

# Dynamisk respons av slanke gangbruer

**Simen Hellgren Holtberget**

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2013

Hovedveileder: Einar Norleif Strømmen, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk





## MASTEROPPGAVE 2013

FAGOMRÅDE: Dynamikk, Virvelavløsninger, Massedempere	DATO: 10.06.2013	ANTALL SIDER: 99 + 62
--	---------------------	--------------------------

TITTEL:

### **Dynamisk respons av slanke gangbruer**

Dynamic response of slender pedestrian bridges

UTFØRT AV:

Simen H. Holtberget



SAMMENDRAG:

Dynamiske egenskaper for slanke gangbruer er et tema som blir stadig mer aktuelt i byggebransjen. Den økende urbaniseringen, og satsingen på miljø gjør at det bygges stadig flere alternativer for fotgjengere. Denne typen bruer er utsatt for en rekke forskjellige lasttyper som kan resultere i dynamiske svingninger, med vindinduserte virvelavløsninger som et eksempel. Virvelavløsninger er særlig aktuelt for denne typen slanke konstruksjoner da de kritiske vindhastighetene ofte er lavere enn for andre typer konstruksjoner. Det er derfor viktig å optimalisere konstruksjonens dynamiske egenskaper. Massedempere har vist seg som et verktøy som effektivt kan redusere svingningene til et system, og det er derfor valgt å se på hvordan de kan brukes til å redusere responsen for slanke gangbruer.

Denne oppgaven går gjennom teorien som er nødvendig for å identifisere de dynamiske egenskapene til en slank hengebru. Den tar også for seg vindinduserte virvelavløsninger og hvordan massedempere kan brukes som et verktøy for forbedre de dynamiske egenskapene til et system.

Det gjøres så en praktisk beregning på den nye gangbroen mellom Opsund og Hafslundsøy i Sarpsborg kommune, Norge. Beregningene er delt inn i tre hoveddeler: egenverdianalyse, virvelavløsningslast og innføring av massedempere. Egenverdianalysen identifiserer systemets 4 første svingformer i z-retning og torsjon, og finner de tilhørende egenfrekvensene. Det undersøkes så virkningen av virvelavløsningslast, over et vindfelt  $0 < V < 20$  [m/s]. Beregningene blir gjort ved punktene med størst eksitasjon fra svingformene for å se på den dynamiske responsen. Så innføres det massedempere som tilpasses egenfrekvensene til systemet, og gjøres en ny virvelavløsningsresponsberegning for å se på virkningen av massedemperene. Responsen som følge av virvelavløsningene viste seg å være liten for Hafslundsøy bru, og i størrelsesorden \$mm\$. Responsen viser at det ikke er noe behov for massedemper for å dempe ut virkningene. Effekten av massedemperene var allikevel tydelig. Det ble gjort tidsserieanalyser over  $T = 600$  s som viste at massedemperene ga en reduksjon i responsen på oppmot 73 %. Resultatene viser at for slanke gangbruer kan massedempere være en meget effektiv metode å dempe ut resonante svingninger på.

FAGLÆRER: Einar N. Strømmen

VEILEDER(E): Einar N. Strømmen(NTNU), Kristian Berntsen(SVV)

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk



# MASTEROPPGAVE 2013

## Konstruksjonsteknikk

for

Simen Hellgren Holtberget

### DYNAMISK RESPONS AV SLANKE GANGEBRUER

#### *Dynamic response of slender pedestrian bridges*

Økende urbanisering har ført til at det bygges stadig slankere gangbruer. Utsatt for fluktuerende last i form av vind, jordskjelv eller gangtrafikk har disse broene blitt gjenstand for dynamiske problemstillinger som har hvert mye undersøkt de siste årene. Den store mediedekningen har blant annet igangsatt ny forskning innen området for menneskeinduserte svingninger, først for gangbruer men også i stor grad for alle offentlige anlegg hvor det samles store grupper av mennesker. Denne typen svingninger er bruksmessig uakseptable og vil på lengre sikt kunne føre til skader og i verste fall sammenbrudd på grunn av utmatting. Det samme gjelder for vindinduserte virvelavløsningsvingninger. I den grad disse svingningene er resonante har det vært foreslått å redusere virkningen ved hjelp av en eller flere massedempere. Hensikten med denne oppgaven er å gi studenten innsikt i de dynamiske vurderingene som kreves for dimensjonering av slanke gangbroer, ikke bare med hensyn til konstruksjonens sikkerhet mot sammenbrudd, men også med hensyn til brukskomfort. Oppgaven skal dessuten munne ut i en undersøkelse i hvilken grad massedempere kan bidra. Det bør etableres en grundig forståelse av de spesielle krav som gjelder for denne typen konstruksjoner og hvilke regelverk som kan benyttes for å vurdere konstruksjonsresponsen (for eksempel anbefalingene i henhold til NS og ISO). Arbeidet foreslås lagt opp etter følgende plan:

