

Globale effekter på lokale kapasiteter i betongkonstruksjoner

Henrik Andre Baltzersen
Per Olav Dahl Hegge

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2016

Hovedveileder: Jan Arve Øverli, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk



MASTEROPPGAVE 2016

FAGOMRÅDE:
Konstruksjonsteknikk

DATO: 08.06.2016

ANTALL SIDER: 79

TITTEL:

Global analyse av lokal kapasitet i betongkonstruksjoner
Global analysis of local capacities in concrete structures

UTFØRT AV:



Henrik André Baltzersen



Per Olav Dahl Hegge

SAMMENDRAG:

Beregning av momentkapasitet i bjelker og plater kan gjøres ved lineær elastisk analyse eller ved ikke-lineær analyse (FEM). Førstnevnte metode benytter seg av empiriske formler og beregningsmetoder etter Eurokoden, mens ikke-lineær analyse kan gjøres i et FEM-program, som DIANA, som spesialiserer seg på FEM-analyse av betongkonstruksjoner.

I denne oppgaven er resultater fra lineære og ikke-lineære analyser av momentkapasiteten til bjelker og plater sammenlignet gjennom noen enkle eksempler. Det er gjort beregninger av en tofelts bjelke med jevnt fordelt last og gitt betongtverrsnitt og geometri, men varierende armeringstverrsnitt. Det er også blitt regnet på en tofelts plate og en bjelke med søyle i midtopplegg.

For hvert tilfelle er det blitt regnet på omfordeling av støttemoment etter EC2. Momentomfordeling flytter deler av støttemomentet ut i feltet og minker dermed bjelkens eller platens behov for armering over midtstøtte. Dette reduserer det totale armeringsbehovet og følgelig også kostnadene.

Påvirkningen av en søyle med bredde 400mm i midtopplegget på en tofeltsbjelke er også vurdert. Reduksjon av støttemoment etter EC2 er beregnet med forskjellige metoder og sammenlignet med ikke-lineære resultater.

Lineær og ikke-lineær analyse gav tilfredsstillende resultater som lot seg sammenligne, både med hensyn på momentkapasitet, armeringsspenning og -tøyning. Med unntak av den normalarmerte bjelken, var det lite avvik mellom de to analysemetodene. Momentomfordeling var også lett å kjenne igjen i FEM-analysen, noe som tyder på gode resultater også her. Reduksjon av støttemoment etter EC2 stemte godt overens den ikke-lineære analysen.

Våre analyser indikerer at DIANA gir resultater som stemmer godt overens med lineær elastisk analyse, der vi tar hensyn til virkningen av momentomlagring eller reduksjon av støttemoment. Dette kan dermed virke som hensiktsmessige måter å redusere armeringsmengden på, i bjelker og plater over to felt.

FAGLÆRER: Jan Arve Øverli

VEILEDER(E): Jan Arve Øverli

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU

Forord

Denne masteroppgaven er skrevet i løpet av 20 effektive uker, våren 2016, ved Institutt for Konstruksjonsteknikk, IVT, NTNU. Oppgaven markerer avslutningen på det 5-årige sivilingeniørstudiet i Trondheim.

Rapporten er skrevet i samarbeid mellom studentene Henrik André Baltzersen og Per Olav Dahl Hegge. Samarbeidet har fungert veldig bra, med to personer som utfyller hverandre med diskusjon og faglig innsikt.

Gjennom vårt arbeid har vi fått god innsikt i bruk av ikke-lineære analyser med FEM-programmet DIANA og beregnings- og dimensjoneringsmetoder etter Eurocode 2.

Veileder Professor Jan Arve Øverli takkes for god veiledning og kjapp respons på spørsmål. Retter også en takk til medstudenter på kontoret for godt samarbeid og gode diskusjoner.

GOD SOMMER!

Trondheim, 08. juni 2016

Henrik André Baltzersen

Henrik André Baltzersen

Per Olav Dahl Hegge

Per Olav Dahl Hegge

Sammendrag

Beregning av momentkapasitet i bjelker og plater kan gjøres ved lineær elastisk analyse eller ved ikke-lineær analyse (FEM). Førstnevnte metode benytter seg av empiriske formler og beregningsmetoder etter Eurokoden, mens ikke-lineær analyse kan gjøres i et FEM-program, som DIANA, som spesialiserer seg på FEM-analyse av betongkonstruksjoner.

I denne oppgaven er resultater fra lineære og ikke-lineære analyser av momentkapasiteten til bjelker og plater sammenlignet gjennom noen enkle eksempler. Det er gjort beregninger av en tofelts bjelke med jevnt fordelt last og gitt betongtverrsnitt og geometri, men varierende armeringstverrsnitt. Det er også blitt regnet på en tofelts plate og en bjelke med søyle i midtopplegg.

For hvert tilfelle er det blitt regnet på omfordeling av støttemoment etter EC2.

Momentomfordeling flytter deler av støttemomentet ut i feltet og minker dermed bjelkens eller platens behov for armering over midtstøtte. Dette reduserer det totale armeringsbehovet og følgelig også kostnadene.

Påvirkningen av en søyle med bredde 400mm i midtopplegget på en tofeltsbjelke er også vurdert. Reduksjon av støttemoment etter EC2 er beregnet med forskjellige metoder og sammenlignet med ikke-lineære resultater.

Lineær og ikke-lineær analyse gav tilfredsstillende resultater som lot seg sammenligne, både med hensyn på momentkapasitet, armeringsspenning og -tøyning. Med unntak av den normalarmerte bjelken, var det lite avvik mellom de to analysemetodene.

Momentomfordeling var også lett å kjenne igjen i FEM-analysen, noe som tyder på gode resultater også her. Reduksjon av støttemoment etter EC2 stemte godt overens den ikke-lineære analysen.

Våre analyser indikerer at DIANA gir resultater som stemmer godt overens med lineær elastisk analyse, der vi tar hensyn til virkningen av momentomlagring eller reduksjon av støttemoment. Dette kan dermed virke som hensiktsmessige måter å redusere armeringsmengden på, i bjelker og plater over to felt.

Abstract

Calculation of moment capacity in beams and slabs can be made by linear elastic analysis or by nonlinear analysis (FEM). The former method uses empirical formulas and calculation by Eurocode, while nonlinear analysis can be done in an FEM program, like DIANA, specializing in finite element analysis of concrete structures.

In this thesis the results of linear and nonlinear analyses of the moment capacity of beams and slabs are compared through some simple examples. Calculations have been made by a two-span beam with a uniform load and given concrete cross section and geometry but varying reinforcement cross section. We have also analysed a two-span slab and a beam with a column in the intermediate support.

For each case, redistribution of moment in the support is done by EC2. Moment redistribution transfers part of the moment from the support, to the rest of the beam or slab, thus reducing the need for reinforcement over the centre support, and also the total need of reinforcement for the beam or slab.

The effect of a column with width 400mm in the centre support of a two-span beam is also considered. Reduction of the moment over the centre support is calculated by various methods given in EC2, and compared to non-linear results.

Linear and nonlinear analysis gave satisfactory results, both in terms of moment capacity, tension and displacement of the reinforcement. Except for the normally reinforced beam, there was little deviation between the two methods of analysis. Moment redistribution was also easy to recognize in FEM analysis, which suggests good results. Reduction of the moment in the centre support using EC2 gave the same results as the non-linear analysis.

Our thesis indicates that non-linear analysis using DIANA gives us results that are satisfyingly close to the linear elastic analysis, taking in to account the effect of moment redistribution or reduction of moment in the centre support. We conclude that these are appropriate methods of reducing the amount of reinforcement in two-span beams and slabs.

Innhold

| | |
|--|-------------|
| Forord | III |
| Sammendrag | V |
| Abstract | VII |
| Innhold | IX |
| Figurliste | XI |
| Tabelliste | XIII |
| 1 Innledning | 1 |
| 2 Teori | 3 |
| 2.1 <i>Ren bøyning – Bjelker og plater</i> | 3 |
| 2.2 <i>Lineær elastisk analyse med begrenset momentomlagring</i> | 4 |
| 2.3 <i>Reduksjon av støttemoment</i> | 6 |
| 2.4 <i>Plastisk lastvirkningsanalyse</i> | 7 |
| 3 Ikke-lineær analyse | 9 |
| 3.1 <i>Generelt om elementmetoden og ikke-lineær analyse</i> | 9 |
| 3.2 <i>Løsningsmetode for ikke-lineær analyse</i> | 10 |
| 3.2.1 <i>Inkrementell prosedyre</i> | 10 |
| 3.2.2 <i>Iterasjonsprosedyre</i> | 12 |
| 3.3 <i>Materialmodeller</i> | 13 |
| 3.3.1 <i>Rissmodeller</i> | 14 |
| 3.3.2 <i>Strekmodell</i> | 14 |
| 3.3.3 <i>Trykkmodell</i> | 15 |
| 3.3.4 <i>Armeringsstål</i> | 16 |
| 4 Analyse av tofelts bjelke | 19 |
| 4.1 <i>Grunnlag for beregninger</i> | 19 |
| 4.2 <i>Symmetrisk armert bjelke</i> | 21 |
| 4.2.1 <i>Lineær statisk analyse</i> | 22 |
| 4.2.2 <i>Omlagring av støttemoment</i> | 24 |
| 4.2.3 <i>Ikke-lineær analyse</i> | 27 |
| 4.3 <i>Normalarmering av tofeltsbjelke</i> | 36 |
| 4.3.1 <i>Lineær statisk analyse</i> | 36 |
| 4.3.2 <i>Omlagring av støttemoment</i> | 39 |
| 4.3.3 <i>Ikke lineær analyse</i> | 40 |
| 4.4 <i>Realistisk armering av tofeltsbjelke</i> | 43 |
| 4.4.1 <i>Lineær elastisk analyse</i> | 43 |
| 4.4.2 <i>Omlagring av støttemoment</i> | 47 |
| 4.4.3 <i>Ikke-lineær analyse</i> | 48 |
| 5 Analyse av plate over to felt | 51 |
| 5.1 <i>Lineær elastisk analyse</i> | 51 |
| 5.2 <i>Omlagring av støttemoment</i> | 56 |
| 5.3 <i>Ikke-lineær analyse</i> | 57 |
| 6 Analyse av tofelts bjelke med søyle | 61 |
| 6.1 <i>Reduksjon av støttemoment</i> | 61 |
| 6.1.1 <i>Reduksjon etter punkt (3)</i> | 61 |
| 6.1.2 <i>Reduksjon etter punkt (4)</i> | 62 |

| | | |
|----------|------------------------------------|-----------|
| 6.2 | <i>Reduksjon av armering</i> | 63 |
| 6.3 | <i>Ikke-lineær analyse</i> | 64 |
| 7 | Konklusjon | 77 |
| 8 | Bibliografi | 79 |

Figurliste

| | |
|---|----|
| Figur 2.1: Typiske tøyningstilstander ved bøyebrydd [1] | 3 |
| Figur 2.2: Momentfordeling med omlagring for tofeltsbjelke [1] | 4 |
| Figur 2.3: Momentfordeling med omlagring for tofeltsbjelke [4] | 5 |
| Figur 2.4: Omfordelingsprosent med hensyn på trykksonehøyde | 5 |
| Figur 2.5: Reduksjon av støttemoment [1]..... | 6 |
| Figur 2.6: Grunnverdi for tillatt rotasjon [5]..... | 8 |
| Figur 3.1: Last- og forskyvningskontroll [7] | 11 |
| Figur 3.2: Last-forskyvningskurve [7] | 11 |
| Figur 3.3: Iterasjonsprosedyre [7] | 12 |
| Figur 3.4: Newton-Raphson [7] | 13 |
| Figur 3.5: Linear Tension softening, ultimate strain based [7]..... | 15 |
| Figur 3.6: Multilineær trykkmodell [7] | 16 |
| Figur 3.7: Spennings-tøyingsdiagram, ideelt plastisk, armeringsstål [7] | 17 |
| Figur 4.1: Tofelts bjelke | 19 |
| Figur 4.2: Tofelts bjelke | 21 |
| Figur 4.3: Momentdiagram | 22 |
| Figur 4.4: Momentkapasite | 28 |
| Figur 4.5: Armeringsspenning | 29 |
| Figur 4.6: Armeringstøyning..... | 30 |
| Figur 4.7: Armeringstøyning..... | 31 |
| Figur 4.8: Momentkapasitet..... | 32 |
| Figur 4.9: Armeringsspenning | 33 |
| Figur 4.10: Armeringstøyning..... | 34 |
| Figur 4.11: Armeringstøyning..... | 35 |
| Figur 4.12: Momentdiagram | 37 |
| Figur 4.13: Momentkapasitet..... | 40 |
| Figur 4.14: Armeringsspenning | 41 |
| Figur 4.15: Armeringstøyning..... | 42 |
| Figur 4.16: Armeringstøyning..... | 42 |

| | |
|--|----|
| Figur 4.17: Momentdiagram | 44 |
| Figur 4.18: Momentkapasitet | 48 |
| Figur 4.19: Armeringsspenning | 49 |
| Figur 4.20: Armeringstøyning | 50 |
| Figur 4.21: Armeringstøyning | 50 |
| Figur 5.1: Tofelts plate | 51 |
| Figur 5.2: Momentdiagram | 53 |
| Figur 5.3: Momentkapasitet | 57 |
| Figur 5.4: Armeringsspenning | 58 |
| Figur 5.5: Armeringstøyning | 59 |
| Figur 5.6: Armeringstøyning | 59 |
| Figur 6.1: Bjelke med søyle | 61 |
| Figur 6.2: Momentdiagram | 62 |
| Figur 6.3: Q8MEM Element [7] | 64 |
| Figur 6.4: Momentdiagram, DIANA | 65 |
| Figur 6.5: Moment, felt og over søyle | 65 |
| Figur 6.6: Armeringsspenning, felt og over søyle | 66 |
| Figur 6.7: Armeringstøyning, felt og over søyle | 67 |
| Figur 6.8: Armeringstøyning, felt og over søyle | 67 |
| Figur 6.9: Elementmodell med armeringsspenninger | 68 |
| Figur 6.10: Søylespenninger i betongen, y-retning | 69 |
| Figur 6.11: Armeringsspenninger, felt og støtte | 70 |
| Figur 6.12: Armeringstøyning, felt og midtstøtte | 71 |
| Figur.6.13: Nedbøyningsutvikling, 100% vs 110% av q | 72 |
| Figur 6.14: Nedbøyning, node 25(venstre felt) | 72 |
| Figur 6.15: Nedbøyning, node 339(høyre felt) | 73 |
| Figur 6.16: Rissdannelser, 10,6% av dimensjonerende last | 74 |
| Figur 6.17: Rissdannelser, 30,6% av dimensjonerende last | 74 |
| Figur 6.18: Rissdannelser, 100% av dimensjonerende last | 74 |

Tabelliste

| | |
|--|----|
| Tabell 4.1: Excel-regneark, symmetrisk armert bjelke | 23 |
| Tabell 4.2: Excel-regneark, omlagret..... | 26 |
| Tabell 4.3: Excel-regneark, felt..... | 38 |
| Tabell 4.4: Excel-diagram, midtstøtte | 45 |
| Tabell 4.5: Excel-diagram, felt | 46 |
| Tabell 5.1: Excel-regneark, midtstøtte | 54 |
| Tabell 5.2: Excel-regneark, felt..... | 55 |
| Tabell 6.1: Armeringstverrsnitt | 63 |
| Tabell 7.1: Sammenligning av bjelker og plate..... | 77 |

1 Innledning

Utgangspunktet for denne masteroppgaven er å se på globale analyser av lokale kapasiteter i betongkonstruksjoner. Resultater fra håndregning etter EC2 og lineær analyse utfør i FAP-2D sammenlignes med ikke-lineære analyser utført i FEM-programmet DIANA. Dette programmet egner seg spesielt godt til numeriske analyser av betongkonstruksjoner.

Først er teorigrunnlaget gjennomgått for noe bjelketeori og beregningsmetoder etter EC2.

Deretter er teorigrunnlaget for den ikke-lineære analysen beskrevet, med blant annet materialmodeller og rissmodeller.

Det er utført analyse av en tofelts fritt opplagt bjelke med forskjellige alternativer til armering. Lineære og ikke-lineære resultater er sammenlignet samt effekten av momentomlagring.

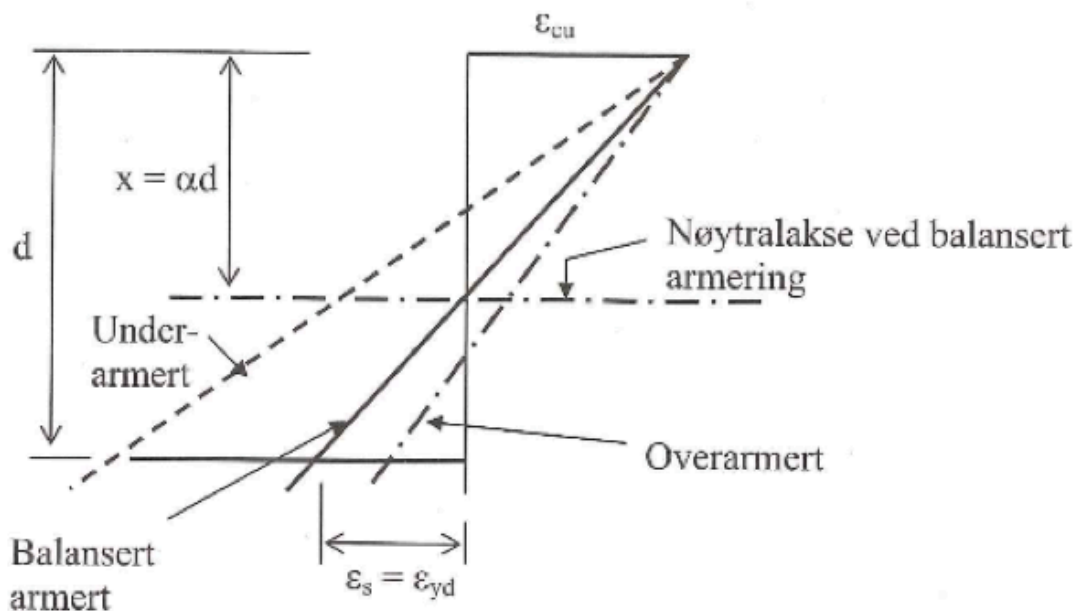
En plate over to felt er analysert på tilsvarende måte som bjelken.

Tofeltsbjelken er modellert med søyle i midtstøtte for å se på reduksjon av støttemoment. Forskjellige metoder for reduksjon av moment er utført og sammenlignet i form av reduksjon av armeringsmengde.

2 Teori

2.1 Ren bøyning – Bjelker og plater

Figur 2.1 viser typiske tøyningstilstander i en bjelke utsatt for ren bøyning.



Figur 2.1: Typiske tøyningstilstander ved bøyebrydd [1]

Definisjoner:

$\epsilon_s < \epsilon_{yd}$: **Overarmert** tverrsnitt – armeringen flyter ikke før betongen knuses.

Armeringsmengden i tverrsnittet er relativt stor.

$\epsilon_s = \epsilon_{yd}$: **Balansert armert** tverrsnitt – flytning i armering samtidig med knusing

$\epsilon_s < \epsilon_{yd}$: **Underarmert** tverrsnitt – armering flyter før betongen knuses. Armeringsmengden i tverrsnittet er relativt liten.

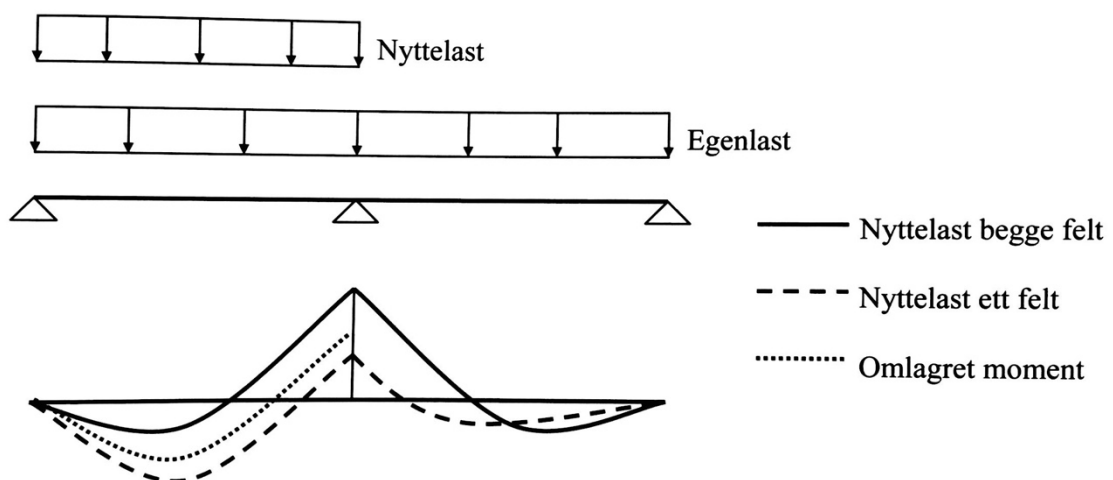
2.2 Lineær elastisk analyse med begrenset momentomlagring

Det antas vanligvis uopprisset tverrsnitt for beregning av krefter og momenter ved lineær elastisk analyse. Like før bruddgrensetilstand vil det mest påkjente tverrsnittet oppføre seg plastisk og krefter blir omfordelt til mindre påkjente deler. Faktorer som påvirker den reelle stivheten i bjelken er opprissing av betongen, variasjon i materielle egenskaper og materiell ikke-linearitet som følge av last.

Momentomlagring vil si at opplagermomentet reduseres samtidig som at feltmomentet øker for å opprettholde statisk likevekt. Momentomlagring krever at tverrsnittet er underarmert, slik at armeringen flyter før betongen knuses. Hvor mye momentomlagring som tillates avhenger av rotasjonskapasiteten

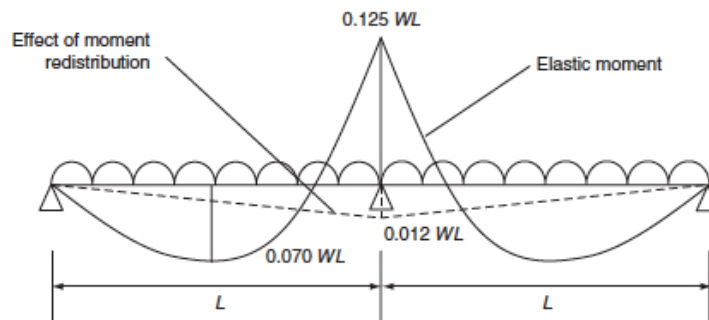
EC2 gir en forenklet metode for omfordeling av bøyemoment uten kontroll av rotasjonskapasitet. Det forutsettes kontinuerlige bjelker eller plater som hovedsakelig utsettes for bøyning og der forholdet mellom lengden av nabofelt er mellom 0,5 og 2. Hvor mye moment som kan omfordeles avhenger her av trykksonehøyden.

For en tofeltsbjelke vil støttemomentet reduseres og feltmomentet økes som vist i figur 2.2, avhengig av lasttilfelle.



Figur 2.2: Momentfordeling med omlagring for tofeltsbjelke [1]

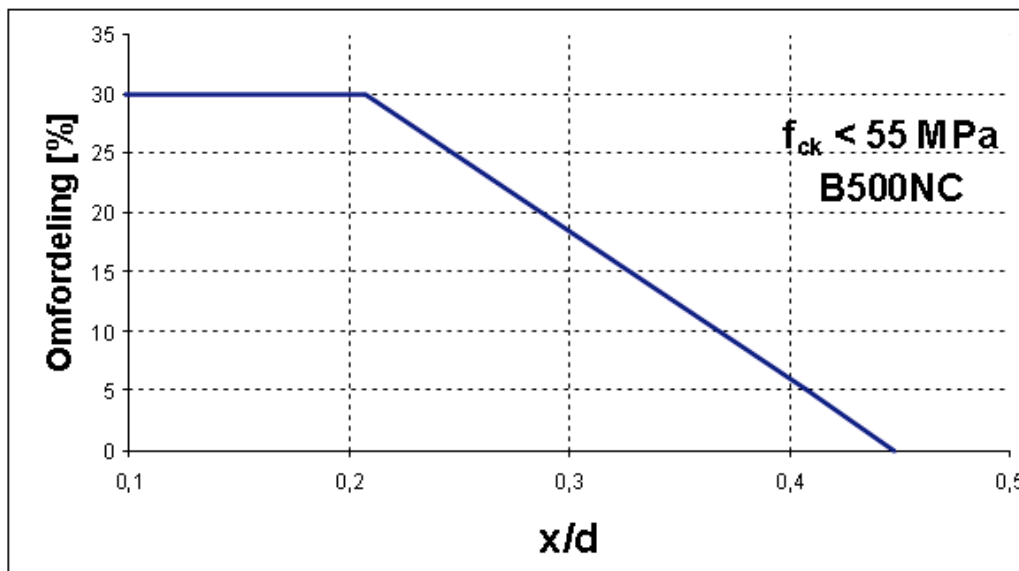
Virkingen av momentomlagringen varierer lineært utover bjelken, som visst i figur 2.3.



Figur 2.3: Momentfordeling med omlagring for tofeltsbjelke [4]

En av fordelene med momentomlagring er at toppunktet på momentfordelingskurven reduseres, noe som gjør at bjelken ikke behøver å armeres etter et spesielt stort støttemoment, som virker over en liten del av bjelken. Vi får en jevnere momentfordeling over bjelken.

Figur 2.4 viser grenseverdiene for momentomlagring.



Figur 2.4: Omfordelingsprosent med hensyn på trykksonehøyde

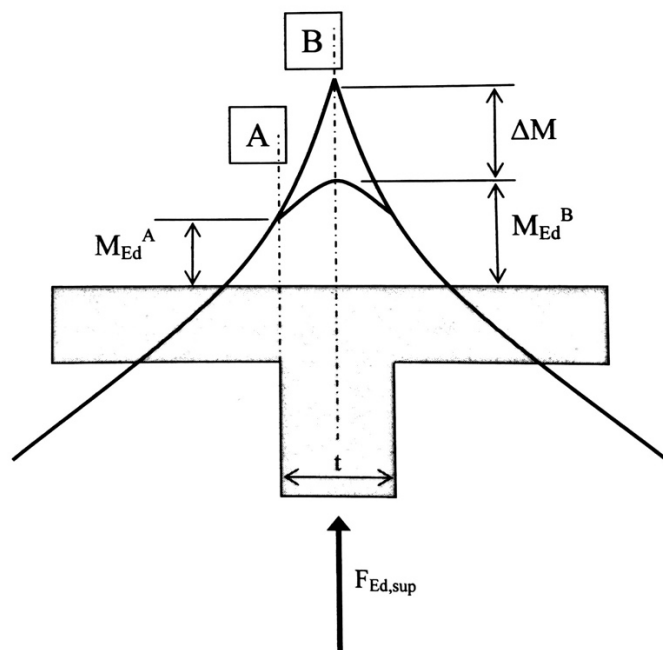
2.3 Reduksjon av støttemoment

EC2 5.3.2.2 gir to metoder for reduksjon av støttemoment, i punkt (3) og (4).

