1400
CHARACTERISTIC HEIGHT ABOVE THE GROUND OF THE BRIDGE DECK	=	70.00
WIND VELOCITY 10 M ABOVE THE GROUND	=	26.81
TURBULENCE INTENSITY OF VERTICAL VELOCITY	=	.7725E-01
INTEGRAL LENGTH SCALE OF U IN Y-DIR	=	133.5
INTEGRAL LENGTH SCALE OF U IN Z-DIR	=	86.52
INTEGRAL LENGTH SCALE OF W IN X-DIR	=	38.94

INTEGRAL LENGTH SCALE OF W IN Y-DIR = 22.43
 INTEGRAL LENGTH SCALE OF W IN Z-DIR = 29.07
 ALFA VALUE IN MODIFIED VON KARMAN SPECTRUM = .5937
 BETA1 IN MODIFIED VON KARMAN SPECTRUM = .6383
 BETA2 IN MODIFIED VON KARMAN SPECTRUM = .3617
 TERRAIN ROUGHNESS (Z0) = .3301E-01

ESDU COHERENCE FUNCTION (ICTYP=2)

 DECAY FACTOR HORIZONTAL SEPARATION (U,W) = 1.000 1.000
 DECAY FACTOR VERTICAL SEPARATION (U,W) = 1.000 1.000
 AVERAGE CORRELATION BETWEEN LOADS
 ON GIRDER AND CABLES = .9000
 DENSITY OF AIR: = 1.250

COEFFICIENTS (FORM FACTORS)

CDG(1:5) :	1.025	.0000	.0000	.0000	1.025
CDDG(1:5):	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
CDC(1:5) :	1.000	.0000	.0000	.0000	1.000
CLG(1:5) :	-.3670	.0000	.0000	.0000	-.3670
CLDG(1:5):	3.624	.0000	.0000	.0000	3.624
CMG(1:5) :	-.3800E-01	.0000	.0000	.0000	-.3800E-01
CMDG(1:5):	1.182	.0000	.0000	.0000	1.182

1DATA FOR STATIC ANALYSIS

NUMBER OF INTERVAL FOR RESPONS CALCULATION
 HOR VER TOR
 20 20 20

DATA FOR DYNAMIC ANALYSES

	HOR	VER	TOR
CROSS TERMS BETWEEN MODES:	1	1	1
IRS :	0	0	0
DURATION OF STORM :	600.		

CRITICAL DAMPING RATIOS :

CRDR(1,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(2,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(3,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(4,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(5,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02
CRDR(6,1:3) :	.5000E-02	.5000E-02	.5000E-02

1

 ***** HORIZONTAL RESPONSE *****

 ***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

EVALUATION OF SYMMETRIC MODES:

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	22.09577	.28436
2	5.31244	1.18273
3	4.54622	1.38207

MODE	FOURIER CONSTANTS :					
	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
	.1000E+01	.8871E+00	.2480E+00	-.7356E+00	-.3123E+00	.8766E+00
	.1989E-01	-.2845E-01	.1000E+01	.9325E-01	.3027E+00	.1000E+01
	-.9835E-03	.3980E-02	.5236E-02	-.2286E-01	.5897E-02	-.2757E-01
	.1435E-03	-.1105E-02	-.4833E-03	.4107E-02	-.7847E-03	.6929E-02
	.4451E-04	.3157E-03	.1150E-03	-.1566E-02	.1342E-03	-.1878E-02
	-.7139E-05	.2562E-03	.2149E-04	.4716E-03	.7227E-05	.7432E-03
	.1995E-05	-.1137E-03	-.6362E-05	-.2142E-03	-.2192E-05	-.2531E-03
	-.6022E-06	.3014E-04	.1973E-05	-.1217E-03	.6902E-06	-.5639E-04

OBSERVATION POINT	MODES OF VIBRATION					
	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
.00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00
40.63	.828E-01	.642E-01	.255E+00	-.435E-01	.481E-01	.294E+00
81.25	.165E+00	.128E+00	.496E+00	-.866E-01	.922E-01	.576E+00
121.88	.246E+00	.192E+00	.712E+00	-.129E+00	.128E+00	.834E+00
162.50	.324E+00	.254E+00	.891E+00	-.172E+00	.154E+00	.106E+01
203.13	.400E+00	.316E+00	.102E+01	-.214E+00	.165E+00	.124E+01
243.75	.473E+00	.377E+00	.110E+01	-.258E+00	.161E+00	.137E+01
284.38	.542E+00	.437E+00	.113E+01	-.302E+00	.141E+00	.144E+01
325.00	.607E+00	.495E+00	.110E+01	-.347E+00	.105E+00	.146E+01
365.63	.667E+00	.552E+00	.101E+01	-.393E+00	.538E-01	.143E+01
406.25	.722E+00	.606E+00	.879E+00	-.441E+00	-.103E-01	.134E+01
446.88	.772E+00	.657E+00	.707E+00	-.492E+00	-.844E-01	.121E+01
487.50	.816E+00	.705E+00	.504E+00	-.544E+00	-.165E+00	.105E+01
528.13	.855E+00	.749E+00	.285E+00	-.597E+00	-.249E+00	.855E+00
568.75	.889E+00	.791E+00	.603E-01	-.649E+00	-.331E+00	.651E+00
609.38	.917E+00	.828E+00	-.156E+00	-.701E+00	-.407E+00	.446E+00
650.00	.939E+00	.860E+00	-.352E+00	-.750E+00	-.475E+00	.253E+00
690.63	.957E+00	.886E+00	-.517E+00	-.793E+00	-.532E+00	.837E-01
731.25	.969E+00	.905E+00	-.642E+00	-.828E+00	-.574E+00	-.480E-01
771.88	.977E+00	.917E+00	-.720E+00	-.850E+00	-.599E+00	-.132E+00
812.50	.979E+00	.921E+00	-.746E+00	-.858E+00	-.608E+00	-.161E+00

1 *****
 ***** HORIZONTAL RESPONSE *****

 ***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

EVALUATION OF ASYMMETRIC MODES: /		
MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	9.91758	.63354
2	4.68725	1.34048
3	3.04782	2.06153

MODE	FOURIER CONSTANTS :					
	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
	.1000E+01	.5138E+00	-.2057E+00	.1000E+01	.9142E-02	-.2740E-01
	.1838E-01	-.4767E-01	-.6121E-01	.1630E+00	.8728E+00	.1000E+01
	-.1525E-02	.8998E-02	.3231E-02	-.2126E-01	-.1785E-02	.1523E-01
	.2703E-03	-.2795E-02	-.5516E-03	.6180E-02	.2411E-03	-.3073E-02
	-.5708E-04	.9246E-03	.1137E-03	-.1939E-02	-.5296E-04	.9760E-03
	.1605E-04	-.3717E-03	-.3230E-04	.7796E-03	-.6965E-05	-.3310E-03
	.1279E-05	.1422E-03	.9124E-05	-.2965E-03	.1139E-05	-.1060E-03
	-.4221E-06	.1072E-04	.4532E-06	.1380E-03	-.3722E-06	.1348E-05

MODES OF VIBRATION						
OBSERVATION POINT	1		2		3	
	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES	GIRDER	CABLES
.00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00
40.63	.162E+00	.686E-01	-.499E-01	.200E+00	.270E+00	.310E+00
81.25	.319E+00	.136E+00	-.974E-01	.392E+00	.515E+00	.589E+00
121.88	.468E+00	.201E+00	-.140E+00	.570E+00	.709E+00	.809E+00
162.50	.604E+00	.264E+00	-.176E+00	.726E+00	.834E+00	.948E+00
203.13	.724E+00	.322E+00	-.204E+00	.856E+00	.878E+00	.991E+00
243.75	.826E+00	.374E+00	-.223E+00	.955E+00	.837E+00	.935E+00
284.38	.906E+00	.420E+00	-.233E+00	.102E+01	.714E+00	.784E+00
325.00	.963E+00	.458E+00	-.233E+00	.105E+01	.523E+00	.555E+00
365.63	.995E+00	.487E+00	-.225E+00	.105E+01	.280E+00	.271E+00
406.25	.100E+01	.506E+00	-.209E+00	.102E+01	.109E-01	-.415E-01
446.88	.983E+00	.513E+00	-.187E+00	.958E+00	-.259E+00	-.350E+00
487.50	.941E+00	.509E+00	-.162E+00	.873E+00	-.503E+00	-.625E+00
528.13	.877E+00	.492E+00	-.135E+00	.769E+00	-.697E+00	-.839E+00
568.75	.791E+00	.461E+00	-.108E+00	.653E+00	-.823E+00	-.972E+00
609.38	.688E+00	.416E+00	-.821E-01	.531E+00	-.868E+00	-.101E+01
650.00	.569E+00	.357E+00	-.593E-01	.410E+00	-.827E+00	-.951E+00
690.63	.437E+00	.284E+00	-.401E-01	.294E+00	-.704E+00	-.803E+00
731.25	.297E+00	.198E+00	-.243E-01	.187E+00	-.512E+00	-.580E+00
771.88	.150E+00	.102E+00	-.114E-01	.904E-01	-.269E+00	-.304E+00
812.50	-.659E-07	-.451E-07	.485E-08	-.391E-07	.120E-06	.135E-06

1

 ***** VERTICAL RESPONSE *****

***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****

***** SYMMETRIC MODES *****

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	8.01947	.78349
2	5.34116	1.17637
3	4.14877	1.51447

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	-.6505E+00	.1000E+01	.2467E+00
	.1000E+01	.6658E+00	.1165E+00
	.4439E-01	-.3263E+00	.1000E+01
	.1207E-01	-.5557E-01	-.3191E-01
	.4703E-02	-.1943E-01	-.9276E-02
	.2186E-02	-.8647E-02	-.3878E-02
	.1133E-02	-.4387E-02	-.1913E-02
	.6343E-03	-.2427E-02	-.1042E-02

MODES OF VIBRATION :	1	2	3
OBSERVATION POINT :			
.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.2120E+00	.5480E-01	.4010E+00
81.25	.4026E+00	.1451E+00	.7547E+00
121.88	.5556E+00	.2885E+00	.1016E+01
162.50	.6614E+00	.4790E+00	.1146E+01
203.13	.7155E+00	.6955E+00	.1123E+01
243.75	.7160E+00	.9135E+00	.9505E+00
284.38	.6625E+00	.1113E+01	.6560E+00
325.00	.5568E+00	.1276E+01	.2875E+00
365.63	.4037E+00	.1387E+01	-.9616E-01
406.25	.2108E+00	.1433E+01	-.4349E+00
446.88	-.1232E-01	.1407E+01	-.6754E+00
487.50	-.2556E+00	.1314E+01	-.7791E+00

528.13	-.5081E+00	.1164E+01	-.7287E+00
568.75	-.7580E+00	.9728E+00	-.5322E+00
609.38	-.9932E+00	.7578E+00	-.2215E+00
650.00	-.1202E+01	.5399E+00	.1536E+00
690.63	-.1376E+01	.3418E+00	.5339E+00
731.25	-.1507E+01	.1849E+00	.8595E+00
771.88	-.1588E+01	.8494E-01	.1079E+01
812.50	-.1615E+01	.5076E-01	.1156E+01

1 ***** ASYMMETRIC MODES *****/

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	10.63779	.59065
2	5.42449	1.15830
3	3.45869	1.81664

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	.1000E+01	.3639E-02	.5701E-03
	-.3639E-02	.1000E+01	.2578E-03
	-.5692E-03	-.2598E-03	.1000E+01
	-.1540E-03	-.5767E-04	.0000E+00
	-.5437E-04	-.1921E-04	.0000E+00
	-.2274E-04	.0000E+00	.0000E+00
	-.1074E-04	.0000E+00	.0000E+00
	-.5562E-05	.0000E+00	.0000E+00

MODES OF VIBRATION :

OBSERVATION POINT :

	1	2	3
.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.1542E+00	.3090E+00	.4540E+00
81.25	.3054E+00	.5878E+00	.8090E+00
121.88	.4501E+00	.8090E+00	.9877E+00
162.50	.5845E+00	.9511E+00	.9511E+00
203.13	.7050E+00	.1000E+01	.7071E+00
243.75	.8084E+00	.9511E+00	.3090E+00
284.38	.8919E+00	.8090E+00	-.1564E+00
325.00	.9531E+00	.5878E+00	-.5878E+00
365.63	.9906E+00	.3090E+00	-.8910E+00
406.25	.1003E+01	-.6880E-07	-.1000E+01
446.88	.9906E+00	-.3090E+00	-.8910E+00
487.50	.9531E+00	-.5878E+00	-.5878E+00
528.13	.8919E+00	-.8090E+00	-.1564E+00
568.75	.8084E+00	-.9511E+00	.3090E+00
609.38	.7050E+00	-.1000E+01	.7071E+00
650.00	.5845E+00	-.9511E+00	.9511E+00
690.63	.4501E+00	-.8090E+00	.9877E+00
731.25	.3054E+00	-.5878E+00	.8090E+00
771.88	.1542E+00	-.3090E+00	.4540E+00
812.50	-.6771E-07	.1376E-06	-.2064E-06

ONE START FREQUENCY TRIED IN ASYM

NUMBER OF ITERATIONS NECESSARY: 4

1

 ***** TORSIONAL RESPONSE *****

 ***** OUTPUT FROM THE FREQUENCY ANALYSIS *****
 ***** SYMMETRIC MODES *****

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	3.53699	1.77642
2	1.95469	3.21441
3	1.18960	5.28176

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	.1000E+01	.9639E-01	.1691E-01
	-.9657E-01	.1000E+01	.8434E-02
	-.1611E-01	-.1007E-01	.1000E+01
	-.5515E-02	-.2841E-02	-.2421E-02
	-.2527E-02	-.1221E-02	-.8030E-03
	-.1364E-02	-.6393E-03	-.3817E-03
	-.8176E-03	-.3770E-03	-.2146E-03
	-.5278E-03	-.2409E-03	-.1333E-03

MODES OF VIBRATION :

OBSERVATION POINT :	1	2	3
.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.4301E-01	.2338E+00	.3836E+00
81.25	.9134E-01	.4571E+00	.7100E+00
121.88	.1476E+00	.6585E+00	.9300E+00
162.50	.2112E+00	.8268E+00	.1010E+01
203.13	.2797E+00	.9519E+00	.9381E+00
243.75	.3513E+00	.1026E+01	.7245E+00
284.38	.4253E+00	.1046E+01	.4021E+00
325.00	.5011E+00	.1010E+01	.2030E-01
365.63	.5774E+00	.9213E+00	-.3625E+00
406.25	.6523E+00	.7835E+00	-.6881E+00
446.88	.7243E+00	.6049E+00	-.9067E+00
487.50	.7924E+00	.3956E+00	-.9849E+00
528.13	.8558E+00	.1678E+00	-.9107E+00
568.75	.9134E+00	-.6559E-01	-.6953E+00
609.38	.9639E+00	-.2914E+00	-.3719E+00
650.00	.1006E+01	-.4970E+00	.1023E-01
690.63	.1040E+01	-.6705E+00	.3927E+00
731.25	.1064E+01	-.8019E+00	.7172E+00
771.88	.1079E+01	-.8838E+00	.9342E+00
812.50	.1085E+01	-.9116E+00	.1010E+01

1 ***** ASYMMETRIC MODES *****/

MODE NO:	PERIOD SEC	FREQUENCY RAD/SEC
1	2.99146	2.10037
2	1.48894	4.21989
3	.99288	6.32827

FOURIER CONSTANTS :