1. Studenten skal sette seg inn i hvilke dynamiske laster og som er relevante for slanke gangbruer (vind, jordskjelv, gangtrafikk), og hvilke kriterier som gjelder for dimensjoneringen mot dynamiske lastvirkning.
2. Det skal deretter foretas en teoretisk utredning om hvordan en eller flere massedempere på en generell måte kan inkluderes i en modalanalyse av den dynamiske lastvirkningen og hvordan denne på en optimal måte kan forbedre systemets dynamiske egenskaper.
3. I samarbeid med veileder og Sivilingeniør Kristian Berntsen i Vegdirektoratet skal det velges et bestemt system (for eksempel Hafslundsøy) for en praktisk beregning som viser hvordan massedempere kan brukes til å løse et aktuelt dynamikkproblem.

Studenten kan selv velge hvilke problemstillinger han ønsker å legge vekt på. Oppgaven skal gjennomføres i samarbeid med Sivilingeniør Kristian Berntsen i Vegdirektoratet.

NTNU, 2013-01-03



Einar Strømmen



## Sammendrag

Dynamiske egenskaper for slanke gangbruer er et tema som blir stadig mer aktuelt i byggebransjen. Den økende urbaniseringen, og satsingen på miljø gjør at det bygges stadig flere alternativer for fotgjengere. Denne typen bruer er utsatt for en rekke forskjellige lasttyper som kan resultere i dynamiske svingninger, med vindinduserte virvelavløsninger som et eksempel. Virvelavløsninger er særlig aktuelt for denne typen slanke konstruksjoner da de kritiske vindhastighetene ofte er lavere enn for andre typer konstruksjoner. Det er derfor viktig å optimalisere konstruksjonens dynamiske egenskaper. Massedempere har vist seg som et verktøy som effektivt kan redusere svingningene til et system, og det er derfor valgt å se på hvordan de kan brukes til å redusere responsen for slanke gangbruer.

Denne oppgaven går gjennom teorien som er nødvendig for å identifisere de dynamiske egenskapene til en slank hengebru. Den tar også for seg vindinduserte virvelavløsninger og hvordan massedempere kan brukes som et verktøy for forbedre de dynamiske egenskapene til et system.

Det gjøres så en praktisk beregning på den nye gangbroen mellom Opsund og Hafslundsøy i Sarpsborg kommune, Norge. Beregningene er delt inn i tre hoveddeler: egenverdianalyse, virvelavløsningslast og innføring av massedempere. Egenverdianalysen identifiserer systemets 4 første svingeformer i  $z$ -retning og torsjon, og finner de tilhørende egenfrekvensene. Det undersøkes så virkningen av virvelavløsningslast, over et vindfelt  $0 \leq V \leq 20$  [m/s]. Beregningene blir gjort ved punktene med størst eksitasjon fra svingeformene for å se på den dynamiske responsen. Så innføres det massedempere som tilpasses egenfrekvensene til systemet, og gjøres en ny virvelavløsningsresponsberegning for å se på virkningen av massedemperene.

Responsen som følge av virvelavløsningene viste seg å være liten for Hafslundsøy bru, og i størrelsesorden  $mm$ . Responsen viser at det ikke er noe behov for massedemper for å dempe ut virkningene. Effekten av massedemperene var allikevel tydelig. Det ble gjort tidsserieanalyser over  $T = 600$  s som viste at massedemperene ga en reduksjon i responsen på oppmot 73 %. Resultatene viser at for slanke gangbruer kan massedempere være en meget effektiv metode å dempe ut resonante svingninger på.