5.3.2.2 (3) er kun gyldig for bjelker og plater som er monolittisk forbundet med opplagere. Det kritiske dimensjonerende momentet kan settes lik momentet ved kanten av opplegget, snitt A (se figur 2.5). Momentet ved kanten av opplegget bør ikke være mindre enn 65% av fastinnspenningsmomentet.

5.3.2.2 (4) reduserer støttemomentet i senter opplegg, snitt B, ved å anta at opplagerkraften, $F_{Ed,sup}$, er jevnt fordelt med lasten, q , over oppleggsbredden, t , f.eks. en søyle eller vegg.

$$\text{Momentreduksjon: } \Delta M = q \times \frac{t}{2} \times \frac{t}{4} = F_{Ed,sup} \times \frac{t}{8}$$



Figur 2.5: Reduksjon av støttemoment [1]

2.4 Plastisk lastvirkningsanalyse

Elastisk dimensjonering tar utgangspunkt i at konstruksjonens kapasitet er fullt utnyttet da det begynner å flyte i det kritiske punktet i konstruksjonen. Dette gir ikke nødvendigvis maksimal kapasitet, altså den påkjenningen som fører til brudd i konstruksjonen. Den maksimale kapasiteten kan derimot finnes ved hjelp av plastisk analyse.

Analytisk plastisk analyse kan brukes til å modellere materialet som stivt plastisk. Ved hjelp av plastisitetsteoriens grenseteoremer kan man bestemme øvre og nedre grenser for bruddlasten. Øvre grenseteorem (det kinematiske teorem) gir en kapasitet som er større eller lik den korrekte verdi. Arbeidsbetraktning av en antatt kinematisk mulig mekanisme utføres ved å sette ytre arbeid lik indre plastisk arbeid. Teoremet benyttes ved flyteledd- og flytelinjeberegninger av henholdsvis bjelker/rammer og plater belastet normalt på eget plan. I en bjelke kan en mulig kinematisk mekanisme finnes ved at det innføres så mange plastiske ledd at den kollapser som en mekanisme. For en statisk bestemt bjelke er ett flyteledd tilstrekkelig for at mekanismen dannes, mens en én gang statisk ubestemt bjelke trenger to flyteledd.

EC2 5.6 beskriver en metode for plastisk analyse som virker som omfattende momentomlagring. Det stilles krav til stor rotasjonskapasitet. Det finnes to metoder for å forsikre seg om at konstruksjonen har tilstrekkelig rotasjonskapasitet. 5.6.2 beskriver en metode uten direkte kontroll av rotasjonskapasitet. 5.6.3 beskriver en metode med direkte kontroll av rotasjonskapasitet.

5.6.2 sier at det kan antas tilstrekkelig duktilitet for plastisk analyse hvis trykksonehøyden er begrenset etter følgende kriterier:

i) $\frac{x_u}{d} \leq 0,25$ for *betongfasthetsklasser* $\leq C50/60$

$$\frac{x_u}{d} \leq 0,15 \text{ for } \textit{betongfasthetsklasser} \geq C55/67$$

ii) armeringsstål klasse B eller C

- iii) forholdet mellom momentene ved innvendige opplegg og momentene i feltet bør være mellom 0,5 og 2

5.6.3 sier at dersom kriteriene i 5.6.2 ikke er oppfylt er det nødvendig å verifisere den plastiske rotasjonskapasiteten til konstruksjonen i forhold til den faktiske rotasjonen. Metoden gjelder for kontinuerlige bjelker og en-veis plater. Den plastiske rotasjonskapasiteten kan utledes ved integrasjon av den plastiske kurvaturen langs lengden. Rotasjonskapasiteten fremgår av figur 2.6.

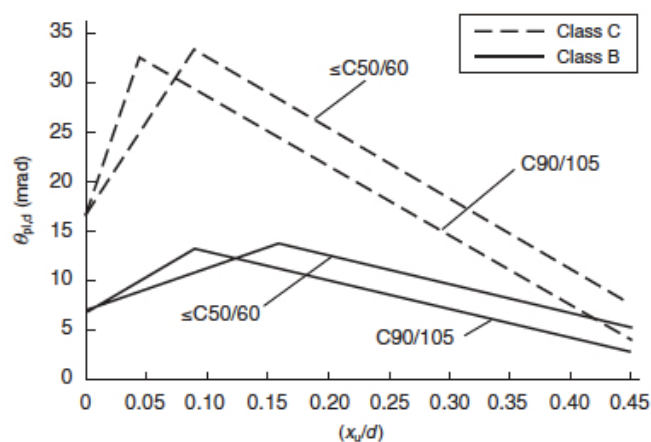
$$\theta_{pl,d} = \int_{-L_p/2}^{L_p/2} \frac{\Delta\varepsilon(a)}{d - x(a)} da$$

$\Delta\varepsilon(a)$ - midlere armeringstøyning som overskrider flytetøyningen

d – effektiv høyde

$x(a)$ – trykksonehøyde

a – avstand innenfor lengden L_p



Figur 2.6: Grunnverdi for tillatt rotasjon [5]

3 Ikke-lineær analyse

3.1 Generelt om elementmetoden og ikke-lineær analyse

Elementmetoden eller elementanalyse er en numerisk løsning, det vil si at det er en tilnærming av eksakt løsning. På engelsk brukes begrepene *finite element analysis* (FEA) eller *finite element method* (FEM), som er mer beskrivende enn den norske versjonen. Tanken bak elementmetoden er å dele opp det som skal analyseres i *finite* elementer, eller små deler. Disse små delene er elementene forbundet sammen av noder. For konstruksjonsanalyse deles hver enkelt bjelke, plate, skive, etc. opp i flere elementer som settes sammen for å finne den totale responsen til konstruksjonen som analyseres. Hvert element får dermed en stivhet som kan representeres av en stivhetsmatrise. Den enkelte elementstivhetsmatrikes størrelse avhenger av hvor mange frihetsgrader elementet har. Frihetsgradene er i nodene og kan være både translasjonsfrihetsgrader og rotasjonsfrihetsgrader. Hver elementstivhetsmatrise settes sammen til en global stivhetsmatrise som er relatert til globale frihetsgrader. Dette gir likevektslikningen bestående av stivhetsmatrisen \mathbf{K} , forskyvningsvektoren \mathbf{u} og ytre kraftvektor \mathbf{f} , likningen løses med hensyn på de ukjente forskyvningene, se ligning [1]. Da kan tøyninger og spenninger regnes ut.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \qquad \text{Ligning [1]}$$

Ved bruk av ikke-lineær analyse i elementmetoden (NFEM) innføres såkalt ikke-lineariteter til modellen for å få en enda mer nøyaktig løsning. Ofte gjennomføres ikke-lineær analyse når en vet resultatene ikke tilfredsstillende generell elastisitetsteori, som f.eks. store deformasjoner, i lineær-elastisk teori er det som kjent forutsatt små deformasjoner. Dette gjør at konstruksjonen har geometriske ikke-lineariteter. Andre ikke-lineariteter som benyttes i konstruksjonsanalyse er ikke-lineære materialmodeller og randbetingelser. Plastisitet er eksempel på en ikke-lineær materialoppførsel. For betongkonstruksjoner er det situasjonen som oppstår i forbindelse med opprissing av tverrsnittet som er den største motivasjonen for å innføre ikke-lineariteter. Riss er en ikke-lineær oppførsel som er ønskelig i forbindelse med dimensjonering av betongkonstruksjoner, slik at armering flyter og tar opp strekk-spenningene. Ved ikke-lineær analyse fører det til at leddene i ligning [1] er avhengig

av forskyvningen som oppstår, som fører til at systemet som nå skal løses har form som ligning [2].

$$K(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{Ligning [2]}$$

Dette gjør at både stivhetsmatrisen og ytre last må være i likevekt i den faktiske forskyvningen. Løsning av dette systemet må derfor løses iterativt.

3.2 Løsningsmetode for ikke-lineær analyse

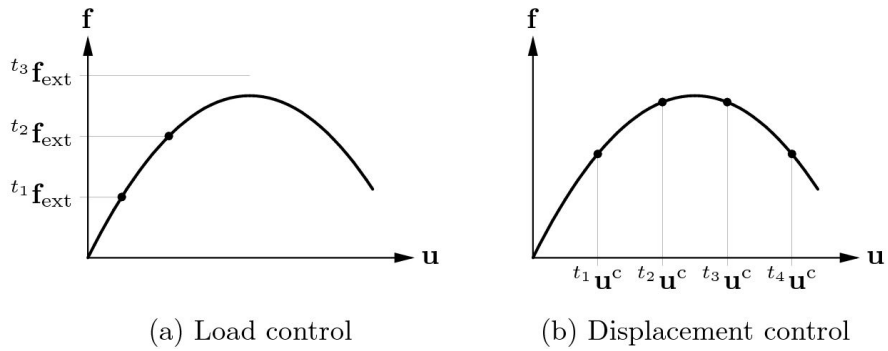
For at likevekt skal være tilfredsstillt i ligning [2], benytter elementmetodeprogrammet DIANA seg av en inkrementell-iterativ løsningsmetode. Lastene settes på som last-inkremitter, altså ikke full last umiddelbart slik som i lineær analyse. Det vil si at de indre kreftene alltid skal være i likevekt med de ytre kreftene og tilfredsstillte randbetingelsene, for hvert inkrement som vist i ligning [3].

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext} \quad \text{Ligning [3]}$$

Her er gjerne den indre kraftvektoren avhengig av tidligere forskyvninger, som f.eks. plastisitet og ved store deformasjoner. Deretter settes neste last-inkrement på, og programmet itererer frem til likevekt er oppnådd. Det finnes en rekke ulike løsningsmetoder, de som er valgt å beskrives her er de som er brukt videre i oppgaven.

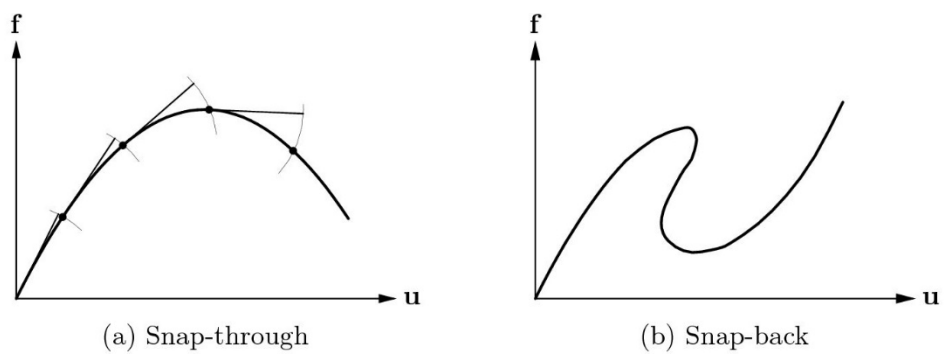
3.2.1 Inkrementell prosedyre

I den inkrementelle prosedyren i en ikke-lineær analyse velges en andel av lasten som påføres konstruksjonen, det sjekkes at det er i likevekt og neste andel av last påføres. Dette kan gjøres ved å bruke lastkontroll eller forskyvningskontroll. Når lastkontroll benyttes settes de ytre kreftene på og korresponderende forskyvning funnet. Forskyvningskontroll setter på en foreskrevet forskyvning og finner den ytre lasten. I Figur 3.1 er prinsippet vist.



Figur 3.1: Last- og forskyvningskontroll [7]

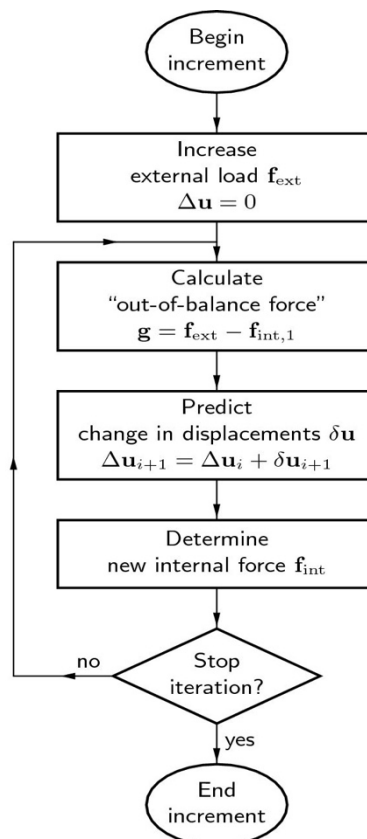
Når last-forskyvningskurven har vende- og grensepunkter, mislykkes last- og forskyvningskontroll å beskrive oppførselen videre. Dette kan løses med buelengde-metoden i DIANA. Buelengde-metoden klarer å beskrive last-forskyvningskurven videre, selv etter vende- og grensepunkter vist i Figur 3.2.



Figur 3.2: Last-forskyvningskurve [7]

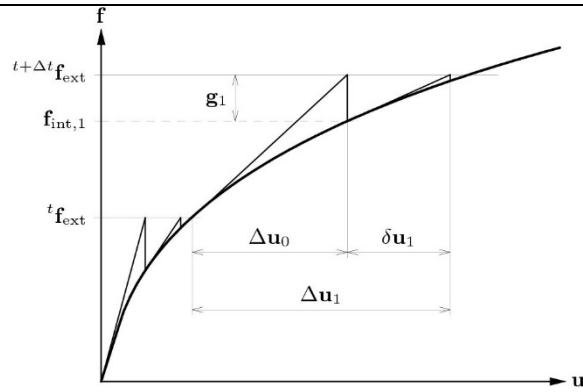
3.2.2 Iterasjonsprosedyre

For hvert inkrement gjøres flere iterasjoner for å sørge for likevekt og korrekt forskyving for den aktuelle ytre last. Iterasjonene foregår helt til konvergens, der et valgt kriterium er satt. Flytskjemaet i Figur 3 viser iterasjonsprosedyren.



Figur 3.3: Iterasjonsprosedyre [7]

Det finnes en rekke ulike iterasjonsprosedyrer tilgjengelig i DIANA. Den som er brukt her er Standard Newton-Raphson (NR). Denne prosedyren oppdaterer stivheten ved hver iterasjon, det gjør at det kreves relativt få iterasjoner for å oppnå likevekt. Figur 3.3 viser hvordan iterasjonsprosessen i NR foregår.



Figur 3.4: Newton-Raphson [7]

3.3 Materialmodeller

Armert betong innehar ikke-lineære egenskaper når påført last overgår dimensjonerende last. Kjennetegnene i forbindelse med den ikke-lineære oppførselen er i hovedsak riss og betongens heft med armeringen. Krefter som fører til opprissing av betongen overføres til armeringen, som besitter både høyere strekkapasitet og bedre plastiske egenskaper enn betongen. DIANA tilbyr flere muligheter for å modellere denne type effekter, her vil derfor kun de aktuelle modellene som er brukt i analysene bli beskrevet. For hver modell er spenningene (σ) i hvert integrasjonspunkt en funksjon av tøyningene (ϵ) slik som vist i ligning 4. Materialmatrisen, \mathbf{D} , er definert som i ligning [5]. Og er med i oppbyggingen av stivhetsmatrisen, \mathbf{K} , som brukes.

$$\{\sigma\} = \{\sigma(\epsilon)\} \quad \text{Ligning [4]}$$

$$[\mathbf{D}] = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right] \quad \text{Ligning [5]}$$

For hver iterasjon av likevektsligningen mellom indre og ytre krefter, blir elementstivhetsmatrisen oppdatert basert på forrige material matrise.

3.3.1 Rissmodeller

I hovedsak er det rissdannelse som er den største bidragsyteren til ikke-lineær oppførsel i armert betong, og det er derfor naturlig å gå grundigere inn på denne egenskapen. Rissdannelse i armert betong er en geometrisk ikke-lineæritet i forbindelse med rissdannelse mellom elementene i NFEM. Både diskret- og fordelt rissmodell har blitt brukt opp igjennom årene for å idealisere rissdannelse i elementnettet. Diskret rissmodell splitter to naboelementer i deres felles node når riss oppstår og danner dermed en fysisk deling mellom to elementer. Denne modellen har vist seg å være nokså tidskonsumerende da elementnettet må oppdateres og stivhetsmatrisen må omorganiseres når et riss oppstår. I analysene er det derfor valgt en fordelt rissmodell, og av den grunn lar vi være å gå ytterligere inn på den diskrete rissmodellen.

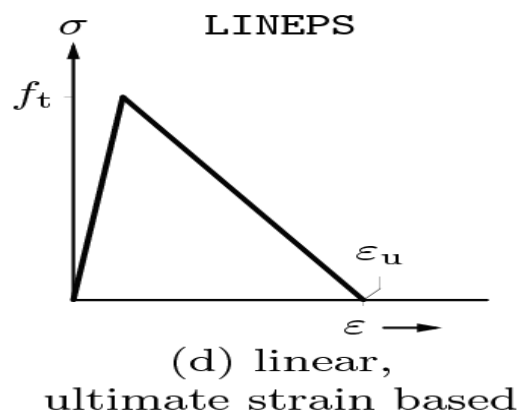
I den fordelt rissmodellen antas det at elementnettet, og da også betongen, forblir et kontinuerlig materiale der modellen medregner at det har oppstått et riss, for så å modifisere material stivhetsmatrisen og fordeler effekten av risset utover elementene. For både fast og roterende riss orientering vil denne modellen kunne brukes. Et kjennetegn ved den fordelte rissmodellen er dekomponeringen av tøyingsvektoren (ϵ) inn i en elastisk tøyingsvektor (ϵ_{EL}) og en riss-tøyingsvektor (ϵ_{CR}). Tøyning i forbindelse med riss blir som i ligning [6].

$$\epsilon = \epsilon_{EL} + \epsilon_{CR} \quad \text{Ligning [6]}$$

3.3.2 Strekkmodell

Betong alene innehar lav strekkfasthet, men har derimot høy trykkfasthet. I ikke-lineær elementanalyse av betong bidrar derimot den lave strekkkapasiteten til det totale kapasitetsbildet. Effekten av strekkkapasiteten blir derfor viktig å beskrive nøyaktig for å få med det korrekte bidraget.

I denne modellen sier man at strekkspenninger kan overføres for små riss grunnet betongens ruge overflate. Strekkapasiteten til betongen er bevart etter å ha nådd strekkapasiteten og denne effekten blir kalt Tension softening. Utviklingen av den bevarte kapasiteten kan modelleres med forskjellige matematiske uttrykk. I analysene er det brukt opsjonen "linear softening", som fører grafen lineært nedadgående fra nådd strekkapasitet til en verdi, ϵ_u , som er den ultimate tøyningen i betongen. Ultimate strain based baseres på en gitt tøyingsverdi som begrenser tøyingsrommet hvor det er spenninger i betongen etter nådd strekkapasitet ($f_t = 1.134\text{MPa}$). Ved oppnådd ultimate tøyning, innehar betongen ingen resterende styrke som videre resulterer i dannelse av et riss.

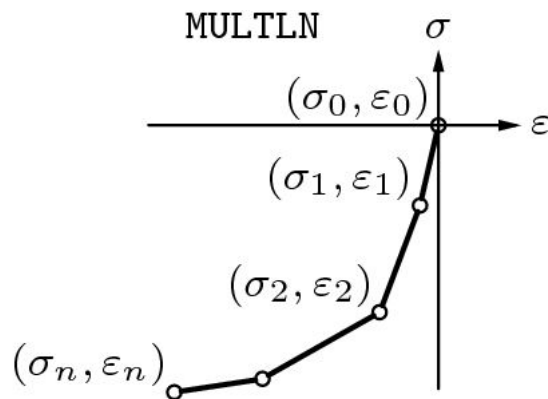


Figur 3.5: Linear Tension softening, ultimate strain based [7]

3.3.3 Trykkmodell

I total strain-crack model er trykkegenskapene en ikke-lineær funksjon mellom spenninger og tøyninger. Det finnes forskjellige matematiske funksjonstyper som uttrykker utviklingen til kapasiteten i betongen. I denne oppgaven er det brukt multi-lineær trykkmodell hvor spenning- og tøyingsverdier er definert i en innhentet fil ved gjennomkjøring av analysen, se figur 3.6. For multi-lineær trykkmodell vil spenningen i betongen utvikle seg ikke-lineært etter at f_{cd} er nådd for økende tøyning. Ved bruk av multi-lineær trykkmodell er det valgt at betongstyrken ikke øker ved økende tøyning (no lateral confinement behaviour) samt ingen reduksjon av kapasiteten til betongen ved rissdannelse (no lateral cracking reduction).

Spenningen ved brudd i betongen (dimensjonerende trykkfasthet, f_{cd}) er satt til 17Mpa, grunnet B30 kvalitet på betongen.



(e) multi-linear

Figur 3.6: Multilineær trykkmodell [7]

3.3.4 Armeringsstål

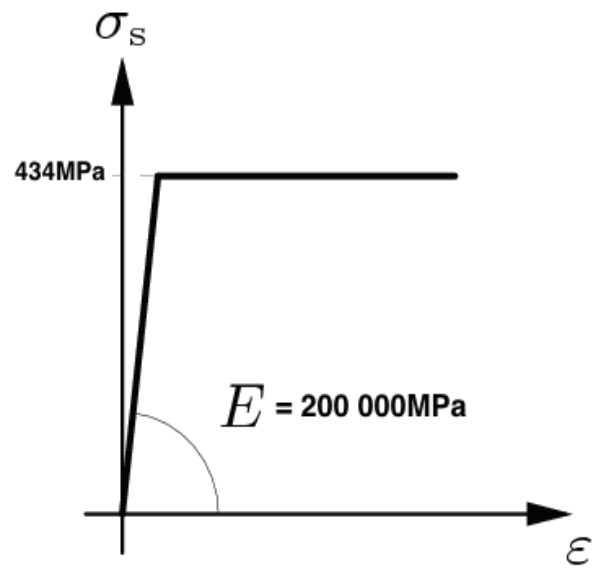
DIANA tilbyr flere matematiske funksjonstyper for beskrivelse av den materielle oppførselen til stål. Armeringsstålet implementert i modellene følger von Mises flytekriterium, ideell plastisk materialoppførsel med flytespenning lik 434MPa. E-modulen er satt til 200 000MPa, som resulterer i en flytetøyning lik 2,17‰. For tøyninger mindre enn flytetøyningen, følger spenningsutviklingen en lineær utvikling med stigningstall lik E-modulen. For økende tøyning større enn flytetøyning, vil armeringsspenningen være konstant lik 434MPa.

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = 200\,000\text{MPa}$$

$$\sigma = E * \varepsilon \text{ for } \varepsilon < 2,17\text{‰}$$

$$\sigma = 434\text{MPa for } \varepsilon \geq 2,17\text{‰}$$

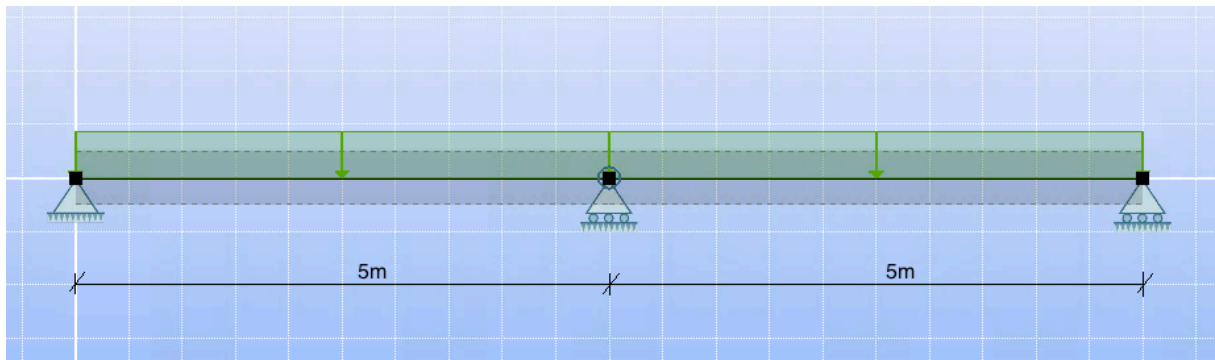


(b) ideal plasticity

Figur 3.7: Spennings-tøyningsdiagram, ideellt plastisk, armeringsstål [7]

4 Analyse av tofelts bjelke

Det skal gjøres lineære analyser av en tofeltsbjelke med jevnt fordelt belastning ved håndberegning og i rammeanalyseprogrammet FAP-2D. Disse resultatene skal sammenlignes med ikke-lineær analyse i FEM-programmet DIANA.



Figur 4.1: Tofelts bjelke

4.1 Grunnlag for beregninger

Følgende geometri og materialegenskaper gjelder for tofelts-bjerkene i dette kapitlet.

$$L = 10m , \quad b = 300mm , \quad h = 500mm$$

$$\text{Betong: } B30 , \quad f_{ck} = 30MPa , \quad \alpha_{cc} = 0,85 , \quad \gamma_c = 1,5 , \quad c_{nom}$$

$$\text{Trykkfasthet: } f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \times f_{ck}}{\gamma_c} = 17MPa$$

$$\text{Armering: } B500NC , \quad f_{yk} = 500MPa , \quad \gamma_s = 1,15 , \quad E_s = 200000MPa$$

Flytespenning: $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 434 \text{MPa}$

Effektiv høyde: $d = h - c_{nom} - \frac{\emptyset}{2} = 455 \text{mm}$ (med utgangspunkt i $\emptyset 20$ armering)

Balansert armering:

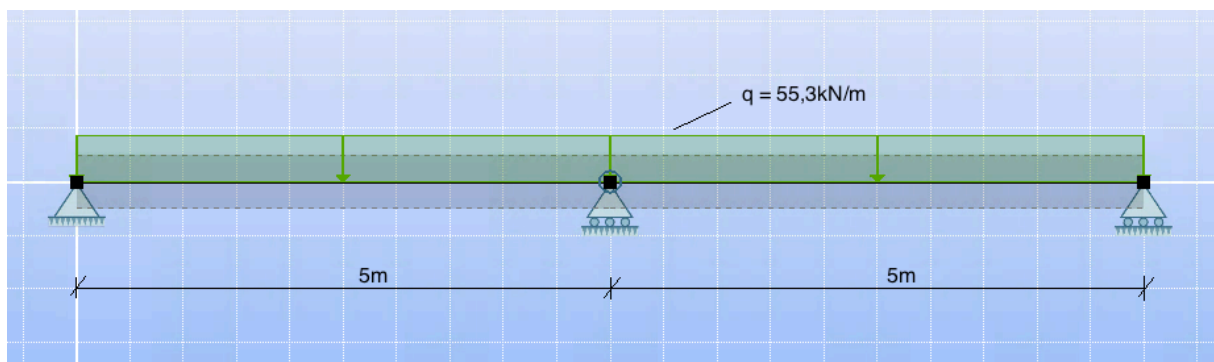
$$\varepsilon_{cu} = 0,0035, \quad \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = 0,00217$$

$$\alpha_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} = 0,62$$

$$A_{s,bal} = \frac{0,8 \times f_{cd} \times b \times d \times \alpha_b}{f_{yd}} = 2652 \text{mm}^2$$

4.2 Symmetrisk armert bjelke

Følgende modell er modellert med symmetrisk armering. Det er lagt dimensjonerende armering med $942,5\text{mm}^2$ ($3\emptyset 20$) i overkant og underkant langs hele bjelkens lengde. Figur 4.2 viser bjelken geometri, randbetingelser og ytre last. Valget av symmetrisk armering skyldes enkelheten av modelleringen i DIANA, som har den fordel at resultatene skal være trygge og sammenligne med lineære resultater uten store avvik.



