

# Beregning og dimensjonering av betongsøyler

**Morten Ringstad**  
**Frank Sylte**

Bygg- og miljøteknikk (2-årig)

Innlevert: juni 2014

Hovedveileder: Svein Ivar Sørensen, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk



# Beregning og dimensjonering av betongsøyler

*Analysis and design of concrete columns*

Frank Sylte & Morten Ringstad

Masteroppgave

Vår 2014

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Institutt for konstruksjonsteknikk

Ingeniørvitenskap og teknologi

Veileder: Svein Ivar Sørensen



## MASTEROPPGAVE 2014

for

*Morten Ringstad og Frank Sylte*

### Beregning og dimensjonering av betongsøyler

*Analysis and design of concrete columns*

Oppgaven omhandler ulike temaer knyttet til dimensjonering av søyler i betong. Følgende emner skal behandles:

- Bakgrunnsteori for regler i Eurokode 2.
- Produsere dimensjoneringsdiagrammer (M-N) for symmetrisk armerte rektangulære og sirkulære søyleverrsnitt, tilsvarende håndbok av Finnesand.
- Produsere program for usymmetrisk armerte søyleverrsnitt basert på ”Iterasjonsmetoden” som beskrevet i kompendium for emne TKT4222.
- Sammenligning av beregning av slanke søyler basert på rotasjonsinnspenningsgrad og relativ rotasjonsfleksibilitet.
- Avsluttende beregning og dimensjonering av rammesystem i et nærmere angitt betongbygg.

Besvarelsen organiseres i henhold til gjeldende retningslinjer.

*Veileder:* Professor Svein Ivar Sørensen

**Besvarelsen skal leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk innen 10. juni 2014.**

NTNU, 14. januar , 2014

Svein Ivar Sørensen  
faglærer



# Forord

Denne rapporten er utarbeidet ved Institutt for konstruksjonsteknikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Begge forfatterne har bakgrunn fra byggingeniørstudiet ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, og rapporten er skrevet i det avsluttende semesteret av det 2-årige sivilingeniørstudiet Bygg- og miljøteknikk ved NTNU. Arbeidet er utført i løpet 20 uker fra januar til juni 2014, og tilsvarer 30 studiepoeng.

Masteroppgaven omhandler ulike temaer knyttet til beregning av søyler i betong. Innholdet spenner fra dimensjonering av søyler til beregning av knekk lengder og 2.ordens effekter. Noen av temaene har blitt utvidet underveis i arbeidet etterhvert som forfatterne har kommet over relevante problemstillinger. Dette har medført at det er blitt flere utstikkere fra den opprinnelige oppgaveformuleringen.

Arbeidet med oppgaven har blitt organisert slik at begge forfatterne har vært involvert i alle temaene som er behandlet. Dette er gjort for at vi begge skal få det samme læringsutbyttet fra arbeidet med oppgaven. For å utnytte fordelene med å være to har deler av oppgaven blitt utført av oss begge, men med ulike programmer og litt ulik fremgangsmåte. Dette er gjort for å kunne utføre egenkontroller på det arbeidet som er utført.

Rapporten består av fem adskilte temaer knyttet til betongsøyler. Dette har resultert i at oppsettet er noe ulikt et standard rapportoppsett. For å holde rapporten mest mulig oversiktlig er det valgt å dele oppgaven inn etter tema, og ha en egen teori og diskusjonsdel for hvert tema.

Vi vil takke veilederen vår Svein Ivar Sørensen for hjelp og oppfølging gjennom arbeidet. I tillegg vil vi takke Cecilie S. Granerød for hjelp med tekstbehandlingsprogrammet LaTeX.

Trondheim, 09.06.2014

---

Frank Sylte

---

Morten Ringstad





# Sammendrag

I denne masteroppgaven er det sett på ulike beregningsmetoder for betongsøyler. Ved dimensjonering og kapasitetskontroll av symmetrisk armerte betongsøyler benyttes ofte M-N diagrammer. Etter at det gamle regelverket NS 3473 ble erstattet av Eurokode 2, ble eksisterende M-N diagrammer utdatert. Derfor er det i denne oppgaven utarbeidet diagrammer som følger dagens regelverk.

For usymmetrisk armerte søyler er det laget to programmer i Matlab. Begge programmene er basert på likevekt mellom ytre og indre arbeid. Det ene programmet beregner utnyttelsen i et søyleverrsnitt for en gitt armeringsmengde, mens det andre programmet beregner nødvendig armeringsmengde for en gitt tøyningstilstand. Programmene er kontrollert opp mot produserte M-N diagrammer og dimensjoneringsprogrammet Krystall. Resultatene viser at programmene er pålitelige.

Eurokode 2 krever at det skal tas hensyn til 2.ordens effekter for slanke søyler. En forenklet metode for beregning av 2.ordens momenter er foreslått i EC2, mens en annen forenklet metode ble benyttet i NS 3473. Sammenligning av disse to metodene viser at de kun gir små forskjeller i beregning av 2.ordens maksimummomenter.

I tillegg til de forenklede metodene er det laget et rammeprogram for en fullstendig 2.ordens analyse av søyler. Kontroll av de forenklede metodene opp mot rammeprogrammet viser at de forenklede metodene i alle tilfeller overestimerer maksimalt 2.ordens moment, og er derfor konservative. I enkelte tilfeller er de forenklede metodene altfor konservative, noe som kan medføre ekstrakostnader ved dimensjonering.

Søylers knekk lengder blir i EC2 beregnet basert på relativ rotasjonsfleksibilitet, mens i NS 3473 blir de beregnet på bakgrunn av rotasjonsinnspenningsgrad. Sammenligning av ulike typer uforskyvelige søyler viser at de to metodene å beregne knekk lengder på gir tilnærmet like resultater med et største avvik på ca. 1.5%. For forskyvelige søyler er forskjellene noe større, med avvik på opptil 17%.

I oppgavens avsluttende del er det gjort beregninger av et betongbygg. Gjennom dimensjoneringen blir de fleste av temaene i rapporten berørt.



# Abstract

This thesis discusses different calculation methods for concrete columns. When designing symmetrical reinforced concrete columns, M-N diagrams are often used. After the old Norwegian Standard NS 3473 was replaced by Eurocode 2, existing M-N diagrams became outdated. In this thesis, M-N diagrams following today's regulations have therefore been developed.

Concerning unsymmetrical reinforced columns, two programs have been made in Matlab. Both programs are based upon equilibrium between outer- and inner work. One program calculates the utilization of a cross-section for a given amount of reinforcement, while the other program calculates the required reinforcement amount for a given state of strain. Both programs are controlled with the M-N diagrams developed in this thesis, in addition to a design program called Krystall. The results show that the programs are reliable.

Eurocode 2 requires that 2nd order effects should be taken into account for slender columns. A simplified method for calculating 2nd order moments is suggested in EC2, while another simplified method was used in NS 3473. Comparison between these two methods shows only minor differences in the calculation of 2nd order moments.

In addition to the simplified methods, a framework program for full 2nd order analysis of columns have been created. By controlling the simplified methods with the framework program, results show that the simplified methods overestimate the maximum 2nd order moment, and is therefore conservative. In some cases the simplified methods are too conservative, which may result in additional costs when designing columns.

The buckling lengths of columns are in EC2 calculated based on relative rotational flexibility, while in NS 3473 they are calculated on the basis of rotational fixity. Comparison of various types of braced columns shows that the two methods of calculating buckling lengths provide similar results, with a maximum deviation of approximately 1.5 %. For unbraced columns the differences are greater, with deviations up to 17 %.

In the final part of this thesis, the framework of a concrete building have been designed. Throughout the design process, most of the topics in the report are affected.



# Innhold

<b>Forord</b>	<b>iii</b>
<b>Sammendrag</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
<b>2 M-N diagrammer for symmetrisk armerte søyletverrsnitt</b>	<b>3</b>
2.1 Teori . . . . .	3
2.1.1 Bakgrunn . . . . .	3
2.1.2 M-N diagrammers utforming . . . . .	7
2.1.3 Minste eksentrisitet . . . . .	8
2.1.4 Spennings-tøyningssammenheng i betongen . . . . .	8
2.1.5 Spennings-tøyningssammenheng i armering . . . . .	10
2.2 M-N beregninger . . . . .	11
2.2.1 Microsoft Excel . . . . .	11
2.2.2 Rektangulære tverrsnitt . . . . .	13
2.2.3 Sirkulære tverrsnitt . . . . .	18
2.3 Diskusjon . . . . .	26
<b>3 Usymmetrisk armerte søyletverrsnitt</b>	<b>27</b>
3.1 Iterasjonsmetoden . . . . .	27
3.1.1 Teori . . . . .	27
3.1.2 Program basert på Iterasjonsmetoden . . . . .	34
3.1.3 Talleksempel . . . . .	36
3.2 Metode hvor armeringsmengde løses direkte fra likevekt . . . . .	37
3.2.1 Teori . . . . .	37
3.2.2 Program basert på metoden hvor armeringsmengden løses direkte fra likevekt . . . . .	38
3.2.3 Talleksempel . . . . .	38

3.3	Kontroll med Krystall . . . . .	39
3.4	Diskusjon . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Andre ordens lasteffekter</b>	<b>43</b>
4.1	Teori . . . . .	43
4.2	Rammeprogram for beregning av 2.ordens momentfordeling i søyler . .	46
4.3	Sammenligning med Focus . . . . .	50
4.4	Diskusjon . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Beregning av slanke søyler basert på rotasjonsinnspenningsgrad og relativ rotasjonsfleksibilitet</b>	<b>55</b>
5.1	Teori . . . . .	55
5.1.1	Knekk lengder basert på rotasjonsinnspenningsgrad . . . . .	57
5.1.2	Knekk lengder basert på relative rotasjonsfleksibiliteter . . . . .	58
5.1.3	Andre ordens momenter basert på nominell krumning . . . . .	59
5.2	Sammenligning av knekk lengder . . . . .	61
5.2.1	Uforskyvelige søyler . . . . .	63
5.2.2	Forskyvelige søyler . . . . .	65
5.3	Sammenligning av 2.ordens momenter . . . . .	66
5.3.1	Uforskyvelige rammer . . . . .	67
5.3.2	Forskyvelig enkeltkrum ramme . . . . .	67
5.3.3	Forskyvelig dobbeltkrum ramme . . . . .	69
5.4	Diskusjon . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Eksempelbygg</b>	<b>73</b>
6.1	Laster og lastkombinasjoner . . . . .	75
6.2	Statisk system . . . . .	77
6.3	Dimensjonering . . . . .	78
6.4	Diskusjon . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Oppsummering og videre arbeid</b>	<b>85</b>
	<b>Referanser</b>	<b>xv</b>
	<b>Vedlegg</b>	<b>xvii</b>

# Figurer

2.1	Ytre og indre krefter i et rektangulært betongtverrsnitt . . . . .	4
2.2	M-N diagram for rektangulær søyle . . . . .	5
2.3	Dimensjonsløst M-N diagram for rektangulær søyle . . . . .	6
2.4	Balansepunkt for et rektangulært tverrsnitt . . . . .	7
2.5	Parabel-rektangel diagram for betong under trykk . . . . .	9
2.6	Rektangulær spenningsfordeling for betong under trykk . . . . .	10
2.7	Spennings-tøyningssammenheng for armeringsstål . . . . .	11
2.8	Minsteeksentrisitet . . . . .	12
2.9	Trykkresultant i betongen, rektangulært tverrsnitt . . . . .	14
2.10	Endelig M-N diagram, rektangulært tverrsnitt . . . . .	17
2.11	Ytre og indre krefter i et sirkulært betongtverrsnitt . . . . .	18
2.12	Integrasjonsgrenser for betongen i et sirkulært tverrsnitt . . . . .	19
2.13	Integrasjonsområde for armeringen . . . . .	21
2.14	Armeringstykkelsen innvirkning på kapasitetskurver . . . . .	21
2.15	Integrasjonsgrenser for armeringen i et sirkulært tverrsnitt . . . . .	22
2.16	Endelig M-N diagram, sirkulært tverrsnitt . . . . .	25
3.1	Definisjon av middeltøyning og krumning . . . . .	28
3.2	Inndeling av tverrsnittet i lameller . . . . .	30
3.3	Oppdatering av E-modul i betongen . . . . .	32
3.4	Visualisering av iterasjonsprosessen . . . . .	33
3.5	Tverrsnittparametre . . . . .	35
3.6	Tverrsnitt brukt i talleksempel . . . . .	36
4.1	1. og 2.ordens effekter i en utkraget søyle . . . . .	44
4.2	Likevektsbetraktning etter 1. og 2.ordens teori . . . . .	44
4.3	Generell rammemodell . . . . .	47
4.4	Fire rammeeksempler . . . . .	51
5.1	Knekkledder for standardsøyler . . . . .	56
5.2	Definisjon på uforskyvelig/forskyvelig ramme . . . . .	56

5.3	Søyle med forenklede randbetingelser . . . . .	61
5.4	Utvalgte kombinasjoner av stivhetsforholdet $x$ . . . . .	63
5.5	Knekk lengder for uforskyvelig søyle, $x_b = 0$ . . . . .	63
5.6	Knekk lengder for uforskyvelig søyle, $x_b = \infty$ . . . . .	64
5.7	Knekk lengder for forskyvelig søyle, $x_b = 0$ . . . . .	65
5.8	Knekk lengder for forskyvelig søyle, $x_b = \infty$ . . . . .	65
5.9	Utbøyningsform for forskyvelig søyle . . . . .	68
5.10	Momentforløp i forskyvelig enkeltkrum søyle . . . . .	69
5.11	Momentforløp i forskyvelig dobbeltkrum søyle . . . . .	70
6.1	Plan - alle etasjer . . . . .	74
6.2	Snitt B-B . . . . .	74
6.3	Snitt A-A . . . . .	75
6.4	Statisk system for taket . . . . .	77
6.5	Armering for taket over støtte . . . . .	79
6.6	Armering for taket i felt . . . . .	79
6.7	Armering for takbjelker over støtte og i felt . . . . .	80
6.8	Armering for gulvbjelker over støtte og i felt . . . . .	80
6.9	Armering for søyler i alle tre etasjer . . . . .	82



# Tabeller

3.1	Sammenligning mellom iterasjonsprogrammet og Krystall . . . . .	40
4.1	Sammenligning mellom Matlab og Focus . . . . .	52
5.1	Maksmomenter i uforskyvelige søyler . . . . .	67
5.2	Maksmomenter i forskyvelig enkeltktrum søyle . . . . .	68
5.3	Maksmomenter i forskyvelig dobbeltktrum søyle . . . . .	69



# Kapittel 1

## Innledning

I mars 2010 ble alle prosjekteringsstandardene i NS 34XX-serien trukket tilbake og erstattet av Eurokodene. Innføringen av Eurokode 2 [1] i stedet for NS 3473 [2] medførte enkelte forandringer i både materialmodeller og beregningsmetoder for betongkonstruksjoner. En av konsekvensene er at M-N diagrammer basert på den gamle standarden ikke lenger er gyldige. M-N diagrammer er et nyttig verktøy for dimensjonering av betongsøyler, og derfor er det i denne oppgaven utarbeidet nye M-N diagrammer etter det gjeldende regelverket.

M-N diagrammer er best egnet for symmetrisk armerte tverrsnitt, men i andre tilfeller er det ønskelig å armere søyler usymmetrisk. For slike søyler benyttes andre beregningsmetoder. I denne oppgaven vil det bli sett på en metode kalt Iterasjonsmetoden. Metoden baser seg på å kreve likevekt av indre og ytre krefter i et tverrsnitt. Dette er en metode som egentlig benyttes for dimensjonering av skall, men kan også benyttes for søyler. I denne oppgaven er det kun søyler som studeres, noe som medfører at metoden kan forenkles betraktelig sammenlignet med dimensjonering av skall.

Ved innføring av EC2 [1] ble beregning av søylers knekk lengder endret. I det gamle regelverket ble knekk lengder beregnet på grunnlag av rotasjonsinnspenningsgrad, mens i EC2 er knekk lengder beregnet basert på relativ rotasjonsfleksibilitet. Den gamle metoden er utledet rent teoretisk, mens den nye kun er basert på tilpasning til numeriske simuleringer. For å undersøke om metodene gir forskjeller i knekk lengder, vil disse bli sammenlignet. For enkelte søyler er knekk lengden kjent og begge metodene burde derfor være i stand til å beregne disse med god nøyaktighet.

Slanke søyler må ifølge EC2 dimensjoneres for andre ordens effekter. I NS 3473 er det foreslått en tilnærmet metode for å finne 2.ordens momentforløp ved bruk av søylens infleksjonspunkter. Med innføringen av metoden basert på relativ rotasjonsfleksibilitet falt muligheten for å beregne søylers infleksjonspunkter bort. Derfor er det i Eurokoden

foreslått en annen forenklet formel for beregning av 2.ordens momenter uten infleksjonspunkter. Sammenligninger av 2.ordens momenter beregnet med de to metodene er utført for å se om metoden i EC2 er like god som den i det gamle regelverket. Begge de nevnte metodene gir kun tilnærminger til korrekt 2.ordens momentforløp. Derfor er det valgt å utvide oppgaven til å i tillegg omfatte et program som beregner eksakt 2.ordens momentforløp for søyler.

Som en avsluttende del av oppgaven er det gjort beregninger av et betongbygg. Bakgrunnen for dette er å få brukt de fleste beregningsmetodene presentert i oppgaven i en virkelig dimensjoneringsprosess.

# Kapittel 2

## M-N diagrammer for symmetrisk armerte søyleverrsnitt

### 2.1 Teori

#### 2.1.1 Bakgrunn

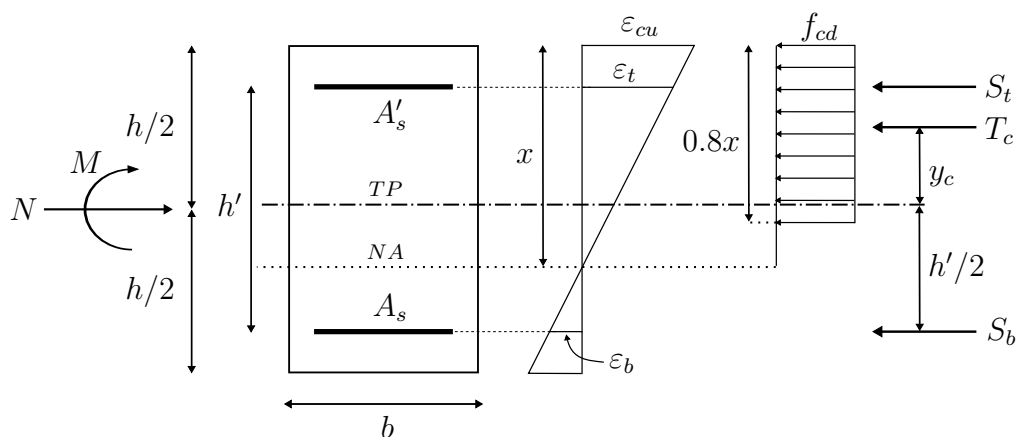
Søylar er ofte påkjent av en kombinasjon av moment og aksialkrefter. Disse vil skape indre krefter som må vere i likevekt med de ytre påkjenningene. Den nødvendige armeringsmengden som tilfredsstillar likevekt i søylen kan dermed bestemmes. I dette kapitlet vil det bli vist hvordan dette kan gjeres, samt hvorfor M-N diagrammer er et nyttig dimensjoneringsverktøy.

Figur 2.1 viser et rektangulært tverrsnitt som er påkjent av både en aksialkraft og et moment. I figuren er det valgt å benytte en rektangulær spenningsfordeling for betongen. Grunnen til dette er for å gjere likevektsberegningene mest mulig oversiktlige.

Horisontal- og momentlikevekt av tverrsnittet gir følgende uttrykk for de ytre kreftene:

$$N = T_c + S_b + S_t \quad (2.1)$$

$$M = T_c \cdot y_c + S_t \cdot h'/2 - S_b \cdot h'/2 \quad (2.2)$$



Figur 2.1: Ytre og indre krefter i et rektangulært betongtverrsnitt

Med den rektangulære spenningsfordelingen kan uttrykkene videre skrives som:

$$N = 0.8bx f_{cd} + A'_s \cdot \sigma_t + A_s \cdot \sigma_b \quad (2.3)$$

$$M = 0.8bx f_{cd} \cdot (0.5h - 0.4x) + (A'_s \cdot \sigma_t - A_s \cdot \sigma_b) \cdot h'/2 \quad (2.4)$$

Likning (2.3) og (2.4) kan forenkles ved å anta symmetrisk armering,  $A_s = A'_s$ . Dersom det bestemmes en bredde og høyde på betongtverrsnittet i tillegg til betongkvalitet, oppnås to likninger med to ukjente,  $A_s$  og  $x$ . Disse likningene er ikke enkle å løse siden tøyningen i armeringslagene er funksjoner av trykksonehøyden. Likning (2.5) viser tøyningen i topparmeringen uttrykt ved  $x$ .

$$\varepsilon_t(x) = \varepsilon_{cu} \cdot \left(1 - \frac{h - h'}{2x}\right) \quad (2.5)$$

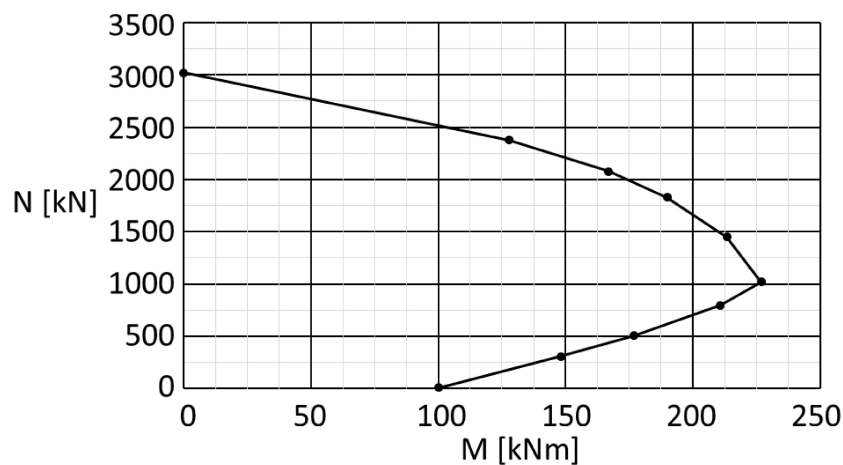
Siden armeringstøyningene er uttrykt ved  $x$ , vil spenningene også avhenge av  $x$  gjennom forholdet  $\sigma_s(x) = E_s \cdot \varepsilon(x)$ . Dette lineære forholdet gjelder imidlertid kun frem til armeringen når flyttøyning. Etter dette er armeringsspenningen lik flytspenning  $f_{yd}$ .

Dersom likning (2.3) og (2.4) skal kunne løses direkte, må det derfor først avgjøres om armeringen i tverrsnittet flyter eller ikke. Det er fire alternativer som må vurderes:

- Både strekk og trykkarmering flyter
- Bare strekkarmering flyter
- Bare trykkarmering flyter
- Hverken strekk eller trykkarmering flyter

Før likningene løses må det derfor antas hvilket av de fire tilfellene som gjelder, for så å kontrollere om antagelsen stemmer etterpå. Hvis antagelsen viser seg å ikke stemme, må et nytt tilfelle antas og beregningene gjøres på nytt. Dette er en arbeidskrevende prosess og er ikke godt egnet til praktisk dimensjonering.

Det er derimot betydelig enklere å gå motsatt vei. For et gitt tverrsnitt med en bestemt armeringsmengde, kan tverrsnittets kapasitet beregnes direkte etter likning (2.3) og (2.4) for ulike verdier av  $x$ . Resultatet fra disse beregningene kan så plottes i et diagram med moment langs den ene aksens og aksialkraft langs den andre. Ved å trekke linjer mellom de ulike punktene oppnås en kapasitetskurve for det aktuelle tverrsnittet, og en slik kurve kalles et M-N diagram, som vist i Figur 2.2.



Figur 2.2: M-N diagram for rektangulær søyle (300x500, B30,  $A_s = 586.5\text{mm}^2$ ,  $c = 100\text{mm}$ )

Alle kombinasjoner av momenter og aksialkrefter som ligger innenfor kapasitetskurven har tverrsnittet tilstrekkelig kapasitet til å tåle. Dersom den aktuelle M-N kombinasjonen ligger utenfor kapasitetskurven, er kapasiteten for liten og tverrsnittet må endres. Dette kan gjøres enten ved å endre på betongdimensjonene, betongkvaliteten eller armeringen. Beregningene utføres deretter på nytt for det nye tverrsnittet, og M-N kombinasjonen kontrolleres opp mot den nye kapasitetskurven. Denne prosessen gjentas helt til det er funnet et tverrsnitt som har tilstrekkelig kapasitet.

Dersom M-N kombinasjonen ligger langt innenfor kurven, har tverrsnittet høyere kapasitet enn nødvendig. Bruk av unødvendig mye betong og armering medfører høyere kostnader, og derfor er det heller ikke gunstig å ha for stor overkapasitet. På samme måte som for lav kapasitet, bør tverrsnittet optimaliseres.

Optimaliseringsprosessen er tidkrevende og gjør at dimensjonering ikke er praktisk. For å spare seg for denne prosessen er det mulig å lage dimensjonsløse M-N diagrammer. Dette kan oppnås ved å innføre de dimensjonsløse uttrykkene:

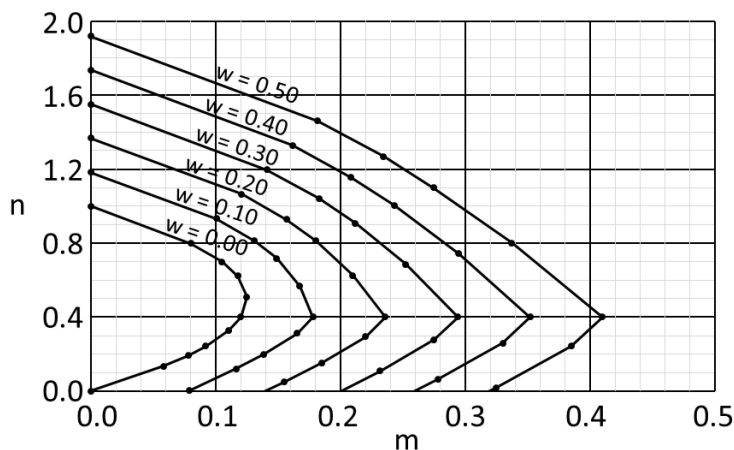
$$n = \frac{N}{f_{cd} \cdot b \cdot h} \quad m = \frac{M}{f_{cd} \cdot b \cdot h^2} \quad w = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot b \cdot h} \quad (2.6)$$

Disse uttrykkene gjør at M-N diagrammene ikke lenger av avhengig av betongkvalitet og tverrsnittsdimensjoner. De dimensjonsløse uttrykkene for  $M$  og  $N$  blir da som vist i likning (2.7) og (2.8):

$$n = 0.8 \frac{x}{h} + \frac{\sigma_t + \sigma_b}{f_{yd}} \cdot w \quad (2.7)$$

$$m = 0.8 \frac{x}{h} \cdot \left( 0.5 - 0.4 \frac{x}{h} \right) + \frac{\sigma_t - \sigma_b}{2f_{yd}} \cdot \frac{h'}{h} \cdot w \quad (2.8)$$

Kapasitetskurvene vil nå kun avhenge av armeringsplasseringen  $h'/h$ , det mekaniske armeringsforholdet  $w$  og tøyningstilstanden. Dersom det velges en verdi for armeringsplasseringen, avhenger den dimensjonsløse kapasitetskurven kun av det mekaniske armeringsforholdet og tøyningstilstanden. For en gitt armeringsplassering kan det da lages kapasitetskurver for ulike verdier av  $w$ , som vist i Figur 2.3.



Figur 2.3: Dimensjonsløst M-N diagram for rektangulær søyle med  $h'/h = 0.6$  og utvalgte mekaniske armeringsforhold  $w$

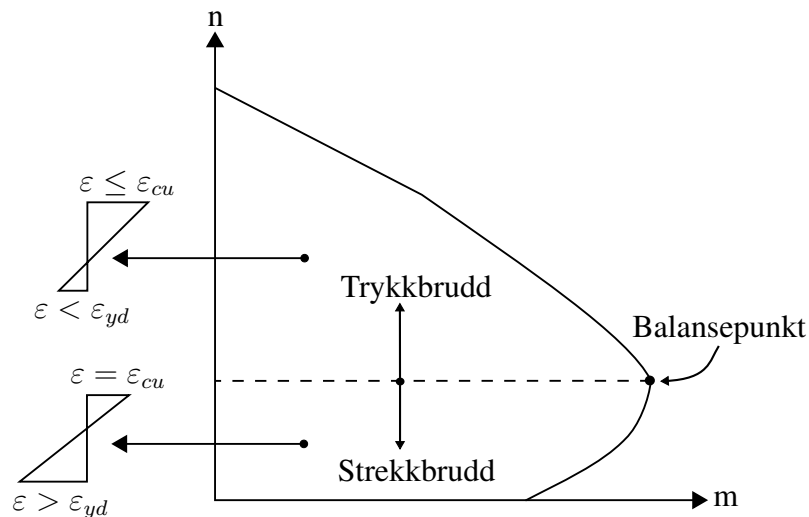


Med dimensjonsløse M-N diagrammer blir dimensjoneringsprosessen langt mindre tidkrevende. Etter at størrelsen på momentet og aksialkraften i betongsøylen er bestemt, kan  $m$  og  $n$  beregnes. Deretter kan et dimensjonsløst diagram benyttes til å finne en kapasitetskurve som omslutter dette punktet. Til slutt kan nødvendig armering løses ut fra uttrykket for  $w$  i likning (2.6).

## 2.1.2 M-N diagrammers utforming

Figur 2.3 viser at tverrsnittet har sin største momentkapasitet når den dimensjonsløse aksialkraften  $n$  er omtrent lik 0.4. Dette punktet i M-N diagrammet kalles balansepunktet, og det kjennetegnes av at trykkbrudd forekommer i betongen samtidig med at strekkarmeringen starter å flyte. Ved aksialkrefter som ligger over balansepunktet har strekkarmeringen ikke nådd flytspenning og brudd defineres som et trykkbrudd, se Figur 2.4. Når aksialkraften har en lavere verdi enn i balansepunktet, har strekkarmeringen nådd flytspenning og brudd defineres som et strekkbrudd.

Fra balansepunktet avtar momentkapasiteten både hvis aksialkraften økes eller reduseres. Grunnen til at momentkapasiteten øker opp til dette punktet, er at aksialkraften gir større trykkraft i betongen, mens strekkraften i armeringen er konstant siden armeringen flyter under balansepunktet. Over balansepunktet flyter ikke lenger strekkarmeringen og en økning i aksialkraften vil dermed medføre lavere spenning i strekkarmeringen. Kraften i betongen vil fortsatt øke også over balansepunktet, men reduksjonen i både strekkraft og betongtrykkresultantens arm fører til at momentkapasiteten avtar.



Figur 2.4: Balansepunkt for et rektangulært tverrsnitt

For sirkulære tverrsnitt er armeringen spredt jevnt rundt tverrsnittet. Deler av armeringen kan derfor nå flytspenning mens resten av armeringen ikke gjør det. Det gir derfor ikke noen mening å definere et balansepunkt for sirkulære tverrsnitt.

### 2.1.3 Minste eksentrisitet

I henhold til EC2, 6.1.(4) er det for et tverrsnitt påkjent av en trykkraft nødvendig å anta en minste eksentrisitet gitt ved:

$$e_0 = \min(20\text{mm}, h/30) \quad (2.9)$$

Minsteeksentrisiteten fører til at det i søyler som kun er påkjent av en aksialkraft også må regnes med et moment. Dette momentet kan beregnes som:

$$M = e_0 \cdot N \quad (2.10)$$

Ved å innføre de to verdiene for minsteeksentrisiteten i likning (2.10), kan det dimensjonsløse momentet uttrykkes som vist i likning (2.11).

$$\begin{aligned} e_0 = \frac{h}{30} : \quad M = \frac{h}{30} \cdot N \quad \Rightarrow \quad m = \frac{n}{30} \\ e_0 = 20\text{mm} : \quad M = 20\text{mm} \cdot N \quad \Rightarrow \quad m = \frac{20\text{mm}}{h} \cdot n \end{aligned} \quad (2.11)$$

Likning (2.11) viser at sammenhengen mellom  $m$  og  $n$  ikke blir dimensjonsløs når det benyttes en minsteeksentrisitet lik 20mm. Det er derfor ikke mulig å benytte denne minsteeksentrisiteten i dimensjonsløse M-N diagrammer. På grunnlag av dette vil kun  $h/30$  bli brukt som minsteeksentrisitet.

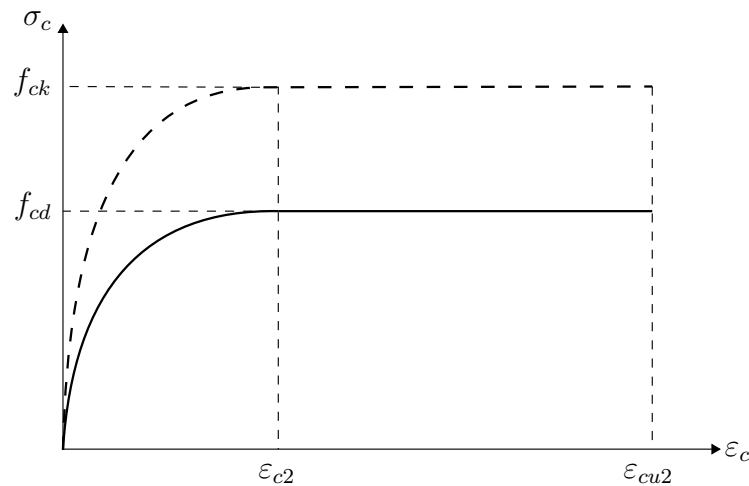
### 2.1.4 Spennings-tøyningsssammenheng i betongen

Betongtrykkresultanten  $T_c$  avhenger av hvilken spennings-tøyningsssammenheng som er valgt for betongen. I EC2, 3.1.7 er det vist to alternative diagrammer for sammenhengen mellom spenninger og tøyninger i betong, samt en forenklet spenningsfordeling som også kan benyttes:

- Parabel-rektangel diagram
- Bilineært diagram
- Rektangulær spenningsfordeling

Spennings-tøyningssammenhengen som ligger nærmest virkeligheten, og som derfor er benyttet i denne oppgaven, er den parabel-rektangelformede sammenhengen. Navnet på denne sammenhengen er langt og uhåndterlig, og vil derfor omtales videre som den kurvede spenningsammenhengen.

Den kurvede spenningsammenhengen er vist i Figur 2.5 og beskrevet gjennom likning (2.12) og (2.13). Ifølge EC2, 6.1(3) og 6.1(5) skal tøyninger begrenses til  $\varepsilon_{cu2}$  for bøyning, og  $\varepsilon_{c2}$  for rent trykk. Verdiene for  $\varepsilon_{cu2}$  og  $\varepsilon_{c2}$  avhenger av betongklasse, og er gitt i EC2, Tabell 3.1.



Figur 2.5: Parabel-rektangel diagram for betong under trykk

$$\sigma_c = f_{cd} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right) \quad \text{for} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \quad (2.12)$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{for} \quad \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu2} \quad (2.13)$$

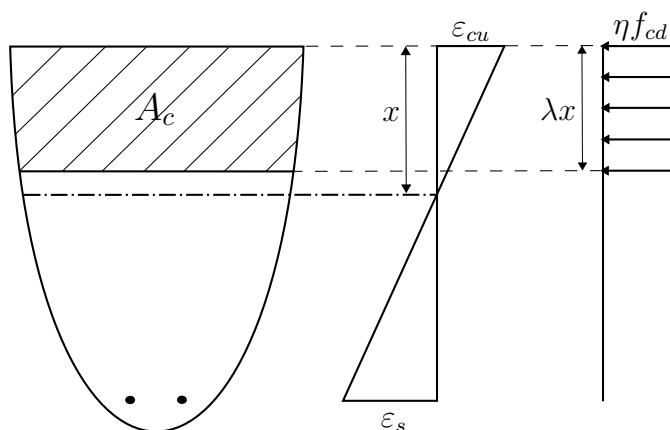
Likningen for den parabelformede delen av kurven avhenger av tøyningen,  $\varepsilon$ . Dette gjør at spenninger må integreres over tverrsnittet dersom kraften i betongen skal beregnes. Valg av denne spenningsfordelingen medfører derfor en stor andel integralberegninger i det videre arbeidet som er gjort i denne rapporten.

For betongklasser opp til og med B50 kan verdien på  $n$  og  $\varepsilon_{c2}$  i likning (2.12) settes lik henholdsvis 2 og 2‰. Dette gjør integrasjon av spenninger betydelig enklere, og likning (2.12) kan forenkles til:

$$\sigma_c = f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \quad \text{for} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \quad (2.14)$$

På grunnlag av dette er det valgt å lage M-N diagrammer som kun er gyldig opp til og med betongklasse B50.

I tillegg til den kurvede spenningsssammenhengen vil det senere i rapporten også bli behov for å se nærmere på den rektangulære spenningsfordelingen. Denne er vist i Figur 2.6. Her defineres en effektiv høyde av trykksonen,  $\lambda \cdot x$ , som det antas at har en konstant spenning lik  $\eta \cdot f_{cd}$ . Faktorene  $\lambda$  og  $\eta$  er definert i henhold til likning (2.15) og (2.16).



Figur 2.6: Rektangulær spenningsfordeling for betong under trykk

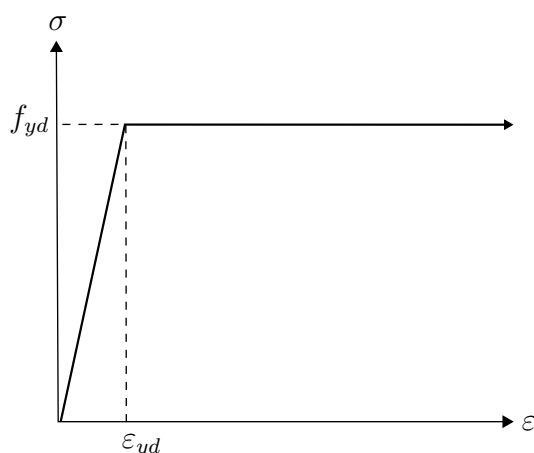
$$\begin{aligned} \lambda &= 0.8 && \text{for } f_{ck} \leq 50\text{MPa} \\ \lambda &= 0.8 - (f_{ck} - 50)/400 && \text{for } 50\text{MPa} \leq f_{ck} \leq 90\text{MPa} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1.0 && \text{for } f_{ck} \leq 50\text{MPa} \\ \eta &= 1.0 - (f_{ck} - 50)/200 && \text{for } 50\text{MPa} < f_{ck} \leq 90\text{MPa} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Siden spenninger er konstante over den effektive trykksonehøyden, kan betongtrykkresultanten,  $T_c$  beregnes som spenning multiplisert med areal hvor angrepspunktet til kraften ligger midt i den effektive høyden. Dette gjør at denne metoden er svært mye enklere å bruke i beregninger.

### 2.1.5 Spennings-tøyningsssammenheng i armering

Den dimensjonerende spennings-tøyningsssammenhengen som brukes for armeringsstålet i både strekk og trykk er gitt i EC2, 3.2.7. Dimensjonerende verdi av elastitetsmodulen  $E_s$ , kan ifølge EC2, 3.2.7(4) settes lik 200 GPa. Det er valgt å se bort fra fastning i armeringen. Dermed vil spennings-tøyningsforløpet se ut som vist i Figur 2.7, og som beskrevet i likning (2.17) og (2.18).



Figur 2.7: Spennings-tøyningssammenheng for armeringsstål (for strekk og trykk)

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon \quad \text{for} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \quad (2.17)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{for} \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \quad (2.18)$$

## 2.2 M-N beregninger

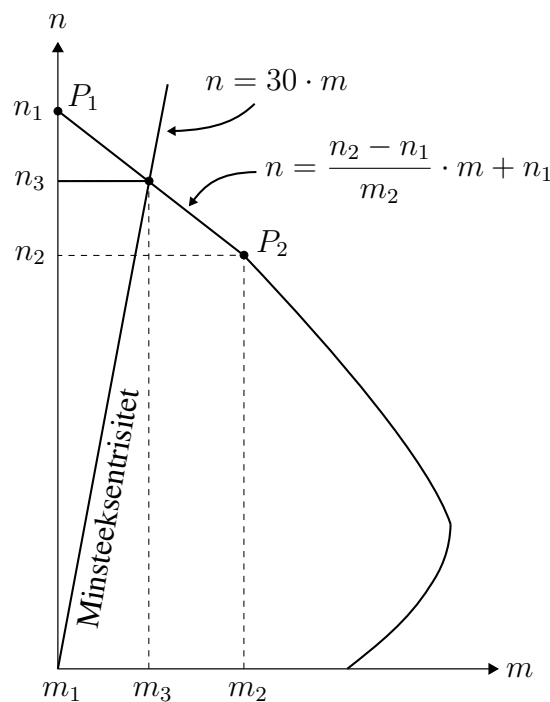
I denne oppgaven har det blitt utarbeidet M-N diagrammer for både rektangulære og sirkulære tverrsnitt med ulike verdier for armeringens plassering. For å utføre beregningene og for å lage diagrammene, har to programmer blitt vurdert, Microsoft Excel og Matlab. Grunnen til at begge disse to programmene ble vurdert er at de egner seg til to forskjellige beregningsmåter. Matlab er godt egnet for numeriske beregninger, mens Excel har flere muligheter til å styre selve utformingen av de endelige M-N diagrammene. I denne oppgaven er det valgt å lage M-N diagrammer i Excel. Som en egenkontroll, er beregningene i tillegg gjort numerisk i Matlab. En sammenligning mellom beregninger gjort i Excel og Matlab finnes i vedlegg E.

### 2.2.1 Microsoft Excel

I M-N diagrammer betraktes mange ulike tøyningstilstander, fra rent trykk til stor tøyning i strekkarmering. I denne rapporten vil det første punktet i et M-N diagram være ved rent trykk, mens punkt to er ved null tøyning i bunnen av tverrsnittet. Disse er vist som henholdsvis  $P_1$  og  $P_2$  i Figur 2.8. Kapasitetskurven mellom disse to punktene er lineær.

En grunn til at det er valgt å ikke ta med flere punkter mellom  $P_1$  og  $P_2$ , er at betongtrykkføyningen i overkant av tverrsnittet endres fra  $\varepsilon_{c2}$  til  $\varepsilon_{cu2}$ . I EC2 er det ikke definert hvordan denne endringen foregår, og derfor er det valgt å anta en lineær endring. En annen fordel med å ha en rett linje mellom  $P_1$  og  $P_2$ , er at begrensningen som minsteeksentrisiteten setter enkelt kan tas hensyn til.

I Figur 2.8 er skjæringspunktet  $(m_2, n_2)$  mellom linjen  $P_1$ - $P_2$  og minsteeksentrisiteten vist. Ved å sette uttrykkene for de rette linjene lik hverandre, kan skjæringspunktet beregnes. Punkt  $P_1$  kan deretter oppdateres ved å sette  $n_1 = n_3$ .



Figur 2.8: Minsteeksentrisitetens innvirkning på kapasitetskurver

Kapasitetskurven fra punkt  $P_2$  og videre kan uttrykkes som en funksjon. Her blir tøyningene i underkant av tverrsnittet variert fra 0 til 300‰. Valget av akkurat 300‰ som største verdi, har ingen annen betydning enn at det er en tilstrekkelig tøyning til å få kurvene til å krysse  $m$ -aksen. For å få en jevn kurve rundt balansepunktet til kapasitetskurven, er det valgt å øke tøyningene i små steg,  $\Delta\varepsilon = 0.05\%$ .

Når det gjelder selve utformingen til M-N diagrammene, er denne gjort på tilsvarende måte som i Finnesand [3]. Valg av både armeringsplassering ( $h'/h$ ) og mekanisk armeringsforhold ( $w$ ) vil derfor være de samme som Finnesand har valgt.

## 2.2.2 Rektangulære tverrsnitt

Likevektslikningene for et rektangulært tverrsnitt er allerede vist i likning (2.1) og (2.2). Det som gjenstår for å kunne beregne dimensjonsløse uttrykk for  $m$  og  $n$ , er å uttrykke kreftene i armeringen og betongen som en funksjon av tøyningstilstanden.

### Krefter i armeringen

Før strekk- og trykkraften i armeringen kan løses, må armeringstøyningen bestemmes.

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{cu2} - \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot (h - c) = \varepsilon_{cu2} \left( 1 - \frac{1 - c/h}{x/h} \right) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{cu2} - \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot c = \varepsilon_{cu2} \left( 1 - \frac{c/h}{x/h} \right) \quad (2.20)$$

Hvor  $\varepsilon_b$  er tøyningen i bunnarmeringen,  $\varepsilon_t$  er tøyningen i topparmeringen og  $c$  er avstanden fra ytterkant av betongen til senter i armeringen.

Spenninger i armeringslagene kan nå beregnes etter Hooke's lov for tøyninger mindre enn flyttøyning. For tøyningsverdier utover dette gjelder flytspenning. Kraftene i armeringslagene beregnes deretter som spenning multiplisert med areal. For å holde kontroll på kreftenes retning, er det valgt å sette alle trykktøyninger som positive og strekktøyninger som negative. Gjennom Hooke's lov vil spenninger dermed være positive ved trykk.

### Trykkresultant i betongen

Betongtrykkresultanten finnes ved å integrere spenningene over tverrsnittet:

$$T_c = \iint_A \sigma dA = b \int_0^h \sigma dy \quad (2.21)$$

Hvor  $y$  er avstanden fra nøytralaksen, som vist i Figur 2.9.

I stedet for å integrere over høyden, er det valgt å løse integralet ved å integrere over tøyningene i tverrsnittet. Følgende sammenheng mellom  $\varepsilon$  og  $y$  benyttes:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \cdot y \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{x}{\varepsilon_{cu}} \cdot d\varepsilon \quad (2.22)$$

Trykksonehøyden  $x$  kan deretter beregnes etter likning (2.23).

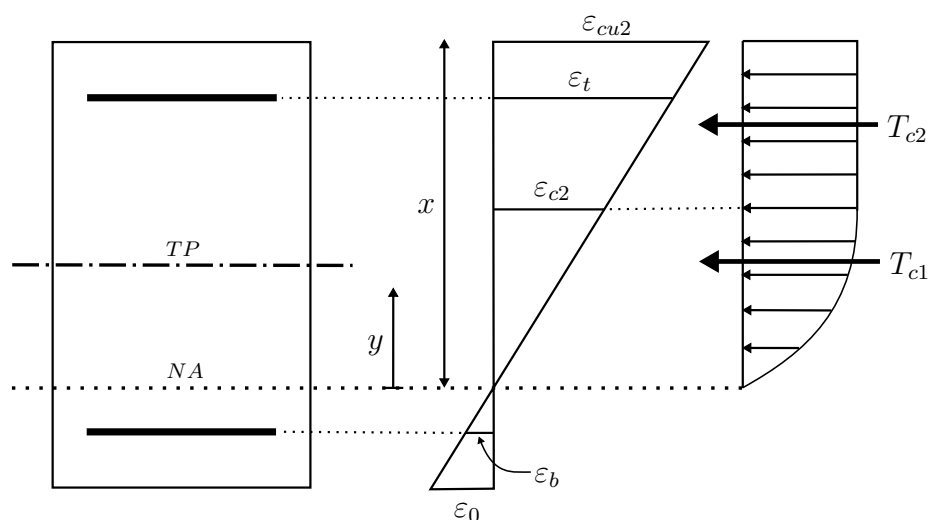
$$\frac{\varepsilon_{cu2}}{x} = \frac{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_0}{h} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_0} \cdot h \quad (2.23)$$

Siden det antas at betongen ikke har noen kapasitet i strekk, er det kun nødvendig å integrere over trykksonen av betongen. Ved å substituere for  $dy$  i likning (2.21), kan integralet skrives som:

$$T_c = b \int_0^{\varepsilon_{cu2}} \sigma_c \cdot \frac{x}{\varepsilon_{cu2}} d\varepsilon \quad (2.24)$$

Likning (2.24) forutsetter at punktet med null tøyning ligger innenfor betongtverrsnittet, dvs. at likningen kun er gyldig når tøyningen i underkant av tverrsnittet er mindre eller lik null (strekk). Dette vil imidlertid ikke skape noen problemer siden integrasjonen kun gjelder fra punkt  $P_2$  og videre, se Figur 2.8.

Det siste som gjenstår før integralet kan løses, er å sette inn for  $\sigma_c$ . Siden spennings-tøyningssammenhengen for betongen er todelt, må integralet også deles inn i to deler. Disse to delene gir hver sin trykkresultant,  $T_{c1}$  og  $T_{c2}$ , som vist i likning (2.25) og (2.26).  $T_{c1}$  er kraften i den parabelformede delen av spennings-tøyningssammenhengen, mens  $T_{c2}$  er kraften i den rektangulære delen, se Figur 2.9.



Figur 2.9: Integrasjon av spenninger i betongen gir to bidrag til trykkresultanten,  $T_{c1}$  og  $T_{c2}$



$$T_{c1} = \frac{bx}{\varepsilon_{cu2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) d\varepsilon \quad (2.25)$$

$$T_{c2} = \frac{bx}{\varepsilon_{cu2}} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} f_{cd} d\varepsilon \quad (2.26)$$

Løsningen av disse integralene finnes i vedlegg A.1.

Total trykkraft i betongen kan til slutt beregnes som:

$$T_c = T_{c1} + T_{c2} \quad (2.27)$$

### Betongtrykkresultantens angrepunkt

Angrepunktet til trykkraften finnes ved å se på momentlikevekt om et valgt punkt. Trykkresultanten multiplisert med avstanden fra punktet skal gi samme moment som når spenningene multiplisert med sin arm integreres over tverrsnittet.

$$M_c = y_c \cdot T_c \quad (2.28)$$

Siden trykkresultanten allerede er funnet, gjenstår det bare å finne et uttrykk for momentet  $M_c$ . Dette gjøres på tilsvarende vis som for trykkraften, men nå må også avstanden  $y$  fra integrasjonspunktet tas med. Også her er det valgt å integrere over tøyningene og substituere inn uttrykk for  $y$  og  $dy$ .

$$M_c = \iint_A \sigma_c y dA = b \int_0^h \sigma_c y dy = b \int_0^{\varepsilon_{cu}} \sigma_c \cdot \frac{x}{\varepsilon_{cu2}} \varepsilon \cdot \frac{x}{\varepsilon_{cu2}} d\varepsilon \quad (2.29)$$

Av samme årsaker som for trykkresultanten, deles integralet inn i to deler,  $M_{c1}$  og  $M_{c2}$ :

$$M_{c1} = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \varepsilon d\varepsilon \quad (2.30)$$

$$M_{c2} = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu}} f_{cd} \cdot \varepsilon d\varepsilon \quad (2.31)$$

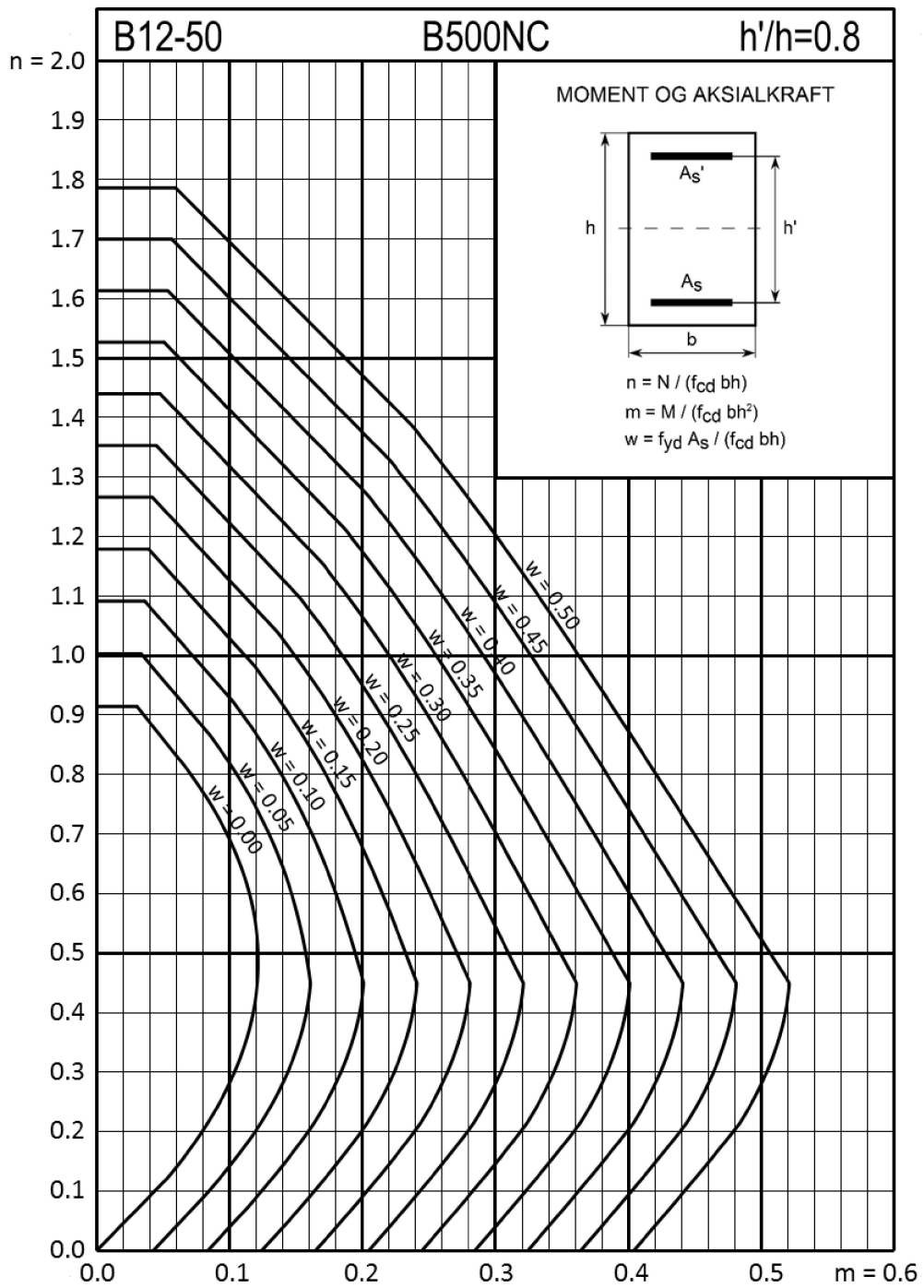
Disse integralene er løst i vedlegg A.1.

Totalt moment i betongen kan så beregnes som:

$$M_c = M_{c1} + M_{c2} \quad (2.32)$$

Som eneste ukjent i likning (2.28) kan  $y_c$  beregnes. Med alle komponentene i likning (2.1) og (2.2) kjente, kan disse til slutt gjøres dimensjonsløse. De dimensjonsløse uttrykkene er vist i vedlegg A.1.

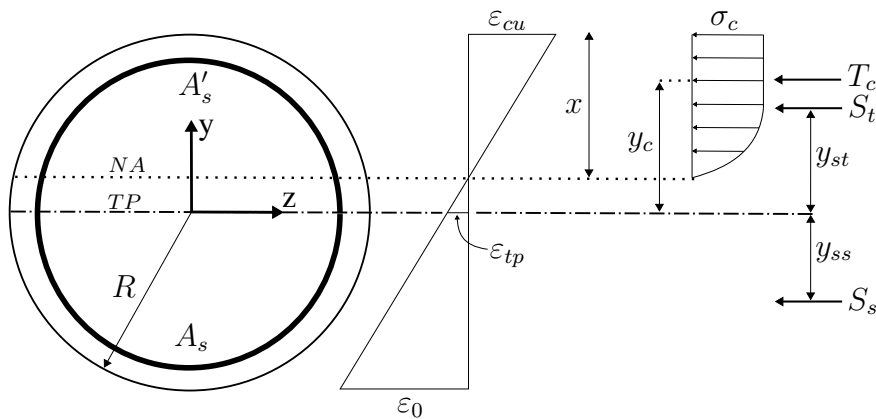
Figur 2.10 viser utformingen av et endelig M-N diagram. I vedlegg B finnes alle M-N diagrammer for rektangulære tverrsnitt. I tillegg til disse er det i vedlegg C laget M-N diagrammer basert på den rektangulære spenningsfordelingen. Dette er gjort for å undersøke i hvilken grad valg av spennings- tøyningssammenheng for betong påvirker diagrammene.



Figur 2.10: Endelig utforming av et M-N diagram, rektangulært tverrsnitt

### 2.2.3 Sirkulære tverrsnitt

Mye av fremgangsmåten som er benyttet for rektangulære tverrsnitt kan også benyttes for sirkulære. Indre krefter finnes fortsatt ved å ta horisontal og momentlikevekt av tverrsnittet som betraktes. Figur 2.11 viser krefter som virker i et sirkulært tverrsnitt påkjent av en aksialkraft og et moment.



Figur 2.11: Ytre og indre krefter i et sirkulært betongtverrsnitt

For sirkulære tverrsnitt varierer bredden som en funksjon av høyden. Bredden kan derfor ikke trekkes ut av integraler på samme måte som for rektangulære tverrsnitt. Når det gjelder armeringen i et sirkulært tverrsnitt, er denne ikke lenger plassert lagvis, men i stedet idealisert som jevnt fordelt rundt omkretsen i en bestemt dybde. Spenninger vil dermed variere innad i strekk- og trykkarmeringen, og som en konsekvens må det integreres for å finne armeringskreftene.

#### Trykkresultant i betongen:

Kraften i betongen beregnes ved å integrere spenningsene over tverrsnittet:

$$T_c = \iint_A \sigma_c dA \quad (2.33)$$

Integrasjonsgrensene i likning (2.33) kan uttrykkes som en funksjon av  $y$ . Siden det skal integreres over en sirkel, er det naturlig å plassere et koordinatssystem med origo i senter av sirkelen, se Figur 2.11. Følgende sammenheng mellom  $\varepsilon$  og  $y$  etableres:

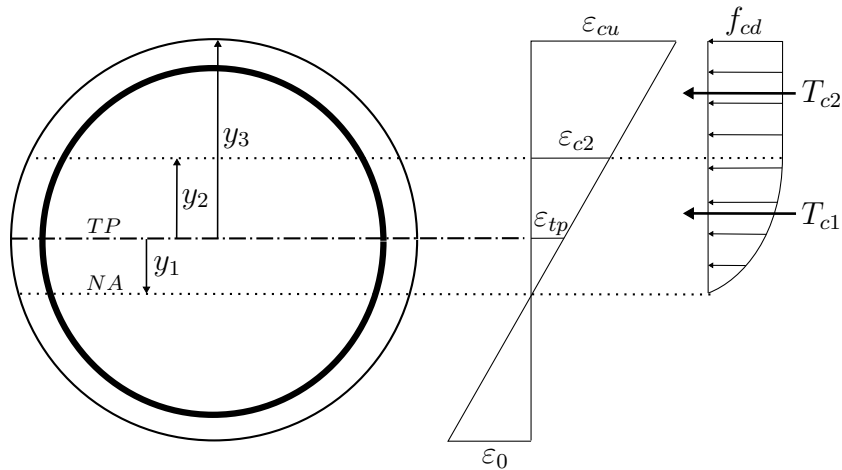
$$\varepsilon = \varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \cdot y \quad (2.34)$$

Hvor  $\varepsilon_{tp}$  er tøyningen i tyngdepunktet til tverrsnittet og kan uttrykkes som:

$$\varepsilon_{tp} = \varepsilon_{cu} - \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \cdot R = \varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{R}{x}\right) \quad (2.35)$$

På samme måte som for rektangulære tverrsnitt, deles integralet inn i to deler,  $T_{c1}$  og  $T_{c2}$ , som vist i likning (2.38) og (2.39). Integrasjonsgrensene er illustrert i Figur 2.12 og kan uttrykkes som:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 & \Rightarrow y_1 = -\frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \\ \varepsilon = \varepsilon_{c2} & \Rightarrow y_2 = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \\ \varepsilon = \varepsilon_{cu2} & \Rightarrow y_3 = R \end{aligned} \quad (2.36)$$



Figur 2.12: Integrasjonsgrenser for betongen i et sirkulært tverrsnitt

Trykksonehøyden  $x$  kan beregnes etter likning (2.37):

$$\frac{\varepsilon_{cu2}}{x} = \frac{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_0}{2R} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2} + \varepsilon_0} \cdot R \quad (2.37)$$

$$T_{c1} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) dz dy \quad (2.38)$$

$$T_{c2} = \int_{y_2}^{y_3} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} dz dy \quad (2.39)$$

Løsningen av disse integralene er vist i vedlegg A.2.

Total kraft i betongen kan til slutt beregnes som:

$$T_c = T_{c1} + T_{c2} \quad (2.40)$$

### Betongtrykkresultantens angrepspunkt

Angrepspunktet til trykkresultanten beregnes på tilsvarende måte som tidligere, vist i likning (2.28). De to bidragene som betongtrykkresultanten gir om  $z$ -aksen kan skrives som:

$$M_{c1} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) y dz dy \quad (2.41)$$

$$M_{c2} = \int_{y_2}^{y_3} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} \cdot y dz dy \quad (2.42)$$

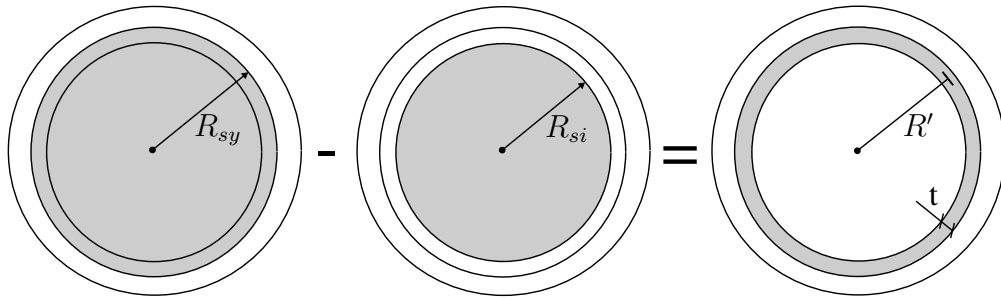
Totalt moment i betongen kan så beregnes som:

$$M_c = M_{c1} + M_{c2} \quad (2.43)$$

Som eneste ukjent i likning (2.28) kan  $y_c$  beregnes. Løsning av  $y_c$  samt integralene ovenfor, er vist i vedlegg A.2.