## Abstract

The dynamic characteristics of slender pedestrian bridges is a topic of growing interest in the construction industry. The increasing urbanization, and the commitment to the environment makes us build more options for pedestrians. This type of bridges are susceptible to a number of different loads which may result in dynamic fluctuations, with wind induced vortex shedding as an example. Vortex shedding is especially relevant for such slender structures since the critical wind velocity often are lower than for other types of structures. Therefore it's important to optimize the structure's dynamic properties. Tuned mass dampers have proven to be a tool that can effectively reduce the fluctuations of a system, and it is therefore chosen to look at how they can be used to reduce the response of slender pedestrian bridges.

This thesis goes through the theory needed to identify the dynamic behavior of a slender suspension bridge. It also addresses the theory needed to apply vortex shedding induced response, and how to implement tuned mass dampers to improve the dynamic behavior of the system.

The thesis then looks at a case study of the new pedestrian bridge between Opsund and Hafslundøy in Sarpsborg, Norway. The calculations are divided into three main parts, eigenvalue calculations, vortex shedding and implementation of tuned mass dampers. The eigenvalue analysis identifies the systems 4 first eigenmodes in  $z$ -direction and torsion, and their corresponding eigenfrequencies. It then examines the effects of wind induced vortex shedding loads, over a wind field  $0 \leq V \leq 20$  [m/s], at the points of the largest excitations for the eigenmodes to look at the dynamic response. It is then introduced TMD's that are adapted to the eigenvalues of the system, and a new vortex shedding calculation is performed to look at the effects of the TMD's.

The response due to the vortex shedding effects prove to be of a small quantity for the Hafslundøy bridge. The response shows that there is no need to implement TMD's to reduce these effects. However the effects of the TMD's is evident. Time series analyses over  $T = 600$  s were performed for the response and the reduced response showed that the TMD's gave a reduction close to 73 % for some of the effects. The results of the calculations including the TMD's

shows that TMD's can be a very effective way to reduce resonant oscillations of slender pedestrian bridges.

# Forord

Denne oppgaven er et resultat av det siste semesteret i mitt mastergradstudie ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU), i Trondheim, Norge. Den er skrevet i samarbeid med Statens Vegvesen, og veileder Kristian Berntsen ved Vegdirektoratet. Arbeidet er utført ved fakultetet for ingeniørvitenskap og teknologi, institutt for konstruksjonsteknikk, med veileder Einar N. Strømmen.

Oppgaven har bydd på utfordringer, og vært veldig lærerik, da jeg har fått etablert en bedre forståelse av hvordan kunnskapen jeg har bygget meg opp i løpet av de siste fem årene kan brukes i praksis. I tillegg har jeg opparbeidet meg ny kunnskap om massedempere, noe jeg synes var særlig spennende å jobbe med.

Jeg vil gjerne takke min hovedveileder Einar N. Strømmen for god veiledning og mange nyttige innspill i løpet av semesteret. Jeg vil også takke min veileder hos SVV, Kristian Berntsen, for nødvendige data og oversiktstegninger for Hafslundsøy. Jeg vil også takke medstudent Karl Hermann Bjørnland for nyttige og konstruktive diskusjoner i løpet av arbeidet.

---

Simen Hellgren Holtberget  
Trondheim, 10.06.2013



# Innhold

<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
<b>2 Teori</b>	<b>3</b>
2.1 Teorien om grunne kabler	3
2.2 Hengebruer som virker over ett spenn	17
2.3 Virvelavløsninger	34
2.4 Massedempere	41
<b>3 Hafslundsøy bru</b>	<b>61</b>
3.1 Egenverdianalyse	64
3.1.1 Egenverdier for eksitasjon i $z$ -retning	65
3.1.2 Egenverdier for eksitasjon i torsjon	67
3.1.3 Oppsummering - egenverdier	70
3.2 Virvelavsløsningslast	71
3.2.1 Virvelavsløsningslast med respons i $z$ -retning	72
3.2.2 Virvelavløsninger med respons i torsjon	74
3.2.3 Oppsummering - virvelavløsninger	77
3.3 Innføring av massedempere	78
3.3.1 Massedempere som demper mot bevegelse i $z$ -retning	79
3.3.2 Massedempere som demper mot bevegelse i torsjon	87
3.3.3 Oppsummering - Massedempere	95
<b>4 Oppsummering og konklusjon</b>	<b>97</b>
<b>Referanser</b>	<b>99</b>
<b>Vedlegg</b>	<b>100</b>