Figur 4.2: Tofelts bjelke

Armering:

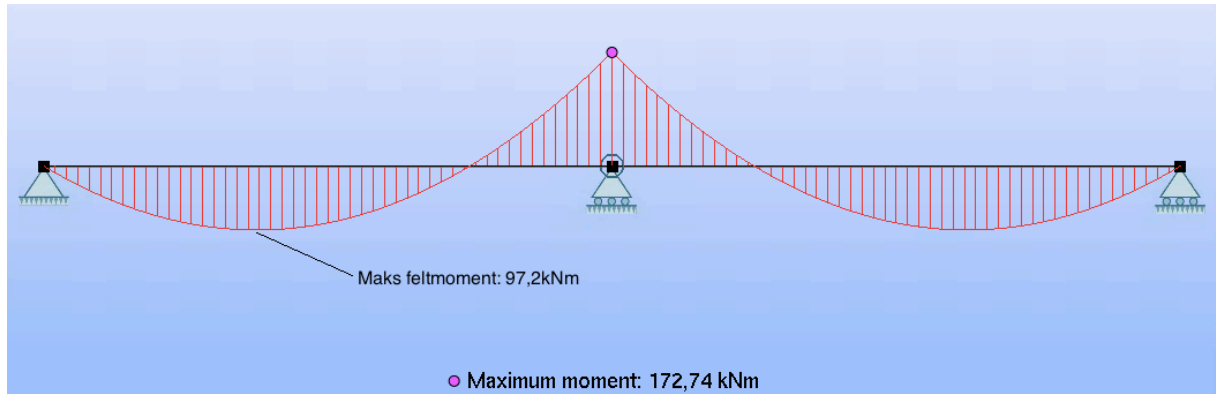
$$A_s = 942,5\text{mm}^2 < A_{s,bal} \rightarrow \text{underarmert tverrsnitt}$$

$$\alpha = \frac{f_{yd} \times A_s}{0,8 \times f_{cd} \times b \times d} = 0,22$$

$$M_{Rd} = 0,8 \times 1 \times (1 - 0,5 \times 0,8 \times \alpha) \times \alpha \times f_{cd} \times b \times d^2 = 169,5\text{kNm}$$

4.2.1 Lineær statisk analyse

Bjelken er modellert i FAP-2D, som vist i figur 4.3. Dimensjonerende støtte- og feltmoment er hentet ut av analyseresultatene.



Figur 4.3: Momentdiagram

Bjelkens kapasitet ble regnet ut ved hjelp av regnearket i tabell 4.1. Regnearket er laget i Excel og er basert på lineær elastisk teori og beregningsmetoder fra læreboken til Sørensen [1].

| | |
|---|----------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 226,022 |
| y2: [mm] | 205 |
| y3: [mm] | 205 |
| Høyde: [mm] | 500 |
| Effektiv høyde: [mm] | 455 |
| Bredde: [mm] | 300 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Armering: [mm ²] | 942,5 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 59,944 |
| Trykkarmeringsyøning: | 0,000872541 |
| Strekkarmeringstøyning: | 0,023066525 |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 174,51 |
| Strekspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 244 570,94 |
| T: [N] | 164 474,06 |
| S: [N] | 409 045,00 |
| Likevekt: [N] | -0,0000499 |
| Moment: [Nmm] | 172 849 932,03 |
| q: [N/mm] | 55,312 |

Tabell 4.1: Excel-regneark, symmetrisk armert bjelke

| | |
|--|-----------------------------------|
| Momentkapasitet: | $M_{Rd} = 172,9kNm$ |
| Maksimal ytre last med nyttelast i begge felt: | $q_{Rd} = 55,3kN/m$ |
| Trykksonehøyde: | $\alpha d = 59,9mm$ |
| Trykkarmeringstøyning: | $\varepsilon_{sc} = 0,87\text{‰}$ |
| Strekkarmeringstøyning: | $\varepsilon_{st} = 23,1\text{‰}$ |

Momentkapasiteten er noe høyere enn uten trykkarmering. Det er også relativt store tøyninger i strekkarmeringen.

4.2.2 Omlagring av støttemoment

For å redusere støttemomentet og få en jevnere momentfordeling utover bjelken brukes avsnitt 5.5 i EC2, som tar for seg omlagring av støttemoment, som beskrevet i kapittel 2.2.

$$\delta \geq k_1 + k_2 \times \frac{x_u}{d}, \quad k_1 = 0,44, \quad k_2 = 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{\varepsilon_{cu2}} \right) = 1,25$$

$$\alpha_{støtte} = \frac{x_u}{d} = \frac{59,9}{455} = 0,13$$

Maksimal omlagring: $\delta \geq 0,44 + 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{0,0035} \right) \times 0,13 = 0,60$

$$\delta \geq k_5 = 0,7$$

→ Kan omlagre 30% av støttemomentet.

$$M_{Ed, støtte, Red} = M_{Ed, støtte} \times 0,70 = 172,9 \times 0,70 = 121 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = M_{Ed, støtte} - M_{Ed, støtte, Red} = 172,9 - 121 = 51,9 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed, felt, økt} = M_{Ed, felt} + \frac{\Delta M}{2} = 97,2 + \frac{51,9}{2} = 123,2 \text{ kNm}$$

Som følge av at virkningen av omlagringen er lineær forenkler vi ved å si at $M_{Ed, felt}$ øker med $\frac{\Delta M}{2}$.

Dersom det tas hensyn til omlagring kan armeringstverrsnittet reduseres. Regnearket i tabell 4.2 gir dimensjonerende armeringsareal med maksimal omlagring til å være 644 mm^2 .

| | |
|--|-------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 228 |
| y2: [mm] | 205 |
| y3: [mm] | 205 |
| Høyde: [mm] | 500 |
| Effektiv høyde: [mm] | 455 |
| Bredde: [mm] | 300 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Strekkarmering: [mm ²] | 644 |
| Trykkarmering: [mm ²] | 644 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 54,1 |
| Trykkarmeringstøyning: | 0,059 % |
| Strekkarmeringstøyning: | 2,594 % |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 118 |
| Strekkspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 220 728 |
| T: [N] | 75 828 |
| S: [N] | 279 496 |
| Likevekt: [N] | 0,00 |
| Moment: [Nmm] | 123 246 810 |

Tabell 4.2: Excel-regneark, omlagret

De ikke-lineære analysene er foretatt i programmet DIANA. Resultatene fra de ikke-lineære analysene sammenlignes med lineære analyser utført i FAP-2D og ved håndregning.

Diagrammene under viser støttemoment og armeringstøyninger ved midtstøtten og maksimalt feltmoment, samt armeringsspenninger på strekksiden for midtstøtte og felt.

Forklaring av bjelkemodelleringen i DIANA:

DIANA modellen er modellert som en tofeltsbjelke der hvert felt er oppdelt i 50 bjelkeelementer (L7BEN). Påfølgende diagrammer gir verdiene til element 15-25 og 50 som henholdsvis representerer maksimalt felt- og støttetmoment. Variasjonen i elementene 15-25 for feltmomentet skyldes endringen for lokasjon av maksmoment. Maksimalt moment rundt støtten vil av statiske grunner for alle tilfeller opptre i element 50. Hvert element er tilknyttet det bestemte tverrsnittet (H:500mm,B:300mm) der høyden er delt opp i 11 lameller, som er den maksimale oppdelingen av høyden. Mellom hver lamell etableres det integrasjonspunkter som muliggjør den ikke-lineære analysen. Tverrsnittet er videre tilegnet materialeegenskaper som fremgår av de lineære utregningene.

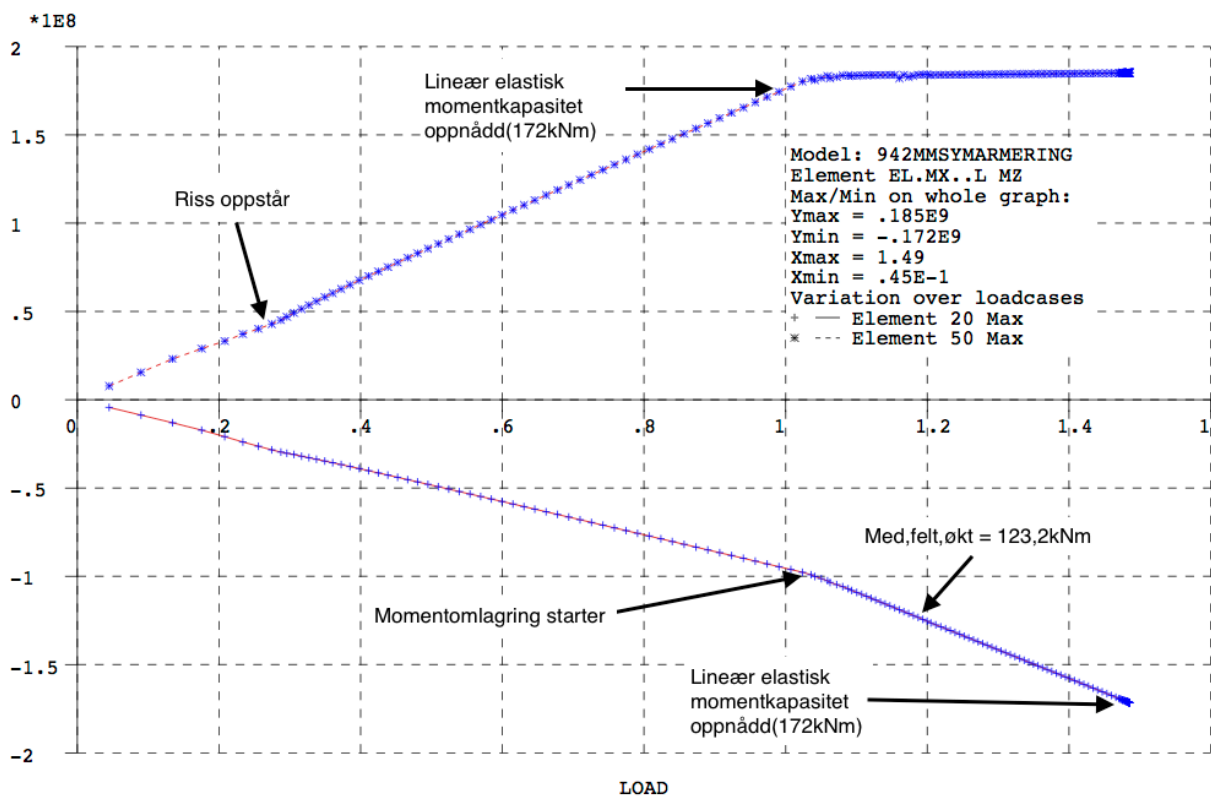
Tofeltsbjelken er opplagret for hver femte meter med en horisontal forskyvningsbegrensning i venstre ende. Dette fører til symmetrisk oppførsel om midtopplageret. Opplagrene er representert som punktkrefter direkte i nodene mellom elementene. Resultatene i analysene genereres fra samme statiske beregningsmetoder som ved FAP-2D og er av den grunn direkte sammenliknbare.

I analysene er 2,5%-5% av dimensjonerende last (q_{Ed}) påført bjelken for hvert lasttrinn, dette er videre utført 130-150 ganger for å overgå dimensjonerende last som resulterer i ikke-lineære resultater. Den prosentvise variasjonen i lasttrinnene er brukt for optimalisering av analyseresultater. Ulik avstand i x-retning mellom koordinatene i diagrammene er et resultat av forskyvningskontroll som er valgt i analyseinnstillingene for den ikke-lineære analysen. Som det også fremkommer av informasjonsfeltet i diagrammene, representerer den positive grafen støttemomentet mens den negative grafen representerer feltmomentet. Forskjellig fortegn skyldes motsatt retning på momentet for de respektive elementuttakene. Dette stemmer overens med statiske beregningsmetoder.

Den ikke-lineære trykkmodellen for betongen har av analytiske hensyn blitt definert med en stor tøyingsverdi ved brudd. For at brudd i betongen i trykksonen ikke skal føre til avbrutt analyse før omlagringseffekten opptrer, viste analyser uten dette hensynet at stor tøyingsverdi ved brudd var nødvendig.

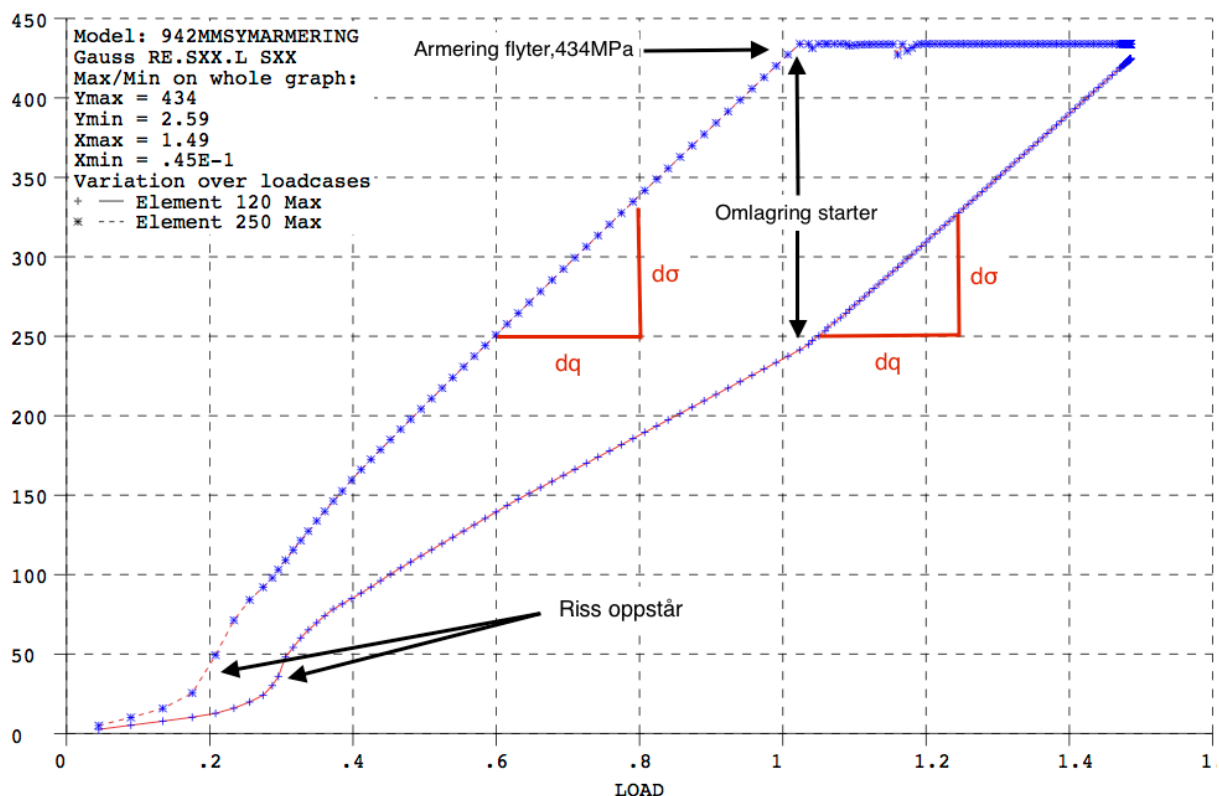
Tilfelle 1:

Som det fremgår av tabell 4.1 fører utregning av likevekt i tverrsnittet til en symmetrisk armeringssituasjon med $942,5\text{mm}^2$. Dette fører til store tøyingsverdier (23‰) i strekkarmering og relativt små tøyingsverdier (0,8‰) i trykkarmering.



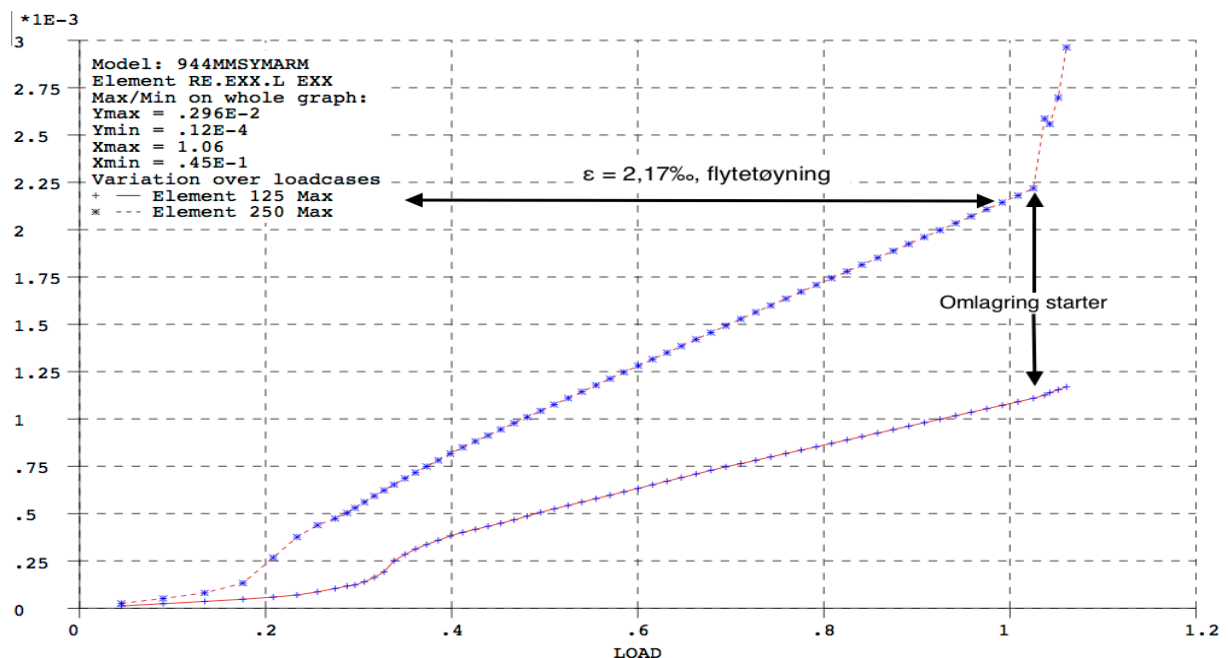
Figur 4.4: Momentkapasitet

Som det fremgår av figur 4.4 gir den ikke-lineære analysen samme momentkapasitet ved midtstøtten som den lineære analysen (se figur 4.3) ved 100% påført dimensjonerende last. Momentet får en konstant utvikling som følge av ideell plastisk oppførsel i armeringen. Etter flytning har bjelken ved midtstøtten ingen økende styrke til å ta opp ytterligere moment som følge av økende lastpåføring. Videre lastpåføring avhenger av at krefter må tas opp andre steder enn ved midtstøtten. Bjelken er symmetrisk armert og har kontinuerlig trukket armering over hele bjelken. Momentkapasiteten er av den grunn lik for hvert snitt over hele bjelkens lengde(10m). Ved oppnådd lineær elastisk momentkapasitet ved midtstøtten, er feltverrsnittet omtrent 72kNm fra bjelkens momentkapasitet. Omlagringseffekten begynner ved dette punktet(se figur 4.4) og fortsetter til momentkapasiteten i feltet er oppnådd(172kNm). Effekten er tydelig observerbar da stigningstallet til grafen for dette området er større og følger den tilsvarende lineære utviklingen til armeringsstålet. Maksimalt moment opptrer ved midtstøtten under omlagring.

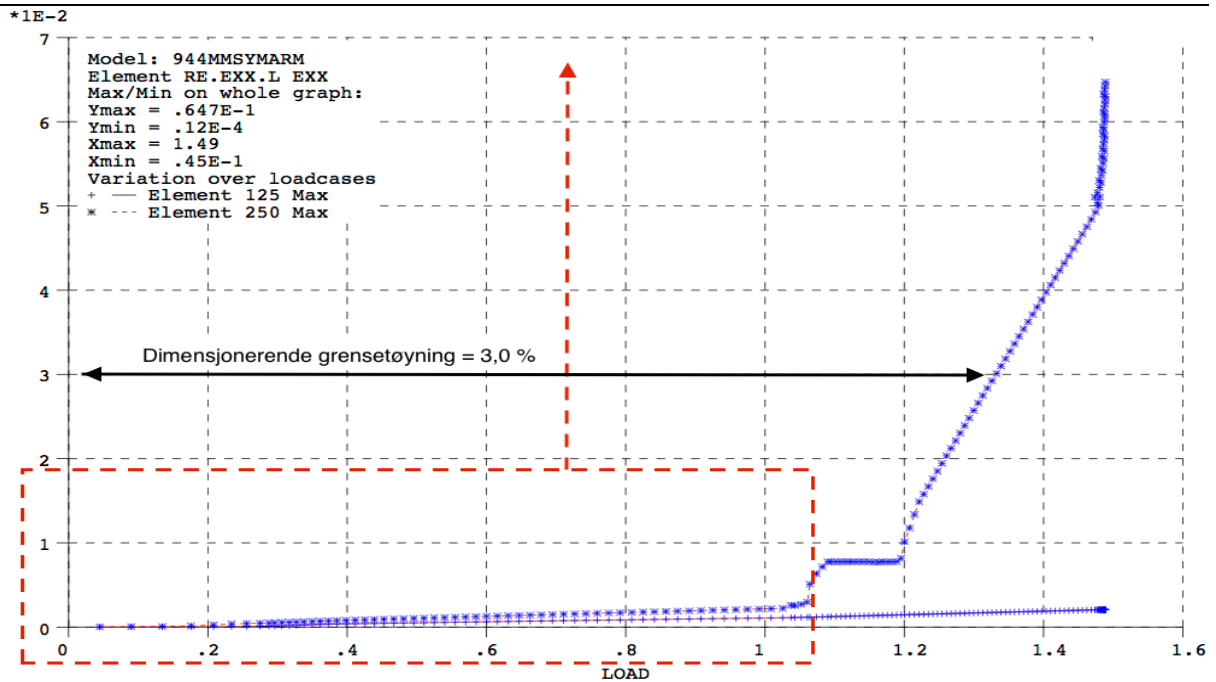


Figur 4.5: Armeringsspenning

Figur 4.5 viser armeringsspenningene for strekkarmeringen ved midtstøtten (Element 250) og i felt (Element 120). Ved 20% av q_{Ed} forekommer ikke-lineariteter grunnet rissdannelser, noe som også er synlig for momentdiagrammet i figur 4.4. Armeringen ved midtstøtten når flytning der momentkapasiteten ved midtstøtten får konstant utvikling og ikke er i stand til å ta opp ytterligere moment. Stigningstakten til armeringsspenningen i feltet øker ved dette punktet ettersom kreftene omfordres fra midtstøtten til feltet. Stigningstallet etter omfordelingsstart for felt er av lik verdi som stigningstallet for midtstøtten før omfordelingsstart. Sammenlikning av resultatene for moment og armeringsspenning gir en god verifisering av momentomlagringseffekten



Figur 4.6: Armeringstøyning

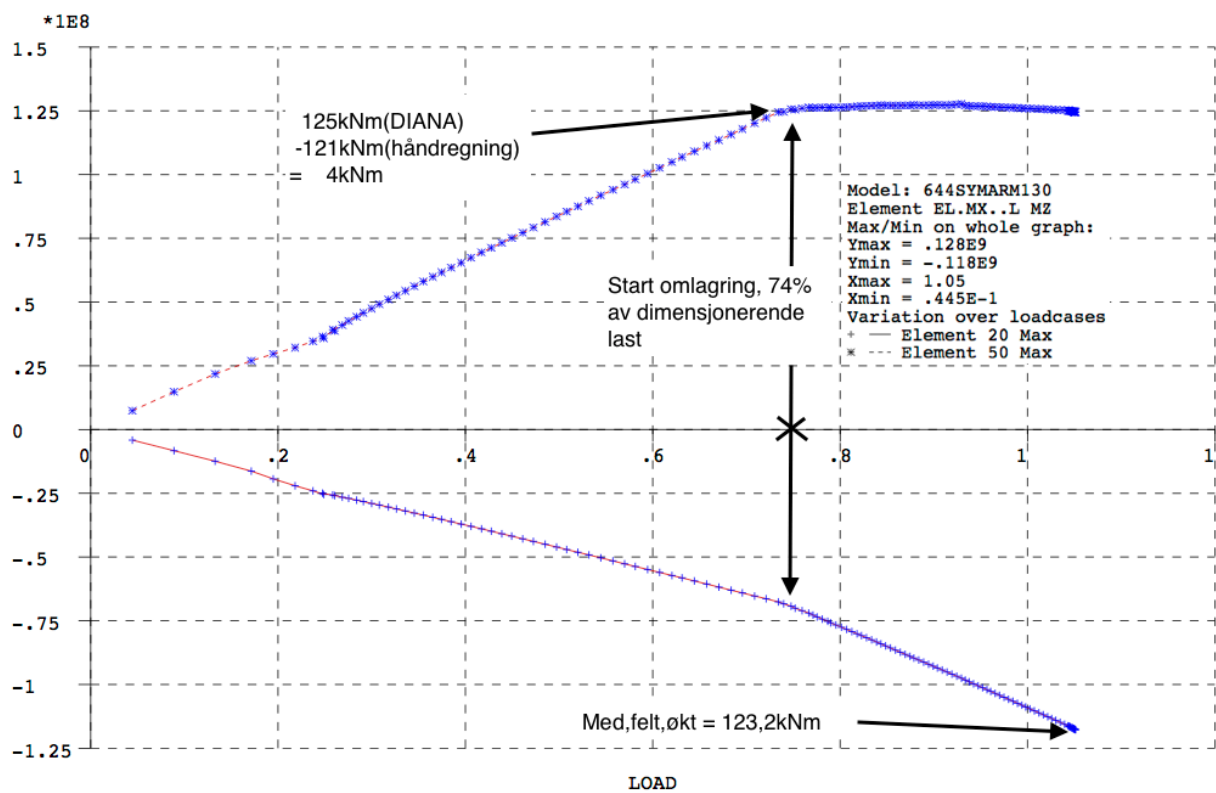


Figur 4.7: Armeringstøyning

Diagrammene ovenfor viser tøyningene i element 250 og 125 for henholdsvis midtstøtte og felt. Grunnet relativt stor spredningen i tøyningsverdiene, er resultatene delt inn i to diagrammer hvor antall laststeg er variert. Tøyningsverdiene på Y-aksene er i størrelsesorden promille og prosent for henholdsvis øverste og nederste diagram. Av øverste diagram flyter armeringen ved midtstøtten ved $\epsilon = 2,17\%$, som følge av materialmodellen definert av E-modul ($E = 200\,000\text{MPa}$) og flytespenning ($\sigma = 424\text{MPa}$). Ved omlagringsstart øker stigningstakten for tøyningene i felt, som følge av omlagring av krefter fra midtstøtte til felt, mens tøyninger ved midtstøtten holder seg konstant frem til 120% av q_{Ed} . Denne utviklingen observeres ikke i diagrammet for armeringsspenningene da materialegenskapen *ideell plastisk* er definert, som for økende tøyning ikke gir økende spenning etter flytetøyningen. Som følge av dette, vil tøyningsutviklingen for midtstøtten ha en lineær utvikling etter 120% av q_{Ed} grunnet en konstant pålastingsrate. Tabell NA.3.5(901) for armeringsklasse C gir en dimensjonerende grensetøyning $\epsilon_{ud}=3,0\%$ som definerer øvre grense for tøyningen i armeringen. For tilfelle 1 vil derfor den dimensjonerende grensetøyningen være dimensjonerende komponent for tverrsnittets momentkapasitet i bruksgrensetilstand. Momentkapasitet ved 3,0% tøyning er 145kNm.