MODE	1	2	3
	.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.1000E+01	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.1000E+01
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

MODES OF VIBRATION : OBSERVATION POINT :	1	2	3
.00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40.63	.1564E+00	.3090E+00	.4540E+00
81.25	.3090E+00	.5878E+00	.8090E+00
121.88	.4540E+00	.8090E+00	.9877E+00
162.50	.5878E+00	.9511E+00	.9511E+00
203.13	.7071E+00	.1000E+01	.7071E+00
243.75	.8090E+00	.9511E+00	.3090E+00
284.38	.8910E+00	.8090E+00	-.1564E+00
325.00	.9511E+00	.5878E+00	-.5878E+00
365.63	.9877E+00	.3090E+00	-.8910E+00
406.25	.1000E+01	-.6880E-07	-.1000E+01
446.88	.9877E+00	-.3090E+00	-.8910E+00
487.50	.9511E+00	-.5878E+00	-.5878E+00
528.13	.8910E+00	-.8090E+00	-.1564E+00
568.75	.8090E+00	-.9511E+00	.3090E+00
609.38	.7071E+00	-.1000E+01	.7071E+00
650.00	.5878E+00	-.9511E+00	.9511E+00
690.63	.4540E+00	-.8090E+00	.9877E+00
731.25	.3090E+00	-.5878E+00	.8090E+00
771.88	.1564E+00	-.3090E+00	.4540E+00
812.50	-.6880E-07	.1376E-06	-.2064E-06

ONE START FREQUENCY TRIED IN ASYM
NUMBER OF ITERATIONS NECESSARY: 5

***** CPU-TIME USED = 15.6200 *****

D Buffetingrespons – hovedkode

```
%{
Beregning av buffeting-respons for vindhastigheter godt under
stabilitetsgrenser.

Basert på metoder presentert i Einar N. Strømmens
"Theory of Bridge Aerodynamics".

Laget av Simen L. Hegge & Mats Hole.
NTNU 2016
%}

clear all
close all
clc

%-----%
% ANTAGELSER
%{
Antagelser som er gjort i dette skriptet:
- Den eksponerte delen av bruspenet er like langt som hovedspennet.
- Alle fordelte masser er konstant langs hele spennet.
- Middelvindhastigheten må være godt under stabilitetsgrensene
%}

%-----%
%% INPUT

% Strukturelle egenskaper
L = 1625;           % Lengden til hovedspennet [m]
dx = 1;            % Stegstørrelse i lengde vektor [m]
z_f = 67;          % Bruens høyde over MSL [m]
xr = L/2;          % Punktet på x-aksen som beregnes [m]
x = 0:dx:L;        % Lengde vektor [m]

B = 32;            % Tverrsnittets bredde [m]
D = 4;             % Tverrsnittets høyde [m]
ec = 162.5;        % Kabelheng ved brumidtre (maks kabelheng) [m]
hm = 5.025;        % Høyden til hengestang ved brumidtre [m]
hr = 2.032;        % Avstand fra SS til toppen av tverrsnittet [m]
bc = 28;           % CC-avstand mellom bærekablene [m]

my = 16600;        % [kg/m] Masse pr. meter brubjelke bevegelse i y
mz = 16955;        % [kg/m] Masse pr. meter brubjelke bevegelse i z
mt = 1.25*10^6;    % [kg*m^2/m] Massetregghetsmoment pr. meter brubjelke
mc = 3474.5;       % [kg/m] Masse pr. meter bærekabel (en kabel)

% Dempepunkt
zeta1 = 0.005;     % Dempeforhold 1. vertikale svingeform
zeta2 = 0.02;      % Dempeforhold 6. vertikale svingeform
zeta3 = 0.008;     % Dempeforhold 1. torsjonssvingeform
```

```

% ----- %
% TMD - Massedempers egenskaper

my_z = 0.015;          % Valgt masseforhold z-demper

% Optimale verdier basert på masseforholdet
if my_z == 0.005
    omega_d_z = 0.7778;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.053;     % TMD demping
elseif my_z == 0.012
    omega_d_z = 0.7816;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.039;     % TMD demping
elseif my_z == 0.015
    omega_d_z = 0.7664;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.086;     % TMD demping
elseif my_z == 0.02
    omega_d_z = 0.7607;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.098;     % TMD demping
elseif my_z == 0.03
    omega_d_z = 0.7505;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.116;     % TMD demping
elseif my_z == 0.04
    omega_d_z = 0.7417;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.13;      % TMD demping
elseif my_z == 0.05
    omega_d_z = 0.7329;    % TMD frekvens
    zeta_d_z = 0.143;     % TMD demping
end

my_t = 0.015;          % Valgt masseforhold theta-demper

% Optimale verdier basert på masseforholdet
if my_t == 0.005
    omega_d_t = 1.6852;    % TMD frekvens
    zeta_d_t = 0.046;     % TMD demping
elseif my_t == 0.015
    omega_d_t = 1.6665;    % TMD frekvens
    zeta_d_t = 0.076;     % TMD demping
elseif my_t == 0.02
    omega_d_t = 1.6578;    % TMD frekvens
    zeta_d_t = 0.087;     % TMD demping
elseif my_t == 0.03
    omega_d_t = 1.6406;    % TMD frekvens
    zeta_d_t = 0.105;     % TMD demping
elseif my_t == 0.04
    omega_d_t = 1.6236;    % TMD frekvens
    zeta_d_t = 0.121;     % TMD demping
elseif my_t == 0.05
    omega_d_t = 1.608;     % TMD frekvens
    zeta_d_t = 0.133;     % TMD demping
end

xd_z = L/2;           % z-dempers plassering på x-aksen [m]
xd_t = L/2;           % t-dempers plassering på x-aksen [m]

```

```

% ----- %
% Lastkoeffisienter
Cd_bar = 1.025;          % Trykk - Gjennomsnittsverdi
Cl_bar = -0.367;        % Løft - Gjennomsnittsverdi
Cm_bar = -0.038;        % Moment - Gjennomsnittsverdi

Cd_prime = 0;           % Trykk - Stigningstall
Cl_prime = 2*pi;        % Løft - Stigningstall
Cm_prime = pi/2;        % Moment - Stigningstall

% ----- %
% Vindfeltets egenskaper
rho = 1.25;             % Egenvekt luft [kg/m^3]
V = 45;                 % Middelvindhastighet [m/s]

z0 = 0.01;              % Ruhetslengde [m]
Iu = 1/(log(z_f/z0));   % Turbulensintensitet u-komponent
Iw = 0.25*Iu;          % Turbulensintensitet w-komponent

c_uyf = 10;             % Faktor for det normaliserte kospektrum i Hz
c_wyf = 6.5;            % Faktor for det normaliserte kospektrum i Hz
Au = 6.8;               % Parameter for Kaimal autospektraltetthet u-komponent
Aw = 9.4;               % Parameter for Kaimal autospektraltetthet w-komponent

z_f0 = 10;              % Standard målehøyde [m]
xf_Lu_0 = 100;         % Standard integral lengdestørrelse [m]

% ----- %
% Simulering i tidsdomenet
t = 0:0.1:600;         % Tidsintervall [s]

% ----- %
% Egensvingeformer og egenfrekvenser
%{
Laster inn egensvingeformene og egenfrekvensene fra separat matlabskript.
Dette gir matrisene Phi og W. Uthenting av egensvingeformene fra Phi må
gjøres manuelt. Dette gjøres ved å definere hvilken søyleindeks (legges inn
i vektorene y_mode, z_mode og t_mode) de forskjellige svingeformene
tilhører. Husk at y-svingeformene alltid inneholder to rekker, en for
kabelen og en for brudekket. Brudekket er alltid den første av disse.
.y-mode, z_mode og t_mode må alle inneholde minst et positivt tall.
Husk at forskjellig dx-størrelse i dette skriptet og svingeform-skriptet
vil ikke fungere.
%}

load('Modeshapes_eigenvalues.mat')

y_mode = [1 4 9 11 13 18 22 24 27 30]; % Søyleindeks for y-former
z_mode = [3 6 7 8 15 16 21 26 29];    % Søyleindeks for z-former
t_mode = [17 20 32];                   % Søyleindeks for t-former

%{
Hvor ønsker du lav delta-omega? Variabelen omega_fine_i (der i = y,z,t) må
være av samme størrelse som variabelen i_mode og inneholde enten 0 eller 1.
Hvis du vil ha lav delta-omega for andre t-svingeform og ikke første skal
vektoren se slik ut [0 1 .....]. De kan inneholde bare 0.
%}

```

```

% omega_fine_y = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% omega_fine_z = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% omega_fine_t = [1 0 0];

omega_fine_y = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
omega_fine_z = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
omega_fine_t = [1 1 1];

d_omega_L = 0.08;          % Stor stegstørrelse frekvensaksen [rad/s]
d_omega_S = 0.005;        % Lav stegstørrelse frekvensaksen [rad/s]
omega_fine_range = 0.3;   % Båndbredden rundt omega med lav dW [rad/s]

[Phi_y,omega_y,Phi_z,omega_z,Phi_t,omega_t,omega,d_omega] =
Modehsapes(x,L,Phi,W,y_mode,z_mode,t_mode,omega_fine_y,omega_fine_z,omega_f
ine_t,d_omega_S,d_omega_L,omega_fine_range);

% ----- %
% Figurer
% 1 = figur, 0 = ikke figur.

Sn_figure = 1;
AD_figure = 1;
Damp_figure = 1;

Jy_figure = 1;
Jz_figure = 1;
Jt_figure = 1;

Hy_figure = 1;
Hz_figure = 1;
Ht_figure = 1;
Hyzt_figure = 1;

Hz_TMD_figure = 1;
Ht_TMD_figure = 1;

%-----%
%% BEREGNINGER

% Integrale lengdeskala

xf_Lu = xf_Lu_0*(z_f/z_f0)^0.3; % Gjennomsnittlig lengdeskala i xf-retn.
xf_Lw = (1/12)*xf_Lu;          % Gjennomsnittlig lengdeskala for w-komponent

%-----%
% Kaimal autospektraltetthet for turbulente komponenter

Su = (Au*xf_Lu)./(2*pi*V*(1+1.5*Au*omega*(xf_Lu/(V*2*pi)))^(5/3));
Sw = (Aw*xf_Lw)./(2*pi*V*(1+1.5*Aw*omega*(xf_Lw/(V*2*pi)))^(5/3));

```

```

if Sn_figure == 1
    figure
    semilogx(omega,Su)
    hold on
    semilogx(omega,Sw)
    hold off
    grid on
    title('Kaimal autospektraltetthet for turbulente komponenter')
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
    ylabel('Spektraltetthet S_n(\omega)')
    legend('n = u', 'n = w')
end

%-----%
% Normalisert JAF

Jz1_hat =
Joint_accept_z(Phi_z(1,:),x,dx,omega,D,B,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cd_bar,Cl_bar,Cl_prime,
c_uyf,c_wyf,Jz_figure);

Jz2_hat =
Joint_accept_z(Phi_z(2,:),x,dx,omega,D,B,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cd_bar,Cl_bar,Cl_prime,
c_uyf,c_wyf,Jz_figure);

Jz3_hat =
Joint_accept_z(Phi_z(3,:),x,dx,omega,D,B,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cd_bar,Cl_bar,Cl_prime,
c_uyf,c_wyf,Jz_figure);

Jt1_hat =
Joint_accept_t(Phi_t(1,:),x,dx,omega,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cm_bar,Cm_prime,c_uyf,c_
wyf,Jt_figure);

Jt2_hat =
Joint_accept_t(Phi_t(2,:),x,dx,omega,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cm_bar,Cm_prime,c_uyf,c_
wyf,Jt_figure);

Jt3_hat =
Joint_accept_t(Phi_t(3,:),x,dx,omega,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cm_bar,Cm_prime,c_uyf,c_
wyf,Jt_figure);

%-----%
% Aerodynamiske deriverte
% En svingeform med en responskomponent fører til:
% - P1 og P4 for y-retning.
% - H1 og H4 for z-retning.
% - A2 og A3 for t-retning.

for j = 1:length(omega_y)
    P1(j) = -2*Cd_bar*((D*V)/(B^2*omega_y(j)));
end
P4 = 0;

[H1,H2,H3,H4,A1,A2,A3,A4] =
AD(B,V,omega_z(2),omega_t(1),Cl_prime,Cm_prime,AD_figure);

```

```

%-----%
% Damping

[zeta_y,zeta_z,zeta_t] =
Damping(zeta1,zeta2,zeta3,omega_y,omega_z,omega_t,omega,d_omega,Damp_figure
);

%-----%
% Dimensjonsløs frekvens-respons-funksjon uten TMD

for j = 1:length(omega_y)
    Hy_abs(j,:) =
    Freq_resp_y(rho,B,my,omega,omega_y(j),zeta_y(j),P4,P1(j),Hy_figure);
end

for j = 1:length(omega_z)
    [Hz_abs(j,:) omega_z_new(j)] =
    Freq_resp_z(rho,B,mz,omega,omega_z(j),zeta_z(j),H4,H1,H_z_figure);
end

for j = 1:length(omega_t)
    [Ht_abs(j,:) omega_t_new(j)] =
    Freq_resp_t(rho,B,bc,mt,mc,omega,omega_t(j),zeta_t(j),A2,A3,Ht_figure);
end

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 10; % Label størrelse
FontSizeNum = 8; % Størrelse på navn på funksjoner
FontSizeAx = 9; % Akse størrelse
FontSizeTex = 9; % Tekststørrelse

SaveFig = 0; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'Frekvens respons'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWidth = 12; % Figurbredde [inch]
FigHeight = 10; % Figurhøyde [inch]

% Plotter den totale figuren
if Hyzt_figure == 1
    V_zeta_text = sprintf('V = %d m/s',V);

    omega_yzt_unsort = [omega_y omega_z omega_t];
    omega_yzt = sort(omega_yzt_unsort);

    Hyzt_abs = [Hy_abs; Hz_abs; Ht_abs];
    Hyzt_abs = [omega_yzt_unsort' Hyzt_abs];
    Hyzt_abs = sortrows(Hyzt_abs);

    figure
    subplot(4,1,1)
    plot(omega,Hy_abs)
    set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
    ylim([0 80])
    ylabel('|H_y(\omega)|','FontSize',FontSizeLabel)
    te = text(0.01,65,V_zeta_text);
    set(te,'FontSize',FontSizeTex)

```

```

for j = 1:length(omega_y)
    omega_y_text = sprintf('\omega_{y%d}',j);
    te = text(omega_y(j),max(Hy_abs(j,:))+5,omega_y_text);
    set(te, 'FontSize',FontSizeNum)
end

subplot(4,1,2)
plot(omega,H_z_abs)
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
ylim([0 10])
ylabel('|H_z(\omega)|', 'FontSize',FontSizeLabel)
te = text(0.01,7,V_zeta_text);
set(te, 'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(omega_z)
    omega_z_text = sprintf('\omega_{z%d}',j);
    te = text(omega_z(j),max(Hz_abs(j,:))+0.5,omega_z_text);
    set(te, 'FontSize',FontSizeNum)
end

subplot(4,1,3)
plot(omega,H_t_abs)
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
ylim([0 60])
ylabel('|H_\theta(\omega)|', 'FontSize',FontSizeLabel)
te = text(0.01,45,V_zeta_text);
set(te, 'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(omega_t)
    omega_t_text = sprintf('\omega_{\theta%d}',j);
    [y_coordinate,x_coordinate] = max(Ht_abs(j,:));
    te = text(omega(x_coordinate),y_coordinate+5,omega_t_text);
    set(te, 'FontSize',FontSizeNum)
end

subplot(4,1,4)
plot(omega,H_y_abs)
hold on
plot(omega,H_z_abs)
plot(omega,H_t_abs)
hold off
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
ylim([0 80])
xlabel('Frekvens \omega [rad/s]', 'FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H_i(\omega)|', 'FontSize',FontSizeLabel)
te = text(0.01,65,V_zeta_text);
set(te, 'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(omega_yzt)
    omega_yzt_text = sprintf('\omega_{%d}',j);
    [y_coordinate,x_coordinate] = max(Hyzt_abs(j,:));
    te = text(omega(x_coordinate),y_coordinate+5,omega_yzt_text);
    set(te, 'FontSize',FontSizeNum)
end
end

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition', [0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
end