# Figurer

<b>Kapittel 2</b>	<b>3</b>
2.1 Grunn kabel[12]	3
2.2 Statisk likevekt for element $ds$ [12]	3
2.3 Likevekten til kabelen[12]	7
2.4 De to første modene for horisontal bevegelse[12]	13
2.5 Anti-symmetrisk bevegelse[12]	13
2.6 De to første modene for anti-symmetrisk bevegelse[12]	14
2.7 Hengebru som virker over ett spenn med tverrsnitt[12]	17
2.8 Idealisert system[12]	18
2.9 Kraften i stagene per lengdeenhet[12]	18
2.10 Det infinitesimale elementet $dx$ [12]	24
2.11 Tverrsnitt ved torsjon[12]	28
2.12 Infinitesimalt element i torsjon[12]	28
2.13 Tilfeldig tverrsnitt av bru[11]	34
2.14 SDOF-TMD system [2]	41
2.15 SDOF-system med massedemper[13]	43
2.16 Bjelke/søyle med massedemper $M_j$ i posisjon $x_j$ [13]	48
<b>Kapittel 3</b>	<b>61</b>
3.1 Hafslundsøy gangbru, med Hafslundsøy på høyre side, og Opsund på venstre[8]	61
3.2 Orginaltverrsnittet til Hafslundsøy(mål i mm) [7]	62
3.3 Forenklet tverrsnitt av Hafslundsøy gangbru(mål i mm)	62
3.4 De fire første svingemodene i $z$ -retning	66
3.5 Referansefigur for massetregghet	67
3.6 De 4 første svingemodene for torsjon	69
3.7 Strouhaltallet for rektangulært tverrsnitt[10]	71
3.8 Dynamiske respons i $z$ -retning ved $0,125 L$ [m]	73
3.9 Dynamisk respons i $z$ -retning ved $0,25 L$ [m]	73
3.10 Dynamisk respons i $z$ -retning ved $0,5 L$ [m]	74
3.11 Dynamisk respons i torsjon ved $0,125 L$ [m/m]	75
3.12 Dynamisk respons i torsjon ved $0,25 L$ [m/m]	76

3.13	Dynamisk respons i torsjon ved 0,5 L [m/m]	76
3.14	Massedemperenes plassering på hafslundsøy(mål i mm)	79
3.15	Responsspekter og redusert responspekter ved 0,125L	81
3.16	Responsspekter og redusert responspekter ved 0,25L	81
3.17	Responsspekter og redusert responspekter ved 0,5L	82
3.18	Dynamiske respons i z-retning med TMD ved 0,125 L [m]	83
3.19	Dynamiske respons i z-retning med TMD ved 0,25 L [m]	83
3.20	Dynamiske respons i z-retning med TMD ved 0,5 L [m]	84
3.21	Respons $r_z(t)$ og dempet respons $r_{z_d}(t)$ for $V_{R_{z_1}}$ ved 0,5 L	85
3.22	Respons $r_z(t)$ og dempet respons $r_{z_d}(t)$ for $V_{R_{z_2}}$ ved 0,25 L	85
3.23	Respons $r_z(t)$ og dempet respons $r_{z_d}(t)$ for $V_{R_{z_3}}$ ved 0,5 L	86
3.24	Respons $r_z(t)$ og dempet respons $r_{z_d}(t)$ for $V_{R_{z_4}}$ ved 0,125 L	86
3.25	Responsspekter og redusert responspekter ved 0,125L	88
3.26	Responsspekter og redusert responspekter ved 0,25L	89
3.27	Responsspekter og redusert responspekter ved 0,5L	89
3.28	Dynamiske respons i torsjon med TMD ved 0,125 L [m/m]	90
3.29	Dynamiske respons i torsjon med TMD ved 0,25 L [m/m]	91
3.30	Dynamiske respons i torsjon med TMD ved 0,5 L [m/m]	91
3.31	Respons $r_\theta(t)$ og dempet respons $r_{\theta_d}(t)$ for $V_{R_{\theta_1}}$ ved 0,5 L	92
3.32	Respons $r_\theta(t)$ og dempet respons $r_{\theta_d}(t)$ for $V_{R_{\theta_2}}$ ved 0,25 L	93
3.33	Respons $r_\theta(t)$ og dempet respons $r_{\theta_d}(t)$ for $V_{R_{\theta_3}}$ ved 0,5 L	93
3.34	Respons $r_\theta(t)$ og dempet respons $r_{\theta_d}(t)$ for $V_{R_{\theta_4}}$ ved 0,125 L	94