Tilfelle 2

Som det fremgår av 4.3.2 tillates det reduksjon av armeringstverrsnittet uten reduksjon av dimensjonerende last. Ikke-lineær analyse med redusert armeringstverrsnitt der alle andre variabler er holdt konstant, er med tilsvarende fremgangsmåte som i tilfelle 1, figurert under. Dette for å undersøke og sammenlikne virkningen av omlagringseffekten i DIANA mot utregninger basert på EC2 5.5.

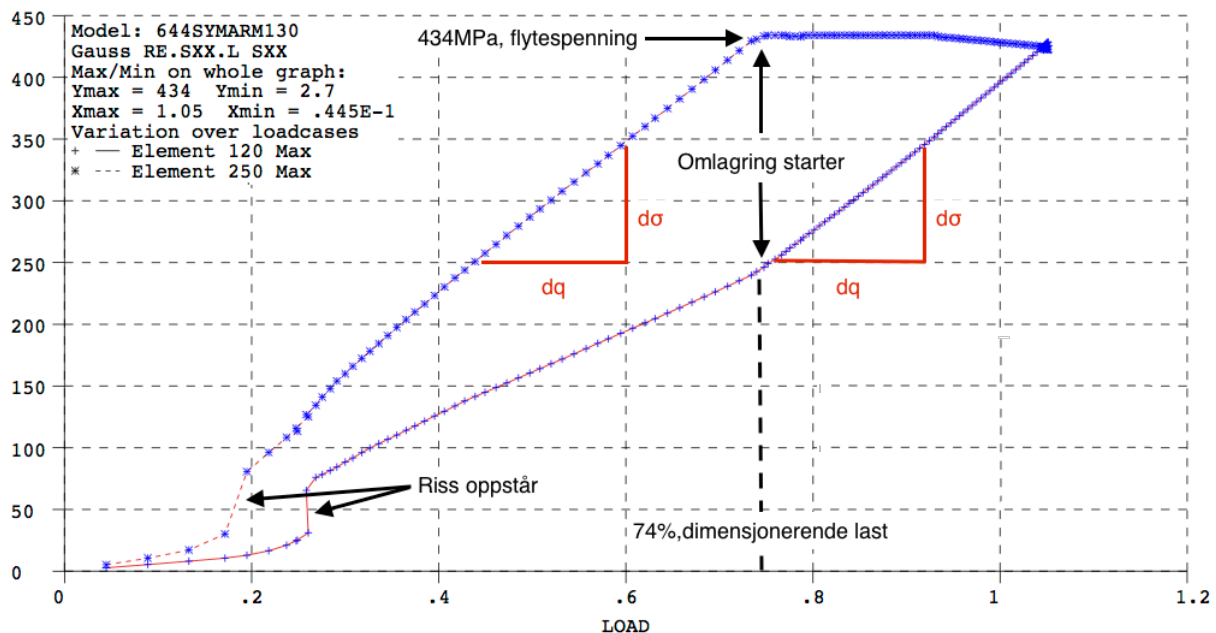


Figur 4.8: Momentkapasitet

Maksimalt moment i en tofelts bjelke med jevnt fordelt last vil oppstå ved midtstøtten. Det er årsaken til at den høyeste momentkapasiteten oppnås ved støtten, også når momentomlagring utnyttes. Som det fremgår av figur 4.8 , oppnås maksimal momentkapasitet ved 74% av q_{Ed} . Dette skyldes at tverrsnittet er dimensjonert for maksimal momentomlagring (30%) i henhold til lineær teori (se 4.3.2). Armeringen er den eneste komponenten i tverrsnittet som kan ta opp ytterligere krefter etter 70% av q_{Ed} , som videre fører til konstant momentkapasitet ved midtstøtten grunnet ideell plastisk oppførsel i armeringen.

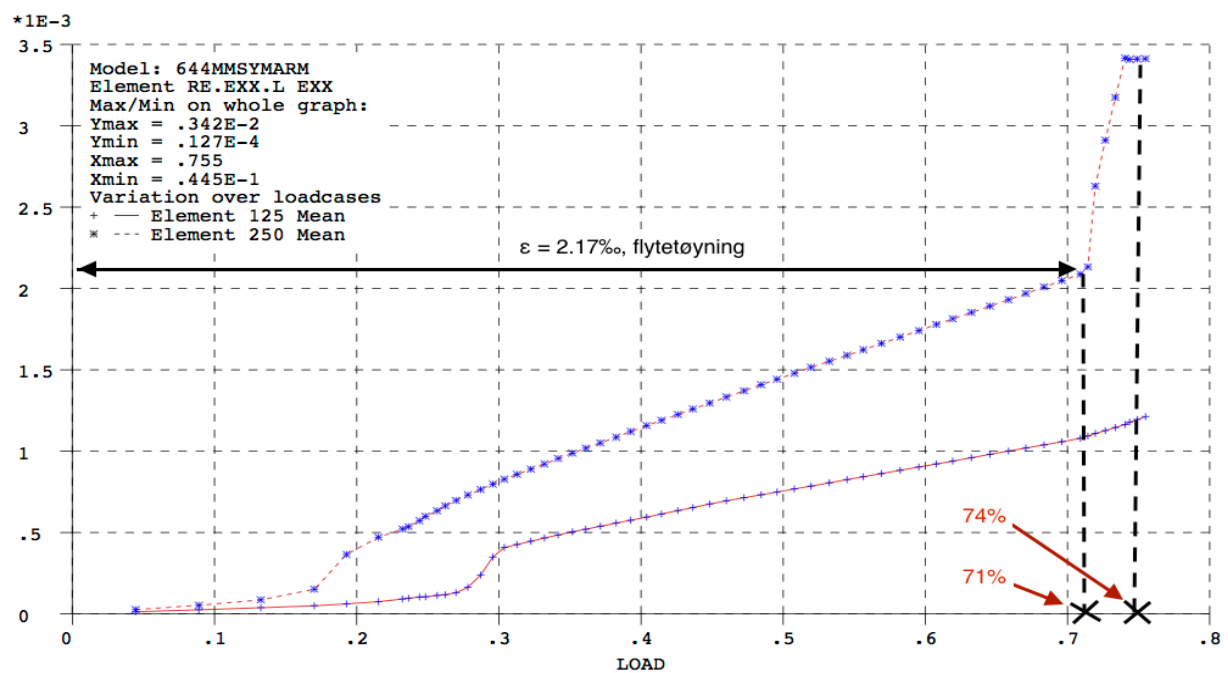
For feltmomentet kan det observeres samme utvikling som ved tilfelle 1. Etter 74% av q_{Ed} , øker stigningstallet grunnet omlagringseffekten. Basert på utregninger av 4.3.2, stemmer dette godt overens. Maksimal momentkapasitet i felt oppnås ved 105% av q_{Ed} .

Momentkapasitet for midtstøtten utregnet i DIANA gir 125-128kNm, der håndregning gir 121kNm, mens momentkapasiteten for felt utregnet i DIANA gir 118kNm, der håndregning gir 123.2kNm. Økningen og reduksjonen i momentkapasitet for henholdsvis midtstøtten og felt i DIANA, er faktorer som fører til at analysen ikke avsluttes ved 100% av q_{Ed} .

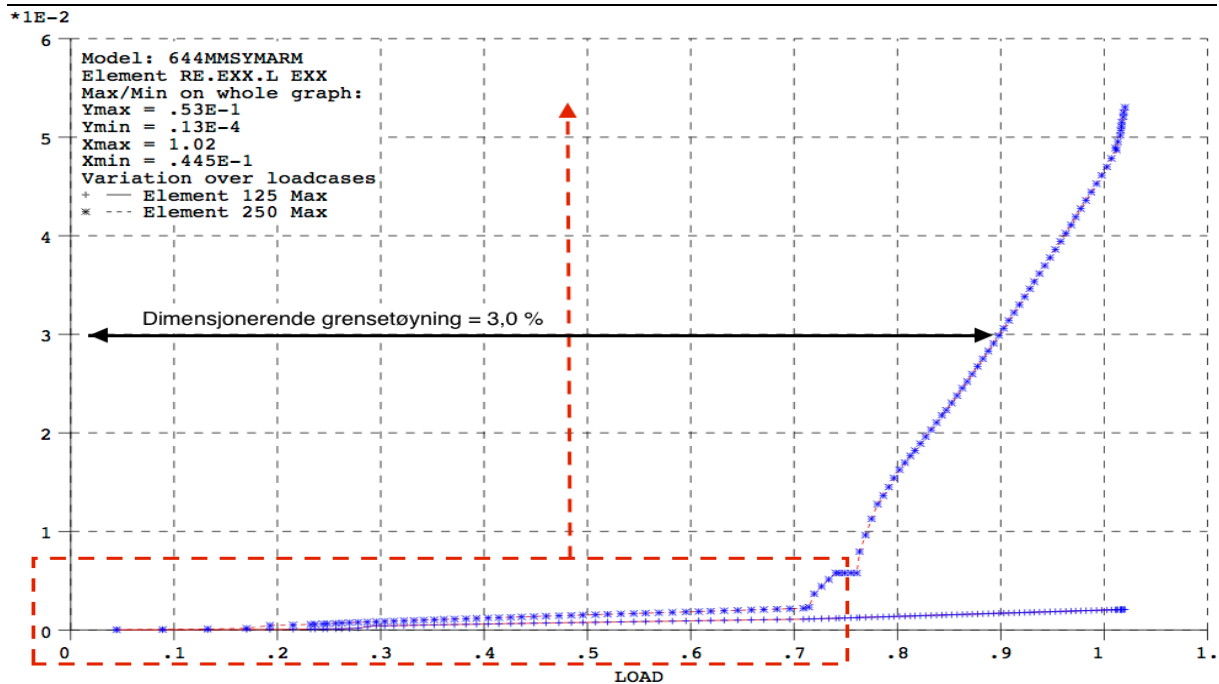


Figur 4.9: Armeringsspenning

Figur 4.9 viser armeringsspenningene for strekkarmeringen ved midtstøtten (Element 250) og i felt (Element 120). Spenningene for begge elementene følger samme utvikling som i tilfelle 1. Ved 74% av q_{Ed} når strekkarmeringen ved midtstøtten flytespenningen, der omlagring starter. Reduksjonen i dimensjonerende moment av 4.3.2 får en direkte innvirkning på lastfaktoren for initiert flytning ved midtstøtten tilsvarende momentreduksjonen. Dette grunnet det reduserte armeringstverrsnittet i kombinasjon med uendret lastsituasjon (55,3 kN/m). Analysen termineres ved 105% av q_{Ed} , som bekrefter utregningene av 4.3.2 og verifiserer omfordelingsteorien i praksis.



Figur 4.10: Armeringstøyning



Figur 4.11: Armeringstøyning

Figur 4.10 og 4.11 gir armeringstøyningene for strekkarmeringen ved midtstøtten (Element 250) og felt (Element 125). Resultatene er delt inn i to diagrammer av samme hensikt som i tilfelle 1. Tøyningsdiagrammene gir mer nøyaktig verdier for initiering av flytning ved midtstøtten enn diagrammet for armeringsspenningene (figur 4.9). Første laststeg etter 70% av q_{Ed} indikerer siste likevekt i tverrsnittet før flytning i armeringen ved midtstøtten. Armeringsspenningene ved indikerte 71% og 74% i figur 4.10 vil, grunnet ideell plastisk oppførsel, begge ha flytespenningen (434 MPa). Maksimal momentkapasitet ved midtstøtten i figur 4.8 vil av den grunn oppnås ved 74% av q_{Ed} som indikert. Følgelig kan det argumenteres for at maksimal momentkapasitet ved midtstøtten oppnås ved 71% av q_{Ed} , da dette er første lasttrinn hvor armeringen flyter.

I likhet med tilfelle 1, begrenses momentkapasiteten i felt av den dimensjonerende grensetøyningen som nås ved midtstøtten. Avlesninger av laststeg i figur 4.11 ved 3,0% tøyning gir 90% av q_{Ed} . Av figur 4.8 begrenses momentkapasiteten i felt ved 90% av q_{Ed} til 88 kNm. (Tilsvarende 60% av redusert momentkapasitet ved tilfelle 1, $88/145=0.6$).

4.3 Normalarmering av tofeltsbjelke

I følgende delkapittel er et normalarmert tverrsnitt analysert. Lineære og ikke-lineære resultater er sammenlignet og kommentert. Effekten av momentomlagring er tatt hensyn til. I foregående delkapitler er det modellert med symmetrisk armering for enkelt å kunne gjennomføre en god sammenligning mellom lineære og ikke-lineære resultater, med lav grad av numeriske feil. På bakgrunn av momentdiagram generert fra FAP-2D, er det videre modellert med armeringslengder ut ifra nullpunkter på momentdiagrammet. Av hensyn til numerisk stabilitet, overlapper armeringen ved møtepunkter med lav påvirkningsgrad på resultatene.

4.3.1 Lineær statisk analyse

$$M_{Rd} = 0,275 \times f_{cd} \times b \times d^2 = 0,275 \times 17 \times 300 \times 455^2 = 290,4 \text{ kNm}$$

$$h' = d - c_{nom} - \frac{\emptyset}{2} = 455 - 35 - 10 = 410 \text{ mm}$$

$$\alpha_{normal} = 0,412$$

Støttearmering:

$$A_{s1} = \frac{M_{Rd}}{f_{yd} \times z} = \frac{290400000}{434 \times 0,835 \times 455} = 1761,2 \text{ mm}^2$$

$$A_{s2} = 754,8 \text{ mm}^2$$

Strekkarmering over midtstøtte: $A_{s, \text{støtte}} = A_{s1} + A_{s2} = 1761,2 + 754,8 = 2516 \text{ mm}^2$

Trykkarmering over midtstøtte: $A'_{s, \text{støtte}} = A_{s2} = 754,8 \text{ mm}^2$

Ved å supplere med lik armeringsmengde på trykk- og strekksiden utover nødvendig armering som balanserer betongens trykksonekapasitet, endres ikke seigheten i tverrsnittet.

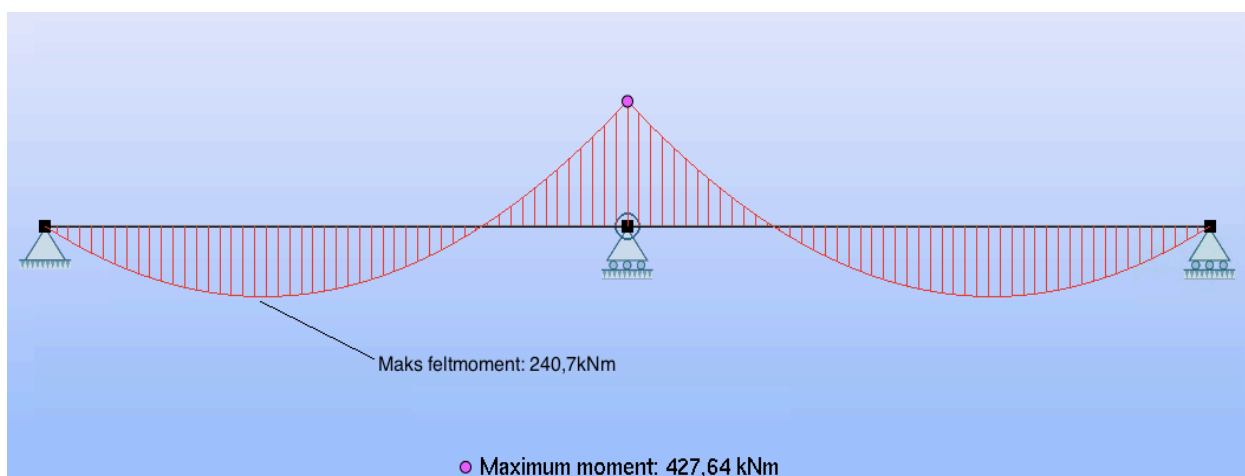
Velger trykkarmeringsareal som skal ta opp omtrent 30% av momentet, for å opprettholde tilfredsstillende mekaniske egenskaper i bjelken.

$$\Delta M_{Ed} = A_{s2} \times f_{yd} \times h' = 754,8 \times 434 \times 410 = 134,3 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed, støtte} = M_{Rd} + \Delta M_{Ed} = 290,4 + 134,3 = 427,7 \text{ kNm} = M_{Rd, støtte}$$

$$q_{Ed} = \frac{M_{Ed} \times 8}{L^2} = \frac{427,7 \times 8}{5^2} = 136,9 \text{ kN/m}$$

Figuren under viser den lineære statiske analysen utført i FAP-2D av tofeltsbjelken med 136,9 kN/m som jevnt fordelt last. Maksimale feltmoment er, $M_{Ed, felt} = 240,7 \text{ kNm}$.



Figur 4.12: Momentdiagram

Bruker så Excel-arket (se tabell 4.3) til å beregne nødvendig feltarmering:

| | |
|---|-------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 175 |
| y2: [mm] | 205 |
| y3: [mm] | 205 |
| Høyde: [mm] | 500 |
| Effektiv høyde: [mm] | 455 |
| Bredde: [mm] | 300 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Strekkarmering: [mm ²] | 2 015 |
| Trykkarmering: [mm ²] | 205,8 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 187,5 |
| Trykkarmeringstøyning: | 0,266 % |
| Strekkarmeringstøyning: | 0,499 % |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Strekkspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 765 000 |
| T: [N] | 109 486 |
| S: [N] | 874 486 |
| Likevekt: [N] | 0,00 |
| Moment: [Nmm] | 335 589 096 |

Tabell 4.3: Excel-regneark, felt

Feltarmering:

Strekkarmering i felt: $A_{s, felt} = 2015 \text{ mm}^2$

Trykkarmering i felt: $A'_{s, felt} = 205,8 \text{ mm}^2$ (minimumsarmering etter EC2)

Tverrsnittets momentkapasitet i felt, $M_{Rd, felt} = 336 \text{ kNm}$, er betraktelig større enn $M_{Ed, felt}$. Dette skyldes ønsket om et normalarmert tverrsnitt, der høyde og bredde allerede er gitt, og betongtrykksonens momentkapasitet er høyere enn ytre moment. Det er dermed ikke beregningsmessig behov for trykkarmering i feltet, men vi har valgt å legge minimumsarmering.

4.3.2 Omlagring av støttemoment

Omlagring av støttemoment beregnes etter EC2 5.5:

$$\delta \geq k_1 + k_2 \times \frac{x_u}{d}, \quad k_1 = 0,44, \quad k_2 = 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{\epsilon_{cu2}} \right) = 1,25$$

$$\alpha_{støtte} = \frac{x_u}{d} = \frac{187,5}{455} = 0,412$$

Maksimal omlagring: $\delta \geq 0,44 + 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{0,0035} \right) \times 0,412 = 0,96$

$$\delta \geq k_5 = 0,7$$

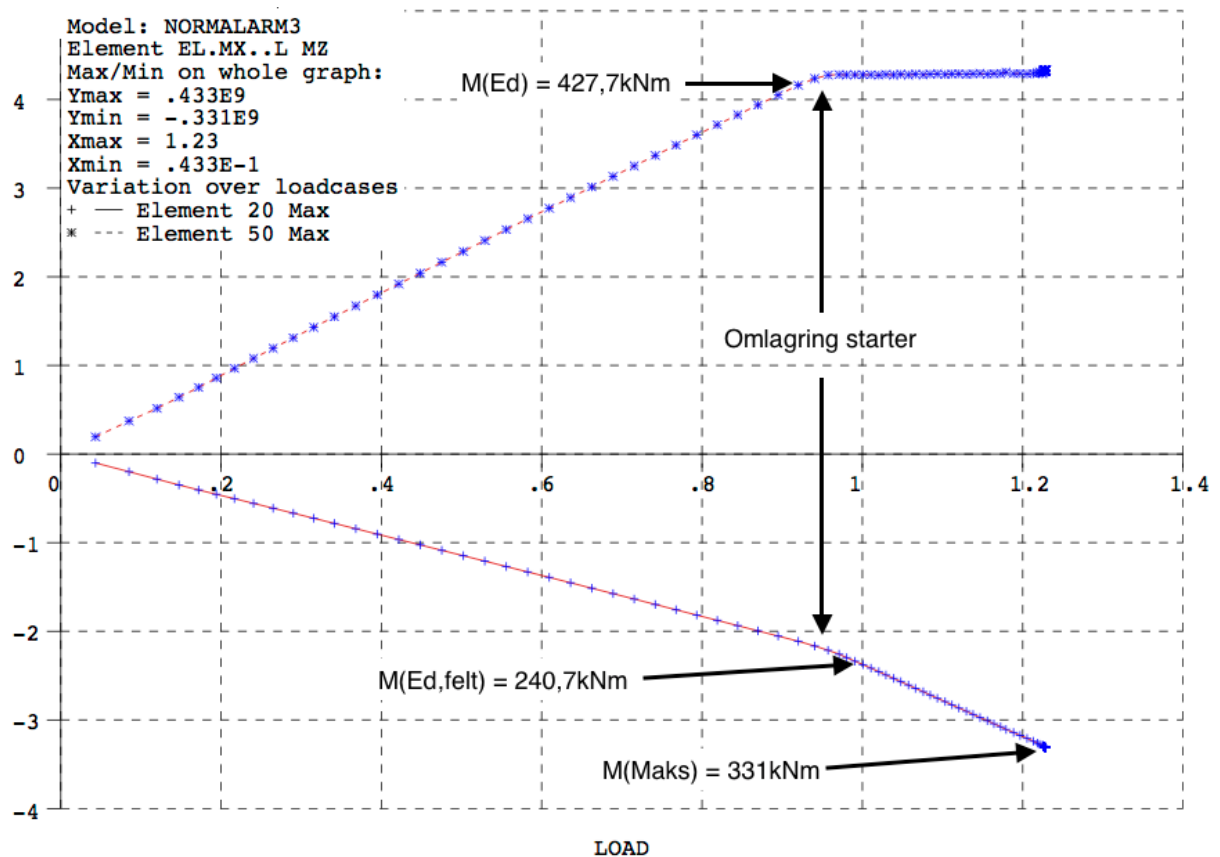
→ Kan omlagre 4% av støttemomentet.

$$M_{Ed, støtte, Red} = M_{Ed, støtte} \times 0,96 = 427,7 \times 0,96 = 410,6 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = M_{Ed, støtte} - M_{Ed, støtte, Red} = 427,7 - 410,6 = 17,1 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed, felt, økt} = M_{Ed, felt} + \frac{\Delta M}{2} = 238,9 + \frac{17,1}{2} = 247,5 \text{ kN}$$