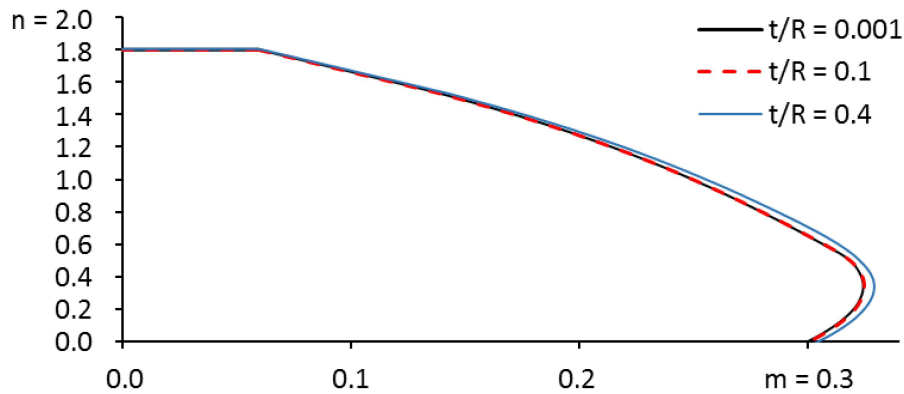
### Krefter i armeringen

Integrasjon av spenninger i armeringen krever at armeringen har en tykkelse. Når kraften i armeringen skal beregnes må det nemlig integreres mellom indre og ytre armeringsradius. I de videre beregningene er dette løst ved å subtrahere resultantkraften beregnet innenfor området  $R_{si}$ , fra kraften funnet innenfor  $R_{sy}$ , som vist i Figur 2.13.



Figur 2.13: Definisjon av ytre og indre integrasjonsområde for armeringen i et sirkulært tverrsnitt

Tykkelsen på armeringen vil avhenge av armeringsdiameteren, men i et dimensjonsløst diagram er denne ukjent. For å finne armeringskreftene må derfor en tykkelse antas. I Figur 2.14 er det undersøkt i hvilken grad tykkelsen på armeringen påvirker kapasitetskurven i et M-N diagram. Figuren viser at det er svært små forskjeller mellom  $t/R = 0.1$  og  $0.001$ . For å være på den sikre siden har det blitt valgt å benytte en armeringstykkelse  $t = R/1000$ .

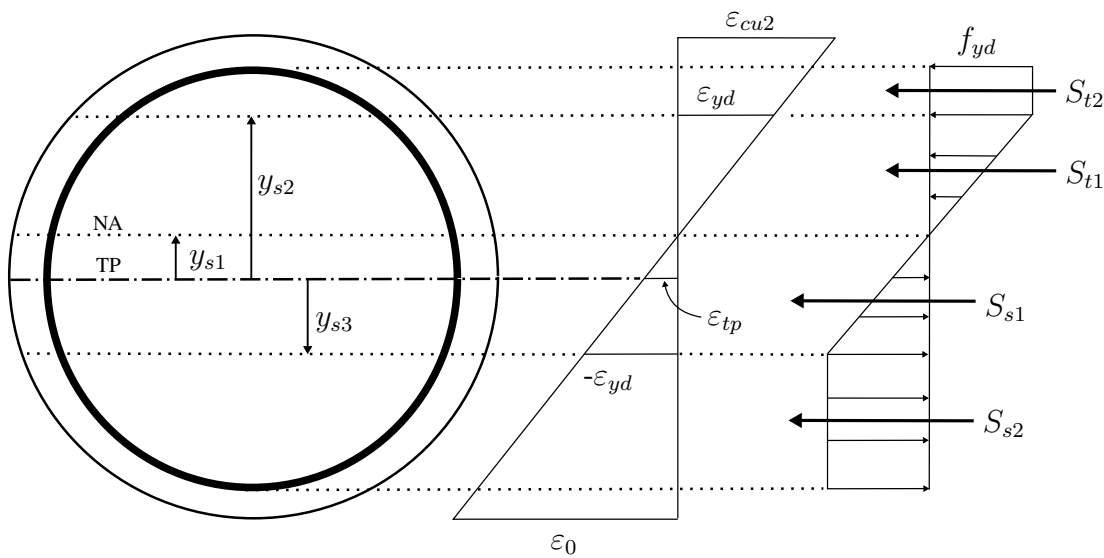


Figur 2.14: Armeringstykkelsen innvirkning på kapasitetskurver

Etter at tykkelsen på armeringen er bestemt, kan integrasjonsgrensene uttrykkes som vist i likning (2.44). Disse er i tillegg illustrert i Figur 2.15.

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 0 & \Rightarrow y_{s1} = -\frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \geq -R \\
\varepsilon = \varepsilon_{yd} & \Rightarrow y_{s2} = \frac{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \leq R \quad (2.44) \\
\varepsilon = -\varepsilon_{yd} & \Rightarrow y_{s3} = -\frac{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \geq -R
\end{aligned}$$

Hvor R settes lik  $R_{sy}$  eller  $R_{si}$  avhengig av om det integreres til indre eller ytre armeringsradius.



Figur 2.15: Integrasjonsgrenser for armeringen i et sirkulært tverrsnitt

Likning (2.45) og (2.46) viser de to bidragene til trykkraften i armeringen. Den siste indeksen  $y$  i integrasjonsgrensene, indikerer at integrasjonsområdet er  $R_{sy}$ .

$$S_{t1,y} = \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}} E_s \cdot \varepsilon \, dz dy \quad (2.45)$$

$$S_{t2,y} = \int_{y_{s2,y}}^{R_{sy}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}} f_{yd} \, dz dy \quad (2.46)$$



Uttrykkene blir tilsvarende for den indre armeringsradiusen (inndeks  $i$ ), men med  $R_{si}$  som integrasjonsområde.

Trykkraften i armeringen kan så beregnes som:

$$S_{t,y} = S_{t1,y} + S_{t2,y} \quad S_{t,i} = S_{t1,i} + S_{t2,i} \quad S_t = S_{t,y} - S_{t,i} \quad (2.47)$$

Når det gjelder strekkraften i armeringen vil fremgangsmåten være lik som for trykkarmeringen, kun integrasjonsgrensene endres. I likning (2.45) skal det integreres fra  $y_{s3,y}$  til  $y_{s1,y}$ , mens det i likning (2.46) integreres fra  $-R_{sy}$  til  $y_{s3,y}$ .

Løsning av alle integralene som benyttes for å beregne krefter i armeringen, er vist i vedlegg A.2.

### Armeringskreftenes angrepspunkt

Trykkarmeringens angrepspunkt uttrykkes som vist i likning (2.48).

$$y_{st} = \frac{M_t}{S_t} \quad (2.48)$$

De to bidragene som trykkraften i armeringen gir om z-aksen kan skrives som:

$$M_{t1,y} = \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}} E_s \cdot \varepsilon \cdot y \, dz dy \quad (2.49)$$

$$M_{t2,y} = \int_{y_{s2,y}}^{R_{sy}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}} f_{yd} \cdot y \, dz dy \quad (2.50)$$

Det totale momentet som trykkarmeringen gir om z-aksen kan så beregnes som:

$$M_{t,y} = M_{t1,y} + M_{t2,y} \quad M_{t,i} = M_{t1,i} + M_{t2,i} \quad M_t = M_{t,y} - M_{t,i} \quad (2.51)$$

Som eneste ukjent i likning (2.48) kan deretter  $y_{st}$  beregnes.

Når det gjelder strekkarmeringens angrepspunkt, vil integrasjonsgrensene i likning (2.49) og (2.50) endres på tilsvarende måte som for strekkraften i armeringen.

Fullstendige beregninger av armeringskreftenes angrepspunkter finnes i vedlegg A.2.

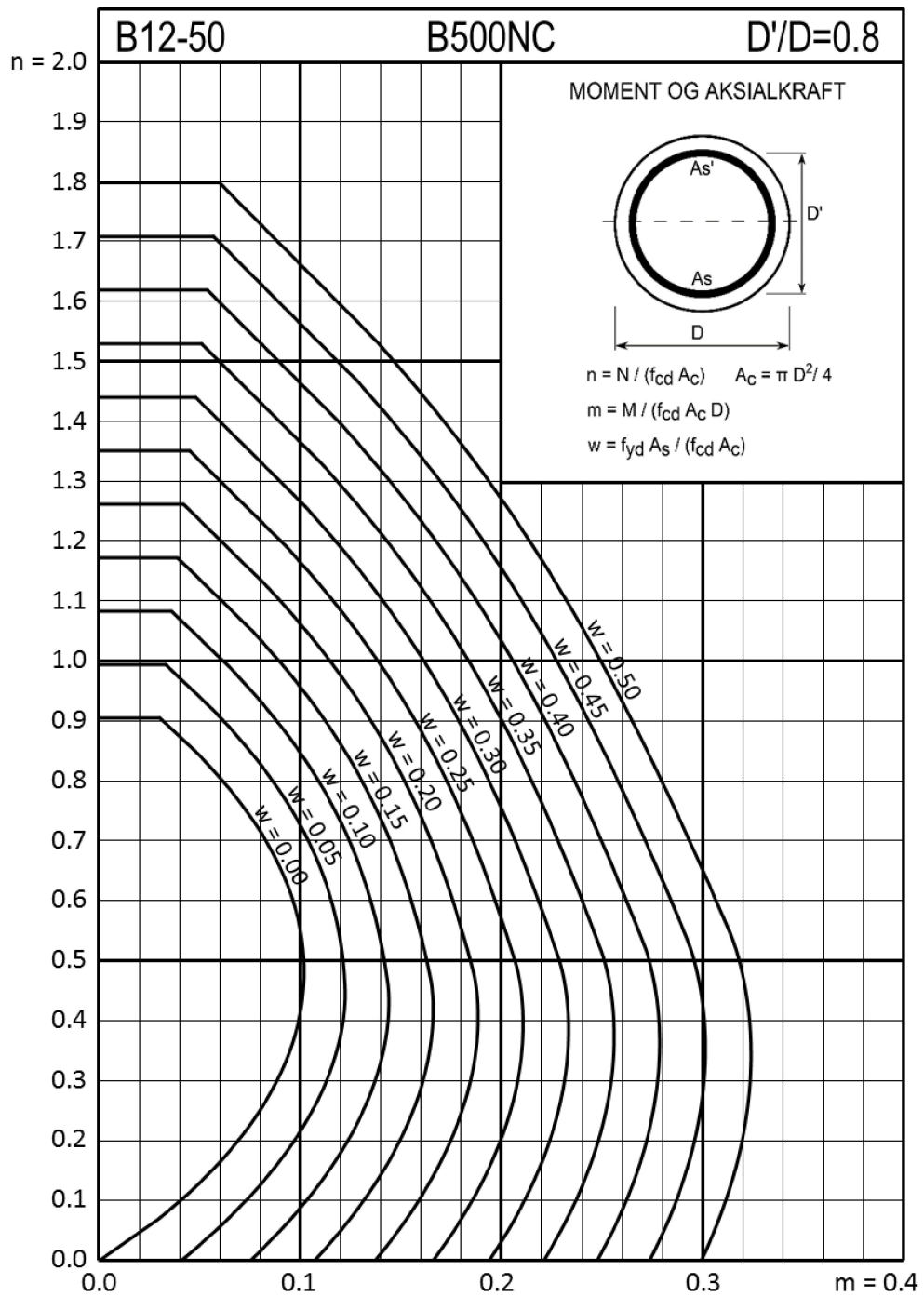
### Dimensjonsløse uttrykk

For sirkulære tverrsnitt kan M og N gjøres dimensjonsløse ved å innføre uttrykkene:

$$n = \frac{N}{f_{cd}A_c} \quad m = \frac{M}{f_{cd} \cdot A_c \cdot D} \quad w = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd}A_c} \quad (2.52)$$

Hvor  $A_c = \pi R^2$  og  $A_s$  er halvparten av den totale lengdearmeringen i tverrsnittet.

Figur 2.16 viser utformingen av et endelig M-N diagram. I vedlegg B finnes alle M-N diagrammer for sirkulære tverrsnitt.



Figur 2.16: Endelig utforming av et M-N diagram, sirkulært tverrsnitt

## 2.3 Diskusjon

M-N diagrammene som er utarbeidet i denne rapporten er et veldig godt verktøy ved dimensjonering av søyler, men det er likevel noen begrensninger ved bruken. En av de største begrensningene til M-N diagrammene for rektangulære tverrsnitt, er at de kun er gyldige for symmetrisk armerte tverrsnitt. Å armere søyler symmetrisk er i mange tilfeller en naturlig løsning, men det finnes også tilfeller hvor det ikke er nødvendig. I prinsippet er det ikke vanskelig å lage M-N diagrammer for usymmetrisk armerte tverrsnitt. Beregningsgangen vil være tilnærmet helt lik som for symmetrisk armerte tverrsnitt. Problemet er at det må defineres et forhold mellom mengde strekk- og trykkarmering dersom diagrammene skal være dimensjonsløse. Det må så utarbeides egne diagrammer for hvert av disse forholdene. Dette fører til at det må utarbeides et stort antall diagrammer for å få dekket alle tenkelige tilfeller. Denne prosessen er tidkrevende og det finnes andre metoder som er bedre egnet for å dimensjonere usymmetrisk armerte tverrsnitt.

En annen begrensning ved diagrammene, er at de kun er gyldig for betongklasser opp til og med B50. Fra B55 og oppover, varierer faktorene  $\varepsilon_{c2}$  og  $n$  i likning (2.12) for hver betongklasse. Begge disse må innføres som variabler i beregningene for å kunne ta hensyn til alle betongklasser. Spesielt utfordrende er det at faktoren  $n$  ikke er et heltall for høyere betongklasser, noe som gjør at likning (2.12) ikke lenger kan forenkles. Dette medfører at det er betydelig mer utfordrende å integrere spenningene over tverrsnittet for høyere betongfasthet enn B50. En måte å løse dette problemet på er å benytte numerisk integrasjon i stedet for å løse integralene eksakt. Dette er gjort i Matlab-beregningene og derfor er det også mulig å legge inn betongklasser over B50. Grunnen til at det ikke er gjort, er at M-N diagrammer skal være dimensjonsløse.

M-N diagrammene i vedlegg B er utarbeidet kun for utvalgte verdier for armeringsplasseringen  $h'/h$  og det mekaniske armeringsforholdet  $w$ . Det er ikke mulig å dekke alle tenkelige verdier og det må derfor gjøres et fornuftig utvalg. Som nevnt tidligere i oppgaven, er dette utvalget gjort i henhold til Finnesand [3].

I samtlige M-N diagrammer er den kurvede spenningssammenhengen benyttet. Denne sammenhengen gir som nevnt de mest nøyaktige resultatene. Sammenligningen i vedlegg C viser derimot at den rektangulære spenningsfordelingen påvirker M-N diagrammene i liten grad. Diagrammene ville derfor i praksis vært tilnærmet like pålitelige dersom den rektangulære spenningsfordelingen hadde blitt benyttet.

Når gjelder minsteeksentrisiteten som er lagt inn i M-N diagrammene i vedlegg B, har denne et begrenset gyldighetsområde. For søyler med en høyde  $h \geq 600\text{mm}$ , vil minsteeksentrisiteten i diagrammene være korrekt. Dersom høyden på søylen er mindre, sier EC2 at  $e_0$  skal settes lik 20mm. Dette må brukeren av diagrammene selv ta hensyn til ved dimensjonering.

# Kapittel 3

## Usymmetrisk armerte søyletverrsnitt

Usymmetrisk armerte søyler kan dimensjoneres på flere måter. I denne rapporten vil to forskjellige metoder bli studert. Den ene metoden kalles Iterasjonsmetoden, og er en metode som kan bli brukt til å finne utnyttelsesgraden av betong og armering i et typisk betongtverrsnitt, enten det er symmetrisk- eller usymmetrisk armert. Forutsetningene er at både geometrien til tverrsnittet samt armeringsmengde og plassering er kjent. Den andre metoden som vil bli studert er en metode hvor tverrsnittets nødvendige armeringsmengde løses ut fra en gitt tøyningstilstand.

Begge metodene baseres på helt lik teori hvor ytre og indre arbeid må være i likevekt gjennom likevektslikningen:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.1)$$

Hvor  $\mathbf{R}$  er de ytre kreftene,  $\mathbf{K}$  er stivhetsmatrisen til søylen og  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  er tverrsnittets tøyningstilstand.

Forskjellen mellom metodene er at med Iterasjonsmetoden løses likning (3.1) med hensyn på  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , mens for metoden hvor tøyningstilstanden er kjent, løses den for  $\mathbf{K}$ .

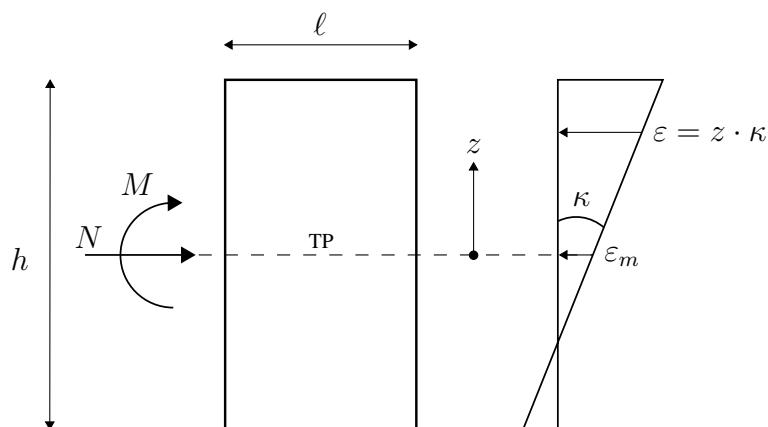
### 3.1 Iterasjonsmetoden

#### 3.1.1 Teori

Iterasjonsmetoden baseres på en arbeidsbetraktning hvor likevekt mellom ytre og indre krefter oppnås gjennom en iterasjonsprosess. Denne er beskrevet i detalj i Sørensen sitt kompendium for betongkonstruksjoner 3 [4]. Ved å endre på tverrsnittets tøyningsforløp

gjennom iterasjoner, vil avviket mellom ytre og indre krefter reduseres og til slutt nå en akseptabel verdi hvor likevekt kan sies å være oppnådd. Tøyningstilstanden som representerer likevekt kan deretter benyttes til å finne ut hvor mye tverrsnittet er utnyttet.

Figur 3.1 viser tøyingsforløpet til et søyletverrsnitt, hvor  $\varepsilon_m$  og  $\kappa$  er henholdsvis middeltøyningen og krumningen i tyngdepunktsaksen til tverrsnittet.  $z$  er avstanden fra tyngdepunktsaksen.



Figur 3.1: Definisjon av middeltøyning og krumning i tverrsnittets tyngdepunktsakse.

Tøyning ved vilkårlig  $z$  kan uttrykkes som:

$$\varepsilon = \varepsilon_m - z \cdot \kappa = \begin{bmatrix} 1 & -z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.2)$$

Den fundamentale fremgangsmåten i Iterasjonsmetoden er som nevnt å bestemme tøyningstilstanden som tilfredsstiller likevekt mellom de ytre og de indre kreftene:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) \quad (3.3)$$

Hvor  $\mathbf{R}$  er lastvektoren og  $\mathbf{S}$  er vektoren som inneholder de indre kreftene og som avhenger av tøyningstilstanden.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_N \\ S_M \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

I arbeidsbetraktningen som Iterasjonsmetoden baseres på blir prinsippet om virtuelt arbeid benyttet og søyletverrsnittet blir påført en virtuel forskyvning. Ved å betrakte lengden  $\ell$ , kan den virtuelle forskyvningsvektoren skrives som:

$$\delta \mathbf{r} = \ell \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Hvor  $u$  er aksial forskyvning og  $\theta$  er rotasjon.

Med kjent forskyvning kan uttrykkene for henholdsvis ytre og indre virtuelt arbeid skrives som:

$$A_y = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} \quad (3.6)$$

$$A_i = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.7)$$

Ved å kreve likevekt mellom ytre og indre arbeid, kan lengden  $\ell$  samt den virtuelle tøyingsvektoren  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^T$  strykes fra likningssettet. Et enkelt uttrykk for likevektslikningen oppnås, som vist i likning (3.8) i utledningen nedenfor.

$$\begin{aligned} A_y &= A_i \\ \delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} &= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\ \ell \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \cdot \mathbf{R} &= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T E \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \ell \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{a}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^T E \mathbf{a} \boldsymbol{\varepsilon}_t dz \\ &= \ell \cdot b \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{a}^T E \mathbf{a} dz \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \Rightarrow \mathbf{R} &= b \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{a}^T E \mathbf{a} dz \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned}$$

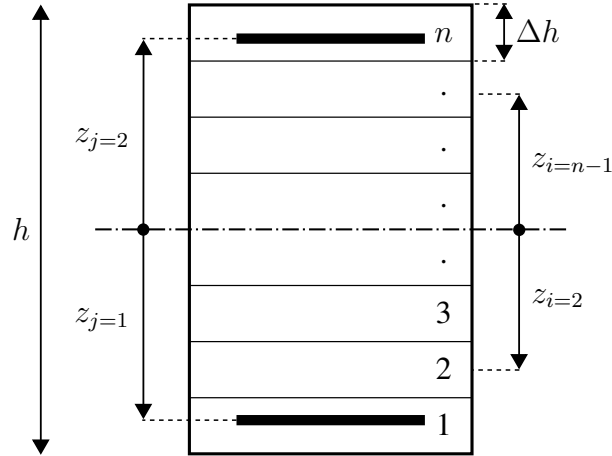
$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.8)$$

Hvor  $\mathbf{K}$  er stivhetsmatrisen:

$$\mathbf{K} = b \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{a}^T E \mathbf{a} dz = b \int_{-h/2}^{h/2} E \begin{bmatrix} 1 & -z \\ -z & z^2 \end{bmatrix} dz \quad (3.9)$$

For å kunne løse integralet i uttrykket for stivhetsmatrisen numerisk, er det hensiktsmessig å dele tverrsnittet inn i  $n$  lameller og summere i høyden. Hver lamell har en tykkelse

$\Delta h = h/n$  hvor  $h$  er tverrsnittshøyden, se Figur 3.2. Figuren viser også hvordan avstanden til både lameller og armering er definert.



Figur 3.2: Inndeling av tverrsnittet i lameller

Den totale stivhetsmatrisen til tverrsnittet er sammensatt av bidrag både fra betongen  $\mathbf{K}_c$  og fra armeringen  $\mathbf{K}_s$ . Det numeriske uttrykket er vist i likning (3.11).

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_s \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n b_i \Delta h_i \begin{bmatrix} 1 & -z_i \\ -z_i & z_i^2 \end{bmatrix} E_{c,i} + \sum_{j=1}^2 A_{s,j} \begin{bmatrix} 1 & -z_j \\ -z_j & z_j^2 \end{bmatrix} E_{s,j} \quad (3.11)$$

Grunnen til at verken lamellbredden eller lamellhøyden er trukket utenfor summasjonstegnet i uttrykket for  $\mathbf{K}_c$ , er at disse kan variere for ulike typer tverrsnitt. På den måten blir det mulig å betrakte tverrsnittstyper som I- og T-tverrsnitt i tillegg til rektangulære tverrsnitt. Når det gjelder E-modulene i begge bidragene, så er disse også funksjoner av  $z$ . E-modulene vil nemlig bli oppdatert for alle lameller og armeringslag gjennom iterasjoner, dette vil bli diskutert senere.

Med stivhetsmatrisen kjent kan tøyningen og kurvaturen i tyngdepunktsaksen til tverrsnittet bli funnet ved omskriving av likning (3.8).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{R} \quad (3.12)$$

Videre kan likning (3.2) benyttes for å finne tøyninger i hver lamell og i hvert armeringslag. Disse er nødvendige for å kunne beregne tverrsnittets spenningsfordeling, som



inngår i beregningen av de indre kreftene. Grunnet betongens ikke-lineære oppførsel i trykk, gjelder ikke Hooks lov. Siden betong har lav strekkapasitet, har en konservativ antagelse om at betongen ikke tar noe strekk blitt antatt. Spennings- tøyningssammenhengene som er tatt i bruk er parabel-rektangel diagrammet som er vist i Figur 2.5. Når det gjelder spenningen i armeringslagene er Hooks lov gyldig og den kan skrives som:

$$\sigma_{sj} = E_{sj} \cdot \varepsilon_j \quad (3.13)$$

Det som nå gjenstår er å finne uttrykket for de indre kreftene. Både betongen og armeringen bidrar til spenningsvektoren, på samme måte som for stivhetsmatrisen. De indre kreftene/spenningsresultantene kan uttrykkes som integralene:

$$\mathbf{S}_N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz \quad (3.14)$$

$$\mathbf{S}_M = \int_{-h/2}^{h/2} -z \cdot \sigma dz \quad (3.15)$$

I likhet med stivhetsmatrisen er integralene ovenfor løst numerisk ved å summere bidragene fra både betong og armering over tverrsnittshøyden.

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n b_i \Delta h_i \begin{bmatrix} \sigma_{ci} \\ -z_i \cdot \sigma_{ci} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^2 A_{sj} \begin{bmatrix} \sigma_{sj} \\ -z_j \cdot \sigma_{sj} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Uttrykkene for både de ytre og de indre kreftene er nå bestemt, likevekt kan dermed kontrolleres ved å sette  $\mathbf{R} = \mathbf{S}$ .

Siden Iterasjonsmetoden er en iterasjonsprosess må også et konvergeringskrav settes. Dette kan settes lik en forhåndsvalgt toleranse  $\beta$ , for eksempel  $\beta = 0.01$ . Avviket mellom de ytre og indre kreftene skal tilfredsstille konvergeringskravet for at likevekt er gyldig. Avviket er definert som den største av den relative differansen mellom de ytre og indre kraftkomponentene, som vist i likning (3.17).

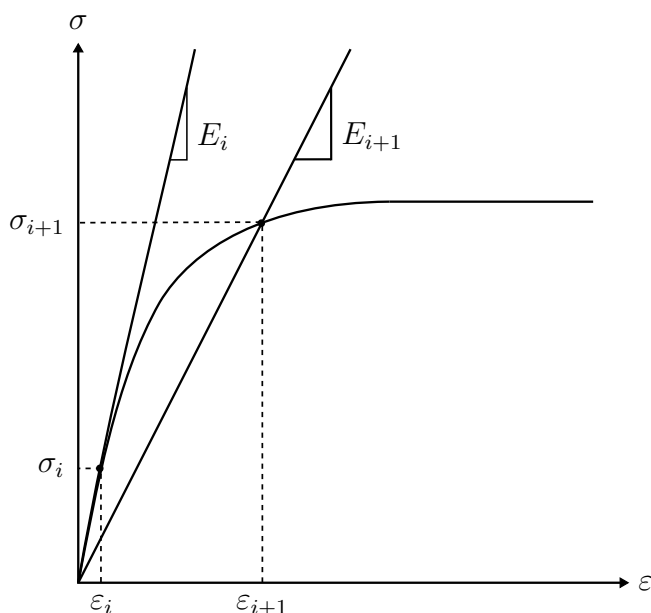
$$\left| \frac{R_k - S_k}{R_k} \right| \leq \beta \quad ; \quad k = 1, 2 \quad (3.17)$$

Hvor  $k = 1, 2$  tilsvarer henholdsvis  $N$  og  $M$  i lastvektoren  $\mathbf{R}$ .

Hvis den relative differansen er mindre eller lik  $\beta$ , så har likevekt blitt oppnådd og riktig utnyttelsesgrad kan regnes ut. Hvis differansen derimot er større enn  $\beta$ , er ønsket konvergens ikke oppnådd og beregningsprosessen må startes på nytt med nye E-moduler for alle betonglameller og armeringslag. Ved å endre på E-modulene vil den globale stivhetsmatrisen bli oppdatert slik at en ny tøyningstilstand oppnås for tverrsnittet. Denne tøyningstilstanden gir nye indre krefter som igjen må kontrolleres for likevekt med de ytre kreftene.

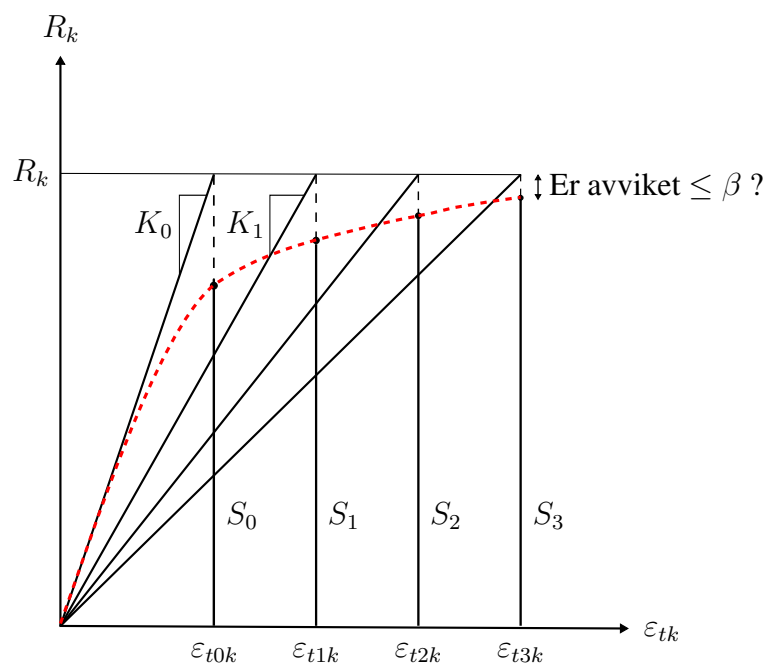
Prosessen med å oppdatere E-modulen til betonglamellene og armeringslagene gjentas helt til konvergeringskravet tilfredstilles og likevekt har inntredd. I tilfeller der konvergeringsprosessen er treg og uønsket mange iterasjoner kreves, bør en øvre grense for antall iterasjoner settes.

Figur (3.3) viser hvordan E-modulen endres for betongen. Tilsvarende vil det være for armeringslagene, men med en spennings- tøyningssammenheng for armeringsstål, som vist i Figur 2.7.



Figur 3.3: Oppdatering av E-modul i betongen når likevekt mellom ytre og indre krefter ikke er oppnådd.

En visualisering av iterasjonsprosessen i sin helhet er vist i Figur (3.4). Figuren viser hvordan stivhetsmatrisen og de indre spenningsresultantene oppdateres for hver iterasjon. Den røde stiplede linjen representerer avviket som reduseres og konvergerer mot den forhåndsbestemte toleransen  $\beta$ .



Figur 3.4: Visualisering av iterasjonsprosessen

Når likevekt har inntruffet kan den oppnådde tøyningstilstanden benyttes til å finne utnyttelsesgraden til både betong og armering, samt til å verifisere at kapasiteten til materialet ikke overskrides av de ytre lastene. For henholdsvis betongen og armeringen er utnyttelsesgraden funnet gjennom tøyingsforholdene:

$$U_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu2}} \cdot 100\% \quad (3.18)$$

$$U_s = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{yd}} \cdot 100\% \quad (3.19)$$

Hvor  $\varepsilon_{cu2}$  er tøyningsgrensen for betong i bruddtilstanden, gitt i EC2, Tabell 3.1 og  $\varepsilon_{yd}$  er armeringens dimensjonerende flyttøyning.

Utnyttelsesgradene i tverrsnittet benyttes deretter til å iterere seg fram til en nødvendig armeringsmengde.

### 3.1.2 Program basert på Iterasjonsmetoden

Basert på Iterasjonsmetoden har et program blitt laget i Matlab som tar for seg usymmetrisk armerte tverrsnitt, se vedlegg F. Programmet regner ut utnyttelsesgraden til både betongen og armeringen i tverrsnittet som påkjennes. Sirkulære tverrsnitt er ikke behandlet, siden sirkulære tverrsnitt som oftest armeres symmetrisk. Ellers kan programmet behandle andre standard tverrsnittstyper, som rektangulære tverrsnitt, samt ulike I- og T tverrsnitt.

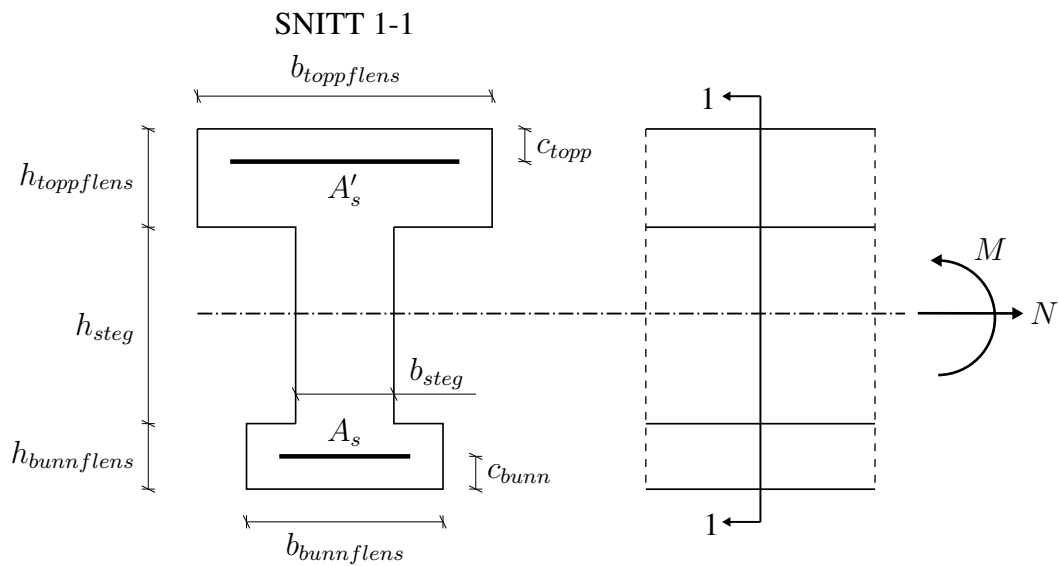
Forutsetningen for bruken av programmet er at brukeren må fylle inn de nødvendige inputdataene:

- Geometri
- Materialdata
- Armeringsmengde og plassering
- Ytre krefter
- Antall lameller
- Ønsket konvergeringskrav
- Maksimalt antall iterasjoner

Disse inputdataene står helt øverst i Matlab-koden og er de eneste parametrene brukeren trenger å endre på.

Figur 3.5 viser de ulike parametrene som styrer geometrien til tverrsnittet. Hvis brukeren ønsker å analysere et rektangulært tverrsnitt, må bredden i toppflens, bunnflens og steg settes lik hverandre. Det er også hensiktsmessig å sette høyden i toppflens, bunnflens og steg lik hverandre slik at tverrsnittet sikres en jevn lamellinndeling. Dette programmet regner ut antall lameller som skal være i de ulike sonene; toppflens, bunnflens og steg. På den måten vil en lamell aldri havne i overgangen mellom flens og steg i et tverrsnitt hvor bredden ikke er konstant.

Figuren viser også de ytre kreftene med positivt fortegn. Trykkrefter har negativt fortegn og momentet er definert som positivt når det er trykk i toppen av tverrsnittet. Dette står også spesifisert i Matlab-koden, slik at det ikke skal være noen tvil for brukeren.



Figur 3.5: Tverrsnittsparemetre samt definisjonen på positivt fortegn til de ytre kreftene

Antall iterasjoner som programmet bruker avhenger blant annet av hva brukeren setter som ønsket konvergeringskrav. For å forhindre at programmet itererer uønsket lenge, kan det settes en øvre grense på antall iterasjoner. Denne grensen endres etter behov, og hvis konvergeringskravet ikke er nådd innen det maksimale antallet iterasjoner, så vil dette varselet vises i kommandovinduet:

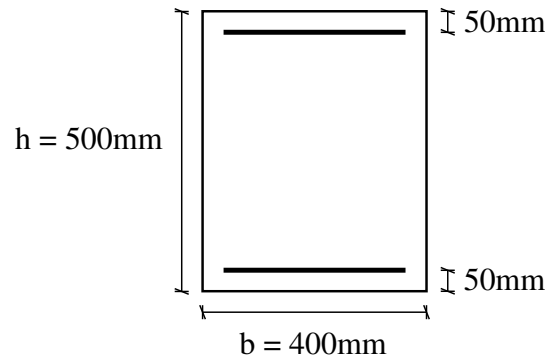
*Advarsel: Maksimalt antall iterasjoner er nådd, løsningen har ikke konverget!*

Resultatet etter at iterasjonsprosessen i programmet er ferdig, er utnyttelsesgradene som vist i likning (3.18) og (3.19). Disse vil kunne benyttes til å finne ut om tverrsnittet har stor nok kapasitet, og om armeringsmengde og plassering bør endres på. Brukeren er selv nødt til å tilpasse tverrsnittsdata etter behov. Dersom f.eks. utnyttelsesgraden i betongen er for lav, bør mengden trykkarmering reduseres, osv.

### 3.1.3 Talleksempel

For å se om iterasjonsprogrammet er pålitelig, er et konkret talleksempel benyttet. I talleksempelen er programmet kontrollert opp mot M-N diagrammene i vedlegg B. Siden M-N diagrammer er en annen måte å dimensjonere søyler på, vil samsvar mellom metodene være en god bekreftelse på at programmet fungerer.

Figur 3.6 viser det rektangulære tverrsnittet som er brukt i talleksempelen.



Figur 3.6: Tverrsnitt brukt i talleksempel

#### Materialdata:

- Betongklasse B30  $\Rightarrow f_{cd} = 17\text{ N/mm}^2$
- Mekanisk armeringsforhold  $w = 0.3$

I M-N diagrammet ( $h'/h = 0.8$ ) velges et punkt som ligger svært nærme kapasitet-skurven. I dette punktet vil tverrsnittet være nesten helt utnyttet. Det valgte punktet er  $m = 0.3$  og  $n = 0.7$ . Punktet ligger over balansepunktet til kurven, og derfor er det naturlig å forvente at strekkarmeringen ikke vil nå flyttøyning. Ved å skrive om de dimensjonsløse uttrykkene i likning (2.6), finnes de ytre lastene og armeringsmengden som skal plasseres i topp og bunn av tverrsnittet:

$$\begin{aligned} N &= 2,38 \cdot 10^6\text{N} \\ M &= 510 \cdot 10^6\text{Nmm} \\ A_s &= 2346\text{ mm}^2 \end{aligned}$$

I dette eksempelet velges en inndeling av tverrsnittet på  $n = 1000$  lameller, og et konvergeringskrav  $\beta = 0.0001$ . Med verdiene ovenfor som input gir programmet disse utnyttelsesgradene:

$$\begin{aligned} U_{\text{betong}} &= 98.8\% \\ U_{\text{bunnarmering}} &= 50.5\% \\ U_{\text{topparmering}} &= 135.9\% \end{aligned}$$

Disse tallene verifiserer at tverrsnittet ligger på grensen av kapasiteten. Betongen er nesten fullt utnyttet og topparmeringen flyter med en tøyning,  $\varepsilon_s = 1.36 \cdot \varepsilon_{yd}$ .

Med dette tverrsnittet, som har en relativt fin lamellinndeling og et strengt konvergeringskrav på 0.1‰, trengs bare 51 iterasjoner før likevekt mellom ytre og indre krefter er oppnådd.

## 3.2 Metode hvor armeringsmengde løses direkte fra likevekt

### 3.2.1 Teori

Istedenfor å bruke Iterasjonsmetoden til å iterere seg frem til en nødvendig mengde armering, er det med denne metoden mulig å løse ut armeringsmengden direkte fra likning (3.1). Dette er mulig ved at utnyttelsen i både betong og armering bestemmes på forhånd, slik at en tøyningstilstand kan beskrives i tverrsnittet. Med kjent tøyningstilstand vil likevektslikningen kunne løses med hensyn på stivhetsmatrisen,  $\mathbf{K}$ . Likning (3.20) viser likevektslikningen på matrisform.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_M \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Som tidligere nevnt er stivhetsmatrisen sammensatt av bidrag fra både betongen og armeringen. Med fokus på armeringsbidraget kan stivhetsmatrisen skrives som:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_{j=1}^2 A_{sj} \begin{bmatrix} 1 & -z_j \\ -z_j & z_j^2 \end{bmatrix} E_{s,j} \quad (3.21)$$

Dermed kan stivhetsmatrisekomponentene uttrykkes som:

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{c11} + A_{s1}E_{s1} + A_{s2}E_{s2} \\ K_{12} &= K_{c12} - A_{s1}E_{s1} \cdot z_1 - A_{s2}E_{s2} \cdot z_2 \\ K_{21} &= K_{12} \\ K_{22} &= K_{c22} + A_{s1}E_{s1} \cdot z_1^2 + A_{s2}E_{s2} \cdot z_2^2 \end{aligned}$$

Innsatt i likning (3.20) oppnås to likninger med to ukjente,  $A_{s1}$  og  $A_{s2}$ . Dermed vil armeringsmengden kunne løses direkte fra likevekt.

Fordelen med denne metoden er altså at den er mindre tidkrevende enn Iterasjonsmetoden. Brukeren slipper å iterere seg frem til en akseptabel armeringsmengde og kan istedenfor løse den ut direkte fra likevekt.

### 3.2.2 Program basert på metoden hvor armeringsmengden løses direkte fra likevekt

Dette programmet er også laget i Matlab og finnes i vedlegg G. Programmet har på mange måter et likt oppsett som iterasjonsprogrammet, men istedenfor å ha armeringsmengder som input-verdier, er det her nødvendig å spesifisere ønsket utnyttelsesgrad i betongen og i strekkarmeringen til tverrsnittet.

Ellers vil dette programmet også kunne behandle de samme tverrsnittstypene som tidligere. Input-dataene som kreves er:

- Geometri
- Materialdata
- Armeringsplassering
- Ytre krefter
- Antall lameller
- Ønsket utnyttelse i betong og strekkarmering

Etter en gjennomkjøring av programmet vil de nødvendige armeringsmengdene i både toppen og bunnen av tverrsnittet vises i kommandovinduet i Matlab.

### 3.2.3 Talleksempel

I dette eksempelet vil betongtverrsnittet fra det forrige talleksempellet, vist i Figur 3.6, bli benyttet. Betongklassen er fortsatt B30 og tverrsnittet deles inn i  $n = 1000$  lameller. For å kontrollere de to Matlab-programmene mot hverandre, blir tverrsnittet også påkjent av de samme ytre kreftene.

Ved å kreve at tverrsnittet skal ha de samme utnyttelsene som ble oppnådd i det forrige talleksempellet, forventes det at de oppnådde armeringsmengdene skal bli identiske.

Gitte utnyttelser:

$$\begin{aligned}U_{betong} &= 98,8\% \\U_{bunnarmering} &= 50,5\%\end{aligned}$$



Dette gir nødvendige armeringsmengder:

$$A_{s,topp} = 2347 \text{ mm}^2$$

$$A_{s,bunn} = 2344 \text{ mm}^2$$

Disse armeringsmengdene er nesten identiske som i det forrige talleksempelen.

### 3.3 Kontroll med Krystall

Som en ekstra verifikasjon på at programmene er pålitelige, har det blitt gjort en kontroll med dimensjoneringsprogrammet Krystall, som er laget av Håvard Nedreid. Dette programmet er noe utdatert og følger regler etter NS 3473. De største forskjellene mellom Krystall og EC2 er:

- Flytspenning:  $f_{yd} = 400 \text{ N/mm}^2$
- Bruddtøyning for betong ved trykk:  $\varepsilon_{cu} = 3.61\%$
- Bruddtøyning for armering:  $\varepsilon_{su} = 10\%$

En kontroll er fortsatt mulig å gjennomføre ved at verdiene ovenfor innføres i Matlab-programmene. På den måten vil Matlab-programmene også være oppdatert etter Krystall.

Når det gjelder spennings-tøyningssammenhengen for betong som benyttes i NS 3473, er denne også noe annerledes fra EC2. Dermed kan det fortsatt forventes noen avvik ved å sammenligne programmene med Krystall.

Tverrsnittet som benyttes i kontrollen er vist i Figur 3.6. Betongklassen er fortsatt B30 og tverrsnittet deles inn i  $n = 1000$  lameller. Tverrsnittet påkjennes også av de samme ytre kreftene som tidligere:

- $N = 2.38 \cdot 10^6 \text{ N}$
- $M = 510 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

I denne kontrollen velges et normalarmert tverrsnitt. Det tilsvarer utnyttelsene:

- $U_{betong} = 100\%$
- $U_{strekarmoring} = 230\%$

Med disse utnyttelsene som input, gir programmet for armeringsberegning, følgende armeringsmengder:

- $A_{s,strekk} = 437\text{mm}^2$
- $A_{s,trykk} = 3644\text{mm}^2$

Disse armeringsmengdene innføres deretter i både Krystall og iterasjonsprogrammet. I begge programmene settes konvergeringskravet  $\beta = 0.01\%$ , som er et relativt strengt krav. Siden Krystall regner ut utnyttelser basert på et spenningsforhold og ikke et tøyningforhold, må utnyttelser beregnes manuelt. Tabell 3.1 viser både tøyninger og utnyttelser i betong og strekkarmering for de to programmene.

	$\epsilon_{betong}$ [%]	$U_{betong}$ [%]	$\epsilon_{strekkarm}$ [%]	$U_{strekkarm}$ [%]
<b>Iterasjonsprogrammet</b>	-3.61	100.0	4.61	230.3
<b>Krystall</b>	-3.39	93.9	4.78	239.0
<b>Avvik [%]</b>	6.1		3.7	

Tabell 3.1: Sammenligning av tøyninger og utnyttelser mellom iterasjonsprogrammet og Krystall

Med Iterasjonsmetoden oppnås utnyttelser som tilsvarer et normalarmert tverrsnitt, mens med Krystall avviker resultatene noe mer. Størst er avvikene for utnyttelsen i betongen. Grunnen til dette kan skyldes spennings-tøyningssammenhengen for betong som er noe annerledes i NS 3473 enn i EC2.

## 3.4 Diskusjon

### Iterasjonsprogrammet

En forutsetning for at programmet skal kunne kjøre, er at armeringsmengden som brukeren legger inn i programmet må være stor nok til at kapasiteten til tverrsnittet ikke overskrides. I motsatt tilfelle vil likevekt mellom ytre og indre krefter aldri inntreffe. Dersom f.eks. tverrsnittet kun er påkjent av et moment og brukeren spesifiserer at det bare skal være armering på trykksiden av tverrsnittet, vil programmet gi en advarsel.

Dersom tverrsnittet som analyseres er nødt til å ha strekk- eller trykkarmering fordelt over flere lag, vil programmet gi avvik i resultatene. Dette skyldes at programmet kun tar hensyn til at strekk- og trykkarmeringen er plassert i ett lag med en avstand  $z$ , til

nøytralaksen. Avvikene kan enkelt unngås ved å manuelt legge inn alle armeringslag med respektive avstander til nøytralaksen, men i dette programmet er det valgt å bare bruke ett.

Når det gjelder konvergeringskravet  $\beta$ , bør dette settes som relativt strengt. Et strengt konvergeringskrav (f.eks.  $\beta = 0.001\%$ ) vil ikke påvirke beregningstiden mye i dette programmet.

## **Programmet for armeringsberegning**

På mange måter er dette programmet et bedre alternativ til programmet basert på Iterasjonsmetoden. Med armeringsmengder som automatisk blir regnet ut, spares brukeren for jobben med å selv finne armeringen som gir ønsket utnyttelse i tverrsnittet. Likevel har dette programmet noen begrensninger som kan gjøre iterasjonsprogrammet bedre å bruke.

Den største begrensningen ved programmet er at det ikke kan behandle tverrsnitt som er delvis utnyttet og som ikke trenger trykkarmering. Grunnen er at programmet innfører negativ trykkarmering for å oppnå likevekt mellom de ytre og indre kreftene. På den måten vil armeringsmengdene som beregnes ikke være korrekte. Derfor må brukeren sørge for at utnyttelsen i både betong og strekkarmering er stor nok til at tverrsnittet vil trenge trykkarmering.

I tillegg er det viktig at utnyttelsene som innføres i programmet står i samsvar med de ytre kreftene. Programmet vil gi feilmeldinger dersom f.eks. brukeren krever at tverrsnittet skal være normalarmert, når tverrsnittet bare er påkjent av en aksialkraft.



# Kapittel 4

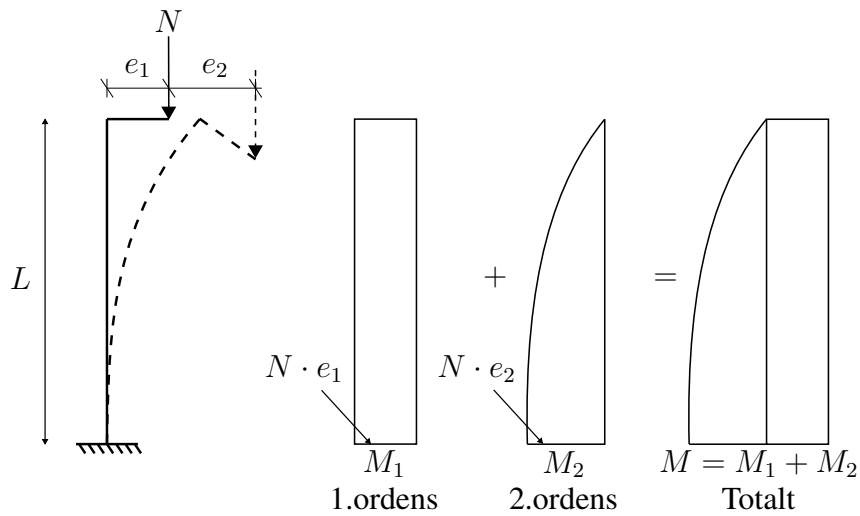
## Andre ordens lasteffekter

### 4.1 Teori

Konstruksjoner kan enten dimensjoneres etter første eller andre ordens teori. Forskjellen er at ved 2.ordens beregninger tas det med tilleggslastvirkninger som skyldes deformasjoner i konstruksjonen. Slanke konstruksjoner kan være utsatt for betydelige 2.ordens effekter og da er det ikke lenger tilstrekkelig å bare se på 1.ordens lastvirkninger.

Ifølge EC2, 5.8.3.1 kan det sees bort fra 2.ordens effekter hvis slankheten  $\lambda$ , er under en viss verdi  $\lambda_{lim}$ . For høyere slankheter er det nødvendig å benytte beregningsmetoder som tar hensyn til deformasjonene i konstruksjonen. Dette kan gjøres på flere ulike måter.

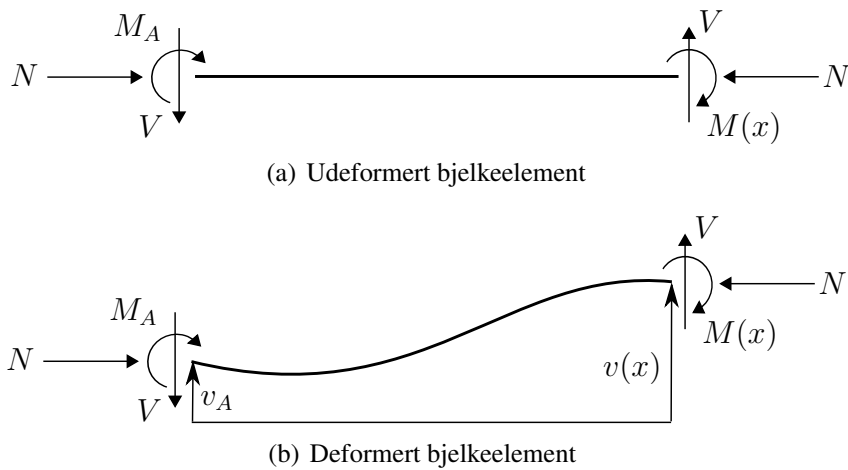
EC2, 5.8.5 gir to forenklede metoder hvor den ene metoden er basert på nominell stivhet, mens den andre baseres på nominell krumning. I kapittel 5.3 vil det bli sett nærmere på den forenklede metoden basert på nominell krumning. Dette er metoden som blir brukt i NS 3473 Tillegg A, og vil derfor også bli benyttet i denne oppgaven. Dimensjoneringsprinsippet med denne metoden er å beregne 1.ordens moment og 2.ordens tilleggsmoment uavhengig av hverandre, for så å summere bidragene til et totalt dimensjonerende bøyemoment. Figur 4.1 er inspirert fra Sørensen [5] og viser effekten av 1. og 2.ordens momentbidrag for en utkraget søyle.



Figur 4.1: 1. og 2.ordens effekter i en utkraget søyle

En tredje beregningsmetode som tar hensyn til konstruksjonens deformasjoner, baseres på rammeberegninger. Beregningene omfatter en 2.ordens ikke-lineær analyse, hvor konstruksjonens forskyvninger blir tatt hensyn til i likevektsbetingelsene. Dette er en eksakt beregningsmetode og vil derfor være mer nøyaktig enn de to førstnevnte metodene.

Figur 4.2 viser et bjelkeelement i både deformert og udeformert tilstand for å illustrere forskjellen på 1. og 2.ordens likevektsbetraktninger.



Figur 4.2: Likevektsbetraktning etter 1. og 2.ordens teori

Figuren viser at for et udeformert element vil den aksielle trykkraften ikke ha noen innvirkning på momentet  $M(x)$ . For det deformerte elementet vil det derimot være en kraftarm mellom trykkreftene, noe som fører til at de vil gi et bidrag til momentlikevekten. Basert på likevekt av det deformerte elementet kan det utledes en stivhetsmatrise som tar hensyn til deformasjonene. Denne er vist i likning (4.1). For en nærmere utledning, se Sørensen [6]. Ved å innføre såkalte stabilitetsfunksjoner  $\phi_i$ , vist i likning (4.2), blir stivhetsmatrisen gjenkjennelig fra 1.ordens teori:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} \cdot \phi_5 & -\frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 & -\frac{12EI}{L^3} \cdot \phi_5 & -\frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 \\ -\frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 & \frac{4EI}{L} \cdot \phi_3 & \frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 & \frac{2EI}{L} \cdot \phi_4 \\ -\frac{12EI}{L^3} \cdot \phi_5 & \frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 & \frac{12EI}{L^3} \cdot \phi_5 & \frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 \\ -\frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 & \frac{2EI}{L} \cdot \phi_4 & \frac{6EI}{L^2} \cdot \phi_2 & -\frac{4EI}{L} \cdot \phi_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \beta \cot(\beta) \\ \phi_2 &= \frac{\beta^2}{3(1 - \phi_1)} \\ \phi_3 &= \frac{\phi_1 + 3\phi_2}{4} \\ \phi_4 &= \frac{-\phi_1 + 3\phi_2}{2} \\ \phi_5 &= \phi_1 \phi_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Hvor  $\beta$  er definert som:

$$\beta = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (4.3)$$

Likning (4.3) viser at  $\beta$  avhenger av aksialkraften  $N$ . For å bestemme  $\beta$  må derfor en 1.ordens analyse gjennomføres slik at  $N$  får en verdi. Dette gjøres ved å sette alle stabilitetsfunksjonene i stivhetsmatrisen  $\phi_i$ , lik 1 i analysen. Aksialkraften fra analysen kan så benyttes til å beregne verdier for stabilitetsfunksjonene slik at en 2.ordens analyse kan gjennomføres.

Gjennom 2.ordens analysen oppnås en ny aksialkraft som virker i søylen. Dersom denne avviker fra aksialkraften som ble benyttet til å regne ut  $\beta$  i første omgang, bør det gjennomføres en ny analyse hvor  $\beta$  oppdateres med den nye aksialkraften. Denne prosessen

gjentas til endringen i aksialkraft er innenfor hva som er definert som akseptabelt i analysen. Når løsningen har konverget, kan verdier for 2.ordens endekrefter i søylen hentes ut.

Ved bruk av denne rammemetoden beregnes kun endekreftene i elementet. I de fleste tilfeller er det derimot interessant å vite fordelingen av krefter over hele elementet. I Sørensen [6] finnes en fullstendig utledning for bestemmelse av momentforløpet langs det deformerte elementet i Figur 4.2. Resultatet er en likning som beskriver momentforløpet uttrykt ved endemomentene, som vist i likning (4.4). Siden likevekten er basert på et element uten tverrlast, vil likningen ikke være gyldig for elementer påkjent av tverrlaster mellom endepunktene.

$$M(x) = M_A \cdot \left( \frac{r - \cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} \cdot \sin\left(2\beta \frac{x}{L}\right) + \cos\left(2\beta \frac{x}{L}\right) \right) \quad (4.4)$$

Hvor  $r$  er forholdet mellom endemomentene:

$$r = -\frac{M_B}{M_A} \quad (4.5)$$

## 4.2 Rammeprogram for beregning av 2.ordens momentfordeling i søyler

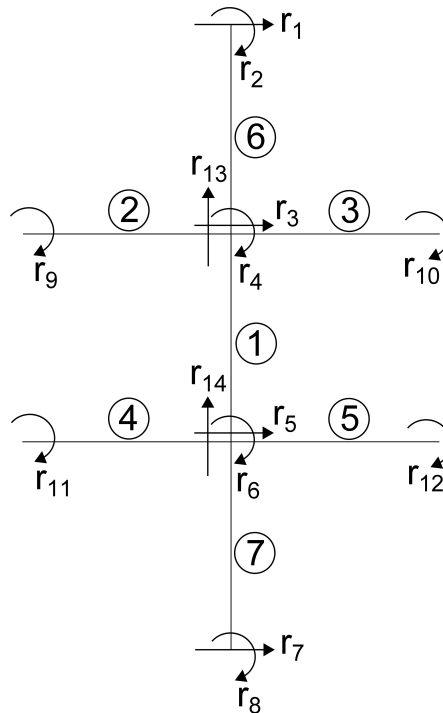
I forbindelse med 2.ordens lasteffekter har det blitt laget et program i Matlab som kan beregne 2.ordens momentfordeling i en vilkårlig søyle, se vedlegg H. Programmet baseres på rammeberegninger hvor endekreftene i søylen blir regnet ut. Fra endekreftene blir deretter momentfordelingen i søylen beskrevet gjennom likning (4.4).

Som tidligere nevnt, er en 2.ordens analyse avhengig av 1.ordens aksialkraft som virker i søylen. Derfor er dette programmet laget slik at både 1. og 2.ordens endekrefter samt momentforløp i søylen blir beregnet.

Figur 4.3 viser en generell rammemodell som programmet baseres på. Modellen består av 7 elementer og 14 frihetsgrader. Elementene som er brukt i systemet er vanlige bjelkeelementer med 6 tilhørende frihetsgrader. Søylen som betraktes er vist som element 1 i figuren. De tilstøtende bjelkene og søylene vil kunne "nulles ut" etter behov og geometrien til rammen kan dermed tilpasses. På den måten kan det betraktes alt fra søyler midt i en etasje, til en enkeltstående fritt opplagt søyle.

Figur 4.3 viser også hvordan frihetsgradene til systemet er definert. Disse er også avhengig av hvordan geometrien og randbetingelsene til systemet ser ut, dermed vil frihets-





Figur 4.3: Elementoppbygging og frihetsgrader til generell rammemodell

gradene kunne "nulles ut" etter behov. Frihetsgradene  $r_{13}$  og  $r_{14}$  er de eneste frihetsgradene som tar hensyn til vertikale forskyvninger i systemet, og vil gjøre det mulig å innføre aksialdeformasjoner i søylen dersom det er ønskelig. Siden det kun er element 1 (søylen) som er av interesse, trenger disse frihetsgradene bare å plasseres i hver sin ende av dette elementet.

Det må nevnes at dersom element 7 ikke er tilstede i rammesystemet som betraktes, må  $r_{14}$  settes lik 0. Dette er fordi søylen ikke blir fastholdt av noen andre elementer og må derfor ha et opplager i bunnen.

Når det gjelder nummereringen til både elementer og frihetsgrader i programmet, er disse tilsvarende som i Figur 4.3.

En nærmere beskrivelse av hvordan programmet er oppbygd og hvordan beregningsprosessen foregår, er vist i den følgende steg for steg prosedyren:

1. Bestem hvilke elementer som er aktive i rammemodellen, se Figur 4.3.
2. Innfør frihetsgradene til rammen. Topologimatrissene for hvert element  $a_i$ , oppdateres dermed automatisk.

3. Definer geometri- og materialdata for hvert enkelt element.

4. Angi lastvirkningene i konstruksjonen:

- Aksiallasten som virker i søylen,  $P$ .
- Konstruksjonens knutepunktlaster,  $R_k$ .
- Fastholdningskrefter i hvert element,  $S_{0i}$ .

5. Regn ut lastvektoren:

$$R = R_k - R_0$$

6. Finn den globale stivhetsmatrisen til systemet:

$$K = \sum_{i=1}^n a_i^T k_i a_i$$

7. Regn ut globale forskyvninger:

$$r = K^{-1}R$$

8. Konverter de globale forskyvningene til lokale forskyvninger:

$$v_i = a_i \cdot r$$

9. Finn lokale krefter i hvert element:

$$S_i = S_{0i} + k_i \cdot v_i$$

10. Regn ut normalkraften som virker i søylen. Inkluder skjærkraftbidragene fra tilstøtende bjelker:

$$N = P + S_3^2 + S_1^3$$

Dette vil være normalkraften basert på 1.ordens beregninger. Skjærkreftene kommer fra henholdsvis element 2 og 3 i Figur 4.3.

11. Gjenta steg 6 til 9 hvor stabilitetsfunksjonene  $\varphi_i$ , innføres i den lokale stivhetsmatrisen til søylen.

12. Regn ut ny normalkraft  $N$  i søylen. Dette vil være normalkraften basert på 2.ordens beregninger. Finn avviket mellom den nye og den gamle normalkraften:

$$\text{Avvik} = (N_i - N_{i-1})/N_i$$

Hvis avviket er større enn det forhåndsbestemte kravet, må stabilitetsfunksjonene oppdateres og steg 11 og 12 gjentas til kravet tilfredsstilles. Hvis avviket tilfredsstillers kravet, fortsett til punkt 13.

13. Benytt endemomentene i søylen (oppnådd i steg 9) til å finne momentfordelingen i søylen. Bruk av likning (4.4).

Når det gjelder topologimatrissene til hvert enkelt element i systemet, så blir disse automatisk laget i programmet straks brukeren definerer hvilke frihetsgrader som er aktive. Dette er en stor fordel og sparer brukeren for masse tid. Topologimatrissene er nemlig avhengig av både hvilke elementer og frihetsgrader som er aktive og kan ta lang tid å sette opp når systemet når en viss størrelse.