# Symbolliste

## Latinske bokstaver

$\hat{C}_o$	Kospektraltetthet
$\hat{H}$	Frekvensresponsfunksjon
$A$	Areal
$a$	Fourieramplitude, Virvelavløsningsparameter
$B$	Tverrsnittsbredde
$b_c$	Avstanden mellom kablene/kabelgruppene
$b_m$	Dimensjonsløs lastspekterbredde i retning $m$
$c, \mathbf{C}$	Dempingskoeffisient, dempingsmatrise
$Cov$	Kovarians
$D$	Tverrsnittshøyde
$E$	E-modulen
$e_c$	Høydeforskjellen til kabelen
$G$	Skjærmodul
$g$	Tyngdeakselerasjon
$H$	Horisontalkraft
$h_c$	Stagenes lengde
$h_m$	Avstand mellom brudekket og kablene på midten av brua
$I_z, I_t$	Andre arealmoment om $z$ -aksen, rotasjonstregghetsmoment
$k, \mathbf{K}$	Stivhetsparameter, stivhetsmatrise
$K_a$	Aerodynamisk dempingsparameter
$l, l_e$	Kabelens lengde
$L, L_{exp}$	Lengden av brua langs $x$ -aksen, og vindeksponert lengde
$m, \mathbf{M}$	Masse pr. lengdeenhet, massematrise
$N$	Normalkraft, antall modeformer

$N_j$	Antall massedempere
$Q$	Modal last
$q$	Jevnt fordelt last
$r, u$	Respons
$s$	Kabelens lengde med buformen
$S_n$	Autospektraltetthet
$S_{nn}$	Krysspektraltetthet
$St$	Strouhallet
$t, T$	Tid, total lengde av tidsserie
$V$	Skjærkraft, vindhastighet
$z, y, x$	Koordinater

### Greske bokstaver

$\Delta, \delta$	Stegstørrelse
$\epsilon$	Tøyning
$\eta$	Modal respons
$\gamma$	Vinkel mellom horisontalkraft og aksialkraft for kabel
$\lambda$	Parameter, koherenslengdeskala for virvler
$\mu$	Parameter, masseforholdstall
$\omega, f$	Frekvens i $rad/s$ , og frekvens i $Hz$
$\phi, \varphi, \psi$	Modeform
$\rho$	Tyngdetetthet
$\sigma_n, \sigma$	Standardavviket av $n$ , eller spenning
$\theta$	Tverrsnittsrotasjonsindeks
$\xi$	Dempingsrate

### Forkortelser

$max, min$	Maksimum, minimum
cs	Skjærsenter
MDOF	Multi Degree Of Freedom
SDOF	Single Degree Of Freedom
TMD	Tuned Mass Damper, Massedemper

### Subskript

$ae$	Aerodynamisk parameter
$c$	Kabelparameter
$d$	Demperparameter
$i, j, n$	Modeformsnummer
$R$	Kritisk verdi, Lastrespons
$rel$	Relativ verdi
$s$	Stagparameter
$tot$	Totalverdi
$x, y, z, \theta$	Koordinatretning

### Superskript

$\bar{o}$	Gjennomsnittsverdi av $o$
$\hat{o}$	Normalisert verdi av $o$
$\tilde{o}$	Modal kvantitet av $o$
$o^*$	Komplekskonjugerte av $o$
$o^T$	Transponerte av $o$