4.3.3 Ikke lineær analyse

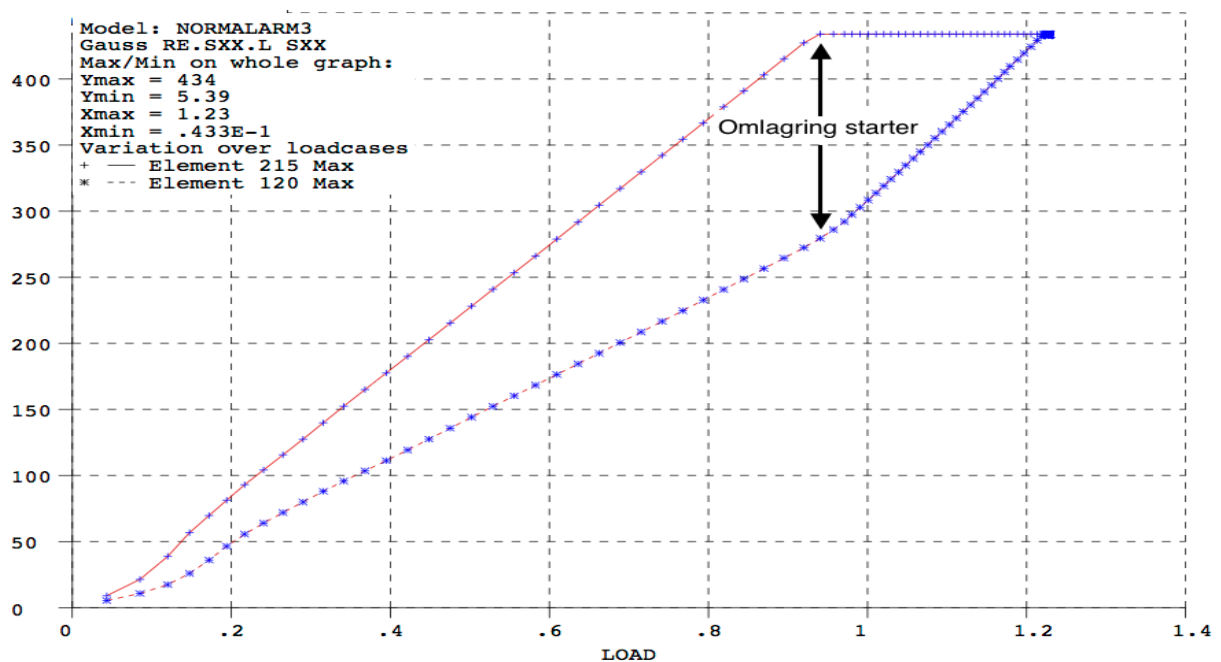


Figur 4.13: Momentkapasitet

Maksimalt moment ved midtstøtten ved 94% av q_{Ed} er 433 kNm, som er enn

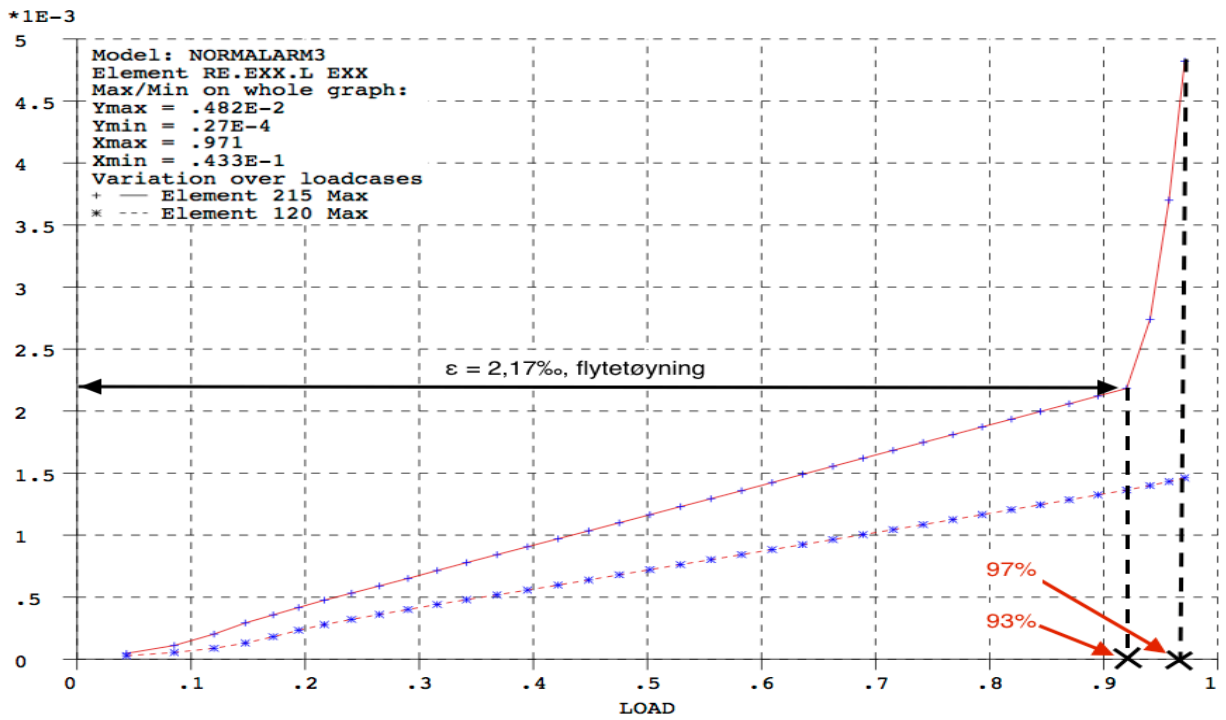
$M_{Ed, støtte}=427,7\text{kNm}$, som oppnås ved 90% av q_{Ed} . Omlagring starter ved 94% av q_{Ed} og utvikler seg mot elastisk dimensjonerende moment, $M_{Ed, felt}=240,7\text{kNm}$, ved 100% av q_{Ed} . Ved dette lastpåføringspunktet, er ikke momentkapasiteten i felt fullt utnyttet.

Momentomlagringen fortsetter videre til 331kNm ved 123% av q_{Ed} , der tabell 4.3 gir en momentkapasitet for felt på 335kNm . Dette indikerer at bjelken har overdimensjonert momentkapasitet, som videre medfører at q_{Ed} kan økes med 23% uten å overgå bjelkens momentkapasitet i felt.

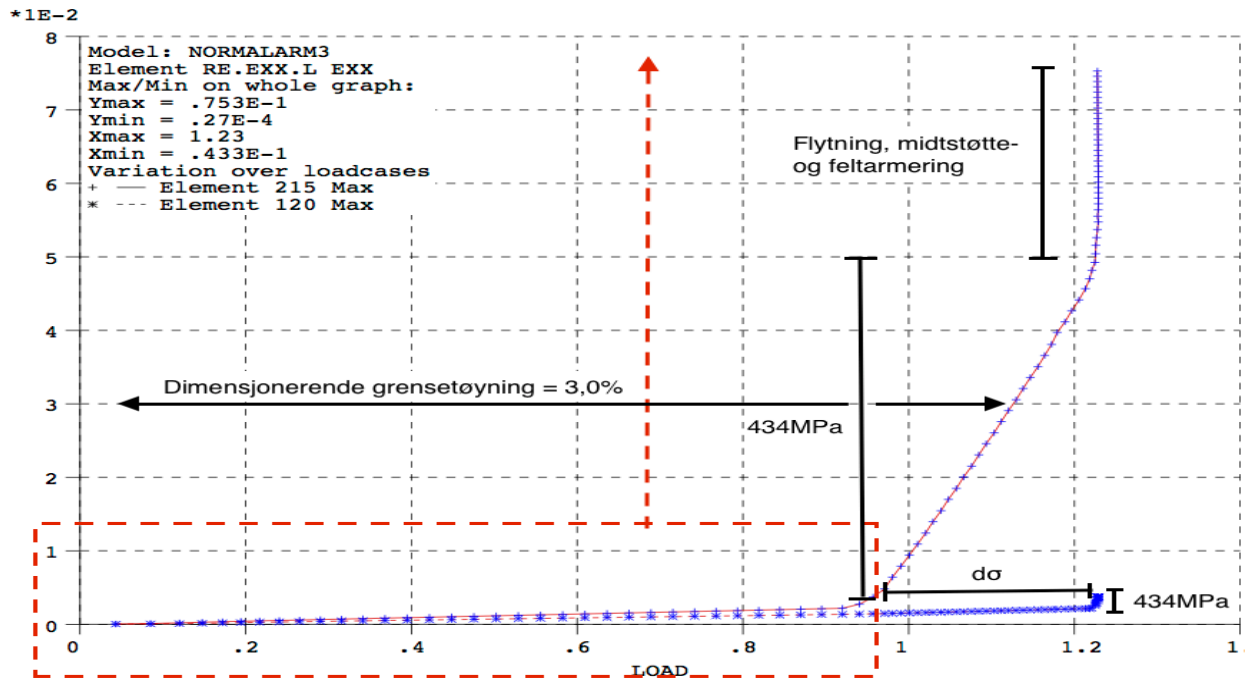


Figur 4.14: Armeringsspenning

Av figur 4.14 observeres det at armeringsspenningene for midtstøtte og felt indikerer omlagring tilsvarende som ved symmetrisk armering. Armeringen på midtstøtten flyter ved 93% av q_{Ed} , ytterligere lastpåføring omlagres til felt. Økt stigningstall for armeringsspenningen i felt etter 94% av q_{Ed} bekrefter dette. Feltarmeringen flyter etter 434MPa , noe som ikke er tilfelle ved symmetrisk armering grunnet felles kraftsituasjon ved oppnådd flytespenning.



Figur 4.15: Armeringstøyning



Figur 4.16: Armeringstøyning

Figur 4.16 viser armeringstøyninger for strekkarmering ved midtstøtten og felt. Laststeget ved 93% av q_{Ed} representerer siste laststeg der tverrsnittet er i likevekt før flytetøyningen er nådd ved midtstøtten. Spenningen i midtstøttearmeringen ved 93% og 97% er konstant lik 434MPa grunnet ideell plastisk oppførsel. Lineær tøyningsutvikling mellom 97%-123% av q_{Ed} ved midtstøtten skyldes momentomlagring, og øker lineært da feltarmeringen følger en lineær-elastisk spenningsutvikling for denne lastperioden. Stigningstallet for grafen til feltarmeringen etter omlagringsstart har en større verdi sammenliknet med før omlagringsstart da tøyningene øker mer mellom hvert lasttrinn grunnet ytterligere lastpåføring omlagres til felt fra midtstøtten. Ved 123% av q_{Ed} flyter både midtstøtte- og feltarmeringen, ytterligere lastpåføring er ikke mulig. Tøyningene for både felt- og midtstøttearmering øker for konstant lasttrinn grunnet nådd flytetøyning.

4.4 Realistisk armering av tofeltsbjelke

Følgende eksempel tar for seg et armeringstverrsnitt som tillater større tøyninger enn et normalarmert tverrsnitt, slik at det skal være mulig å omfordele en større del av støttemomentet.

4.4.1 Lineær elastisk analyse

Effektiv høyde av tverrsnitt: $h' = d - c_{nom} - \frac{\emptyset}{2} = 455 - 35 - 10 = 410mm$

$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{112,5}{455} = 0,24$$

$$M_{Rd} = 0,8 \times \alpha \times (1 - 0,4 \times \alpha) \times f_{cd} \times b \times d^2 = 0,8 \times 0,24 \times (1 - 0,4 \times 0,24) \times 17 \times 300 \times 455^2 \\ = 183,3kNm$$

$$z = (1 - 0,5 \times \lambda \times \alpha) \times d = (1 - 0,5 \times 0,8 \times 0,24) \times 455 = 411,3mm$$

Støttestærkning:

$$A_{s1} = \frac{M_{Rd}}{f_{yd} \times z} = \frac{183300000}{434 \times 411,3} = 1026,9 \text{ mm}^2$$

$$A_{s2} = 973,1 \text{ mm}^2$$

Strekkærkning over midtstøtte: $A_{s, \text{støtte}} = A_{s1} + A_{s2} = 1026,9 + 973,1 = 2000 \text{ mm}^2$

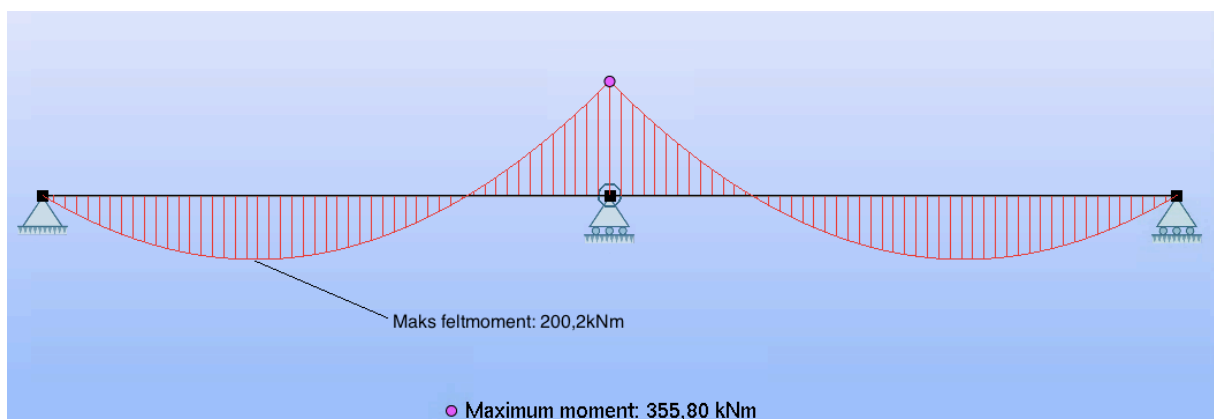
Trykkærkning over midtstøtte: $A'_{s, \text{støtte}} = A_{s2} = 973,1 \text{ mm}^2$

$$M_{Rd} = 355,9 \text{ kNm} = M_{Ed, \text{støtte}}$$

$$q_{Rd} = \frac{8 \times M_{Rd}}{L^2} = \frac{8 \times 355,9}{5^2} = \frac{113,9 \text{ kN}}{\text{m}}$$

$$M_{Ed, \text{felt}} = 200,2 \text{ kNm}$$

Figur 4.17 viser den lineære statiske analysen, utført i FAP-2D, av tofeltsbjelken med 113,9 kN/m som jevnt fordelt last. Maksimale feltmoment, $M_{Ed, \text{felt}} = 200,2 \text{ kNm}$.



Figur 4.17: Momentdiagram

Tabell 4.4 viser støttearmeringen og 4.5 viser feltarmering.

| | |
|--|-------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 205 |
| y2: [mm] | 205 |
| y3: [mm] | 205 |
| Høyde: [mm] | 500 |
| Effektiv høyde: [mm] | 455 |
| Bredde: [mm] | 300 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Strekkarmering: [mm ²] | 2 000 |
| Trykkarmering: [mm ²] | 973 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 112,5 |
| Trykkarmeringstøyning: | 0,210 % |
| Strekkarmeringstøyning: | 1,065 % |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 420 |
| Strekspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 459 187 |
| T: [N] | 408 813 |
| S: [N] | 868 000 |
| Likevekt: [N] | 0,00 |
| Moment: [Nmm] | 355 871 580 |

Tabell 4.4: Excel-diagram, midtstøtte

| | |
|--|-------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 213 |
| y2: [mm] | 205 |
| y3: [mm] | 205 |
| Høyde: [mm] | 500 |
| Effektiv høyde: [mm] | 455 |
| Bredde: [mm] | 300 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Strekkarmering: [mm ²] | 1112 |
| Trykkarmering: [mm ²] | 300 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 92,0 |
| Trykkarmeringstøyning: | 0,179 % |
| Strekkarmeringstøyning: | 1,381 % |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 358 |
| Strekkspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 375 360 |
| T: [N] | 107 283 |
| S: [N] | 482 643 |
| Likevekt: [N] | 0,00 |
| Moment: [Nmm] | 200 961 422 |

Tabell 4.5: Excel-diagram, felt

Feltarmering:

Strekkarmering i felt: $A_{s,felt} = 1112mm^2$

Trykkarmering i felt: $A'_{s,felt} = 300mm^2$

4.4.2 Omlagring av støttemoment

Omlagring av støttemoment beregnes etter EC2 5.5:

$$\delta \geq k_1 + k_2 \times \frac{x_u}{d}, \quad k_1 = 0,44, \quad k_2 = 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{\varepsilon_{cu2}} \right) = 1,25$$

$$\alpha_{støtte} = \frac{x_u}{d} = \frac{112,5}{455} = 0,24$$

Maksimal omlagring: $\delta \geq 0,44 + 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{0,0035} \right) \times 0,24 = 0,74$

$$\delta \geq k_5 = 0,7$$

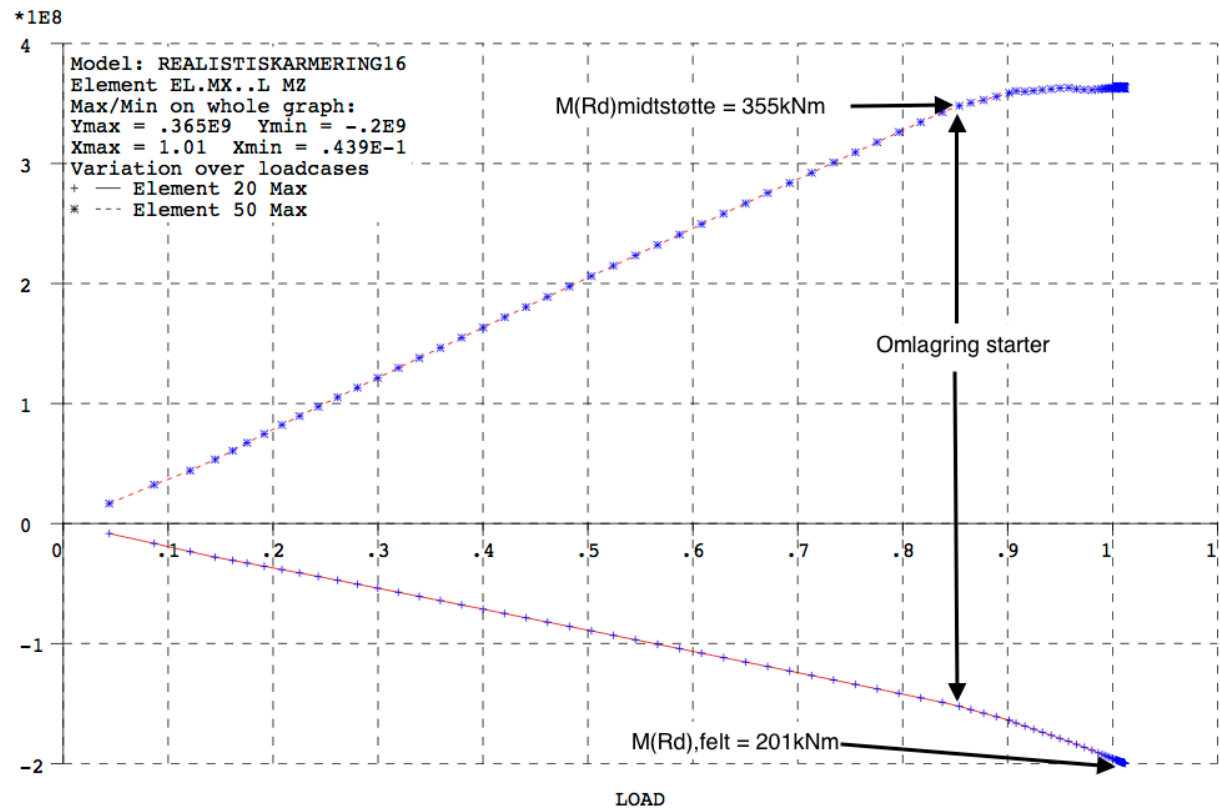
→ Kan omlagre 26% av støttemomentet.

$$M_{Ed,støtte,Red} = M_{Ed,støtte} \times 0,74 = 355,9 \times 0,74 = 263,4kNm$$

$$\Delta M = M_{Ed,støtte} - M_{Ed,støtte,Red} = 355,9 - 263,4 = 92,5kNm$$

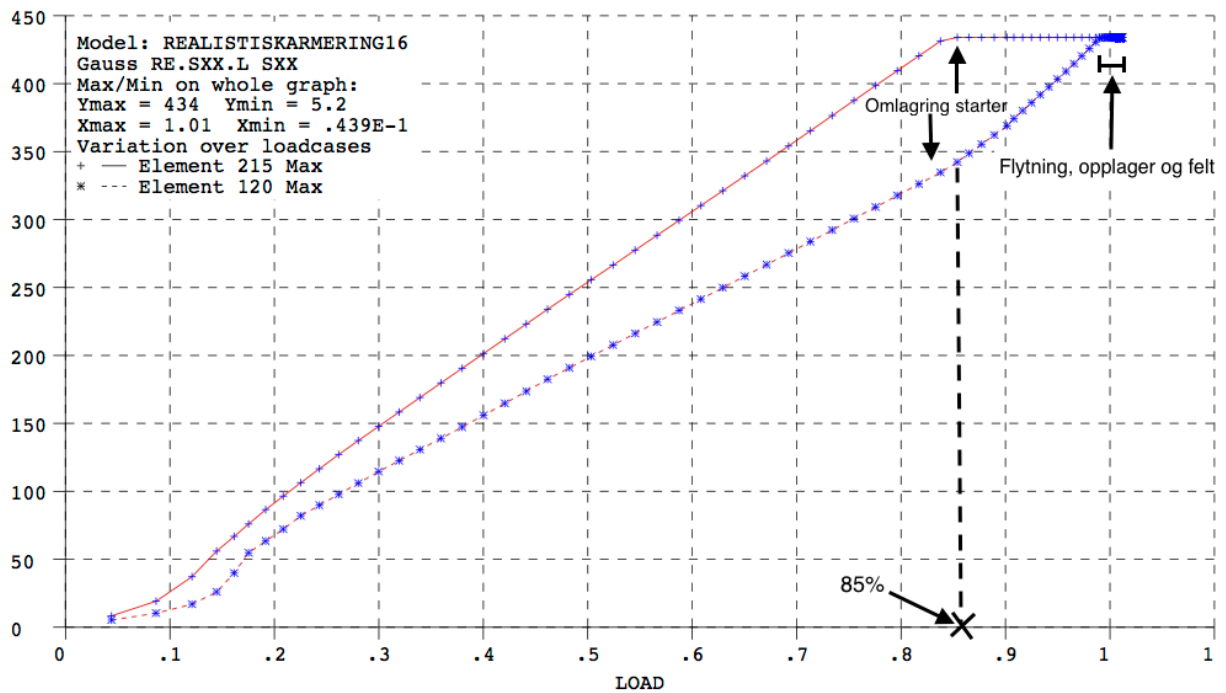
$$M_{Ed,felt,\text{økt}} = M_{Ed,felt} + \frac{\Delta M}{2} = 200,2 + \frac{92,5}{2} = 246,5kNm$$

4.4.3 Ikke-lineær analyse



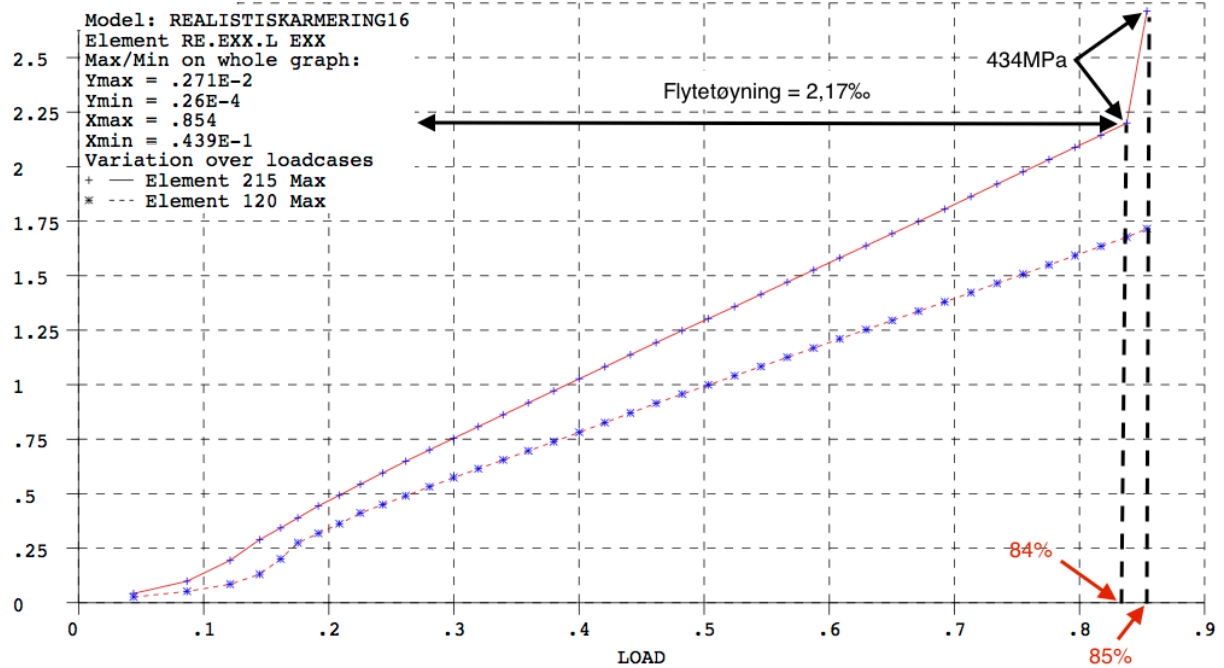
Figur 4.18: Momentkapasitet

Maksimalt moment ved midtstøtte ved 101% av q_{Ed} er 365kNm, som er 10,2kNm høyere enn $M_{Ed, støtte} = 355,8kNm$, som oppnås ved 85% av q_{Ed} . Omlagring starter ved 85% av q_{Ed} og utviklinger seg mot elastisk dimensjonerende moment, $M_{Ed, felt} = 200,961kNm$ (DIANA-analyse=200kNm) ved 101% av q_{Ed} .

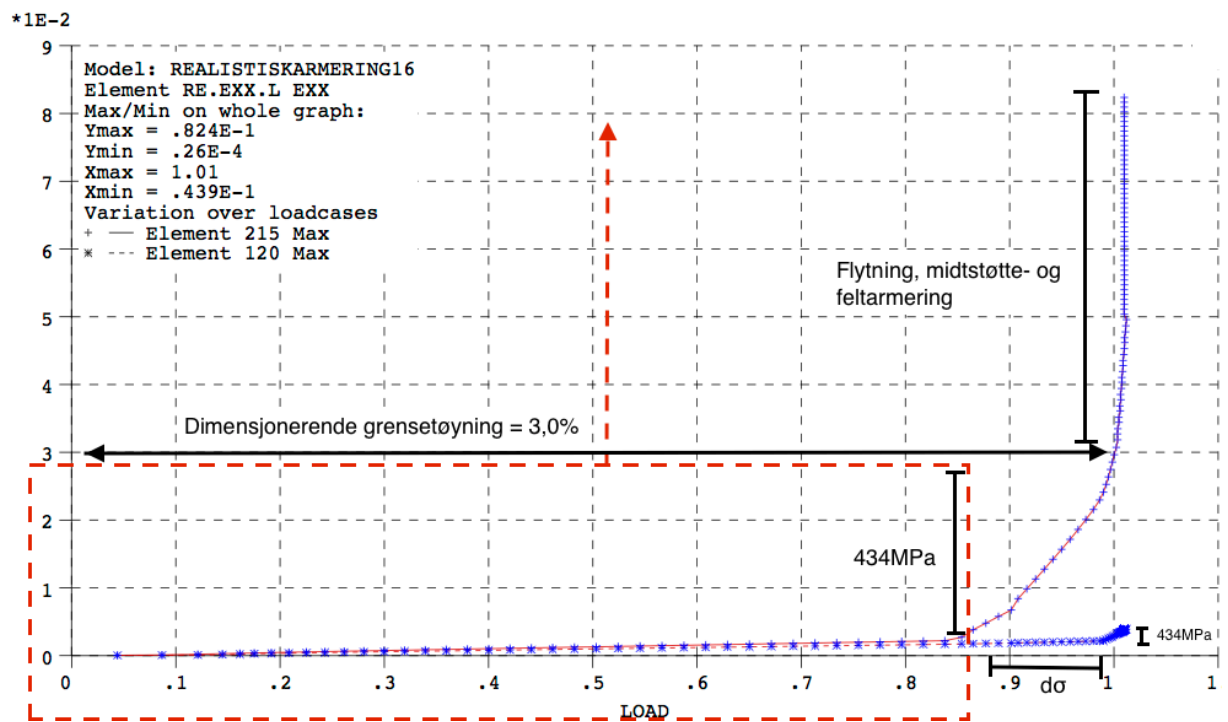


Figur 4.19: Armeringsspenning

Armeringsspenningene for midtstøtten og felt indikerer omlagring tilsvarende som ved symmetrisk- og normalarmert tverrsnitt. Omlagring starter ved 85% av q_{Ed} der strekkarmeringen ved midtstøtten påbegynner flytning. Dette sammenfaller med diagrammet for moment, der konstant moment oppnås ved 85% av q_{Ed} . Armeringsspenningen ved felt når flytning ved 97,5% av q_{Ed} og fortsetter flytning til 101% av q_{Ed} , på tilsvarende måte som ved normalarmert tverrsnitt.