For at programmet skal kunne kjøre, er brukeren nødt til å fylle ut disse nødvendige inputdataene:

- Aktive elementer. (aktive elementer har verdien 1, og elementer som ikke er aktive har verdien 0)
- Frihetsgrader. (frihetsgrader som er fastspennte har verdien 0, og frihetsgrader som ikke er fastspennte har verdien 1)
- Lengder og materialdata til hvert element.
- Søylelast.
- Fastholdningskrefter i hvert element.
- Knutepunktslast.

Disse inputdataene står øverst i Matlab-skriptet i vedlegg H og er de eneste brukeren trenger å endre på. Det eneste som kreves av håndberegninger er altså at brukeren må regne ut bøyestivheten for de ulike tverrsnittene i rammekonstruksjonen, samt fastholdningskreftene som virker i hvert element.

Etter en gjennomkjøring av programmet vil følgende resultater vises i kommandovinduet:

- Endekrefter.
- Maksmoment.
- Plassering av maksmoment.
- Plott av momentforløp langs søylen.

Disse resultatene vises for både 1. og 2.ordens lastvirkninger.

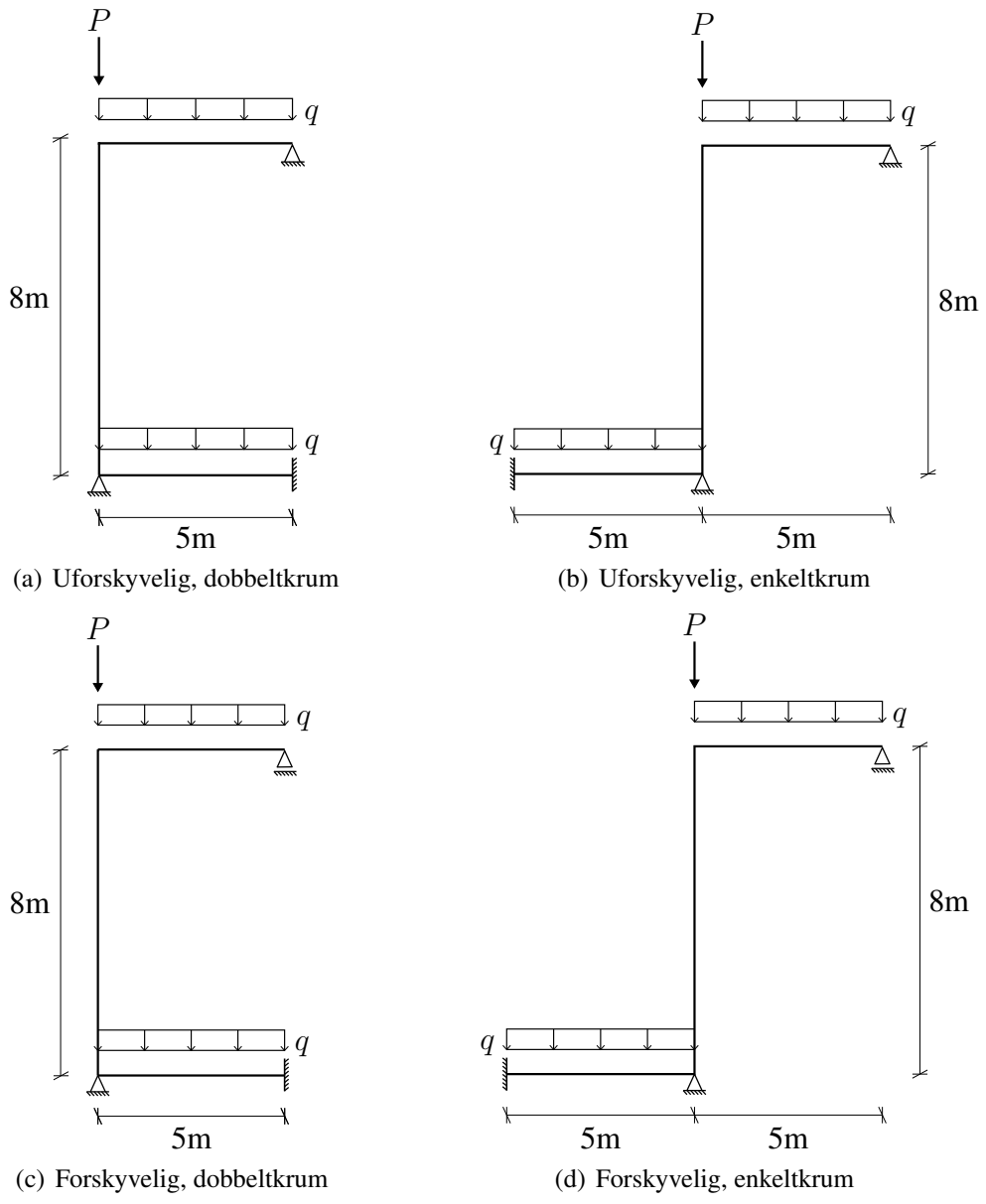
### 4.3 Sammenligning med Focus

For å kontrollere om rammeprogrammet er pålitelig, er det valgt å sammenligne resultater opp mot elementprogrammet Focus Konstruksjon. I Focus gjøres beregninger basert på elementmetoden, og 2.ordens effekter beregnes derfor på grunnlag av geometrisk stivhet i stedet for stabilitetsfunksjoner. Dermed gir Focus en løsning som kun er en tilnærming, siden bjelkens differensiallikning ikke løses eksakt. På tross av dette vil løsningen gå mot den eksakte når rammen diskretiseres med tilstrekkelig fin elementinndeling. Resultatene i Focus er derfor sammenlignbare med rammeprogrammet, men det kan ikke forventes at resultatene skal være helt identiske.

Figur 4.4 viser fire ulike rammeeksempler som er brukt ved sammenligning av de to programmene. Begrunnelsen for valget av de fire rammene vil bli diskutert senere i kapittel 5.3, hvor de samme rammene blir studert nærmere. Laster, materialdata og tverrsnittsdata for rammene er funnet basert på overslagsberegningene som er vist i vedlegg I. Dimensjonen på søylen er 300x300mm, mens bjelkene har dimensjon 300x500mm. Den jevnt fordelte lasten  $q$  er satt lik 75 kN/m og punktlasten  $P$  lik 2000 kN. Materialet som er valgt for rammene er betong B30 med E-modul lik 33 GPa.

Det er ikke tatt hensyn til skjærdeformasjoner i rammeprogrammet, og for å få sammenlignbare resultater er de også neglisjert i analysene i Focus. Egenvekt er heller ikke tatt med i beregningene og det er derfor kun betongens E-modul som har betydning av materialdataene. På grunn av usikkerhet rundt hvordan de forhåndsdefinerte betongmaterialene i Focus er definert, er det valgt å heller ta utgangspunkt i stål og sette E-modulen lik 33 GPa.

I Focus må det også tas stilling til hvor mange elementer hver bjelke/søyle skal deles inn i. Siden rammene ikke er store, er det mulig å benytte en veldig fin elementinndeling uten at det har noen praktisk betydning for hvor lang tid analysen tar. Testing med ulike inndelinger viser at å dele bjelkene/søylene inn i mer enn 10 000 elementer ikke har noen innvirkning på resultatene. Derfor er det valgt å benytte 10 000 elementer i hver bjelke/søyle.



Figur 4.4: Fire rammeeksempler benyttet ved sammenligning av rammeprogrammet med Focus

Resultatene fra analysene i både rammeprogrammet (Matlab) og Focus er vist i Tabell 4.1. I tillegg er momentplottene fra rammeprogrammet og beregningsrapportene fra Focus vist i henholdsvis vedlegg J og K.

Rammetype	Program	Moment i søyletopp [kNm]	Moment i søylebunn [kNm]	$M_{max}$ [kNm]	$X_{max}$ [m]
Uforskyvelig, enkeltkrum	Matlab	9.24	- 0.71	16.58	3.130
	Focus	9.20	- 0.75	16.56	3.137
Forskyvelig, enkeltkrum	Matlab	-5.50	15.60	19.62	5.921
	Focus	-5.43	15.53	19.57	5.914
Uforskyvelig, dobbeltkrum	Matlab	28.29	26.96	28.29	0.000
	Focus	28.25	26.92	28.25	0.000
Forskyvelig, dobbeltkrum	Matlab	-65.85	- 68.07	-68.07	8.000
	Focus	-65.00	- 67.11	-67.11	8.000

Tabell 4.1: Resultater fra sammenligning av 2.ordens momenter beregnet med Matlab og Focus

Det største avviket i 2.ordens moment er omtrent 5 % og forekommer i bunnen av den uforskyvelige, enkeltkrumme søylen. Her er imidlertid momentene veldig små i forhold til resten av søylen, noe som gjør at avviket målt i kN er tilnærmet ubetydelig. I resten av tilfellene er det største avviket i endemomenter lik 1.43 %. Når det gjelder maksimummomenter, er det kun svært små avvik i både størrelse og plassering.

For de fire rammeeksempelene som er analysert, viser resultatene i Tabell 4.1 at rammeprogrammet er pålitelig.

## 4.4 Diskusjon

For de fire rammeeksempelene som er analysert, gir rammeprogrammet troverdige resultater. Dette bekreftes i vedlegg J og K, hvor momentforløpene er tilnærmet identiske mellom rammeprogrammet og Focus.

Det må nevnes at rammeprogrammet begrenses til modellen i Figur 4.3. Programmet tar kun hensyn til at søylen som betraktes bare kan ha seks tilstøtende bjelker/søyler. Disse kan i tillegg bare være horisontalt eller vertikalt tilknyttet søyleendene. I beregningene til rammeprogrammet er det derfor ikke tatt hensyn til at elementer kan en annen orientering enn det globale koordinatsystemet.

For mindre rammekonstruksjoner kan dette programmet brukes til å bestemme 2.ordens lastvirkninger, men for større konstruksjoner er det anbefalt å benytte andre beregningsprogrammer, som for eksempel Focus Konstruksjon.





## Kapittel 5

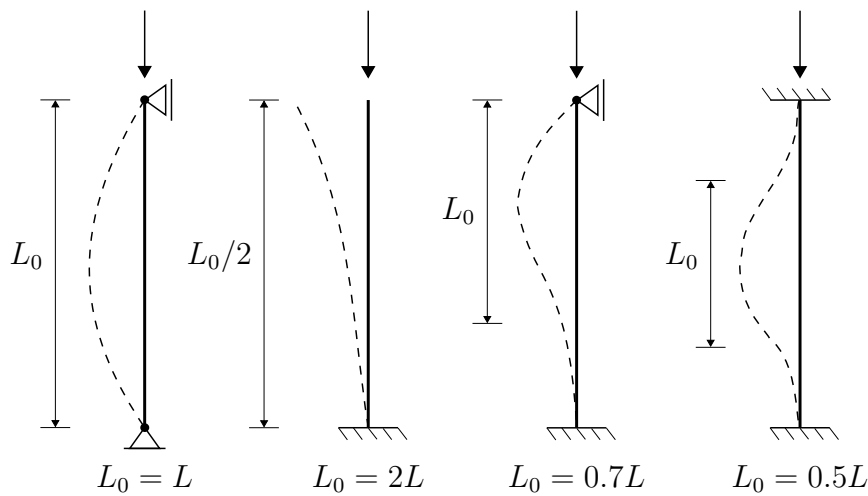
# Beregning av slanke søyler basert på rotasjonsinnspenningsgrad og relativ rotasjonsfleksibilitet

### 5.1 Teori

Kapasiteten til en trykkbelastet konstruksjonsdel (søyle) bestemmes ofte av en kritisk last, også kalt knekklast. En knekklast er en aksiellast der knekking inntreffer. For frittstående elastiske konstruksjonsdeler er knekklast synonymt med Euler-last, denne er vist i likning (5.1).

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_0^2} \quad (5.1)$$

Knekklasten avhenger av søylens knekk lengde  $L_0$ , som er definert som avstanden mellom to infleksjonspunkter i søylen. Figur 5.1 viser knekk lengder og knekkingsformer til en rekke kjente standardsøyler. For andre søyler som inngår som del av et rammeverk, må knekk lengder bestemmes i det enkelte tilfellet.



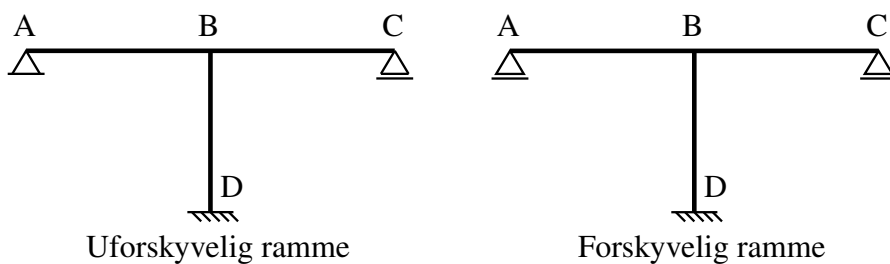
Figur 5.1: Knekkingsformer og tilhørende knekk lengder for standardsøyler

Knekk lengde kan uttrykkes som:

$$L_0 = \beta_0 \cdot L \quad (5.2)$$

Hvor  $L$  er søylens totale lengde og  $\beta_0$  er knekk lengdefaktoren.

Noe som er helt avgjørende for bestemmelse av knekk lengdefaktoren  $\beta_0$ , er om konstruksjonen er forskyvelig eller uforskyvelig. Disse to begrepene sier noe om konstruksjonsdelen er avstivet mot forskyvning eller ikke. Figur 5.2 viser forskjellen på en forskyvelig og en uforskyvelig ramme. Ved å endre på opplageret i punkt A fra å være et fastlager til å være et rullelager, vil søyle  $BD$  endres fra å være uforskyvelig til å kunne forskyves horisontalt.



Figur 5.2: Definisjon på uforskyvelig/forskyvelig ramme

Det finnes flere fremgangsmåter for bestemmelse av knekk lengdefaktoren. Videre vil to forskjellige metoder bli diskutert og sammenlignet.

### 5.1.1 Knekk lengder basert på rotasjonsinnspenningsgrad

Beregning av knekk lengder basert på rotasjonsinnspenningsgrad er anbefalt i NS 3473 [2] og er en metode som fortsatt kan benyttes den dag i dag.

Knekk lengder bestemmes på grunnlag av innspennings- og fastholdningsgraden til tilstøtende konstruksjonsdeler. De tilstøtende konstruksjonsdelene vil nemlig påvirke rotasjonsinnspenningsgraden i endene av søylen som betraktes. Bakgrunnen for denne metoden finnes i Hellesland [7].

Rotasjonsinnspenningsgraden ved søyleendene er definert som:

$$R_i = \frac{S_{\theta_i}}{S_{\theta_i} + c(EI_s/L_s)} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (5.3)$$

Hvor  $S_{\theta_i}$  er rotasjonsstivheten av bjelkene og søylene tilknyttet søyleende  $i$ . Denne kan skrives som  $S_{\theta_i} = M_i/\theta_i$ .  $EI_s$  og  $L_s$  er henholdsvis bøyestivheten og lengden til søylen. Når det gjelder faktoren  $c$ , er dette en nominell faktor som er basert på forsøk og er beskrevet i detalj i Hellesland [7]. Faktoren  $c$  settes lik 2.4 for søyler med forskyvelige ender og lik 4.8 for søyler med uforskyvelige ender.

Rotasjonsinnspenningsgraden  $R$  har verdien 1.0 når søyleenden er fullstendig innspent, og verdien 0 når søyleenden er fritt dreibar.  $R$  kan også ha verdier som er større enn 1, eller verdier som er negative. Negative verdier for  $R$  oppstår i tilfeller hvor innspenningen påfører søylen en rotasjon. Dette kan skje i konstruksjoner hvor en stiv søyle er tilknyttet mer fleksible bjelker og søyler. Rotasjonen i innspenningen oppstår fordi den stive søylen må holde igjen for rotasjonen i de mer fleksible komponentene.

I tilfeller hvor  $R > 1$  er søylen det som kalles for "mer enn fullstendig innspent". Et eksempel på et slik tilfelle er når søylen har en rotasjon som virker mot klokken, mens innspenningen gir en rotasjon med klokken. Dette vil bidra til å stabilisere søylen. Ved søyleender hvor  $R < 0$ , gir innspenningen en rotasjon i samme retning som rotasjonen av søylen. Økningen av rotasjonen vil bidra til å svekke søylen. For å begrense omfanget noe, er det valgt å bare se på positive innspenninger i denne oppgaven.

En fordel med å beregne knekk lengder basert på rotasjonsinnspenningsgrad, er at det er mulig å avgjøre hvor infleksjonspunktene på utbøyningskurven til søylen ligger. Dette gjør det enklere å finne ut hvor maksimalt moment opptrer.

Knekk lengdefaktor og tilhørende infleksjonspunkts beliggenhet fra ende " $i$ ", for fritt forskyvelige søyleender, kan beregnes etter:

$$\beta_0 = \frac{2\sqrt{R_1 + R_2 - R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \quad ; \quad L_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2} \cdot L \quad (5.4)$$

For søyler med uforskyvelige ender kan disse beregnes som:

$$\beta_0 = \frac{2}{2 + 1.1R_{min} + 0.9R_{maks}} \quad ; \quad L_i = (1 - \beta_0) \frac{R_i}{R_1 + R_2} \cdot L \quad (5.5)$$

Hvor  $R_{min}$  og  $R_{maks}$  er henholdsvis den minste og den største av  $R_1$  og  $R_2$ .

### 5.1.2 Knekk lengder basert på relative rotasjonsfleksibiliteter

Denne metoden å beregne knekk lengder på er basert på rene matematiske modeller som er tilpasset resultater fra nøyaktige numeriske beregninger, se Westerberg [8].

Knekk lengder blir beregnet basert på relative rotasjonsfleksibiliteter av bjelker og søyler tilknyttet endene av søylen som betraktes. Det er denne metoden Eurokode 2 har tatt i bruk for beregning av knekk lengder for enkeltstående konstruksjonsdeler.

I EC2, 5.8.3.2(3) finnes formler for knekk lengdefaktoren.

For søyler med fritt forskyvelige ender kan  $\beta_0$  beregnes som:

$$\beta_0 = \max \left\{ \sqrt{1 + 10 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}} \quad ; \quad \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right\} \quad (5.6)$$

For søyler med uforskyvelige ender kan  $\beta_0$  beregnes som:

$$\beta_0 = 0.5 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0.45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0.45 + k_2}\right)} \quad (5.7)$$

De relative rotasjonsfleksibilitetene som inngår i likning (5.6) og (5.7) kan skrives som:

$$k_i = \left(\frac{\theta_i}{M_i}\right) \cdot \left(\frac{EI_s}{L_s}\right) \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (5.8)$$

Hvor  $\theta_i$  er rotasjonen i innspenning  $i$  for bøyemomentet  $M_i$ .  $EI_s$  og  $L_s$  er henholdsvis bøyestivheten og lengden til søylen.

Dersom  $k = 0$  kan søyleenden anses for å være helt innspent og full rotasjonsfastholdning er oppnådd. Hvis  $k = \infty$  er søyleenden fullstendig fri til å rotere.

### 5.1.3 Andre ordens momenter basert på nominell krumning

I NS 3473 er det foreslått en tilnærmet metode for å finne 2.ordens momentforløp ved bruk av søylens infleksjonspunkter. Fordelen med knekk lengder basert på rotasjonssinnspenningsgrad, er at infleksjonspunkters beliggenhet kan bestemmes (vist i likning (5.4) og (5.5)).

Med innføringen av metoden basert på relativ rotasjonsfleksibilitet falt muligheten for å beregne søylers infleksjonspunkter bort. Derfor er det i Eurokoden foreslått en annen forenklet formel for beregning av 2.ordens momenter uten infleksjonspunkter. I denne rapporten er 2.ordens momenter beregnet med de to metodene sammenlignet, for å se om resultatene gir avvik.

Tilleggsmomentet  $M_2$ , blir både i EC2 og NS 3473 beregnet på grunnlag av søylens maksimale utbøyning. Det er ikke gitt at tilleggsmomentet har sin største verdi på samme sted som 1.ordens momentet, og totalmomentet kan derfor ha sitt maksimum hvor som helst langs søylen. For å finne det maksimale momentet, er det nødvendig å kunne uttrykke tilleggsmomentet langs hele søylens lengde, på samme måte som for 1.ordens moment.

I NS 3473 står det at for søyler med forskyvelige ender, kan 2.ordens tilleggseksentrisitet antas å ha en sinusfordeling over knekk lengden  $L_0$ . Dette betyr at 2.ordens tilleggsmoment kan skrives som:

$$M_2(x) = N \cdot e_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right)$$

Hvor  $e_2$  er maksimal utbøyning og  $x$  starter i et infleksjonspunkt i søylen. Derfor er det en forutsetning at infleksjonspunktene er kjent for at denne metoden kan benyttes.

Når det gjelder uforskyvelige søyler er tilleggseksentrisiteten avhengig av flere variabler og kan ikke gis på tilsvarende enkle form som for forskyvelige søyler. Som påpekt i NS 3473, varierer utbøyningen blant annet med innspenningsgrad, aksialkraftnivå og 1.ordens momentgradient. NS 3473 har derfor ingen måter å beregne fordeling av tilleggsmomentet  $M_2$ , for uforskyvelige søyler.

Siden EC2 beregner det dimensjonerende totalmomentet uten bruk av infleksjonspunkter, kan fordelingen av tilleggsmomentet ikke bestemmes. Derimot angir EC2, 5.8.8.2(1) maksverdien for totalmomentet i søylen:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (5.9)$$

Hvor  $M_{0Ed}$  er et ekvivalent 1.ordens moment og kan uttrykkes som:

$$M_{0Ed} = 0.6M_{02} + 0.4M_{01} \geq 0.4M_{02} \quad (5.10)$$

$M_{01}$  og  $M_{02}$  er 1.ordens endemomenter i søylen. Disse har samme fortegn hvis de gir strekk på samme side, ellers har de motsatt fortegn. Videre er  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$ . Andre ordens tilleggsmoment  $M_2$ , beregnes på grunnlag av aksialkraft og utbøyning av søylen:

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 \quad (5.11)$$

Som nevnt har EC2 og NS 3473 til felles at 2.ordens tilleggsmoment beregnes på grunnlag av den maksimale utbøyningen  $e_2$ , i en søyle. Verdien for  $e_2$  kan ifølge EC2, 5.8.8.2(3) beregnes som:

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{L_0^2}{c} \quad (5.12)$$

Hvor  $c$  er en faktor som avhenger av krumningsfordelingen og kan normalt settes lik 10. EC2, 5.8.8(4) sier imidlertid at hvis 1.ordens moment er konstant i søylen, bør en lavere verdi for  $c$  benyttes, med en nedre grense på 8. I merknaden under det samme punktet står det derimot at  $c$  avhenger av fordelingen av den totale krumningen. I denne oppgaven er det derfor antatt at  $c = 10$  kan benyttes, dersom 2.ordens moment ikke er konstant.

Krumningen  $1/r$  settes lik:

$$\frac{1}{r} = K_r \cdot K_\phi \cdot \frac{1}{r_0} \quad (5.13)$$

$K_r$  er en korreksjonsfaktor som avhenger av aksialkraften og er definert som vist i likning (5.14).

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \quad (5.14)$$

Relativ aksialkraft  $n$  og dimensjonsløs aksialkraftkapasitet  $n_u$ , beregnes etter likning (5.15) og (5.16).  $n_{bal}$  er verdien av  $n$  ved største momentkapasitet.

$$n = \frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (5.15)$$

$$n_u = 1 + w \quad (5.16)$$

Det må nevnes at EC2, 5.8.3.3(3) angir at  $w$  skal beregnes på grunnlag av det totale armeringsarealet  $A_s$ . I M-N diagrammene i vedlegg B tilsvarer  $A_s$  halve armeringsarealet. Dette medfører at dersom  $w$  bestemmes ut ifra et M-N diagram, må denne verdien multipliseres med 2.

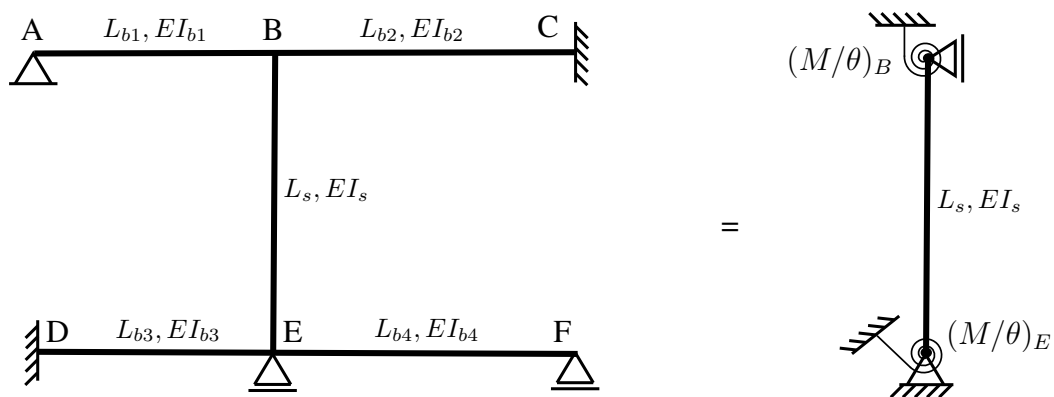
$K_\phi$  er en faktor som tar hensyn til kryp. I alle beregninger i denne rapporten er det sett bort ifra kryp, og  $K_\phi$  settes derfor lik 1.

Til slutt kan krumningen  $1/r_0$  uttrykkes som:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45 d} \quad (5.17)$$

## 5.2 Sammenligning av knekk lengder

I de to metodene for beregning av knekk lengder, må søylens randbetingelser være bestemt. Siden søyler sjelden opptrer alene i konstruksjoner, men som en del av en ramme, vil tilknyttede bjelker og søyler påvirke søylens randbetingelser. Figur 5.3 viser en søyle som er en del av et rammesystem og som har tilknyttede bjelker i hver sin ende. Søylens randbetingelser bestemmes ved å finne stivhetsbidragene til de fire bjelkene i figuren. På den måten kan det statiske systemet forenkles, som vist til høyre i Figur 5.3.



Figur 5.3: Rammesystemet kan forenkles til en søyle med randbetingelser bestemt av de tilknyttede bjelkene

Rotasjonsstivhetene i det forenklede systemet kan beregnes som:

$$\left(\frac{M}{\theta}\right)_B = 3 \cdot \frac{EI_{b1}}{L_{b1}} + 4 \cdot \frac{EI_{b2}}{L_{b2}} \quad , \quad \left(\frac{M}{\theta}\right)_E = 4 \cdot \frac{EI_{b3}}{L_{b3}} + 3 \cdot \frac{EI_{b4}}{L_{b4}} \quad (5.18)$$

Hvor konstantene 3 og 4 sier noe om bjelkeenden er henholdsvis rotasjonsfri eller fast innspent.

Likning (5.18) viser kun rotasjonsstivheten for bjelkene, men stivheten i søylen er også viktig ved beregning av knekk lengder. Likning (5.19) viser et forhold  $x$ , mellom stivheten til tilknyttede bjelker og stivheten til søylen. Faktoren  $a_i$  settes lik 3 eller 4, avhengig av bjelkenes randbetingelser. I tilfeller hvor søylen er tilknyttet andre søyler som ligger enten over eller under, skal stivhetsbidragene fra disse tas med i telleren.

$$x = \frac{\sum a_i (EI_b / L_b)_i}{EI_s / L_s} \quad (5.19)$$

Ved å innføre stivhetsforholdet  $x$  i likning (5.3) og (5.8) kan disse omskrives:

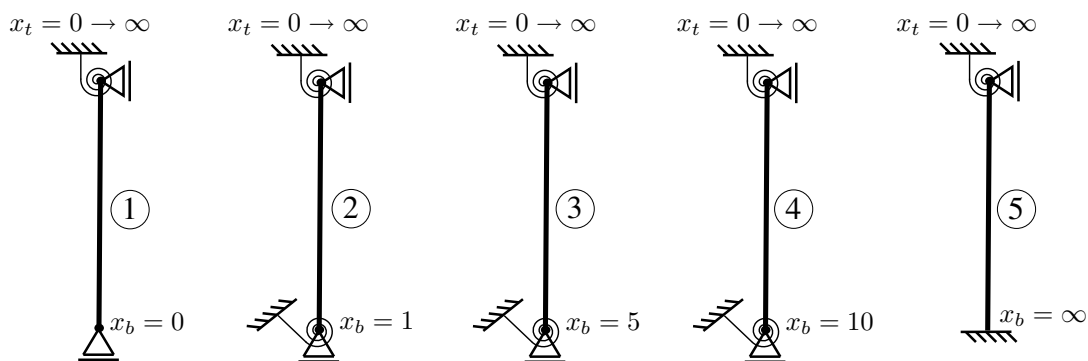
$$R_i = \frac{x_i}{x_i + c} \quad (5.20)$$

$$k_i = \frac{1}{x_i} \quad (5.21)$$

Sammenligning av de to metodene for beregning av knekk lengder er nå mulig ved å variere stivhetsforholdet  $x$ . Figur 5.4 viser fem søyler med ulike randbetingelser. Stivhetsforholdet i bunnen av hvert søyletilfelle  $x_b$  holdes konstant, mens forholdet i toppen av hver søyle  $x_t$ , varieres fra 0 til uendelig. I denne oppgaven vil sammenligninger av knekk lengder for de to metodene bli utført, når  $x$  varierer som vist i figuren.

De to grensetilfellene hvor søylen er enten rotasjonsfri eller fast innspent i bunnen, gjør det mulig å dekke standardtilfellene i Figur 5.1. I tillegg til grensetilfellene, er det valgt å studere tre utvalgte verdier for  $x_b$  i bunnen søylen. Dette er for å dekke litt flere tilfeller enn bare yttertilfellene.



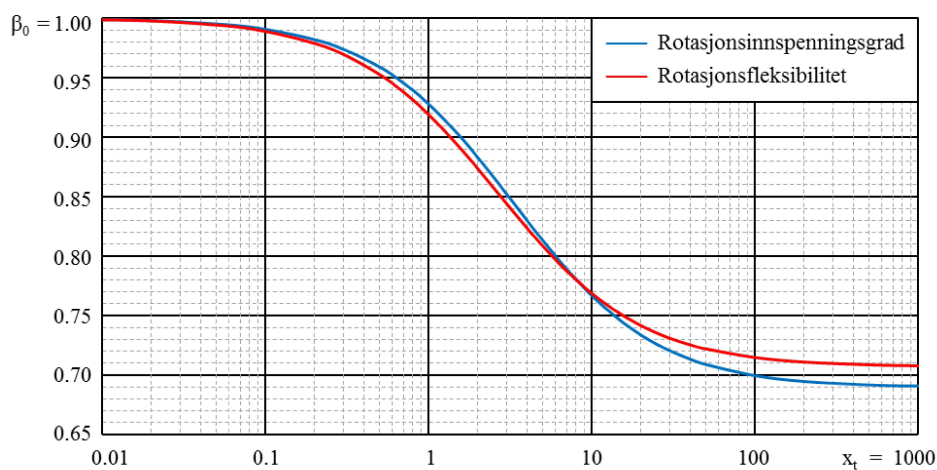


Figur 5.4: Utvalgte kombinasjoner av stivhetsforholdet  $x$ .

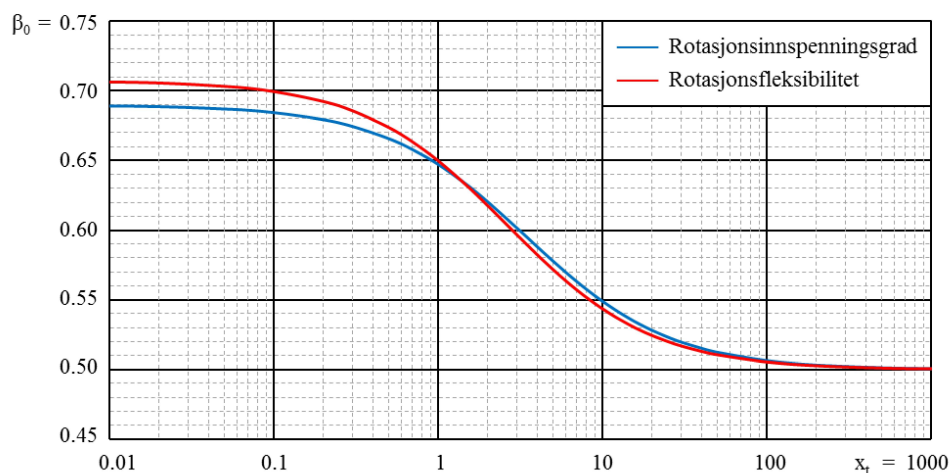
Knekk lengder basert på rotasjonsjonsinnspenningsgrad og relativ rotasjonsfleksibilitet skiller mellom forskyvelige og uforskyvelig søyler. Derfor vil det også bli gjort et skille mellom disse i denne sammenligningen.

### 5.2.1 Uforskyvelige søyler

I denne rapporten er det kun yttertilfellene ① og ⑤ i Figur 5.4 som vil bli vist. De resterende tilfellene finnes i vedlegg L.1.



Figur 5.5: Knekk lengder for uforskyvelig søyle hvor bunnen er fri til å rotere.



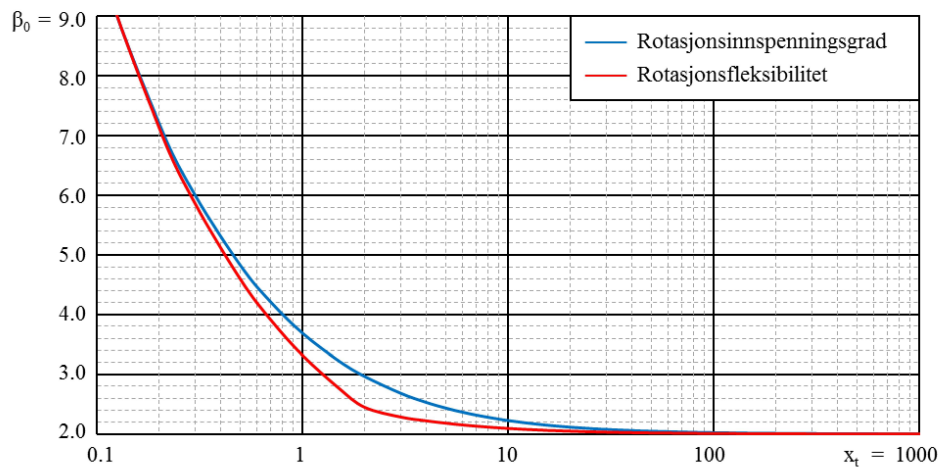
Figur 5.6: Knekk lengder for uforskyvelig søyle hvor bunnen er fast innspent

Figur 5.5 viser at for en fritt opplagt søyle, gir begge metoder en knekk lengdefaktor  $\beta_0 = 1.0$ . Etter hvert som toppen av søylen blir mer og mer innspent, konvergerer begge kurvene mot en tilnærmet verdi  $\beta_0 \simeq 0.7$ . Ingen av metodene gir  $\beta_0 = 0.7$  i henhold til Figur 5.1. Kurven for rotasjonsfleksibilitet er konservativ, mens kurven for rotasjonsinnspenningsgrad undervurderer knekk lengdefaktoren noe. Avvikene er imidlertid så små at begge metoder trygt kan benyttes ved dimensjonering.

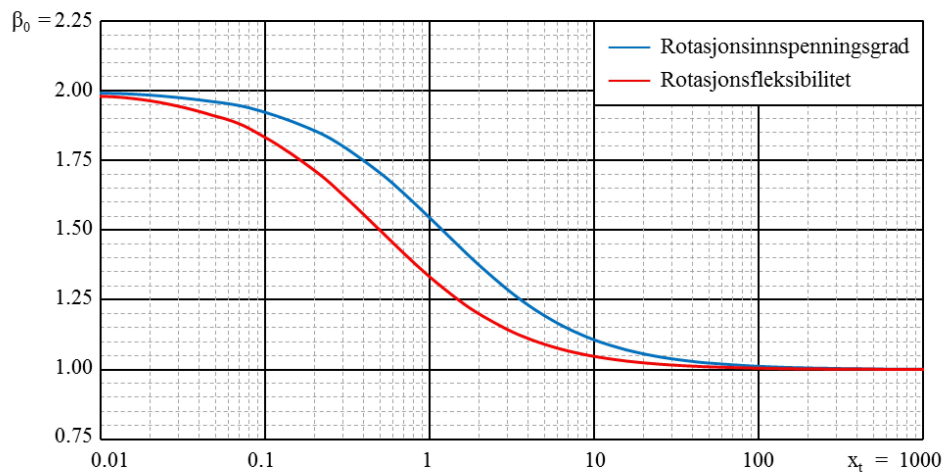
For tilfellet hvor søylen er fast innspent i bunnen, konvergerer begge kurvene mot  $\beta_0 = 0.5$  når  $x_t \rightarrow \infty$ . Dette er korrekt knekk lengde for en søyle som er fast innspent i begge ender. Diagrammet viser i tillegg at  $\beta_0 \simeq 0.7$  i starten, noe som samsvarer med starten av diagrammet i Figur 5.5.

## 5.2.2 Forskyvelige søyler

På samme måte som for uforskyvelige søyler, er det kun yttertilfellene ① og ⑤ som vil bli vist. De resterende tilfellene finnes i vedlegg L.2.



Figur 5.7: Knekk lengder for forskyvelig søyle hvor bunnen er fri til å rotere



Figur 5.8: Knekk lengder for forskyvelig søyle hvor bunnen er fast innspent

Figurene viser at det er større avvik mellom metodene for forskyvelige søyler. Det største avviket er på ca. 17% og forekommer i Figur 5.7 når  $x_t \simeq 2$ . Det er vanske-

lig å si noe om hvilken metode som er mest korrekt, fordi det er kun i yttertilfellene at eksakte verdier for knekk lengdene er kjent (Figur 5.1).

I tilfellet hvor en fritt opplagt søyle er forskyvelig i en ende, vil  $\beta_0 \rightarrow \infty$ , som vist i Figur 5.7. Dette er fordi søylen blir en mekanisme. For en utkraget søyle gir begge metoder en knekk lengdefaktor lik 2, og når søylen er fast innspent i begge ender er  $\beta_0 = 1$ . Yttertilfellene stemmer dermed godt med teorien.

### 5.3 Sammenligning av 2.ordens momenter

I dette delkapittelet er de to metodene for beregning av 2.ordens momenter i EC2 og NS 3473 sammenlignet. Disse to metodene er som nevnt forenklete metoder, derfor vil de i tillegg kontrolleres opp mot rammeprogrammet (vedlegg H) som anses for å være eksakt.

Sammenligningene vil bli gjort for de fire rammeeksempelene vist i Figur 4.4. Dette gjør at en kombinasjon av forskyvelige/uforskyvelige og enkeltkrumme/dobbeltkrumme søyler kan studeres. Forskjellen på en enkeltkrum og en dobbeltkrum søyle er at endemomentene gir strekk på henholdsvis samme eller motsatt side. Dette påvirker 1.ordens momentet i søylen. På den måten vil 2.ordens tilleggsmoment kunne kombineres med ulike typer 1.ordens momentforløp.

Som nevnt, beregnes 2.ordens tilleggsmoment på grunnlag av den maksimale utbøyningen  $e_2$ , i en søyle. Faktoren  $K_r$  som benyttes i utbøyningsberegningene, avhenger av det mekaniske armeringsforholdet  $w$ . Derfor er det nødvendig å beregne lengdearmering i søylene.

For å forenkle de videre beregningene, er søylene i alle de fire eksemplene armert likt. Lengdearmeringen er funnet for de største kreftene fra en 1.ordens analyse, med bruk av M-N diagrammet ( $h'/h = 0.8$ ) i vedlegg B. Med et valgt mekanisk armeringsforhold  $w = 0.40$ , ble følgende verdier for utbøyning funnet:

Utbøyning for uforskyvelig søyle:

$$e_2 = 9.18\text{mm}$$

Utbøyning for forskyvelig søyle:

$$e_2 = 36.92\text{mm}$$

Verdiene ovenfor er beregnet med likningene (5.12) - (5.17). Knekk lengdene som er benyttet for uforskyvelige og forskyvelige søyler er henholdsvis  $L_0 = 4349\text{mm}$  og

$L_0 = 8723\text{mm}$ . Øvrige verdier brukt i beregningene er  $c = 10$ ,  $n_{bal} = 0.45$  og  $N_{Ed} = 2193.9\text{kN}$ . Verdien  $c = 10$  er benyttet fordi alle rammene har 2.ordens momentfordelinger som ikke er konstante.

### 5.3.1 Uforskyvelige rammer

Siden NS 3473 ikke har en metode for beregning av 2.ordens momentfordeling i uforskyvelig søyler, vil kun maksimumer beregnet med forenklet metode i EC2 og rammeprogrammet bli sammenlignet. Tabell 5.1 viser maksimummomentene for både den enkelt- og dobbeltkrumme uforskyvelige rammen.

Rammetype	Beregningsmetode	$M_{\max}$ [kNm]	Avvik [%]
Enkeltkrum	Forenklet etter EC2	32.59	0.0
	Rammeprogram	16.58	- 49.1
Dobbeltkrum	Forenklet etter EC2	31.46	0.0
	Rammeprogram	28.29	- 10.1

Tabell 5.1: Maksverdier for 2.ordens moment i enkelt- og dobbeltkrum uforskyvelig ramme.

Den forenklete metoden overestimerer maksimummomentet i begge rammene. I den enkeltkrumme rammen er maksimummomentet nesten dobbelt så stort som i rammeprogrammet.

### 5.3.2 Forskyvelig enkeltkrum ramme

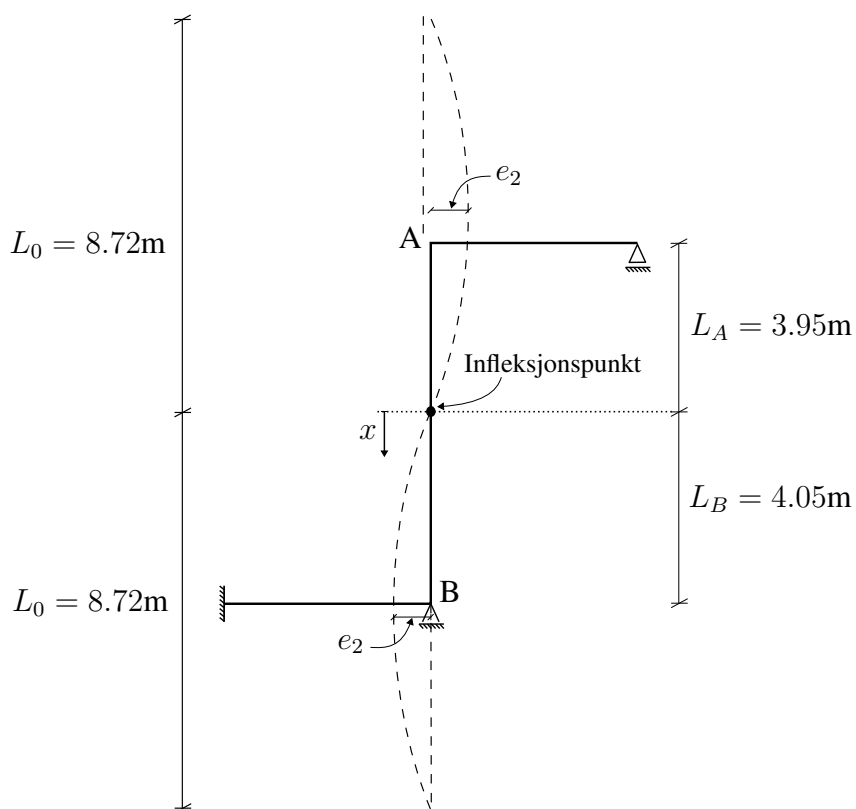
Utbøyningsformen for en forskyvelig enkeltkrum ramme antas å være som vist i Figur 5.9. Figuren viser at det er et infleksjonspunkt omtrent midt på søylen, hvor sinusfunksjonen har sitt nullpunkt.

Tabell 5.2 viser maksimummomentet i søylen beregnet med de to forenklete metodene og rammeprogrammet. Tabellen viser et godt samsvar mellom resultatene fra de forenklete metodene. Avviket i  $M_{max}$  er 0.6%, noe som kan sies å være meget bra. Maksimummomentet fra rammeprogrammet er imidlertid 79% lavere enn momentene fra de forenklete metodene. Dette er et betydelig avvik, noe som indikerer at de forenklete metodene er svært konservative.

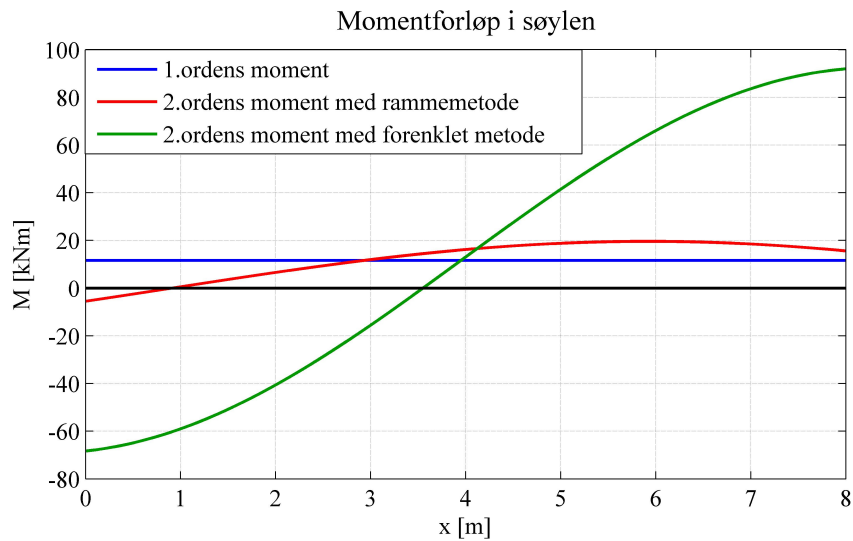
Beregningsmetode	$M_{\max}$ [kNm]	Avvik [%]
Forenklet etter EC2	92.47	0.0
Rotasjonsinnspenningsgrad	91.94	- 0.6
Rammeprogram	19.62	- 78.8

Tabell 5.2: Maksverdier for 2.ordens moment i en forskyvelig enkeltkrum ramme

Avvikene er også illustrert i Figur 5.10 som viser 2.ordens momentfordeling i søylen. Figuren viser at endemomentene i søylen overestimeres i stor grad med den forenklete metoden basert på rotasjonsinnspenningsgrad.



Figur 5.9: Utbøyningsform for en forskyvelig enkeltkrum søyle



Figur 5.10: Momentforløp i forskyvelig enkeltkrum søyle

### 5.3.3 Forskyvelig dobbeltkrum ramme

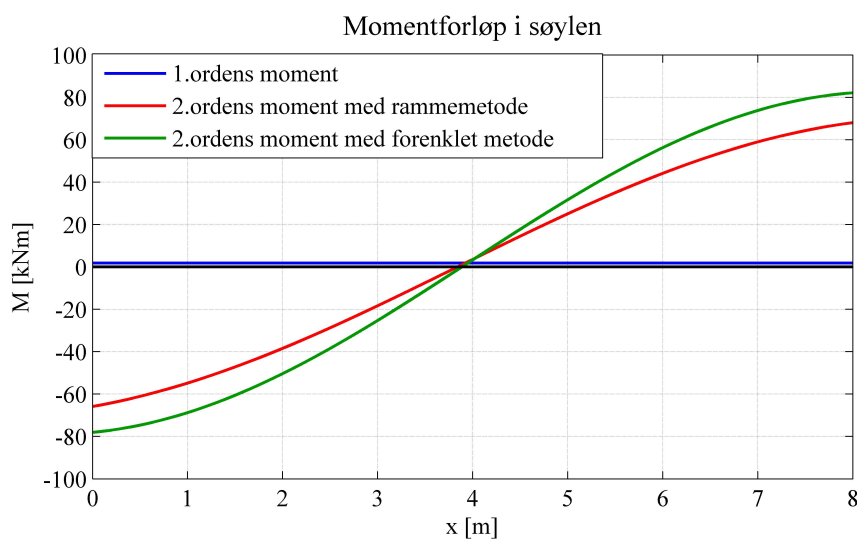
Siden knekk lengder basert på rotasjonsinnspenningsgrad ikke skiller mellom enkelt- og dobbeltkrumme søyler, vil utbøyningsformen være tilsvarende som i Figur 5.9.

Tabell 5.3 viser at det er fortsatt godt samsvar mellom resultatene fra de forenklete metodene. Maksmomentene er riktignok konservative i forhold til maksmomentet fra rammeprogrammet, men avviket er mindre enn for den enkeltkrumme rammen.

Beregningsmetode	$M_{\max}$ [kNm]	Avvik [%]
Forenklet etter EC2	82.63	0.0
Rotasjonsinnspenningsgrad	82.12	- 0.6
Rammeprogram	68.07	-17.6

Tabell 5.3: Maksverdier for 2.ordens moment i en forskyvelig dobbeltkrum ramme

Momentforløpet i den dobbeltkrumme søylen er illustrert i Figur 5.11. Her er momentfordelingen omtrent lik, men det er fortsatt avvik i søylens endemomenter.



Figur 5.11: Momentforløp i forskyvelig dobbeltkrum søyle

## 5.4 Diskusjon

### Knekk lengder

Resultatene fra sammenligningen av knekk lengder basert på rotasjonsinnspenningsgrad og rotasjonsfleksibilitet, viser at det er svært små forskjeller for uforskyvelige søyler. Derfor har valg av metode liten betydning for uforskyvelige søyler.

For forskyvelige søyler er forskjellen mellom metodene noe større. Som nevnt er det ikke mulig å bestemme hvilken metode som er mest nøyaktig ut ifra de beregningene som er gjort. Derfor kan det være relevant å sammenligne knekk lengdene beregnet i denne rapporten med knekk lengder beregnet numerisk med et elementprogram. Med en tilstrekkelig fin elementinndeling vil resultater fra et elementprogram gi en god tilnærming til korrekte knekk lengder. En slik kontroll er ikke utført i denne oppgaven siden intensjonen kun var å sammenligne de to metodene.

### Andre ordens momenter

For alle de fire rammene som er analysert, blir  $M_{max}$  overestimert med bruk av de to forenklete metodene for beregning av 2.ordens momenter. Resultatene viser at dersom søylen i rammen er enkeltkrum, overestimeres maksimummomentet i mye større grad enn dersom søylen er dobbeltkrum. De grønne kurvene i Figur 5.10 og 5.11 har samme



form, noe som indikerer at forenklete metoder ikke tar hensyn til om søyler er enkelt- eller dobbeltkrumme. Rammeprogrammet viser imidlertid at formen på momentforløpet er forskjellig mellom en enkelt- og dobbeltkrum søyle. I beregningen av tilleggseksentrisitet bør det derfor tas hensyn til om søylen er enkelt- eller dobbeltkrum. Likevel kan de to forenklete metodene benyttes ved dimensjonering, men dette kan medføre at beregninger blir svært konservative.

En nærmere undersøkelse av tilleggseksentrisiteten  $e_2$ , viser at denne er svært sensitiv for valg av mekanisk armeringsforhold  $w$ . For beregning av  $e_2$  i likning (5.12) ble et mekanisk armeringsforhold  $w = 0.4$  benyttet. Denne verdien ble valgt for å ha noe kapasitet til overs, men en nedre grense på  $w = 0.33$  kunne blitt benyttet. Dersom den nedre grensen hadde blitt benyttet, ville  $e_2$  blitt redusert med 31%. Siden 2.ordens tilleggsmoment er proporsjonalt med utbøyningen, vil valg av  $w$  derfor gi betydelig utslag også for totalt dimensjonerende moment.

Valg av  $w$  har ingen betydning for sammenligning av de to forenklete metodene, siden tilleggseksentrisiteten er basert på samme  $w$ . Det mekaniske armeringsforholdet vil derimot påvirke sammenligningen mellom forenklete metoder og rammeprogrammet. Dette skyldes at rammeprogrammet ikke påvirkes i like stor grad av mengden armering i søylen.

I tillegg til at  $e_2$  er sensitiv for valg av mekanisk armeringsforhold, påvirker  $w$  utbøyningen motsatt av hva som er forventet. Ved bruk av uttrykket for  $K_r$  i likning (5.14), fører en økning i armeringsmengde til at utbøyningen blir større. Dette står i kontrast med forventningene siden økt armering gir økt bøyestivhet, noe som normalt skal gi en mindre utbøyning.

Noe som heller ikke svarer til forventningene, er den relative aksialkraften  $n$ , i uttrykket for  $K_r$ . En reduksjon av  $n$  vil nemlig øke tilleggseksentrisiteten. Redusert aksialkraft skal normalt gi mindre deformasjoner, derfor oppleves uttrykket for korreksjonsfaktoren  $K_r$  som usikkert. På grunnlag av dette, er det valgt å benytte rammeprogrammet for beregning av 2.ordens momenter i oppgavens avsluttende del.

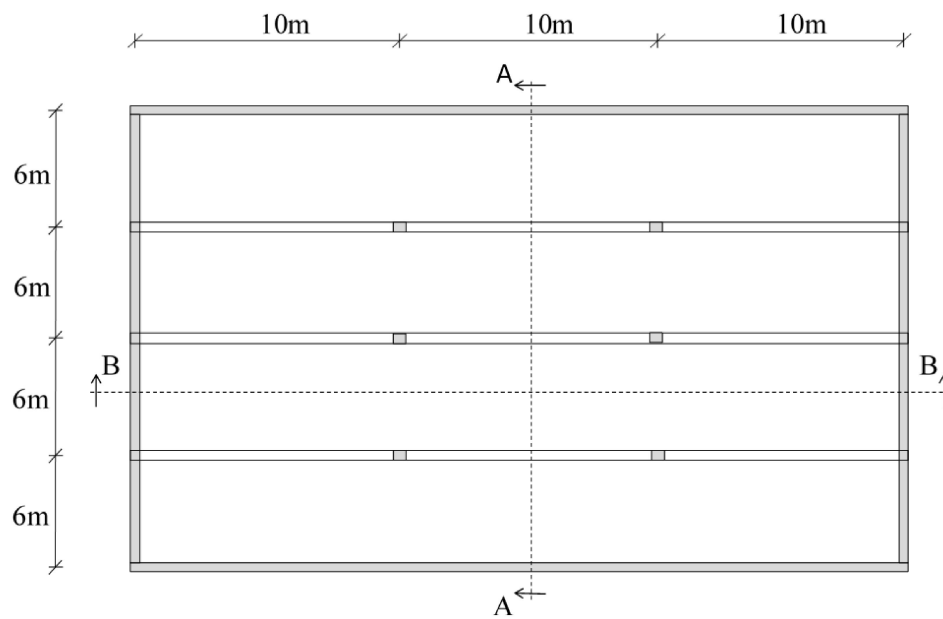
# Kapittel 6

## Eksempelbygg

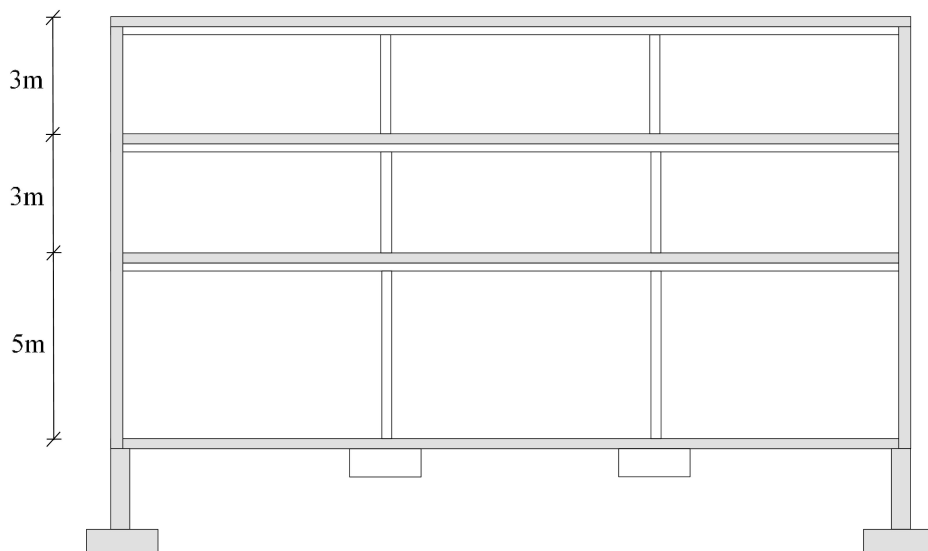
I denne delen av oppgaven vil beregninger bli gjort av et eksempelbygg. Her vil de fleste beregningsmetodene som er utviklet for betongsøyler bli benyttet i praktisk dimensjonering. Både M-N diagrammer, iterasjonsprogrammet samt rammeprogrammet er benyttet i dimensjoneringsprosessen. I dette kapitlet vil antagelser, fremgangsmåter og resultater bli diskutert, mens alle beregninger av bygget er vist i vedlegg O.

Dimensjoneringen vil kun dekke hovedkomponentene i rammekonstruksjonen. Dette inkluderer bjelker, søyler, dekker og takkonstruksjonen. Selv om denne oppgaven omhandler beregning og dimensjonering av betongsøyler, må tilhørende konstruksjonsdeler også dimensjoneres for å finne søylenes lastvirkninger. Vegger, fundamenter og detaljer vil ikke bli behandlet.

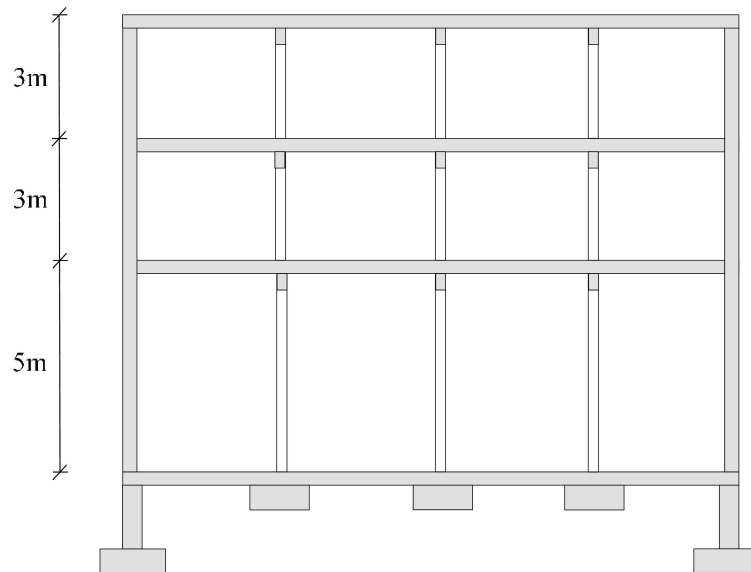
Bygget ligger 300 m.o.h. i Trondheim og er tre etasjer høyt. Bæresystemet er som vist i Figur 6.1 - 6.3. Taket er flatt og består av plasstøpt betong, mens etasjeskillerne består av hulldekker. Dekkene i hver etasje bæres av tre kontinuerlige bjelker som ligger i byggets lengderetning. Disse bjelkene er opplagt på søyler som har senteravstand 10 meter i lengderetning og 6 meter i tverretning. Etasjehøyden i 1.etasje er 5 meter, mens i 2. og 3. etasje er den 3 meter.



Figur 6.1: Plan - alle etasjer



Figur 6.2: Snitt B-B



Figur 6.3: Snitt A-A

## 6.1 Laster og lastkombinasjoner

Lastene som antas å virke på konstruksjonen er:

- Egenlast (tak og takteking, bjelker, søyler, dekker)
- Nyttelast på tak og dekker
- Snølast på tak
- Vindlast på vegger og tak

### Egenlaster

Egenvekt av bjelker, søyler og tak beregnes ved å multiplisere volum betong med tyngdetettheten til armert betong. Denne kan ifølge NS-EN 1991-1-1 [9] Tabell A.1, settes lik  $25.0 \text{ kN/m}^3$ . Taktekingen er antatt til å bestå av et 10cm tykt lag med grov grus med tyngdetetthet lik  $20 \text{ kN/m}^3$ . I tillegg er det tatt med et lasttillegg på  $0.5 \text{ kN/m}^2$  for å ta hensyn til vekt av resterende takteking.

## Nyttelaster

Nyttelaster på gulv og tak er hentet fra NS-EN 1991-1-1. Taket har kun atkomst for vedlikehold og reoperasjon, noe som i henhold til Tabell NA.6.10 gir en nyttelast på taket  $q_k = 0.75 \text{ kN/m}^2$ .

Nyttelasten på gulvet i kontorarealene (kategori B) har ifølge Tabell NA.6.2 en karakteristisk verdi  $q_k = 3.0 \text{ kN/m}^2$ . Gulvet i forretningslokalet tas ikke med i dimensjoneringen.

## Snølast

Snølast på taket er beregnet etter NS-EN 1991-1-3 [10]. Siden bygget ligger på 300 meters høyde, vil snølasten bli betydelig. Karakteristisk snølast  $s_k$ , settes lik  $4.4 \text{ kN/m}^2$ .

## Vindlast

Vindlast på vegger forutsettes å bli tatt opp av veggskivene i bygget. Siden disse ikke vil bli dimensjonert, er det kun vindlast på tak som er beregnet etter NS-EN 1991-1-4 [11]. Det mest ugunstige for taket er utvendig vindtrykk kombinert med innvendig undertrykk.

Ved beregning av utvendig vindtrykk deler standarden taket inn i fire soner med ulik vindlast. I tre av sonene er det kun sug som kan oppstå, mens i den fjerde (sone I) kan også trykkrefter oppstå. For å forenkle beregningene, er det valgt å anta at denne trykklasten virker over hele taket. Karakteristisk vindlast på taket  $w_k$ , settes lik  $0.4 \text{ kN/m}^2$ .

## Lastkombinasjoner

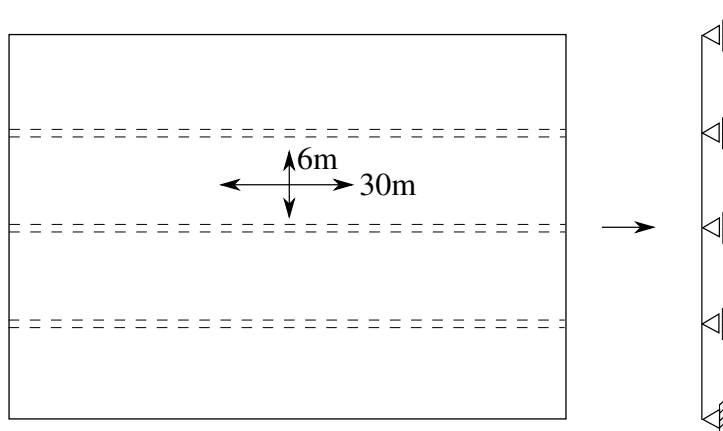
Alle variable laster kan plasseres feltvis på både bjelker og tak. Dimensjonerende verdier for momenter, skjærkrefter og oppleggskrefter er beregnet med plassering av variabel last som gir størst lastvirkninger.