```

```

%-----%
% Dimensjonsløs frekvens-respons-funksjon med TMD

% Disse funksjonene er for å vurdere optimale TMD-egenskaper
[H_TMD_11] =
Freq_resp_z_TMD_comp(Phi_z(2,:), Hz_abs(2,:), V, B, L, dx, xd_z, mz, zeta_z(2), omega
a, d_omega, omega_z(2), omega_z_new(2), rho, H1, H4);

[H_TMD_11] =
Freq_resp_t_TMD_comp(Phi_t(1,:), Ht_abs(1,:), V, B, bc, L, dx, xd_t, mt, mc, zeta_t(1
), omega, d_omega, omega_t(1), omega_t_new(1), rho, A2, A3);

% 1. vertikale svingeform
[Hz_TMD_11, Hz_TMD_21] =
Freq_resp_z_TMD(Phi_z(1,:), B, L, dx, xd_z, mz, my_z, zeta_z(1), zeta_d_z, omega, ome
ga_z(1), omega_d_z, rho, H1, H4, Hz_TMD_figure);

% 2. vertikale svingeform
[Hz_TMD_11, Hz_TMD_21] =
Freq_resp_z_TMD(Phi_z(2,:), B, L, dx, xd_z, mz, my_z, zeta_z(2), zeta_d_z, omega, ome
ga_z(2), omega_d_z, rho, H1, H4, Hz_TMD_figure);

% 3. vertikale svingeform
[Hz_TMD_11, Hz_TMD_21] =
Freq_resp_z_TMD(Phi_z(3,:), B, L, dx, xd_z, mz, my_z, zeta_z(3), zeta_d_z, omega, ome
ga_z(3), omega_d_z, rho, H1, H4, Hz_TMD_figure);

% 1. torsjon svingeform
[Ht_TMD_11, Ht_TMD_21] =
Freq_resp_t_TMD(Phi_t(1,:), B, bc, L, dx, xd_t, mt, mc, my_t, omega_d_t, zeta_d_t, zet
a_t(1), omega, omega_t(1), rho, A2, A3, Ht_TMD_figure);

% 2. torsjon svingeform
[Ht_TMD_11, Ht_TMD_21] =
Freq_resp_t_TMD(Phi_t(2,:), B, bc, L, dx, xd_t, mt, mc, my_t, omega_d_t, zeta_d_t, zet
a_t(2), omega, omega_t(2), rho, A2, A3, Ht_TMD_figure);

% 3. torsjon svingeform
[Ht_TMD_11, Ht_TMD_21] =
Freq_resp_t_TMD(Phi_t(3,:), B, bc, L, dx, xd_t, mt, mc, my_t, omega_d_t, zeta_d_t, zet
a_t(3), omega, omega_t(3), rho, A2, A3, Ht_TMD_figure);

%-----%
% Responsspektrum uten TMD

[sigma_z1, sigma_z1_dot, Sr_z1] =
Resp_spect_z(Phi_z(1,:), x, xr, L, omega, omega_z(1), d_omega, mz, rho, V, B, Hz_abs(1
,:), Jz1_hat);

[sigma_z2, sigma_z2_dot, Sr_z2] =
Resp_spect_z(Phi_z(2,:), x, xr, L, omega, omega_z(2), d_omega, mz, rho, V, B, Hz_abs(2
,:), Jz2_hat);

[sigma_z3, sigma_z3_dot, Sr_z3] =
Resp_spect_z(Phi_z(3,:), x, xr, L, omega, omega_z(3), d_omega, mz, rho, V, B, Hz_abs(3
,:), Jz3_hat);

```



```

[sigma_t1,sigma_t1_dot,Sr_t1] =
Resp_spect_t(Phi_t(1,:),x,xr,L,omega,omega_t(1),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_abs(1
,:),Jt1_hat);

[sigma_t2,sigma_t2_dot,Sr_t2] =
Resp_spect_t(Phi_t(2,:),x,xr,L,omega,omega_t(2),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_abs(2
,:),Jt2_hat);

[sigma_t3,sigma_t3_dot,Sr_t3] =
Resp_spect_t(Phi_t(3,:),x,xr,L,omega,omega_t(3),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_abs(3
,:),Jt3_hat);

%-----%
% Responsspektrum med TMD

[sigma_z1_TMD,sigma_z1_dot_TMD,Sr_z1_TMD] =
Resp_spect_z(Phi_z(1,:),x,xr,L,omega,omega_z(1),d_omega,mz,rho,V,B,Hz_TMD_1
1,Jz1_hat);

[sigma_z2_TMD,sigma_z2_dot_TMD,Sr_z2_TMD] =
Resp_spect_z(Phi_z(2,:),x,xr,L,omega,omega_z(2),d_omega,mz,rho,V,B,Hz_TMD_1
1,Jz2_hat);

[sigma_z3_TMD,sigma_z3_dot_TMD,Sr_z3_TMD] =
Resp_spect_z(Phi_z(3,:),x,xr,L,omega,omega_z(3),d_omega,mz,rho,V,B,Hz_TMD_1
1,Jz3_hat);

[sigma_t1_TMD,sigma_t1_dot_TMD,Sr_t1_TMD] =
Resp_spect_t(Phi_t(1,:),x,xr,L,omega,omega_t(1),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_TMD_1
1,Jt1_hat);

[sigma_t2_TMD,sigma_t2_dot_TMD,Sr_t2_TMD] =
Resp_spect_t(Phi_t(2,:),x,xr,L,omega,omega_t(2),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_TMD_1
1,Jt2_hat);

[sigma_t3_TMD,sigma_t3_dot_TMD,Sr_t3_TMD] =
Resp_spect_t(Phi_t(3,:),x,xr,L,omega,omega_t(3),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_TMD_1
1,Jt3_hat);

%-----%
% Responsspektrum relativ forskyvning

[sigma_z2_rel,sigma_z2_dot_rel,Sr_z2_rel] =
Resp_spect_z(Phi_z(2,:),x,xr,L,omega,omega_z(2),d_omega,mz,rho,V,B,Hz_TMD_2
1,Jz2_hat);

[sigma_t1_rel,sigma_t1_dot_rel,Sr_t1_rel] =
Resp_spect_t(Phi_t(1,:),x,xr,L,omega,omega_t(1),d_omega,mt,rho,V,B,Ht_TMD_2
1,Jt1_hat);

%-----%
% Maks respons

[r_z1_max_pf,r_z1_max_pf_TMD]=max_response(t,sigma_z1_dot,sigma_z1,sigma_z1
_dot_TMD,sigma_z1_TMD);

```

```

[r_z2_max_pf,r_z2_max_pf_TMD]=max_response(t,sigma_z2_dot,sigma_z2,sigma_z2_dot_TMD,sigma_z2_TMD);

[r_z3_max_pf,r_z3_max_pf_TMD]=max_response(t,sigma_z3_dot,sigma_z3,sigma_z3_dot_TMD,sigma_z3_TMD);

[r_t1_max_pf,r_t1_max_pf_TMD]=max_response(t,sigma_t1_dot,sigma_t1,sigma_t1_dot_TMD,sigma_t1_TMD);

[r_t2_max_pf,r_t2_max_pf_TMD]=max_response(t,sigma_t2_dot,sigma_t2,sigma_t2_dot_TMD,sigma_t2_TMD);

[r_t3_max_pf,r_t3_max_pf_TMD]=max_response(t,sigma_t3_dot,sigma_t3,sigma_t3_dot_TMD,sigma_t3_TMD);

%-----%
% Maks relativ respons

[r_z2_max,r_z2_max_rel]=max_response(t,sigma_z2_dot,sigma_z2,sigma_z2_dot_rel,sigma_z2_rel);

[r_t1_max,r_t1_max_rel]=max_response(t,sigma_t1_dot,sigma_t1,sigma_t1_dot_rel,sigma_t1_rel);

%-----%
% Simulering i tidsdomenet - avstivningsbærer

[r_z1,r_z1_TMD]=resp_time(t,Sr_z1,Sr_z1_TMD,omega,d_omega,r_z1_max_pf,r_z1_max_pf_TMD);

[r_z2,r_z2_TMD]=resp_time(t,Sr_z2,Sr_z2_TMD,omega,d_omega,r_z2_max_pf,r_z2_max_pf_TMD);

[r_z3,r_z3_TMD]=resp_time(t,Sr_z3,Sr_z3_TMD,omega,d_omega,r_z3_max_pf,r_z3_max_pf_TMD);

[r_t1,r_t1_TMD]=resp_time(t,Sr_t1,Sr_t1_TMD,omega,d_omega,r_t1_max_pf,r_t1_max_pf_TMD);

[r_t2,r_t2_TMD]=resp_time(t,Sr_t2,Sr_t2_TMD,omega,d_omega,r_t2_max_pf,r_t2_max_pf_TMD);

[r_t3,r_t3_TMD]=resp_time(t,Sr_t3,Sr_t3_TMD,omega,d_omega,r_t3_max_pf,r_t3_max_pf_TMD);

%-----%
% Simulering i tidsdomenet - relativ respons

[r_z2,r_z2_rel]=resp_time(t,Sr_z2,Sr_z2_rel,omega,d_omega,r_z2_max,r_z2_max_rel);

[r_t1,r_t1_TMD]=resp_time(t,Sr_t1,Sr_t1_rel,omega,d_omega,r_t1_max,r_t1_max_rel);

```

```

%-----%
% Sammenligner responspektrum med og uten TMD

Compfig = 0;          % 1 for ja og 0 for nei

if Compfig == 1

    % Figuregenskaper
    FontSizeLabel = 12; % Label størrelse
    FontSizeAx = 10;   % Akse størrelse

    SaveFig = 0;          % 1 for ja og 0 for nei
    OutputName = 'Responspektrum_z2'; % Figurnavn
    DPI = '-r400';       % Figurkvalitet
    FigWidth = 12;       % Figurbredde [inch]
    FigHeight = 10;     % Figurhøyde [inch]

    figure
    subplot(2,1,1)
    plot(omega, Sr_z2)
    set(gca, 'FontSize', FontSizeAx)
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]', 'FontSize', FontSizeLabel)
    ylabel('S_{r_z}(x_r, \omega)', 'FontSize', FontSizeLabel)
    grid on
    ylim([0 1.2])
    xlim([0 1.4])

    subplot(2,1,2)
    plot(omega, Sr_z2_TMD)
    set(gca, 'FontSize', FontSizeAx)
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]', 'FontSize', FontSizeLabel)
    ylabel('S_{r_z}(x_r, \omega)TMD', 'FontSize', FontSizeLabel)
    grid on
    ylim([0 1.2])
    xlim([0 1.4])

    % Lagrer figur
    if SaveFig == 1
        set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition',
            [0 0 FigWidth FigHeight])
        set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
        print(OutputName, '-dpng', DPI)
    end

    % Figuregenskaper
    FontSizeLabel = 12; % Label størrelse
    FontSizeAx = 10;   % Akse størrelse

    SaveFig = 0;          % 1 for ja og 0 for nei
    OutputName = 'Responspektrum_t1'; % Figurnavn
    DPI = '-r400';       % Figurkvalitet
    FigWidth = 12;       % Figurbredde [inch]
    FigHeight = 10;     % Figurhøyde [inch]

    figure
    subplot(2,1,1)
    plot(omega, Sr_t1)
    set(gca, 'FontSize', FontSizeAx)

```

```

grid on
xlabel('Frekvens \omega [rad/s]', 'FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('S_{r_\theta}(x_r,\omega)', 'FontSize',FontSizeLabel)
ylim([0 2.5*10^-3])
xlim([0 2.5])

subplot(2,1,2)
plot(omega,Sr_t1_TMD)
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
grid on
xlabel('Frekvens \omega [rad/s]', 'FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('S_{r_\theta}(x_r,\omega) TMD', 'FontSize',FontSizeLabel)
ylim([0 2.5*10^-3])
xlim([0 2.5])

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition',
        [0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
end

end

```

D1 Egenvingeformer og diskretisering av frekvens-aksen

```
function [Phi_y,omega_y,Phi_z,omega_z,Phi_t,omega_t,omega,delta_omega] =
Modehsapes(x,L,Phi,W,y_mode,z_mode,t_mode,omega_fine_y,omega_fine_z,omega_f
ine_t,d_omega_S,d_omega_L,omega_fine_range)

% En funksjon som bekrefter at alle svingeformene er tatt korrekt inn i
% skriptet samt at den produserer en omega-vektor som har fin inndeling
% rundt valgte egenfrekvenser.

%-----%
% Konstruerer svingeform-vektor og egenfrekvensvektor

Nx = length(x);
figure
for j = 1:length(y_mode)
    scale_fact=1/(max(abs(Phi(y_mode(j),:)))));
    Phi_y(j,:) = scale_fact*Phi(y_mode(j),1:Nx); % Svingeform y-retning
    omega_y(j) = W(y_mode(j)); % Tilhørende omega

    subplot(length(y_mode),1,j)
    plot(x,Phi_y(j,:))
    grid on
    y_text = sprintf('\phi_{%d}',j);
    ylabel(y_text)
    xlim([0 L])
    if j == 1
        title('\phi_{y}')
    elseif j == length(y_mode)
        xlabel('L [m]')
    end
    W_text = sprintf('\omega_{%d}=%0.3f rad/s',j,omega_y(j));
    text(1.03*L,0,W_text)
end

figure
for j = 1:length(z_mode)
    scale_fact=1/(max(abs(Phi(z_mode(j),:)))));
    Phi_z(j,:) = scale_fact*Phi(z_mode(j),Nx+1:2*Nx); % Svingeform z-retn.
    omega_z(j) = W(z_mode(j)); % Tilhørende omega

    subplot(length(z_mode),1,j)
    plot(x,Phi_z(j,:))
    grid on
    y_text=sprintf('\phi_{%d}',j);
    ylabel(y_text)
    xlim([0 L])
    if j == 1
        title('\phi_{z}')
    elseif j == length(y_mode)
        xlabel('L [m]')
    end
    W_text = sprintf('\omega_{%d}=%0.3f rad/s',j,omega_z(j));
    text(1.03*L,0,W_text)
end
```

```

figure
for j = 1:length(t_mode)
    scale_fact=1/(max(abs(Phi(t_mode(j),:)))));
    Phi_t(j,:) = scale_fact*Phi(t_mode(j),2*Nx+1:end); % Svingeform t-retn.
    omega_t(j) = W(t_mode(j)); % Tilhørende omega

    subplot(length(t_mode),1,j)
    plot(x,Phi_t(j,:))
    grid on
    y_text=sprintf('\phi_{%d}',j);
    ylabel(y_text)
    xlim([0 L])
    if j == 1
        title('\phi_{\theta}')
    elseif j == length(y_mode)
        xlabel('L [m]')
    end
    W_text = sprintf('\omega_{%d}=%0.3f rad/s',j,omega_t(j));
    text(1.03*L,0,W_text)
end

%-----%
% Konstruerer frekvensvektor

omega_end = max([omega_y omega_z omega_t])+1; % Endepunkt
d_omega = [d_omega_L d_omega_S]; % Stor og liten delta-omga

% Plukker ut ønskede egenfrekvenser
W_ch = [omega_y.*omega_fine_y omega_z.*omega_fine_z omega_t.*omega_fine_t];
W_ch(W_ch == 0) = [];
W_ch = sort(W_ch);

% Lager punkt der stor og liten delta-omga starter og stopper
if numel(W_ch) == 0
    omega_point = 1000;
elseif length(W_ch) == 1
    omega_point = [W_ch-omega_fine_range W_ch+omega_fine_range];
elseif length(W_ch) == 2
    if W_ch(2)-W_ch(1) < 2*omega_fine_range
        omega_point = [W_ch(1)-omega_fine_range W_ch(2)+omega_fine_range];
    else
        omega_point = [W_ch(1)-omega_fine_range W_ch(1)+...
            omega_fine_range W_ch(2)-...
            omega_fine_range W_ch(2)+omega_fine_range];
    end
else
    omega_point = W_ch(1)-omega_fine_range;
    for j = 2:length(W_ch)-1
        if W_ch(j)-W_ch(j-1) > 2*omega_fine_range && j == 2
            omega_point = [omega_point W_ch(j)-...
                omega_fine_range W_ch(1)+omega_fine_range];
        elseif W_ch(j)-W_ch(j-1) > 2*omega_fine_range
            omega_point = [omega_point W_ch(j)-omega_fine_range];
        end
        if W_ch(j+1)-W_ch(j) > 2*omega_fine_range && j == length(W_ch)-1
            omega_point = [omega_point W_ch(j)+...
                omega_fine_range W_ch(end)-omega_fine_range];
        end
    end
end