Figur 4.20: Armeringstøyning

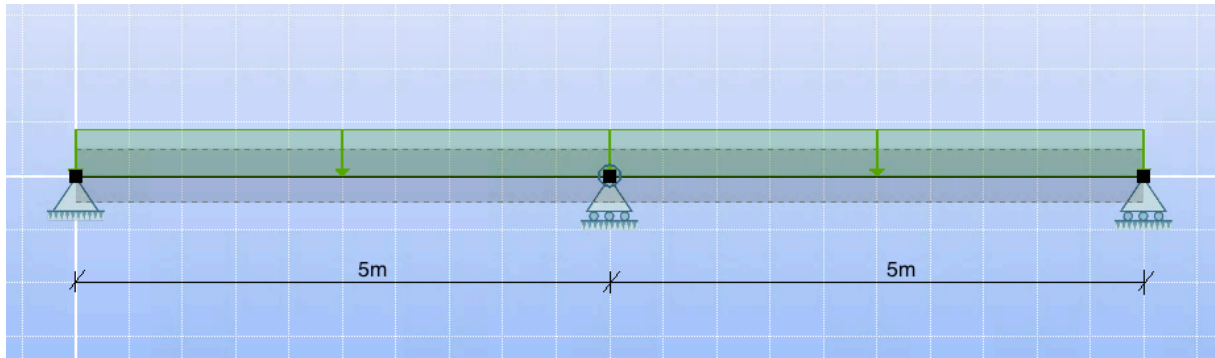


Figur 4.21: Armeringstøyning

Figur 4.20 og 4.21 viser armeringstøyningene for strekkarmering ved midtstøtte og felt. I figur 4.19 viser laststeg ved 84% av q_{Ed} siste laststeg der tverrsnittet er i likevekt før flytetøyningen er nådd ved midtstøtten. Tilsvarende de foregående analyser, vil armeringsspenningen ved både 84% og 85% være lik 434MPa grunnet ideell plastisk oppførsel i armeringen.

5 Analyse av plate over to felt

Kapittel 5 tar for seg analyse av en tofelts fritt opplagt plate. Med unntak av platebredden, er geometri og randbetingelser som i tofelts bjelken i kapittel 4. Vi ser på et snitt av platen med bredde, 1m.



Figur 5.1: Tofelts plate

5.1 Lineær elastisk analyse

Dimensjonering gjøres etter Eurokode 2.

$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{78}{255} = 0,29$$

$$M_{Rd} = 0,8 \times \alpha \times (1 - 0,4 \times \alpha) \times f_{cd} \times b \times d^2 = 0,8 \times 0,29 \times (1 - 0,4 \times 0,29) \times 17 \times 1000 \times 255^2 \\ = 226,7 \text{ kNm}$$

$$z = (1 - 0,5 \times \lambda \times \alpha) \times d = (1 - 0,5 \times 0,8 \times 0,29) \times 255 = 225,4 \text{ mm}$$

Støttestarmering:

$$A_{s1} = \frac{M_{Rd}}{f_{yd} \times z} = \frac{226700000}{434 \times 225,4} = 2317,4 \text{ mm}^2$$

$$A_{s2} = 400 \text{ mm}^2$$

Strekstarmering over midtstøtte: $A_{s, støtte} = A_{s1} + A_{s2} = 2317,4 + 400 = 2717,4 \text{ mm}^2$

Trykstarmering over midtstøtte: $A'_{s, støtte} = A_{s2} = 400 \text{ mm}^2$

$$M_{Rd} = 262,3 \text{ kNm} = M_{Ed, støtte}$$

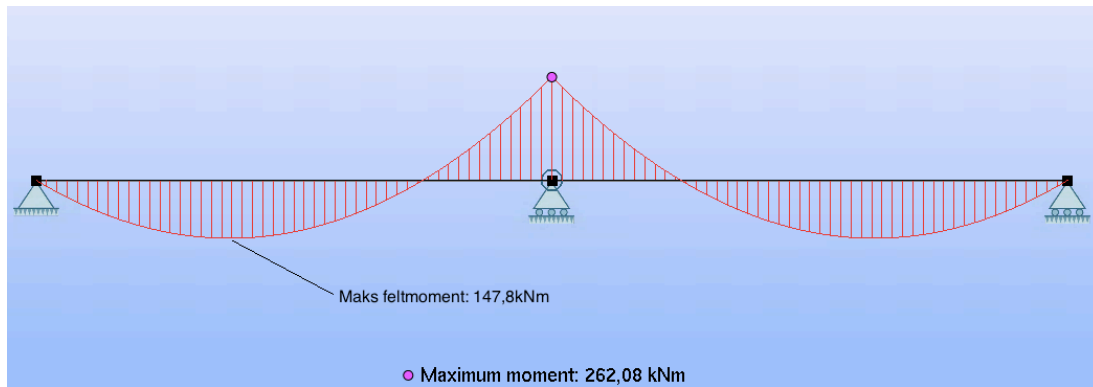
$$q_{Rd} = \frac{8 \times M_{Rd}}{L^2} = \frac{8 \times 262,3}{5^2} = 83,9 \text{ kN/m}$$

Feltarmering:

Strekstarmering i felt: $A_{s, felt} = 1440 \text{ mm}^2$

Trykstarmering i felt: $A'_{s, felt} = 385 \text{ mm}^2$ (minimumsarmering etter EC2)

Figur 5.2 viser den lineære statiske analysen, utført i FAP-2D, av platen over to felt med 83,9kN/m som jevnt fordelt last. Maksimale feltmoment, $M_{Ed, felt} = 147,8kNm$.



Figur 5.2: Momentdiagram

Støttemerking:

| | |
|--|-------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 119 |
| y2: [mm] | 105 |
| y3: [mm] | 105 |
| Høyde: [mm] | 300 |
| Effektiv høyde: [mm] | 255 |
| Bredde: [mm] | 1000 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Strekkarmering: [mm ²] | 2 717 |
| Trykkarmering: [mm ²] | 400 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 78,0 |
| Trykkarmeringstøyning: | 0,148 % |
| Strekkarmeringstøyning: | 0,794 % |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 296 |
| Strekkspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 1 060 878 |
| T: [N] | 118 473 |
| S: [N] | 1 179 352 |
| Likevekt: [N] | 0,00 |
| Moment: [Nmm] | 262 301 516 |

Tabell 5.1: Excel-regneark, midtstøtte

Feltarmering:

| | |
|--|-------------|
| Flytespenning: [N/mm ²] | 434 |
| y1: [mm] | 132 |
| y2: [mm] | 105 |
| y3: [mm] | 105 |
| Høyde: [mm] | 300 |
| Effektiv høyde: [mm] | 255 |
| Bredde: [mm] | 1000 |
| Betongtrykkapasitet: [N/mm ²] | 17 |
| E-modul: [N/mm ²] | 200 000 |
| Strekkarmering: [mm ²] | 1440 |
| Trykkarmering: [mm ²] | 385 |
| Betongtøyning: | 0,0035 |
| Overdekning: [mm] | 45 |
| Trykksonehøyde: [mm] | 45,7 |
| Trykkarmeringstøyning: | 0,005 % |
| Strekkarmeringstøyning: | 1,604 % |
| Trykkspenning: [N/mm ²] | 10 |
| Strekkspenning: [N/mm ²] | 434 |
| Tc: [N] | 621 042 |
| T: [N] | 3 918 |
| S: [N] | 624 960 |
| Likevekt: [N] | 0,00 |
| Moment: [Nmm] | 147 844 569 |

Tabell 5.2: Excel-regneark, felt

Av Excel-tabellene ser vi at trykksonehøyden over midtstøtten er betraktelig større enn i feltet. Dermed er også strekkarmeringstøyningen i feltet (16‰) betydelig større enn i feltet (8‰). Trykkarmeringstøyningen er mye mindre både over midtstøtte og i felt.

5.2 Omlagring av støttemoment

Omlagring av støttemoment beregnes etter EC2 5.5:

$$\delta \geq k_1 + k_2 \times \frac{x_u}{d}, \quad k_1 = 0,44, \quad k_2 = 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{\varepsilon_{cu2}} \right) = 1,25$$

$$\alpha_{støtte} = \frac{x_u}{d} = \frac{78}{255} = 0,29$$

Maksimal omlagring: $\delta \geq 0,44 + 1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{0,0035} \right) \times 0,29 = 0,80$

$$\delta \geq k_5 = 0,7$$

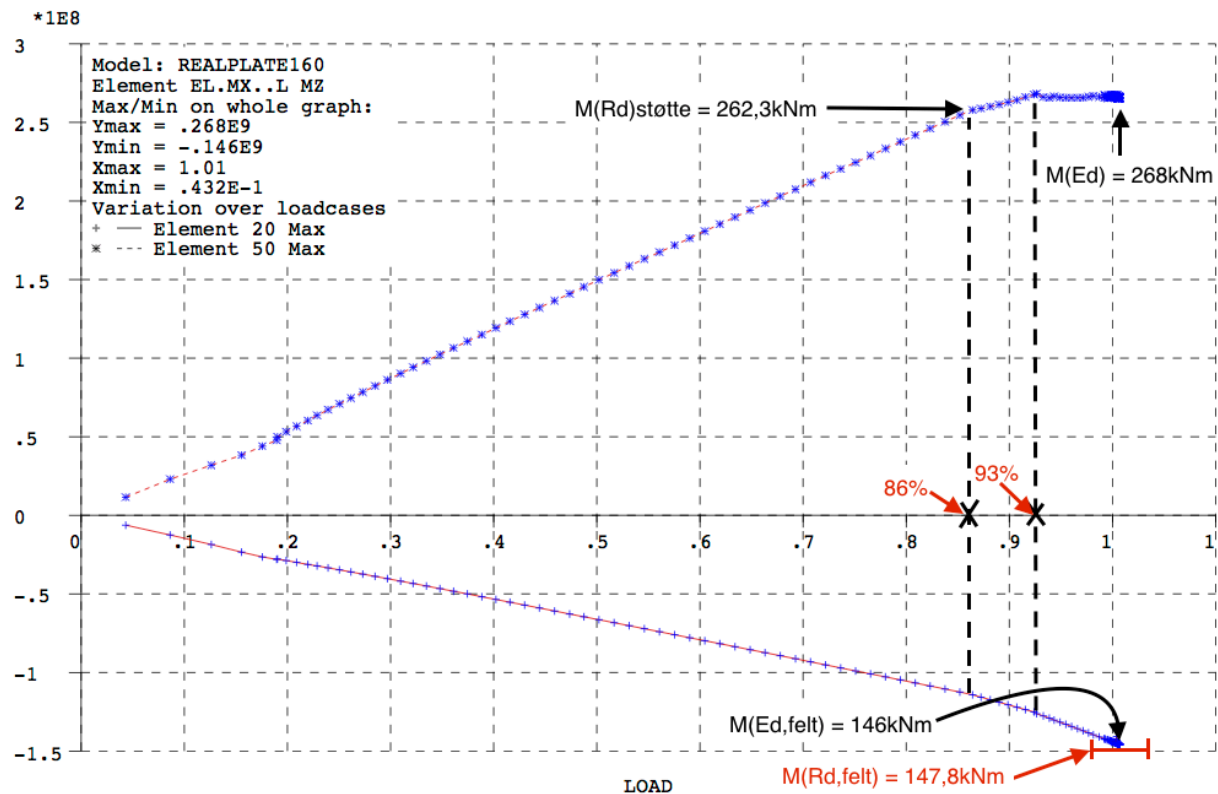
→ Kan omlagre 20% av støttemomentet.

$$M_{Ed,støtte,Red} = M_{Ed,støtte} \times 0,80 = 262,3 \times 0,8 = 209,8 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = M_{Ed,støtte} - M_{Ed,støtte,Red} = 262,3 - 209,8 = 52,5 \text{ Nm}$$

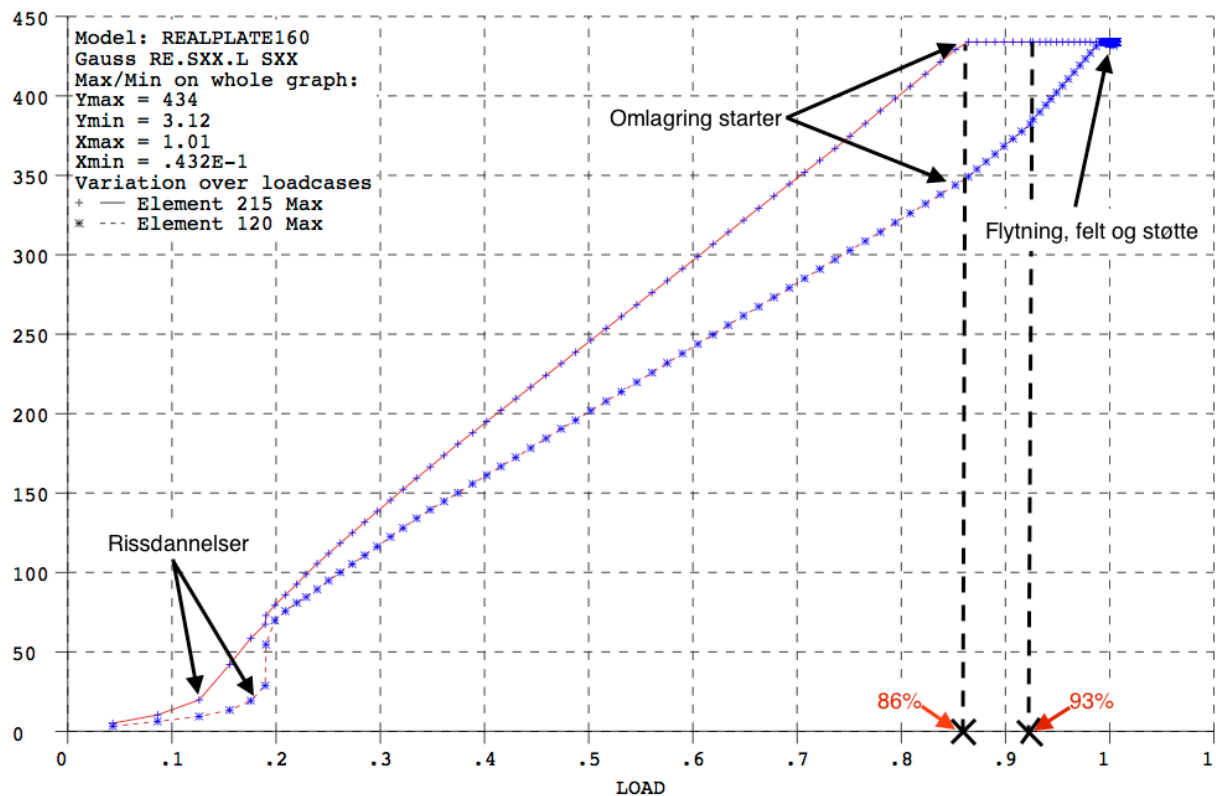
$$M_{Ed,felt,\text{økt}} = M_{Ed,felt} + \frac{\Delta M}{2} = 147,8 + \frac{52,5}{2} = 174,1 \text{ kNm}$$

5.3 Ikke-lineær analyse



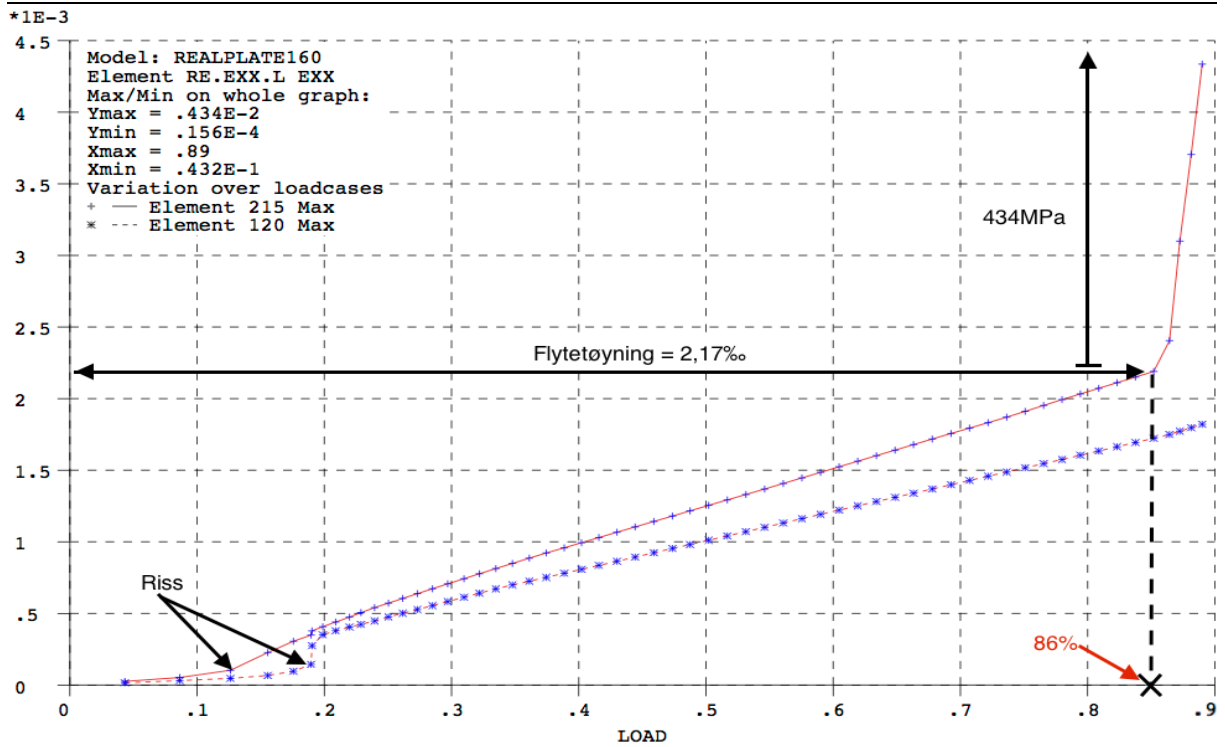
Figur 5.3: Momentkapasitet

Maksimalt moment ved midtstøtten ved 101% av q_{Ed} er 268kNm, som er 6,3kNm over $M_{Ed, støtte} = 262,3kNm$, som oppnås ved 101% av q_{Ed} . Overgangen mellom lineært økende moment og konstant maksmoment gjennomgår en lineær mellomfase i lastperioden 86%-93% av q_{Ed} . Omlagring starter ved 86% av q_{Ed} og utvikler seg mot elastisk dimensjonerende moment, $M_{Ed, felt} = 147,8kNm$ (DIANA-analyse=146kNm) ved 101% av q_{Ed} .

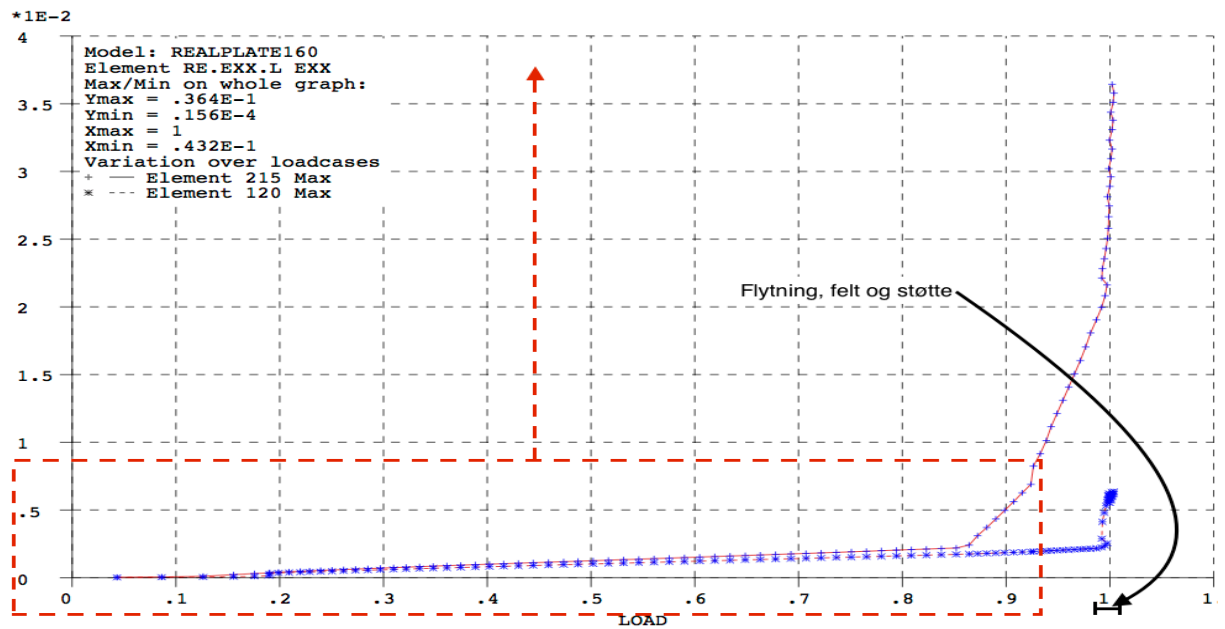


Figur 5.4: Armeringsspenning

Av figur 5.4 observeres det at armeringsspenningene for midtstøtten og felt indikerer omlagring tilsvarende som i tidligere analyser. Omlagring starter ved 86% av q_{Ed} , der strekkarmeringen ved midtstøtten påbegynner flytning. Mellomfasen, som nevnt i forrige avsnitt, indikeres ved feltarmeringens variasjon i stigningstakt i perioden 86%-93% av q_{Ed} .



Figur 5.5: Armeringstøyning

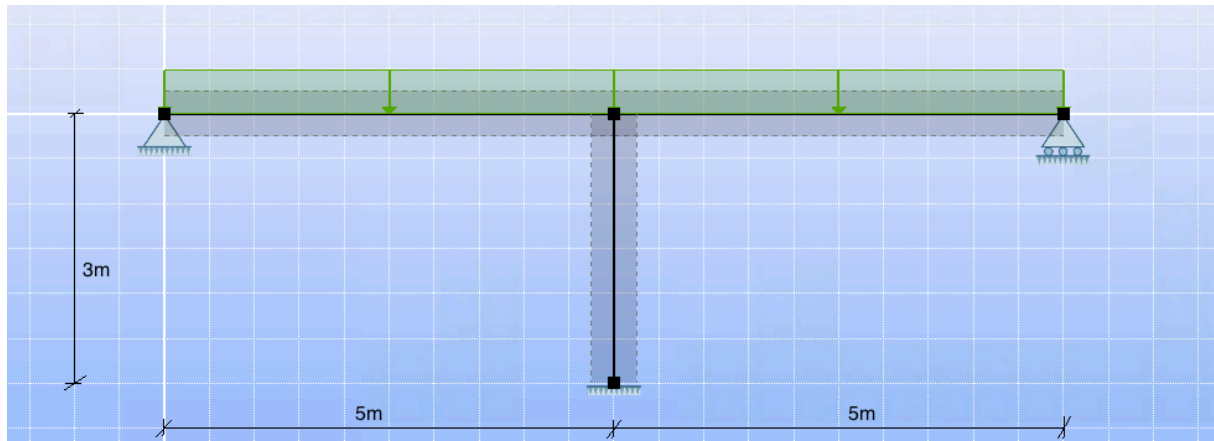


Figur 5.6: Armeringstøyning

Figur 5.5 og 5.6 viser armeringstøyninger for strekkarmering ved midtstøtten og felt. Som det fremgår av figur 5.5 flyter armeringen ved støtten ved 2,17‰ 86% av q_{Ed} , som stemmer overens med materialmodellen samt moment- og spenningsgrafene. Videre pålastning fører til konstant armeringsspenning ved støtten for økende tøyninger. Feltarmeringen øker tøyningene for økende lastpåføring etter 86% av q_{Ed} med lineært økende armeringsspenning fram til 100% av q_{Ed} . Ved 100% av q_{Ed} , flyter armeringen ved både felt- og støttearmeringen.

6 Analyse av tofelts bjelke med søyle

I dette kapitlet tar vi for oss en tofelts fritt opplagt bjelke med søyle i midtstøtte. Bjelkens geometri, armering og last er den samme som i kapittel 4.5. Søylene har bredde, $t=400\text{mm}$.



Figur 6.1: Bjelke med søyle

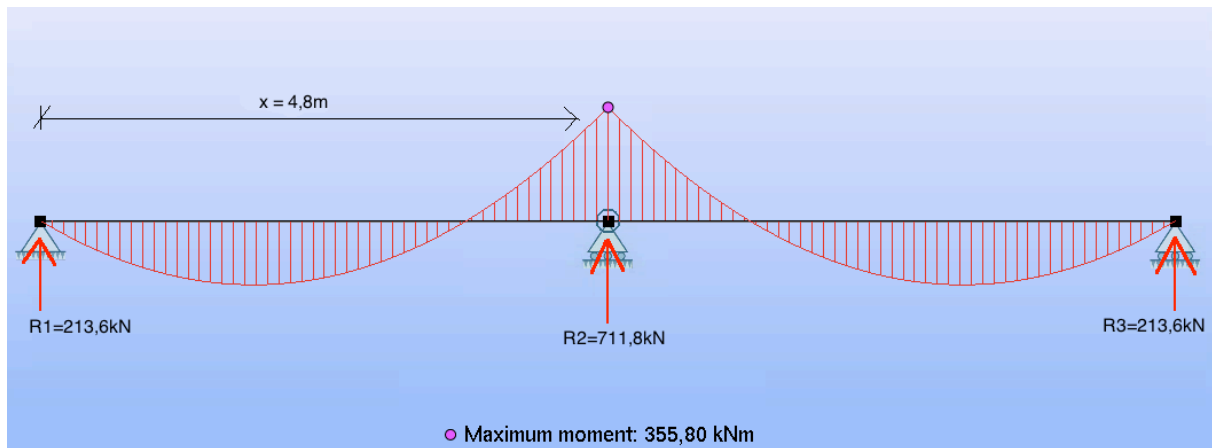
6.1 Reduksjon av støttemoment

Grunnet midtoppleggets utstrekning er det mulig å redusere støttemomentet etter EC2 5.3.2.2 (3) og (4), som beskrevet i kapittel 2.3.