Lastfaktorer og lastkombinasjoner er beregnet etter NS-EN 1990 [12], Tabell NA.A1.2(B). For taket er snølasten den klart største av de variable lastene og er derfor den dominerende variable lasten. For dekkene er nyttelast den eneste variable lasten som opptrer.

Søylene i 1. og 2. etasje vil få last fra både snølasten på taket og nyttelasten på dekkene. Dimensjonerende lastkombinasjon for søylene vil da være at enten snølasten eller nyttelasten dominerer. For å forenkle beregningsprosessen er det gjort en konservativ antagelse om at både snølast og nyttelast dominerer samtidig for søylene.

## 6.2 Statisk system

Taket er en kontinuerlig plasstøpt betongplate som er opplagt på byggets fire vegger og tre takbjelker. Denne utførelsen medfører at platen spenner 6m i bredderetning og 30m i lengderetning, som vist i Figur 6.4. Ifølge EC2, 5.3.1(5) kan et dekke utsatt for jevnt fordelte laster anses å være en enveisplate dersom forholdet mellom største og minste spennvidde er større enn 2. For taket er dette forholdet lik 5, og kan dermed betraktes som en enveis plate. Det statiske systemet for taket blir derfor en kontinuerlig firefelts bjelke med spenn på 6 meter.



Figur 6.4: Statisk system for taket

Tak- og gulvbjelker er kontinuerlige og har en total lengde på 30m fordelt over tre spenn. For alle bjelker antas endene å være fritt opplagte. Det statiske systemet for bjelkene blir dermed en trefelts bjelke med spennvidder på 10m.

Dekket i 2. og 3. etasje består av hulldekker som hviler på gulvbjelkene. Det er valgt å benytte 6m lange hulldekker som er fritt opplagt i begge ender. Dette gjør at lastbredden til gulvbjelkene blir 6m.

Det antas at byggets stive veggskiver gjør at søylene kan anses å være uforskyvelige. I hver ende er søylene frie til å rotere, noe som medfører at det statiske systemet blir en fritt opplagt søyle. Høyden av hver søyle settes lik etasjehøyden minus tykkelsen av dekker og bjelker. Siden søylene antas å være fritt opplagret, er det kun aksialkrefter som overføres fra bjelkene over.

## 6.3 Dimensjonering

Dimensjonering av lengdearmering i søyler, bjelker og taket er utført gjennom håndberegninger. For å kontrollere nødvendige armeringsmengder, er programmet for armeringsberegning (vedlegg G) benyttet. Når det gjelder valgt armering, er utnyttelsene kontrollert med iterasjonsprogrammet i vedlegg F.

I hver etasje vil alle bjelker og søyler dimensjoneres etter den mest påkjente bjelken/søylen. Det er derfor kun nødvendig å dimensjonere en bjelke og en søyle for hver etasje. For både tak og bjelker i rammekonstruksjonen, er dimensjoneringen utført for de største lastvirkningene over støtte og i felt.

Materialvalg for samtlige konstruksjonsdeler er betongkvalitet B30 og armering av typen B500NC. Dimensjonerende materialfastheter blir dermed:

$$\text{Armering:} \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1.15} = 434\text{N/mm}^2 \quad (6.1)$$

$$\text{Betong:} \quad f_{cd} = \alpha_c \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \cdot \frac{30}{1.5} = 17\text{N/mm}^2 \quad (6.2)$$

For tak og bjelker benyttes et normalarmert tverrsnitt. Tøyingstilstanden er dermed definert som bruddtøying i betongen, og en tøying  $\varepsilon_s = 2\varepsilon_{yk}$  i armeringen. Faktoren  $\alpha$  som benyttes ved bestemmelse av trykksonehøyde, er beregnet som vist i likning (6.3).

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + 2\varepsilon_{yk}} = \frac{3.5}{3.5 + 5} = 0.412 \quad (6.3)$$

### Tak

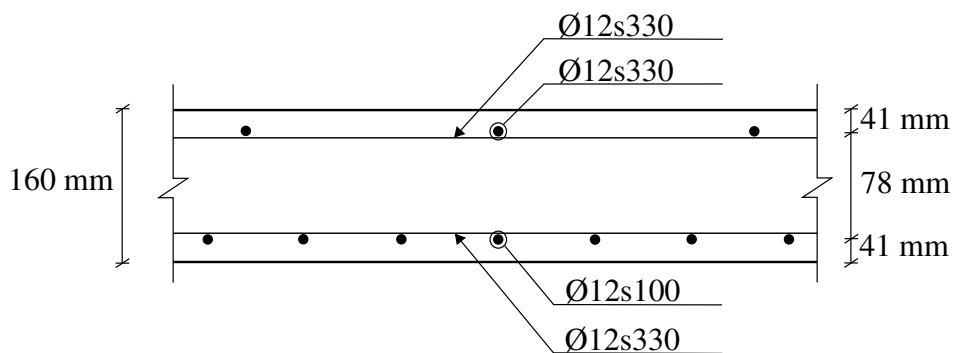
Siden taket kun bærer laster i en retning, kan en platestripe med bredde lik 1m betraktes. Høyden på taket er satt til 160mm. Dette er den minste høyden som kan benyttes for at tverrsnittet skal unngå trykkarmering. Den valgte armeringen er vist i Figur 6.5 og 6.6.

Som tidligere nevnt, produserer programmet for armeringsberegning en negativ trykkarmering for tverrsnitt som har en delvis utnyttet trykksone. Dette programmet kan derfor ikke brukes til å kontrollere nødvendig armeringsmengde. Det er derimot mulig å kontrollere utnyttelsen til den valgte armeringen med iterasjonsprogrammet. Programmet viser at den største utnyttelsen i betongen er 49.2%, mens i strekkarmeringen er utnyttelsen 93.7%. Dette bekrefter at tverrsnittet har tilfredsstillende kapasitet. Den lave utnyttelsen i betongen skyldes at det er lagt inn minimumsarmering på trykksiden i tverrsnittet.





Figur 6.5: Armering for taket over støtte



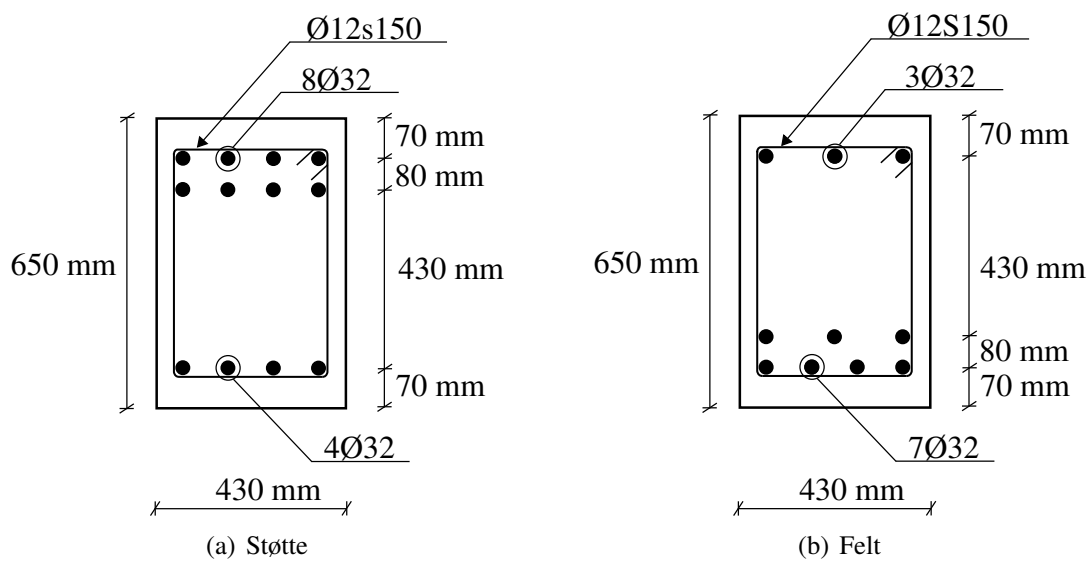
Figur 6.6: Armering for taket i felt

## Bjelker

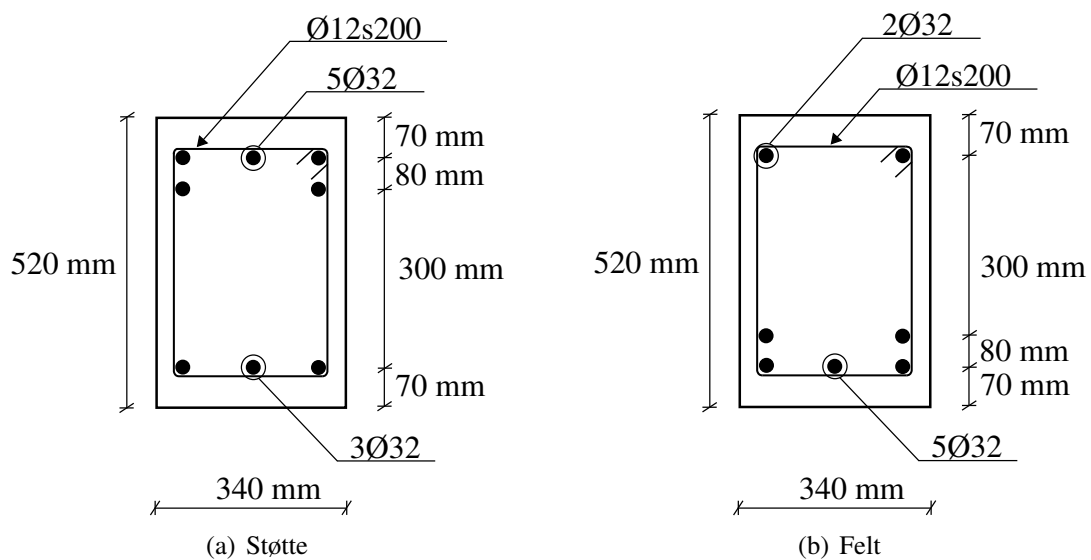
Bjelkene i rammekonstruksjonen dimensjoneres for både momenter og skjærkrefter. Når det gjelder dimensjonerende skjærkraft for bjelker, er det valgt å bruke  $V_{Ed,red}$  i en avstand  $d$  fra kanten av et opplegg, i henhold til EC2, 6.2.1(8).

I denne oppgaven er det valgt en løsning hvor taket og takbjelkene støpes separat. Dette medfører at bjelkene ikke kan betraktes som T-tverrsnitt. Dersom bjelkene skal betraktes som et T-tverrsnitt, må det være full skjæroverføring mellom bjelkene og taket og dette er det ikke tatt hensyn til i oppgaven.

Armeringtegningene for tak- og gulvbjelker er illustrert i Figur 6.7 og 6.8.



Figur 6.7: Armering for takbjelker over støtte og i felt



Figur 6.8: Armering for gulvbjelker over støtte og i felt

Nødvendig armeringsmengde i bjelkene er kontrollert med programmet for armeringsberegning. Resultatene viser godt samsvar med håndberegningene. For takbjelkene er avviket i nødvendig armeringsmengde mindre enn 1%, mens for gulvbjelkene er avviket ca. 5%, se vedlegg O.

Utnyttelser av valgt armering er kontrollert med iterasjonsprogrammet. I bjelken som er høyest utnyttet, er utnyttelsen i strekkarmeringen 189%, mens utnyttelsen i betongen er 90.6%. I bruddgrensetilstanden tillates det at armering flyter, derfor er en armeringstøyning på  $1.89\varepsilon_{yd}$  akseptabelt. Trykktøyningene i betongen er lavere enn  $\varepsilon_{cu2}$ , noe som bekrefter at tverrsnittet har tilstrekkelig kapasitet.

## Hulldekker

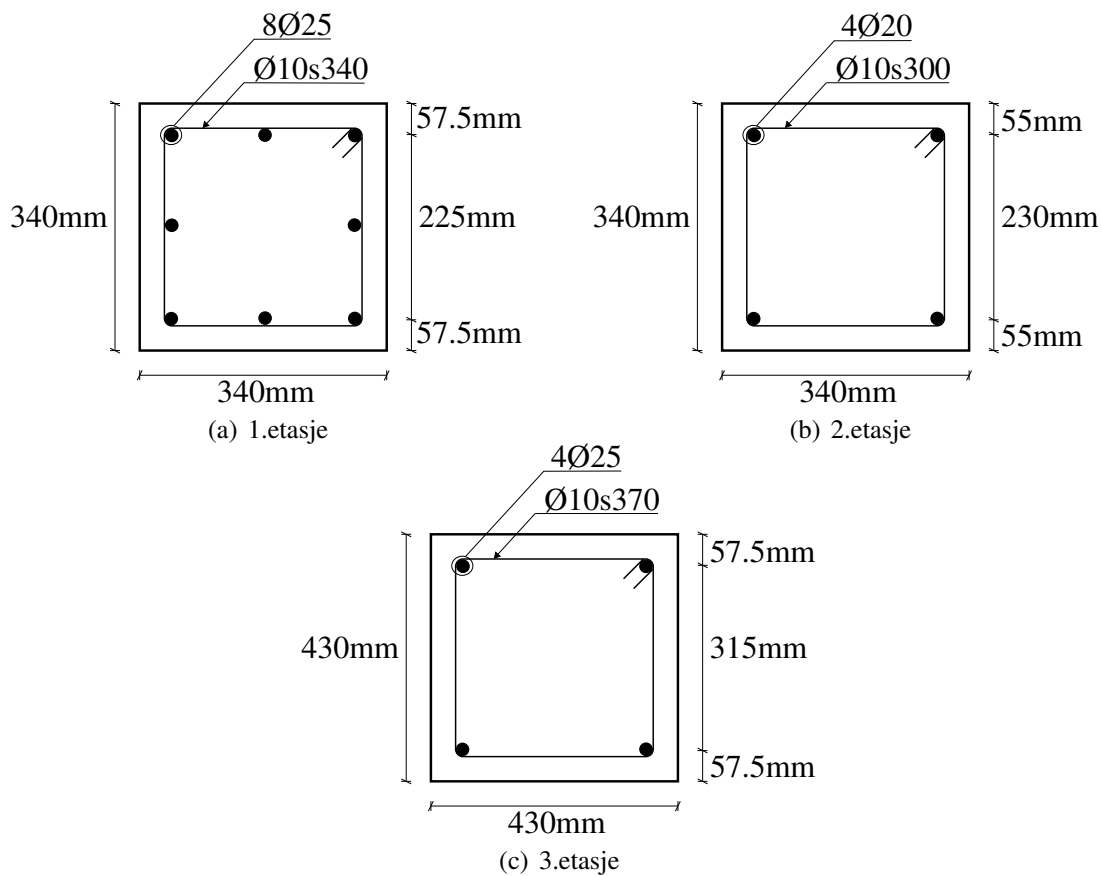
Hulldekkene er dimensjonert etter Betongelementboken bind A [13]. Etter Figur A 4.2, vil hulldekker med en høyde på 200mm ha mer enn tilstrekkelig kapasitet. Det bør bemerkes at figuren gir kun orienterende bæreevne for hulldekker, men dette er ansett som godt nok i denne oppgaven.

## Søylar

I samtaler med veileder ble det bestemt at søylene i eksempelbygget skulle ha en lik bredde som tilstødende bjelker. I beregningene som er gjort har bredden på tak- og gulvbjelker i alle tilfeller vært begrensningen for søylenes dimensjoner. Dette har ført til at det er små 2.ordens effekter i søylene. For de søylene som har behov for 2.ordens beregninger, er rammeprogrammet i vedlegg H benyttet.

I søylene er det tatt hensyn til en minsteeksentrisitet som gir et dimensjonerende moment. Momentet kan virke i begge retninger, noe som medfører symmetrisk armerte søylar. Nødvendige armeringsmengder er bestemt med bruk av M-N diagrammene i vedlegg B. Figur 6.9 viser hvordan søylene i de tre etasjene er armert.

Siden programmet for armeringsberegning (vedlegg G) ikke klarer å ta hensyn til symmetrisk armerte tverrsnitt, kan dette ikke benyttes til kontroll av nødvendig armering i søylene. Når det gjelder søylenes valgte armering, er det søylene i 1.etasje som er høyest utnyttet. Armeringen på strekksiden har en utnyttelsesgrad på 45%, mens betongen har en utnyttelse på 60.1%. Dette bekrefter at alle søylene i eksempelbygget bare er delvis utnyttet og har stor kapasitet.



Figur 6.9: Armering for søyler i alle tre etasjer

## 6.4 Diskusjon

### Bjelker

Som en følge av at dimensjonene på søylene begrenset seg til valg av bredde på bjelkene, var det i dimensjoneringsprosessen viktig å holde bjelkebredden så liten som mulig. For å holde takhøyden i bygget så stor som mulig, var det i tillegg viktig at bjelkene ikke ble altfor høye. Det ble derfor ansett som hensiktsmessig å holde bjelkedimensjonene så små som mulig og heller trykkarmere for å oppnå tilstrekkelig kapasitet. Dette medførte store armeringsmengder fordelt på et begrenset tverrsnitt. Både over støtte og i felt ble det behov for mye strekkarmering. For å unngå å plassere strekkarmeringen i tre lag, ble det valgt en bredde slik at nødvendig strekkarmering kunne begrenses til to lag.

Kontrollen av nødvendig armeringsmengde i gulvbjelkene viste avvik på opptil 5% fra håndberegningene. Dette skyldes at programmet for armeringsberegning (vedlegg G)

kun tar hensyn til ett armeringslag i både strekk- og trykksonen av et betongtverrsnitt. I kontrollen ble det derfor antatt at strekkarmeringen lå plassert i senter av de to valgte armeringslagene.

Grunnen til at kontrollen ga større avvik i nødvendig armeringsmengde for gulvbjelkene enn takbjelkene, er at tverrsnittshøyden er mindre for gulvbjelkene. Med en lavere tverrsnittshøyde blir avstanden fra tverrsnittets tyngdepunktsakse til armeringslaget mindre. Tilnærmelsen om kun ett armeringslag vil derfor gi større avvik for lavere bjelker.

## **Søylar**

I beregningene ble det antatt at søylene kunne tolkes som fritt opplagte, men i realiteten vil de ha en viss rotasjonsfastholding pga. tilstøtende bjelker. Grunnen til at det likevel ble valgt å se på søylene som fritt opplagte, er at knekk lengden til søylene blir lengre og dermed vil gi større 2.ordens effekter. Siden dette er et tema som er diskutert i denne rapporten, var det ønskelig med størst mulig 2.ordens effekter i søylene.

Dimensjonene på søylene i bygget ble valgt kun på grunnlag av bjelkebredder og hva som var beregningsmessig nødvendig. Resultatet ble at takbjelkenes bredde ga en større søyledimensjon i 3.etasje enn i 1. og 2. etasje. Dette er en lite praktisk løsning siden søylene i 3.etasje har minst last og størst dimensjoner. Et bedre alternativ ville vært å velge passende søyledimensjoner på grunnlag av lastene de er påkjent av. Overgangen søyle/bjelke kunne blitt løst med bruk av søyletopper.

Som tidligere nevnt er alle søylene dimensjonert ved å kombinere de mest ugunstige lastkombinasjonene fra hver etasje. Siden dimensjonene på søylene ble styrt av bjelkebreddene, har antagelsen om at både snølast og nyttelast dominerer samtidig, ingen innvirkning på de valgte søyledimensjonene.



# Kapittel 7

## Oppsummering og videre arbeid

M-N diagrammene som er laget i denne rapporten har gjennomgått flere sammenligninger og det er utført grundige kontroller. Diagrammene kan derfor trygt benyttes ved dimensjonering av symmetrisk armerte søyler i henhold til dagens regelverk.

Når det gjelder de to programmene som er laget for å beregne utnyttelse og nødvendig armering i et søyletverrsnitt, er disse godt egnet for dimensjonering av usymmetrisk armerte søyler. Likevel har programmene noen begrensninger. Programmet for armeringsberegning tar ikke hensyn til tverrsnitt som er symmetrisk armerte eller som har en delvis utnyttet trykksone. Videre har programmene en enkel utforming og således kan det gjøres videre arbeid for å utvide dem. Blant annet kan det legges inn muligheter for å ha armering i flere lag i tverrsnittet som betraktes. Det er i tillegg mulig å lage et program som er gyldig for sirkulære tverrsnitt, men dette ansees ikke som veldig aktuelt siden sirkulære tverrsnitt som regel armeres symmetrisk.

Beregning av knekk lengder er et tema som kan være aktuelt å studere nærmere. Forskyvelige søyler viser seg i noen tilfeller å ha betydelige avvik i knekk lengder beregnet basert på rotasjonsinnspenningsgrad og rotasjonsfleksibilitet. Derfor kan det være relevant å sammenligne knekk lengdene beregnet i denne rapporten med knekk lengder som er numerisk beregnet. På den måten kan det kontrolleres hvilken av de to metodene som gir størst avvik i forhold til eksakte verdier.

Et annet tema som også bør studeres nærmere, er de forenklede metodene i EC2 og NS 3473 for beregning av maksimumer i slanke søyler. Maksimumer beregnet med de forenklede metodene avviker betraktelig fra momenteter beregnet med en fullstendig 2.ordens analyse. Resultatene i denne oppgavene tyder på at den største grunnen til dette avviket skyldes utbøyningsberegningene i EC2. Korreksjonsfaktoren  $K_r$  blir større både ved reduksjon av aksialkraft og økning av armeringsmengde, noe som medfører at utbøyningen  $e_2$  også øker. Dette er motsatt av hva som er forventet. I denne rapporten

har det ikke blitt tid til å se nærmere på bakgrunnen for faktoren  $K_r$ , og det anbefales derfor å kontrollere formlene for utbøyning i EC2 nærmere, spesielt korreksjonsfaktoren  $K_r$ .

Når det gjelder 2.ordens maksmomenter beregnet med den forenklete metoden i NS 3473, kan denne kun benyttes for forskyvelige søyler. Som påpekt i det gamle regelverket, er ikke metoden egnet for uforskyvelige søyler grunnet avhengighet av innspenningsgrad, aksialkraftnivå og 1.ordens momentgradient. Siden den forenklete metoden i NS 3473 er like fullverdig som metoden benyttet i EC2, kan det være aktuelt å gjøre videre arbeid for å utvide metoden til å også omfatte uforskyvelige søyler.

Rammepogrammet for beregning av 2.ordens momentforløp i søyler er et godt dimensjoneringsverktøy, men bruken av programmet begrenses til mindre rammekonstruksjoner. Det er mulig å utvide programmet ytterligere, men det finnes andre elementprogrammer som er bedre egnet til større analyser.



# Referanser

- [1] Standard Norge. NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008. Eurokode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger.
- [2] Norges Standardiseringsforbund. NS 3473. Prosjektering av betongkonstruksjoner, Beregnings- og konstruksjonsregler, 2003.
- [3] Bernt Finnesand. *Betongkonstruksjoner, Dimensjonering av slakkarmerte betongkonstruksjoner etter NS 3473, Tabeller og diagrammer, Tillegg til Håndbok 44*. Norges byggforskningsinstitutt, 1993.
- [4] Department of Structural Engineering NTNU. TKT4222 Concrete Structures 3, Compendium, Autumn 2013.
- [5] S.I.Sørensen. *Betongkonstruksjoner, Beregning og dimensjonering etter Eurokode 2*. Tapir akademisk forlag, 2010.
- [6] S.I.Sørensen. Beregningsgrunnlaget for betongkonstruksjoner, Del 3 Rammeberegninger. Institutt for konstruksjonsteknikk NTNU, 1999.
- [7] J.Hellesland. *Mechanics and effective lengths of columns with positive and negative end restraints*. Elsevier, 2007.
- [8] B.Westerberg. *Second order effects in slender concrete structures, Background to rules in EC2*. KTH Civil and Architectural Engineering, 2004.
- [9] Standard Norge. NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2008. Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-1: Allmenne laster, Tetthet, egenvekt, nyttelaster i bygninger.
- [10] Standard Norge. NS-EN 1991-1-3:2003+NA:2008. Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-3: Allmenne laster, Snlaster.
- [11] Standard Norge. NS-EN 1991-1-4:2005+NA:2009. Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-4: Allmenne laster, Vindlaster.
- [12] Standard Norge. NS-EN 1990:2002+NA:2008. Eurokode: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner.

- [13] Betongelementforeningen. Betongelementboken, Bind A, Bygging med betongelementer, 2010.
- [14] Beton-Kalender. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1968.
- [15] Institutt for konstruksjonsteknikk NTNU. Stålkonstruksjoner, Profiler og formler, 3.utgave. Tapir akademisk forlag.

# Vedlegg



# Innhold

<b>A</b>	<b>M-N beregninger</b>	<b>87</b>
A.1	Rektangulære tverrsnitt . . . . .	87
A.2	Sirkulære tverrsnitt . . . . .	89
<b>B</b>	<b>M-N diagrammer</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>Kurvet vs. rektangulær spenningsfordeling</b>	<b>109</b>
C.1	Rektangulært tverrsnitt . . . . .	109
C.2	Sirkulært tverrsnitt . . . . .	114
<b>D</b>	<b>Diskusjon, merknad EC2, 3.1.7(3)</b>	<b>121</b>
<b>E</b>	<b>Egenkontroll av M-N diagrammer med Matlab</b>	<b>125</b>
E.1	Sammenligning av M-N diagrammer laget i Excel og Matlab . . . . .	127
E.2	Program: M-N diagrammer, rektangulære tverrsnitt . . . . .	129
E.3	Program: M-N diagrammer, sirkulære tverrsnitt . . . . .	131
E.4	Funksjon: Areal av trykksone . . . . .	133
E.5	Funksjon: Trykkresultant til betong . . . . .	134
E.6	Funksjon: Arm til betongtrykkresultant . . . . .	135
E.7	Funksjon: Resultant til trykkarmering . . . . .	137
E.8	Funksjon: Arm til trykkarmeringsresultant . . . . .	139
E.9	Funksjon: Resultant til strekkarmering . . . . .	141
E.10	Funksjon: Arm til strekkarmeringsresultant . . . . .	143
<b>F</b>	<b>Program basert på Iterasjonsmetoden</b>	<b>145</b>
<b>G</b>	<b>Program for armeringsberegning</b>	<b>149</b>
<b>H</b>	<b>Rammeprogrammet</b>	<b>153</b>
<b>I</b>	<b>Overslagsberegninger til rammeeksempler</b>	<b>159</b>

<b>J</b>	<b>Momentfordeling til 4 rammeeksempler</b>	<b>163</b>
J.1	Uforskyvelig enkeltkrum søyle . . . . .	163
J.2	Forskyvelig enkeltkrum søyle . . . . .	164
J.3	Uforskyvelig dobbeltkrum søyle . . . . .	164
J.4	Forskyvelig dobbeltkrum søyle . . . . .	165
<b>K</b>	<b>Beregningsrapporter fra Focus</b>	<b>167</b>
<b>L</b>	<b>Sammenligning av knekk lengder</b>	<b>189</b>
L.1	Uforskyvelige søyler . . . . .	190
L.2	Forskyvelige søyler . . . . .	192
<b>M</b>	<b>Beregning av 2.ordens momenter etter forenklet metode i EC2</b>	<b>195</b>
M.1	Uforskyvelig enkeltkrum søyle . . . . .	196
M.2	Forskyvelig enkeltkrum søyle . . . . .	196
M.3	Uforskyvelig dobbeltkrum søyle . . . . .	197
M.4	Forskyvelig dobbeltkrum søyle . . . . .	197
<b>N</b>	<b>Beregning av 2.ordens momenter etter rotasjonsinnspenningsgrad</b>	<b>199</b>
N.1	Forskyvelig enkeltkrum søyle . . . . .	199
N.2	Forskyvelig dobbeltkrum søyle . . . . .	201
<b>O</b>	<b>Eksempelbygg</b>	<b>203</b>
O.1	Bæresystem . . . . .	203
O.2	Variable laster . . . . .	205
O.2.1	Nyttelaster . . . . .	205
O.2.2	Snølast . . . . .	205
O.2.3	Vindlast . . . . .	206
O.3	Dimensjonering av taket . . . . .	207
O.3.1	Laster . . . . .	207
O.3.2	Lastvirkninger . . . . .	208
O.3.3	Dimensjonering av tak for moment . . . . .	210
O.3.4	Dimensjonering av tak for skjær . . . . .	213
O.3.5	Armeringstegninger . . . . .	213
O.4	Dimensjonering av takbjelker . . . . .	214
O.4.1	Laster . . . . .	214
O.4.2	Lastvirkninger . . . . .	214
O.4.3	Dimensjonering av bjelke for moment . . . . .	215
O.4.4	Dimensjonering av bjelke for skjær . . . . .	218
O.4.5	Armeringstegninger . . . . .	220
O.5	Dimensjonering av søyler i 3.etg. . . . .	221

O.5.1	Laster . . . . .	221
O.5.2	Slankhetskriterium . . . . .	221
O.5.3	Armeringsberegninger . . . . .	224
O.5.4	Armeringstegning . . . . .	225
O.6	Dimensjonering av hulldekker . . . . .	226
O.6.1	Laster . . . . .	226
O.6.2	Valg av hulldekke . . . . .	226
O.7	Dimensjonering av gulvbjelker . . . . .	227
O.7.1	Laster . . . . .	227
O.7.2	Lastvirkninger . . . . .	228
O.7.3	Dimensjonering av bjelke for moment . . . . .	228
O.7.4	Dimensjonering av bjelke for skjær . . . . .	230
O.7.5	Armeringstegninger . . . . .	232
O.8	Dimensjonering av søyler i 2.etg. . . . .	233
O.8.1	Laster . . . . .	233
O.8.2	Slankhetskriterium . . . . .	233
O.8.3	Beregning av 2.ordens moment med rammeprogrammet . . . . .	235
O.8.4	Armeringsberegninger . . . . .	235
O.8.5	Armeringstegning . . . . .	237
O.9	Dimensjonering av søyler i 1.etg. . . . .	238
O.9.1	Laster . . . . .	238
O.9.2	Slankhetskriterium . . . . .	238
O.9.3	Beregning av 2.ordens moment med rammeprogrammet . . . . .	240
O.9.4	Armeringsberegninger . . . . .	240
O.9.5	Armeringstegning . . . . .	242





# Vedlegg A

## M-N beregninger

### A.1 Rektangulære tverrsnitt

#### Trykkraft i betongen

$$T_c = \iint_A \sigma dA = b \int_0^h \sigma dy = b \int_0^{\varepsilon_{cu2}} \sigma_c \cdot \frac{x}{\varepsilon_{cu2}} d\varepsilon$$

Integrasjonen av betongkraften  $T_c$  deles inn i to deler,  $T_{c1}$  og  $T_{c2}$ .  $T_{c1}$  gir kraften i den parabelformede delen av spenningsfordelingen, mens  $T_{c2}$  representerer den rektangulære delen.

$$T_{c1} = \frac{bx}{\varepsilon_{cu2}} \int_0^{\varepsilon_{c2}} f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) d\varepsilon = f_{cd} \frac{bx}{\varepsilon_{cu2}} \left[ \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_{c2}} - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon_{c2}^2} \right]_0^{\varepsilon_{c2}}$$

$$= f_{cd} \frac{bx}{\varepsilon_{cu2}} \left( \frac{\varepsilon_{c2}^2}{\varepsilon_{c2}} - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{c2}^3}{\varepsilon_{c2}^2} \right) = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} f_{cd} bx$$

$$T_{c2} = \frac{bx}{\varepsilon_{cu2}} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu2}} f_{cd} d\varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} bx f_{cd}$$

Total trykkraft i betongen beregnes som:

$$T_c = T_{c1} + T_{c2} = f_{cd}bx \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu2}}\right)$$

### Betongtrykkresultantens angrepunkt

$$M_c = \iint_A \sigma_c y dA = b \int_0^h \sigma_c y dy = b \int_0^{\varepsilon_{cu2}} \sigma_c \cdot \frac{x}{\varepsilon_{cu2}} \varepsilon \cdot \frac{x}{\varepsilon_{cu2}} d\varepsilon = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \int_0^{\varepsilon_{cu2}} \sigma_c \cdot \varepsilon d\varepsilon$$

På tilsvarende vis som for trykkraften, deles momentet  $M_c$  inn i to bidrag,  $M_{c1}$  og  $M_{c2}$ :

$$\begin{aligned} M_{c1} &= \frac{bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} f_{cd} \left(2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2\right) \varepsilon_c d\varepsilon = \frac{f_{cd}bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \left(2 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon_{c2}^2}\right) d\varepsilon \\ &= \frac{f_{cd}bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \left[ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon_{c2}} - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon_{c2}^2} \right]_0^{\varepsilon_{c2}} = \frac{f_{cd}bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \left( \frac{2}{3} \varepsilon_{c2}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_{c2}^2 \right) = \frac{5}{12} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cu2}} \right)^2 f_{cd}bx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{c2} &= \frac{bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu2}} f_{cd} \cdot \varepsilon d\varepsilon = \frac{f_{cd}bx^2}{\varepsilon_{cu2}^2} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right]_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{cu2}} = \frac{\varepsilon_{cu}^2 - \varepsilon_{c2}^2}{2\varepsilon_{cu2}^2} f_{cd}bx^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \right)^2 \right) f_{cd}bx^2 \end{aligned}$$

Totalt moment i betongen kan da beregnes som:

$$M = M_{c1} + M_{c2} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \right)^2 \right) f_{cd}bx^2$$

Med kjent resultantkraft og moment, kan angrepunktet beregnes:

$$y_c = \frac{M_c}{T_c} = \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \right)^2}{1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu2}}} \cdot x$$

## Dimensjonsløse uttrykk

De dimensjonsløse uttrykkene for et rektangulært betongtverrsnitt beregnes til slutt:

$$n = \frac{T_c}{f_{cd}bh} + \frac{S_t + S_b}{f_{cd}bh} = \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu}}\right) + \frac{\sigma_t + \sigma_b}{f_{yd}} w$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{T_c}{f_{cd}bh^2} \cdot \left(\frac{h}{2} - (x - y_c)\right) + \frac{S_t - S_b}{f_{cd}bh^2} \frac{h'}{2} \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{3\varepsilon_{cu2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{h} + \frac{y_c}{h}\right) + \frac{\sigma_t - \sigma_b}{2f_{yd}} \frac{h'}{h} w \end{aligned}$$

## A.2 Sirkulære tverrsnitt

### Trykkraft i betongen

$$T_c = \iint_A \sigma_c dA$$

På tilsvarende vis som for rektangulære tverrsnitt, deles trykkraften i to deler,  $T_{c1}$  og  $T_{c2}$ :

$$\begin{aligned} T_{c1} &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} \left(2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^2\right) dz dy \\ &= f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \left(\frac{2}{\varepsilon_{c2}} \left(\varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot y\right) - \frac{1}{\varepsilon_{c2}^2} \left(\varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot y\right)^2\right) dz dy \end{aligned}$$

$$= f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \left( \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) + \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) y - \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 y^2 \right) dz dy$$

$$T_{c1} = f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \left( \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) + \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) y - \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 y^2 \right) 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

Integralet for  $T_{c1}$  består av mange ledd, og for å gjøre det noe mer håndterlig deles det inn i tre deler, videre kalt  $T_{c11}$ ,  $T_{c12}$  og  $T_{c13}$ .

$$T_{c11} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= 2f_{cd} \left[ \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \left( \frac{y}{2} \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{R^2}{2} \cdot \sin^{-1} \left( \frac{y}{R} \right) \right) \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$T_{c12} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) y \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= 2f_{cd} \left[ \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) \left( -\frac{1}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \right) \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$T_{c13} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} - \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= -2f_{cd} \left[ \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{8} \left( y \sqrt{R^2 - y^2} (2y^2 - R^2) + R^4 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R} \right) \right) \right]_{y_1}^{y_2}$$

De tre bidragene kan så summeres for å finne  $T_{c1}$ :

$$T_{c1} = T_{c11} + T_{c12} + T_{c13}$$

$$\begin{aligned} T_{c2} &= \int_{y_2}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} dz dy = 2f_{cd} \int_{y_2}^R \sqrt{R^2-y^2} dy \\ &= 2f_{cd} \left[ \frac{y}{2} \sqrt{R^2-y^2} + \frac{R^2}{2} \sin^{-1} \left( \frac{y}{R} \right) \right]_{y_2}^R \end{aligned}$$

Total kraft i betongen finnes ved å summere de to bidragene:

$$T_c = T_{c1} + T_{c2}$$

## Betongtrykkresultantens angrepspunkt

$$M_c = \iint_A \sigma_c y dA$$

$$\begin{aligned} M_{c1} &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} \left( 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) y dz dy \\ &= f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \left( \frac{2}{\varepsilon_{c2}} \left( \varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot y \right) - \frac{1}{\varepsilon_{c2}^2} \left( \varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot y \right)^2 \right) y dz dy \end{aligned}$$

$$= f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \left( \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) y + \left( \frac{2\varepsilon_{cu}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) y^2 - \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 y^3 \right) dz dy$$

$$M_{c1} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \left( \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) y + \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) y^2 - \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 y^3 \right) \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

Også her er det valgt å dele  $M_{c1}$  inn i tre deler for å gjøre uttrykkene noe enklere:

$$M_{c11} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) y \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= 2f_{cd} \left[ \left( 2 \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} - \left( \frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \left( -\frac{1}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \right) \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$M_{c12} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= 2f_{cd} \left[ \left( \frac{2\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} - \frac{2\varepsilon_{tp}\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}^2} \right) \frac{1}{8} \left( y \sqrt{R^2 - y^2} (2y^2 - R^2) + R^4 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R} \right) \right) \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$M_{c13} = 2f_{cd} \int_{y_1}^{y_2} - \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 y^3 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$= -2f_{cd} \left[ \left( \frac{\varepsilon_{cu2}}{x\varepsilon_{c2}} \right)^2 \cdot -\frac{1}{15} (R^2 - y^2)^{3/2} (2R^2 + 3y^2) \right]_{y_1}^{y_2}$$

De tre bidragene kan så summeres for å finne  $M_{c1}$ :

$$M_{c1} = M_{c11} + M_{c12} + M_{c13}$$

$$\begin{aligned} M_{c2} &= \int_{y_2}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f_{cd} \cdot y \, dz \, dy = 2f_{cd} \int_{y_2}^R y \sqrt{R^2 - y^2} \, dy \\ &= 2f_{cd} \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - y^2} \right]_{y_2}^R \end{aligned}$$

Totalt moment i betongen beregnes ved å summere  $M_{c1}$  og  $M_{c2}$ :

$$M_c = M_{c1} + M_{c2}$$

Med kjent resultantkraft og moment, kan angrepspunktet beregnes:

$$y_c = \frac{M_c}{T_c}$$

## Krefter i armeringen

Trykkraft i armeringen, ytre radius:

$$S_{t,y} = \iint_{A_y} \sigma_s \, dA$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 &\quad \Rightarrow \quad y_{s1,y} = -\frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x && \geq -R_{sy} \\ \varepsilon = \varepsilon_{yd} &\quad \Rightarrow \quad y_{s2,y} = \frac{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x && \leq R_{sy} \\ \varepsilon = -\varepsilon_{yd} &\quad \Rightarrow \quad y_{s3,y} = -\frac{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x && \geq -R_{sy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{t1,y} &= \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2-y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2-y^2}} E_s \cdot \varepsilon \, dz \, dy = E_s \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2-y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2-y^2}} \left( \varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} y \right) \, dz \, dy \\
&= 2E_s \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \left( \left( \varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} y \right) \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} \right) \, dy \\
&= 2E_s \left[ \frac{\varepsilon_{tp}}{2} \left( y \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} + R_{sy}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{sy}} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} (R_{sy}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \\
S_{t2,y} &= \int_{y_{s2,y}}^{R_{sy}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2-y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2-y^2}} f_{yd} \, dz \, dy = 2f_{yd} \int_{y_{s2,y}}^{R_{sy}} \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} \, dy \\
&= f_{yd} \left[ y \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} + R_{sy}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{sy}} \right) \right]_{y_{s2,y}}^{R_{sy}}
\end{aligned}$$

Trykkraft i armeringen, indre radius:

$$S_{t,i} = \iint_{A_i} \sigma_s \, dA$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 0 &\quad \Rightarrow \quad y_{s1,i} = -\frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x &\geq &\quad -R_{si} \\
\varepsilon = \varepsilon_{yd} &\quad \Rightarrow \quad y_{s2,i} = \frac{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x &\leq &\quad R_{si} \\
\varepsilon = -\varepsilon_{yd} &\quad \Rightarrow \quad y_{s3,i} = -\frac{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{tp}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x &\geq &\quad -R_{si}
\end{aligned}$$



$$S_{t1,i} = 2E_s \left[ \frac{\varepsilon_{tp}}{2} \left( y\sqrt{R_{si}^2 - y^2} + R_{si}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{si}} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} (R_{si}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{y_{s1,i}}^{y_{s2,i}}$$

$$S_{t2,i} = f_{yd} \left[ y\sqrt{R_{si}^2 - y^2} + R_{si}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{si}} \right) \right]_{y_{s2,i}}^{R_{si}}$$

Trykkkraft i armeringen:

$$S_{t,y} = S_{t1,y} + S_{t2,y} \quad S_{t,i} = S_{t1,i} + S_{t2,i} \quad S_t = S_{t,y} - S_{t,i}$$

Strekraft i armeringen, ytre radius:

Integralene vil her bli de samme som for trykkarmeringen, kun integrasjonsgrensene endres.

$$S_{s1,y} = 2E_s \left[ \frac{\varepsilon_{tp}}{2} \left( y\sqrt{R_{sy}^2 - y^2} + R_{sy}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{sy}} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} (R_{sy}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{y_{s3,y}}^{y_{s1,y}}$$

$$S_{s2,y} = f_{yd} \left[ y\sqrt{R_{sy}^2 - y^2} + R_{sy}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{sy}} \right) \right]_{-R_{sy}}^{y_{s3,y}}$$

Strekraft i armeringen, indre radius:

$$S_{s1,i} = 2E_s \left[ \frac{\varepsilon_{tp}}{2} \left( y\sqrt{R_{si}^2 - y^2} + R_{si}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{si}} \right) \right) - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} (R_{si}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{y_{s3,i}}^{y_{s1,i}}$$

$$S_{s2,i} = f_{yd} \left[ y\sqrt{R_{si}^2 - y^2} + R_{si}^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_{si}} \right) \right]_{-R_{si}}^{y_{s3,i}}$$

Strekraft i armeringen:

$$S_{s,y} = S_{s1,y} + S_{s2,y} \quad S_{s,i} = S_{s1,i} + S_{s2,i} \quad S_s = S_{s,y} - S_{s,i}$$

## Angrepspunkter til kraftresultantene i armeringen

### Trykkarmeringens moment, ytre radius:

Fremgangsmåten er her den samme som for betongen, men som for kraften i armeringen må det integreres både til indre og ytre armeringsradius. Integrasjonsgrensene er de samme som ved integrasjon for å finne armeringskreftene.

$$\begin{aligned}
 M_{t1,y} &= \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}} E_s \varepsilon y dz dy = 2E_s \int_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \left( \varepsilon_{tp} + \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot y \right) y \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} dy \\
 &= 2E_s \left[ -\frac{\varepsilon_{tp}}{3} (R_s^2 - y^2)^{3/2} + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \left( y \sqrt{R_s^2 - y^2} (2y^2 - R_s^2) + R_s^4 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_s} \right) \right) \right]_{y_{s1,y}}^{y_{s2,y}} \\
 M_{t2,y} &= \int_{y_{s2,y}}^{R_{sy}} \int_{-\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}}^{\sqrt{R_{sy}^2 - y^2}} f_{yd} y dz dy = 2f_{yd} \int_{y_{s2,y}}^{R_{sy}} y \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} dy = 2f_{yd} \left[ -\frac{1}{3} (R_{sy}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{y_{s2,y}}^{R_{sy}}
 \end{aligned}$$

### Trykkarmeringens moment, indre radius:

$$\begin{aligned}
 M_{t1,i} &= 2E_s \left[ -\frac{\varepsilon_{tp}}{3} (R_s^2 - y^2)^{3/2} + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \left( y \sqrt{R_s^2 - y^2} (2y^2 - R_s^2) + R_s^4 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_s} \right) \right) \right]_{y_{s1,i}}^{y_{s2,i}} \\
 M_{t2,i} &= 2f_{yd} \int_{y_{s2,i}}^{R_{si}} y \sqrt{R_{si}^2 - y^2} dy = 2f_{yd} \left[ -\frac{1}{3} (R_{si}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{y_{s2,i}}^{R_{si}}
 \end{aligned}$$

### Trykkarmeringens angrepspunkt:

Momentet trykkarmeringen gir om sirkelens senter kan deretter beregnes ved formlene gitt under:

$$M_{t,y} = M_{t1,y} + M_{t2,y} \quad M_{t,i} = M_{t1,i} + M_{t2,i} \quad M_t = M_{t,y} - M_{t,i}$$

Med kjent moment og resultantkraft i trykkarmeringen, kan trykkresultantens avstand fra senter av sirkelen beregnes:

$$y_{st} = \frac{M_t}{S_t}$$

Strekkarmeringens moment, ytre radius:

Integralene blir her akkurat de samme som for trykkarmeringen, det eneste som endres er integrasjonsgrensene.

$$M_{s1,y} = 2E_s \left[ -\frac{\varepsilon_{tp}}{3} (R_s^2 - y^2)^{3/2} + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon_{cu} 2}{x} \left( y \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} (2y^2 - R_{sy}^2) + R_{sy}^4 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_s} \right) \right) \right]_{y_{s3,y}}^{y_{s1,y}}$$

$$M_{s2,y} = 2f_{yd} \int_{-R_{sy}}^{y_{s3,y}} y \sqrt{R_{sy}^2 - y^2} dy = 2f_{yd} \left[ -\frac{1}{3} (R_{sy}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{-R_{sy}}^{y_{s3,y}}$$

Strekkarmeringens moment, indre radius:

$$M_{s1,i} = 2E_s \left[ -\frac{\varepsilon_{tp}}{3} (R_s^2 - y^2)^{3/2} + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon_{cu} 2}{x} \left( y \sqrt{R_{si}^2 - y^2} (2y^2 - R_{si}^2) + R_{si}^4 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R_s} \right) \right) \right]_{y_{s3,i}}^{y_{s1,i}}$$

$$M_{s2,i} = 2f_{yd} \int_{-R_{si}}^{y_{s3,i}} y \sqrt{R_{si}^2 - y^2} dy = 2f_{yd} \left[ -\frac{1}{3} (R_{si}^2 - y^2)^{3/2} \right]_{-R_{si}}^{y_{s3,i}}$$

Strekkarmeringens angrepspunkt:

Momentet strekkarmeringen gir om sirkelens senter kan deretter beregnes ved formlene gitt under:

$$M_{s,y} = M_{s1,y} + M_{s2,y} \quad M_{s,i} = M_{s1,i} + M_{s2,i} \quad M_s = M_{s,y} - M_{s,i}$$

Med kjent moment og resultantkraft i trykkarmeringen, kan trykkresultantens avstand fra senter av sirkelen beregnes:

$$y_{ss} = \frac{M_s}{S_s}$$

## Dimensjonsløse uttrykk:

Med uttrykk for alle krefter og resultantenes angrepspunkt, kan det til slutt lages dimensjonsløse uttrykk:

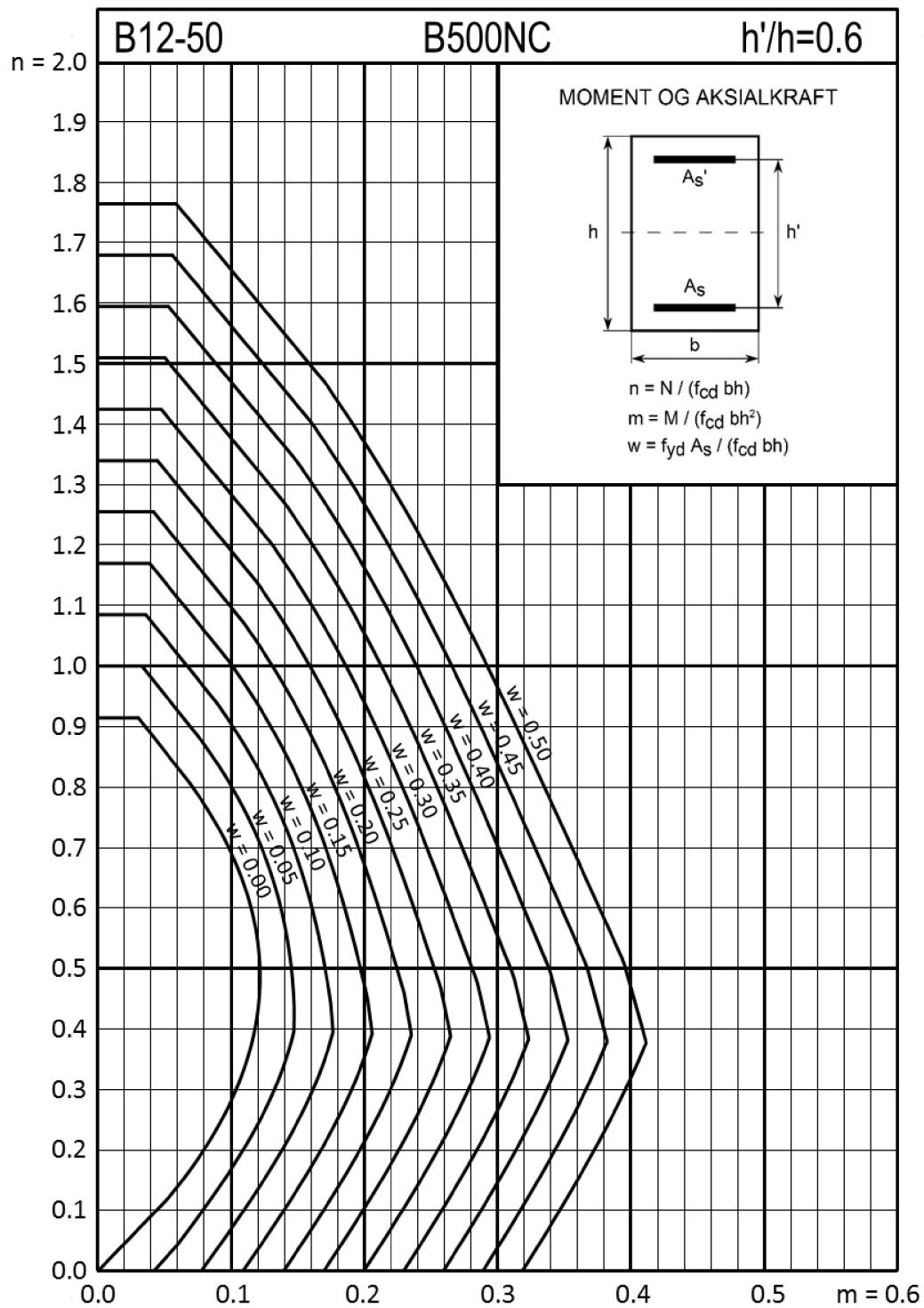
$$n = \frac{T_c}{f_{cd}A_c} + \frac{S_t + S_b}{f_{cd}A_c} = \frac{T_c}{f_{cd}A_c} + \frac{S_t + S_b}{f_{yd}A_s}w$$

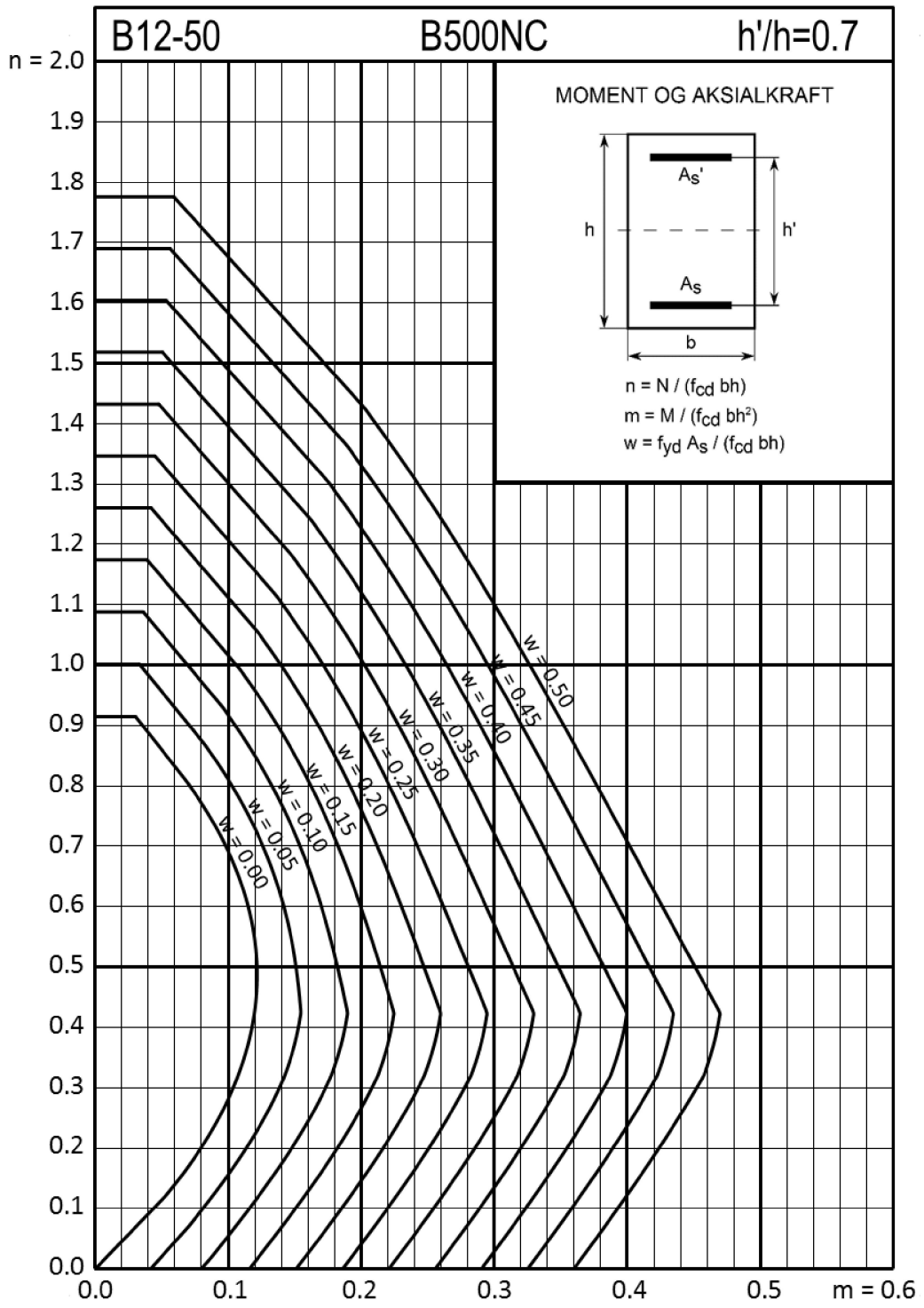
$$m = \frac{T_c}{f_{cd}A_cD} \cdot y_{ct} + \frac{S_t \cdot y_{st}}{f_{cd}A_cD} - \frac{S_b \cdot y_{ss}}{f_{cd}A_cD}$$

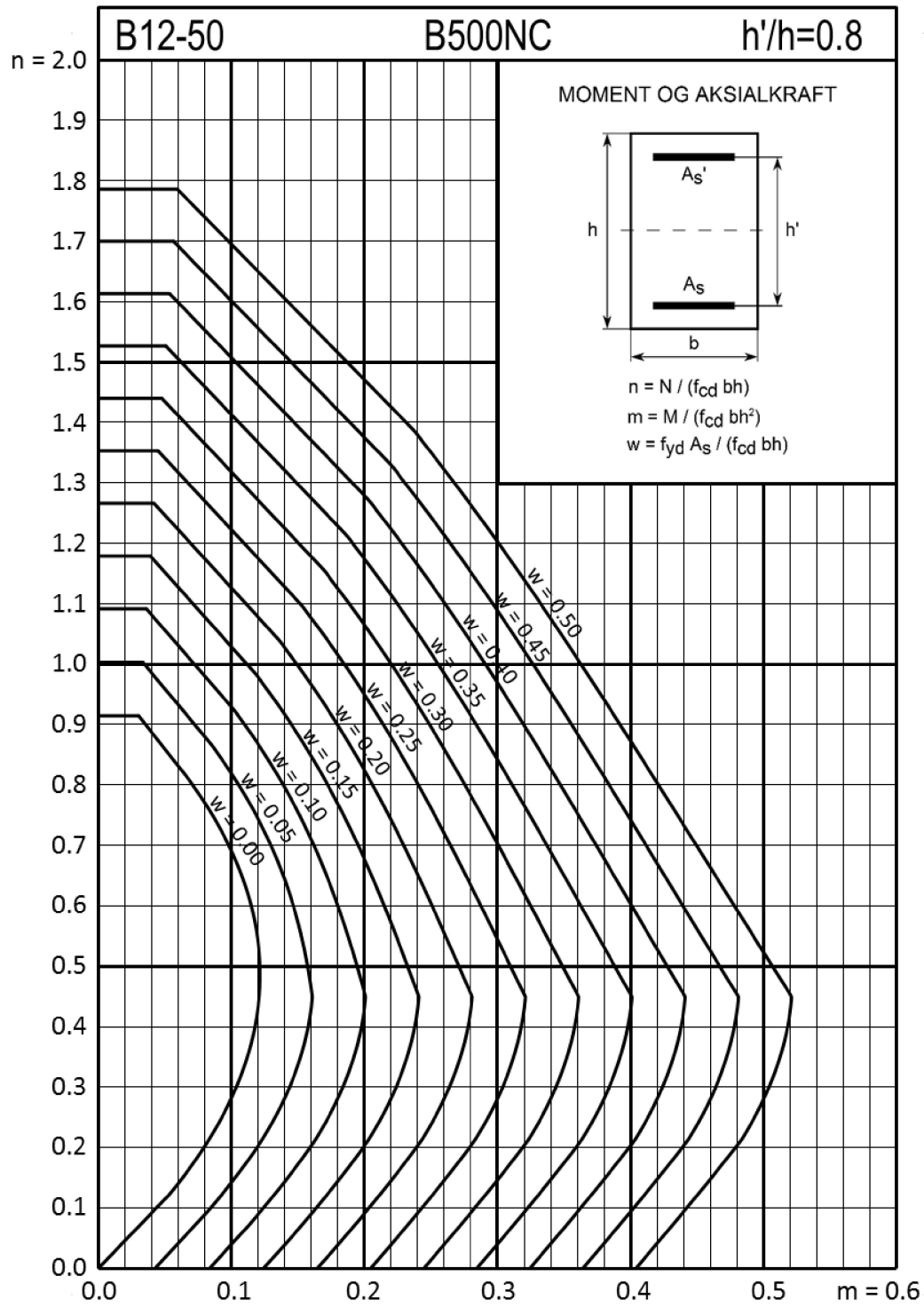
$$= \frac{T_c}{f_{cd}A_c} \cdot \frac{y_{ct}}{D} + \frac{S_t \cdot \frac{y_{st}}{D} + S_b \cdot \frac{y_{ss}}{D}}{f_{yd}A_s}w$$