```

```

        elseif W_ch(j+1)-W_ch(j) > 2*omega_fine_range
            omega_point = [omega_point W_ch(j)+omega_fine_range];
        end
    end
    omega_point = [omega_point W_ch(end)+omega_fine_range];
end
omega_point = sort([omega_point 0 omega_end]);

% Lager omega-vektor basert på tidligere produserte punkt
if omega_point == 1000
    omega = 0:d_omega(1):omega_end;
elseif omega_point(1) < 0
    omega_point(omega_point == 0) = [];
    p = 1;
    omega = omega_point(1):d_omega(2):omega_point(2);
    omega(end) = [];
    for j = 2:length(omega_point)-1
        omega = [omega omega_point(j):d_omega(p):omega_point(j+1)];
        if p == 2
            omega(end) = [];
        end
        p = p+(-1)^j;
    end
    omega = [0 omega];
else
    p = 2;
    omega = omega_point(1):d_omega(1):omega_point(2);
    for j = 2:length(omega_point)-1
        omega = [omega omega_point(j):d_omega(p):omega_point(j+1)];
        if p == 2
            omega(end) = [];
        end
        p = p+(-1)^(j+1);
    end
end
omega(omega < 0) = [];
omega(omega > omega_end) = [];

% Konstruerer en delta-omega vektor for å kontrollere resultatet
for j = 1:length(omega)-1
    delta_omega(j) = omega(j+1)-omega(j);
end
delta_omega = [delta_omega delta_omega(end)];
jkl_points = ones(1,length(W_ch))*d_omega(2);

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 19; % Label størrelse
FontSizeLeg = 17; % Legend størrelse
FontSizeAx = 14; % Akse størrelse
LineSizeX = 3; % X-merke størrelse
LineSize = 2; % Linje tykkelse

SaveFig = 0; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'Delta omega'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWidth = 7; % Figur bredde [inch]
FigHeight = 3; % Figur høyde [inch]

```

```

% Plotting av figur
figure
plot(omega,delta_omega,'LineWidth',LineSize)
hold on
plot(W_ch,jkl_points,'x','LineWidth',LineSizeX)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlim([0 omega_end])
xlabel('Frekvensaksen - \omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('\Delta\omega','FontSize',FontSizeLabel)
if numel(W_ch) == 0
    leg = legend('\Delta\omega','Location','northwest');
    set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
    ylim([max(delta_omega)*(-1) max(delta_omega)*3])
else
    leg = legend('\Delta\omega','Egenfrekvenser','Location','northwest');
    set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
    ylim([max(delta_omega)*(-0.1) max(delta_omega)*1.4])
end
legend('boxoff')

% Lagrer figuren
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf,'Position');
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
    set(gcf,'Position', origSize)
end

delta_omega(end) = [];

end

```


D2 JAF z-retning

```
function [Jz_hat] =
Joint_accept_z(Phi_z,x,dx,omega,D,B,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cd_bar,Cl_bar,Cl_prime,c_
uyf,c_wyf,Jz_figure)

% En funksjon som beregner den normaliserte Joint Acceptance Function (JAF)
% for z-komponenten ved en svingform, en responskomponent-metoden.

%-----%

N = length(x);
N_omega = length(omega);

% ----- %
% Numerisk integrasjon for nevneren til hovedbrøken til JAF-funksjonen
denominator = Phi_z(1)^2*0.5;
for n = 2:N-1
    denominator = denominator+(Phi_z(n))^2;
end
denominator = (denominator+Phi_z(N)^2*0.5)*dx;

% ----- %
% Numerisk dobbelintegrasjon for telleren i hovedbrøken til JAF-funksjonen
for p = 1:N_omega
    jkl = 0.5*Phi_z(1)*((2*Cl_bar*Iu)^2*1*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)...
        *Cd_bar)^2*Iw^2*1*Sw(p));
    for m = 2:N-1
        delta_x = abs(x(1)-x(m));
        jkl = jkl+Phi_z(m)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
            delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
            Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
    end
    delta_x = abs(x(1)-x(N));
    jkl = jkl+0.5*Phi_z(N)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
        delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
        Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
    J_z(p,1) = 0.5*Phi_z(1)*jkl;

    for n = 2:N-1
        delta_x = abs(x(n)-x(1));
        jkl = 0.5*Phi_z(1)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
            delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
            Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
        for m = 2:N-1
            delta_x = abs(x(n)-x(m));
            jkl = jkl+Phi_z(m)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
                delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
                Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
        end
        delta_x = abs(x(n)-x(N));
        jkl = jkl+0.5*Phi_z(N)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
            delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
            Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
        J_z(p,1) = J_z(p,1)+Phi_z(n)*jkl;
    end
end
```

```

delta_x = abs(x(N)-x(1));
jkl = 0.5*Phi_z(1)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
    delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
    Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
for m = 2:N-1
    delta_x = abs(x(N)-x(m));
    jkl = jkl+Phi_z(m)*((2*Cl_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
        delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*...
        Iw^2*exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
end
jkl = jkl+0.5*Phi_z(N)*((2*Cl_bar*Iu)^2*1*Su(p)+...
    (Cl_prime+(D/B)*Cd_bar)^2*Iw^2*1*Sw(p));
J_z(p,1) = J_z(p,1)+0.5*Phi_z(N)*jkl;

Jz_hat(p,1) = (J_z(p,1)*dx*dx)/(denominator^2);
end

fprintf('JAF for z-retning ferdig beregnet \n')

if Jz_figure == 1
    figure
    loglog(omega,Jz_hat)
    grid on
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
    ylabel('J_z(\omega)')
    title('Normalisert JAF for z-retning')
end

end

```

D3 JAF θ -retning

```
function [Jt_hat] =
Joint_accept_t(Phi_t,x,dx,omega,V,Iu,Iw,Su,Sw,Cm_bar,Cm_prime,c_uyf,c_wyf,J
t_figure)

% En funksjon som beregner den normaliserte Joint Acceptance Function (JAF)
% for theta-komponenten ved en svingeform, en responskomponent-metoden.

%-----%

N = length(x);
N_omega = length(omega);

% ----- %
% Numerisk integrasjon for nevneren til hovedbrøken til JAF-funksjonen
denominator = Phi_t(1)^2*0.5;
for n = 2:N-1
    denominator = denominator+(Phi_t(n))^2;
end
denominator = (denominator+Phi_t(N)^2*0.5)*dx;

% ----- %
% Numerisk dobbelintegrasjon for telleren i hovedbrøken til JAF-funksjonen
for p = 1:N_omega
    jkl = 0.5*Phi_t(1)*((2*Cm_bar*Iu)^2*1*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*1*Sw(p));
    for m = 2:N-1
        delta_x = abs(x(1)-x(m));
        jkl = jkl+Phi_t(m)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
            delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
            exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
    end
    delta_x = abs(x(1)-x(N));
    jkl = jkl+0.5*Phi_t(N)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
        delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
        exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
    J_t(p,1) = 0.5*Phi_t(1)*jkl;

    for n = 2:N-1
        delta_x = abs(x(n)-x(1));
        jkl = 0.5*Phi_t(1)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
            delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
            exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
        for m = 2:N-1
            delta_x = abs(x(n)-x(m));
            jkl = jkl+Phi_t(m)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
                delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
                exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
        end
        delta_x = abs(x(n)-x(N));
        jkl = jkl+0.5*Phi_t(N)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
            delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
            exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
        J_t(p,1) = J_t(p,1)+Phi_t(n)*jkl;
    end
end
```

```

delta_x = abs(x(N)-x(1));
jkl = 0.5*Phi_t(1)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
    delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
    exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
for m = 2:N-1
    delta_x = abs(x(N)-x(m));
    jkl = jkl+Phi_t(m)*((2*Cm_bar*Iu)^2*exp(-(c_uyf*omega(p)*...
        delta_x)/(2*pi*V))*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*...
        exp(-(c_wyf*omega(p)*delta_x)/(2*pi*V))*Sw(p));
end
    jkl =
    jkl+0.5*Phi_t(N)*((2*Cm_bar*Iu)^2*1*Su(p)+(Cm_prime*Iw)^2*1*Sw(p));
J_t(p,1) = J_t(p,1)+0.5*Phi_t(N)*jkl;

Jt_hat(p,1) = (J_t(p,1)*dx*dx)/(denominator^2);
end

fprintf('JAF for theta-retning ferdig beregnet \n')

if Jt_figure == 1
    figure
    loglog(omega,Jt_hat)
    grid on
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
    ylabel('J_\theta(\omega)')
    title('Normalisert JAF for \theta-retning')
end

end

```

D4 Aerodynamiske deriverte

```
function [H1V,H2V,H3V,H4V,A1V,A2V,A3V,A4V] =
AD(B,V,omega_z,omega_t,Cl_prime,Cm_prime,AD_figure)

% Funksjon som lager AD-figur og beregner AD-er basert på input fra
% hovedskriptet

%-----%
% INPUT
U = 15:1:110;           % [m/s] Middelvindhastighetsvektor

fz = omega_z/(2*pi);   % [Hz] Vertikal egenfrekvens
ft = omega_t/(2*pi);   % [Hz] Torsjons-egenfrekvens
Urz = U./(B*fz);       % Redusert vindhastighet vertikalretning
Urt = U./(B*ft);       % Redusert vindhastighet torsjon
Vrz = V/(B*fz);
Vrt = V/(B*ft);

% Input fra SVV
a_lz = [2.257*10^1 -6.113*10^-1 -2.128*10^1];
b_lz = [4.337*10^-2 3.508*10^0 4.743*10^-2];
a_lalfa = [5.418*10^-1 1.210*10^-1 -1*10^3];
b_lalfa = [3.120*10^-2 3.569*10^-2 3.220*10^3];
a_Mz = [3.227*10 1.558*10^0 -3.088*10^1];
b_Mz = [1.091*10^-2 2.663*10^1 1.195*10^-2];
a_Malfa = [1.068 3.662*10^-1 -7.775*10^-1];
b_Malfa = [3.424*10^-2 2.061*10^-1 9.641*10^-2];

%-----%
% BEREGNINGER
sum_H1 = 0;
sum_H1V = 0;
for i = 1:length(a_lz);
    sum_H1 = sum_H1+a_lz(i)*(pi^2./((b_lz(i))^2*Urz.^2+pi^2));
    sum_H1V = sum_H1V+a_lz(i)*(pi^2./((b_lz(i))^2*Vrz^2+pi^2));
end
H1 = Urz./(2*pi)*Cl_prime.*(1-sum_H1);
H1V = Vrz/(2*pi)*Cl_prime.*(1-sum_H1V);

sum_H4 = 0;
sum_H4V = 0;
for i = 1:length(a_lz);
    sum_H4 = sum_H4+a_lz(i)*(b_lz(i)./((b_lz(i))^2*Urz.^2+pi^2));
    sum_H4V = sum_H4V+a_lz(i)*(b_lz(i)./((b_lz(i))^2*Vrz^2+pi^2));
end
H4 = Urz.^2/2*Cl_prime.*(sum_H4);
H4V = Vrz^2/2*Cl_prime*sum_H4V;

sum_H2 = 0;
sum_H2V = 0;
for i = 1:length(a_lalfa);
    sum_H2 = sum_H2+(-a_lalfa(i))*(b_lalfa(i)./...
        ((b_lalfa(i))^2*Urt.^2+pi^2));
    sum_H2V = sum_H2V+(-a_lalfa(i))*(b_lalfa(i)./...
        ((b_lalfa(i))^2*Vrt^2+pi^2));
end
```

```

H2 = Urt.^3/(4*pi)*Cl_prime.*(sum_H2);
H2V = Vrt^3/(4*pi)*Cl_prime*sum_H2V;

sum_H3 = 0;
sum_H3V = 0;
for i = 1:length(a_lalfa);
    sum_H3 = sum_H3+(a_lalfa(i))*(pi^2./...
        ((b_lalfa(i))^2*Urt.^2+pi^2));
    sum_H3V = sum_H3V+(a_lalfa(i))*(pi^2./...
        ((b_lalfa(i))^2*Vrt^2+pi^2));
end
H3 = Urt.^2/(4*pi^2)*Cl_prime.*(1-sum_H2);
H3V = Vrt^2/(4*pi^2)*Cl_prime*(1-sum_H2V);

sum_A1 = 0;
sum_A1V = 0;
for i = 1:length(a_Mz);
    sum_A1 = sum_A1 + (a_Mz(i))*(pi^2./...
        ((b_Mz(i))^2*Urz.^2+pi^2));
    sum_A1V = sum_A1V + (a_Mz(i))*(pi^2./...
        ((b_Mz(i))^2*Vrz^2+pi^2));
end
A1 = Urz./(2*pi)*Cm_prime.*(1-sum_A1);
A1V = Vrz/(2*pi)*Cm_prime*(1-sum_A1V);

sum_A4 = 0;
sum_A4V = 0;
for i = 1:length(a_Mz);
    sum_A4 = sum_A4+a_Mz(i)*(b_Mz(i)./((b_Mz(i))^2*Urz.^2+pi^2));
    sum_A4V = sum_A4V+a_Mz(i)*(b_Mz(i)./((b_Mz(i))^2*Vrz^2+pi^2));
end
A4 = Urz.^2/2*Cm_prime.*(sum_A4);
A4V = Vrz^2/2*Cm_prime*sum_A4V;

sum_A2 = 0;
sum_A2V = 0;
for i = 1:length(a_lalfa);
    sum_A2=sum_A2+(-a_Malfa(i))*(b_Malfa(i)./...
        ((b_Malfa(i))^2*Urt.^2+pi^2));
    sum_A2V = sum_A2V+(-a_Malfa(i))*(b_Malfa(i)./...
        ((b_Malfa(i))^2*Vrt^2+pi^2));
end
A2 = Urt.^3/(4*pi)*Cm_prime.*(sum_A2);
A2V = Vrt^3/(4*pi)*Cm_prime*sum_A2V;

sum_A3 = 0;
sum_A3V = 0;
for i = 1:length(a_lalfa);
    sum_A3 = sum_A3+(a_Malfa(i))*(pi^2./...
        ((b_Malfa(i))^2*Urt.^2+pi^2));
    sum_A3V = sum_A3V+(a_Malfa(i))*(pi^2./...
        ((b_Malfa(i))^2*Vrt^2+pi^2));
end
A3 = Urt.^2/(4*pi^2)*Cm_prime.*(1-sum_A3);
A3V = Vrt^2/(4*pi^2)*Cm_prime*(1-sum_A3V);