6.1.1 Reduksjon etter punkt (3)

Ved først å anta at bjelken er monolittisk forbundet med opplegg, er det mulighet for å benytte punkt (4) for å redusere støttemomentet til den verdien som gjelder ved søylekanten til søylen i midtstøtten.

Figur 6.2 viser momentdiagrammet for bjelken med opplagerreaksjoner, før reduksjon og omlagring.



Figur 6.2: Momentdiagram

Moment ved søylekant før omlagring:

$$M_{Ed}(x) = R1 \times x - \frac{q \times x^2}{2}$$

$$M_{Ed}(4,8) = 213,6 \times 4,8 - \frac{113,9 \times 4,8^2}{2} = 286,8 \text{ kNm}$$

Moment ved søylekant etter 26% omlagring: (se kapittel 4.5.2):

$$M_{Ed,red(3)}(4,8) = M_{Ed}(4,8) - \Delta M \times \frac{x}{L} = 286,8 - 92,5 \times \frac{4,8}{5} = 198 \text{ kNm}$$

6.1.2 Reduksjon etter punkt (4)

Ved å benytte punkt 5.3.2.2 (4) reduseres det opprinnelige støttemomentet, uten å ta hensyn til omlagring.

Dimensjonerende opplagerreaksjon: $F_{Ed,sup} = R2 = 711,8 \text{ kN}$

Oppleggets bredde: $t = 400\text{mm}$

$$\Delta M_{Ed} = \frac{F_{Ed,sup} \times t}{8} = \frac{711,8 \times 0,4}{8} = 35,6\text{kNm}$$

Moment ved midtstøtte etter reduksjon:

$$M_{Ed,red(4)} = M_{Ed} - \Delta M_{Ed} = 355,9 - 35,6 = 320,3\text{kNm}$$

6.2 Reduksjon av armering

Tabell 6.1 viser armeringsareal for de forskjellige alternativene til reduksjon av støttemoment, og den totale armeringsmengden i bjelken for hvert alternativ.

| | Støttearmering 2,6m | | Feltarmering 7,6m | | Totalarmering [mm ³] |
|----------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| | Strekk [mm ²] | Trykk [mm ²] | Strekk [mm ²] | Trykk [mm ²] | |
| Opprinnelig | 2000 | 973,1 | 1112 | 300 | $18,46 \cdot 10^6$ |
| 26% Omlagring | 1480 | 436 | 1390 | 343 | $18,15 \cdot 10^6$ |
| Punkt (3) | 1101 | 206 | 1390 | 343 | $16,57 \cdot 10^6$ |
| Punkt (4) | 1800 | 767 | 1112 | 300 | $17,41 \cdot 10^6$ |

Tabell 6.1: Armeringstverrsnitt

Tabellen viser at det er mulig å spare armering hvis en tar hensyn til forskjellige metoder for reduksjon av støttemoment. Reduksjon av støttemoment etter EC2 5.3.2.2 (3) i kombinasjon med omlagring av støttemoment etter EC2 5.5 (4) er det mest økonomiske alternativet.

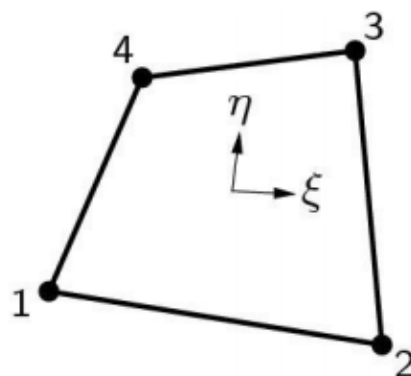
6.3 Ikke-lineær analyse

Elementtype:

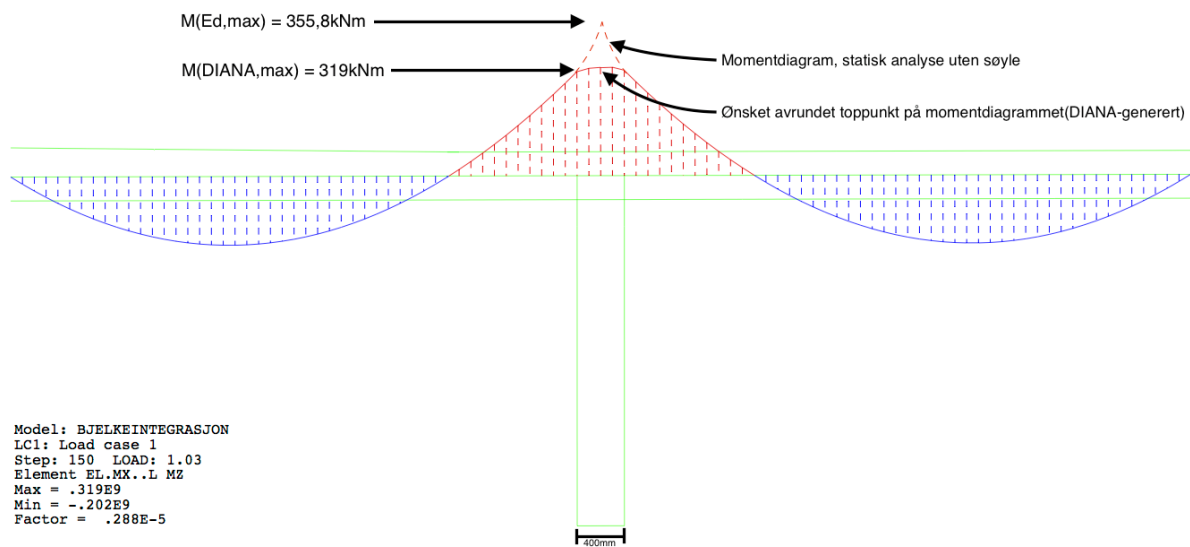
Ved oppdeling av geometrien i et elementnett er det nødvendig å velge riktig elementtype til valgt geometri. Modelleringen inneholder komponenter bestående av rektangulær geometri. Elementtypen Q8MEM er derfor valgt for å få et ideelt elementnett hvor det etterstrebes at elementgeometrien er kvadratisk. Dette gir en bedre numerisk løsning da interpoleringen mellom nodene får samme avstand i begge retninger.

Til modellering av søylen i dette tilfellet er elementtypen Q8MEM valgt. Det er et fire-noders kvadratisk isoparametrisk plan-spennings element, vist i figur 6.3. Det brukes lineær interpolasjon og Gauss integrasjon. Polynomet for utregning av forskyvning kan uttrykkes som i ligningen under.

$$u_i(\zeta, \eta) = a_0 + a_1 \times \zeta + a_2 \times \eta + a_3 \times \zeta \times \eta$$

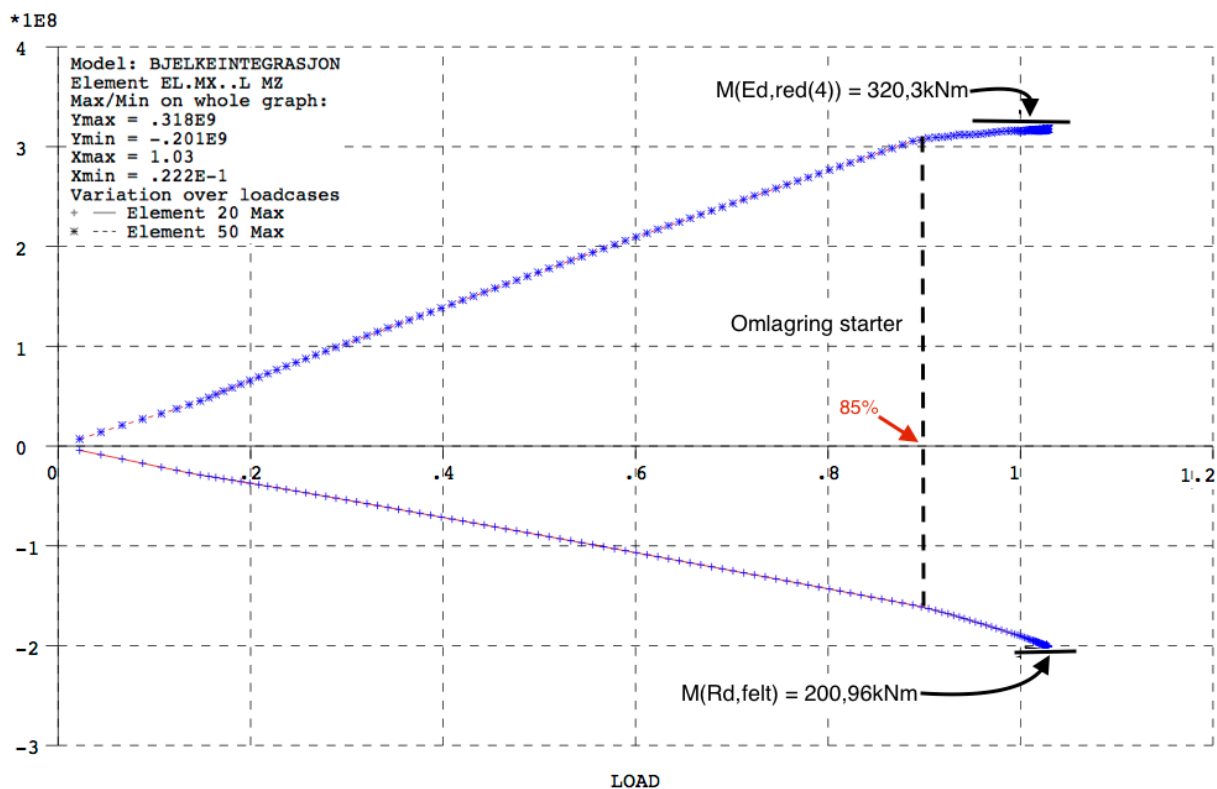


Figur 6.3: Q8MEM Element [7]



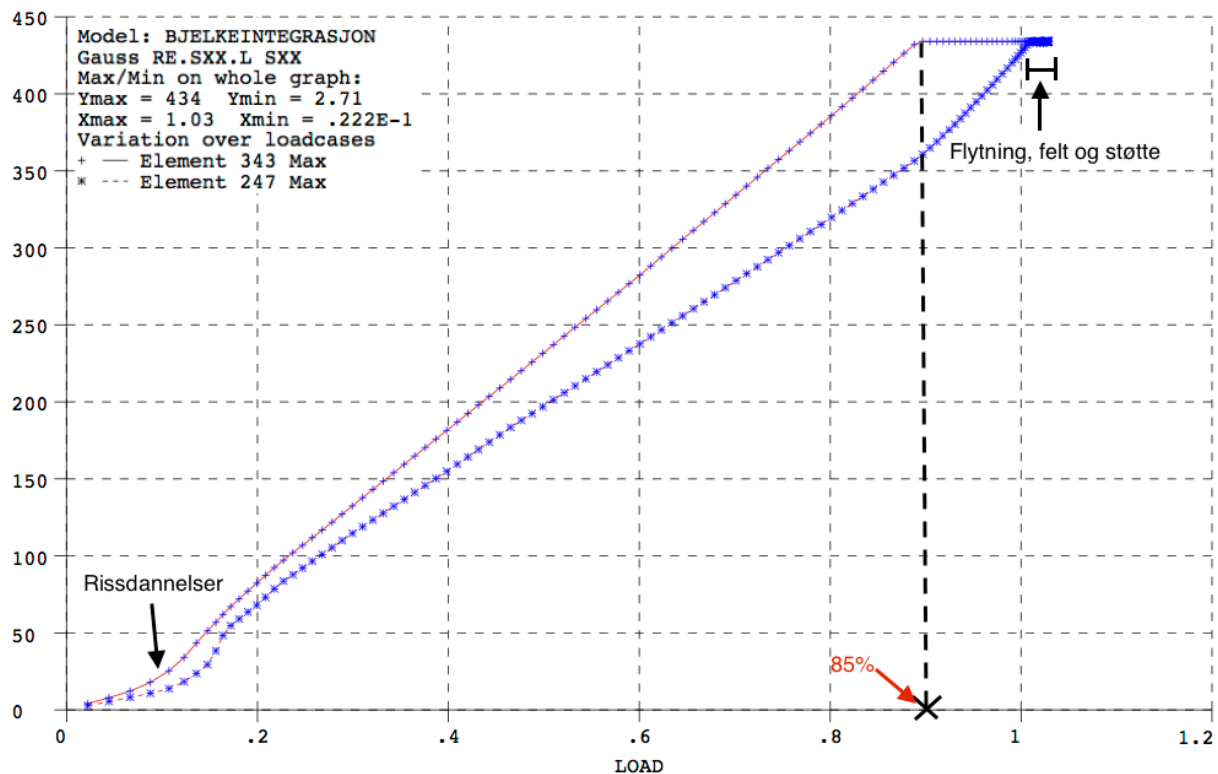
Figur 6.4: Momentdiagram, DIANA

Figur 6.4 viser momentdiagrammet for tofeltsbjelken generert i DIANA. Sammenlikning av figur 6.4 med figur 6.2 gjøres for å illustrere ønsket oppnådd effekt med henvisning til figur 2.5. Det avrundede toppunktet over søylen er av samme karakter som i figur 2.5. Verdiene utregnet i 6.1.2 samsvarer med 1,3kNm i avvik sammenliknet med det ikke-lineære resultatet ($M(DIANA,max)$) i figur 6.4.



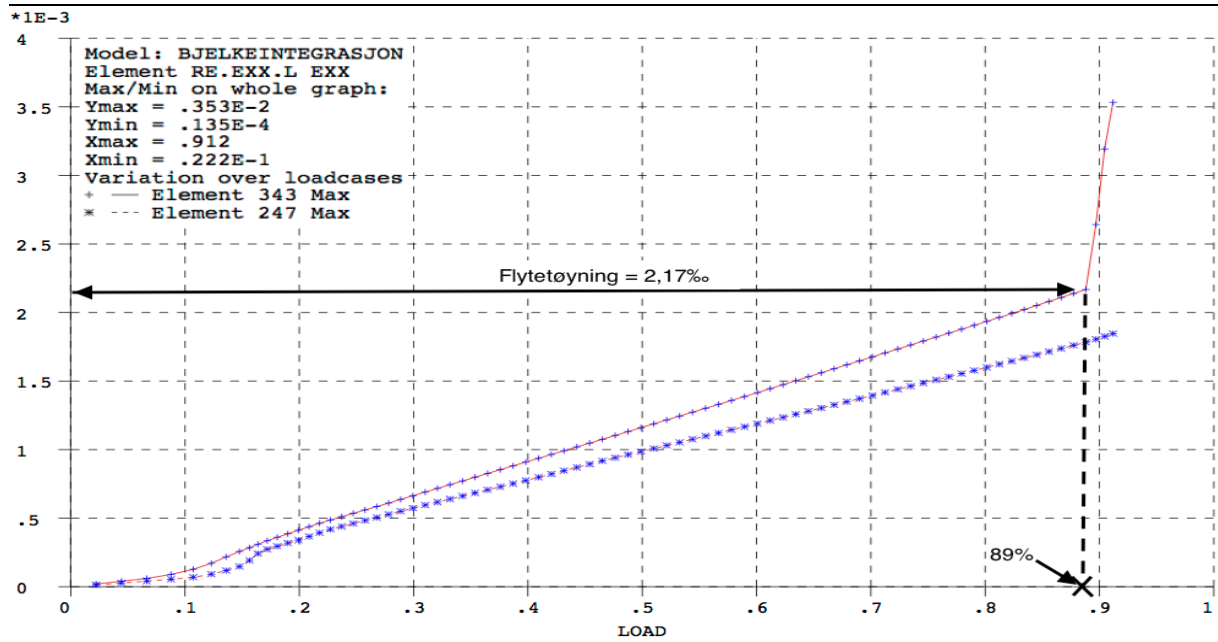
Figur 6.5: Moment, felt og over søyle

Figur 6.5 viser momentutviklingen for felt og over søyle. Som det også fremgår av figur 6.4, oppnås utregnet momentkapasitet i både felt og over søyle med marginale avvik. Sammenliknet med analyser uten søyle, kan det observeres en lineær momentøkning fra omlagringstart til analyseslutt for momentgrafene som representerer momentet over søylen.

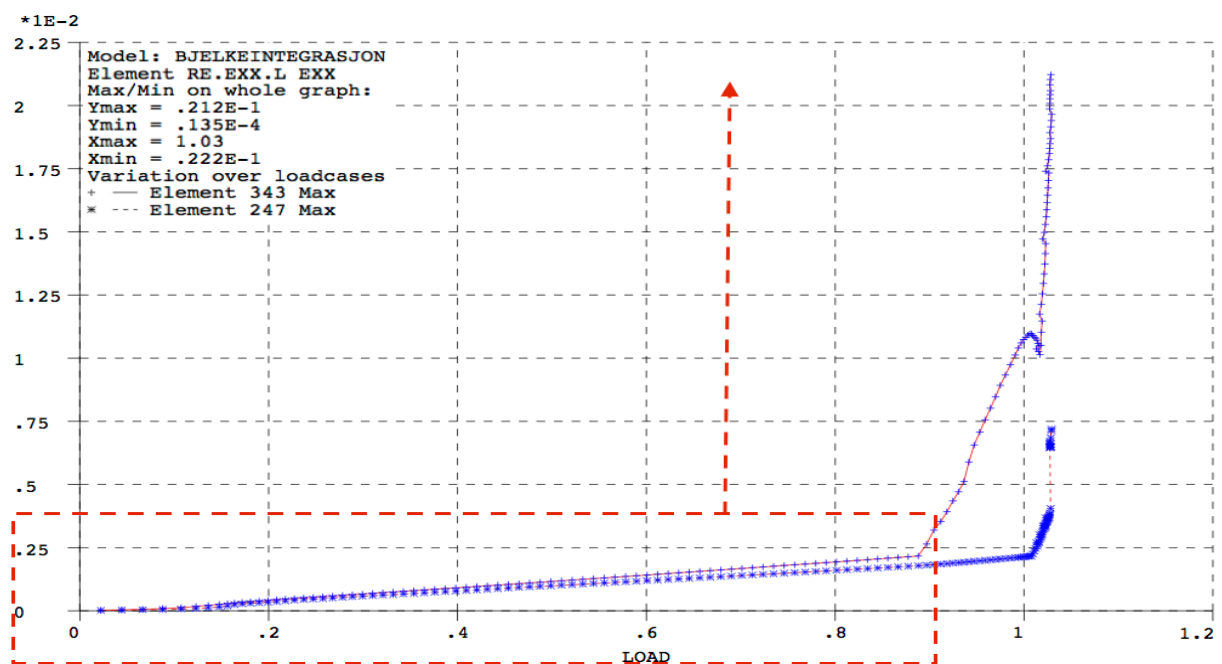


Figur 6.6: Armeringsspenning, felt og over søyle

Figur 6.6 viser armeringsspenninger i strekk i felt og over søyle. Armeringen over søylen flyter ved samme lastpåføring som momentgrafene (figur 6.5) indikerer omlagringstart. Ved 100% av q_{Ed} flyter både felt og søyletopp, ved 103% av q_{Ed} klarer ikke kreftene å omfordeles ytterligere.



Figur 6.7: Armeringstøyning, felt og over søyle



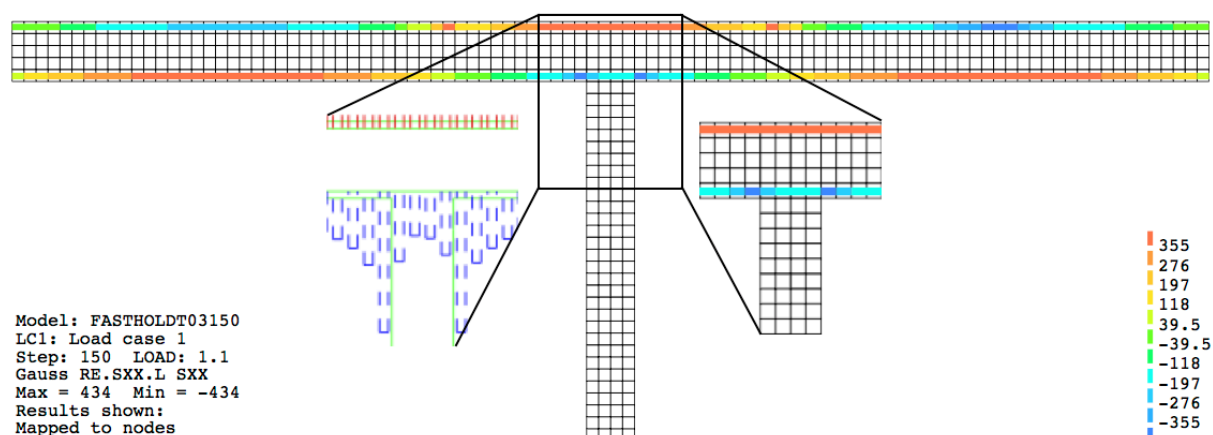
Figur 6.8: Armeringstøyning, felt og over søyle

Figur 6.7 og 6.8 representerer armeringstøyning i felt og over søyle. Både rissdannelse og nådd flytetøyning indikeres i figur 6.7

I foregående analyser er bjelken modellert ved bruk av bjelkeelementer. Dette for å kunne ta ut resultater i form av lokale momenter for hvert element, da bjelkeelementer innehar rotasjonsfrihetsgrader i endenodene. Alle bjelkeelementene er tilknyttet material- og geometriegenskaper, som i kombinasjon med rotasjonsverdier resulterer i et moment. Bjelkeelementer gir ikke muligheten til å ta ut spenningsverdier i betongen. Indirekte er dette mulig ved likevektsutregning av tverrsnittet, da momentverdien er kjent.

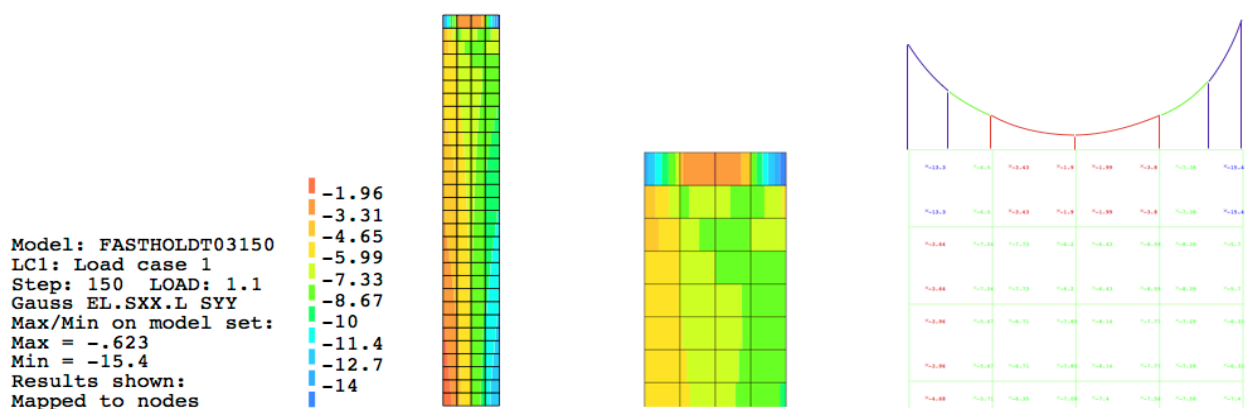
Ved modellering av bjelken ved bruk av skallelementer (Q8MEM), muliggjøres det å ta ut spenningsverdier for betongen i både x- og y-retning. Da skallelementer ikke innehar rotasjonsfrihetsgrader, er det ikke mulig å vurdere lokalt moment per element. Tilsvarende som ved bjelkeelementer, kan det indirekte regnes moment for et snitt av bjelken da trykksoneverdier er tilgjengelige.

Av sammenlikningsinteresse og for verifisering av skallelementer til bruk i bjelkeanalyser, er bjelkeelementer erstattet med skallelementer i dette delkapittelet. Armeringsmengde- og plassering er tilsvarende som i 6.3.2, søyle og bjelke er stivt forbundet. Resultater fra 6.3.1 er derfor sammenliknbare med resultater representert i dette delkapittelet, med unntak av momentresultater grunnet begrunnelsen gitt ovenfor.