## **Vedlegg B**

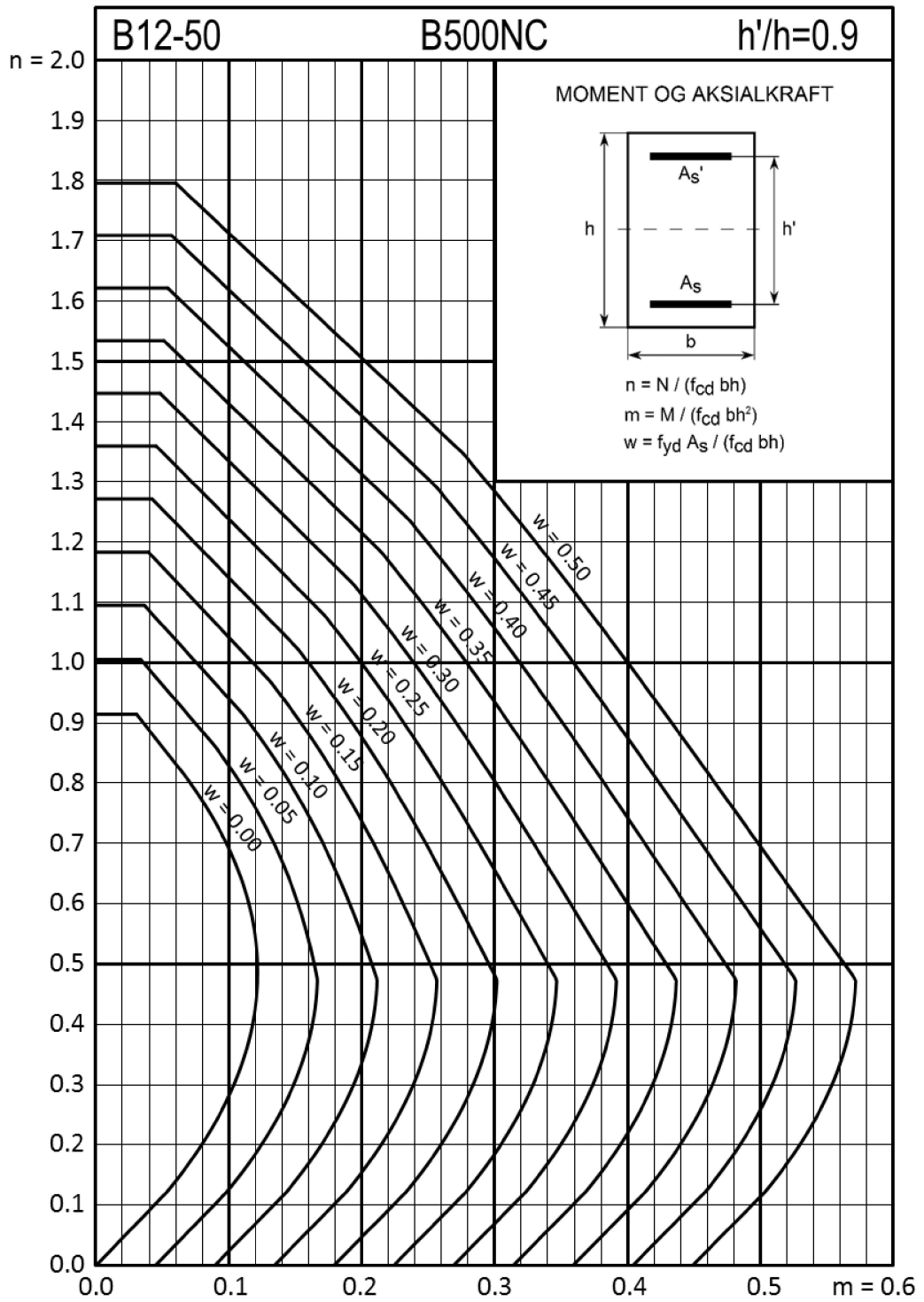
### **M-N diagrammer**

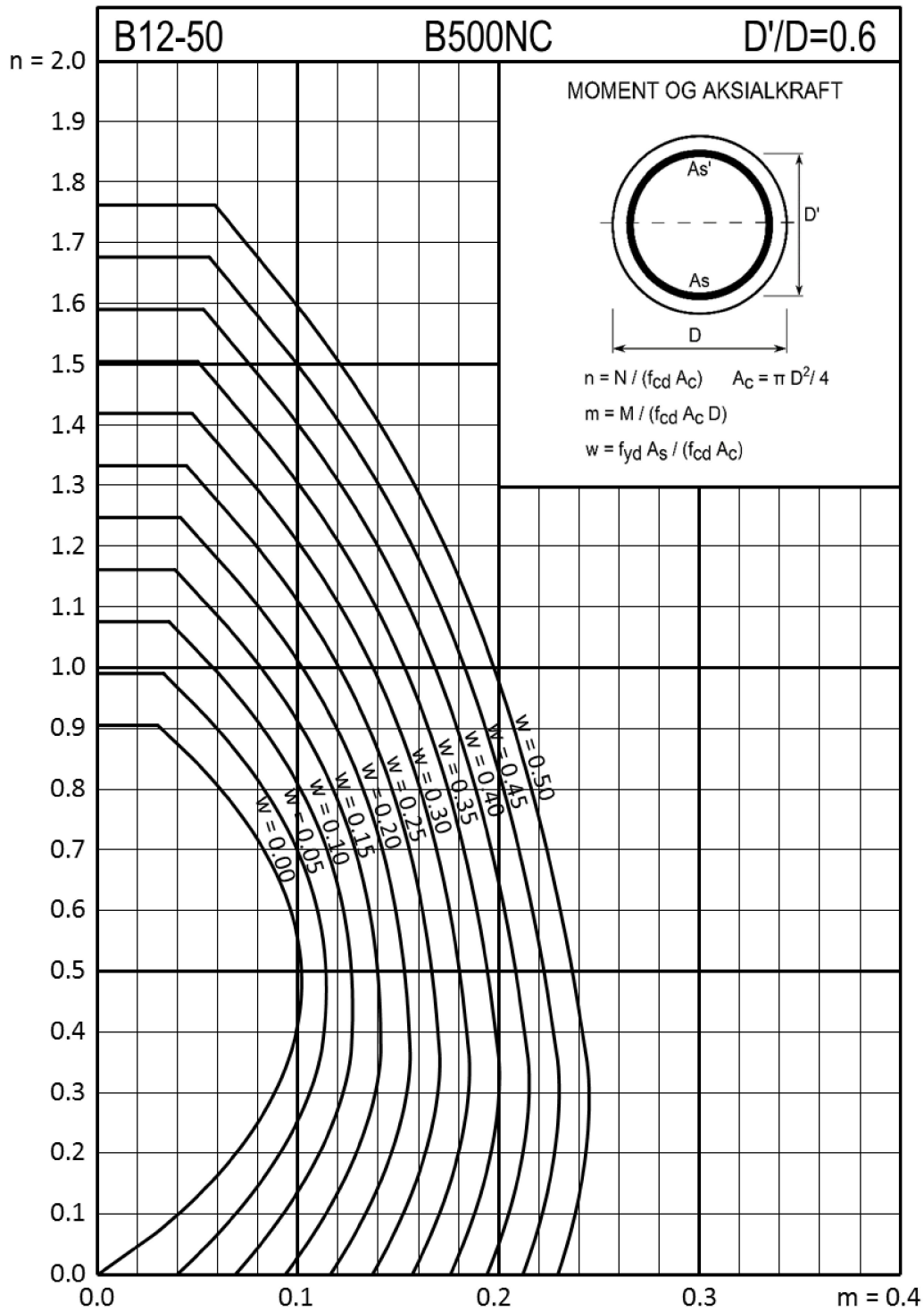


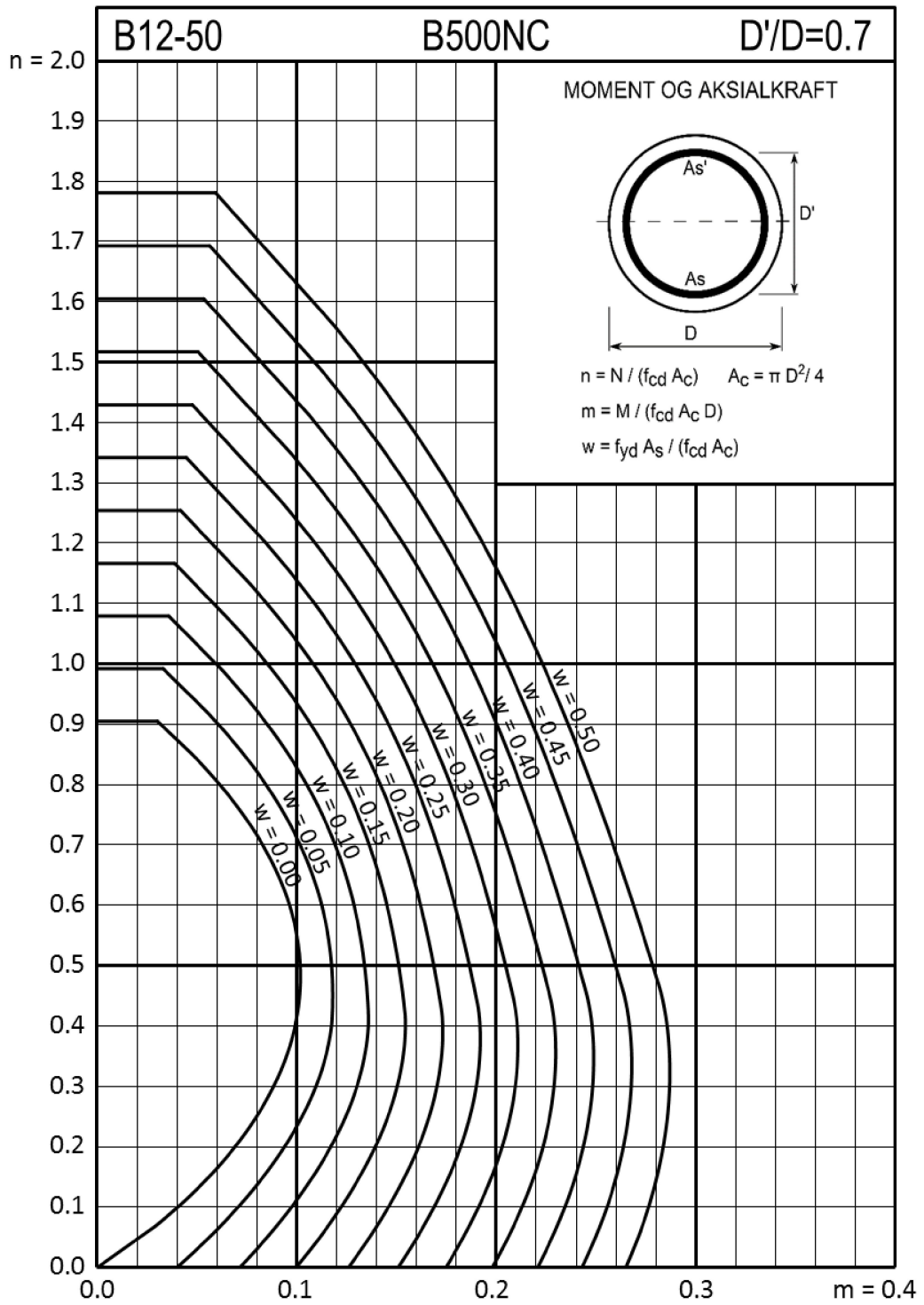


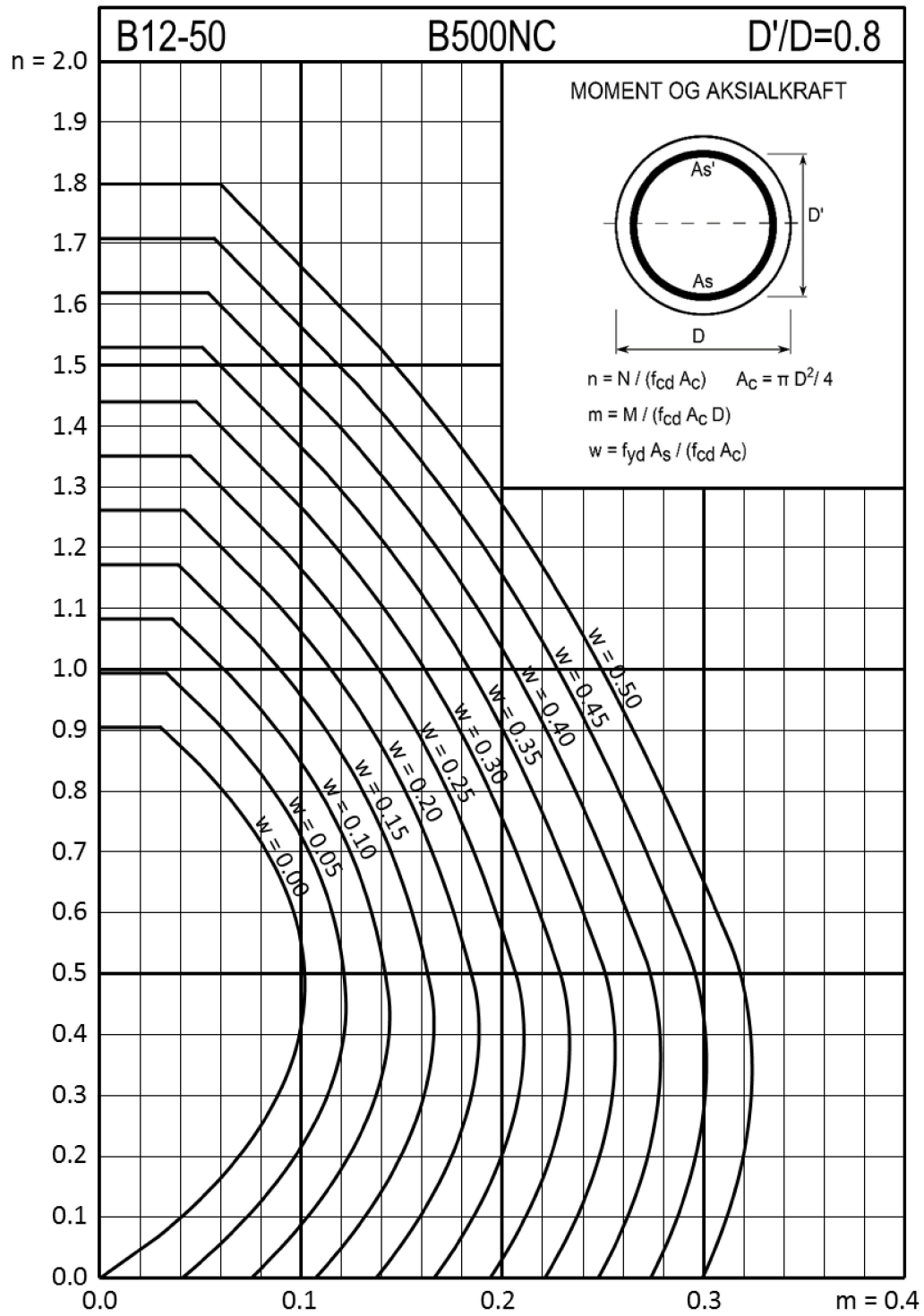


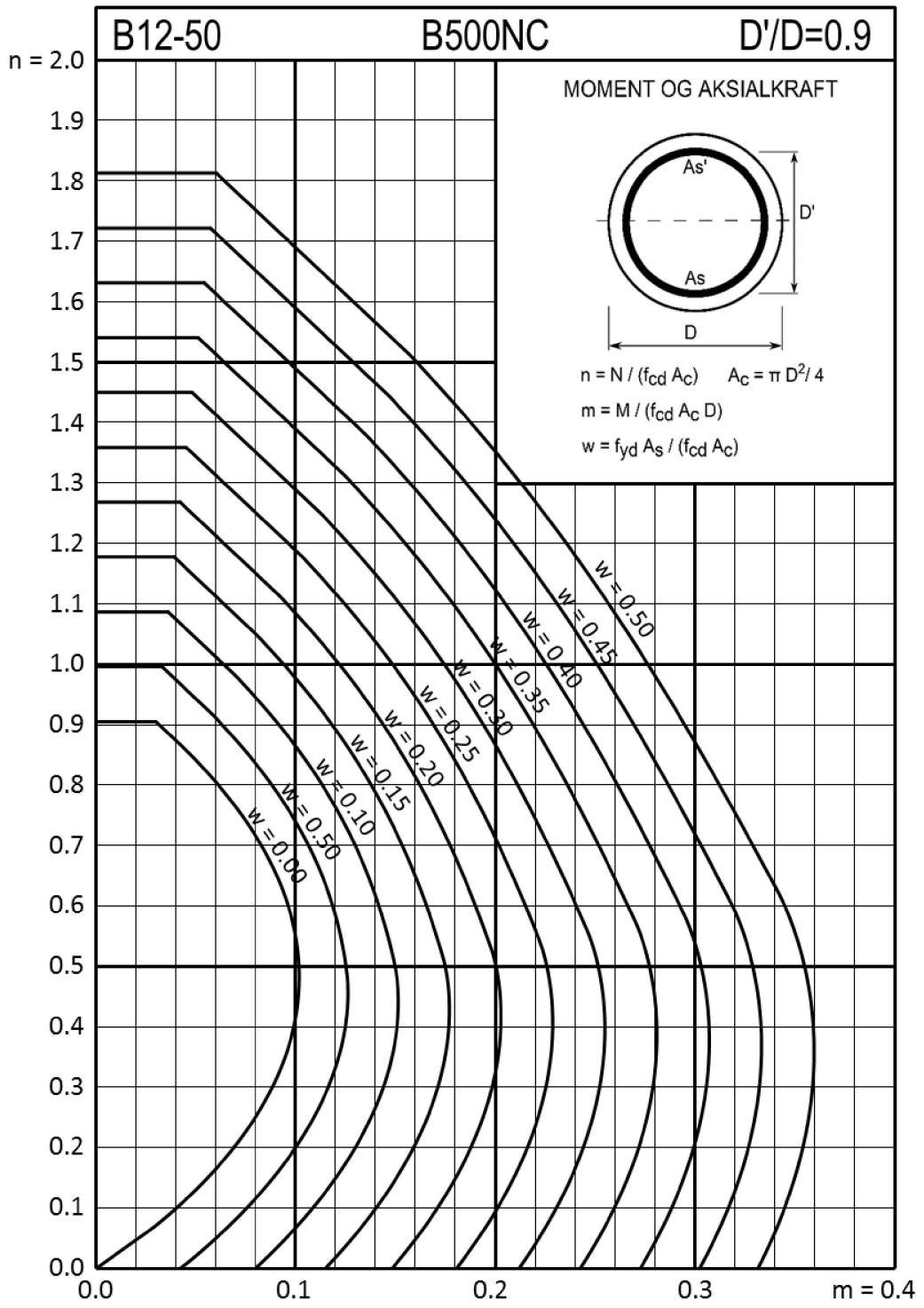


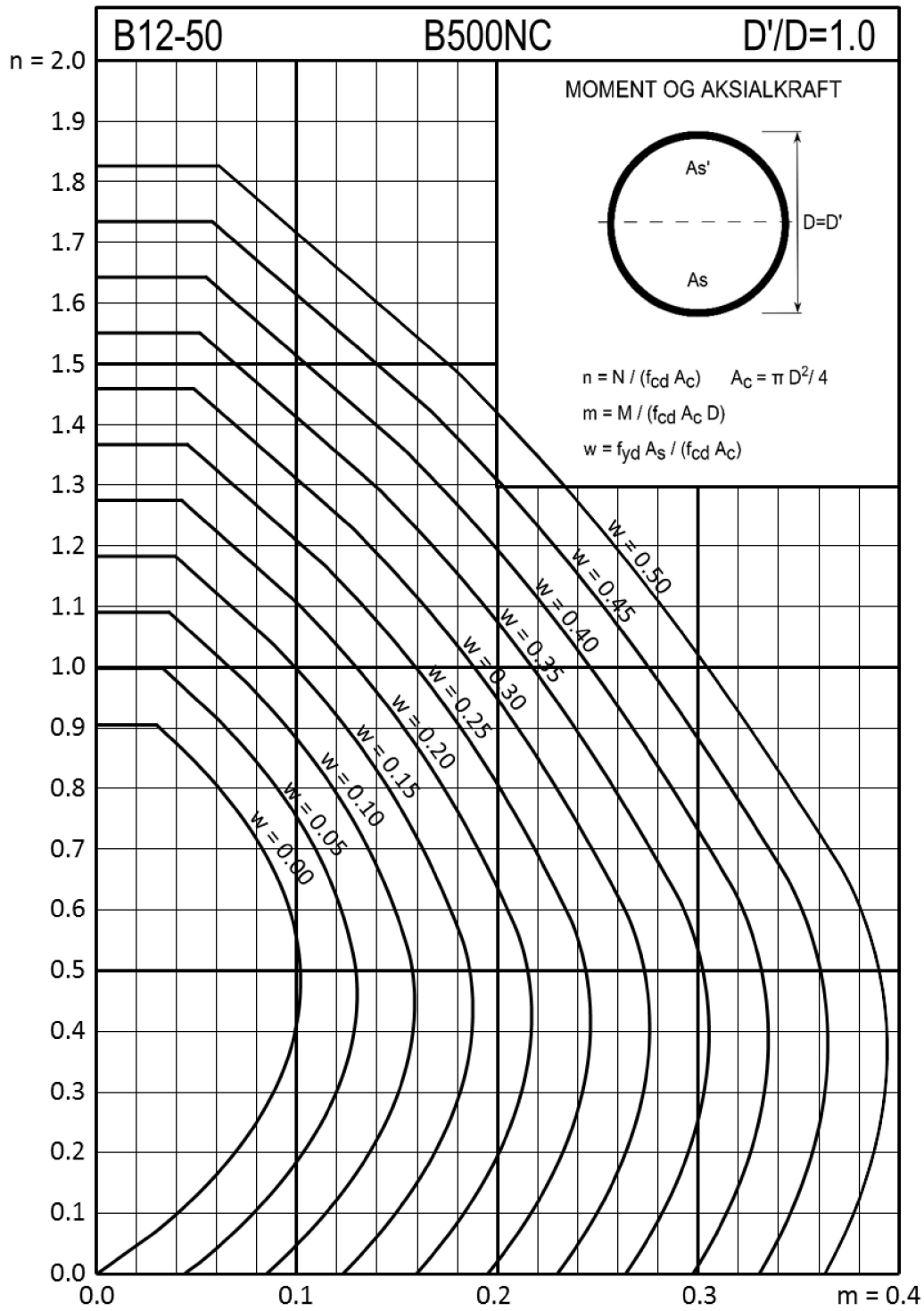












## Vedlegg C

# Kurvet vs. rektangulær spenningsfordeling

For å undersøke i hvor stor grad valg av spennings- tøyningssammenheng vil påvirke resultatene i M-N diagrammene, er det i dette vedlegget produsert diagrammer som viser forskjellen mellom bruk av kurvet (parabel-rektangulær) og rektangulær spenningsfordeling.

### C.1 Rektangulært tverrsnitt

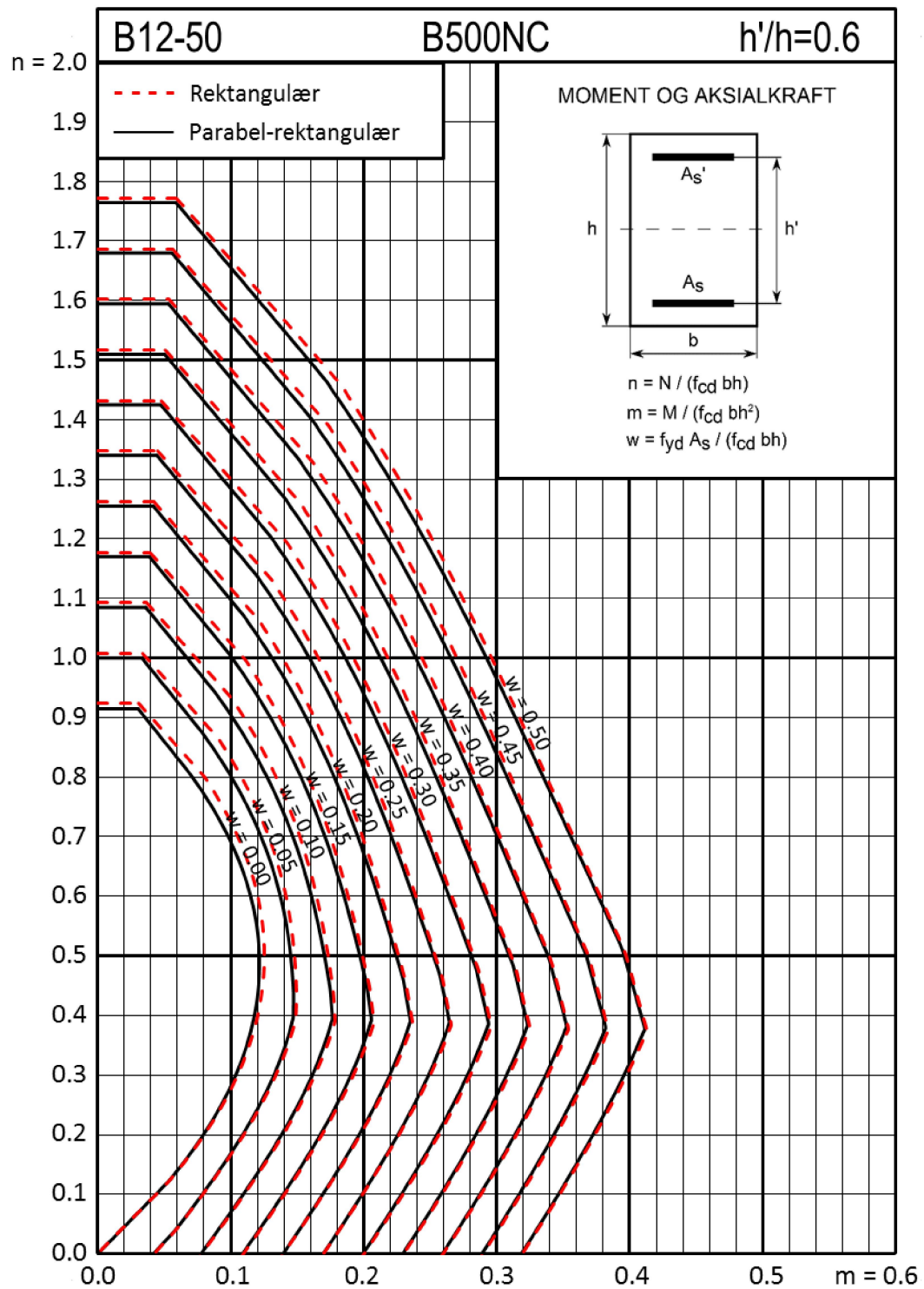
Med en rektangulær spenningsfordeling i betongen, kan de dimensjonsløse størrelsene skrives som:

$$n = 0.8 \frac{x}{h} + \frac{\sigma_t + \sigma_b}{f_{yd}} \cdot w$$

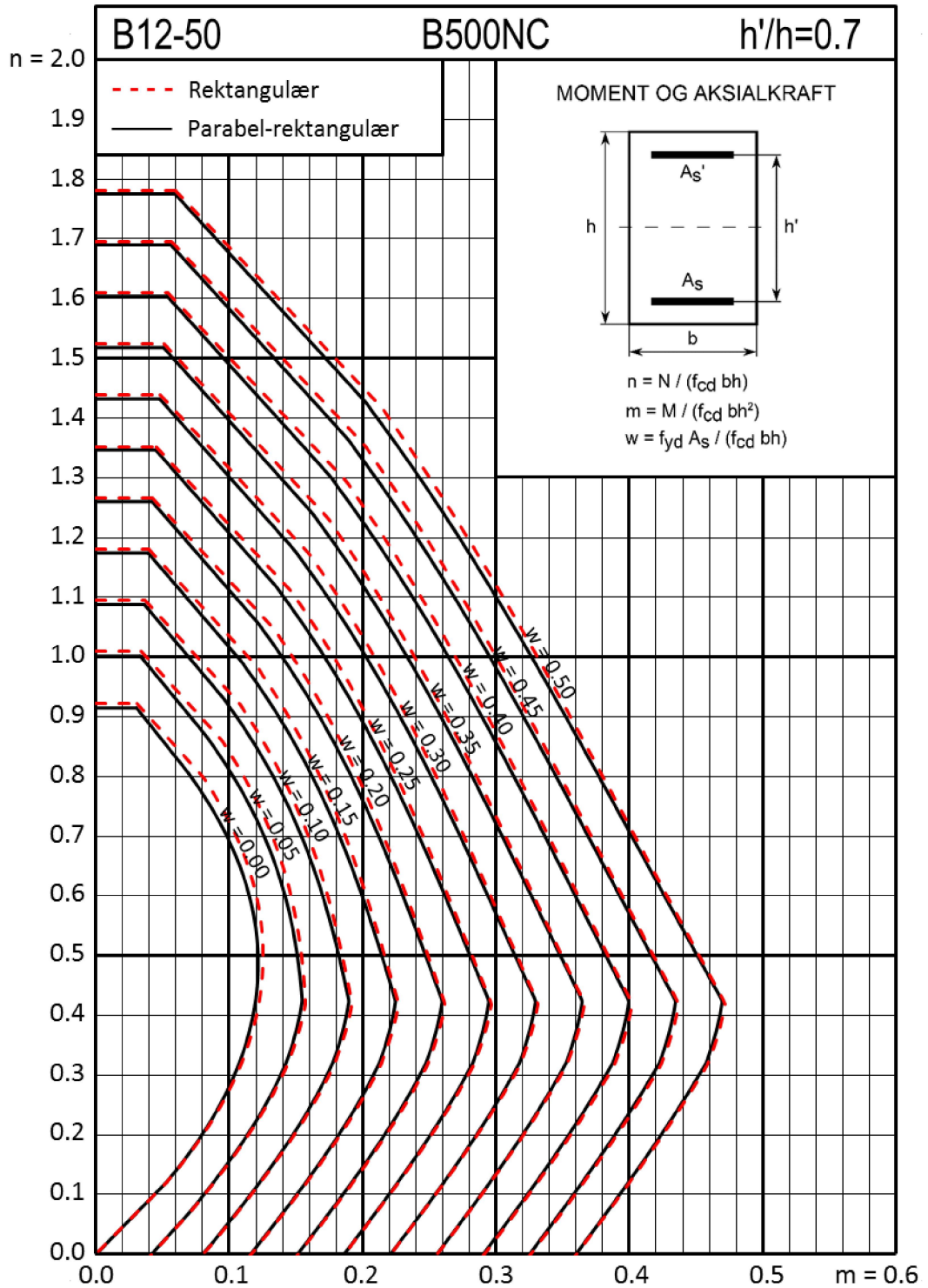
$$m = 0.8 \frac{x}{h} \cdot \left(0.5 - 0.4 \frac{x}{h}\right) + \frac{\sigma_t - \sigma_b}{2f_{yd}} \cdot \frac{h'}{h} \cdot w$$

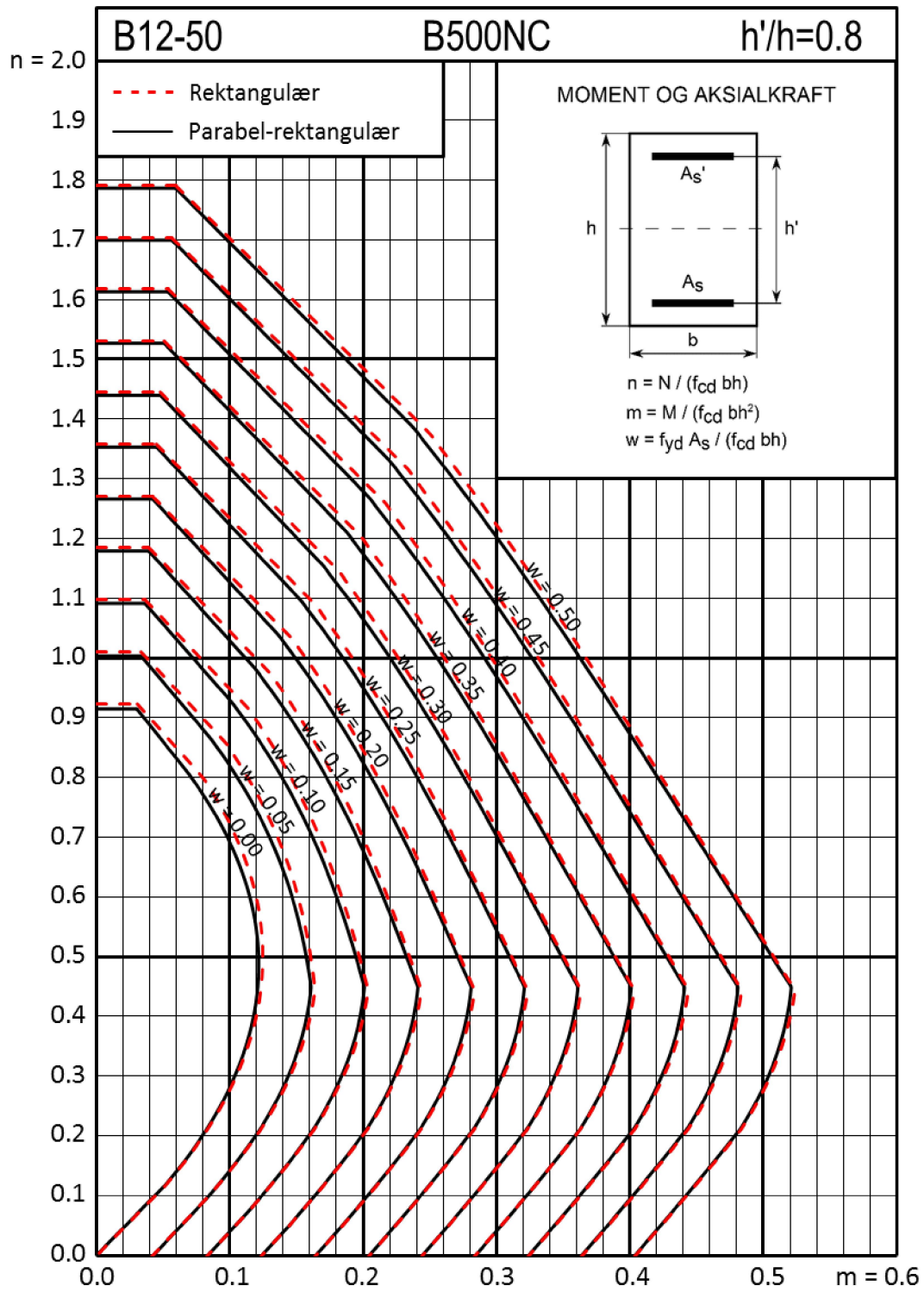
Disse uttrykkene benyttes til å lage nye kapasitetskurver som så er plottet sammen med M-N diagrammene i vedlegg B.

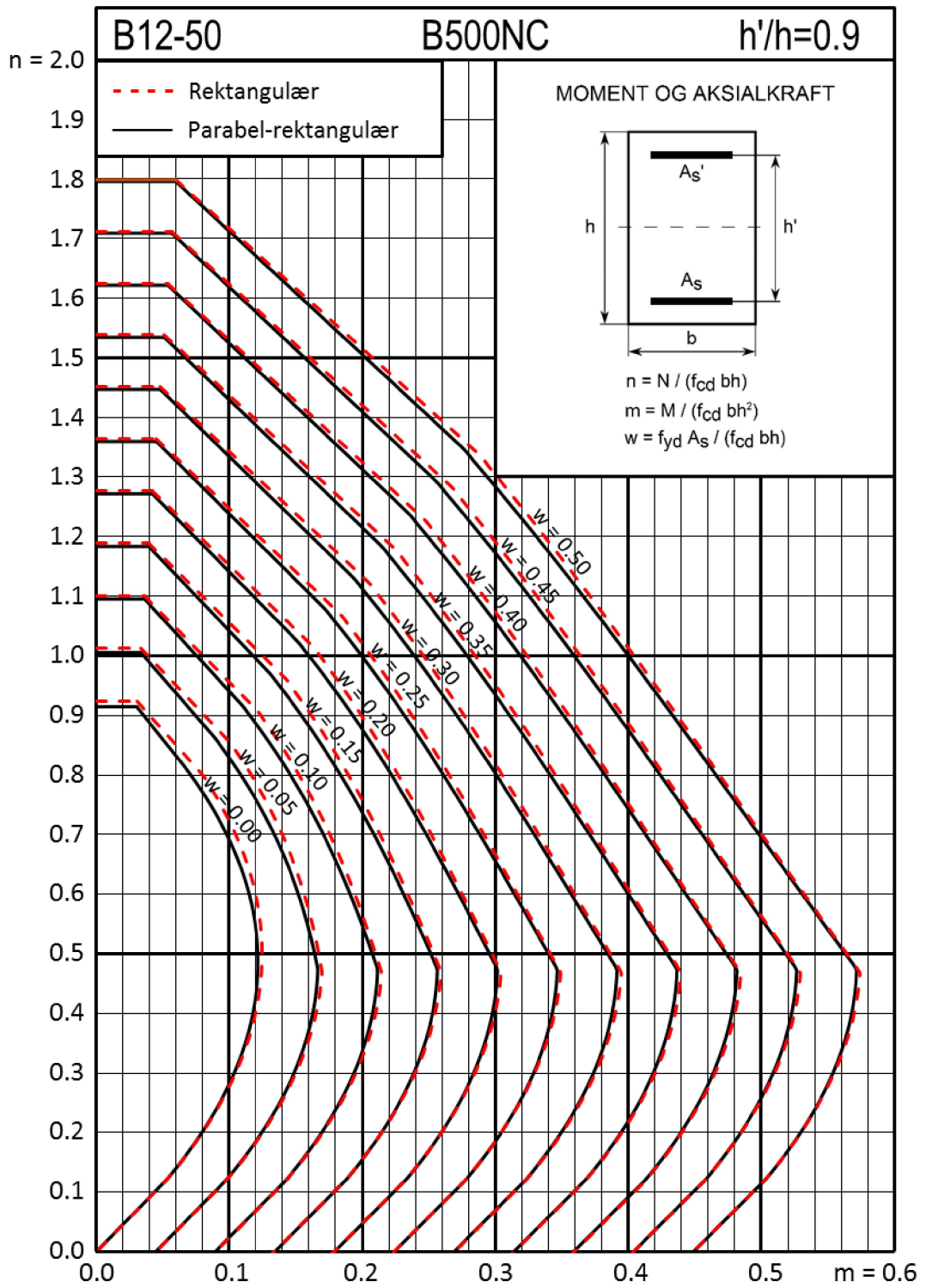
De følgende diagrammene viser tydelig at det er svært små avvik mellom kapasitetskurvene. Det må nevnes at kurvene som er laget med den rektangulære spenningsfordelingen, ikke gir en konservativ tilnærming. Likevel er dette avviket så lite at det ikke har noen betydning for praktisk dimensjonering.







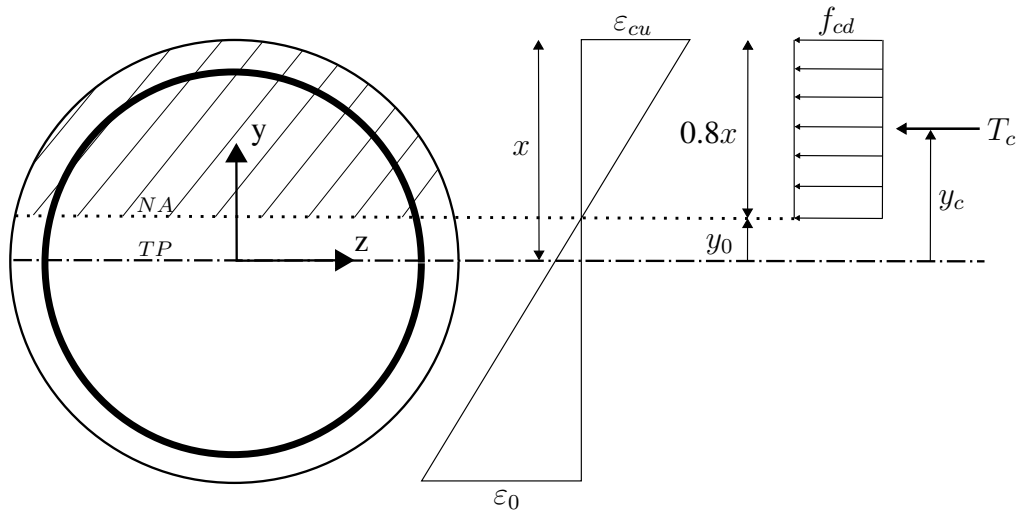




## C.2 Sirkulært tverrsnitt

Uttrykkene, som i rapporten er utledet for kraft og arm i armeringen, er uavhengig av valgt spennings-tøyningssammenheng for betongen. Den eneste forskjellen mellom bruk av kurvet og rektangulær spenningsfordeling vil derfor være i uttrykkene for kraft og arm i betongen. Disse uttrykkene er ikke vist i rapporten og vil derfor bli utledet her.

Figur C.1 viser spenningsfordelingen i et sirkulært tverrsnitt med en rektangulær spenningsfordeling.



Figur C.1: Sirkulært tverrsnitt med en rektangulær spenningsfordeling

Ifølge merknaden i EC2, 3.1.7(3), bør verdien  $\eta f_{cd}$  settes lik  $0.9\eta f_{cd}$  for tverrsnitt hvor bredden av trykksonen avtar i retning av trykkanten. Dette blir gjeldende for sirkulære tverrsnitt. Merknaden vil bli diskutert nærmere i vedlegg D. Ifølge merknaden i EC2, 3.1.7(3), bør verdien  $\eta f_{cd}$  settes lik  $0.9\eta f_{cd}$  for tverrsnitt hvor bredden av trykksonen avtar i retning av trykkanten. Denne merknaden vil bli diskutert nærmere i vedlegg D.

Kraften i betongen beregnes ved å integrere spenningsene over den effektive trykksonehøyden  $0.8x$ :

$$\begin{aligned}
 T_c &= \iint_{A_c} \sigma_c dA = 0.9f_{cd} \int_{y_0}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dz dy = 2(0.9f_{cd}) \int_{y_0}^R \sqrt{R^2-y^2} dy \\
 &= 2(0.9f_{cd}) \frac{1}{2} \left[ y\sqrt{R^2-y^2} + R^2 \sin^{-1} \left( \frac{y}{R} \right) \right]_{y_0}^R
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_c = 0.9f_{cd} \left( \frac{\pi}{2} R^2 - y_0 \sqrt{R^2 - y_0^2} - R^2 \sin^{-1} \left( \frac{y_0}{R} \right) \right)$$

Den nedre integrasjonsgrensen  $y_0$  angir avstand fra senter av sirkelen til nedre del av den effektive trykksonehøyden, og kan beregnes som:

$$y_0 = R - 0.8x$$

Momentet beregnes på tilsvarende vis, men det må nå også tas hensyn til avstanden  $y$  fra senter av sirkelen.

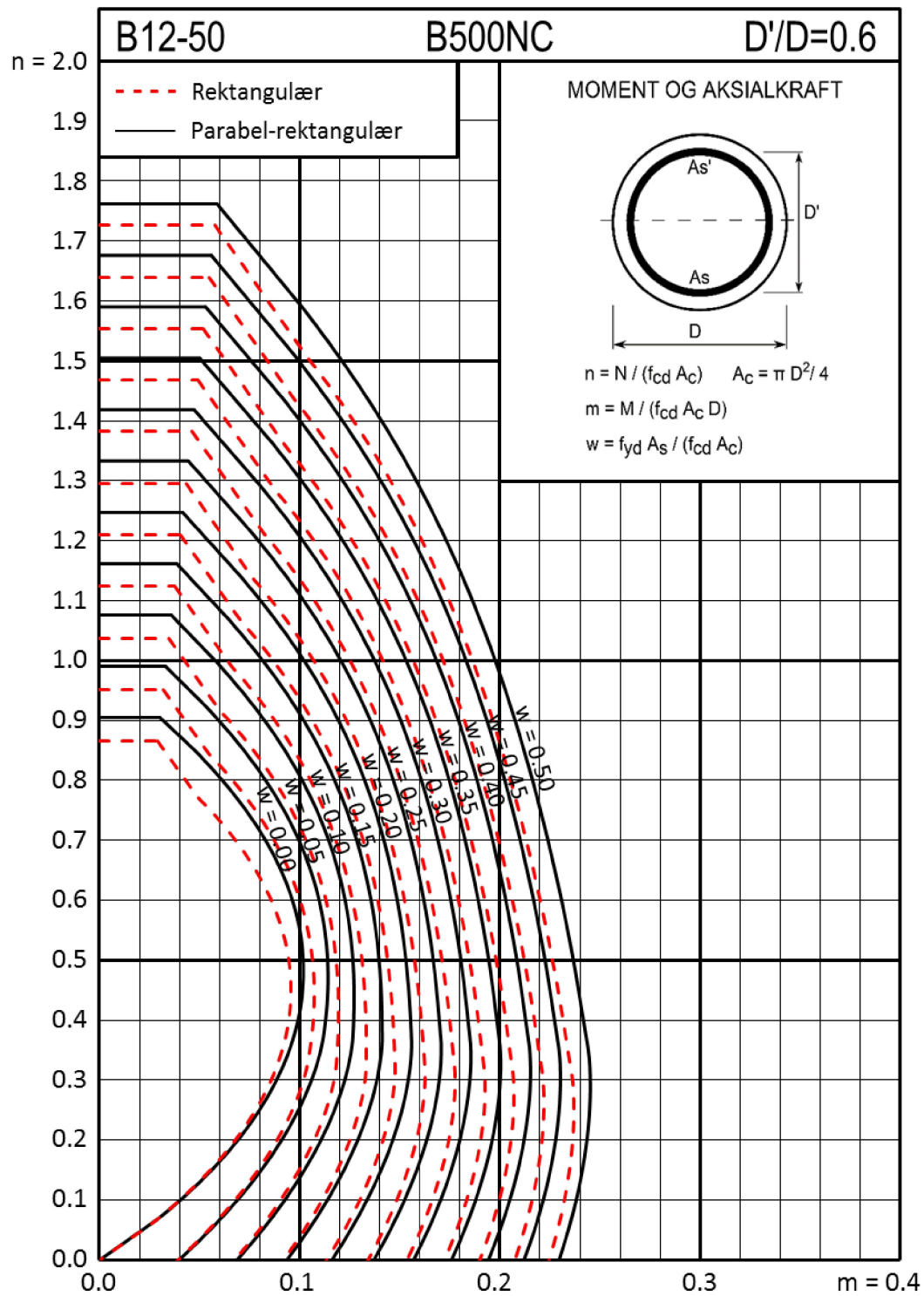
$$\begin{aligned} M_c &= \iint_{A_c} \sigma_c y dA = 0.9f_{cd} \int_{y_0}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y dz dy = 2(0.9f_{cd}) \int_{y_0}^R y \cdot \sqrt{R^2 - y^2} dy \\ &= 2(0.9f_{cd}) \cdot -\frac{1}{3} [(R^2 - y^2)^{3/2}]_{y_0}^R = \frac{2}{3}(0.9f_{cd})(R^2 - y_0^2)^{3/2} \end{aligned}$$

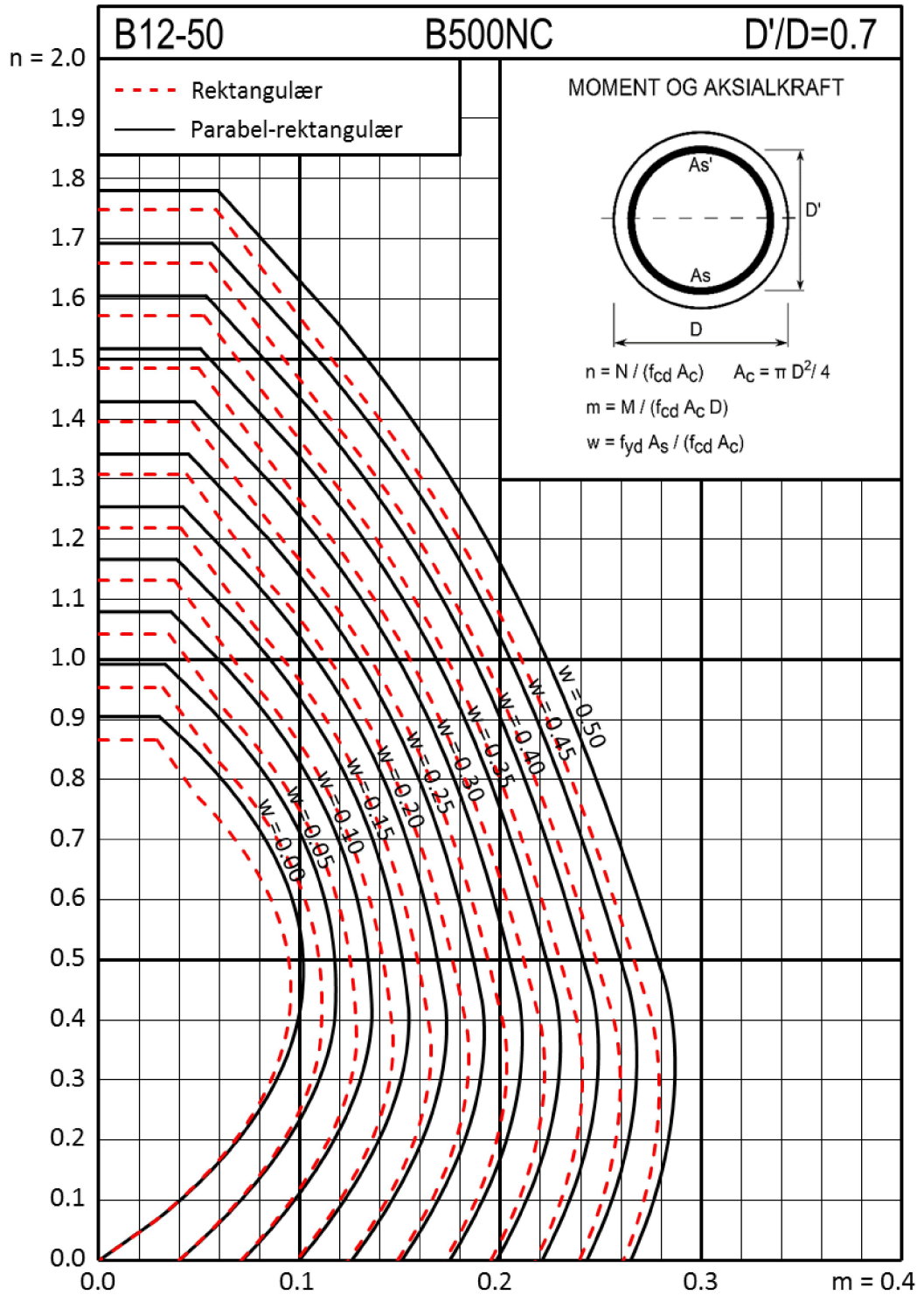
Angrepspunktet til betongens trykkresultant kan til slutt beregnes som:

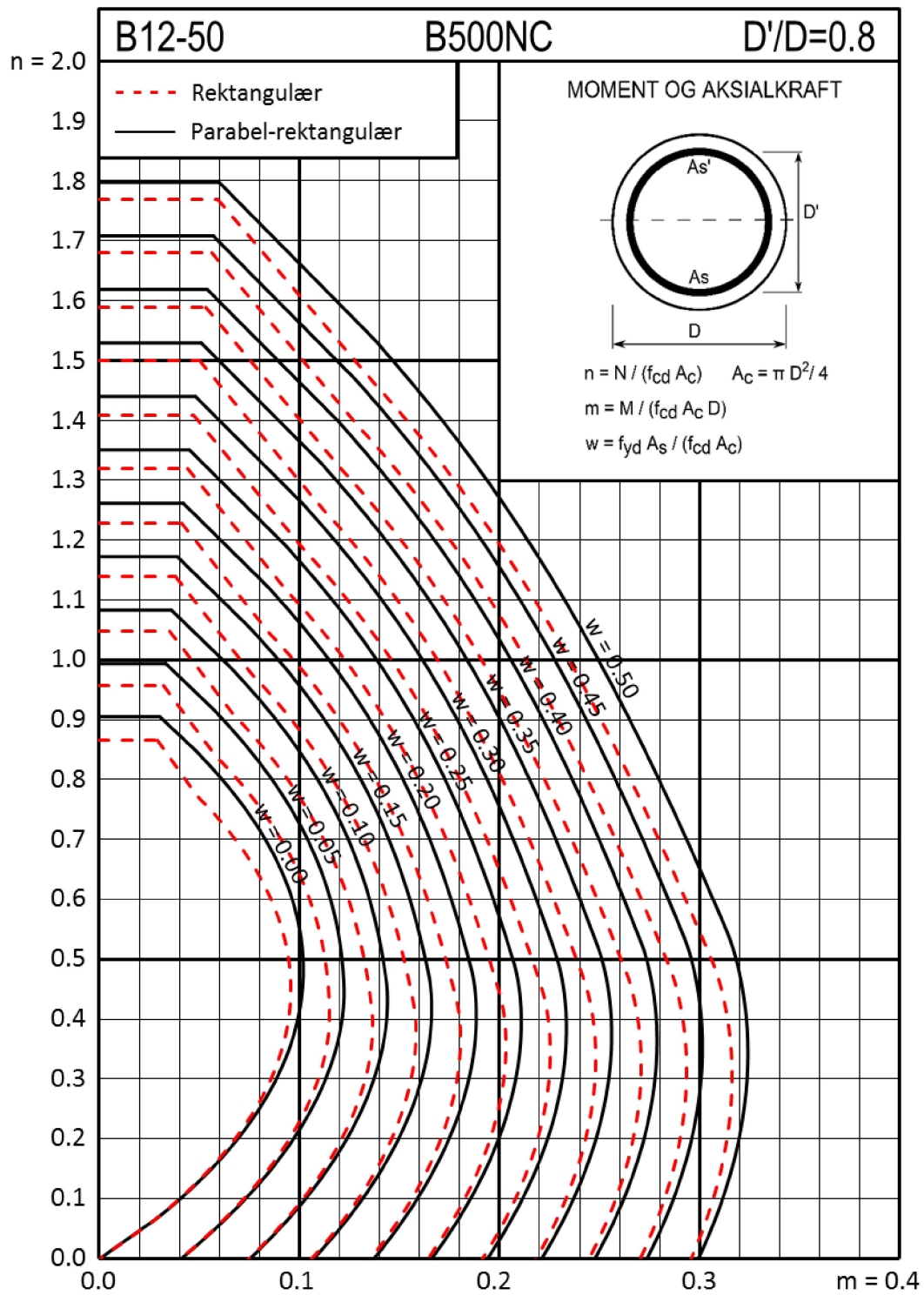
$$y_c = \frac{M_c}{T_c} = \frac{2(R^2 - y_0^2)^{3/2}}{3 \left( \frac{\pi}{2} R^2 - y_0 \sqrt{R^2 - y_0^2} - R^2 \sin^{-1} \left( \frac{y_0}{R} \right) \right)}$$

Uttrykkene utledet for kraft og arm i betongen kan så benyttes for å lage M-N diagrammer på tilsvarende måte som for den kurvede spenningsfordelingen vist i rapporten.

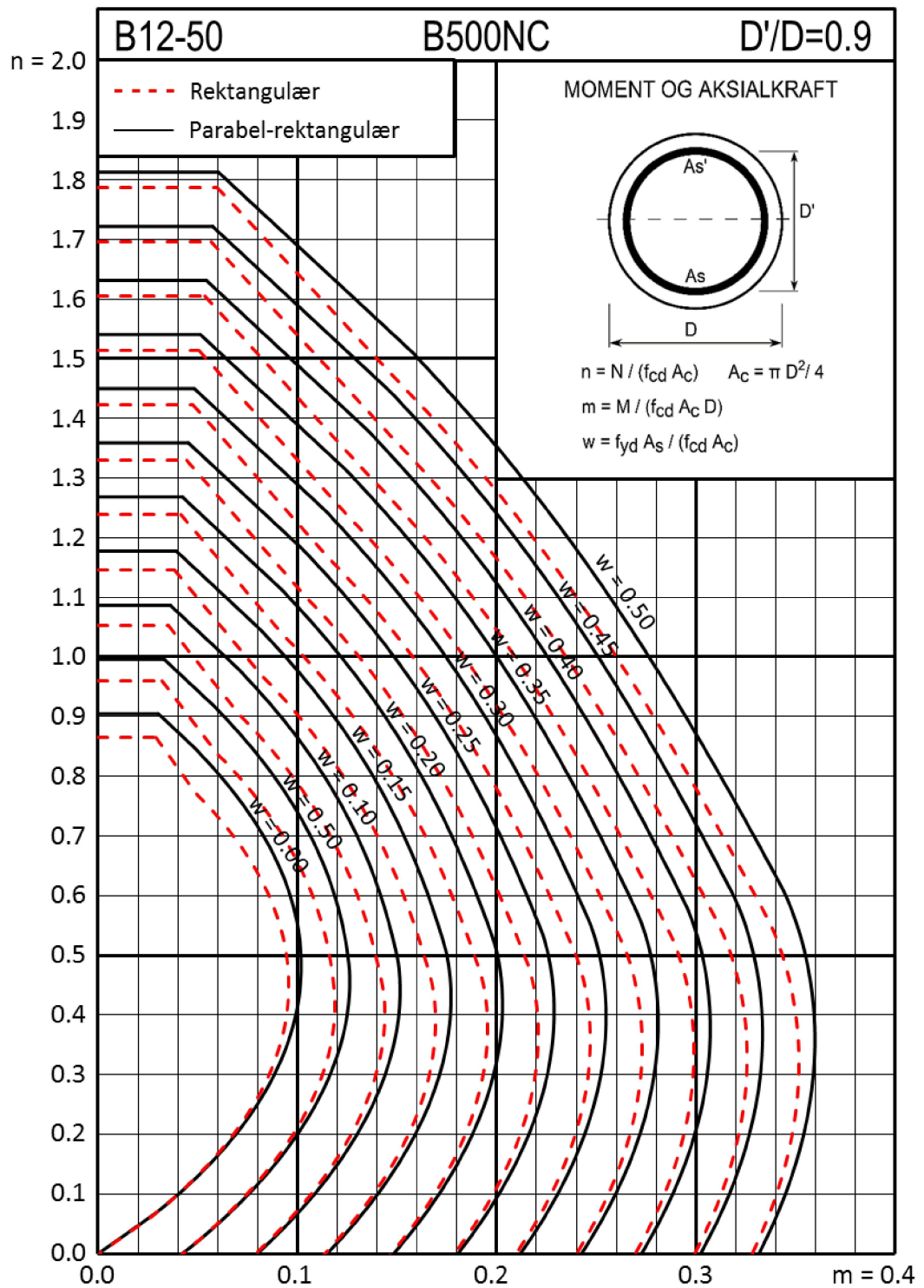
De følgende diagrammene viser godt samsvar mellom kurvene basert på de to spennings-tøyningssammenhengene for betong. Avvikene er riktignok noe større enn for rektangulære tverrsnitt. Kurvene for den rektangulære spenningsfordelingen underestimerer hele tiden kapasiteten. Dermed vil M-N diagrammer som er utarbeidet med en slik spenningsfordeling være en konservativ tilnærming, og kan derfor trygt benyttes ved dimensjonering.

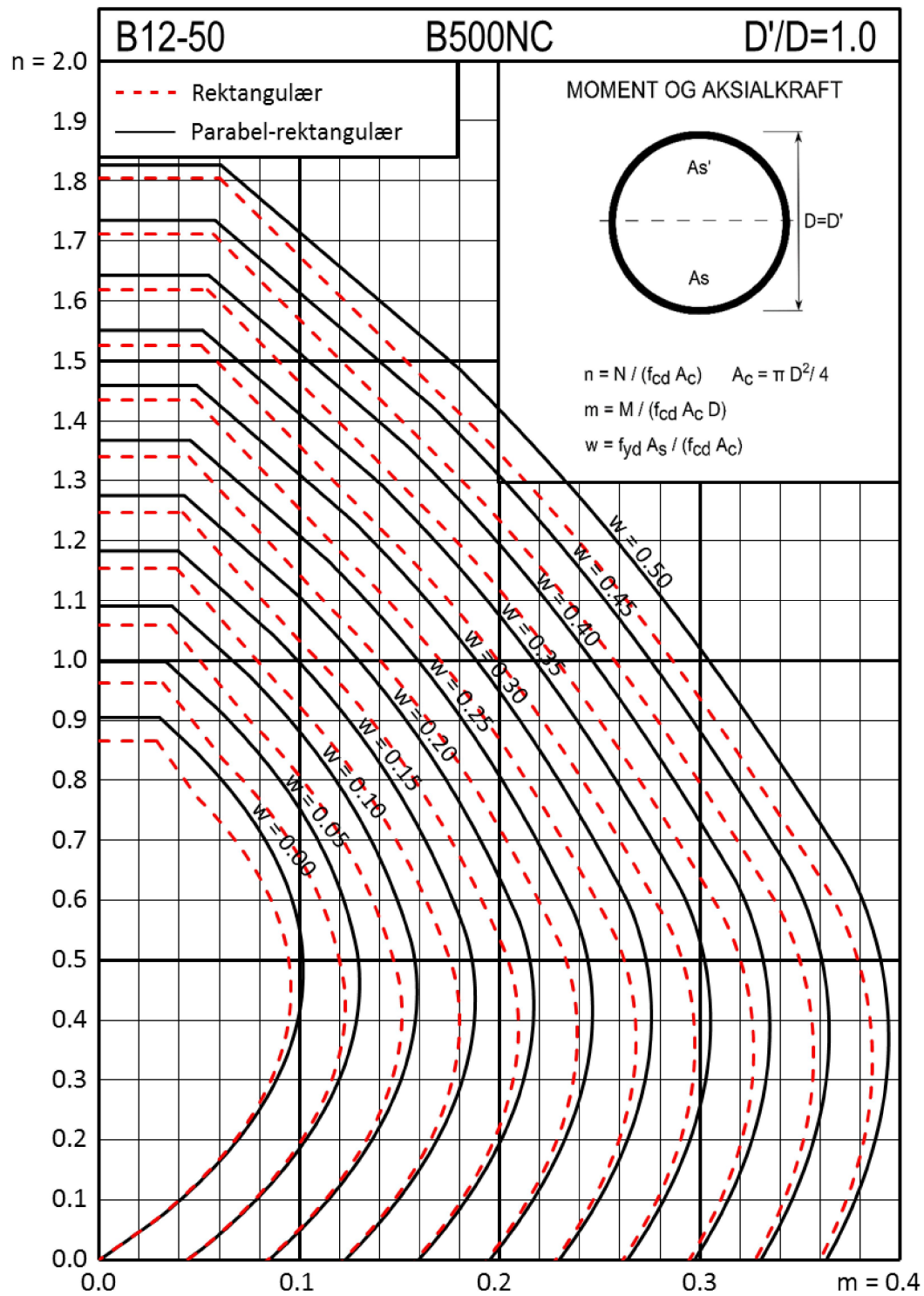












## Vedlegg D

### Diskusjon, merknad EC2, 3.1.7(3)

I vedlegg C ble merknaden i EC2, 3.1.7(3) benyttet når M-N diagrammer basert på kurvet og rektangulær spenningsfordeling ble sammenlignet.

Det er kun ved bruk av den rektangulære spenningsfordelingen at merknaden trer i kraft. I merknaden står det skrevet at for tverrsnitt hvor bredden av trykksonen avtar i retning trykkanten, bør verdien på  $\eta f_{cd}$  settes lik  $0.9\eta f_{cd}$ . Siden sirkulære tverrsnitt har en avtagende bredde i retning trykkanten, blir merknaden gjeldene for slike tverrsnitt. I dette vedlegget vil grunnen til denne reduksjonen bli diskutert.

For å studere i hvilken grad reduksjonen av  $f_{cd}$  på 10% påvirker M-N diagrammene, er det i Figur D.1 vist et M-N diagram hvor den rektangulære spenningsfordelingen er benyttet både med og uten reduksjonsfaktoren på 0.9. For å gjøre figuren mer oversiktlig, er det kun vist kapasitetskurver for noen utvalgte mekaniske armeringsforhold  $w$ .

Figur D.1 viser at uten reduksjonsfaktoren, vil kapasiteter overestimeres og være ikke-konservative i forhold til den svarte linjen, som representerer eksakte verdier hvor kurvet spenningsammenheng er brukt. Siden den rektangulære spenningsfordelingen kun er en tilnærming, er det viktig at denne tilnærmingen er konservativ. Figuren viser tydelig at ved å redusere  $f_{cd}$  med 10%, vil kapasiteter underestimeres. I forhold til eksakte verdier er riktignok avvikene nå større enn uten reduksjonsfaktoren, men tilnærmingen er konservativ.

Videre kan det være interessant å studere hvorfor akkurat en reduksjon på 10% er benyttet i Eurokode 2. For å angripe dette spørsmålet, er det valgt å se nærmere på betongkraften og momentarmen denne produserer for et sirkulært tverrsnitt.

Tabell D.1 viser betongtrykkresultanten og momentet regnet ut for forskjellige trykksonehøyder i et sirkulært tverrsnitt. Både resultanten og momentet er dimensjonsløse:

$$\text{Trykkresultant} = \frac{T_c}{f_{cd}bh}$$

$$\text{Moment} = \frac{M_c}{f_{cd}bh^2}$$

I Tabell D.1 er trykkresultanten og momentet regnet ut med bruk av både kurvet og rektangulær spenningsfordeling. I tabellen er  $f_{cd}$  ikke redusert. For å sammenligne verdiene fra de to spenningsfordelingene, benyttes et enkelt forholdstall hvor "Kurve" verdi deles på "Rektangulær" verdi. Dette forholdstallet gir en indikasjon på om den rektangulære spenningsfordelingen er en konservativ antagelse. Dersom forholdstallet er større enn 1, er tilnærmingen konservativ.