```

```

%-----%
% PLOTTING

if AD_figure == 1

    % Figuregenskaper
    FontSizeLabel = 12; % Label størrelse
    FontSizeAx = 9; % Akse størrelse

    SaveFig = 0; % 1 for ja, 0 for nei
    OutputName = 'AD_figure'; % Figurnavn
    DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
    FigWith = 20; % Figur bredde [inch]
    FigHeight = 10; % Figur høyde [inch]

    % Plotter figur
    figure
    subplot(4,2,1)
    plot(Urz,A1)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('A1*', 'FontSize',FontSizeLabel)

    subplot(4,2,2)
    plot(Urt,A2)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('A2*', 'FontSize',FontSizeLabel)

    subplot(4,2,3)
    plot(Urz,A4)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('A4*', 'FontSize',FontSizeLabel)

    subplot(4,2,4)
    plot(Urt,A3)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('A3*', 'FontSize',FontSizeLabel)

    subplot(4,2,5)
    plot(Urz,H1)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('H1*', 'FontSize',FontSizeLabel)

    subplot(4,2,6)
    plot(Urt,H2)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('H2*', 'FontSize',FontSizeLabel)

    subplot(4,2,7)
    plot(Urz,H4)
    set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
    grid on
    ylabel('H4*', 'FontSize',FontSizeLabel)
    xlabel('V/(B\cdot f_z)', 'FontSize',FontSizeLabel)

```

```

subplot(4,2,8)
plot(Urt,H3)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
grid on
ylabel('H3*', 'FontSize',FontSizeLabel)
xlabel('V/(B\cdot f_\theta)', 'FontSize',FontSizeLabel)

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition',
        [0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
end
end

end

```


D5 Damping

```
function [zeta_y,zeta_z,zeta_t] =
Damping(zeta1,zeta2,zeta3,omega_y,omega_z,omega_t,omega,d_omega,Damp_figure
)

% Funksjon som bregner dempeverdiene til videre beregninger samt produserer
% en figur over dempeforholdene

%-----%
% BEREGNINGER

% Definerer punkt
omega1 = omega_z(1);
omega2 = omega_z(6);

% Rayleigh damping
alfa = (2*omega1*omega2*(omega2*zeta1-omega1*zeta2))/(omega2^2-omega1^2);
beta = (2*(omega2*zeta2-omega1*zeta1))/(omega2^2-omega1^2);
zetaRayleigh = (alfa*omega.^(-1)+beta*omega)/2;

% Lineær tilnærming
zetaVertical = ((zeta2-zeta1)/(omega2-omega1))*(omega-omega1)+zeta1;

% Kopierer og flytter den lineære tilnærmingen til theta-punktet
sum_d_omega = 0;
n = 1;
while sum_d_omega < omega_t(1)
    sum_d_omega = sum_d_omega+d_omega(n);
    n = n+1;
end
diff_zeta = zeta3-zetaVertical(n);
zetaTorsion = zetaVertical+diff_zeta;

%-----%
% PLOTTING

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 12; % Label størrelse
FontSizeLeg = 12; % Legend størrelse
FontSizeAx = 9; % Akse størrelse
LineSizeX = 2; % X-merke størrelse

SaveFig = 0; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'Damping figure'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWith = 6; % Figur bredde [inch]
FigHeight = 3; % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokser
legText{1} = 'Lineær kurve z-retning';
legText{2} = 'Rayleigh damping z-retning';
legText{3} = 'Lineær krue \theta-retning';
legText{4} = sprintf('\omega_{z1} og \zeta = %0.3f',zeta1);
legText{5} = sprintf('\omega_{z6} og \zeta = %0.3f',zeta2);
legText{6} = sprintf('\omega_{\theta1} og \zeta = %0.3f',zeta3);
```

```

% Plotter figur
if Damp_figure == 1
    figure
    plot(omega, zetaVertical, omega, zetaRayleigh, '--', omega, zetaTorsion, '-.')
    hold on
    plot(omega1, zeta1, 'x', omega2, zeta2, 'o', 'LineWidth', LineSizeX)
    plot(omega_t(1), zeta3, 'd', 'LineWidth', LineSizeX)
    leg = legend(legText, 'Location', 'northwest');
    set(leg, 'FontSize', FontSizeLeg)
    legend('boxoff')
    plot([0 omega(end)], [0 0], ':')
    hold off
    set(gca, 'FontSize', FontSizeAx)
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]', 'FontSize', FontSizeLabel)
    ylabel('Dempeforhold \zeta', 'FontSize', FontSizeLabel)
    ylim([-0.02 0.05])
    xlim([0 3.5])
end

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf, 'Position');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition', [0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto')
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
    set(gcf, 'Position', origSize)
end

% Lager dempevektor
zeta_y = ones(1, length(omega_y)) * 0.005;

for j = 1:length(omega_z)
    sum_d_omega = 0;
    n = 1;
    while sum_d_omega < omega_z(j)
        sum_d_omega = sum_d_omega + d_omega(n);
        n = n + 1;
    end
    zeta_z(j) = zetaVertical(n);
end

for j = 1:length(omega_t)
    sum_d_omega = 0;
    n = 1;
    while sum_d_omega < omega_t(j)
        sum_d_omega = sum_d_omega + d_omega(n);
        n = n + 1;
    end
    zeta_t(j) = zetaTorsion(n);
end

end

```

D6 Frekvens-respons-funksjoner

```
function [Hy_abs] =
Freq_resp_y(rho,B,my,omega,omega_y,zeta_y,P4,P1,Hy_figure)

% Funksjon som beregner den dimensjonsløse frekvens-respons-funksjonen y
%-----%

kappa_y = ((rho*B^2)/my)*(1/2)*P4;
zeta_ay = ((rho*B^2)/my)*(1/4)*P1;

Hy_hat = (1-kappa_y-(omega./omega_y).^2+2*1i*(zeta_y-...
        zeta_ay).*(omega./omega_y)).^(-1);
Hy_abs = abs(Hy_hat);

if Hy_figure == 1
    figure
    loglog(omega,Hy_abs)
    grid on
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
    ylabel('|H_y(\omega)|')
    title('Dimensjonsløs frekvens-respons-funksjon y-retning')
    box on
end
end
```

```
function [Hz_abs,omega_z_new] =
Freq_resp_z(rho,B,mz,omega,omega_z,zeta_z,H4,H1,Hz_figure)

% Funksjon som beregner den dimensjonsløse frekvens-respons-funksjonen z
%-----%

kappa_z = ((rho*B^2)/mz)*(1/2)*H4;
zeta_aez = ((rho*B^2)/mz)*(1/4)*H1;

Hz_hat = (1-kappa_z-(omega./omega_z).^2+2*1i*(zeta_z-...
        zeta_aez).*(omega./omega_z)).^(-1);
Hz_abs = abs(Hz_hat);

[~,index_z] = max(Hz_abs);
omega_z_new = omega(index_z);

if Hz_figure == 1
    figure
    loglog(omega,Hz_abs)
    grid on
    xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
    ylabel('|H_z(\omega)|')
    title('Dimensjonsløs frekvens-respons-funksjon z-retning')
    box on
end
end
```

```

function [Ht_abs,omega_t_new] =
Freq_resp_t(rho,B,bc,mt,mc,omega,omega_t,zeta_t,A2,A3,Ht_figure)

% Funksjon som beregner den dimensjonsløse frekvens-respons-funksjonen t
%-----%

mt_tot = mt+mc*(bc/2)^2;

kappa_t = ((rho*B^4)/mt_tot)*(1/2)*A3;
zeta_aet = ((rho*B^4)/mt_tot)*(1/4)*A2;

Ht_hat = (1-kappa_t-(omega./omega_t).^2+2*1i*(zeta_t-...
zeta_aet).*(omega./omega_t)).^(-1);
Ht_abs = abs(Ht_hat);

[~,index_t] = max(Ht_abs);
omega_t_new = omega(index_t);

if Ht_figure == 1
figure
loglog(omega,Ht_abs)
grid on
xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
ylabel('|H_\theta(\omega)|')
title('Dimensjonsløs frekvens-respons-funksjon \theta-retning')
box on
end
end

```

D7 Frekvens responsfunksjon med TMD z-retning

```
function [H_TMD_11,H_TMD_21] =
Freq_resp_z_TMD(Phi_z,B,L,dx,xd_z,mz,my_z,zeta_z,zeta_d,omega,omega_z,omega
_d,rho,H1,H4,H_z_TMD_figure)

% Funksjon som beregner den dimensjonsløse frekvens-respons-funksjonen for
% z-retning med en TMD

%-----%
% BEREGNINGER

x = 0:dx:L; % [m] Lengdevektor
Phi_z_xd = Phi_z(round((length(x)-1)*xd_z/L)); % Svingeformverdi ved TMD

% Aerodynamisk stivhet og demping
kappa_ae = ((rho*B^2)/mz)*(H4/2);
zeta_ae = ((rho*B^2)/mz)*(H1/4);

% Frekvens-respons-funksjonen
omega_red = omega./omega_z;
alfa = omega_z/omega_d;

a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_z*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+4*alfa*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d;
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-zeta_ae)+(1+my_z*Phi_z_xd^2)*zeta_d);
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_z_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+a3*...
(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_TMD_11 = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_TMD_21 = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

%-----%
% PLOTTING

if Hz_TMD_figure == 1
figure
subplot(2,1,1)
plot(omega,H_TMD_11)
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('|H(\omega)|_{z_2}_{z_2}')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(omega,H_TMD_21)
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('|H(\omega)|_{2_1}')
grid on
end
end
```

D8 Frekvens responsfunksjon med TMD θ -retning

```
function [H_TMD_11,H_TMD_21] =
Freq_resp_t_TMD(Phi_t,B,bc,L,dx,xd_t,mt,mc,my_t,omega_d,zeta_d,zeta_t,omega
,omega_t,rho,A2,A3,Ht_TMD_figure)

% Funksjon som beregner den dimensjonsløse frekvens-respons-funksjonen for
% theta-retning med en TMD

%-----%
% BEREGNINGER

x = 0:dx:L; % [m] Lengdevektor
Phi_t_xd = Phi_t(round((length(x)-1)*xd_t/L)); % Svingeformverdi ved TMD
m_t_tot = mt+mc*(bc/2)^2; % Massetregghetsmoment

% Aerodynamisk stivhet og demping
kappa_ae = ((rho*B^4)/m_t_tot)*0.5*A3;
zeta_ae = ((rho*B^4)/m_t_tot)*0.25*A2;

% Frekvens-respons-funksjonen
alfa = omega_t/omega_d;
omega_red = omega./omega_t;

a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_t*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d;
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-zeta_ae)+(1+my_t*Phi_t_xd^2)*zeta_d);
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_t_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_TMD_11 = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_TMD_21 = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

%-----%
% PLOTTING

if Ht_TMD_figure == 1
figure
subplot(2,1,1)
plot(omega,H_TMD_11)
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('|H(\omega)|_{\theta_{11}}')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(omega,H_TMD_21)
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('|H(\omega)|_{\theta_{21}}')
grid on
end
end
```

D9 Optimering TMD egenskaper z-retning

```
function [H_11] =
Freq_resp_z_TMD_comp(Phi_z,H_z_abs,V,B,L,dx,xd_z,mz,zeta_z,omega,d_omega,ome
ga_z,omega_z_new,rho,H1,H4)

% En funksjon som vurderer optimale parametere for TMD, z-retning

%-----%
% INPUT

my_chosen = 0.015;           % Det valgte masseforholdet (gresk bokstav my)
omega_d_chosen = 0.7662;    % [rad/s] Den valgte TMD-frekvensen
zeta_d_chosen = 0.085;      % Den valgte TMD-dempningsfaktoren

%-----%
% GENERELLE BEREGNINGER

x = 0:dx:L;                 % [m] Lengdevektor
Phi_z_xd = Phi_z(round((length(x)-1)*xd_z/L)); % Svingeformverdi ved TMD

% Aerodynamisk stivhet og demping
kappa_ae = ((rho*B^2)/mz)*(H4/2);
zeta_ae = ((rho*B^2)/mz)*(H1/4);

% Modale massen
N = length(x);
Phi_z_squared = 0.5*Phi_z(1)^2;
for n = 2:N-1
    Phi_z_squared = Phi_z_squared+Phi_z(n)^2;
end
Phi_z_squared = (Phi_z_squared+0.5*Phi_z(N)^2)*dx;

mz_modal = mz*Phi_z_squared;

%-----%
% TMD - MASSEFORHOLD

% Masseforhold-vector
my_z = 0.005:(9/800):0.05;
omega_red = omega./omega_z;

% H-funksjonen for 5 forskjellige my
for j = 1:length(my_z)

    % Den Hartog
    omega_d_DH(j) = omega_z_new/(1+my_z(j));           % TMD frekvens
    zeta_d_DH(j) = sqrt((3*my_z(j))/(8*(1+my_z(j))^3)); % TMD dempingsforhold

    alfa = omega_z/omega_d_DH(j);

    a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d_DH(j)*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_z(j)*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+4*alfa*...
        (zeta_z-zeta_ae)*zeta_d_DH(j);
end
end
```

```

a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-...
    zeta_ae)+(1+my_z(j)*Phi_z_xd^2)*zeta_d_DH(j));
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d_DH(j)*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_z_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
    a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_11_DH(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*...
    (1i*omega_red).^2)./denominator);
H_21_DH(j,:) = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

% R. Luft
omega_d_RL(j) = omega_z_new/sqrt(1+(3*my_z(j)/2)); % TMD frekvens
zeta_d_RL(j) = sqrt((my_z(j)/4)*(1-(3*my_z(j))/4)); % TMD dempeforhold

alfa = omega_z/omega_d_RL(j);

a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d_RL(j)*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_z(j)*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+4*alfa*...
    (zeta_z-zeta_ae)*zeta_d_RL(j);
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-...
    zeta_ae)+(1+my_z(j)*Phi_z_xd^2)*zeta_d_RL(j));
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d_RL(j)*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_z_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
    a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_11_RL(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
    b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_21_RL(j,:) = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

% Vekten til en demper
M_damp(j) = mz_modal*my_z(j);
end

% H-funksjon for kontinuerlig fallende my-verdier
my_decay = 0.005:0.0005:0.05;
for j = 1:length(my_decay)

% Den Hartog
omega_d_decay = omega_z_new/(1+my_decay(j)); % TMD frekvens
zeta_d_decay = sqrt((3*my_decay(j))/(8*(1+my_decay(j))^3)); % Damping

alfa = omega_z./omega_d_decay;

a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d_decay*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_decay(j)*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
    4*alfa*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d_decay;
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-zeta_ae)+...
    (1+my_decay(j)*Phi_z_xd^2)*zeta_d_decay);
a4 = alfa^2;