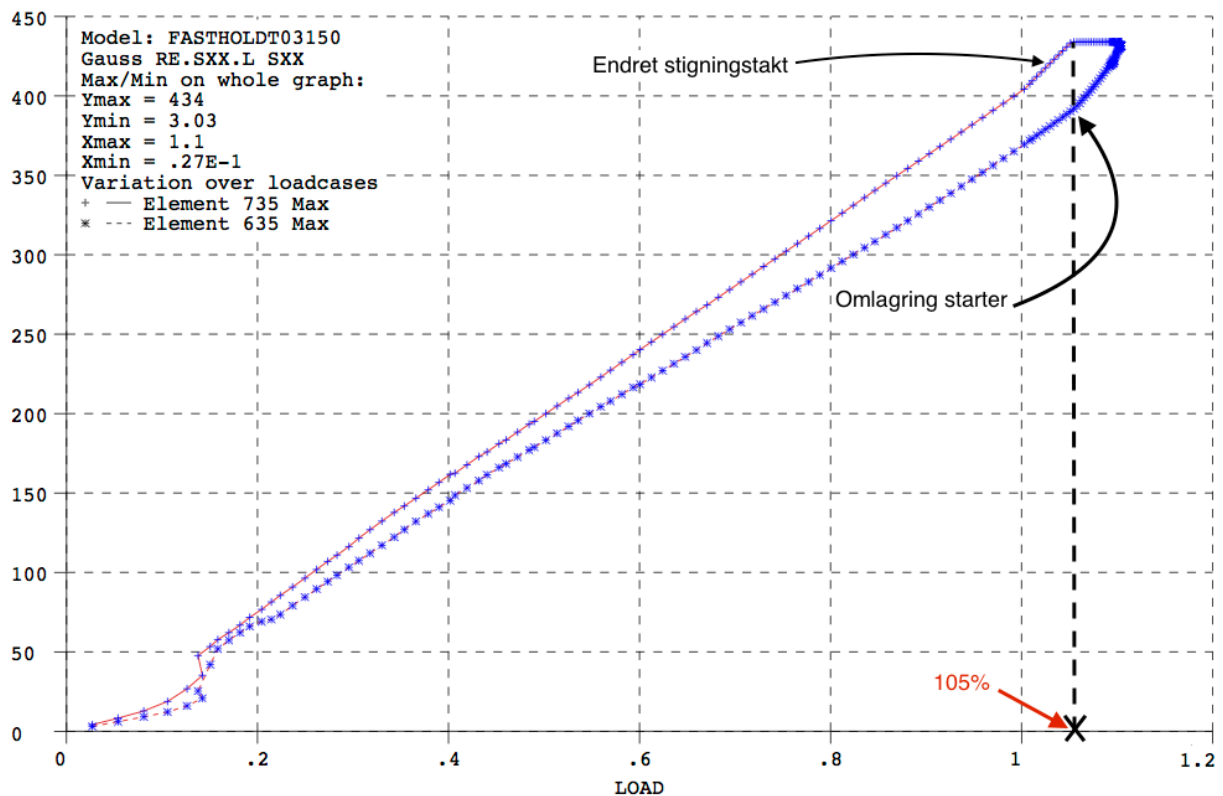
Figur 6.9: Elementmodell med armeringsspenninger

Figur 6.9 viser oppdelingen av bjelken og søylen i elementer med kvadratisk størrelse lik 100X100mm. Modellen viser plassering av både underkant- og overkantarmring samt spenningsvariasjonen i lengderetningen. Av figur 6.6 avsluttes analysen ved 103% av q_{Ed} , der analysen som har generert figur 6.9 avsluttet ved 110% av q_{Ed} . Dette vitner om bedre evne til omfordeling av krefter i modellen med skallelementer, da armeringen flyter i begge analysene som vitner om tilstrekkelig lasttrinn. Av uthevingene i figur 6.9 kan det observeres en markant spenningsreduksjon i trykkarmeringen (underkant) ved søylen. Dette skyldes søylens høyde og påvirker spenningene i armeringen i det uthevede området. Høyden på søylen vil inngå i bjelketverrsnitts høyde, noe som i en tverrsnittsanalyse vil bidra til å øke stivheten. I realiteten vil spenningen i trykkarmeringen ha et toppunkt i senter av søyletoppen



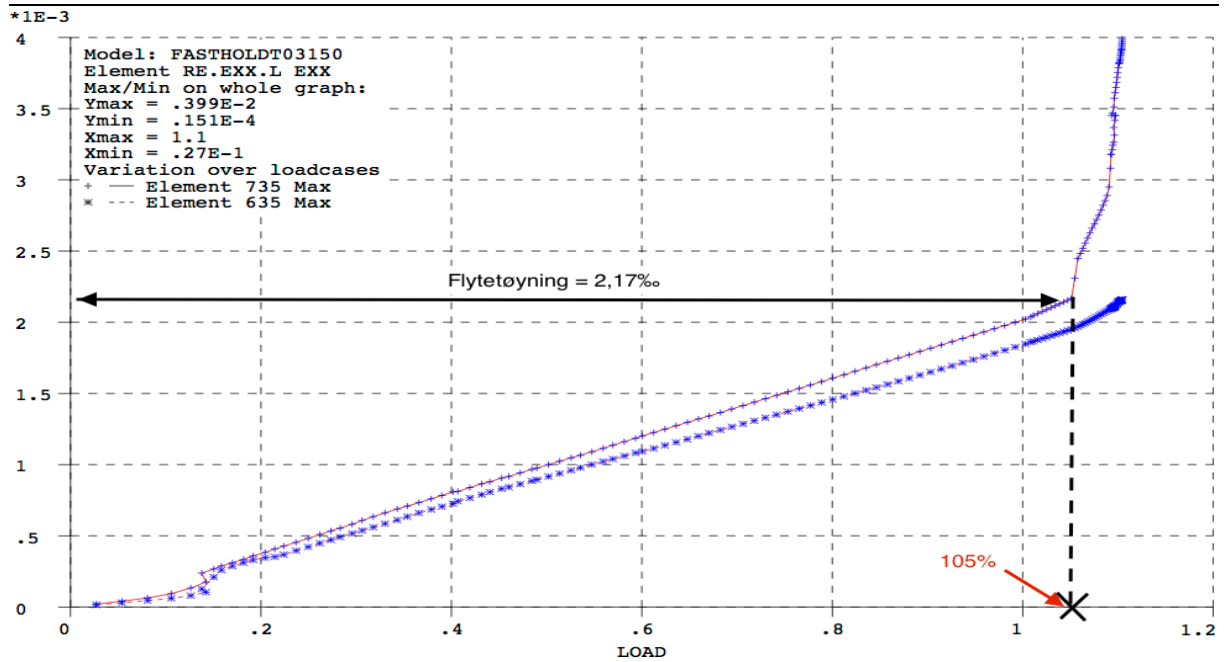
Figur 6.10: Søylespenninger i betongen, y-retning

Søylen i 6.3.1 og i dette delkapittelet er i all hovedsak påvirket av aksialkrefter, da den jevnt fordelte lasten er symmetrisk i forhold til søyletoppen. Da bjelkens høyre opplager er et glidelager, resulterer dette i en forskyvning og rotasjon av søyletopp som videre gir innspenningsmoment. Det kan derfor, av figur 6.10, observeres spenningsforskjeller mellom høyre og venstre søylekant. Minimumsverdien for betongspenningen er 15.4MPa (trykk), som er lavere enn dimensjonerende betongtrykkfasthet (f_{cd}) 17MPa.



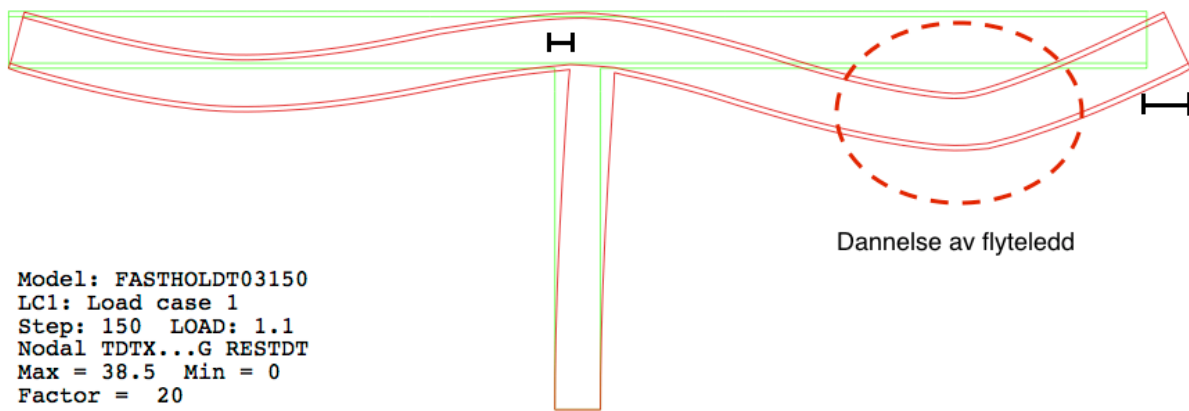
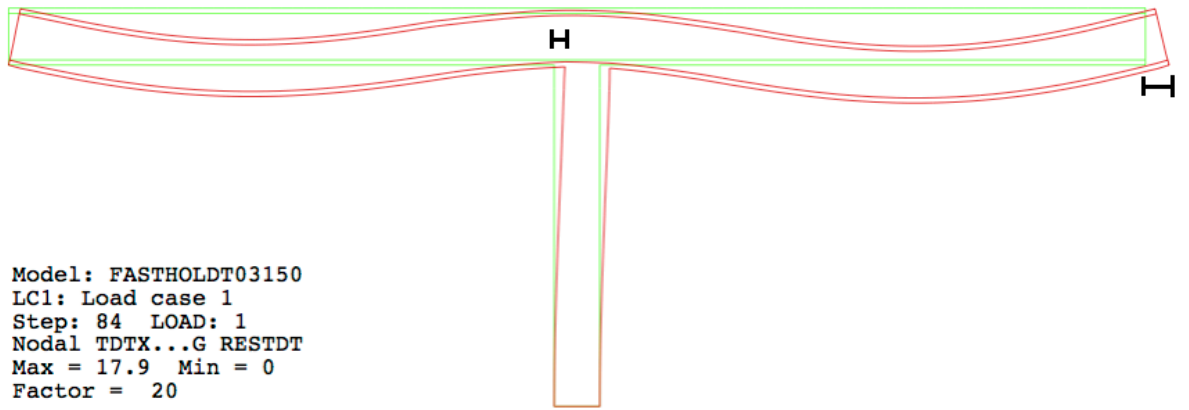
Figur 6.11: Armeringsspenninger, felt og støtte

Av figur 6.11, observeres det tilsvarende utvikling i armeringsspenningen som i tidligere delkapitler. Rissdannelser opptrer ved 10% av q_{Ed} , med påfølgende lineært økende armeringsspenning frem til 105% av q_{Ed} . Ved 100% av q_{Ed} kan det observeres en økende stigningstakt (indikert i figur 6.11) i midtstøtteamringen som utvikler seg med en tettere samling laststeg per prosentdel pålastet q_{Ed} . Denne utviklingen stopper ved 105% av q_{Ed} der armeringen påbegynner flytning.

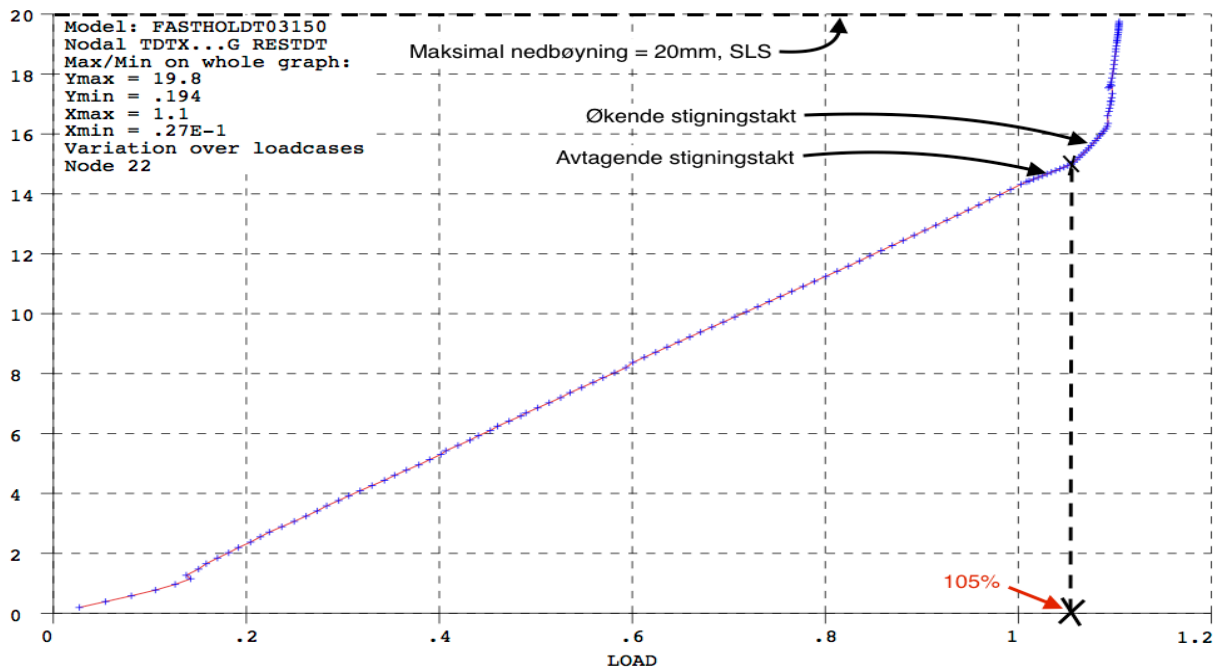


Figur 6.12: Armeringstøyning, felt og midtstøtte

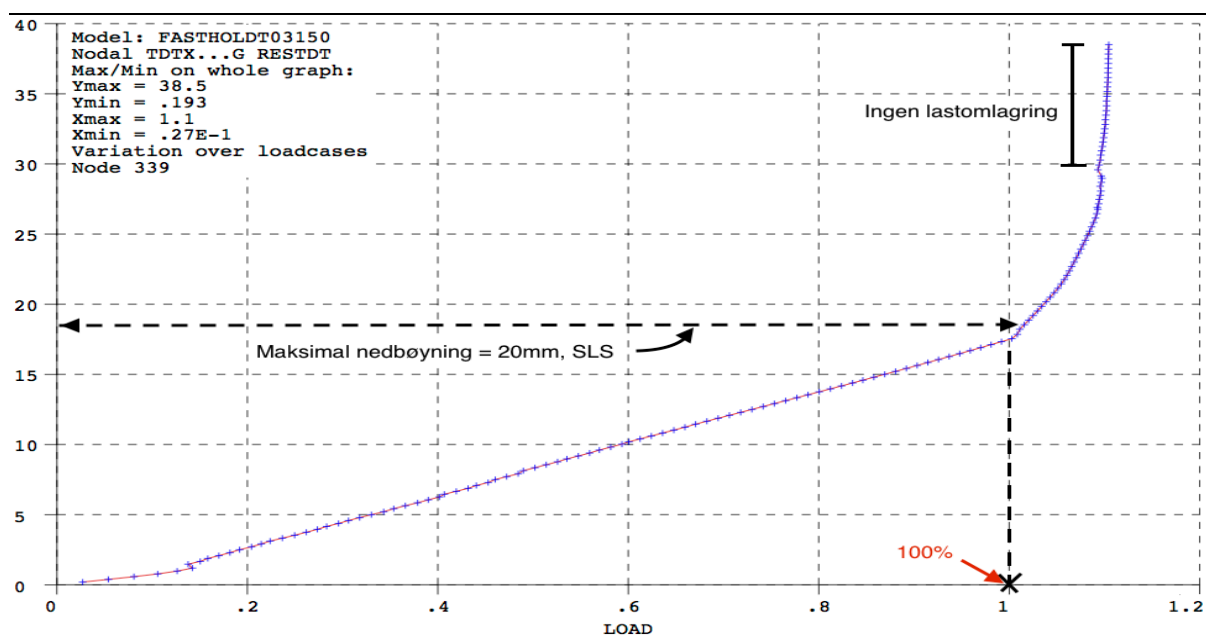
Av figur 6.12 observeres det en tilsvarende tøyningutvikling sammenliknet med analyser utført med bjelkeelementer. Flytning i armeringen påvist i figur 6.11 ved 105% av q_{Ed} sammenfaller med flytetøyningen indikert i figur 6.12.



Figur.6.13: Nedbøyningsutvikling, 100% vs 110% av q



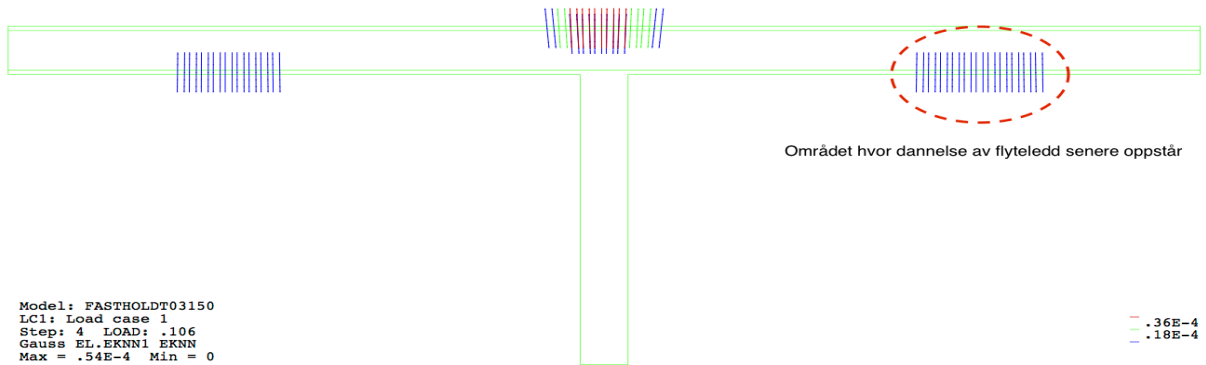
Figur 6.14: Nedbøyning, node 25(venstre felt)



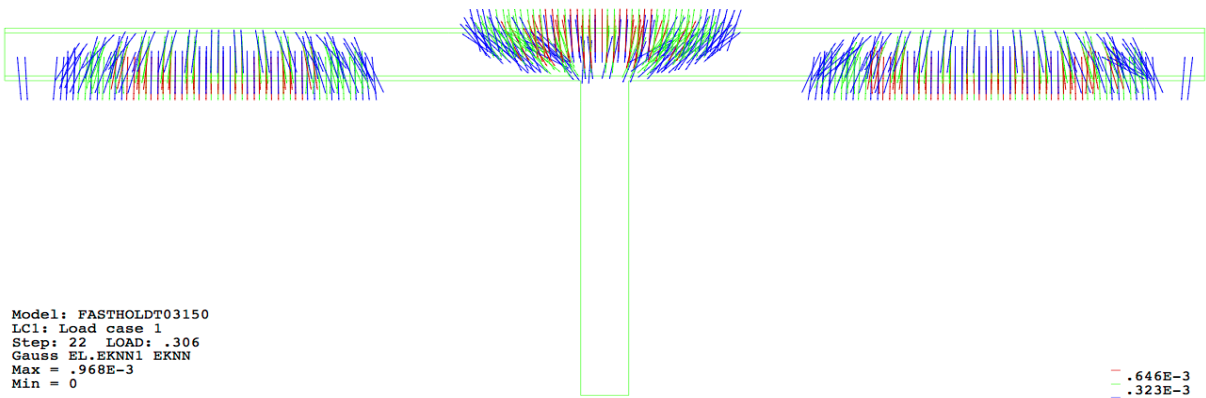
Figur 6.15: Nedbøyning, node 339(høyre felt)

Som en erstatning for manglende momentgraf, understrekes ikke-lineær oppførsel med nedbøyning av midtre node venstre felt (node 25) og høyre felt (node 339). Av figur 6.14 og 6.15 observeres det en lineær nedbøyningsutvikling frem til 100% av q_{Ed} , tilsvarende som ved armeringsspenning- og tøyningene. I figur 6.14 avtar stigningstakten mellom 100%-105% av q_{Ed} , der armeringsspenningen og -tøyningen øker i tilsvarende lastpåføringsperiode. Etter 105% av q_{Ed} flytter midstøtten, og nedbøyningstakten øker. Node 25 har nedbøyningsverdi på 19,8mm ved analyseslutt (110% av q_{Ed}), som er lavere enn bruksgrensetilstanden (Maksimal nedbøyning = $L/250 = 20\text{mm}$). Av figur 6.15 kan det observeres en ikke-lineær nedbøyningsutvikling etter 100% av q_{Ed} frem til 110% , hvor lastomfordelingen stopper. Dette resulterer i økende nedbøyning for konstant prosentvis pålastet q_{Ed} , som indikert i figur 6.15. Dette begrunner dannelsen av flyteleddet som indikert i figur 6.13.

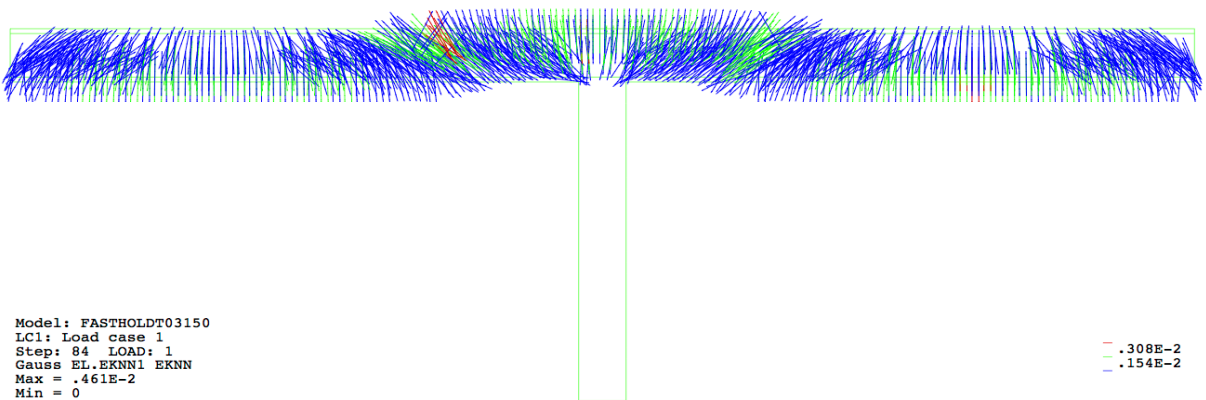
Flyteleddet er området i konstruksjonen med høyest grad av krumning og dermed størst rotasjonskapasitet. Høyre opplager er et glidelager i x-retning, som medfører at søyletoppen vil kunne forflytte seg mot høyre. Søyletoppens forskyvning i høyre retning medfører utstrekning av venstre felt som videre fører til redusert nedbøyning. Dette minker krumning og muligheten for dannelse av flyteledd i venstre felt. Høyre felt innehar større forskyvningsmuligheter, dette medfører at høyre felt ikke har krefter som fører til utstrekning i x-retning i motsetning til venstre felt . Av figur 6.13 kan denne effekten observeres (indikert med piler).



Figur 6.16: Rissdannelser, 10,6% av dimensjonerende last



Figur 6.17: Rissdannelser, 30,6% av dimensjonerende last



Figur 6.18: Rissdannelser, 100% av dimensjonerende last

En vesentlig forutsetning for ikke-lineær oppførsel av armert betong er rissdannelser i konstruksjonen. Tøyning i både betong og armering er sentralt for dannelse av riss samt for den videre utviklingen av den ikke-lineære oppførselen. Da temaet for masteroppgaven ikke omhandler dette, er det kun av underbyggende hensyn at et rissutviklingseksempel fremstilles. Figur 6.16, 6.17 og 6.18 illustrerer rissdannelser for henholdsvis 10,6%, 30,6% og 100% av q_{Ed} . Fargestrekenes retning orienteres parallelt med risset, fargekodene indikerer størrelsesorden for aktuelt riss. For en tofeltsbjelke vil kun de første områdene med rissdannelser være kandidater for potensielle flyteledd. Av figur 6.16 er disse områdene tydelig fremtredende.

7 Konklusjon

Denne oppgaven omhandler momentkapasiteten i fritt opplagte bjelker og plater spent over to felt, med en jevnt fordelt last. Resultater av lineær og ikke-lineær analyse er vurdert og sammenlignet. For lineær elastisk analyse er beregningsmetoder og regler fra EC2 benyttet, samt rammeprogrammet FAP-2D. FEM-programmet DIANA er brukt i den ikke-lineære analysen.

Forskjellige armeringstverrsnitt er sammenlignet, også med hensyn på hvor mye av støttemomentet som kan omlagres eller reduseres. Resultatene av denne sammenligningen vises i tabell 7.1

| | Momentkapasitet over midtstøtte | | | Maksimal momentkapasitet i felt | | | Grad av omlagring |
|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|-----------|---------------------------------|-------------------|-----------|-------------------|
| | Lineær [kNm] | Ikke-lineær [kNm] | Avvik [%] | Lineær [kNm] | Ikke-lineær [kNm] | Avvik [%] | [%] |
| Symmetrisk armert bjelke | 173 | 172 | 0,6 | 173 | 172 | 0,6 | 30 |
| Normalarmert bjelke | 427 | 433 | 1,4 | 336 | 240 | 29 | 4 |
| Realistisk armert bjelke | 356 | 365 | 2,5 | 201 | 200 | 0,5 | 26 |
| Plate | 262 | 268 | 2,2 | 148 | 146 | 1,4 | 20 |
| Bjelke med søyle | 320* | 318 | 0,6 | 201 | 201 | 0 | 26 |

Tabell 7.1: Sammenligning av bjelker og plate

* - momentkapasitet ved bruk av punkt (4) for reduksjon av støttemoment (se 6.1.2)

Resultatene viser at det er lite avvik mellom momentkapasiteten for lineær og ikke-lineær analyse, med unntak av for den normalarmerte bjelken. Her er det 29% større momentkapasitet i feltet ved lineær analyse, sammenlignet med ikke-lineær. Dette kan skyldes den overdimensjonerte armeringen i feltet, som er valgt for å opprettholde et normalarmert tverrsnitt med trykkarmering både i felt og over støtte.

For å redusere armeringsmengden som kreves har vi benyttet både momentomlagring og reduksjon av støttemoment etter EC2. Tabell 6.1 viser hvor mye armering det er å spare på de forskjellige metodene. En kombinasjon av omlagring og reduksjon av støttemoment er det klart mest økonomiske alternativet, men den mer konservative reduksjonen etter punkt (4) (se 6.1.2) gir et resultat som stemmer bedre overens med den ikke-lineære analysen.

Gjennom vårt arbeid har vi kommet frem til at ikke-lineær analyse gir resultater som samsvarer godt med lineær elastisk analyse, der vi tar med virkningen av momentomlagring eller reduksjon av støttemoment. Dette kan dermed virke som hensiktsmessige måter for å redusere armeringsmengden i fritt opplagte bjelker og plater over to felt.

Videre arbeid kunne vært å se på noen eksempler med bruk av plastisk lastvirkningsanalyse, som nevnt i kapittel 2.4.

8 Bibliografi

- [1] Sørensen, S. I. (2015). *Betongkonstruksjoner - Beregning og dimensjonering etter Eurocode 2* (2. utgave. utg.). Fagbokforlaget.
- [2] Bill Mosley, J. B. (2012). *Reinforced Concrete Design to Eurocode 2* (7. utgave. utg.). Palgrave Macmillan.
- [3] A.W. Beeby, R. N. (2009). *Designers' guide to Eurocode 2: Design of concrete structures*. (H. Gulvanessian, Red.) Thomas Telford.
- [4] Hendy, C. R. (2007). *Designers' Guide to EN 1992-2. Eurocode 2 : Design of concrete structures. Part 2: Concrete bridges*. London, GBR: Thomas Telford Publishing.
- [5] Norge, S. (2008). *NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008 Eurokode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger*. Brussel: CEN.
- [6] Larsen, P. K. (2015). *Dimensjonering av stålkonstruksjoner* (2. utgave. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.
- [7] Documentation, D. 1. (u.d.).
- [8] Baltzersen, F. B. (2015). *Numerisk simulering av armert betong, fordypningsprosjekt*. Trondheim.
- Baltzersen, F. B. (2015). *Numerisk simulering av armert betong, fordypningsprosjekt*. Trondheim.