$x/r$	Trykkresultant			Moment		
	Kurve	Rektangulær	Forhold	Kurve	Rektangulær	Forhold
2.00	2.669	2.694	0.991	0.300	0.341	0.880
1.27	1.631	1.607	1.015	0.637	0.666	0.956
0.93	1.091	1.070	1.020	0.594	0.604	0.984
0.74	0.791	0.773	1.023	0.504	0.505	0.997
0.61	0.606	0.592	1.024	0.423	0.422	1.004
0.52	0.483	0.471	1.025	0.358	0.355	1.008
0.45	0.396	0.387	1.025	0.307	0.304	1.011
0.40	0.333	0.324	1.026	0.266	0.263	1.014
0.36	0.285	0.277	1.026	0.234	0.230	1.015
0.33	0.247	0.241	1.026	0.207	0.203	1.017
0.30	0.217	0.211	1.027	0.185	0.181	1.018

Tabell D.1: Betongens trykkresultant og moment om tyngdepunktsaksen regnet med bruk av kurvet og rektangulær spenningsfordeling

For rektangulær spenningsfordeling viser tabellen at trykkresultanten stort sett holdes konservativ. Det er derimot ved beregning av momentet at tilnærmingen ikke er like konservativ. Når store deler av tverrsnittet står i trykk er den "rektangulære" verdien høyere enn den "kurvede", og momentet overestimeres. Dermed kan tilnærmingen med bruk av den rektangulære spenningsfordelingen ikke sies å være konservativ.

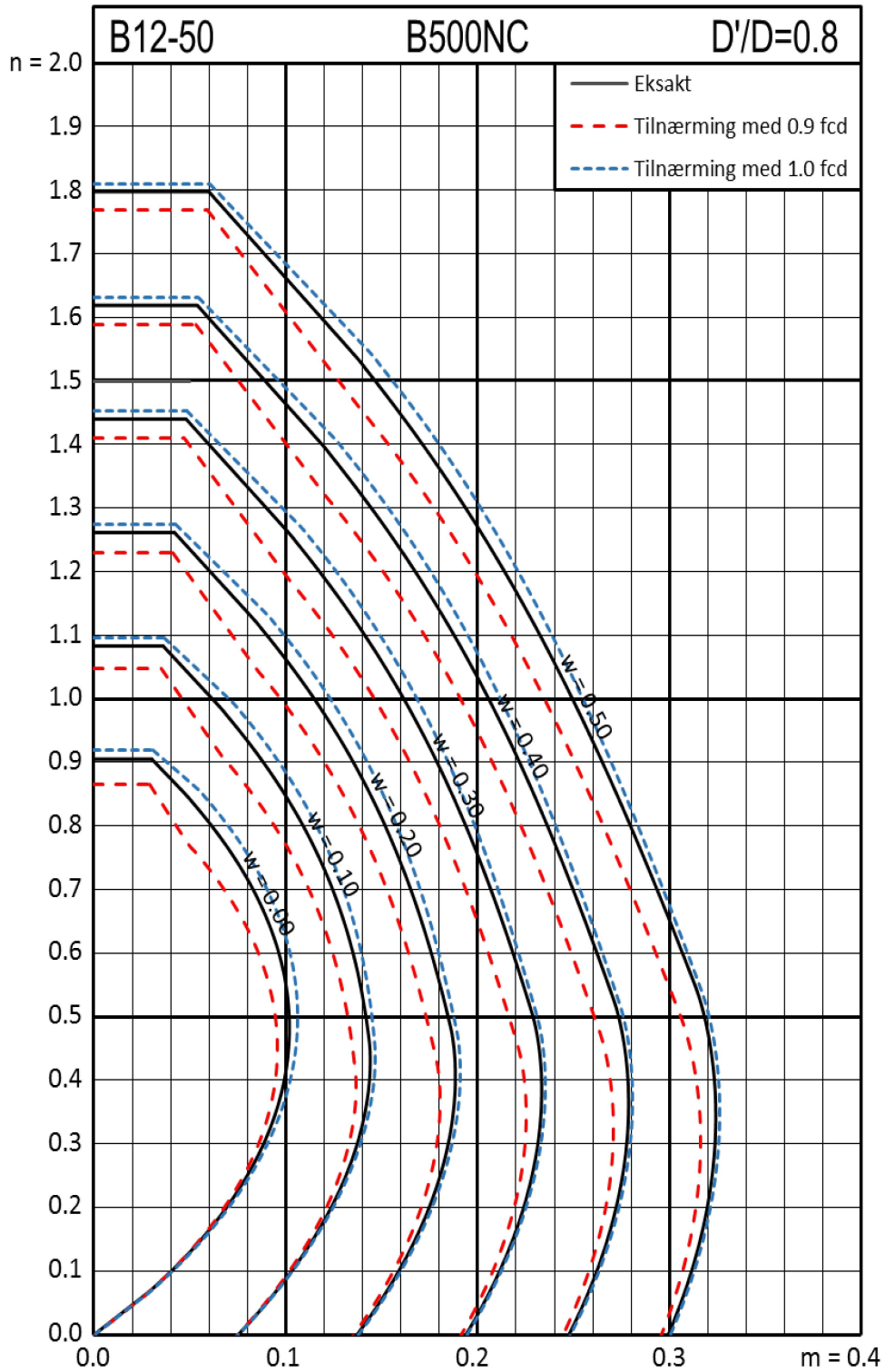
For å gjøre tilnærmingen konservativ, sier Eurokoden altså at verdien på  $\eta f_{cd}$  skal reduseres med 10%. I Tabell D.2 har reduksjonsfaktoren på 0.9 blitt innført for den rektangulære spenningsfordelingen, og nye forholdstall oppnås:

$x/r$	Trykkresultant			Moment		
	Kurvet	Rektangulær	Forhold	Kurvet	Rektangulær	Forhold
2.00	2.669	2.425	1.101	0.300	0.307	0.978
1.27	1.631	1.446	1.128	0.637	0.600	1.062
0.93	1.091	0.963	1.134	0.594	0.543	1.093
0.74	0.791	0.696	1.136	0.504	0.455	1.107
0.61	0.606	0.533	1.138	0.423	0.379	1.115
0.52	0.483	0.424	1.139	0.358	0.320	1.120
0.45	0.396	0.348	1.139	0.307	0.273	1.124
0.40	0.333	0.292	1.140	0.266	0.237	1.126
0.36	0.285	0.250	1.140	0.234	0.207	1.128
0.33	0.247	0.217	1.140	0.207	0.183	1.130
0.30	0.217	0.190	1.141	0.185	0.163	1.131

Tabell D.2: Betongens trykkresultant og moment om tyngdepunktsaksen regnet med bruk av kurvet og redusert rektangulær spenningsfordeling

Forholdstallene viser denne gangen at de ”rektangulære” verdiene for momentet ikke lenger overestimeres i like stor grad. Det er bare når nesten hele tverrsnittet står i trykk at forholdstallet er mindre enn 1, og antagelsen ikke er konservativ. Samtidig viser forholdstallene at trykkresultanten overestimeres for alle verdier av  $x/r$ .

Både Tabell D.2 og Figur D.1 viser at med en betongspenning lik  $0.9\eta f_{cd}$ , er tilnærmingen med bruk av den rektangulære spenningsfordelingen konservativ. Reduksjonsfaktoren på 0.9 sørger for trykkresultanten og momentet i betongen underestimeres for stort sett alle tøyningstilstander.



Figur D.1: Sammenligning av rektangulær spenningsfordeling med og uten reduksjonsfaktor på 0.9 ( $D'/D = 0.8$ )

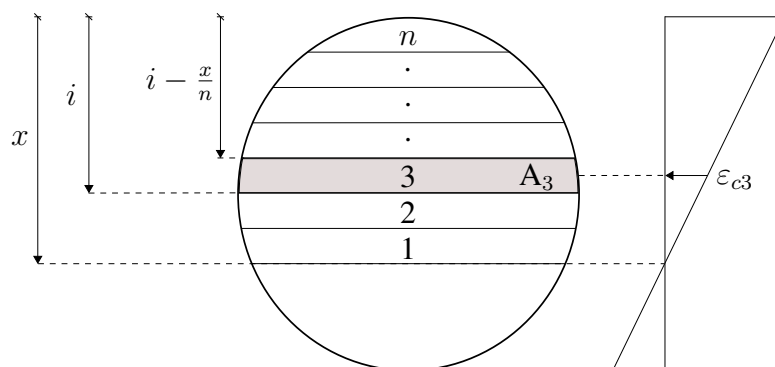
## Vedlegg E

# Egenkontroll av M-N diagrammer med Matlab

Som en egenkontroll på arbeidet som er gjort med M-N diagrammene i vedlegg B, har beregninger også blitt gjort i Matlab. Disse beregningene er gjort numerisk i motsetning til beregningene i vedlegg A, som er basert på integrasjon og eksakte verdier.

Det er kun beregningene for det sirkulære tverrsnittet som er løst numerisk i Matlab. Når det gjelder det rektangulære tverrsnittet, har eksakte verdier blitt benyttet, slik at beregningene i Matlab er identiske som i Excel. Grunnen til dette er at integrasjonen er svært enkel å gjennomføre for det rektangulære tverrsnittet. Dermed er beregningene for det rektangulære tverrsnittet i Matlab kun en kontroll på om utførelsen i Excel er korrekt.

Figur E.1 viser en visualisering av hvordan de numeriske beregningene er løst i Matlab for det sirkulære tverrsnittet.



Figur E.1: Visualisering av numerisk beregningsmåte for sirkulært tverrsnitt

Tverrsnittet deles inn i lameller hvor hver lamell har et areal med en tilhørende tøyning og spenning. Dersom en ønsker å beregne total kraft, arm, etc., gjøres dette ved å summere lamellbidragene over tverrsnittshøyden. Et konkret eksempel er vist i ligning (E.1), hvor den totale trykkraften i betongen er lik summen av alle lamellbidragene:

$$F_c = \sum_{i=1}^n F_{ci} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \sigma_{ci} \quad (\text{E.1})$$

Ved beregning av M-N diagrammer for det rektangulære tverrsnittet, har kun en Matlab-kode blitt benyttet. Denne er vist i vedlegg E.2.

Når det gjelder det sirkulære tverrsnittet, er en rekke ulike Matlab-koder brukt for beregning av M-N diagrammene. Disse finnes i vedlegg E.3 til E.10. Matlab-kodene fra E.4 til E.10 er funksjoner som regner ut de forskjellige komponentene som trengs i likevektsbetrakningen for det sirkulære tverrsnittet (trykk- og strekkresultanter, momentarmer, etc.). Disse er laget for å forenkle selve programmet hvor M-N diagrammene for det sirkulære tverrsnittet blir produsert (vedlegg E.3).



## E.1 Sammenligning av M-N diagrammer laget i Excel og Matlab

### Rektangulært tverrsnitt

Siden beregningene er identiske både i Matlab og Excel, er det ingen forskjeller i resultatene mellom de to programmene. Dette ble bekreftet ved å sammenligne M-N diagrammer fra de to programmene, samt å kontrollere  $n$  og  $m$  for ulike tøyningstilstander. Det er valgt å ikke vise sammenligningene i dette vedlegget, siden hensikten var å kun kontrollere om utførelsen i Excel var korrekt. At resultatene var identiske ga en god indikasjon på at det ikke var gjort noen tastefeil eller lignende i Excel.

### Sirkulært tverrsnitt

I løpet av prosessen med å produsere M-N diagrammer for det sirkulære tverrsnittet, har resultatene beregnet i Excel blitt kontrollert opp mot Matlab med jevne mellomrom. Underveis i arbeidet ble det blant annet kontrollert at begge programmene ga samme verdier for resultantkraftens størrelse og plassering i både betong og armering. Gjennom dette arbeidet ble flere avvik identifisert og deretter rettet opp i. Tabell E.1 viser en sammenligning av  $n$  og  $m$  for forskjellige tøyningstilstander mellom de to programmene. I tabellen er det kun vist resultater for en verdi av armeringsplasseringen  $D'/D$ , og ett mekanisk armeringsforhold  $w$ , men tendensen er tilsvarende også for andre verdier av  $D'/D$  og  $w$ .

Tabellen viser at det er svært små forskjeller mellom de to programmene. Det største avviket er på 2.43‰. Forskjellene mellom programmene er så små at det ikke vil være mulig å skille kapasitetskurver fra hverandre i et M-N diagram. Dette er grunnen til at det er valgt å presentere sammenligningen i en tabell, i stedet for et diagram.

Resultatene viser altså at verdiene for  $n$  og  $m$  er omtrent identiske. Forskjeller oppstår først i 4. og 5. desimal. Noen avvik i resultatene var som forventet siden integralene er løst eksakt i Excel, mens i Matlab løses de numerisk. Avviket avhenger av hvor fin lamellinndeling tverrsnittet har i Matlab. Dersom antallet lameller går mot uendelig, vil avviket gå mot null. Det er imidlertid ingen grunn til å benytte en finere lamellinndeling i Matlab, siden hensikten med programmet kun er å kontrollere resultatene fra Excel.

Siden Matlab - programmet løser beregningene numerisk, gir dette en god kontroll på om integralene benyttet i Excel er løst korrekt. Basert på resultatene i Tabell E.1 kan det med stor sikkerhet slås fast at integralene er løst riktig. Resultatene fra sammenligningen

med Matlab gir derfor en økt trygghet på at M-N diagrammene for sirkulære tverrsnitt er korrekte.

$x/D$	$n$			$m$		
	Excel	Matlab	Avvik [%]	Excel	Matlab	Avvik [%]
1.0	1.21761	1.21785	0.20	0.07498	0.07480	-2.43
0.9	1.10273	1.10273	-0.13	0.10138	0.10129	-0.88
0.8	0.96476	0.96448	0.30	0.12620	0.12618	-0.18
0.7	0.80281	0.80281	-0.10	0.14653	0.14656	0.18
0.6	0.61314	0.61316	0.02	0.16129	0.16134	0.32
0.5	0.38077	0.38081	0.10	0.17018	0.16996	-1.33
0.4	0.14750	0.14737	-0.89	0.15815	0.15803	-0.76
0.3	-0.07286	-0.07283	-0.37	0.12327	0.12330	0.21
0.2	-0.29536	-0.29545	0.29	0.06949	0.06945	-0.53
0.1	-0.46150	-0.46149	-0.01	0.01732	0.01732	0.13

Tabell E.1: Sammenligning av verdier for  $n$  og  $m$  beregnet i Excel og Matlab for  $D'/D = 0.6$  og  $w = 0.25$ .

## E.2 Program: M-N diagrammer, rektangulære tverrsnitt

```
clear all
close all

H = 0.8; % Armeringsplassering (H = h'/h)
c = (1-H)/2; % Overdekning
d = 1-c; % Effektiv høyde
f_yd = 500/1.15; % Dimensjonerende flytespenning
E = 2e5; % E-modul, armering
eps_c2 = 2e-3; % Toyning ved naadd maksimalspenning
eps_cu2 = 3.5e-3; % Toyningsgrensen i bruddtilstanden

% Definerer vektorer:
eps_0 = 0:-5e-5:-1500e-3; % Toyning i bunnen av tverrsnittet
n = zeros(1,length(eps_0)); % Dimensjonslos aksialkraft
m = zeros(1,length(eps_0)); % Dimensjonslost moment
w = 0:0.05:0.5; % Mekanisk armeringsforhold

% Oppsett til graf:
grid on
axis([0 0.6 0 2]);
set(gca,'FontSize',15,'YTick',0:0.1:2)
str = sprintf('B25-B50 B500NC h`/ h = %.1f',H);
title(str,'FontSize',19,'FontWeight','Bold');
xlabel('m','FontWeight','Bold');
ylabel('n','FontWeight','Bold');
hold on

for i = 1:11
    % Toyningstilstand 1: (rent trykk)
    n(1) = 1+(2*E*eps_c2*w(i))/f_yd;
    m(1) = 0;

    % Toyningstilstand 2 og videre:
    for j = 1:length(eps_0)
        x = eps_cu2/(eps_cu2-eps_0(j));
        eps_st = (x-c)/x*eps_cu2;
        eps_sb = eps_cu2*(1-d/x);

        if abs(E*eps_st) < f_yd
            sig_st = E*eps_st;
        elseif E*eps_st > 0
            sig_st = f_yd;
        else
            sig_st = -f_yd;
        end
    end
end
```

```

    if abs(E*eps_sb) < f_yd
        sig_sb = E*eps_sb;
    elseif E*eps_0(j) > 0
        sig_sb = f_yd;
    else
        sig_sb = -f_yd;
    end

    n(j+2) = 17/21*x+w(i)/f_yd*(sig_st+sig_sb);
    m(j+2) = 17/42*x-33/98*x^2+(H*w(i))/(2*f_yd)*(sig_st-sig_sb);
end

% Kapasitetsbegrensning pga minsteeksentrisitet:
m(2) = n(1)/(30+(n(1)-n(3))/m(3));
n(2) = 30*m(2);
n(1) = n(2);

plot(m,n, '-b', 'linewidth', 1.5);
end

```

### E.3 Program: M-N diagrammer, sirkulære tverrsnitt

```
clear all
close all

% Input verdi:
H = 0.8; % Armeringsplassering (H = D'/D)

% Ovrige verdier:
r = 1; % Tverrsnittsradius
t = r/1000; % Tykkelse til armering
Ry = H*r+t/2; % Radius til ytterkant av armering
Ri = H*r-t/2; % Radius til innerkant av armering
c = r-Ry; % Overdekning
f_yd = 500/1.15; % Dimensjonerende flytspenning
E = 2e5; % E-modul armeringsstaa
eps_c2 = 2e-3; % Toyning ved naadd maksimalspenning
eps_cu2 = 3.5e-3; % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
Ac = pi*r^2; % Totalt betongareal
As = pi/2*(Ry^2-Ri^2); % Halvparten av totalt armeringsareal

% Definerer vektorer:
eps_0 = 0:-0.15e-3:-15e-3; % Toyning i bunnen av tverrsnittet
n = zeros(1,length(eps_0)); % Dimensjonslos aksialkraft
m = zeros(1,length(eps_0)); % Dimensjonslost moment
w = 0:0.05:0.5; % Mekanisk armeringsforhold

% Oppsett til graf:
grid on
axis([0 0.5 0 2]);
set(gca,'FontSize',15,'YTick',0:0.1:2);
str = sprintf('B12-B50 B500NC D`/ D = %.1f',H);
title(str,'FontSize',19,'FontWeight','Bold');
xlabel('m');
ylabel('n');
hold on

for i = 1:11
    % Toyningstilstand 1: (Rent trykk)
    n(1) = 1+((2*E*eps_c2)/f_yd)*w(i);
    m(1) = 0;

    % Toyningstilstand 2 og videre:
    for j = 1:length(eps_0)
        x = (eps_cu2*2*r)/(eps_cu2-eps_0(j));
        n(j+2) = Nc(r,x)/Ac +((Nst(r,x,H,t)+Nsb(r,x,H,t))*w(i))/(f_yd*As);
    end
end
```

```

        m(j+2) = (Nc(r,x)*Xc(r,x))/(Ac*2*r)+(Nst(r,x,H,t)*Xst(r,x,H,t)
                +Nsb(r,x,H,t)*Xsb(r,x,H,t))*w(i)/(f_yd*As*2*r);
end

% Kapasitetsbegrrensning pga minsteeksentrisitet:
m(2) = n(1)/(30+(n(1)-n(3))/m(3));
n(2) = 30*m(2);
n(1) = n(2);

plot(m,n, '-b', 'linewidth',1.5, 'markersize',4, 'MarkerFaceColor',
      [0,0,0]);
end

```

## E.4 Funksjon: Areal av trykksone

```
function [ At ] = At( r,x )

a = abs(r-x);

if x < 0
    At = 0;
elseif x <= r
    At = 0.5*pi*r^2-asin(a/r)*r^2-a*sqrt(r^2-a^2);
elseif x > 2*r
    At = pi*r^2;
else
    At = 0.5*pi*r^2+asin(a/r)*r^2+a*sqrt(r^2-a^2);
end

end
```

## E.5 Funksjon: Trykkresultant til betong

```
function [ Nc ] = Nc( r,x )

E = 2e5;           % E-modul armeringsstaal
eps_cu2 = 3.5e-3; % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
n = 50;           % Variabel brukt til aa inndeleg trykksonehoyden.

j = 1;
for i = 0:x/n:x

    A(j) = At(r,i)-At(r,i-x/n);

    if i <= 0
        A(j) = 0;
    elseif i <= x/n
        A(j) = At(r,i);
    elseif i >= 2*r+x/n
        A(j) = 0;
    elseif i >= 2*r
        A(j) = pi*r^2-At(r,i-x/n);
    end

    eps(j) = eps_cu2*(1-(i-x/(2*n))/x);

    if eps(j) <= 0
        sig(j) = 0;
    else
        if eps(j) > 2e-3
            sig(j) = 1;
        else
            sig(j) = (1-(1-eps(j)/(2e-3))^2);
        end
    end

    Nc(j) = A(j)*sig(j);

    j = j+1;
end

if x <= 0
    Nc = 0;
else
    Nc = sum(Nc);
end

end
```



## E.6 Funksjon: Arm til betongtrykkresultant

```
function [ Xc ] = Xc( r,x )

E = 2e5;           % E-modul armeringsstaal
eps_cu2 = 3.5e-3; % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
n = 50;           % Variabel brukt til aa inndelegge trykksonehoyden.

j = 1;
for i = 0:x/n:x

    A(j) = At(r,i)-At(r,i-x/n);

    if i <= 0
        A(j) = 0;
    elseif i <= x/n
        A(j) = At(r,i);
    elseif i >= 2*r+x/n
        A(j) = 0;
    elseif i >= 2*r
        A(j) = pi*r^2-At(r,i-x/n);
    end

    eps(j) = eps_cu2*(1-(i-x/(2*n))/x);

    if eps(j) <= 0
        sig(j) = 0;
    else
        if eps(j) > 2e-3
            sig(j) = 1;
        else
            sig(j) = (1-(1-eps(j)/(2e-3))^2);
        end
    end

    Nc(j) = A(j)*sig(j);

    x_c(j) = r-(i-x/(2*n));

    j = j+1;
end

if x <= 0
    M = 0;
else
    M = dot(Nc,x_c);
end
```

```
if x == 0
    Nc = 0;
else
    Nc = sum(Nc);
end

if x <= 0
    Xc = 0;
else
    Xc = M/Nc;
end

end
```

## E.7 Funksjon: Resultant til trykkarmering

```
function [ Nst ] = Nst( r,x,H,t )

Ry = H*r+t/2;           % Radius til ytterkant av armering
Ri = H*r-t/2;           % Radius til innerkant av armering
c = r-Ry;               % Overdekning
E = 2e5;                % E-modul armeringsstaal
f_yd = 500/1.15;        % Dimensjonerende flytspenning
eps_cu2 = 3.5e-3;       % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
n = 50;                 % Variabel brukt til aa inndelegge trykksonehoeyden.

j = 1;
for i = 0:x/n:x

    Ay(j) = At(Ry,i-c)-At(Ry,i-c-x/n);

    if i <= c
        Ay(j) = 0;
    elseif i <= c+x/n
        Ay(j) = At(Ry,i-c);
    elseif i >= r+Ry+x/n
        Ay(j) = 0;
    elseif i >= r+Ry
        Ay(j) = pi*Ry^2-At(Ry,i-x/n-c);
    end

    Ai(j) = At(Ri,i-c-t)-At(Ri,i-x/n-c-t);

    if i <= c+t
        Ai(j) = 0;
    elseif i <= c+t+x/n
        Ai(j) = At(Ri,i-c-t);
    elseif i >= r+Ri+x/n
        Ai(j) = 0;
    elseif i >= r+Ri
        Ai(j) = pi*Ri^2-At(Ri,i-x/n-c-t);
    end

    A(j) = Ay(j)-Ai(j);

    eps(j) = eps_cu2*(1-(i-x/(2*n))/x);

    if abs(E*eps(j)) < f_yd
        sig(j) = E*eps(j);
    elseif E*eps(j) > 0
        sig(j) = f_yd;
    end
end
```

```
    else
        sig(j) = -f_yd;
    end

    Nst(j) = A(j)*sig(j);

    j = j+1;
end

Nst = sum(Nst);

end
```

## E.8 Funksjon: Arm til trykkarmeringsresultant

```
function [ Xst ] = Xst( r,x,H,t )

Ry = H*r+t/2;          % Radius til ytterkant av armering
Ri = H*r-t/2;          % Radius til innerkant av armering
c = r-Ry;              % Overdekning
E = 2e5;               % E-modul armeringsstaal
f_yd = 500/1.15;      % Dimensjonerende flytspenning
eps_cu2 = 3.5e-3;     % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
n = 50;                % Variabel brukt til aa inndele trykksonehoeyden.

j = 1;
for i = 0:x/n:x

    Ay(j) = At(Ry,i-c)-At(Ry,i-c-x/n);

    if i <= c
        Ay(j) = 0;
    elseif i <= c+x/n
        Ay(j) = At(Ry,i-c);
    elseif i >= r+Ry+x/n
        Ay(j) = 0;
    elseif i >= r+Ry
        Ay(j) = pi*Ry^2-At(Ry,i-x/n-c);
    end

    Ai(j) = At(Ri,i-c-t)-At(Ri,i-x/n-c-t);

    if i <= c+t
        Ai(j) = 0;
    elseif i <= c+t+x/n
        Ai(j) = At(Ri,i-c-t);
    elseif i >= r+Ri+x/n
        Ai(j) = 0;
    elseif i >= r+Ri
        Ai(j) = pi*Ri^2-At(Ri,i-x/n-c-t);
    end

    A(j) = Ay(j)-Ai(j);

    eps(j) = eps_cu2*(1-(i-x/(2*n))/x);

    if abs(E*eps(j)) < f_yd
        sig(j) = E*eps(j);
    elseif E*eps(j) > 0
        sig(j) = f_yd;
    end
end
```

```
    else
        sig(j) = -f_yd;
    end

    Nst(j) = A(j)*sig(j);

    x_st(j) = r-(i-x/(2*n));

    j = j+1;
end

if x <= c
    M = 0;
else
    M = dot(Nst,x_st);
end

if x == 0
    Nst = 0;
else
    Nst = sum(Nst);
end

if x <= c
    Xst = 0;
else
    Xst = M/Nst;
end

end
```

## E.9 Funksjon: Resultant til strekkarmering

```
function [ Nsb ] = Nsb( r,x,H,t )

Ry = H*r+t/2;          % Radius til ytterkant av armering
Ri = H*r-t/2;          % Radius til innerkant av armering
c = r-Ry;              % Overdekning
E = 2e5;               % E-modul armeringsstaal
f_yd = 500/1.15;      % Dimensjonerende flytspenning
eps_cu2 = 3.5e-3;     % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
n = 50;               % Variabel brukt til aa inndele trykksonehoeyden.

j = 1;
for i = x:x/n:2*r

    Ay(j) = At(Ry,i-c)-At(Ry,i-c-x/n);

    if i <= x
        Ay(j) = 0;
    elseif i <= c
        Ay(j) = 0;
    elseif i <= c+x/n
        Ay(j) = At(Ry,i-c);
    elseif i >= r+Ry+x/n
        Ay(j) = 0;
    elseif i >= r+Ry
        Ay(j) = pi*Ry^2-At(Ry,i-x/n-c);
    end

    Ai(j) = At(Ri,i-c-t)-At(Ri,i-x/n-c-t);

    if i <= x
        Ai(j) = 0;
    elseif i <= c+t
        Ai(j) = 0;
    elseif i <= c+t+x/n
        Ai(j) = At(Ri,i-c-t);
    elseif i >= r+Ri+x/n
        Ai(j) = 0;
    elseif i >= r+Ri
        Ai(j) = pi*Ri^2-At(Ri,i-x/n-c-t);
    end

    A(j) = Ay(j)-Ai(j);

    eps(j) = eps_cu2*(1-(i-x/(2*n))/x);
```

```
    if abs(E*eps(j)) < f_yd
        sig(j) = E*eps(j);
    elseif E*eps(j) > 0
        sig(j) = f_yd;
    else
        sig(j) = -f_yd;
    end

    Nsb(j) = A(j)*sig(j);

    j = j+1;
end

if x >= 2*r-c
    Nsb = 0;
else
    Nsb = sum(Nsb);
end

end
```



## E.10 Funksjon: Arm til strekkarmeringsresultant

```
function [ Xsb ] = Xsb( r,x,H,t )

Ry = H*r+t/2;           % Radius til ytterkant av armering
Ri = H*r-t/2;           % Radius til innerkant av armering
c = r-Ry;               % Overdekning
E = 2e5;                % E-modul armeringsstaal
f_yd = 500/1.15;        % Dimensjonerende flytspenning
eps_cu2 = 3.5e-3;       % Toyningsgrensen i bruddtilstanden
n = 50;                 % Variabel brukt til aa inndeleg trykksonehoeyden.

j = 1;
for i = x:x/n:2*r

    Ay(j) = At(Ry,i-c)-At(Ry,i-c-x/n);

    if i <= x
        Ay(j) = 0;
    elseif i <= c
        Ay(j) = 0;
    elseif i <= c+x/n
        Ay(j) = At(Ry,i-c);
    elseif i >= r+Ry+x/n
        Ay(j) = 0;
    elseif i >= r+Ry
        Ay(j) = pi*Ry^2-At(Ry,i-x/n-c);
    end

    Ai(j) = At(Ri,i-c-t)-At(Ri,i-x/n-c-t);

    if i <= x
        Ai(j) = 0;
    elseif i <= c+t
        Ai(j) = 0;
    elseif i <= c+t+x/n
        Ai(j) = At(Ri,i-c-t);
    elseif i >= r+Ri+x/n
        Ai(j) = 0;
    elseif i >= r+Ri
        Ai(j) = pi*Ri^2-At(Ri,i-x/n-c-t);
    end

    A(j) = Ay(j)-Ai(j);

    eps(j) = eps_cu2*(1-(i-x/(2*n))/x);
```

```
    if abs(E*eps(j)) < f_yd
        sig(j) = E*eps(j);
    elseif E*eps(j) > 0
        sig(j) = f_yd;
    else
        sig(j) = -f_yd;
    end

    Nsb(j) = A(j)*sig(j);

    x_sb(j) = r-(i-x/(2*n));

    j = j+1;
end

M = dot(Nsb,x_sb);
Nsb = sum(Nsb);

if Nsb == 0
    Xsb = 0;
else
    Xsb = M/Nsb;
end

end
```

## Vedlegg F

# Program basert på Iterasjonsmetoden

```
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                                % Inputverdier %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Geometrien til tverrsnittet:
H = 500;                        % Total hoyde til tverrsnittet [mm]
Hft = 150;                      % Hoyden til toppflens [mm]
Hfb = 150;                      % Hoyden til bunnflens [mm]
Hs = H-Hft-Hfb;                % Hoyden til steget
Bs = 400;                      % Bredden til steget [mm]
Bft = 400;                     % Bredden til toppflens [mm]
Bfb = 400;                     % Bredden til bunnflens [mm]

% Materialdata:
f_ck = 30;                      % Karakteristisk betongtrykkfasthet
f_cd = 0.85*f_ck/1.5;          % Dimensjonerende betongtrykkfasthet
f_yk = 500;                    % Karakteristisk flytspenning
f_yd = f_yk/1.15;              % Dimensjonerende flytspenning
Ecm = 33e3;                    % E-modul for betong (Tab. 3.1, EC2)
Es = 2e5;                      % E-modul for armeringsstaal
eps_yd = f_yd/Es;              % Dimensjonerende flyttoying

% Armeringmengde samt plassering:
Asb = 2346;                    % Armering i bunnen [mm^2]
Ast = 2346;                    % Armering i toppen [mm^2]
cb = 50;                      % Overdekning til bunnarmeringen [mm]
ct = 50;                      % Overdekning til topparmeringen [mm]
```

```

% Ytre krefter:
N = -2380e3;           % Normalkraft [N] (trykk = neg fortegn)
M = 510e6;            % Moment [Nmm] (trykk i top = pos fortegn)

% Ovrige verdier:
n = 1000;             % Totalt antall lameller
beta = 0.0001;       % Konvergeringskrav
T = 1000;             % Maksimalt antall iterasjoner

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Slutt paa inputverdier %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inndelingen av tverrsnittet i lameller:
nft = round(Hft/(H/n)); % Antall lameller i toppflens
nfb = round(Hfb/(H/n)); % Antall lameller i bunnflens
ns = n-nft-nfb;        % Antall lameller i steg

% Definerer vektorer:
Ec = ones(1,n)*Ecm;    % E-modul til lameller
Es = ones(1,2)*Es;    % E-modul til armering
z = zeros(1,n);        % Avstand z til lameller
Z = zeros(1,2);        % Avstand Z til armering
eps = zeros(1,n);     % Toyninger i lameller
Eps = zeros(1,2);     % Toyninger i armering
sig = zeros(1,n);     % Spenninger i lameller
Sig = zeros(1,2);     % Spenninger i armering
B(1:nfb) = Bfb;        % Bredde til lameller i bunnflens
B(nfb+1:n-nft) = Bs;  % Bredde til lameller i steg
B(n-nft+1:n) = Bft;   % Bredde til lameller i toppflens
dH(1:nfb) = Hfb/nfb;  % Hoyde til lameller i bunnflens
dH(nfb+1:n-nft) = Hs/ns; % Hoyde til lameller i steg
dH(n-nft+1:n) = Hft/nft; % Hoyde til lameller i toppflens
As = [Asb,Ast];       % Armeringsvektor

% Avstand z fra tyngdepunktsaksen til vilkaarlig lamell:
z(1) = -H/2+dH(1)/2;
for i = 2:n
    z(i) = z(i-1)+dH(i);
end

% Avstand Z fra tyngdepunktsaksen til hhv. bunn- og topparmering:
Z(1) = -H/2+cb;
Z(2) = H/2-ct;

% Initielle startverdier
t = 1;                % Iterasjonsteller
error = 1;

```

```

while error > beta && t < T
    % Betongbidrag til stivhetsmatrisen:
    Kc = zeros(2,2);
    for i = 1:n
        Kc = Kc+dH(i)*B(i)*[1,-z(i);-z(i),z(i).^2]*Ec(i);
    end

    % Armeringsbidrag til stivhetsmatrisen:
    Ks = zeros(2,2);
    for j = 1:2
        Ks = Ks+As(j)*[1,-Z(j);-Z(j),Z(j).^2]*Es(j);
    end

    K = Kc+Ks;                % Stivhetsmatrise
    R = [N;M];                % Lastvektor
    eps_t = K\R;              % Toyning og krumning i tyngdepunktsaksen

    % Beregner toyning i hver betonglamell:
    for i = 1:n
        eps(i) = [1,-z(i)]*eps_t;
    end

    % Beregner toyning i armeringslagene:
    for j = 1:2
        Eps(j) = [1,-Z(j)]*eps_t;
    end

    % Beregner spenning i hver betonglamell:
    for i = 1:n
        if eps(i) > 0
            sig(i) = 0;
        else
            if eps(i) < -2e-3
                sig(i) = -f_cd;
            else
                sig(i) = -f_cd*(1-(1-eps(i)/(-2e-3))^2);
            end
        end
    end

    % Beregner spenning i armeringslagene:
    for j = 1:2
        if abs(Es(j)*Eps(j)) < f_yd
            Sig(j) = Es(j)*Eps(j);
        elseif Es(j)*Eps(j) > 0
            Sig(j) = f_yd;
        else
            Sig(j) = -f_yd;
        end
    end
end

```

```

        end
    end

    % Betongbidrag til de indre kreftene, S:
    S_c = 0;
    for i = 1:n
        S_c = S_c+dH(i)*B(i)*[sig(i);-z(i)*sig(i)];
    end

    % Armeringsbidrag til de indre kreftene, S:
    S_s = 0;
    for j = 1:2
        S_s = S_s+As(j)*[Sig(j);-Z(j)*Sig(j)];
    end

    S = S_c + S_s;          % Indre krefter

    % Kontroll av likevekt:
    error_N = (R(1)-S(1))/R(1);
    error_M = (R(2)-S(2))/R(2);
    error = max(error_N,error_M);

    if error > beta
        Ec = sig./eps;      % Oppdaterer E-modulen til hver lamell
        Es = Sig./Eps;      % Oppdaterer E-modulen til armeringen
    end

    t = t+1;              % Oppdaterer Iterasjonsteller
end

X = 'Advarsel: Maksimalt antall iterasjoner er naadd, losningen har
    ikke konvergert!';
if t == T
    disp(X);
end

% Utnyttelsesgraden til betongen:
Utnyttelse_betong = abs(eps(n)/3.5e-3)*100

% Utnyttelsesgraden til bunnarmeringen:
Utnyttelse_armering_bunn = abs(Eps(1)/eps_yd)*100

% Utnyttelsesgraden til topparmeringen:
Utnyttelse_armering_topp = abs(Eps(2)/eps_yd)*100

```

# Vedlegg G

## Program for armeringsberegning

```
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Inputverdier %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Geometrien til tverrsnittet:
H = 500; % Total hoyde til tverrsnittet [mm]
Hft = 150; % Hoyden til toppflens [mm]
Hfb = 150; % Hoyden til bunnflens [mm]
Hs = H-Hft-Hfb; % Hoyden til steget
Bs = 400; % Bredden til steget [mm]
Bft = 400; % Bredden til toppflens [mm]
Bfb = 400; % Bredden til bunnflens [mm]

% Materialdata:
f_ck = 30; % Karakteristisk betongtrykkfasthet
f_cd = 0.85*f_ck/1.5; % Dimensjonerende betongtrykkfasthet
f_yk = 500; % Karakteristisk flytspenning
f_yd = f_yk/1.15; % Dimensjonerende flytspenning
Ecm = 33e3; % E-modul for betong (Tab. 3.1, EC2)
Es = 2e5; % E-modul for armeringsstaal
eps_yd = f_yd/Es; % Dimensjonerende flyttoying

% Armeringsplassering:
cb = 50; % Overdekning til bunnarmeringen [mm]
ct = 50; % Overdekning til topparmeringen [mm]

% Ytre krefter:
N = -2380e3; % Normalkraft [N] (trykk = neg fortegn)
```

```

M = 510e6; % Moment [Nmm] (trykk i top = pos fortegn)

% Totalt antall lameller:
n = 1000;

% Onsket utnyttelse i betong og strekkarmering: [%]
U_betong = 100;
U_strekkarm = 230;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Slutt paa inputverdier %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inndelingen av tverrsnittet i lameller:
nft = round(Hft/(H/n)); % Antall lameller i toppflens
nfb = round(Hfb/(H/n)); % Antall lameller i bunnflens
ns = n-nft-nfb; % Antall lameller i steg

% Definerer vektorer:
Ec = ones(1,n)*Ecm; % E-modul til lameller
Es = ones(1,2)*Es; % E-modul til armering
z = zeros(1,n); % Avstand z til lameller
Z = zeros(1,2); % Avstand Z til armering
eps = zeros(1,n); % Toyninger i lameller
Eps = zeros(1,2); % Toyninger i armering
sig = zeros(1,n); % Spenninger i lameller
Sig = zeros(1,2); % Spenninger i armering
B(1:nfb) = Bfb; % Bredde til lameller i bunnflens
B(nfb+1:n-nft) = Bs; % Bredde til lameller i steg
B(n-nft+1:n) = Bft; % Bredde til lameller i toppflens
dH(1:nfb) = Hfb/nfb; % Hoyde til lameller i bunnflens
dH(nfb+1:n-nft) = Hs/ns; % Hoyde til lameller i steg
dH(n-nft+1:n) = Hft/nft; % Hoyde til lameller i toppflens

% Avstand z fra tyngdepunktsaksen til vilkaarlig lamell:
z(1) = -H/2+dH(1)/2;
for i = 2:n
    z(i) = z(i-1)+dH(i);
end

% Avstand Z fra tyngdepunktsaksen til hhv. bunn- og topparmering:
Z(1) = -H/2+cb;
Z(2) = H/2-ct;

% Beregning av toyingstilstand:
eps_topp = U_betong*-3.5e-3/100;
eps_strekkarm = U_strekkarm*eps_yd/100;
eps_trykkarm = eps_topp - (eps_topp-eps_strekkarm)/(H-cb)*ct;

```



```

eps_bunn = eps_strekkarm - (eps_topp-eps_strekkarm)/(H-cb)*cb;
eps_m = (eps_bunn + eps_topp)/2;
kappa = (eps_bunn - eps_topp)/H;
eps_t = [eps_m;kappa];

% Beregner toyning i hver betonglamell:
for i = 1:n
    eps(i) = [1,-z(i)]*eps_t;
end

% Beregner toyning i armeringslagene:
for j = 1:2
    Eps(j) = [1,-Z(j)]*eps_t;
end

% Beregner spenning i hver betonglamell:
for i = 1:n
    if eps(i) > 0
        sig(i) = 0;
    else
        if eps(i) < -2e-3
            sig(i) = -f_cd;
        else
            sig(i) = -f_cd*(1-(1-eps(i)/(-2e-3))^2);
        end
    end
end

% Beregner spenning i armeringslagene:
for j = 1:2
    if abs(Es(j)*Eps(j)) < f_yd
        Sig(j) = Es(j)*Eps(j);
    elseif Es(j)*Eps(j) > 0
        Sig(j) = f_yd;
    else
        Sig(j) = -f_yd;
    end
end

% Oppdaterer E-moduler etter valgt toyningstilstand:
Es(1) = Sig(1)/eps_strekkarm;
Es(2) = Sig(2)/eps_trykkarm;
for i = 1:n
    Ec(i) = sig(i)/eps(i);
end

% Betongbidrag til stivhetsmatrisen:
Kc = zeros(2,2);
for i = 1:n

```

```

    Kc = Kc+dH(i)*B(i)*[1,-z(i);-z(i),z(i).^2]*Ec(i);
end

% Finner armeringsmengder:
teller = M-Kc(2,1)*eps_m-Kc(2,2)*kappa-(N-Kc(1,1)*eps_m-Kc(1,2)*
    kappa)/(eps_m-Z(2)*kappa))*(Z(2)^2*kappa-Z(2)*eps_m);
nevner = Es(1)*(Z(1)^2*kappa-Z(1)*eps_m-((eps_m-Z(1)*kappa)/(eps_m-
    Z(2)*kappa))*(Z(2)^2*kappa-Z(2)*eps_m));

As_bunn = teller/nevner

As_topp = (N-Kc(1,1)*eps_m-Kc(1,2)*kappa-As_bunn*Es(1)*(eps_m-Z(1)*
    kappa))/(Es(2)*(eps_m-Z(2)*kappa))

```

# Vedlegg H

## Rammeprogrammet

```
clear
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                    % Inputverdier %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Aktive elementer: (1/0 = aktiv/ikke aktiv)
alfa1 = 1;
alfa2 = 0;
alfa3 = 1;
alfa4 = 0;
alfa5 = 1;
alfa6 = 0;
alfa7 = 0;

% Frihetsgrader: (0/1 = fastholdt/ikke fastholdt)
r1  = 0;
r2  = 0;
r3  = 0;
r4  = 1;
r5  = 0;
r6  = 1;
r7  = 0;
r8  = 0;
r9  = 0;
r10 = 1;
r11 = 0;
r12 = 0;
r13 = 1;
r14 = 0;
```

```

r = [r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,r14];

% Elementlengder: [m]
L1 = 8;
L2 = 5;
L3 = 5;
L4 = 5;
L5 = 5;
L6 = 5;
L7 = 5;

% Materialdata: [kN/m^2]
EI1 = 0.3^4/12*33000*10^3*1.3;
EI2 = 0.3*0.5^3/12*33000*10^3*1.3;
EI3 = 0.3*0.5^3/12*33000*10^3*1.3;
EI4 = 0.3*0.5^3/12*33000*10^3*1.3;
EI5 = 0.3*0.5^3/12*33000*10^3*1.3;
EI6 = 64000;
EI7 = 64000;

% Soylelast: [kN]
P = 2000;

% Lokale fastholdningskrefter: [kN/kNm]
S01 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
S02 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
S03 = [187.5; -156.25; 187.5; 156.25; 0; 0];
S04 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
S05 = [187.5; -156.25; 187.5; 156.25; 0; 0];
S06 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
S07 = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
S0 = [S01,S02,S03,S04,S05,S06,S07];

% Knutepunktslaster: [kN/kNm]
Rk = zeros(14,1);
Rk(13) = -P;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Slutt paa inputverdier %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Topologimatriser:
a1 = zeros(6,14);
a1(1,3) = r3;
a1(2,4) = r4;
a1(3,5) = r5;
a1(4,6) = r6;
a1(5,13) = -r13;
a1(6,14) = -r14;

```

```

a1 = a1*alfa1;

a2 = zeros(6,14);
a2(2,9) = r9;
a2(3,13) = r13;
a2(4,4) = r4;
a2 = a2*alfa2;

a3 = zeros(6,14);
a3(1,13) = r13;
a3(2,4) = r4;
a3(4,10) = r10;
a3 = a3*alfa3;

a4 = zeros(6,14);
a4(2,11) = r11;
a4(3,14) = r14;
a4(4,6) = r6;
a4 = a4*alfa4;

a5 = zeros(6,14);
a5(1,14) = r14;
a5(2,6) = r6;
a5(4,12) = r12;
a5 = a5*alfa5;

a6 = zeros(6,14);
a6(1,1) = r1;
a6(2,2) = r2;
a6(3,3) = r3;
a6(4,4) = r4;
a6(6,13) = -r13;
a6 = a6*alfa6;

a7 = zeros(6,14);
a7(1,5) = r5;
a7(2,6) = r6;
a7(3,7) = r7;
a7(4,8) = r8;
a7(5,14) = -r14;
a7 = a7*alfa7;

a = [a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7];

% Globale fastholdningskrefter:
R0 = zeros(14,1);
for i = 1:7
    R0 = R0 + transpose(a(:,14*i-13:14*i))*S0(:,i);
end

```

```

% Konstruksjonens lastvektor:
R = Rk - R0;

% Stabilitetsfunksjoner for 1.ordens beregninger:
fi2 = 1;
fi3 = 1;
fi4 = 1;
fi5 = 1;

Avvik(1) = 1;
j = 1;

% Faktor som inngaar i aksialstivhet:
rho1 = 12/0.3^2*L1^2;
rho2 = 12/0.5^2*L2^2;
rho3 = 12/0.5^2*L3^2;
rho4 = 12/0.5^2*L4^2;
rho5 = 12/0.5^2*L5^2;
rho6 = 12/0.5^2*L6^2;
rho7 = 12/0.5^2*L7^2;

while j < 20 && Avvik(j) > 0.0001
    % Stivhetsmatrise for bjelkeelement med 6 frihetsgrader:
    k = @(EI,L,rho) EI/L^3*[12*fi5 -6*L*fi2 -12*fi5 -6*L*fi2 0 0;
        -6*L*fi2 4*L^2*fi3 6*L*fi2 2*L^2*fi4 0 0; -12*fi5 6*L*fi2
        12*fi5 6*L*fi2 0 0; -6*L*fi2 2*L^2*fi4 6*L*fi2 4*L^2*fi3
        0 0; 0 0 0 0 rho -rho; 0 0 0 0 -rho rho];
    k1 = k(EI1,L1,rho1);
    k = @(EI,L,rho) EI/L^3*[12 -6*L -12 -6*L 0 0; -6*L 4*L^2 6*L
        2*L^2 0 0; -12 6*L 12 6*L 0 0; -6*L 2*L^2 6*L 4*L^2
        0 0; 0 0 0 0 rho -rho; 0 0 0 0 -rho rho];
    k2 = k(EI2,L2,rho2);
    k3 = k(EI3,L3,rho3);
    k4 = k(EI4,L4,rho4);
    k5 = k(EI5,L5,rho5);
    k6 = k(EI6,L6,rho6);
    k7 = k(EI7,L7,rho7);
    ke = [k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7];

    % Konstruksjonens globale stivhetsmatrise:
    K=zeros(14,14);

    for i = 1:7
        K = K+transpose(a(:,14*i-13:14*i))*ke(:,6*i-5:6*i)*
            a(:,14*i-13:14*i);
    end
end

```

```

Diagonal = diag(K);
for i = 1:14
    if Diagonal(i) == 0
        Diagonal(i) = 1;
    else
        Diagonal(i) = 0;
    end
end

for i = 1:14
    K(i,i) = Diagonal(i) + K(i,i);
end

% Globale forskyvninger:
r = K\R;

% Lokale forskyvninger:
v1 = a1*r;
v2 = a2*r;
v3 = a3*r;
v4 = a4*r;
v5 = a5*r;
v6 = a6*r;
v7 = a7*r;

% Lokale krefter:
S1(:,j) = S01 + k1*v1;           % Krefter i element 1
S2(:,j) = S02 + k2*v2;           % Krefter i element 2
S3(:,j) = S03 + k3*v3;           % Krefter i element 3
S4(:,j) = S04 + k4*v4;           % Krefter i element 4
S5(:,j) = S05 + k5*v5;           % Krefter i element 5
S6(:,j) = S06 + k6*v6;           % Krefter i element 6
S7(:,j) = S07 + k7*v7;           % Krefter i element 7

% Normalkraft i soylen:
N(j) = P + S2(3,j) + S3(1,j);

% Avvik i normalkraft:
if j == 1
    Avvik(j+1) = 1;
else
    Avvik(j+1) = abs(1-N(j)/N(j-1));
end

% Stabilitetsfunksjoner for 2.ordens beregninger:
beta = L1/2 * sqrt(N(j)/EI1);
fi1 = beta/tan(beta);
fi2 = beta^2/(3*(1-fi1));

```

```

    fi3 = (fi1 + 3*fi2)/4;
    fi4 = (-fi1 + 3*fi2)/2;
    fi5 = fi1 * fi2;

    j=j+1;
end

% 1.ordens momentforlop i soylen:
M1 = [S1(2,1), -S1(4,1)];
x1 = [0, L1];
[Mmax1, X1] = max(abs(M1));
Xmax1 = x1(X1);

% 2.ordens momentforlop i soylen:
r2 = -S1(4, j-1)/S1(2, j-1);
x2 = 0:0.001:L1;
M2 = S1(2, j-1)*((r2-cos(2*beta))/sin(2*beta)*sin(2*beta*x2/L1)+
    cos(2*beta*x2/L1));
[Mmax2, X2] = max(abs(M2));
Xmax2 = x2(X2);

% Outputverdier:
Soylekrefter = [S1(:,1), S1(:, j-1)]           %[1.ordens, 2.ordens]
Maksmomenter = [Mmax1, Mmax2]                 %[1.ordens, 2.ordens]
Plassering = [Xmax1, Xmax2]                   %[1.ordens, 2.ordens]

null = zeros(1, length(x2));

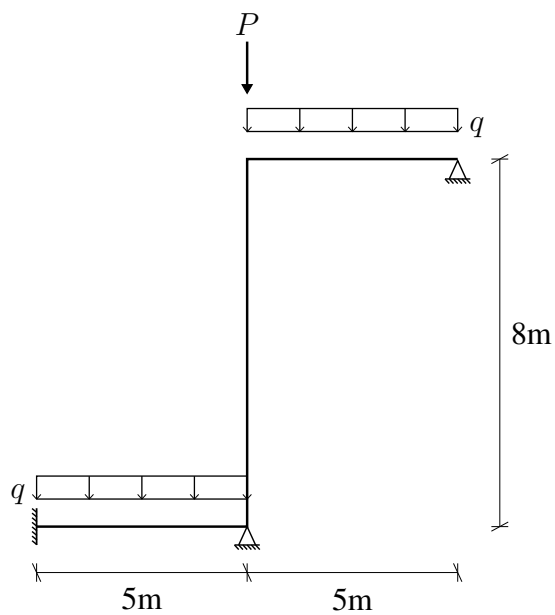
% Oppsett til graf:
figure()
plot(x1, M1, 'b', 'Linewidth', 1.5)
hold on
plot(x2, M2, 'r', 'Linewidth', 1.5)
plot(x2, null, 'k', 'Linewidth', 1.5)
grid on
title('Momentforlp i sylen', 'FontSize', 16)
xlabel('x [m]', 'FontSize', 13)
ylabel('M [kNm]', 'FontSize', 13)
legend('1.ordens moment', '2.ordens moment')

```



## Vedlegg I

# Overlagsberegninger til rammeeksempler



Figur I.1: Uforskyvelig, enkeltkrum søyle

### Lengder:

De følgende lengdene er vilkårlig valgt og kan være realistiske for et lagerbygg/varehus.

- Lengde søyle = 8m
- Lengde tilstøtende bjelker = 5m

### Nyttelast bjelker:

Anbefalt verdi på karakteristisk nyttelast i et varehus er ifølge NS-EN 1991-1-1 [9] lik  $5 \text{ kN/m}^2$ . Med en valgt lastbredde på 5m blir karakteristisk nyttelast på bjelkene lik:

$$p_k = 5 \text{ kN/m}^2 \cdot 5 \text{ m} = 25 \text{ kN/m}$$

### Egenlast dekke:

Tyngdetetthet for betong =  $25 \text{ kN/m}^3$ .

Med en høyde  $h = 200 \text{ mm}$  på dekket, vil den karakteristiske egenlasten bli:

$$g_k = 25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 25 \text{ kN/m}$$

Siden dette kun er overslagsberegninger, neglisjeres vekten av bjelkene i disse lastberegningene.

### Total dimensjonerende last bjelker:

$$\begin{aligned} q_d &= 1.5 \cdot (g_k + \text{påståp m.m}) + 1.2 \cdot p_k \\ &= 1.5 \cdot (25 + 5) + 1.2 \cdot 25 = 75 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

### Tverrsnittsdimensjoner bjelker:

Dimensjonerende moment:

$$M_{Ed} = \frac{q_d \cdot L^2}{8} = \frac{75 \cdot 5^2}{8} = 235 \text{ kNm}$$

Momentkapasitet:

$$M_{Rd} = 0.275 \cdot f_{cd} b h^2$$

Betongklasse B30  $\Rightarrow f_{cd} = 17 \text{ N/mm}^2$

Velger  $b \cdot h = 0.3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} \Rightarrow M_{Rd} > M_{Ed} \Rightarrow \text{OK}$

Tverrsnittsdimensjoner søyle:

Velger  $b \cdot h = 0.3\text{m} \cdot 0.3\text{m}$

Aksialkraftkapasitet:

$$n = \frac{N_{Rd}}{f_{cd} \cdot A_c}$$

Fra M-N diagrammene i vedlegg B finnes den største verdien som den dimensjonsløse normalkraften kan ha,  $n \simeq 1.8$ . Med denne verdien oppnås en aksialkraftkapasitet,  $N_{Rd} = 2754\text{kN}$ . Siden søylen også utsettes for momenter, vil  $N_{Rd}$  måtte reduseres. Derfor velges en søylelast  $P = 2000\text{kN}$ .