```



```

b1 = 2*zeta_d_decay*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_z_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
    a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_11_decay = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
    b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_21_decay = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

Top_11_DH(j) = max(H_11_decay);
Top_21_DH(j) = max(H_21_decay);

% R. Luft
omega_d_decay = omega_z_new/sqrt(1+(3*my_decay(j)/2)); % TMD frekvens
zeta_d_decay = sqrt((my_decay(j)/4)*(1-(3*my_decay(j))/4)); % Damping

alfa = omega_z./omega_d_decay;

a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d_decay*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_decay(j)*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
    4*alfa*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d_decay;
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-zeta_ae)+...
    (1+my_decay(j)*Phi_z_xd^2)*zeta_d_decay);
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d_decay*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_z_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
    a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_11_decay = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
    b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_21_decay = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

Top_11_RL(j) = max(H_11_decay);
Top_21_RL(j) = max(H_21_decay);
end

L_vector = omega;
L_vector(L_vector > omega_z_new) = [];

%-----%
% PLOTTING - MASSEFORHOLD

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 10; % Label størrelse
FontSizeTitle = 10; % Tittelstørrelse
FontSizeLeg = 9; % Legend størrelse
FontSizeNum = 8; % Størrelse på nummerering av funksjonene
FontSizeAx = 8; % Akse størrelse
FontSizeTex = 9; % Tekststørrelse

```

```

SaveFig = 0; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'H-function-z my'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWith = 6; % Figurbredde [inch]
FigHeight = 3; % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokser
my_text1 = sprintf('\mu_{z1} = %0.3f',my_z(1));
my_text2 = sprintf('\mu_{z2} = %0.3f',my_z(2));
my_text3 = sprintf('\mu_{z3} = %0.3f',my_z(3));
my_text4 = sprintf('\mu_{z4} = %0.3f',my_z(4));
my_text5 = sprintf('\mu_{z5} = %0.3f',my_z(5));

weighth_text = sprintf('\mu_{z1} \rightarrow M_{dz} = %0.3g kg \n\mu_{z2} \rightarrow M_{dz} = %0.3g kg \n\mu_{z3} \rightarrow M_{dz} = %0.3g kg \n\mu_{z4} \rightarrow M_{dz} = %0.3g kg \n\mu_{z5} \rightarrow M_{dz} = %0.3g kg',M_damp(1),M_damp(2),M_damp(3),M_damp(4),M_damp(5));
input_text = sprintf('V = %0.0f m/s \n\zeta_z = %0.3f',V,zeta_z);

% Plotter figur
figure
subplot(2,5,[1,2])
plot(omega,Hz_abs,'--')
hold on
plot(omega,H_11_DH)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{z_2}_{z_2}','FontSize',FontSizeLabel)
title('Den Hartog','FontSize',FontSizeTitle)
leg = legend('Uten TMD',my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(0.41,3.6,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_z)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_11_DH(j,length(L_vector):end));
    te = text(omega(x_cord+length(L_vector)),y_cord,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([0.4 1.1])
ylim([2.4 5.4])

subplot(2,5,[3,4])
plot(omega,Hz_abs,'--')
hold on
plot(omega,H_11_RL)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
title('R. Luft','FontSize',FontSizeTitle)
leg = legend('Uten TMD',my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(0.41,3.6,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)

```

```

for j = 1:length(my_z)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_11_RL(j,length(L_vector):end));
    te = text(omega(x_cord+length(L_vector)),y_cord,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([0.4 1.1])
ylim([2.4 5.4])

subplot(2,5,5)
plot(my_decay,Top_11_DH)
hold on
plot(my_decay,Top_11_RL,'--')
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
leg = legend('Den Hartog','R. Luft','Location','north');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
title('Toppunkt','FontSize',FontSizeTitle)
xlabel('\mu_z','FontSize',FontSizeLabel)
ylim([2.4 5.4])

subplot(2,5,[6,7])
plot(omega,H_21_DH)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{d_z}_{z_2}','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend(my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
    'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(0.9,50,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
te = text(0.02,15,weigth_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_z)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_21_DH(j,:));
    te = text(omega(x_cord),y_cord+0.05,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([0 1.2])
ylim([0 60])

subplot(2,5,[8,9])
plot(omega,H_21_RL)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend(my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
    'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(0.02,25,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_z)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_21_RL(j,:));
    te = text(omega(x_cord),y_cord+0.05,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([0 1.2])

```

```

ylim([0 60])

subplot(2,5,10)
plot(my_decay,Top_21_DH)
hold on
plot(my_decay,Top_21_RL,'--')
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
leg = legend('Den Hartog','R. Luft','Location','north');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
xlabel('\mu_z','FontSize',FontSizeLabel)
ylim([0 60])

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf,'Position');
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
    set(gcf,'Position', origSize)
end

%-----%
% TMD - FREKVENSEN

my_z = my_chosen; % Valgt masseforhold
zeta_d = sqrt(3*my_z/(8*(1+my_z)^3)); % Den Hartog demping

% TMD frekvenser
omega_DH = omega_z_new/(1+my_z); % Den Hartog
omega_RL = omega_z_new/sqrt(1+(3*my_z/2)); % R. Luft

omega_d = sort([omega_z_new omega_DH omega_RL omega_d_chosen
omega_DH*0.98]);

W_c_index = find(omega_d == omega_d_chosen);
W_new_index = find(omega_d == omega_z_new);
W_DH_index = find(omega_d == omega_DH);
W_RL_index = find(omega_d == omega_RL);

% H-funksjon for forskjellige omega
alfa = omega_z./omega_d;

for j = 1:length(alfa)
    a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa(j)*zeta_d*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_z*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa(j)^2+...
        4*alfa(j)*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d;
    a3 = 2*alfa(j)*(alfa(j)*(zeta_z-zeta_ae)+(1+my_z*Phi_z_xd^2)*zeta_d);
    a4 = alfa(j)^2;

    b1 = 2*zeta_d*alfa(j);
    b2 = alfa(j)^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

```

```

        H_11(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*...
            omega_red).^2)./denominator);
end

% Koeffisienter til H-funksjonen
omega_damp = 0.96*min(omega_d):0.001:1.1*max(omega_d);
alfa = omega_z./omega_damp;

% H-funksjon for kontinuerlig fallende omega
for j = 1:length(omega_damp)
    a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa(j)*zeta_d*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_z*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa(j)^2+...
        4*alfa(j)*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d;
    a3 = 2*alfa(j)*(alfa(j)*(zeta_z-zeta_ae)+(1+my_z*Phi_z_xd^2)*zeta_d);
    a4 = alfa(j)^2;

    b1 = 2*zeta_d*alfa(j);
    b2 = alfa(j)^2;

    denominator = (1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4;

    H_11_rel = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*...
        omega_red).^2)./denominator);
    H_rel(j) = max(H_11_rel);

    % Area
    N = length(H_11_rel);
    A(j) = H_11_rel(1)*d_omega(1)*0.5;
    for i = 2:N-1
        A(j) = A(j) + H_11_rel(i)*(d_omega(i-1)+d_omega(i))*0.5;
    end
    A(j) = A(j) + H_11_rel(N)*d_omega(N-1)*0.5;

end

H_rel = H_rel/min(H_rel);
A = A/min(A);

% Finner optimal frekvens
[H_min,opt_index] = min(H_rel);
[A_min,Aopt_index] = min(A);

Aomega_opt = omega_damp(Aopt_index);
Tomega_opt = omega_damp(opt_index);

omega_opt = [Aomega_opt Tomega_opt];
omega_min = [A_min H_min];

%-----%
% PLOTTING - FREKVENS

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 14; % Label størrelse
FontSizeLeg = 12; % Legend størrelse
FontSizeNum = 12; % Størrelse på nummerering av funksjonene
FontSizeAx = 11; % Akse størrelse
FontSizeTex = 12; % Tekststørrelse

```

```

LineSizeX = 2;           % X-merke størrelse
LineSizeAx = 1.5;       % Akselinjetykkelse
LineSizePlot = 1.5;     % Linjetykkelse plotting

SaveFig = 0;             % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'H-function-z omega_d'; % Figurnavnt
DPI = '-r400';          % Figurkvalitet
FigWith = 5;            % Figurbredde [inch]
FigHeight = 3;          % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokser
omega_d_text{1} = 'Uten TMD';
for j = 1:length(omega_d)
    if j == W_RL_index
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f
            (R. Luft)',j,omega_d(j));
    elseif j == W_DH_index
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f
            (Den Hartog)',j,omega_d(j));
    elseif j == W_new_index
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f =
            \omega_{ae}',j,omega_d(j));
    else
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f',j,omega_d(j));
    end
    omega_d_text{j+1} = omegaD_text;
end

input_text = sprintf('\mu = %0.3f \nV = %0.0f m/s \n\zeta_d = %0.3f
    (Den Hartog)',my_z,V,zeta_d);
Topt_text = sprintf('\omega_d = %0.4f',Tomega_opt);
Aopt_text = sprintf('\omega_d = %0.4f',Aomega_opt);

% Plotter figur
figure
subplot(1,3,[1,2])
plot(omega,Hz_abs,'--','LineWidth',LineSizePlot)
hold on
plot(omega,H_11,'LineWidth',LineSizePlot)
plot([0 omega(end)],[max(H_11(W_c_index,:)) max(H_11(W_c_index,:))],
    '-.','LineWidth',LineSizePlot)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{z_2}_{z_2}','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend(omega_d_text,'Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
for j = 1:length(omega_d)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_11(j,1:length(L_vector)));
    te = text(omega(x_cord),y_cord,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
te = text(0.56,4,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
xlim([0.55 0.95])
ylim([3.5 4.6])

```

```

subplot(1,3,3)
plot(omega_damp,H_rel,'--','LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(omega_damp,A,'LineWidth',LineStylePlot)
plot(omega_opt,omega_min,'x','Color','k','LineWidth',LineStyleX)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
xlim([omega_damp(1) omega_damp(end)])
ylim([0.97 inf])
xlabel('\omega_d [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend('topp(\omega_d) / min[ topp(\omega_d) ]','A(\omega_d) /
    min[ A(\omega_d) ]','Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
te = text(omega_opt(2)-0.03,omega_min(2)-0.01,Topt_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
te = text(omega_opt(1),omega_min(1)-0.01,Aopt_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf,'Position');
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
    set(gcf,'Position', origSize)
end

%-----%
% TMD - DEMPING

% Dempevektor
zeta_DH = sqrt((3*my_z)/(8*(1+my_z)^3));
zeta_RL = sqrt((my_z/4)*(1-(3*my_z)/4));

zeta_d = sort([zeta_DH zeta_RL zeta_d_chosen zeta_DH*1.3 zeta_DH*1.4]);

Z_DH_index = find(zeta_d == zeta_DH);
Z_RL_index = find(zeta_d == zeta_RL);

% H-funksjon for forskjellige zeta
alfa = omega_z/omega_d_chosen;

for j = 1:length(zeta_d)
    a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d(j)*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_z*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
        4*alfa*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d(j);
    a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-zeta_ae)+(1+my_z*Phi_z_xd^2)*zeta_d(j));
    a4 = alfa^2;
    b1 = 2*zeta_d(j)*alfa;
    b2 = alfa^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

    H_11(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*...
        omega_red).^2)./denominator);
end

```

```

% H-funksjon for kontinuerlig fallende zeta
clear H_rel
zeta_d_rel = 0.5*min(zeta_d):0.001:1.1*max(zeta_d);
for j = 1:length(zeta_d_rel)
    a1 = 2*((zeta_z-zeta_ae)+alfa*zeta_d_rel(j)*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_z*Phi_z_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
        4*alfa*(zeta_z-zeta_ae)*zeta_d_rel(j);
    a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_z-zeta_ae)+(1+my_z*Phi_z_xd^2)*zeta_d_rel(j));
    a4 = alfa^2;

    b1 = 2*zeta_d_rel(j)*alfa;
    b2 = alfa^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

    H_11_decay(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
        b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

% Areal
N = length(H_11_decay);
A(j) = H_11_decay(j,1)*d_omega(1)*0.5;
for i = 2:N-1
    A(j) = A(j) + H_11_decay(j,i)*(d_omega(i-1)+d_omega(i))*0.5;
end
A(j) = A(j) + H_11_decay(j,N)*d_omega(N-1)*0.5;

% Toppunkt
top(j) = max(H_11_decay(j,:));
end
A = A/min(A);
top = top/min(top);

[A_min,Aopt_index] = min(A);
[top_min,Topt_index] = min(top);

Azeta_opt = zeta_d_rel(Aopt_index);
Tzeta_opt = zeta_d_rel(Topt_index);

zeta_opt = [Azeta_opt Tzeta_opt];
zeta_min = [A_min top_min];

%-----%
% PLOTTING - DEMPING

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 14; % Label størrelse
FontSizeLeg = 12; % Legend størrelse
FontSizeNum = 12; % Størrelse på nummerering av funksjoner
FontSizeAx = 11; % Akse størrelse
FontSizeTex = 12; % Tekststørrelse
LineStyleX = 2; % X-merke størrelse
LineStyleAx = 1.5; % Akselinjetykkelse
LineStylePlot = 1.5; % Tykkelse plottelinjer

```



```

SaveFig = 1; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'H-function-z zeta_d'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWidth = 5; % Figurbredde [inch]
FigHeight = 3; % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokser
zeta_d_text{1} = 'Uten TMD';
for j = 1:length(zeta_d)
    if j == Z_RL_index
        zetaD_text = sprintf('\zeta_{d%d} = %0.3f (R. Luft)',j,zeta_d(j));
    elseif j == Z_DH_index
        zetaD_text = sprintf('\zeta_{d%d} = %0.3f
            (Den Hartog)',j,zeta_d(j));
    else
        zetaD_text = sprintf('\zeta_{d%d} = %0.3f',j,zeta_d(j));
    end
    zeta_d_text{j+1} = zetaD_text;
end

input_text = sprintf('\mu = %0.3f \nV = %0.0f m/s \n\omega_d = %0.3f
    rad/s',my_z,V,omega_d_chosen);
Azeta_opt_text = sprintf('\zeta_d = %0.3f',Azeta_opt);
Tzeta_opt_text = sprintf('\zeta_d = %0.3f',Tzeta_opt);

% Plotter figur
figure
subplot(1,3,[1,2])
plot(omega,Hz_abs,'--','LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(omega,H_11,'LineWidth',LineStylePlot)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
leg = legend(zeta_d_text,'Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{z_2}_{z_2}','FontSize',FontSizeLabel)
for j = 1:length(zeta_d)
    num = num2str(j);
    te = text(omega(round(length(L_vector)*0.978)),
        H_11(j,round(length(L_vector)*0.978)),num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
te = text(0.51,3.8,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
xlim([0.5 1])
ylim([3.2 4.3])

subplot(1,3,3)
plot(zeta_d_rel,A,'LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(zeta_d_rel,top,'--','LineWidth',LineStylePlot)
plot(zeta_opt,zeta_min,'x','Color','k','LineWidth',LineStyleX)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
xlabel('\zeta_d','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend('A(\zeta_d) / min[ A(\zeta_d) ]',
    'topp(\zeta_d) / min[ topp(\zeta_d) ]','Location','north');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')