Kontroll av knekklast:

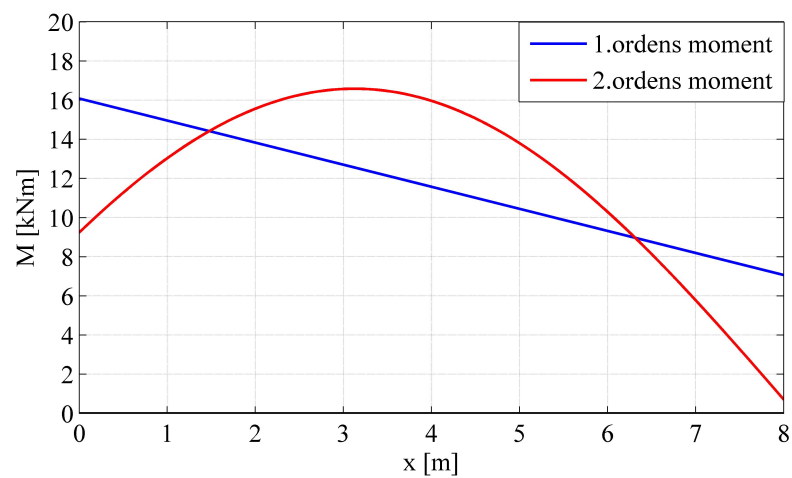
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 33 \cdot 10^3 \cdot 300^4/12}{8000^2} = 3435 \text{ kN} > P \Rightarrow OK$$



## Vedlegg J

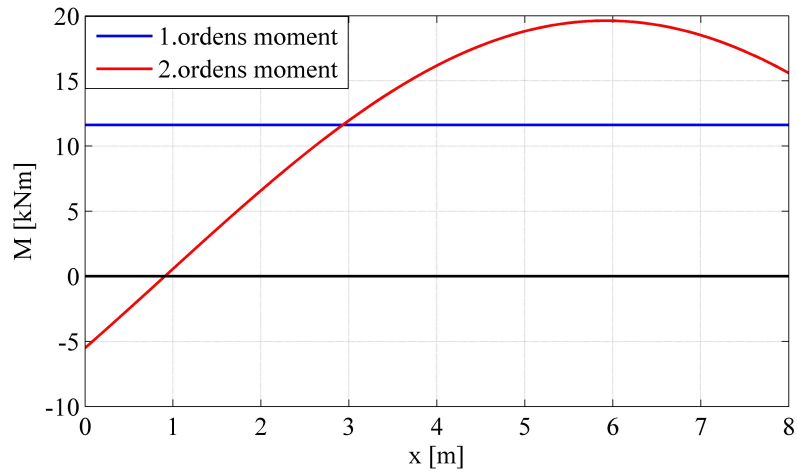
# Momentfordeling til 4 rammeeksempler

### J.1 Uforskyvelig enkeltkrum søyle



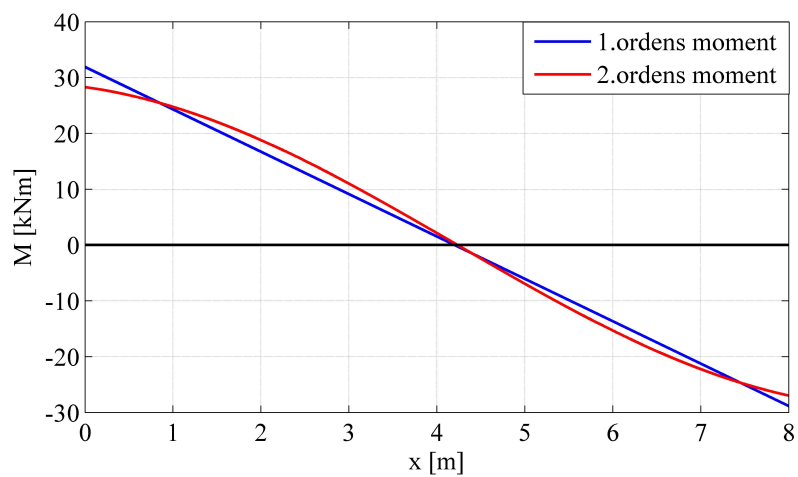
Figur J.1: Momentforløp for enkeltkrum, uforskyvelig søyle

## J.2 Forskyvelig enkeltkrum søyle



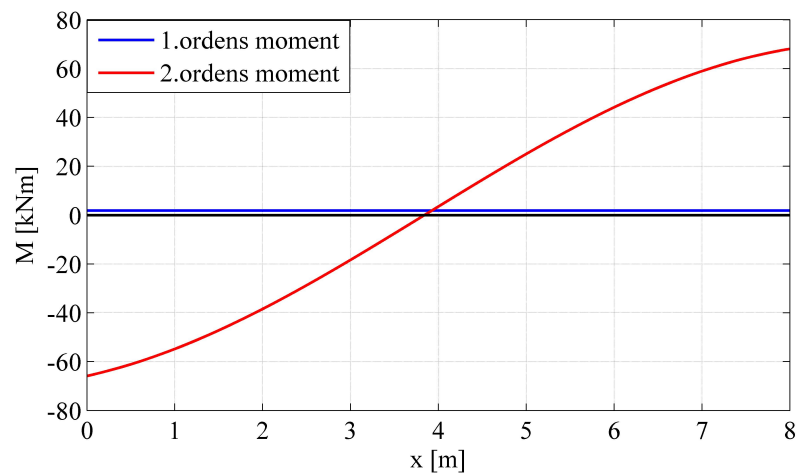
Figur J.2: Momentforløp for enkeltkrum, forskyvelig søyle

## J.3 Uforskyvelig dobbeltkrum søyle



Figur J.3: Momentforløp for dobbeltkrum, uforskyvelig søyle

## J.4 Forskyvelig dobbeltkrum søyle



Figur J.4: Momentforløp for dobbeltkrum, forskyvelig søyle





## **Vedlegg K**

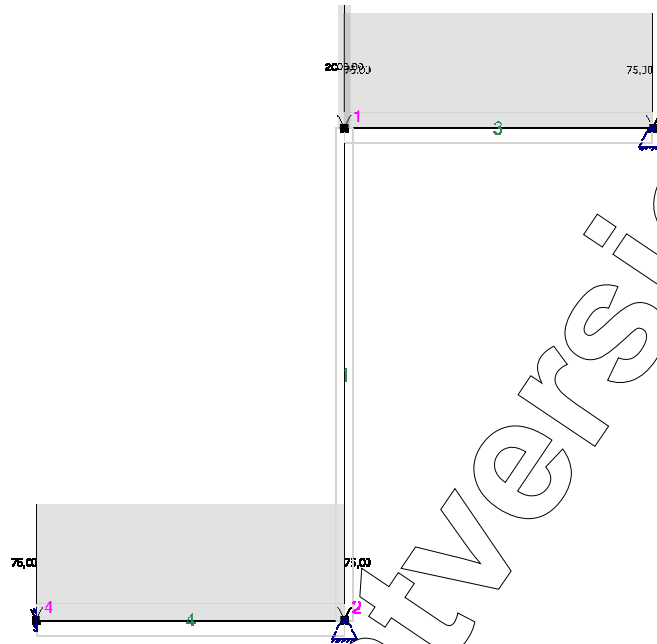
# **Beregningsrapporter fra Focus**

Prosjekttittel: Uforskyvelig søyle, enkeltkrum

Beregning utført: 28.04.2014 13:38:53

**Focus Konstruksjon 2014**

## 1. KONSTRUKSJONSMODEL OG LASTER



### 1.1. KNOTEPUNKTSDATA

Nr.	X [mm]	Z [mm]
2	0	0
4	-5000	0
3	5000	8000
1	0	8000

### 1.2. TVERRSNITTSDATA

Nr.	Navn	Parametre	
1	Rektangulært 300x300	A [mm <sup>2</sup> ]	90000
		I <sub>x</sub> [mm <sup>4</sup> ]	9,9900e+008
		I <sub>y</sub> [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		I <sub>z</sub> [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		Total vekt [kN]	55,45
2	Rektangulært 300x500	A [mm <sup>2</sup> ]	150000
		I <sub>x</sub> [mm <sup>4</sup> ]	2,7990e+009
		I <sub>y</sub> [mm <sup>4</sup> ]	3,1250e+009
		I <sub>z</sub> [mm <sup>4</sup> ]	1,1250e+009
		Total vekt [kN]	115,51

## 1.3. MATERIALDATA

<b>1 Stål</b>	Material: Stål
Fasthetsklasse: S355	
Varmeutv.koeff.: $1,20e-005 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Tyngdetetthet: $77,01 \text{ kN/m}^3$
E-modul: $3,3000e+004 \text{ N/mm}^2$	G-modul: $8,1000e+004 \text{ N/mm}^2$

Karakteristiske fasthetsparametre:

$f_y = 355,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 40,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 80,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $> 80,0 \text{ mm}$

## 1.4. Segmentdata

Seg Nr.	Kn.pkt 1	Kn.pkt 2	Tvsn 1	Tvsn 2	Material	Type / Ref.linje
3	1	3	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke
1	1	2	Rektangulært 300x300	Rektangulært 300x300	Stål	Rett bjelke
4	2	4	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke

## 1.4.1. Segmentdata EN 1993

Seg. nr.	Gamma_M0	Gamma_M1	L_ky [mm]	L_kz [mm]	L_eff [mm]
3	1,05	1,05	5000	5000	5000
1	1,05	1,05	8000	8000	8000
4	1,05	1,05	5000	5000	5000

## 1.5. RANDBETINGELSER

Seg Nr.	X [mm]	Z [mm]	Frih.gr.		
			X	Z	RotY
1	0	0	F	F	
4	-5000	0	F	F	F
3	5000	8000	F	F	

Forklaring til frihetsgrader: F = fastholdt, (blank) = fri  
 Tall betyr foreskrevne forskyvning [mm]

## 1.6. LASTTILFELLER

1 Nyttelast

Lasttype: Annen variabel  
 Lastvarighet: Korttidslast  
 1 Fordelt last  
 P1 = 75,00 kN/m  
 X1 = 0 mm      Z1 = 8000 mm  
 P2 = 75,00 kN/m  
 X2 = 5000 mm      Z2 = 8000 mm  
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 3

Studentversjon - Ikke for kommersielt bruk

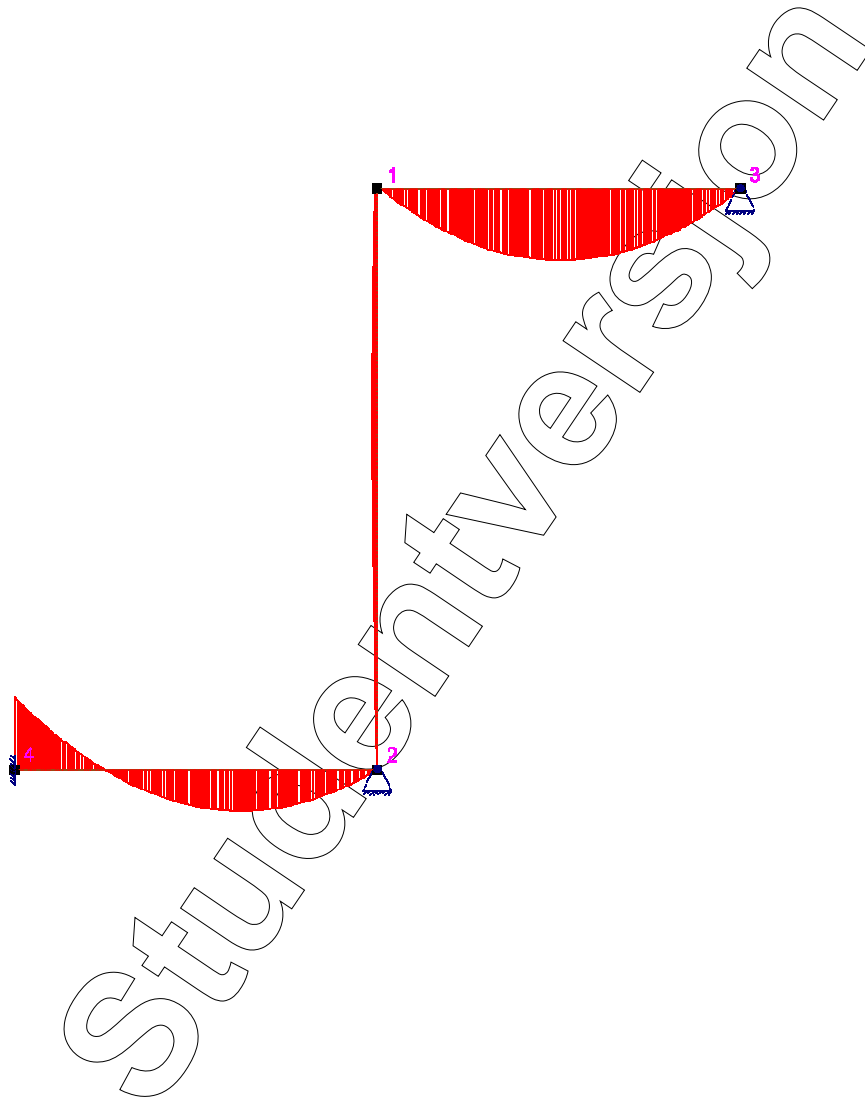
2 Punktlast P = 2000,00 kN  
 X = 0 mm Z = 8000 mm  
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 1

3 Fordelt last P1 = 75,00 kN/m  
 X1 = 0 mm Z1 = 0 mm  
 P2 = 75,00 kN/m  
 X2 = -5000 mm Z2 = 0 mm  
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 4

## 2. BEREGNINGER

### 2.1. SEGMENTRESULTATER

Seg Nr.	Snitt mm	My [kN·m]	N [kN]	Vz [kN]	u [mm]	w [mm]
3	0	9,19	-0,60	-188,41	0,0	-5,9
	2525	-229,80	-1,06	-0,90	0,0	-8,7
	5000	-0,01	-0,16	184,72	0,0	0,0
1	0	9,20	-2189,34	4,31	0,0	-5,9
	3137	16,56	-2189,34	0,01	-4,9	-3,6
	8000	0,75	-2189,34	-5,19	0,0	0,0
4	0	0,74	3,18	-139,91	0,0	0,0
	1875	-131,50	2,92	0,71	0,0	-2,4
	5000	233,98	2,93	233,21	0,0	0,0



Største moment: 233,98 kN·m

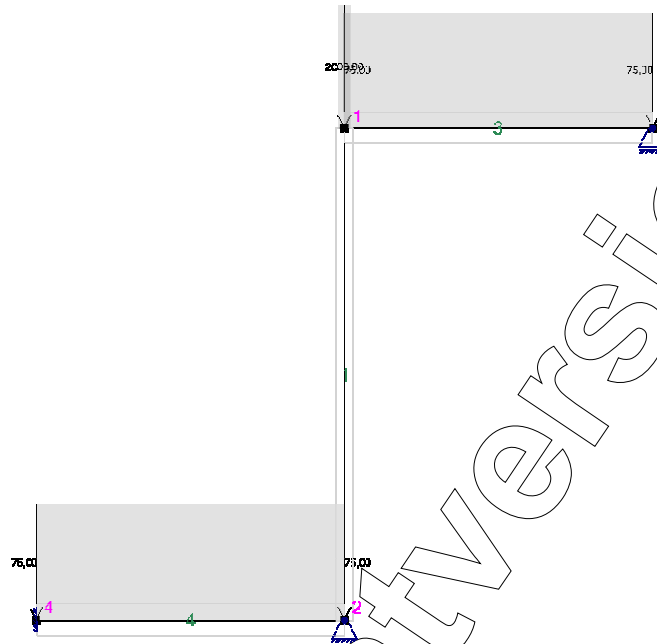
Focus Konstruksjon 2014 Versjon 14.2.0.0 Focus Software AS	<b>Uforskyvelig søyle, enkeltkrum</b>	FIL	
	Moment / Lastkombinasjon	C:\Users\Frank\Documents\Focus Konstruksjon\Prosjekter\Uforskyvelig søyle, enkeltkrum, korrekt.rkon	SIGN
		28.04.2014 - 13:38:54	

Prosjekttittel: Forskyvelig søyle, enkeltkrum

Beregning utført: 28.04.2014 13:30:21

# Focus Konstruksjon 2014

## 1. KONSTRUKSJONSMODEL OG LASTER



### 1.1. KNOTEPUNKTSDATA

Nr.	X [mm]	Z [mm]
2	0	0
4	-5000	0
3	5000	8000
1	0	8000

### 1.2. TVERRSNITTSDATA

Nr.	Navn	Parametre	
1	Rektangulært 300x300	A [mm <sup>2</sup> ]	90000
		Ix [mm <sup>4</sup> ]	9,9900e+008
		Iy [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		Iz [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		Total vekt [kN]	55,45
2	Rektangulært 300x500	A [mm <sup>2</sup> ]	150000
		Ix [mm <sup>4</sup> ]	2,7990e+009
		Iy [mm <sup>4</sup> ]	3,1250e+009
		Iz [mm <sup>4</sup> ]	1,1250e+009
		Total vekt [kN]	115,51



## 1.3. MATERIALDATA

<b>1 Stål</b>	Material: Stål
Fasthetsklasse: S355	
Varmeutv.koeff.: $1,20e-005 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Tyngdetetthet: $77,01 \text{ kN/m}^3$
E-modul: $3,3000e+004 \text{ N/mm}^2$	G-modul: $8,1000e+004 \text{ N/mm}^2$

Karakteristiske fasthetsparametre:

$f_y = 355,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 40,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 80,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $> 80,0 \text{ mm}$

## 1.4. Segmentdata

Seg Nr.	Kn.pkt 1	Kn.pkt 2	Tvsn 1	Tvsn 2	Material	Type / Ref.linje
3	1	3	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke
1	1	2	Rektangulært 300x300	Rektangulært 300x300	Stål	Rett bjelke
4	2	4	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke

## 1.4.1. Segmentdata EN 1993

Seg. nr.	Gamma_M0	Gamma_M1	L_ky [mm]	L_kz [mm]	L_eff [mm]
3	1,05	1,05	5000	5000	5000
1	1,05	1,05	8000	8000	8000
4	1,05	1,05	5000	5000	5000

## 1.5. RANDBETINGELSER

Seg Nr.	X [mm]	Z [mm]	Frih.gr.		
			X	Z	RotY
1	0	0	F	F	
4	-5000	0	F	F	F
3	5000	8000		F	

Forklaring til frihetsgrader: F = fastholdt, (blank) = fri  
 Tall betyr foreskrevne forskyvning [mm]

## 1.6. LASTTILFELLER

1 Nyttelast

Lasttype: Annen variabel  
 Lastvarighet: Korttidslast  
 1 Fordelt last  
 P1 = 75,00 kN/m  
 X1 = 0 mm      Z1 = 8000 mm  
 P2 = 75,00 kN/m  
 X2 = 5000 mm      Z2 = 8000 mm  
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 3

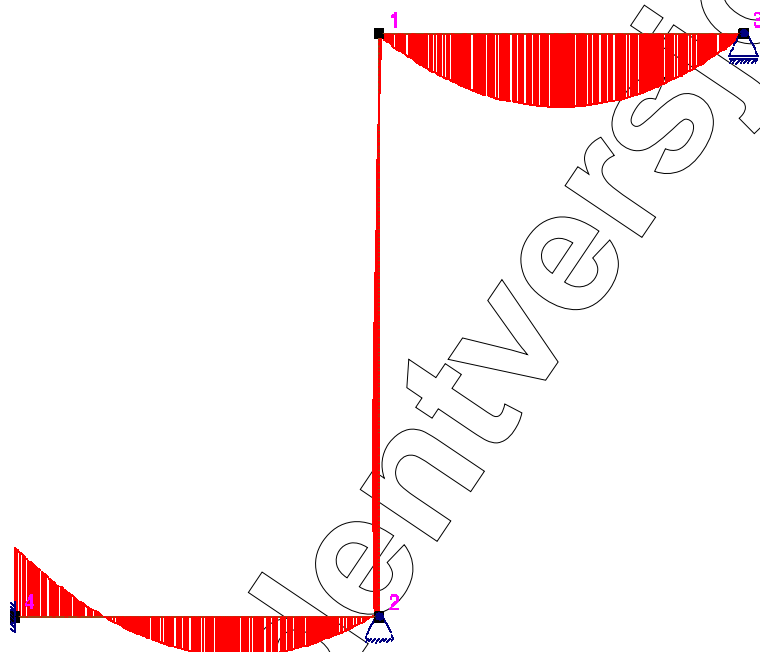
2 Punktlast P = 2000,00 kN  
 X = 0 mm Z = 8000 mm  
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 1

3 Fordelt last P1 = 75,00 kN/m  
 X1 = 0 mm Z1 = 0 mm  
 P2 = 75,00 kN/m  
 X2 = -5000 mm Z2 = 0 mm  
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 4

## 2. BEREGNINGER

### 2.1. SEGMENTRESULTATER

Seg Nr.	Snitt mm	My [kN·m]	N [kN]	Vz [kN]	u [mm]	w [mm]
3	0	-5,43	0,50	-185,48	9,6	-5,9
	2475	-237,09	0,00	0,15	9,6	-9,0
	5000	-0,01	0,94	187,65	9,6	0,0
1	0	-5,43	-2186,41	5,90	9,6	-5,9
	5914	19,57	-2186,41	0,01	-1,8	-1,5
	8000	15,53	-2186,41	-3,72	0,0	0,0
4	0	15,53	2,85	-144,34	0,0	0,0
	1925	-125,18	2,60	0,03	0,0	-2,3
	5000	226,59	2,61	228,78	0,0	0,0



Største moment: 237,09 kN·m

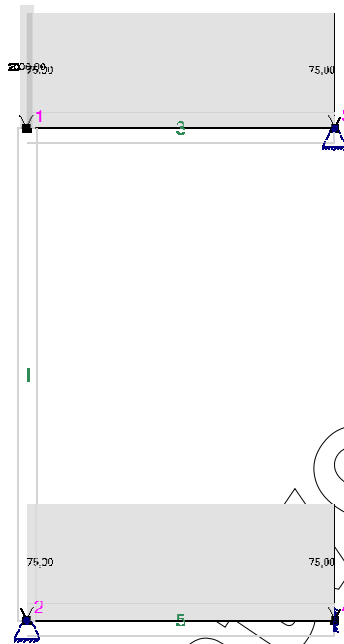
Focus Konstruksjon 2014 Versjon 14.2.0.0 Focus Software AS	<b>Forskyvelig søyle, enkeltkrum</b>	FIL	
	Moment / Lastkombinasjon	C:\Users\Frank\Documents\Focus Konstruksjon\Prosjekter\Balkkrum, korrekt.rkon	SIGN
		28.04.2014 - 13:30:21	

Prosjekttittel: Uforskyvelig søyle, dobbeltkrum

Beregning utført: 28.04.2014 13:35:27

# Focus Konstruksjon 2014

## 1. KONSTRUKSJONSMODEL OG LASTER



### 1.1. KNOTEPUNKTSDATA

Nr.	X [mm]	Z [mm]
2	0	0
4	5000	0
3	5000	8000
1	0	8000

### 1.2. TVERRSNITTSDATA

Nr.	Navn	Parametre	
1	Rektangulært 300x300	A [mm <sup>2</sup> ]	90000
		I <sub>x</sub> [mm <sup>4</sup> ]	9,9900e+008
		I <sub>y</sub> [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		I <sub>z</sub> [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		Total vekt [kN]	55,45
2	Rektangulært 300x500	A [mm <sup>2</sup> ]	150000
		I <sub>x</sub> [mm <sup>4</sup> ]	2,7990e+009
		I <sub>y</sub> [mm <sup>4</sup> ]	3,1250e+009
		I <sub>z</sub> [mm <sup>4</sup> ]	1,1250e+009
		Total vekt [kN]	115,51

## 1.3. MATERIALDATA

<b>1 Stål</b>	Material: Stål
Fasthetsklasse: S355	
Varmeutv.koeff.: $1,20e-005 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Tyngdetetthet: $77,01 \text{ kN/m}^3$
E-modul: $3,3000e+004 \text{ N/mm}^2$	G-modul: $8,1000e+004 \text{ N/mm}^2$

Karakteristiske fasthetsparametre:

$f_y = 355,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 40,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 80,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $> 80,0 \text{ mm}$

## 1.4. Segmentdata

Seg Nr.	Kn.pkt 1	Kn.pkt 2	Tvsn 1	Tvsn 2	Material	Type / Ref.linje
5	2	4	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke
1	1	2	Rektangulært 300x300	Rektangulært 300x300	Stål	Rett bjelke
3	1	3	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke

## 1.4.1. Segmentdata EN 1993

Seg. nr.	Gamma_M0	Gamma_M1	L_ky [mm]	L_kz [mm]	L_eff [mm]
5	1,05	1,05	5000	5000	5000
1	1,05	1,05	8000	8000	8000
3	1,05	1,05	5000	5000	5000

## 1.5. RANDBETINGELSER

Seg Nr.	X [mm]	Z [mm]	Frih.gr.		
			X	Z	RotY
5	5000	0	F	F	F
5	0	0	F	F	
3	5000	8000	F	F	

Forklaring til frihetsgrader: F = fastholdt, (blank) = fri  
 Tall betyr foreskrevet forskyvning [mm]

## 1.6. LASTTILFELLER

1 Nyttelast

Lasttype: Annen variabel  
 Lastvarighet: Korttidslast  
 1 Punktlast  
 $P = 2000,00 \text{ kN}$   
 $X = 0 \text{ mm}$        $Z = 8000 \text{ mm}$   
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 1

2 Fordelt last      P1 = 75,00 kN/m  
                          X1 = 0 mm      Z1 = 0 mm  
                          P2 = 75,00 kN/m  
                          X2 = 5000 mm      Z2 = 0 mm  
                          Retning = [0; -1]  
                          Virker på segment: 5

3 Fordelt last      P1 = 75,00 kN/m  
                          X1 = 0 mm      Z1 = 8000 mm  
                          P2 = 75,00 kN/m  
                          X2 = 5000 mm      Z2 = 8000 mm  
                          Retning = [0; -1]  
                          Virker på segment: 3

## 2. BEREGNINGER

### 2.1. SEGMENTRESULTATER

Seg Nr.	Snitt mm	My [kN·m]	N [kN]	Vz [kN]	u [mm]	w [mm]
5	0	26,91	2,60	-147,76	0,0	0,0
	1975	-120,49	2,37	0,36	0,0	-2,2
	5000	220,89	2,38	225,36	0,0	0,0
1	0	28,25	-2193,17	-2,22	0,0	-5,9
	0	28,25	-2193,17	-2,22	0,0	-5,9
	8000	-26,92	-2193,17	-3,49	0,0	0,0
3	0	28,24	-6,49	-192,24	0,0	-5,9
	2575	-220,50	-6,91	0,91	0,0	-8,4
	5000	-0,01	-6,05	180,93	0,0	0,0



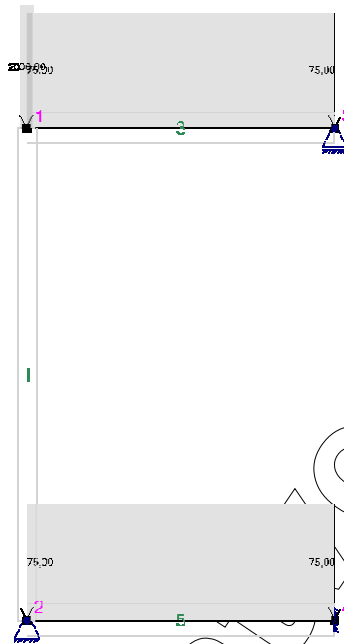


Prosjekttittel: Forskyvelig søyle, dobbeltkrum

Beregning utført: 28.04.2014 13:37:09

**Focus Konstruksjon 2014**

## 1. KONSTRUKSJONSMODEL OG LASTER



## 1.1. KNOTEPUNKTSDATA

Nr.	X [mm]	Z [mm]
2	0	0
4	5000	0
3	5000	8000
1	0	8000

## 1.2. TVERRSNITTSDATA

Nr.	Navn	Parametre	
1	Rektangulært 300x300	A [mm <sup>2</sup> ]	90000
		Ix [mm <sup>4</sup> ]	9,9900e+008
		Iy [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		Iz [mm <sup>4</sup> ]	6,7500e+008
		Total vekt [kN]	55,45
2	Rektangulært 300x500	A [mm <sup>2</sup> ]	150000
		Ix [mm <sup>4</sup> ]	2,7990e+009
		Iy [mm <sup>4</sup> ]	3,1250e+009
		Iz [mm <sup>4</sup> ]	1,1250e+009
		Total vekt [kN]	115,51

## 1.3. MATERIALDATA

<b>1 Stål</b>	Material: Stål
Fasthetsklasse: S355	
Varmeutv.koeff.: $1,20e-005 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Tyngdetetthet: $77,01 \text{ kN/m}^3$
E-modul: $3,3000e+004 \text{ N/mm}^2$	G-modul: $8,1000e+004 \text{ N/mm}^2$

Karakteristiske fasthetsparametre:

$f_y = 355,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 40,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $\leq 80,0 \text{ mm}$   
 $f_y = 335,00 \text{ N/mm}^2$  for godstykkelse  $> 80,0 \text{ mm}$

## 1.4. Segmentdata

Seg Nr.	Kn.pkt 1	Kn.pkt 2	Tvsn 1	Tvsn 2	Material	Type / Ref.linje
5	2	4	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke
1	1	2	Rektangulært 300x300	Rektangulært 300x300	Stål	Rett bjelke
3	1	3	Rektangulært 300x500	Rektangulært 300x500	Stål	Rett bjelke

## 1.4.1. Segmentdata EN 1993

Seg. nr.	Gamma_M0	Gamma_M1	L_ky [mm]	L_kz [mm]	L_eff [mm]
5	1,05	1,05	5000	5000	5000
1	1,05	1,05	8000	8000	8000
3	1,05	1,05	5000	5000	5000

## 1.5. RANDBETINGELSER

Seg Nr.	X [mm]	Z [mm]	Frih.gr.		
			X	Z	RotY
5	5000	0	F	F	F
5	0	0	F	F	
3	5000	8000		F	

Forklaring til frihetsgrader: F = fastholdt, (blank) = fri  
 Tall betyr foreskreven forskyvning [mm]

## 1.6. LASTTILFELLER

1 Nyttelast

Lasttype: Annen variabel  
 Lastvarighet: Korttidslast  
 1 Punktlast  
 $P = 2000,00 \text{ kN}$   
 $X = 0 \text{ mm}$        $Z = 8000 \text{ mm}$   
 Retning = [0; -1]  
 Virker på segment: 1

2 Fordelt last      P1 = 75,00 kN/m  
                          X1 = 0 mm      Z1 = 0 mm  
                          P2 = 75,00 kN/m  
                          X2 = 5000 mm      Z2 = 0 mm  
                          Retning = [0; -1]  
                          Virker på segment: 5

3 Fordelt last      P1 = 75,00 kN/m  
                          X1 = 0 mm      Z1 = 8000 mm  
                          P2 = 75,00 kN/m  
                          X2 = 5000 mm      Z2 = 8000 mm  
                          Retning = [0; -1]  
                          Virker på segment: 3

## 2. BEREGNINGER

### 2.1. SEGMENTRESULTATER

Seg Nr.	Snitt mm	My [kN·m]	N [kN]	Vz [kN]	u [mm]	w [mm]
5	0	-67,12	4,98	-119,54	0,0	0,0
	1600	-163,89	4,65	0,45	0,0	-2,9
	5000	267,90	4,66	253,57	0,0	0,0
1	0	-65,00	-2174,48	7,91	60,8	-6,1
	8000	67,11	-2174,49	5,94	0,0	0,0
	8000	67,11	-2174,49	5,94	0,0	0,0
3	0	-65,01	0,63	-173,56	60,8	-6,1
	2325	-268,00	0,00	0,81	60,7	-19,2
	5000	-0,01	1,10	199,56	60,7	0,0





## Vedlegg L

# Sammenligning av knekk lengder

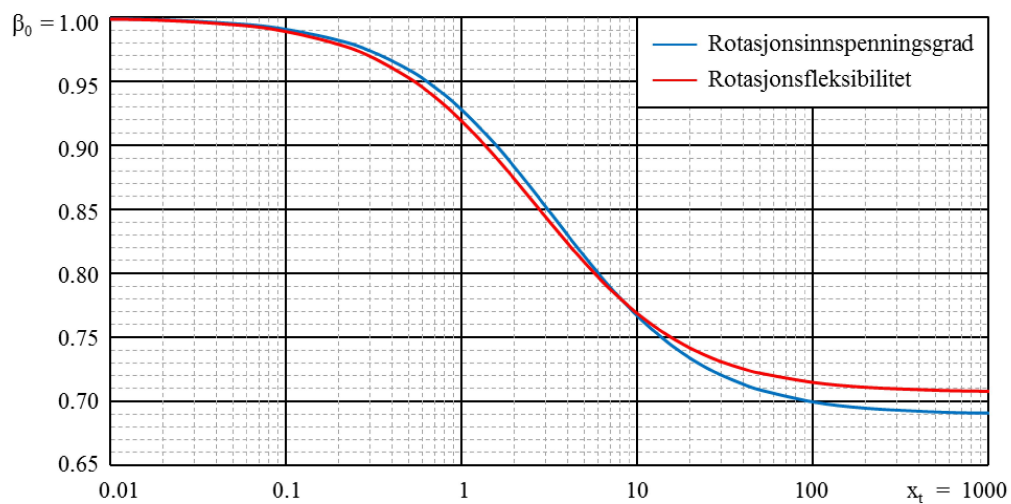
I dette vedlegget finnes diagrammer for alle de generelle tilfellene som er benyttet ved beregning av knekk lengder. Variabelen  $x$  angir forholdet mellom stivheten til søylen og de tilknyttede bjelkene, og er definert som vist i likning (L.1).

$$x = \frac{\sum a_i (EI_b / L_b)_i}{EI_s / L_s} \quad (\text{L.1})$$

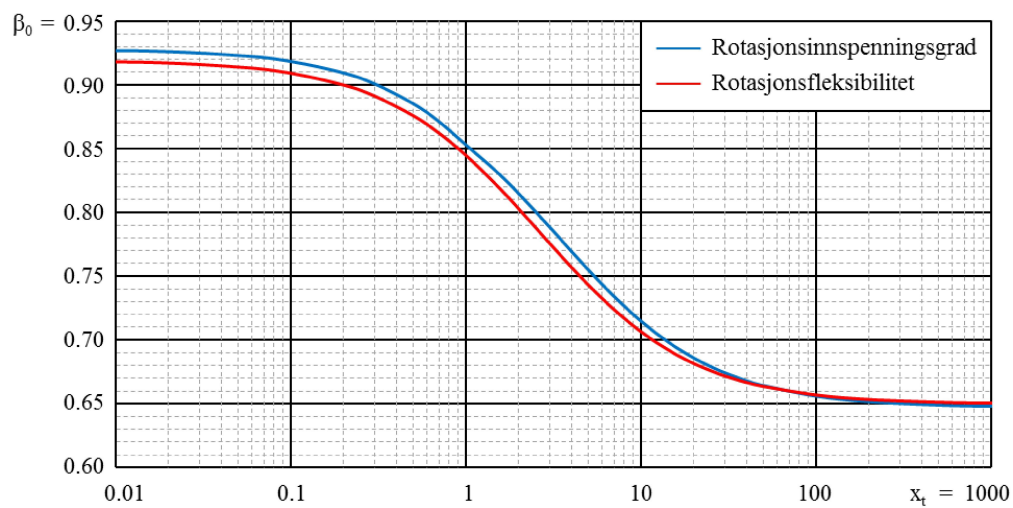
Hvor  $a_i$  tar hensyn til om bjelkene er innspente eller rotasjonsfrie i motsatt ende av søyleenden. Dersom en bjelke er fast innspent, settes  $a_i$  lik 4. Ved rotasjonsfri opplagring settes  $a_i$  lik 3.

I alle diagrammene holdes stivhetsforholdet i bunnen av søylene  $x_b$  konstant, mens i toppen varierer  $x_t$  i intervallet  $0 \rightarrow \infty$ .

## L.1 Uforskyvelige søyler

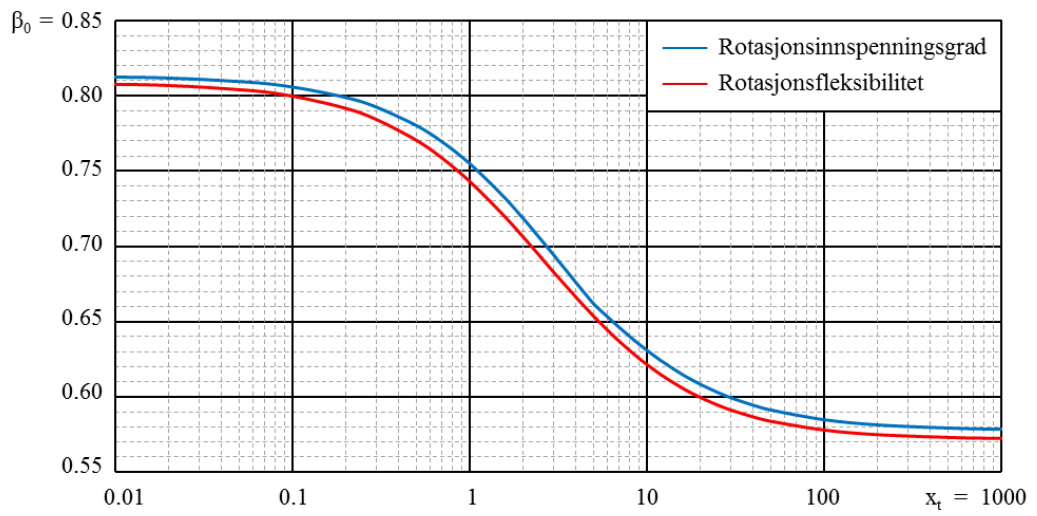


Figur L.1: Knekk lengder for uforskyvelige søyler hvor bunnen er fri til rotere

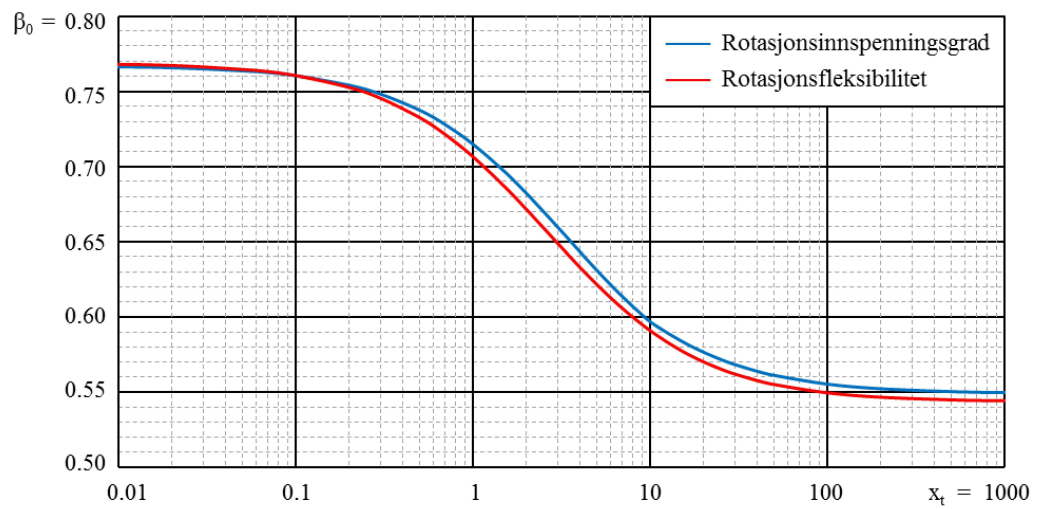


Figur L.2: Knekk lengder for uforskyvelige søyler hvor  $x_b = 1$

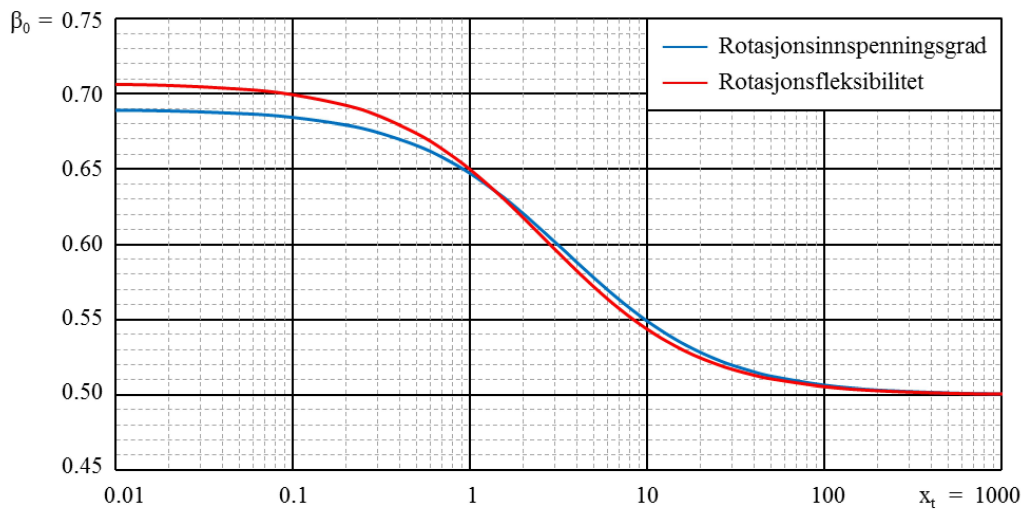




Figur L.3: Knekk lengder for uforskyvelige søyler hvor  $x_b = 5$

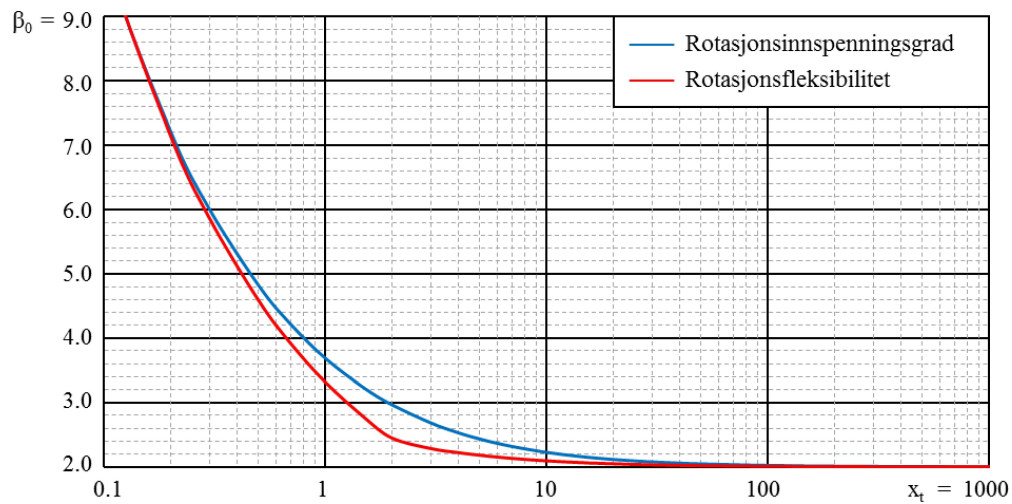


Figur L.4: Knekk lengder for uforskyvelige søyler hvor  $x_b = 10$

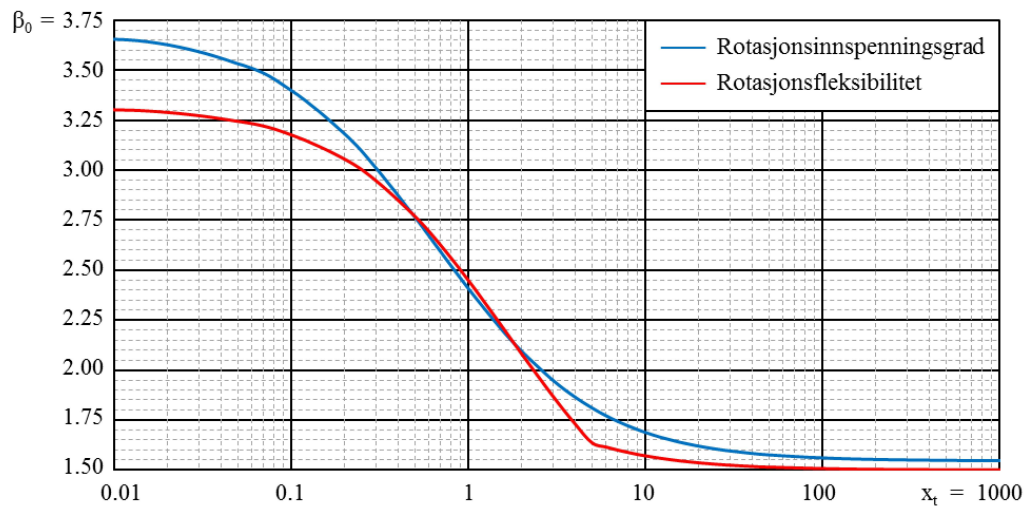


Figur L.5: Knekk lengder for uforskyvelige søyler hvor bunnen er fast innspent

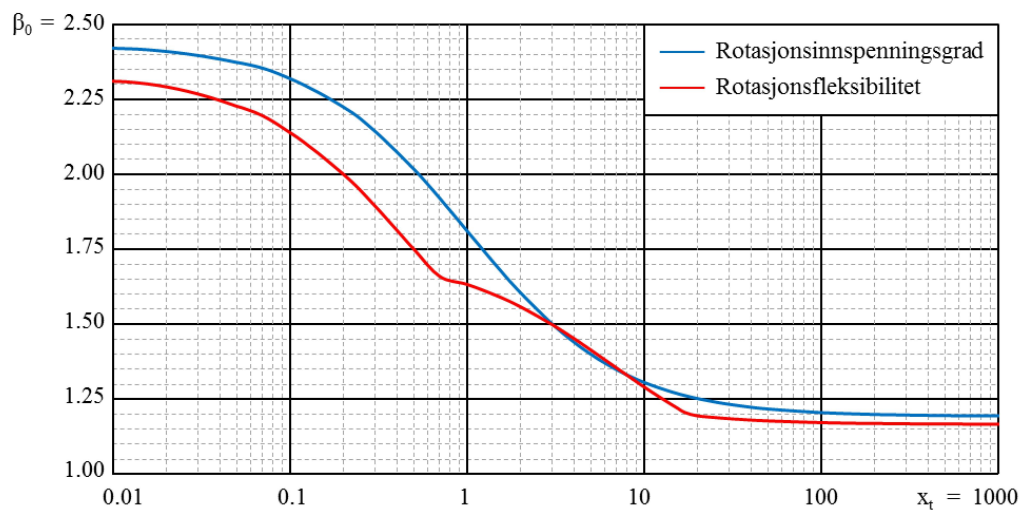
## L.2 Forskyvelige søyler



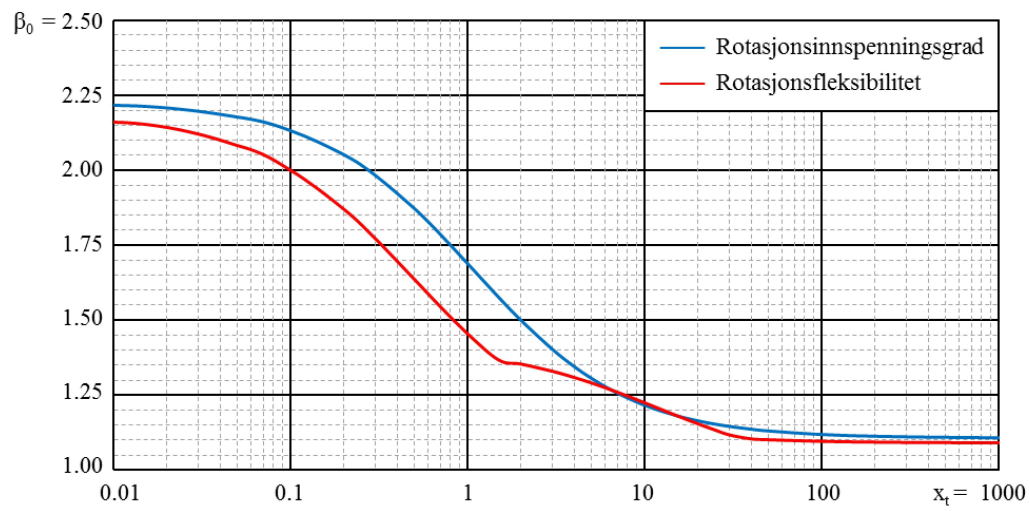
Figur L.6: Knekk lengder for forskyvelige søyler hvor bunnen er fri til rotere



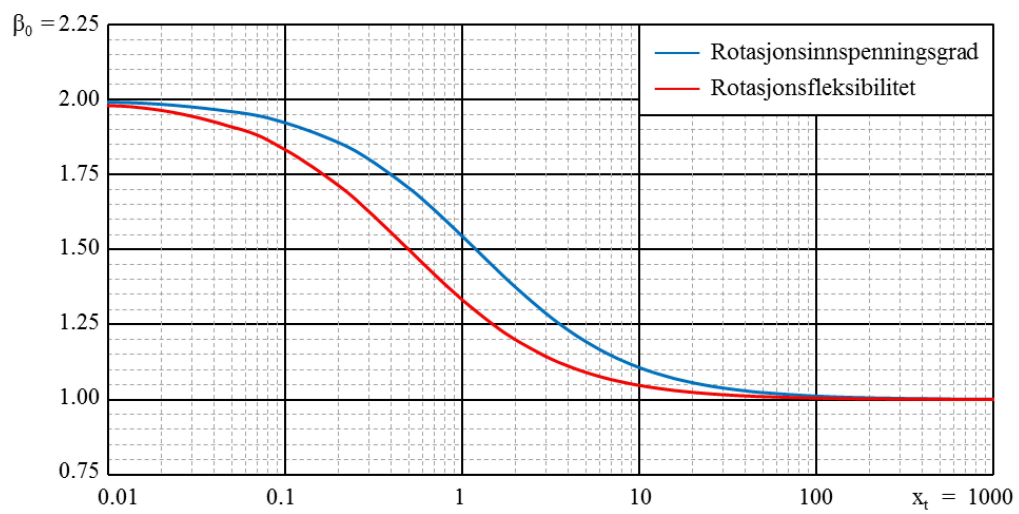
Figur L.7: Knekk lengder for forskyvelige søyler hvor  $x_b = 1$



Figur L.8: Knekk lengder for forskyvelige søyler hvor  $x_b = 5$



Figur L.9: Knekk lengder for forskyvelige søyler hvor  $x_b = 10$



Figur L.10: Knekk lengder for forskyvelige søyler hvor bunnen er fast innspent

## Vedlegg M

### Beregning av 2.ordens momenter etter forenklet metode i EC2

EC2, 5.8.8.2(1) angir en forenklet metode for å beregne det dimensjonerende totalmomentet:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (\text{M.1})$$

For konstruksjonsdeler uten last påført mellom endepunktene, kan virkningen av to ulike første ordens momenter  $M_{01}$  og  $M_{02}$ , erstattes med et ekvivalent første ordens moment  $M_{0Ed}$ :

$$M_{0Ed} = 0.6M_{02} + 0.4M_{01} \geq 0.4M_{02} \quad (\text{M.2})$$

$M_{01}$  og  $M_{02}$  har samme fortegn hvis de gir strekk på samme side, ellers har de motsatt fortegn. Videre er  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$ . Andre ordens momentet  $M_2$ , beregnes på grunnlag av aksialkraft og utbøyning av søylen:

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 \quad (\text{M.3})$$

De følgende tilleggseksentrisitetene er regnet ut i rapporten:

Utbøyning for uforskyvelig søyle:

$$e_2 = 9.18\text{mm}$$

Utbøyning for forskyvelig søyle:

$$e_2 = 36.92\text{mm}$$

## M.1 Uforskyvelig enkeltkrum søyle

Første ordens momenter i søylen er hentet fra rammeprogrammet i Matlab:

$$M_{01} = 7.07\text{kNm} \quad M_{02} = 16.08\text{kNm} \quad N_{Ed} = 2190.7\text{kN}$$

Ekvivalent første ordens moment beregnet etter likning (M.2):

$$\begin{aligned} M_{0Ed} &= 0.6 \cdot 16.08 + 0.4 \cdot 7.07 \geq 0.4 \cdot 16.08 \\ M_{0Ed} &= 12.48 > 6.43 \end{aligned}$$

Nominellt andre ordens moment beregnet etter likning (M.3):

$$M_2 = 2190.7 \cdot 9.18 \cdot 10^{-3} = 20.11\text{kNm}$$

Dimensjonerende bøyemoment beregnet etter likning (M.1):

$$M_{Ed} = 12.48 + 20.11 = 32.59\text{kNm}$$

## M.2 Forskyvelig enkeltkrum søyle

Første ordens momenter i søylen er hentet fra rammeprogrammet i Matlab:

$$M_{01} = 11.62\text{kNm} \quad M_{02} = 11.62\text{kNm} \quad N_{Ed} = 2189.8\text{kN}$$

Ekvivalent første ordens moment beregnet etter likning (M.2):

$$\begin{aligned} M_{0Ed} &= 0.6 \cdot 11.62 + 0.4 \cdot 11.62 \geq 0.4 \cdot 11.62 \\ M_{0Ed} &= 11.62 > 4.65 \end{aligned}$$

Nominellt andre ordens moment beregnet etter likning (M.3):

$$M_2 = 2189.8 \cdot 36.92 \cdot 10^{-3} = 80.85\text{kNm}$$

Dimensjonerende bøyemoment beregnet etter likning (M.1):

$$M_{Ed} = 11.62 + 80.85 = 92.47\text{kNm}$$

### M.3 Uforskyvelig dobbeltkrum søyle

Første ordens momenter i søylen er hentet fra rammeprogrammet i Matlab:

$$M_{01} = -28.84\text{kNm} \quad M_{02} = 31.88\text{kNm} \quad N_{Ed} = 2193.9\text{kN}$$

Ekvivalent første ordens moment beregnet etter likning (M.2):

$$\begin{aligned} M_{0Ed} &= 0.6 \cdot 31.88 + 0.4 \cdot -28.84 \geq 0.4 \cdot 31.88 \\ M_{0Ed} &= 7.59 < 12.75 \end{aligned}$$

Nominellt andre ordens moment beregnet etter likning (M.3):

$$M_2 = 2193.9 \cdot 9.18 \cdot 10^{-3} = 20.14\text{kNm}$$

Dimensjonerende bøyemoment beregnet etter likning (M.1):

$$M_{Ed} = 12.75 + 20.14 = 32.89\text{kNm}$$

### M.4 Forskyvelig dobbeltkrum søyle

Første ordens lastvirkninger i søylen er hentet fra rammeprogrammet i Matlab:

$$M_{01} = 1.85\text{kNm} \quad M_{02} = 1.85\text{kNm} \quad N_{Ed} = 2187.9\text{kN}$$

Ekvivalent første ordens moment beregnet etter likning (M.2):

$$\begin{aligned} M_{0Ed} &= 0.6 \cdot 1.85 + 0.4 \cdot 1.85 \geq 0.4 \cdot 1.85 \\ M_{0Ed} &= 1.85 > 0.74 \end{aligned}$$

Nominellt andre ordens moment beregnet etter likning (M.3):

$$M_2 = 2187.9 \cdot 36.92 \cdot 10^{-3} = 80.78\text{kNm}$$

Dimensjonerende bøyemoment beregnet etter likning (M.1):

$$M_{Ed} = 1.85 + 80.78 = 82.63\text{kNm}$$

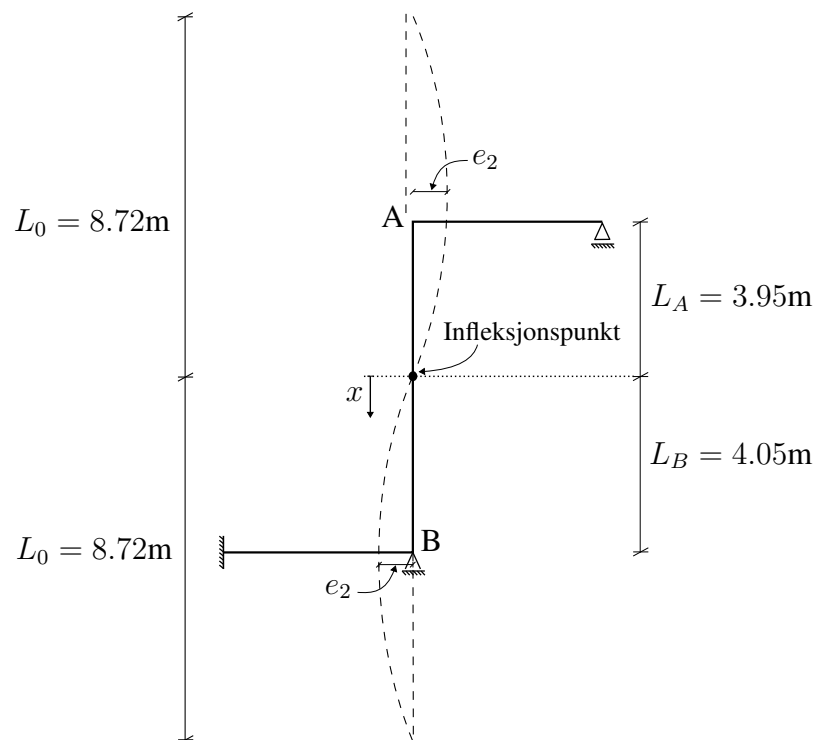




## Vedlegg N

# Beregning av 2.ordens momenter etter rotasjonsinnspenningsgrad

### N.1 Forskyvelig enkeltkrum søyle



Figur N.1: Tilleggsutbøyning for en forskyvelig enkeltkrum søyle

### 1.ordens moment:

Fra rammeprogrammet i vedlegg H finnes en konstant 1.ordens momentfordeling  $M_1 = 11.62 \text{ kNm}$ . (Strekk på venstre side av søylen)

### 2.ordens moment:

INS 3473 står det at for søyler med forskyvelige ender kan 2.ordens tilleggseksentrisitet antas å ha en sinusfordeling over knekk lengden  $L_0$ . Dette betyr at 2.ordens momentbidrag kan skrives som:

$$M_2(x) = N \cdot e_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right)$$

Hvor  $x$  starter i infleksjonspunktet, som vist i Figur N.1.

Normalkraften er hentet fra rammeprogrammet:  $N = 2189.8 \text{ kN}$ .

2.ordens tilleggsutbøyning  $e_2$ , har blitt beregnet i EC2 og funnet som  $e_2 = 36.92 \text{ mm}$ .

Dette gir et 2.ordens tilleggsmoment:

$$\begin{aligned} M_2(x) &= 2189.8 \cdot 36.92 \cdot 10^{-3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right) \\ &= 80.825 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right) \end{aligned}$$

### Totalt moment:

$$M_{tot}(x) = 11.62 + 80.825 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right)$$

### Maksmoment:

Det totale momentet deriveres for å finne avstanden  $x$  til maksmomentet:

$$\begin{aligned} M'_{tot}(x) &= 80.825 \cdot \frac{\pi}{L_0} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right) = 0 \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\pi}{L_0} \cdot x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{L_0}{2} = 4.36 \text{ m} \end{aligned}$$

Dette punktet ligger utenfor søyleende B. Derfor settes  $x$  lik  $L_B$ ,  $x = 4.05 \text{ m}$ .

$$M_{max} = M_{tot}(4.05) = 11.62 + 80.825 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot 4.05\right) = 91.94 \text{ kNm}$$

## N.2 Forskyvelig dobbeltkrum søyle

Tilleggsutbøyningen  $e_2$  er uavhengig av om rammen er enkelt- eller dobbeltkrum. Derfor vil tilleggsutbøyningen være uforandret for denne rammen,  $e_2 = 36.92 \text{ mm}$ .

### 1.ordens moment:

Fra rammeprogrammet finnes en konstant 1.ordens momentfordeling  $M_1 = 1.85 \text{ kNm}$ . (Strekk på venstre side av søylen)

### 2.ordens moment:

Normalkraften er hentet fra rammeprogrammet:  $N = 2187.9 \text{ kN}$ .

Dette gir et 2.ordens tilleggsmoment:

$$\begin{aligned} M_2(x) &= 2187.9 \cdot 36.92 \cdot 10^{-3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right) \\ &= 80.777 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right) \end{aligned}$$

### Totalt moment:

$$M_{tot}(x) = 1.85 + 80.777 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot x\right)$$

### Maksmoment:

Maksmomentet opptrer i samme snitt (ende B) som i forrige eksempel,  $x = 4.05 \text{ m}$ . Dette er fordi kneklengder og infleksjonspunkter er uavhengig av om søylen er enkelt- eller dobbeltkrum.

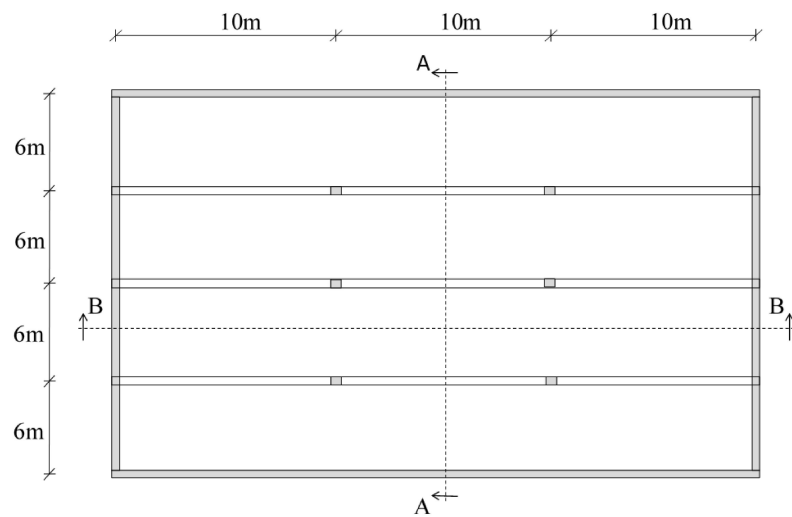
$$M_{max} = M_{tot}(4.05) = 1.85 + 80.777 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \cdot 4.05\right) = 82.12 \text{ kNm}$$



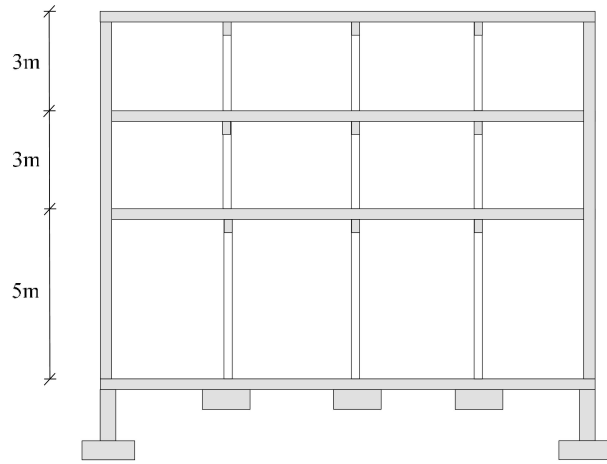
# Vedlegg O

## Eksempelbygg

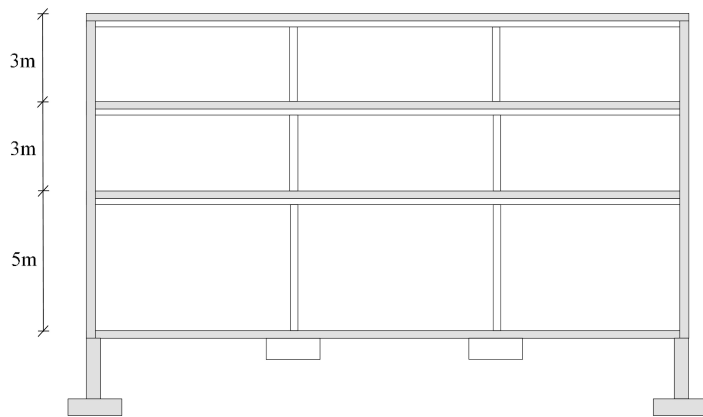
### O.1 Bæresystem



Figur O.1: Plan - alle etasjer



Figur O.2: Snitt A-A



Figur O.3: Snitt B-B

## O.2 Variable laster

### O.2.1 Nyttelaster

Nyttelaster er funnet gjennom NS EN 1991-1-1 [9].

Tabell NA 6.2:

- Kontorarealer (kategori B)  $\Rightarrow q_k = 3.0\text{kN/m}^2$

Tabell NA 6.10:

- Tak (kategori H)  $\Rightarrow q_k = 0.75\text{kN/m}^2$

### O.2.2 Snølast

Snølasten er funnet gjennom NS EN 1991-1-3 [10].

Ifølge punkt 5.2(3) er snølasten definert som:

$$s = \mu_i \cdot C_e \cdot C_t \cdot s_k$$

Hvor  $C_e$  og  $C_t$  settes lik 1.

Tabell 5.2:

- Flatt tak  $\Rightarrow$  Formfaktor  $\mu_1 = 0.8$

NA.4.1:

Karakteristisk snølast på mark er definert som:

$$s_k = s_{k,0} + n \cdot \Delta s_k$$

Hvor  $n = (H - H_g)/100$ , der  $n$  rundes oppover til nærmeste heltall.

Det antas at bygningen befinner seg på Lian i Trondheim kommune og at tomten ligger på en høyde,  $H = 300$  m.o.h.

Tabell NA.4.1(901):

- $s_{k,0} = 3.5\text{kN/m}^2$
- $H_g = 150$  m
- $\Delta s_k = 1.0\text{kN/m}^2$

Dette gir en faktor  $n = 2$  slik at den karakteristiske snølasten på mark blir  $s_k = 5.5 \text{ kN/m}^2$ . Dermed blir den karakteristiske snølasten lik:

$$s = 0.8 \cdot 5.5 = 4.4 \text{ kN/m}^2$$

### O.2.3 Vindlast

Vindlasten på taket er funnet gjennom NS EN 1991-1-4 [11].

Ifølge punkt 5.2 er vindlasten definert som summen av vindtrykket på de utvendige og innvendige overflatene i bygget:

$$\begin{aligned} w &= w_e - w_i \\ &= q_p(z) \cdot (c_{pe} - c_{pi}) \end{aligned}$$

Hvor  $c_{pe}$  og  $c_{pi}$  er henholdsvis utvendig og innvendig formfaktor, og  $q_p(z)$  er vindtrykket.

Tabell 7.2:

$$- c_{pe,1} = 0.2 \text{ (trykk)}$$

Her er det antatt skarpe takavslutninger for det flate taket.

Ifølge merknaden i punkt 7.2.9(6) kan den innvendige formfaktoren settes som,  $c_{pi} = -0.3$  (undertrykk).

Veiledningen bakerst i NS EN 1991-1-4 gir en formel for vindtrykket. I formelen settes alle tilleggsfaktorer lik 1.0, slik at bestemmelsen for vindtrykket kan skrives som:

$$q_p(z) = q_{p,0}(z)$$

Hvor  $q_{p,0}(z)$  er vindkasthastighetstrykket.

Tabell NA.4(901.1):

$$- v_{b,0} = 26 \text{ m/s (Trondheim)}$$

Tabell 4.1:

$$- \text{Terrengkategori III} \Rightarrow z_{min} = 5 \text{ m}$$



Referansehøyden settes lik høyden på bygget:  $z = 11\text{m} > z_{min}$

Figur V.1 c):

$$- q_{p0}(z) \simeq 0.79\text{kN/m}^2$$

Dermed blir den karakteristiske vindlasten på taket lik:

$$w_k = q_p(z) \cdot (c_{pe} - c_{pi}) = 0.79 \cdot (0.2 - (-0.3)) = 0.4\text{kN/m}^2$$

## O.3 Dimensjonering av taket

### O.3.1 Laster

Last fra takteking:

Lasten fra taktekingen består i hovedsak av et 10cm tykt lag med grov grus (tyngdetetthet lik  $20\text{ kN/m}^3$ ), samt et lite lasttillegg fra resterende materialer brukt til teking. Lasttillegget er antatt til å være  $0.5\text{kN/m}^2$ . Samlet gir dette en karakteristisk egenlast lik:

$$g_{k,teking} = 0.1\text{m} \cdot 20\text{kN/m}^3 + 0.5\text{kN/m}^2 = 2.5\text{kN/m}^2$$

Egenlast til tak:

Fra overslagsberegninger antas en tykkelse til taket,  $h = 160\text{mm}$ . Dette gir en karakteristisk egenlast lik:

$$g_{k,tak} = 25\text{kN/m}^3 \cdot 0.16\text{m} = 4.0\text{ kN/m}^2$$

Dimensjonerende laster er funnet gjennom NS EN 1990 [12].

Verdier for  $\psi$  - faktorer: Tabell NA.A1.1

- Snølast  $\Rightarrow \psi_0 = 0.7$
- Vindlast  $\Rightarrow \psi_0 = 0.6$
- Kategori H: tak  $\Rightarrow \psi_0 = 0$

### Dimensjonerende laster: Tabell NA.A1.2(B)

Likning 6.10a: (Egenlast dominerer)

$$\begin{aligned}q_d &= 1.35 \cdot (g_{k,tak} + g_{k,tekkning}) + 1.05 \cdot s_k + 0 \cdot q_k + 0.9 \cdot w_k \\&= 1.35 \cdot 6.5 + 1.05 \cdot 4.4 + 0.9 \cdot 0.4 \\&= 8.775 + 4.62 + 0.36 \\&= 13.8\text{kN/m}^2\end{aligned}$$

Likning 6.10b: (Snølast dominerer)

$$\begin{aligned}q_d &= 1.2 \cdot (g_{k,tak} + g_{k,tekkning}) + 1.5 \cdot s_k + 0 \cdot q_k + 0.9 \cdot w_k \\&= 1.2 \cdot 6.5 + 1.5 \cdot 4.4 + 0.9 \cdot 0.4 \\&= 7.8 + 6.6 + 0.36 \\&= 14.8\text{kN/m}^2 \Rightarrow \text{Størst!}\end{aligned}$$

De dimensjonerende lastene blir dermed:

$$g_d = 7.8\text{kN/m}^2, s_d = 6.6\text{kN/m}^2 \text{ og } w_d = 0.36\text{kN/m}^2.$$

## **O.3.2 Lastvirkninger**

Taket bæres av ytterveggene og tre takbjelker. Disse oppleggene gjør at taket kan tolkes som en enveis plate som bærer laster på tvers av lengderetningen. Dette gjør at det statiske systemet for taket blir en fire-felts bjelke.

Med en variabel snø- og vindlast på taket, kan en rekke ulike lasttilfeller være aktuelle ved dimensjonering. Figur O.4 viser de ulike lasttilfellene som er aktuelle for å finne maksimalverdier av både momenter og skjærkrefter i taket.

Lasttilfellene 4, 5 og 6 blir først aktuelle når takbjelkene skal dimensjoneres. Derfor er de største opplagerkreftene regnet ut for disse lasttilfellene.

Når det gjelder verdiene på de maksimale kreftene i figuren, er disse funnet gjennom tradisjonelle statikkberegninger og kontrollert opp imot den tyske betongkalenderen [14].

Last-tilfelle	System og last	Maksimale krefter
1		$M_B = 60.3 \text{ kNm/m}$ $V_B = 54.3 \text{ kN/m}$
2		$M_C = 46.9 \text{ kNm/m}$ $V_C = 45.6 \text{ kN/m}$
3		$M_1 = 46.4 \text{ kNm/m}$ $M_3 = 30.4 \text{ kNm/m}$ $V_A = 37.0 \text{ kN/m}$
4		$R_B = 53.5 \text{ kN/m}$ $R_C = 43.5 \text{ kN/m}$
5		$R_B = 51.1 \text{ kN/m}$
6		$R_C = 47.7 \text{ kN/m}$

Figur O.4: Dimensjonerende lastvirkninger for taket

### O.3.3 Dimensjonering av tak for moment

Overdekning: EC2, 4.4.1.1(2)

Tabell 4.1:

Velger eksponeringsklasse XC2 (vått, sjeldent tørt)

4.4.1.1(2):

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev}$$

Hvor  $c_{min} = \max\{c_{min,b}; c_{min,dur}; 10\text{mm}\}$ .

Tabell NA.4.4N:

$c_{min,dur} = 25\text{mm}$  (50 års dimensjonerende brukstid)

Tabell NA.4.2:

$c_{min,b} = \max\{\text{Stangdiameter}; 10\text{mm}\}$  (Blir ikke aktuell)

NA.4.4.1.3:

$$\Delta c_{dev} = 10\text{mm}$$

Dette gir et overdekningskrav til taket lik:

$$c_{nom} = 25 + 10 = 35\text{mm}$$

Effektiv høyde:

Antar strekkarmering  $\text{Ø}12$  over støtte og i felt:

$$d = h - c - \text{Ø}/2 = 160 - 35 - 6 = 119\text{mm}$$

Dimensjonerende momenter:

Betrakter 1m bred stripe av taket:

Dimensjonerende støttemoment:  $M_{Ed} = 60.3\text{kNm}$  (lasttilfelle 1)

Dimensjonerende feltmoment:  $M_{Ed} = 46.4\text{kNm}$  (lasttilfelle 3)

Betongtrykksjonens momentkapasitet:

Med et normalarmert tverrsnitt, som er vanlig praksis i Norge, blir betongtrykksjonens dimensjonerende momentkapasitet lik:

$$\begin{aligned}
 M_{Rd} &= 0.275 \cdot f_{cd} \cdot bd^2 \\
 &= 0.275 \cdot 17 \cdot 1000 \cdot 119^2 \cdot 10^{-6} = 66.2 \text{ kNm} \\
 M_{Rd} &> M_{Ed} \Rightarrow OK
 \end{aligned}$$

#### Nødvendig armering:

For både felt- og støttemomentet er betongens trykksone delvis utnyttet. Uttrykket for den indre momentarmen  $z$  er vist i Sørensen [5] og skrives som:

$$z = \left(1 - c \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}\right) d$$

For henholdsvis støtte- og feltmomentet blir den indre momentarmen lik:

$$\begin{aligned}
 z_{støtte} &= \left(1 - 0.17 \cdot \frac{60.3}{66.2}\right) \cdot 119 = 100.6 \text{ mm} \\
 z_{felt} &= \left(1 - 0.17 \cdot \frac{46.4}{66.2}\right) \cdot 119 = 104.8 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Dette gir en nødvendig mengde strekkarmering lik:

$$\begin{aligned}
 A_{s,støtte} &= \frac{M_{Ed,støtte}}{f_{yd} \cdot z_{støtte}} = \frac{60.3 \cdot 10^6}{434 \cdot 100.6} = 1381 \text{ mm}^2 \\
 A_{s,felt} &= \frac{M_{Ed,felt}}{f_{yd} \cdot z_{felt}} = \frac{46.4 \cdot 10^6}{434 \cdot 104.8} = 1020 \text{ mm}^2
 \end{aligned}$$

#### Minste og største armeringsmengde: EC2, 9.3.1.1

$$\begin{aligned}
 A_{s,min} &= 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b_t d, \text{ men ikke mindre enn } 0.0013 b_t d \\
 &= 0.26 \cdot \frac{2.9}{500} \cdot 1000 \cdot 119 = 179 \text{ mm}^2 > 154.7 \text{ mm}^2 \Rightarrow OK
 \end{aligned}$$

$$A_{s,max} = 0.04 \cdot A_c = 0.04 \cdot 1000 \cdot 160 = 6400 \text{ mm}^2$$

Valgte armeringsmengder:

Støtte:  $\text{Ø}12\text{s}70 \Rightarrow A_{s,\text{støtte}} = 1615\text{mm}^2$

Felt:  $\text{Ø}12\text{s}100 \Rightarrow A_{s,\text{felt}} = 1130\text{mm}^2$

Legger minimumsarmering på motsatt side av strekkarmeringene:

Velger  $\text{Ø}12\text{s}330 \Rightarrow A_{s,\text{min}} = 343\text{mm}^2$

EC2, 9.3.1.1(2):

Det legges en fordelingsarmering i tverretning som ikke utgjør mindre enn 20% av hovedarmeringen i enveis plater.

Fordelingsarmering over støtte:

$$A_{s,\text{tverr,støtte}} = 0.2 \cdot 1615 = 323\text{mm}^2 > A_{s,\text{min}}$$

Fordelingsarmering i felt:

$$A_{s,\text{tverr,felt}} = 0.2 \cdot 1130 = 226\text{mm}^2 > A_{s,\text{min}}$$

Velger  $\text{Ø}12\text{s}330$  i felt og over støtte.  $\Rightarrow A_{s,\text{tverr}} = 343\text{mm}^2$

Kontrollerer senteravstanden mellom stengene:

Ifølge EC2, 9.3.1.1(3) bør senteravstanden mellom armeringstengene ikke overskride  $S_{\text{max,slab}}$ . I områder med maksimalt moment (felt og støtte) settes  $S_{\text{max,slab}}$  lik:

- $2h \leq 250\text{mm}$  for hovedarmering
- $3h \leq 400\text{mm}$  for fordelingsarmering

Dette gir verdier for  $S_{\text{max,slab}}$  lik:

- $2 \cdot 160 = 320\text{mm} > 250\text{mm} \Rightarrow S_{\text{max,slab,hoved}} = 250\text{mm} \Rightarrow \text{OK}$
- $3 \cdot 160 = 480\text{mm} > 400\text{mm} \Rightarrow S_{\text{max,slab,fordeling}} = 400\text{mm} \Rightarrow \text{OK}$

Kontroll av lengdearmering med Iterasjonsmetoden

For å kontrollere hvor høyt utnyttet taket er med den valgte armeringen, legges tverrsnittsdata og valgt lengdearmering inn i iterasjonsprogrammet som beregner utnyttelse. Resultatene fra denne analysen er:

Støtte:

Utnyttelse av strekkarmering: 88.3%

Utnyttelse av betong: 49.2%

Felt:

Utnyttelse av strekkarmering: 93.7%

Utnyttelse av betong: 40.1%

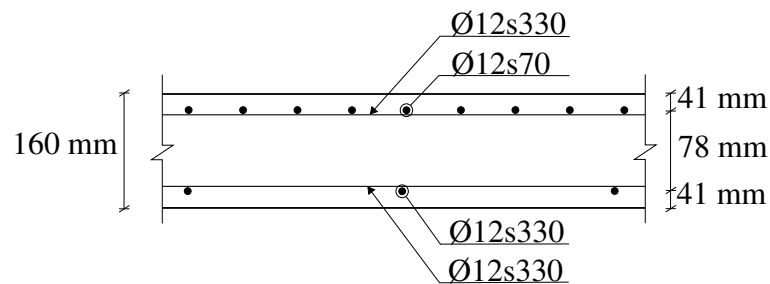
Hverken betong eller strekkarmering er fullt utnyttet, noe som er forventet siden den valgte armeringen ligger litt over nødvendig armeringsmengde.

### O.3.4 Dimensjonering av tak for skjær

Ifølge EC2, 9.3.2(1) trenger ikke plater med en tykkelse på under 200mm å skjærarmes.

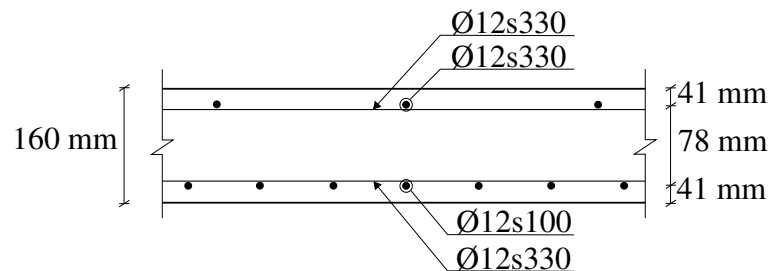
### O.3.5 Armeringstegninger

Støtte:



Figur O.5: Armering for maksimalt støttemoment

Felt:



Figur O.6: Armering for maksimalt feltmoment

## O.4 Dimensjonering av takbjelker

### O.4.1 Laster

Siden bjelkene er plassert symmetrisk, er belastningen lik i bjelke B og D i Figur O.4. Lasten i bjelke C er noe lavere, men siden forskjellen er såpass liten, er det valgt å bruke samme dimensjon og armering også for bjelke C. I dimensjoneringen vil det derfor kun bli sett på lastene som tas opp av bjelke B og D.

#### Laster fra tak

Lastene fra taket er hentet fra Figur O.4. Lasttilfelle 5 gir størst snølast inn i bjelke B, mens egenlast fra taket som tas opp av bjelke B, er gitt i lasttilfelle 4.

Snø og vindlast: 51.1 kN/m

Egenlast fra tak: 53.5 kN/m

#### Egenvekt av bjelke

Egenlast fra bjelke:  $0.43\text{m} \cdot 0.65\text{m} \cdot 25\text{kN/m}^3 \cdot 1.2 = 8.4 \text{ kN/m}$

Det er her benyttet bjelkedimensjoner 430x650 mm og lastfaktor 1.2 (snølast dominerer).

#### Dimensjonerende laster

$g_d$ :  $53.5 + 8.4 = 61.9 \text{ kN/m}$

$q_d$ : 51.1 kN/m

### O.4.2 Lastvirkninger

Den statiske modellen er en trefelts bjelke med spenn på 10 meter. Snø og vindlast er variable laster og plasseres feltvis avhengig av hva som gir størst dimensjonerende lastvirkninger.

#### Dimensjonerende momenter

Støttemoment:  $(0.10g_d + 0.117 \cdot q_d) \cdot L^2$   
 $(0.10 \cdot 61.9 + 0.117 \cdot 51.1) \cdot 10^2 = 1216.9 \text{ kNm}$

Feltmoment:  $(0.08 \cdot g_d + 0.101 \cdot q_d) \cdot L^2$   
 $(0.08 \cdot 61.9 + 0.101 \cdot 51.1) \cdot 10^2 = 1011.3 \text{ kNm}$



### Dimensjonerende krefter

$$\begin{aligned} \text{Oppleggskraft: } & (1.1g_d + 1.2 \cdot q_d) \cdot L \\ & (1.1 \cdot 61.9 + 1.2 \cdot 51.1) \cdot 10 = 1294.1 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Skjærkraft: } & (0.4 \cdot g_d + 0.383 \cdot q_d) \cdot L - (g_d + q_d) \cdot L \\ & (0.4 \cdot 61.9 + 0.383 \cdot 51.1) \cdot 10 - (61.9 + 51.1) \cdot 10 = 686.7 \text{ kN} \end{aligned}$$

Formlene benyttet ovenfor er hentet fra tilfellet med en trefelts bjelke i Stålkonstruksjoner - Profiler og formler [15].

## **O.4.3 Dimensjonering av bjelke for moment**

Overdekning: EC2, 4.4.1.2

Bjelken befinner seg inne i bygningen og det velges derfor eksponeringsklasse XC1 (tørt eller permanent vått). Med armeringsstenger Ø32 blir minste tillatte overdekning lik 42 mm.

Avstand mellom armeringslag: EC2, 8.2.(2)

Fri avstand mellom enkeltstenger bør ikke være mindre enn:

$$a_{min} = \max(k_1 \cdot \varnothing, d_g + k_2, 20\text{mm})$$

I denne oppgaven blir det sett bort ifra kravet med  $d_g$  siden tilslagsstørrelsen ikke er gitt. Ifølge NA.8.2 kan faktoren  $k_1$  settes lik 2.0 for stenger i samme lag og 1.5 for avstand mellom ulike lag. Avstand mellom armeringsstengene kan da beregnes som:

$$\text{Horisontalt: } a_{h,min} = \max(2.0 \cdot 32, 20) = 64\text{mm}$$

$$\text{Vertikalt: } a_{v,min} = \max(1.5 \cdot 32, 20) = 48\text{mm}$$

Vertikale lag plasseres derfor med en senteravstand på  $32 + 48 = 80$  mm

Effektiv høyde

For å få plass til nødvendig mengde strekkarmering, må armeringen plasseres i to lag. Den effektive høyden blir derfor beregnet i senter av disse to lagene.

$$d_1 = h - c - \varnothing_w - \frac{\varnothing}{2} = 650 - 42 - 12 - \frac{32}{2} = 580\text{mm}$$

$$d_2 = d_1 - 80 = 580 - 80 = 500\text{mm}$$

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{590 + 510}{2} = 540\text{mm}$$

### Betongtrykksonens momentkapasitet

$$\begin{aligned}M_{Rd} &= 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \\ &= 0.275 \cdot 17 \cdot 430 \cdot 540^2 = 586.2 \text{ kNm}\end{aligned}$$

### Nødvendig armering

Både i spennet og over støtten har betongtrykksonen for lav momentkapasitet til å ta hele det dimensjonerende momentet,  $M_{Ed} > M_{Rd}$ . Bjelken må derfor trykkarmeres. Trykkarmeringen plasseres med samme overdekning som strekkarmeringen, noe som gir følgende avstand mellom strekk- og trykkarmeringen:

$$h' = d - (c + \emptyset_w + \emptyset/2) = 540 - (42 + 12 + 32/2) = 470 \text{ mm}$$

Mengden strekkarmering som gir en fullt utnyttet trykksone er den samme både over støtten og i feltet, og beregnes som:

$$A_s = \frac{F_c}{f_{yd}} = \frac{0.8 f_{cd} b \alpha d}{f_{yd}} = \frac{0.8 \cdot 17 \cdot 430 \cdot 0.412 \cdot 540}{434} = 2998 \text{ mm}^2$$

Differansen mellom det dimensjonerende momentet og betongtrykksonens momentkapasitet må tas av tilleggsarmering både i strekk- og trykksone:

$$\text{Støtte: } A'_s = \frac{M_{Ed} - M_{Rd}}{h' \cdot f_{yd}} = \frac{(1216.9 - 586.2) \cdot 10^6}{470 \cdot 434} = 3092 \text{ mm}^2$$

$$\text{Felt: } A'_s = \frac{M_{Ed} - M_{Rd}}{h' \cdot f_{yd}} = \frac{(1011.3 - 586.2) \cdot 10^6}{470 \cdot 434} = 2084 \text{ mm}^2$$

Over støtten trengs det  $2998 + 3092 = 6090 \text{ mm}^2$  i strekkarmering og  $3092 \text{ mm}^2$  i trykkarmering. I feltet er nødvendig strekkarmering  $2998 + 2084 = 5082 \text{ mm}^2$  og nødvendig trykkarmering  $2084 \text{ mm}^2$ .

### Minste og største armeringsareal: EC2, NA.9.2.1.1

$$\begin{aligned}A_{s,min} &= 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} b d = 0.26 \cdot \frac{2.9}{500} \cdot 430 \cdot 540 \\ &= 0.001508 \cdot 430 \cdot 540 > 0.0013 b d \\ &= 350\text{mm}^2\end{aligned}$$

$$A_{s,max} = 0.04A_c = 0.04 \cdot 430 \cdot 650 = 11180\text{mm}^2$$

### Valgt armering:

Støtte:

Strekkarmering: 8 Ø32  $\Rightarrow A_{s,strekk} = 6434\text{mm}^2$

Trykkarmering: 4 Ø32  $\Rightarrow A_{s,trykk} = 3217\text{mm}^2$

Felt:

Strekkarmering: 7 Ø32  $\Rightarrow A_{s,strekk} = 5630\text{mm}^2$

Trykkarmering: 3 Ø32  $\Rightarrow A_{s,trykk} = 2413\text{mm}^2$

### Avstand mellom armeringsstenger:

$$a = \frac{b - 2c - 2\varnothing_w - n \cdot \varnothing}{n - 1} = \frac{430 - 2 \cdot 42 - 2 \cdot 12 - 4 \cdot 32}{4 - 1}$$

$$= 64.7\text{mm} > a_{h,min} \Rightarrow \text{Avstand OK}$$

### Kontroll av lengdearmering med Iterasjonsmetoden

Ved bruk av programmet for armeringsberegning fåes følgende nødvendige armeringsmengder:

Støtte:  $A_{s,strekk} = 6100\text{mm}^2$        $A_{s,trykk} = 3074\text{mm}^2$

Felt:  $A_{s,strekk} = 5094\text{mm}^2$        $A_{s,trykk} = 2067\text{mm}^2$

Armeringsmengdene beregnet med programmet stemmer godt overens med armeringen fra håndberegninger. Differansen i beregnet armeringsmengde ligger i alle tilfeller under 1%.

For å kontrollere hvor høyt utnyttet takbjelkene er med den valgte armeringen, legges tverrsnittsdata og valgt lengdearmering inn i iterasjonsprogrammet. Resultatene fra denne analysen er:

Støtte:

Utnyttelse av strekkarmering: 97.5%

Utnyttelse av betong: 69.7%

Felt:

Utnyttelse av strekkarmering: 92.8%

Utnyttelse av betong: 63.9%

Resultatene viser at bjelkene har tilstrekkelig kapasitet både over støtten og i feltet.

## O.4.4 Dimensjonering av bjelke for skjær

### Dimensjonerende skjærkraft

$$\begin{aligned} V_{Ed,red} &= V_{Ed} - (b_s/2 + d) \cdot (s_d + g_d) \\ &= 686.7 - (0.43/2 + 0.54) \cdot (51.1 + 61.9) = 601.4\text{kN} \end{aligned}$$

Hvor  $V_{Ed}$  er skjærkraften i senter av søylen og  $b_s$  er bredden av søylen som bjelken ligger på.

### Kapasitet uten skjærarmering, EC2, 6.2.2

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{540}} = 1.609$$

$$\rho = \frac{A_{sl}}{b_w d} = \frac{6434}{430 \cdot 540} = 0.0277 \leq 0.02$$

$$C_{Rd,c} = \frac{0.18}{\gamma_c} = \frac{0.18}{1.5} = 0.12$$

$$v_{min} = 0.035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2} = 0.035 \cdot 1.603^{3/2} \cdot 30^{1/2} = 0.389$$

$$\begin{aligned} V_{Rd,c} &= C_{Rd,c} k (100 \rho f_{ck})^{1/3} b d \\ &= 0.12 \cdot 1.609 \cdot (100 \cdot 0.02 \cdot 30)^{1/3} \cdot 430 \cdot 540 = 0.756 \cdot 430 \cdot 540 \\ &= 175.5\text{kN} \end{aligned}$$

$$V_{Rd,c} < V_{Ed,red} \Rightarrow \text{Må skjærarmere}$$

### Betongtrykksonens kapasitet, EC2, 6.2.3

$$\alpha_{cw} = 1.0$$

$$z = 0.9d = 0.9 \cdot 540 = 486\text{mm}$$

$$v_1 = 0.6 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] = 0.6 \left[ 1 - \frac{30}{250} \right] = 0.528$$

$$\cot\theta = 2.0$$

$$\begin{aligned} V_{Rd,max} &= \frac{\alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd}}{\cot\theta + \tan\theta} = \frac{1.0 \cdot 430 \cdot 486 \cdot 0.528 \cdot 17}{2.0 + 1/2.0} \\ &= 750.3\text{kN} > V_{Ed} \Rightarrow \text{Betongtrykk OK} \end{aligned}$$

### Beregning av skjærarmering, EC2, 6.2.3

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed,red}}{z f_{ywd} \cot\theta} = \frac{601.4 \cdot 10^3}{486 \cdot 434 \cdot 2.0} = 1.43\text{mm}^2/\text{mm}$$

### Minimumsarmering: EC2, 9.2.2(5)

$$\rho_{w,min} = 0.1 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} = 0.1 \cdot \frac{\sqrt{30}}{500} = 0.001095$$

$$\frac{A_{sw,min}}{s} = \rho_{w,min} \cdot b = 0.001095 \cdot 430 = 0.471\text{mm}^2/\text{mm}$$

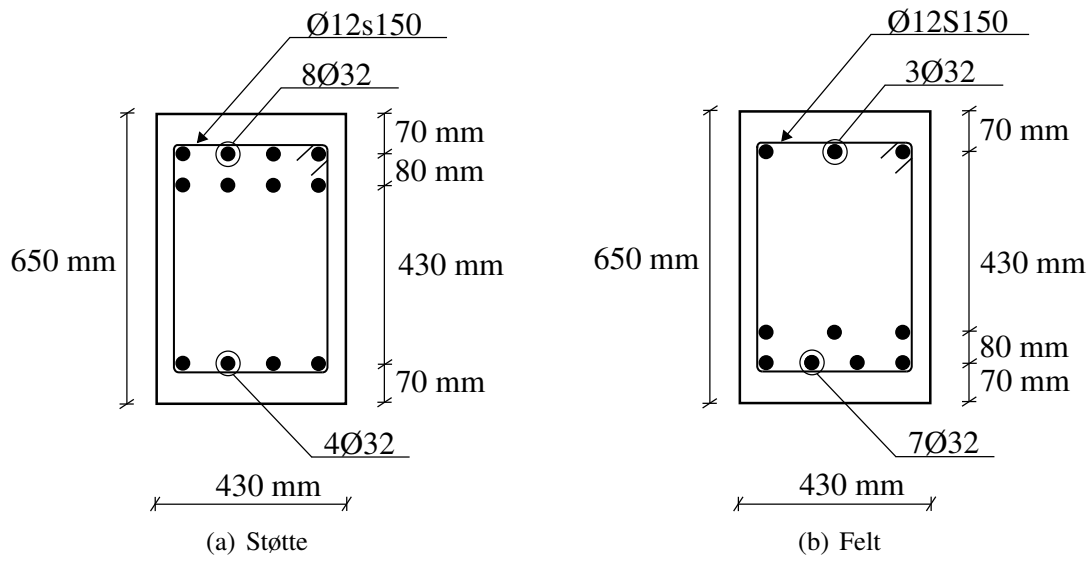
### Største senteravstand: EC2, NA.9.2.2(6)

$$s_{l,max} = \frac{0.6h'}{1 + \cot\alpha} = \frac{0.6 \cdot 486}{1 + 0} = 292\text{mm}$$

### Valgt armering:

$$\text{Velger } \text{Ø}12\text{s}150 \Rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = 1.51\text{mm}^2/\text{mm}.$$

## O.4.5 Armeringstegninger



Figur O.7: Armering for takbjelken over støtte og i felt

## 0.5 Dimensjonering av søyler i 3.etg.

### 0.5.1 Laster

Søylene i 3.etg. vil bli dimensjonert etter den største opplagerkraften fra takbjelkene:

$$N_{Ed} = 1294.1\text{kN}$$

Ifølge EC2, 6.1(4) skal det også tas hensyn til en minstreeksentrisitet for tverrsnitt påkjent av en trykkraft. Denne minsteeksentrisiteten er gitt som:

$$\begin{aligned} e_0 &= \max\{h/30, 20\text{mm}\} \\ &= \max\{430/30, 20\text{mm}\} = 20\text{mm} \end{aligned}$$

Dette gir et dimensjonerende moment i søylen lik:

$$M_{Ed} = 1294.1 \cdot 0.02 = 25.9\text{kNm}$$

### 0.5.2 Slanketskriterium

Ifølge EC2, 5.8.3.1(1) kan det sees bort fra andre ordens effekter i søylen hvis slankheten,  $\lambda$  er under en viss verdi,  $\lambda_{lim}$ .

Slankheten defineres på følgende måte:

$$\lambda = \frac{L_0}{i} = L_0 \cdot \sqrt{\frac{A}{I}}$$

Siden søylene virker som opplegg for takbjelkene, er det valgt at søylene skal ha samme bredde som disse,  $b = 430\text{mm}$ . Knekk lengden til den fritt opplagte søylen regnes som etasjehøyden minus høyden av både taket og takbjelken:

$$L_0 = 3000 - 160 - 650 = 2190\text{mm}$$

Dermed blir slankheten lik:

$$\lambda = 2190 \cdot \sqrt{\frac{430^2}{430^4/12}} = 17.64$$

### NA.5.8.3.1:

Betingelsen for at andre ordens beregning ikke kreves gjennomført, kan ansees oppfylt dersom:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n,lim}$$

der:

$$\lambda_{n,lim} = 13(2 - r_m)A_\varphi \text{ (for uforskyvelige søyler)}$$

$$r_m = M_{01}/M_{02} \text{ (forhold mellom minste og største 1.ordens stavendemoment)}$$

$$A_\varphi = 1.25/(1 + 0.2\varphi_{ef}) \leq 1$$

$$\lambda_n = \lambda(n/(1 + 2k_a\omega))^{1/2}$$

$$n = N_{Ed}/f_{cd}A_c$$

$$\omega = f_{yd}A_s/f_{cd}A_c$$

$$k_a = 1 \text{ (forenklet)}$$

### M-N diagram, vedlegg B:

For å finne relativ aksialkraft  $n$  og mekanisk armeringsforhold  $\omega$  benyttes M-N diagrammene i vedlegg B.

Armeringsplassering:

$$\frac{h'}{h} = \frac{430 - 2 \cdot 35 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 12.5}{430} = 0.73 \simeq 0.7$$

Har her antatt Ø25 for lengdearmeringen og Ø10 for tverrarmeringen i søylen. Med Ø25 som lengdearmering blir overdekningen  $c = 35\text{mm}$ .

Relativ aksialkraft:

$$n = \frac{1294.1 \cdot 10^3}{17 \cdot 430^2} = 0.41$$

Relativt moment:

$$m = \frac{25.9 \cdot 10^6}{17 \cdot 430^3} = 0.019$$

Avlesning fra M-N diagrammet viser at søylen har svært stor kapasitet og ikke trengs å armeres ( $\omega = 0$ ). Likevel skal søylen minimumsarmeres etter Eurokode 2.



### NA.9.5.2:

Lengdearmeringen bør ikke ha mindre diameter enn  $\varnothing_{min} = 10\text{mm}$ , og bør ikke ha et samlet tverrsnittsareal mindre enn:

$$\begin{aligned} A_{s,min} &= \frac{0.2A_c f_{cd}}{f_{yd}} \leq \frac{0.5N_{Ed}}{f_{yd}}, \text{ men ikke mindre enn } 0.01A_c \\ &= \left\{ \frac{0.2 \cdot 430^2 \cdot 17}{434} \leq \frac{0.5 \cdot 1294.1 \cdot 10^3}{434} \right\} \geq 0.01 \cdot 430^2 \\ \Rightarrow A_{s,min} &= 1848\text{mm}^2 \end{aligned}$$

Lengdearmeringen bør heller ikke ha et større samlet tverrsnittsareal enn:

$$A_{s,max} = 0.04 \cdot A_c = 0.04 \cdot 430^2 = 7396\text{mm}^2$$

Velger lengdearmering 4Ø25  $\Rightarrow A_s = 1963\text{mm}^2$ .

Nytt mekanisk armeringsforhold:

$$\omega = \frac{434 \cdot 1963}{17 \cdot 430^2} = 0.27$$

Normalisert slankhet:

$$\lambda_n = 17.64 \cdot \left( \frac{0.41}{1 + 2 \cdot 1 \cdot 0.27} \right)^{1/2} = 9.1$$

Med  $r_m = 1$  samt neglisjering av kryp ( $A_\varphi = 1.0$ ), blir  $\lambda_{lim}$  lik:

$$\lambda_{lim} = 13 \cdot (2 - 1) \cdot 1 = 13$$

$\lambda_n < \lambda_{lim} \Rightarrow$  2.ordens beregning er ikke nødvendig

### O.5.3 Armeringsberegninger

Valgt lengdearmering er armeringsmengden som allerede er regnet ut på forrige side,  
 $\Rightarrow 4\text{Ø}25$ .

NA.9.5.3:

Tverrarmeringens diameter bør ikke være mindre enn 6mm, og største senteravstand mellom tverrarmeringen settes lik:

$$\begin{aligned} S_{cl,tmax} &= \min\{15 \cdot \text{Ø}_{lengdearm} ; \text{søylens minste tverrsnittsdim} ; 400\text{mm}\} \\ &= \min\{15 \cdot 25 ; 430 ; 400\text{mm}\} = 375\text{mm} \end{aligned}$$

Velger tverrarmering Ø10s370.

#### Kontroll av lengdearmering med Iterasjonsmetoden

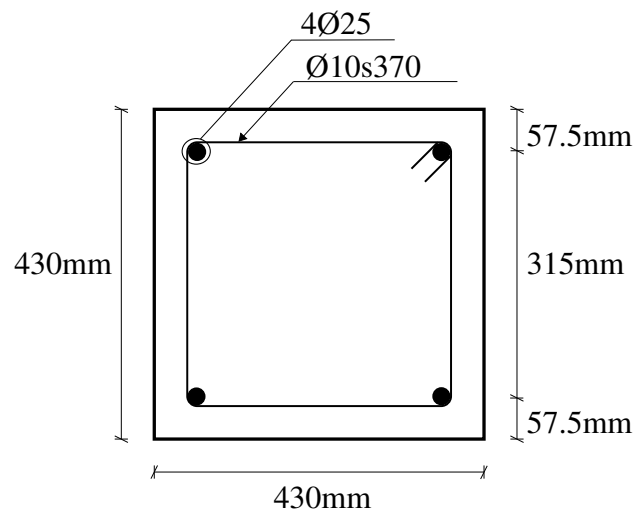
Med den valgte armeringen kan utnyttelsen av søyletverrsnittet beregnes med iterasjonsprogrammet:

Utnyttelse av strekkarmering: 14.7%

Utnyttelse av betong: 14.8%

Tverrsnittet er svært lavt utnyttet. Med de store tverrsnittsdimensjonene er det kun krav til minimumsarmering i søylen, derfor er det ikke uventet at tverrsnittet har stor kapasitet.

## O.5.4 Armeringstegning



Figur O.8: Armering av søyler i 3.etg. av rammebygget

## O.6 Dimensjonering av hulldekker

### O.6.1 Laster

I tillegg til sin egen vekt må hulldekkene bære nyttelast og en påstøp med en selvutjev-  
nende masse. Påstøpen antas å være 20mm tykk og å ha en tyngdetetthet lik  $25 \text{ kN/m}^3$ .

$$\begin{aligned} \text{Påstøp:} & \quad 0.02\text{m} \cdot 25\text{kN/m}^3 = 0.5\text{kN/m}^2 \\ \text{Nyttelast, kontor:} & \quad 3.0\text{kN/m}^2 \end{aligned}$$

### O.6.2 Valg av hulldekke

Dimensjon på hulldekkene er valgt fra Figur A 4.2 i Betongelementboken bind A [13].  
Ved bruk av figuren skal det benyttes en bruksgrenselast beregnet som:

$$\begin{aligned} q_k &= 0.90g_k + p_k \\ &= 0.90 \cdot 0.5 + 3.0 = 3.45\text{kN/m}^2 \end{aligned}$$

Hvor  $p_k$  er nyttelasten og  $g_k$  er egenlast fra påstøpen. Hulldekkenes egentvekt er det tatt  
hensyn til i figuren og skal ikke tas med i utregningen.

Med en bruksgrenselast på  $3.45\text{kN/m}^2$  og spennvidder på 6 meter viser figuren at det  
er tilstrekkelig med en høyde  $h = 200\text{mm}$  på hulldekkene. Egenvekten av hulldekker  
er oppgitt i Tabell A 4.2 i Betongelementboken bind A. For 200mm høye hulldekker er  
egenvekt av fuget dekke lik  $2.6 \text{ kN/m}^2$ .

## O.7 Dimensjonering av gulvbjelker

### O.7.1 Laster

#### Last fra hulldekker

Nyttelast:	3.0 kN/m <sup>2</sup>
Egenlast fra hulldekker :	2.6 kN/m <sup>2</sup>
Egenlast fra påstøp:	0.5 kN/m <sup>2</sup>

Hulldekkene spenner 6 meter og er fritt opplagt på bjelkene, lastbredden vil derfor være 6 meter for alle de tre bjelkene. Linjelasten fra hulldekkene i hver bjelke blir da:

$$\begin{aligned}\text{Nyttelast: } & 3.0 \cdot 6 & = 18 \text{ kN/m} \\ \text{Egenlast: } & (2.6 + 0.5) \cdot 6 & = 18.6 \text{ kN/m}\end{aligned}$$

#### Egenvekt av bjelke

$$\text{Egenlast fra bjelke: } 0.34\text{m} \cdot 0.52\text{m} \cdot 25\text{kN/m}^3 = 4.42 \text{ kN/m}$$

Det er her benyttet bjelkedimensjoner 320x520 mm

#### Dimensjonerende laster: NS-EN 1990 [12], Tabell NA.A1.2(B)

Likning 6.10a: (Egenlast dominerer)

$$\begin{aligned}q_d &= 1.35 \cdot g_k + 1.05 \cdot q_k \\ &= 1.35 \cdot (18.6 + 4.42) + 1.05 \cdot 18 \\ &= 31.1 + 18.9 \\ &= 50.0\text{kN/m}\end{aligned}$$

Likning 6.10b: (Nyttelast dominerer)

$$\begin{aligned}q_d &= 1.2 \cdot g_k + 1.5 \cdot q_k \\ &= 1.2 \cdot (18.6 + 4.42) + 1.5 \cdot 18 \\ &= 27.6 + 27 \\ &= 54.6\text{kN/m} \Rightarrow \text{Størst!}\end{aligned}$$

De dimensjonerende lastene blir dermed:

$$g_d = 27.6\text{kN/m} \text{ og } q_d = 27\text{kN/m}$$

## O.7.2 Lastvirkninger

### Dimensjonerende momenter

$$\begin{aligned} \text{Støttemoment: } & (0.10g_d + 0.117 \cdot q_d) \cdot L^2 \\ & (0.10 \cdot 27.6 + 0.117 \cdot 27) \cdot 10^2 = 591.9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Feltmoment: } & (0.08 \cdot g_d + 0.101 \cdot q_d) \cdot L^2 \\ & (0.08 \cdot 27.6 + 0.101 \cdot 27) \cdot 10^2 = 493.5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

### Dimensjonerende krefter

$$\begin{aligned} \text{Oppleggskraft: } & (1.1g_d + 1.2 \cdot q_d) \cdot L \\ & (1.1 \cdot 27.6 + 1.2 \cdot 27) \cdot 10 = 627.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Skjærkraft: } & (0.4 \cdot g_d + 0.383 \cdot q_d) \cdot L - (g_d + q_d) \cdot L \\ & (0.4 \cdot 27.6 + 0.383 \cdot 27) \cdot 10 - (27.6 + 27) \cdot 10 = 332.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

## O.7.3 Dimensjonering av bjelke for moment

### Bjelkens effektive høyde

For å få plass til nødvendig mengde strekkarmering må armeringen plasseres i to lag. Den effektive høyden blir derfor beregnet i senter av disse to lagene.

$$d_1 = h - c - \varnothing_w - \frac{\varnothing}{2} = 520 - 42 - 12 - \frac{32}{2} = 450 \text{ mm}$$

$$d_2 = d_1 - 80 = 450 - 80 = 370 \text{ mm}$$

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{450 + 370}{2} = 410 \text{ mm}$$

### Betongtrykksonens momentkapasitet

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= 0.275 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \\ &= 0.275 \cdot 17 \cdot 340 \cdot 410^2 = 267.2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

### Nødvendig armering

Både i spennet og over støtten har betongtrykksonen for lav momentkapasitet til å ta hele det dimensjonerende momentet,  $M_{Ed} > M_{Rd}$ . Bjelken må derfor trykkarmeres.

Trykkarmeringen plasseres med samme overdekning som strekkarmeringen, noe som gir følgende avstand mellom strekk- og trykkarmeringen:

$$h' = d - (c + \varnothing_w + \varnothing/2) = 410 - (42 + 12 + 32/2) = 340\text{mm}$$

Mengden strekkarmering som gir en fullt utnyttet trykksone er den samme både over støtten og i feltet, og beregnes som:

$$A_s = \frac{F_c}{f_{yd}} = \frac{0.8 f_{cd} b \alpha d}{f_{yd}} = \frac{0.8 \cdot 17 \cdot 340 \cdot 0.412 \cdot 410}{434} = 1800\text{mm}^2$$

Differansen mellom det dimensjonerende momentet og betongtrykksoneens momentkapasitet må tas av tilleggsarmering både i strekk- og trykksone:

$$\text{Støtte: } A'_s = \frac{M_{Ed} - M_{Rd}}{h' \cdot f_{yd}} = \frac{(591.9 - 267.2) \cdot 10^6}{340 \cdot 434} = 2200\text{mm}^2$$

$$\text{Felt: } A'_s = \frac{M_{Ed} - M_{Rd}}{h' \cdot f_{yd}} = \frac{(493.5 - 267.2) \cdot 10^6}{340 \cdot 434} = 1534\text{mm}^2$$

Over støtten trengs det  $1800 + 2200 = 4000\text{mm}^2$  i strekkarmering og  $2200\text{mm}^2$  i trykkarmering. I feltet er nødvendig strekkarmering  $1800 + 1534 = 3334\text{mm}^2$  og nødvendig trykkarmering  $1534\text{mm}^2$ .

Minste og største armeringsareal: EC2, NA.9.2.1.1

$$\begin{aligned} A_{s,min} &= 0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} b d = 0.26 \cdot \frac{2.9}{500} \cdot 340 \cdot 410 \\ &= 0.001508 \cdot 340 \cdot 410 > 0.0013 b d \\ &= 210\text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{s,max} = 0.04 A_c = 0.04 \cdot 340 \cdot 520 = 7072\text{mm}^2$$

Valgt armering

Støtte:

$$\text{Strekkarmering: } 5 \varnothing 32 \Rightarrow A_{s,strekk} = 4021\text{mm}^2$$

$$\text{Trykkarmering: } 3 \varnothing 32 \Rightarrow A_{s,trykk} = 2413\text{mm}^2$$

Felt:

$$\text{Strekkarmering: } 5 \text{ } \varnothing 32 \Rightarrow A_{s,\text{strekk}} = 4021\text{mm}^2$$

$$\text{Trykkarmering: } 2 \text{ } \varnothing 32 \Rightarrow A_{s,\text{trykk}} = 1608\text{mm}^2$$

Avstand mellom armeringsstenger

$$a = \frac{b - 2c - 2\varnothing_w - n \cdot \varnothing}{n - 1} = \frac{340 - 2 \cdot 42 - 2 \cdot 12 - 3 \cdot 32}{3 - 1}$$

$$= 68\text{mm} > a_{h,\text{min}} \Rightarrow \text{Avstand OK}$$

Kontroll av lengdearmering med Iterasjonsmetoden

Ved bruk av programmet som løser armeringsmengde direkte fåes følgende nødvendige armeringsmengder:

$$\text{Støtte: } A_{s,\text{strekk}} = 4005\text{mm}^2 \quad A_{s,\text{trykk}} = 2322\text{mm}^2$$

$$\text{Felt: } A_{s,\text{strekk}} = 3340\text{mm}^2 \quad A_{s,\text{trykk}} = 1616\text{mm}^2$$

Med den valgte armeringen kan utnyttelsen av tverrsnittet beregnes med iterasjonsprogrammet:

Støtte:

Utnyttelse av strekkarmering: 189.0%

Utnyttelse av betong: 90.6%

Felt:

Utnyttelse av strekkarmering: 86.2%

Utnyttelse av betong: 68.9%

Både over støtten og i feltet har tverrsnittet tilstrekkelig kapasitet. Over støtten er den valgte strekkarmeringen like over nødvendig armeringsmengde og derfor er det ikke uventet at strekkarmeringen flyter.

## **0.7.4 Dimensjonering av bjelke for skjær**

Dimensjonerende skjærkraft

$$\begin{aligned} V_{Ed,\text{red}} &= V_{Ed} - (b_s/2 + d) \cdot (q_d + g_d) \\ &= 332.2 - (0.34/2 + 0.41) \cdot (27 + 27.6) = 300.5\text{kN} \end{aligned}$$



### Kapasitet uten skjærarmoring, EC2, 6.2.2

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{410}} = 1.698$$

$$\rho = \frac{A_{sl}}{b_w d} = \frac{4021}{340 \cdot 410} = 0.0288 \leq 0.02$$

$$C_{Rd,c} = \frac{0.18}{\gamma_c} = \frac{0.18}{1.5} = 0.12$$

$$v_{min} = 0.035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2} = 0.035 \cdot 1.690^{3/2} \cdot 30^{1/2} = 0.421$$

$$\begin{aligned} V_{Rd,c} &= C_{Rd,c} k (100 \rho f_{ck})^{1/3} b d \\ &= 0.12 \cdot 1.698 \cdot (100 \cdot 0.02 \cdot 30)^{1/3} \cdot 340 \cdot 410 = 0.798 \cdot 340 \cdot 410 \\ &= 111.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$V_{Rd,c} < V_{Ed,red} \Rightarrow \text{Må skjærarmere}$$

### Betongtrykksjonens kapasitet, EC2, 6.2.3

$$\alpha_{cw} = 1.0$$

$$z = 0.9d = 0.9 \cdot 410 = 369 \text{ mm}$$

$$v_1 = 0.6 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] = 0.6 \left[ 1 - \frac{30}{250} \right] = 0.528$$

$$\cot\theta = 2.0$$

$$V_{Rd,max} = \frac{\alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd}}{\cot\theta + \tan\theta} = \frac{1.0 \cdot 340 \cdot 369 \cdot 0.528 \cdot 17}{2.0 + 1/2.0}$$

$$= 450.5 \text{ kN} > V_{Ed} \Rightarrow \text{Betongtrykk OK}$$

### Beregning av skjærarmoring, EC2, 6.2.3

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed,red}}{z f_{ywd} \cot\theta} = \frac{300.5 \cdot 10^3}{369 \cdot 434 \cdot 2.0} = 0.938 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

### Minimumsarmering, EC2, 9.2.2(5)

$$\rho_{w,min} = 0.1 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} = 0.1 \cdot \frac{\sqrt{30}}{500} = 0.001095$$

$$\frac{A_{sw,min}}{s} = \rho_{w,min} \cdot b = 0.001095 \cdot 340 = 0.372 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

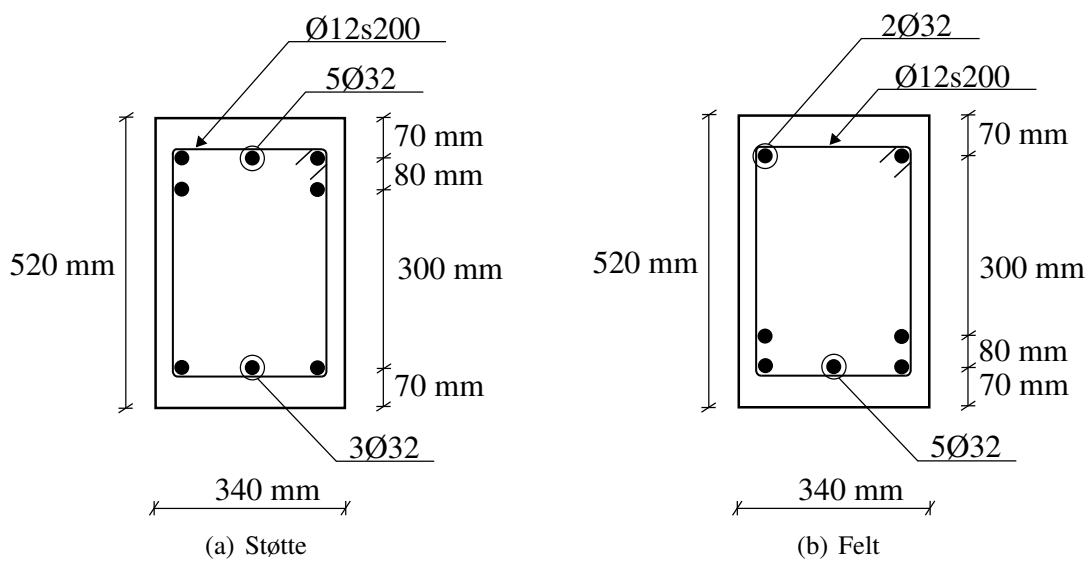
### Største senteravstand, EC2, NA.9.2.2(6)

$$s_{l,max} = \frac{0.6h'}{1 + \cot\alpha} = \frac{0.6 \cdot 340}{1 + 0} = 204 \text{ mm}$$

### Valgt armering

Velger bøylar  $\text{Ø}12\text{s}200 \Rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = 1.13 \text{ mm}^2/\text{m}$ .

## 0.7.5 Armeringstegninger



Figur O.9: Armering for gulvbjelken over støtte og i felt

## O.8 Dimensjonering av søyler i 2.etg.

### O.8.1 Laster

Søylene i 2.etg. vil bli dimensjonert etter aksialkraften og egenlasten fra søylen over, samt den største opplagerkraften fra golvbjelkene i 3.etg.

Dimensjonerende egenlast fra søyle i 3.etg.:

$$g_{d,søyle} = (25\text{kN/m}^3 \cdot 2.19\text{m} \cdot 0.43\text{m}^2) \cdot 1.2 = 12,2\text{kN}$$

Dette gir en dimensjonerende aksialkraft i søylen lik:

$$N_{Ed} = 1294.1 + 12.2 + 627.6 = 1934\text{kN}$$

EC2, 6.1(4) gir minsteeksentrisiteten:

$$\begin{aligned} e_0 &= \max\{h/30, 20\text{mm}\} \\ &= \max\{340/30, 20\text{mm}\} = 20\text{mm} \end{aligned}$$

Dermed blir det dimensjonerende momentet i søylen lik:

$$M_{Ed} = 1934 \cdot 0.02 = 38.7\text{kNm}$$

### O.8.2 Slanketskriterium

Siden søylene virker som opplegg for golvbjelkene i 3.etasje, er det valgt at søylene skal ha samme bredde som disse,  $b = 340\text{mm}$ . Knekk lengden til søylen regnes som etasjehøyden minus høyden av både hulldekket og golvbjelken:

$$L_0 = 3000 - 200 - 520 = 2280\text{mm}$$

Dermed blir slankheten lik:

$$\lambda = L_0 \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} = 2280 \cdot \sqrt{\frac{340^2}{340^4/12}} = 23.2$$

### M-N diagram, vedlegg B:

Armeringsplassering:

$$\frac{h'}{h} = \frac{340 - 2 \cdot 35 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 10}{340} = 0.68 \simeq 0.7$$

Har her antatt Ø20 for lengdearmeringen og Ø10 for tverrarmeringen i søylen.

Relativ aksialkraft:

$$n = \frac{1934 \cdot 10^3}{17 \cdot 340^2} = 0.984$$

Relativt moment:

$$m = \frac{38.7 \cdot 10^6}{17 \cdot 340^3} = 0.058$$

Avlesning i M-N diagrammet gir et mekanisk armeringsforhold,  $\omega = 0.10$ . Med bruk av M-N diagrammet gjelder avlesningen kun for halvparten av den totale armeringsmengden. Derfor må  $\omega$  multipliseres med 2, slik at det mekaniske armeringsforholdet blir  $\omega = 2 \cdot 0.10 = 0.2$ .

Normalisert slankhet:

$$\lambda_n = 23.2 \cdot \left( \frac{0.984}{1 + 2 \cdot 1 \cdot 0.2} \right)^{1/2} = 19.45$$

$\lambda_{lim} = 13$  (uforandret)

$$\lambda_n > \lambda_{lim} \Rightarrow 2.\text{ordens beregning er nødvendig}$$

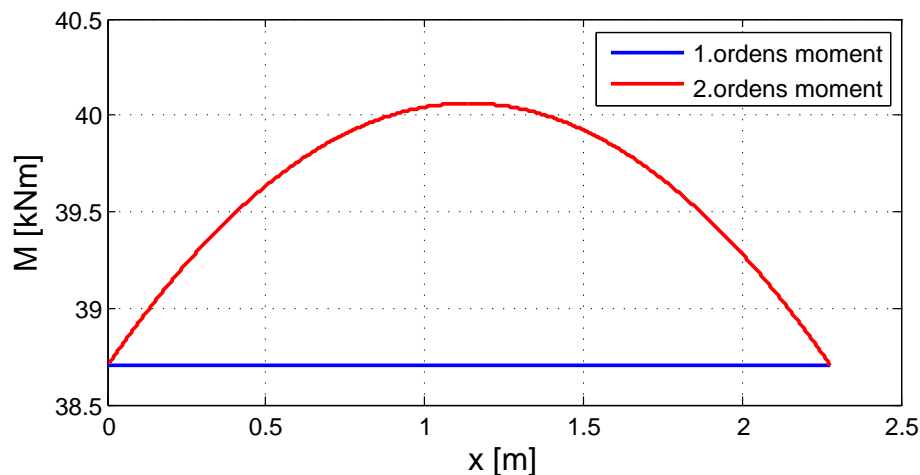
### O.8.3 Beregning av 2.ordens moment med rammeprogrammet

Inputverdier i programmet:

Element 1 (søylen) er det eneste aktive elementet, og frihetsgradene  $r_4$  og  $r_6$  er de eneste aktive frihetsgradene, se Figur 4.3.

Med en punktlast i søylen  $P = 1934\text{kN}$  og et moment  $M = 38.7\text{kNm}$  i hver søyleende (innført som knutepunktlaster), oppnås et dimensjonerende moment  $M_{max} = 40.1\text{kNm}$ .

Figur O.10 er hentet fra Matlab og viser momentfordelingen langs søylen.



Figur O.10: Momentforløp i en søyle i 2.etg av rammebygget

### O.8.4 Armeringsberegninger

Nytt relativt moment:

$$m = \frac{40.1 \cdot 10^6}{17 \cdot 340^3} = 0.060$$

Siden 2.ordens effekter ikke øker det dimensjonerende momentet mye ( $\approx 3.6\%$ ), ligger det nye punktet i M-N diagrammet svært nærme det forrige. Dermed kan det mekaniske armeringsforholdet,  $\omega = 0.2$  benyttes videre.

Nødvendig lengdearmering:

$$\omega = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot A_c} \Rightarrow A_{s,n\ddot{o}dv} = \frac{\omega \cdot f_{cd} \cdot A_c}{f_{yd}} = \frac{0.2 \cdot 17 \cdot 340^2}{434} = 906\text{mm}^2$$

### NA.9.5.2:

$$\begin{aligned} A_{s,min} &= \frac{0.2A_c f_{cd}}{f_{yd}} \leq \frac{0.5N_{Ed}}{f_{yd}}, \text{ men ikke mindre enn } 0.01A_c \\ &= \left\{ \frac{0.2 \cdot 340^2 \cdot 17}{434} \leq \frac{0.5 \cdot 1934 \cdot 10^3}{434} \right\} \geq 0.01 \cdot 340^2 \\ \Rightarrow A_{s,min} &= 1156\text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{s,max} = 0.04 \cdot A_c = 0.04 \cdot 340^2 = 4624\text{mm}^2$$

Velger lengdearmering 4Ø20  $\Rightarrow A_s = 1256\text{mm}^2$

### NA.9.5.3:

$$\begin{aligned} S_{cl,tmax} &= \min\{15 \cdot \varnothing_{lengdearm}; \text{søylens minste tverrsnittsdim}; 400\text{mm}\} \\ &= \min\{15 \cdot 20; 340; 400\text{mm}\} = 300\text{mm} \end{aligned}$$

Velger tverrarmering Ø10s300.

### Kontroll av lengdearmering med Iterasjonsmetoden

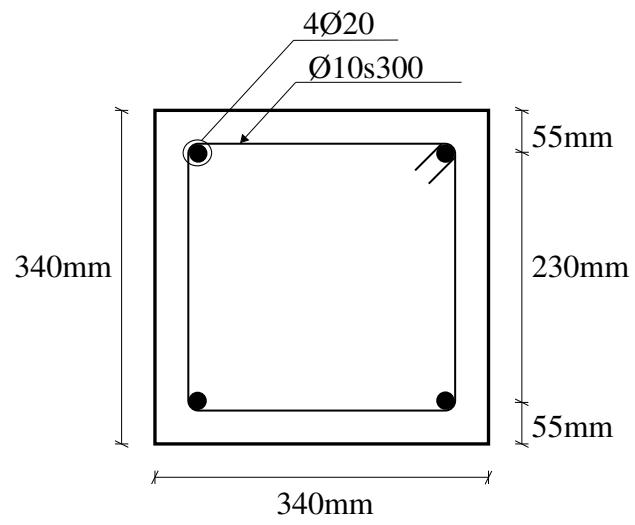
Med den valgte armeringen kan utnyttelsen av søyletverrsnittet beregnes med iterasjonspogrammet:

Utnyttelse av strekkarmering: 37.7%

Utnyttelse av betong: 53.5%

Med et noe slankere tverrsnitt, som har mindre armering og som også har større påkjenninger, er søylene i 2.etg. noe mer utnyttet enn søylene i 3.etg.

## O.8.5 Armeringstegning



Figur O.11: Armering av søyler i 2.etg. av rammebygget

## O.9 Dimensjonering av søyler i 1.etg.

### O.9.1 Laster

Søylene i 1.etg. vil bli dimensjonert etter aksialkraften og egenlasten fra søylen over, samt den største opplagerkraften fra golvbjelkene i 2.etg.

Dimensjonerende egenlast fra søyle i 2.etg.:

$$g_{d,søyle} = (25\text{kN/m}^3 \cdot 2.28\text{m} \cdot 0.34\text{m}^2) \cdot 1.2 = 7,9\text{kN}$$

Dette gir en dimensjonerende aksialkraft i søylen lik:

$$N_{Ed} = 1934 + 7.9 + 627.6 = 2569.5\text{kN}$$

EC2, 6.1(4) gir minsteeksentrisiteten:

$$\begin{aligned} e_0 &= \max\{h/30, 20\text{mm}\} \\ &= \max\{340/30, 20\text{mm}\} = 20\text{mm} \end{aligned}$$

Dermed blir det dimensjonerende momentet i søylen lik:

$$M_{Ed} = 2569.5 \cdot 0.02 = 51.4\text{kNm}$$

### O.9.2 Slanketskriterium

Siden søylene virker som opplegg for golvbjelkene i 2.etg., er det valgt at søylene skal ha samme bredde som disse,  $b = 320\text{mm}$ . Kneklengden til søylen regnes som etasjehøyden minus høyden av både hulldekket og golvbjelken:

$$L_0 = 5000 - 200 - 520 = 4280\text{mm}$$

Dermed blir slankheten lik:

$$\lambda = L_0 \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} = 4280 \cdot \sqrt{\frac{340^2}{340^4/12}} = 43.6$$



M-N diagram, vedlegg B:

Armeringsplassering:

$$\frac{h'}{h} = \frac{340 - 2 \cdot 35 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 12.5}{340} = 0.66 \simeq 0.7$$

Har her antatt Ø25 for lengdearmeringen og Ø10 for tverrarmeringen i søylen.

Relativ aksialkraft:

$$n = \frac{2569.5 \cdot 10^3}{17 \cdot 340^2} = 1.31$$

Relativt moment:

$$m = \frac{51.4 \cdot 10^6}{17 \cdot 340^3} = 0.08$$

Avlesning fra M-N diagrammet gir et mekanisk armeringsforhold  $\omega = 0.30$ , men denne avlesningen er kun for halvparten av total armeringsmengde. Derfor må  $\omega$  multipliseres med 2, slik at det mekaniske armeringsforholdet blir  $\omega = 0.60$ .

Normalisert slankhet:

$$\lambda_n = 43.6 \cdot \left( \frac{1.31}{1 + 2 \cdot 1 \cdot 0.6} \right)^{1/2} = 33.6$$

$\lambda_{lim} = 13$  (uforandret)

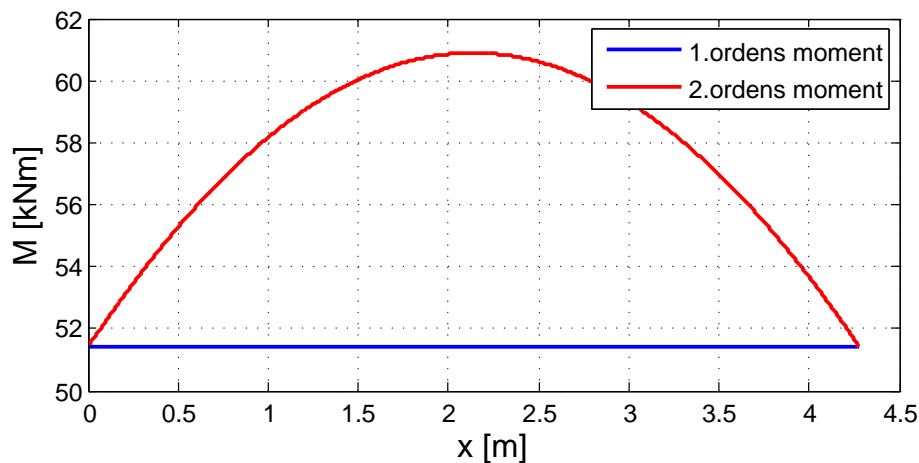
$\lambda_n > \lambda_{lim} \Rightarrow$  2.ordens beregning er nødvendig

### O.9.3 Beregning av 2.ordens moment med rammeprogrammet

Inputverdier i programmet:

Med en punktlast i søylen  $P = 2569.5\text{kN}$  og et moment  $M = 51.4\text{kNm}$  i hver søyleende (innført som knutepunktlaster), oppnås et dimensjonerende moment  $M_{max} = 60.9\text{kNm}$ . Andre ordens effekter øker altså det dimensjonerende momentet med ca. 18%.

Figur O.12 er hentet fra Matlab og viser momentfordelingen langs søylen.



Figur O.12: Momentforløp i en søyle i 1.etg. av rammebygget

### O.9.4 Armeringsberegninger

Nytt relativt moment:

$$m = \frac{60.9 \cdot 10^6}{17 \cdot 340^3} = 0.091$$

Avlesning i M-N diagrammet viser at det mekaniske armeringsforholdet bør settes til,  $\omega = 0.3 \cdot 2 = 0.6$ .

Nødvendig lengdearmering:

$$\omega = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot A_c} \Rightarrow A_{s,nødv} = \frac{\omega \cdot f_{cd} \cdot A_c}{f_{yd}} = \frac{0.6 \cdot 17 \cdot 340^2}{434} = 2717\text{mm}^2$$

### NA.9.5.2:

$$\begin{aligned} A_{s,min} &= \frac{0.2A_c f_{cd}}{f_{yd}} \leq \frac{0.5N_{Ed}}{f_{yd}}, \text{ men ikke mindre enn } 0.01A_c \\ &= \left\{ \frac{0.2 \cdot 340^2 \cdot 17}{434} \leq \frac{0.5 \cdot 2569.5 \cdot 10^3}{434} \right\} \geq 0.01 \cdot 340^2 \\ \Rightarrow A_{s,min} &= 1156\text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{s,max} = 0.04 \cdot A_c = 0.04 \cdot 320^2 = 4096\text{mm}^2$$

Velger lengdearmering 8Ø25  $\Rightarrow A_s = 3927\text{mm}^2$

### NA.9.5.3:

$$\begin{aligned} S_{cl,tmax} &= \min\{15 \cdot \varnothing_{lengdearm}; \text{ søylens minste tverrsnittsdim}; 400\text{mm}\} \\ &= \min\{15 \cdot 25; 340; 400\text{mm}\} = 340\text{mm} \end{aligned}$$

Velger tverrarmering Ø10s340.

### Kontroll av lengdearmering med Iterasjonsmetoden

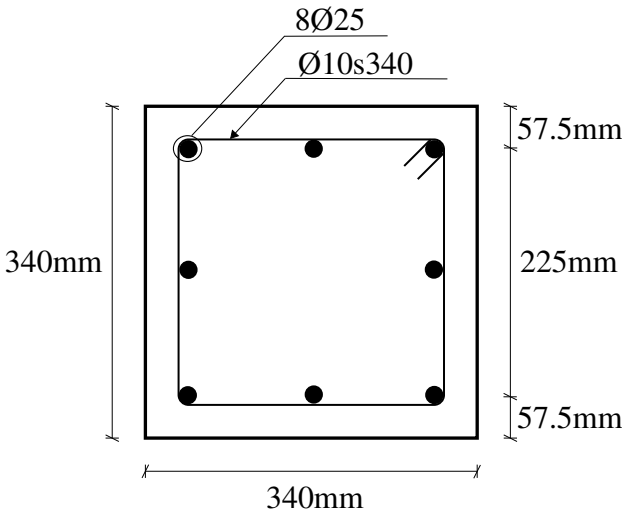
Med den valgte armeringen kan utnyttelsen av søyletverrsnittet beregnes med iterasjonsprogrammet:

Utnyttelse av strekkarmering: 45.0%

Utnyttelse av betong: 60.1%

Søylene i 1.etg. har samme tverrsnittsdimensjoner som søylene i 2.etg., men siden de er påkjent av større laster, slik at også 2.ordens effekter øker betydelig, er disse søylene mest utnyttet. Det må nevnes at søylene likevel har stor kapasitet og er bare delvis utnyttet.

**O.9.5 Armeringstegning**



Figur O.13: Armering av søyler i 1.etg. av rammebygget