```

```

te = text(Azeta_opt-0.01,A_min-0.005,Azeta_opt_text);
set(te, 'FontSize',FontSizeTex)
te = text(Tzeta_opt,top_min-0.005,Tzeta_opt_text);
set(te, 'FontSize',FontSizeTex)
ylim([0.99 inf])

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf, 'Position');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition', [0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto')
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
    set(gcf, 'Position', origSize)
end

end

```

D10 Optimering TMD egenskaper θ -retning

```
function [H_11] =
Freq_resp_t_TMD_comp(Phi_t,Ht_abs,V,B,bc,L,dx,xd_t,mt,mc,zeta_t,omega,d_ome
ga,omega_t,omega_t_new,rho,A2,A3)

% En funksjon som vurderer optimale parametere for TMD, z-retning

%-----%
% INPUT

my_chosen = 0.015;           % Det valgte masseforholdet (gresk bokstav my)
omega_d_chosen = 1.6662;    % [rad/s] Den valgte TMD-frekvensen
zeta_d_chosen = 0.076;      % Den valgte TMD-dempingefaktoren

%-----%
% GENERELLE BEREGNINGER

x = 0:dx:L;                 % [m] Lengdevektor
Phi_t_xd = Phi_t(round((length(x)-1)*xd_t/L)); % Svingeformverdi ved TMD
m_t_tot = mt+mc*(bc/2)^2;   % Massetregghetsmoment

% Aerodynamisk stivhet og demping
kappa_ae = ((rho*B^4)/m_t_tot)*0.5*A3;
zeta_ae = ((rho*B^4)/m_t_tot)*0.25*A2;

%-----%
% TMD - MASSEFORHOLD

% Masseforhold-vektor
my_t = 0.005:(9/800):0.05;
omega_red = omega./omega_t;

% H-funksjon for 5 forskjellige my
for j = 1:length(my_t)
    % Den Hartog
    omega_d_DH(j) = omega_t_new/(1+my_t(j));           % TMD frekvens
    zeta_d_DH(j) = sqrt((3*my_t(j))/(8*(1+my_t(j))^3)); % TMD demping

    alfa = omega_t/omega_d_DH(j);

    a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d_DH(j)*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_t(j)*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
        4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d_DH(j);
    a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-...
        zeta_ae)+(1+my_t(j)*Phi_t_xd^2)*zeta_d_DH(j));
    a4 = alfa^2;

    b1 = 2*zeta_d_DH(j)*alfa;
    b2 = alfa^2;
    d2 = -Phi_t_xd*alfa^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);
end
```

```

H_11_DH(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
    b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_21_DH(j,:) = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

% R. Luft
omega_d_RL(j) = omega_t_new/sqrt(1+(3*my_t(j)/2)); % TMD frekvens
zeta_d_RL(j) = sqrt((my_t(j)/4)*(1-(3*my_t(j))/4)); % TMD demping

alfa = omega_t/omega_d_RL(j);

a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d_RL(j)*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_t(j)*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
    4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d_RL(j);
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-...
    zeta_ae)+(1+my_t(j)*Phi_t_xd^2)*zeta_d_RL(j));
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d_RL(j)*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_t_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
    a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_11_RL(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
    b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
H_21_RL(j,:) = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

end

% H-funksjon for kontinuerlig fallende my
my_decay = 0.005:0.0005:0.05;
for j = 1:length(my_decay)
    % Den Hartog
    omega_d_decay = omega_t_new/(1+my_decay(j)); % TMD frekvens
    zeta_d_decay = sqrt((3*my_decay(j))/(8*(1+my_decay(j))^3)); % Demping

    alfa = omega_t./omega_d_decay;

    a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d_decay*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_decay(j)*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
        4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d_decay;
    a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-zeta_ae)+...
        (1+my_decay(j)*Phi_t_xd^2)*zeta_d_decay);
    a4 = alfa^2;

    b1 = 2*zeta_d_decay*alfa;
    b2 = alfa^2;
    d2 = -Phi_t_xd*alfa^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

    H_11_decay = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
        b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
    H_21_decay = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

    Top_11_DH(j) = max(H_11_decay);
    Top_21_DH(j) = max(H_21_decay);

```

```

% R. Luft
omega_d_decay = omega_t_new/sqrt(1+(3*my_decay(j)/2)); % TMD frekvens
zeta_d_decay = sqrt((my_decay(j)/4)*(1-(3*my_decay(j))/4)); % Damping

alfa = omega_t./omega_d_decay;

a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d_decay*(1-kappa_ae));
a2 = 1+my_decay(j)*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
    4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d_decay;
a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-zeta_ae)+...
    (1+my_decay(j)*Phi_t_xd^2)*zeta_d_decay);
a4 = alfa^2;

b1 = 2*zeta_d_decay*alfa;
b2 = alfa^2;
d2 = -Phi_t_xd*alfa^2;

denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
    a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

H_11_decay = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*...
    omega_red).^2)./denominator);
H_21_decay = abs((d2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

Top_11_RL(j) = max(H_11_decay);
Top_21_RL(j) = max(H_21_decay);
end

L_vector = omega;
L_vector(L_vector > omega_t_new) = [];

%-----%
% PLOTTING - MASSEFORHOLD

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 10; % Label størrelse
FontSizeTitle = 10; % Tittelstørrelse
FontSizeLeg = 9; % Legend størrelse
FontSizeNum = 8; % Nummerering av funksjoner størrelse
FontSizeAx = 8; % Akse størrelse
FontSizeTex = 9; % Tekststørrelse

SaveFig = 0; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'H-function-t my'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWidth = 6; % Figurbredde [inch]
FigHeight = 3; % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokster
my_text1 = sprintf('\mu_{\theta1} = %0.3f',my_t(1));
my_text2 = sprintf('\mu_{\theta2} = %0.3f',my_t(2));
my_text3 = sprintf('\mu_{\theta3} = %0.3f',my_t(3));
my_text4 = sprintf('\mu_{\theta4} = %0.3f',my_t(4));
my_text5 = sprintf('\mu_{\theta5} = %0.3f',my_t(5));

input_text = sprintf('V = %0.0f m/s \n\zeta_{\theta} = %0.3f',V,zeta_t);

```

```

% Plotter figur
figure
subplot(2,5,[1,2])
plot(omega,Ht_abs,'--')
hold on
plot(omega,H_11_DH)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{\theta_1}_{\theta_1}','FontSize',FontSizeLabel)
title('Den Hartog','FontSize',FontSizeTitle)
leg = legend('Uten TMD',my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
            'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(1.12,10,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_t)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_11_DH(j,:));
    te = text(omega(x_cord),y_cord+0.05,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([1.1 2])
ylim([2 22])

subplot(2,5,[3,4])
plot(omega,Ht_abs,'--')
hold on
plot(omega,H_11_RL)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
title('R. Luft','FontSize',FontSizeTitle)
leg = legend('Uten TMD',my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
            'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(1.12,10,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_t)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_11_RL(j,:));
    te = text(omega(x_cord),y_cord+0.05,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([1.1 2])
ylim([2 22])

subplot(2,5,5)
plot(my_decay,Top_11_DH)
hold on
plot(my_decay,Top_11_RL,'--')
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
leg = legend('Den Hartog','R. Luft','Location','north');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
title('Toppunkt','FontSize',FontSizeTitle)
xlabel('\mu_{\theta}','FontSize',FontSizeLabel)
ylim([2 22])

```

```

subplot(2,5,[6,7])
plot(omega,H_21_DH)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{d\_theta}_{\theta_1}','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend(my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
            'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(0.52,70,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_t)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_21_DH(j,:));
    te = text(omega(x_cord),y_cord+0.05,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([0.5 2.5])
ylim([0 170])

subplot(2,5,[8,9])
plot(omega,H_21_RL)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend(my_text1,my_text2,my_text3,my_text4,my_text5,
            'Location','northwest');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
te = text(0.52,70,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
for j = 1:length(my_t)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_21_RL(j,:));
    te = text(omega(x_cord),y_cord+0.05,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
xlim([0.5 2.5])
ylim([0 170])

subplot(2,5,10)
plot(my_decay,Top_21_DH)
hold on
plot(my_decay,Top_21_RL,'--')
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
leg = legend('Den Hartog','R. Luft','Location','north');
legend('boxoff')
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg);
xlabel('\mu\_theta','FontSize',FontSizeLabel)
ylim([0 170])

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf,'Position');
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
    set(gcf,'Position',origSize)
end

```

```

%-----%
% TMD - FREKVENNS

my_t = my_chosen; % Valgt masseforhold
zeta_d = sqrt(3*my_t/(8*(1+my_t)^3)); % Den Hartog demping

% TMD frekvens
omega_DH = omega_t_new/(1+my_t); % Den Hartog
omega_RL = omega_t_new/sqrt(1+(3*my_t/2)); % R. Luft

omega_d = sort([omega_t_new omega_DH omega_RL omega_d_chosen
omega_DH*0.993]);

W_c_index = find(omega_d == omega_d_chosen);
W_new_index = find(omega_d == omega_t_new);
W_DH_index = find(omega_d == omega_DH);
W_RL_index = find(omega_d == omega_RL);

% H-function for different omega_d's
alfa = omega_t./omega_d;

for j = 1:length(alfa)
    a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa(j)*zeta_d*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_t*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa(j)^2+...
        4*alfa(j)*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d;
    a3 = 2*alfa(j)*(alfa(j)*(zeta_t-zeta_ae)+(1+my_t*Phi_t_xd^2)*zeta_d);
    a4 = alfa(j)^2;

    b1 = 2*zeta_d*alfa(j);
    b2 = alfa(j)^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

    H_11(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*...
        omega_red).^2)./denominator);
end

% Koeffisienter til H-funksjonen
omega_damp = 0.96*min(omega_d):0.001:1.1*max(omega_d);
alfa = omega_t./omega_damp;

% H-funksjon for kontinuerlig fallende omega
for j = 1:length(omega_damp)
    a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa(j)*zeta_d*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_t*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa(j)^2+...
        4*alfa(j)*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d;
    a3 = 2*alfa(j)*(alfa(j)*(zeta_t-zeta_ae)+(1+my_t*Phi_t_xd^2)*zeta_d);
    a4 = alfa(j)^2;

    b1 = 2*zeta_d*alfa(j);
    b2 = alfa(j)^2;

    denominator = (1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4;

    H_11_rel = abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*...
        omega_red).^2)./denominator);
    H_rel(j) = max(H_11_rel);
end

```



```

% Area
N = length(H_11_rel);
A(j) = H_11_rel(1)*d_omega(1)*0.5;
for i = 2:N-1
    A(j) = A(j) + H_11_rel(i)*(d_omega(i-1)+d_omega(i))*0.5;
end
A(j) = A(j) + H_11_rel(N)*d_omega(N-1)*0.5;
end

H_rel = H_rel/min(H_rel);
A = A/min(A);

% Finner optimal frekvens
[H_min,opt_index] = min(H_rel);
[A_min,Aopt_index] = min(A);

Aomega_opt = omega_damp(Aopt_index);
Tomega_opt = omega_damp(opt_index);

omega_opt = [Aomega_opt Tomega_opt];
omega_min = [A_min H_min];

%-----%
% PLOTTING - FREKVENS

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 14; % Label størrelse
FontSizeLeg = 12; % Legend størrelse
FontSizeNum = 12; % Størrelse på nummerering av funksjoner
FontSizeAx = 11; % Akse størrelse
FontSizeTex = 12; % Tekststørrelse
LineSizeX = 2; % X-merke størrelse
LineSizeAx = 1.5; % Akselinjetykkelse
LineSizePlot = 1.5; % Tykkelse plottelinje

SaveFig = 0; % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'H-function-t omega_d'; % Figurnavn
DPI = '-r400'; % Figurkvalitet
FigWidth = 5; % Figurbredde [inch]
FigHeight = 3; % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokser
omega_d_text{1} = 'Uten TMD';
for j = 1:length(omega_d)
    if j == W_RL_index
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f\n(R. Luft)',j,omega_d(j));
    elseif j == W_DH_index
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f\n(Den Hartog)',j,omega_d(j));
    elseif j == W_new_index
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f =\n\omega_{ae}',j,omega_d(j));
    else
        omegaD_text = sprintf('\omega_{d%d} = %0.3f',j,omega_d(j));
    end
    omega_d_text{j+1} = omegaD_text;
end
end

```

```

input_text = sprintf('\mu = %0.3f \nV = %0.0f m/s \n\zeta_d = %0.3f
    (Den Hartog)',my_t,V,zeta_d);
Topt_text = sprintf('\omega_d = %0.4f',Tomega_opt);
Aopt_text = sprintf('\omega_d = %0.4f',Aomega_opt);

% Plotter figur
figure
subplot(1,3,[1,2])
plot(omega,Ht_abs,'--','LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(omega,H_1l,'LineWidth',LineStylePlot)
plot([0 omega(end)],[max(H_1l(W_c_index,:)) max(H_1l(W_c_index,:))],
    '-.','LineWidth',LineStylePlot)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{\theta_1}_{\theta_1}','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend(omega_d_text,'Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
for j = 1:length(omega_d)
    num = num2str(j);
    [y_cord,x_cord] = max(H_1l(j,1:length(L_vector)));
    te = text(omega(x_cord),y_cord,num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
te = text(1.31,9,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
xlim([1.3 2])
ylim([7.5 12])

subplot(1,3,3)
plot(omega_damp,H_rel,'--','LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(omega_damp,A,'LineWidth',LineStylePlot)
plot(omega_opt,omega_min,'x','Color','k','LineWidth',LineStyleX)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
leg = legend('topp(\omega_d) / min[ topp(\omega_d) ]','A(\omega_d) /
    min[ A(\omega_d) ]','Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
xlim([omega_damp(1) omega_damp(end)])
ylim([0.95 inf])
xlabel('\omega_d [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
te = text(omega_opt(2)-0.06,omega_min(2)-0.02,Topt_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
te = text(omega_opt(1),omega_min(1)-0.02,Aopt_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf,'Position');
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
    set(gcf,'Position',origSize)
end

```

```

%-----%
% TMD - DEMPING

% Dempevektor
zeta_DH = sqrt((3*my_t)/(8*(1+my_t)^3));
zeta_RL = sqrt((my_t/4)*(1-(3*my_t)/4));

zeta_d = sort([zeta_DH zeta_RL zeta_d_chosen zeta_DH*1.25 zeta_DH*1.35]);

Z_DH_index = find(zeta_d == zeta_DH);
Z_RL_index = find(zeta_d == zeta_RL);

% H-funksjon for zeta
alfa = omega_t/omega_d_chosen;

for j = 1:length(zeta_d)
    a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d(j)*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_t*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
        4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d(j);
    a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-zeta_ae)+(1+my_t*Phi_t_xd^2)*zeta_d(j));
    a4 = alfa^2;

    b1 = 2*zeta_d(j)*alfa;
    b2 = alfa^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

    H_11(j,:) =
abs((1+b1*(1i*omega_red)+b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);
end

% H-funksjon for kontinuerlig fallende zeta
clear H_rel
zeta_d_rel = 0.95*min(zeta_d):0.001:1.1*max(zeta_d);
for j = 1:length(zeta_d_rel)
    a1 = 2*((zeta_t-zeta_ae)+alfa*zeta_d_rel(j)*(1-kappa_ae));
    a2 = 1+my_t*Phi_t_xd^2+(1-kappa_ae)*alfa^2+...
        4*alfa*(zeta_t-zeta_ae)*zeta_d_rel(j);
    a3 = 2*alfa*(alfa*(zeta_t-zeta_ae)+(1+my_t*Phi_t_xd^2)*zeta_d_rel(j));
    a4 = alfa^2;

    b1 = 2*zeta_d_rel(j)*alfa;
    b2 = alfa^2;

    denominator = ((1-kappa_ae)+a1*(1i*omega_red)+a2*(1i*omega_red).^2+...
        a3*(1i*omega_red).^3+a4*(1i*omega_red).^4);

    H_11_decay(j,:) = abs((1+b1*(1i*omega_red)+...
        b2*(1i*omega_red).^2)./denominator);

% Areal
N = length(H_11_decay);
A(j) = H_11_decay(j,1)*d_omega(1)*0.5;
for i = 2:N-1
    A(j) = A(j) + H_11_decay(j,i)*(d_omega(i-1)+d_omega(i))*0.5;
end
A(j) = A(j) + H_11_decay(j,N)*d_omega(N-1)*0.5;

```

```

    % Toppunkt
    top(j) = max(H_11_decay(j,:));
end

A = A/min(A);
top = top/min(top);

[A_min,Aopt_index] = min(A);
[top_min,Topt_index] = min(top);

Azeta_opt = zeta_d_rel(Aopt_index);
Tzeta_opt = zeta_d_rel(Topt_index);

zeta_opt = [Azeta_opt Tzeta_opt];
zeta_min = [A_min top_min];

%-----%
% PLOTTING - DEMPING

% Figuregenskaper
FontSizeLabel = 14;    % Label størrelse
FontSizeLeg = 11;     % Legend størrelse
FontSizeNum = 12;     % Størrelse på nummerering av funksjonene
FontSizeAx = 11;     % Akse størrelse
FontSizeTex = 11;    % Tekststørrelse
LineSizeX = 2;       % X-merke størrelse
LineSizeAx = 1.5;    % Akselinjetykkelse
LineSizePlot = 1.5;  % Tykkelse plottelinje

SaveFig = 0;          % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'H-function-t zeta_d'; % Figurnavn
DPI = '-r400';       % Figurkvalitet
FigWidth = 5;        % Figurbredde [inch]
FigHeight = 3;       % Figurhøyde [inch]

% Tekstbokser
zeta_d_text{1} = 'Uten TMD';
for j = 1:length(zeta_d)
    if j == Z_RL_index
        zetaD_text = sprintf('\zeta_{d%d} = %0.3f (R. Luft)',j,zeta_d(j));
    elseif j == Z_DH_index
        zetaD_text = sprintf('\zeta_{d%d} = %0.3f
        (Den Hartog)',j,zeta_d(j));
    else
        zetaD_text = sprintf('\zeta_{d%d} = %0.3f',j,zeta_d(j));
    end
    zeta_d_text{j+1} = zetaD_text;
end

input_text = sprintf('\mu = %0.3f \nV = %0.0f m/s \n\omega_d =
    %0.3f rad/s',my_t,V,omega_d_chosen);
Azeta_opt_text = sprintf('\zeta_d = %0.3f',Azeta_opt);
Tzeta_opt_text = sprintf('\zeta_d = %0.3f',Tzeta_opt);

```

```

% Plotter figur
figure
subplot(1,3,[1,2])
plot(omega,Ht_abs,'--','LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(omega,H_11,'LineWidth',LineStylePlot)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
leg = legend(zeta_d_text,'Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
xlabel('\omega [rad/s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('|H(\omega)|_{\theta_1}_{\theta_1}','FontSize',FontSizeLabel)
for j = 1:length(zeta_d)
    num = num2str(j);
    te = text(omega(round(length(L_vector)*0.99)),
             H_11(j,round(length(L_vector)*0.99)),num);
    set(te,'FontSize',FontSizeNum)
end
te = text(1.21,8.5,input_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
xlim([1.2 2.1])
ylim([6.5 11])

subplot(1,3,3)
plot(zeta_d_rel,A,'LineWidth',LineStylePlot)
hold on
plot(zeta_d_rel,top,'--','LineWidth',LineStylePlot)
plot(zeta_opt,zeta_min,'x','Color','k','LineWidth',LineStyleX)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'LineWidth',LineStyleAx)
xlabel('\zeta_d','FontSize',FontSizeLabel)
leg = legend('A(\zeta_d) / min[ A(\zeta_d) ]','topp(\zeta_d) /
            min[ topp(\zeta_d) ]','Location','northwest');
set(leg,'FontSize',FontSizeLeg)
legend('boxoff')
te = text(Azeta_opt-0.006,A_min*0.995,Azeta_opt_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
te = text(Tzeta_opt+0.001,top_min*0.996,Tzeta_opt_text);
set(te,'FontSize',FontSizeTex)
ylim([0.98 inf])

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf,'Position');
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
    set(gcf,'Position',origSize)
end

end

```

D11 Responsspektrum z-retning

```
function [sigma_z,sigma_z_dot,Sr_z] =  
Resp_spect_z(Phi_z,x,xr,L,omega,omega_z,d_omega,mz,rho,V,B,HZ_abs,Jz_hat)  
  
% En funksjon som lager responsspektrumet og regner ut standardavviket  
% z-retning  
  
%-----%  
  
% Responsspektrum  
Sr_z = (Phi_z(round((length(x)-1)*xr/L))/omega_z^2)^2*...  
        ((rho*V^2*B)/(2*mz))^2.*HZ_abs.^2.*Jz_hat';  
  
% Standardavvik for prosessen  
N = length(Sr_z);  
sigma_z = Sr_z(1)*d_omega(1)*0.5;  
for j = 2:N-1  
    sigma_z = sigma_z + Sr_z(j)*(d_omega(j-1)+d_omega(j))*0.5;  
end  
sigma_z = sigma_z + Sr_z(N)*d_omega(N-1)*0.5;  
sigma_z = sqrt(sigma_z);  
  
% Standardavvik for den deriverte prosessen  
sigma_z_dot = (omega(1))^2*Sr_z(1)*d_omega(1)*0.5;  
for j = 2:N-1  
    sigma_z_dot = sigma_z_dot + (omega(j))^2*Sr_z(j)*...  
        (d_omega(j-1)+d_omega(j))*0.5;  
end  
sigma_z_dot = sigma_z_dot + (omega(N))^2*Sr_z(N)*d_omega(N-1)*0.5;  
sigma_z_dot = sqrt(sigma_z_dot);  
  
% Plotter figur  
figure  
loglog(omega,Sr_z)  
grid on  
xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')  
ylabel('S_{r_z}(x_r,\omega)')  
title('Responsspektrum z-retning')  
box on  
  
end
```

D12 Responsspektrum θ -retning

```
function [sigma_t,sigma_t_dot,Sr_t] =
Resp_spect_t(Phi_t,x,xr,L,omega,omega_t,d_omega,mt,rho,V,B,Ht_abs,Jt_hat)

% En funksjon som lager responsspektrumet og regner ut standardavviket
% theta-retning

%-----%

% Responsspektrum
Sr_t = (Phi_t(round((length(x)-1)*xr/L))/omega_t^2)^2*...
        ((rho*V^2*B^2)/(2*mt))^2.*Ht_abs.^2.*Jt_hat';

% Standardavvik for prosessen
N = length(Sr_t);
sigma_t = Sr_t(1)*d_omega(1)*0.5;
for j = 2:N-1
    sigma_t = sigma_t + Sr_t(j)*(d_omega(j-1)+d_omega(j))*0.5;
end
sigma_t = sigma_t + Sr_t(N)*d_omega(N-1)*0.5;
sigma_t = sqrt(sigma_t);

% Standardavvik for den deriverte prosessen
sigma_t_dot = (omega(1))^2*Sr_t(1)*d_omega(1)*0.5;
for j = 2:N-1
    sigma_t_dot = sigma_t_dot + (omega(j))^2*Sr_t(j)*...
        (d_omega(j-1)+d_omega(j))*0.5;
end
sigma_t_dot = sigma_t_dot + (omega(N))^2*Sr_t(N)*d_omega(N-1)*0.5;
sigma_t_dot = sqrt(sigma_t_dot);

% Plotter figur
figure
loglog(omega,Sr_t)
grid on
xlabel('Frekvens \omega [rad/s]')
ylabel('S_{r_\theta}(x_r,\omega)')
title('Responsspektrum \theta-retning')
box on

end
```

D13 Maksrespons

```
function [r_z_max_pf,r_z_max_pf_TMD] =
max_response(t,sigma_z_dot,sigma_z,sigma_z_dot_TMD,sigma_z_TMD)

% En funksjon som regner ut maks respons med og uten TMD

%-----%
% INPUT
gamma = 0.5772;           % Eulers konstant
T = t(length(t));       % Lengden av tidsintervallet

%-----%
% UTEN TMD

% Gjennomsnittlig oppoverkryssende frekvens
f_0 = (sigma_z_dot/sigma_z)/(2*pi);

% Toppfaktor
kp = sqrt(2*log(f_0*T))+(gamma/sqrt(2*log(f_0*T)))

% Maks respons
r_z_max_pf = sigma_z*kp;

%-----%
% MED TMD

% Gjennomsnittlig oppoverkryssende frekvens
f_0_TMD = (sigma_z_dot_TMD/sigma_z_TMD)/(2*pi);

% Toppfaktor
kp_TMD = sqrt(2*log(f_0_TMD*T))+(gamma/sqrt(2*log(f_0_TMD*T)))

% Maks respons
r_z_max_pf_TMD=sigma_z_TMD*kp_TMD;

end
```


D14 Tidsplansimulering

```
function [r_t,r_t_TMD] =
resp_time(t,Sr,Sr_TMD,omega,d_omega,r_max_pf,r_max_pf_TMD)

% En funksjon som simulerer svingningene i tidsdomenet med og uten
massedemper

%-----%
% BEREGNINGER

N = length(omega);
N_t = length(t);
i_length = 3000;

r_t = zeros(i_length,N_t);
r_t_TMD = zeros(i_length,N_t);

for i = 1:i_length
    for k = 2:N-1
        Sr_k = Sr(k);
        Sr_k_TMD = Sr_TMD(k);

        d_omega_k = d_omega(k);
        omega_k = omega(k);

        c_k = (2*Sr_k*d_omega_k).^0.5;
        c_k_TMD = (2*Sr_k_TMD*d_omega_k).^0.5;

        psi = rand*2*pi;

        r_k = c_k*cos(omega_k*t+psi);
        r_k_TMD = c_k_TMD*cos(omega_k*t+psi);

        r_t(i,:) = r_t(i,)+ r_k;
        r_t_TMD(i,:) = r_t_TMD(i,)+ r_k_TMD;
    end
    r_t_max(i)=max(abs(r_t(i,:)));
    r_t_max_TMD(i)=max(abs(r_t_TMD(i,:)));
end

%-----%
% FIGUR 1

% Figuregenskaper
FontSizeTitle = 10;           % Tittelstørrelse
FontSizeLabel = 12;          % Label størrelse
FontSizeAx = 9;              % Akse størrelse
LineStyle = 2;               % Plot linje tykkelse

SaveFig = 0;                 % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'Tidsplansimulering relativ respons 2 vertikal'; % Figurnavn
DPI = '-r400';              % Figurkvalitet
FigWidth = 20;               % Figurbredde [inch]
FigHeight = 5;               % Figurhøyde [inch]
```

```

% Plotter
figure
subplot(1,3,[1,2])
plot(t,r_t_TMD(round(rand*i_length),:))
hold on
plot(t,ones(1,length(t))*r_max_pf_TMD,'Color','r','LineWidth',LineSize)
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
plot(t,-1*ones(1,length(t))*r_max_pf_TMD,'Color','r','LineWidth',LineSize)
hold off
grid on
axis([0 600 -8 8])
xlabel('tid [s]','FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('Respons [m]','FontSize',FontSizeLabel)
title('1 simulering av relativ respons')

subplot(1,3,3)
h = histogram(r_t_TMD,'Normalization','pdf','Orientation','horizontal');
hold on
h_max = histogram(r_t_max_TMD,'Normalization','pdf',
    'Orientation','horizontal');
set(gca,'FontSize',FontSizeAx,'xtick',[])
grid on
ylim([-8 8])
title('Sannsynlighetsfordeling','FontSize',FontSizeTitle)

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    set(gcf,'PaperUnits','inches','PaperPosition',[0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
    print(OutputName,'-dpng',DPI)
end

%-----%
% FIGUR 2

% Figuregenskaper
FontSizeTitle = 12;           % Tittelstørrelse
FontSizeLabel = 12;          % Label størrelse
FontSizeAx = 10;             % Akse størrelse
LineSize = 2;                % Plot linje tykkelse

SaveFig = 0;                  % 1 for ja og 0 for nei
OutputName = 'Tidsplansimulering 3 torsjon'; % Figurnavn
DPI = '-r400';               % Figurkvalitet
FigWidth = 5;                 % Figur bredde [inch]
FigHeight = 3;                % Figur høyde [inch]

% Plotter
figure
subplot(2,3,[1,2])
plot(t,r_t(round(rand*i_length),:))
hold on
plot(t,ones(1,length(t))*r_max_pf,'Color','r','LineWidth',LineSize)
plot(t,-ones(1,length(t))*r_max_pf,'Color','r','LineWidth',LineSize)
hold off
set(gca,'FontSize',FontSizeAx)
grid on
axis([0 600 -0.08 0.08])
ylabel('Respons [rad]','FontSize',FontSizeLabel)
title('1 av 3000 tidsplansimuleringer','FontSize',FontSizeTitle)

```

```

subplot(2,3,3)
h = histogram(r_t, 'Normalization', 'pdf', 'Orientation', 'horizontal')
hold on
h_max =
histogram(r_t_max, 'Normalization', 'pdf', 'Orientation', 'horizontal');
hold off
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx, 'xtick', [])
grid on
ylim([-0.08 0.08])
title('pdf av 3000 simuleringer', 'FontSize',FontSizeTitle)

subplot(2,3,[4,5])
plot(t,r_t_TMD(round(rand*i_length),:))
hold on
plot(t,ones(1,length(t))*r_max_pf_TMD, 'Color', 'r', 'LineWidth',LineSize)
plot(t,-ones(1,length(t))*r_max_pf_TMD, 'Color', 'r', 'LineWidth',LineSize)
hold off
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx)
grid on
axis([0 600 -0.08 0.08])
xlabel('tid [s]', 'FontSize',FontSizeLabel)
ylabel('Respons med TMD [rad]', 'FontSize',FontSizeLabel)

subplot(2,3,6)
h = histogram(r_t_TMD, 'Normalization', 'pdf', 'Orientation', 'horizontal');
hold on
h_max =
histogram(r_t_max_TMD, 'Normalization', 'pdf', 'Orientation', 'horizontal');
hold off
set(gca, 'FontSize',FontSizeAx, 'xtick', [])
grid on
ylim([-0.08 0.08])
xlabel('Sannsynlighet', 'FontSize',FontSizeLabel)

% Lagrer figur
if SaveFig == 1
    origSize = get(gcf, 'Position');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition',
        [0 0 FigWidth FigHeight])
    set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto')
    print(OutputName, '-dpng', DPI)
    set(gcf, 'Position', origSize)
end

end

```