### Matematiske symboler

$\dot{z}, \ddot{z}$	Første og andre tidsderiverte av $z$
$\int_{L_{exp}}$	Integralet over den vindeksponerte delen av strukturen
$\int_L$	Integralet over hele lengden til strukturen

$C_1, C_2$	Integrasjonskonstanter
$Re[o]$	Realdelen av $o$
$z', z''$ eller $z'''$	Første, andre eller tredjederiverte av $z$ mhp. $x$

# Kapittel 1

## Innledning

Det blir stadig mer aktuelt å se på den dynamiske oppførselen til slanke gangbruer. Gjennom de siste årene har økende urbanisering og satsingen på miljø gjort at det stadig bygges flere alternativer for fotgjengere. Grunnet slankheten til bruene er de dynamiske egenskapene svært avgjørende for dimensjoneringen. Bruene er utsatt for gangtrafikk, jordskjelv og vind, som alle kan gi svingninger i systemet.

I denne masteroppgaven sees det på vindinduserte virvelavløsninger, og hvilken effekt disse gir slanke gangbruer. Det rettes fokus på hengebruer, da det til slutt skal gjøres en beregning på den nye gangbrua mellom Opsund og Hafslundsøy, i Sarpsborg kommune. Hengebruer er tradisjonelt en av de konstruksjonstypene hvor kritisk effekt av virvelavløsninger er mest aktuelt. Det er flere eksempler på hengebruer som har kollapset pga. virvelavløsninger i løpet av historien, med Tacoma Narrows Bridge sør for Seattle i USA som det kanskje mest kjente tilfellet. På Tacoma Narrows ga virvelavløsningseffekten så stor vridning og eksitasjon vertikalt at brua kollapset[6].

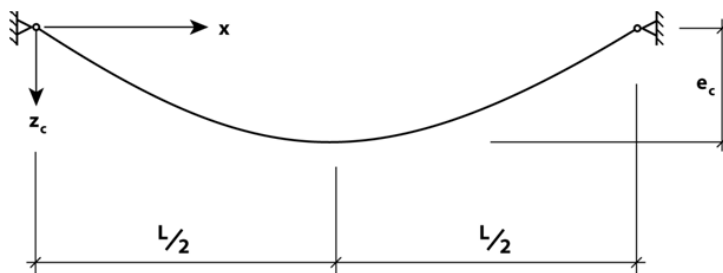
Hensikten med denne oppgaven er å se på hvordan massedempere kan inkluderes i et system, og hvordan de kan forbedre de dynamiske egenskapene. Oppgaven er bygget opp slik at det først gås grundig gjennom teorien for egenverdianalyse, virvelavløsninger og innføring av massedempere. Videre gjøres det en praktisk beregning på Hafslundsøy, på bakgrunn av denne teorien, for å se på hvilken effekt vindinduserte virvelavløsninger gir på konstruksjonen. Det innføres så massedempere for å dempe ut effekten av virvelavløsningene. Til slutt gjøres det en vurdering av hvorvidt det er nødvendig med massedempere for Hafslundsøy, og hvor effektivt det er med TMD for hengebruer.



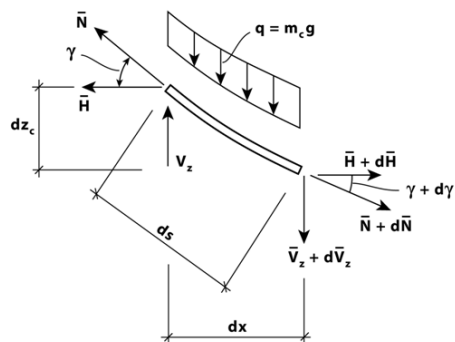
# Kapittel 2

## Teori

### 2.1 Teorien om grunne kabler



Figur 2.1: Grunn kabel[12]



Figur 2.2: Statisk likevekt for element  $ds$ [12]

Ser først på en grunn kabel i gravitasjonsfeltet. Målet er å bestemme dens statiske geometri, altså kabelens vertikale posisjon  $z_c$  ved en gitt horisontal posisjon  $x$ . Alle kreftene er da tidsuavhengige. For et element  $ds$  ved denne posisjonen, som er utsatt for gravitasjonskraft  $q * ds$  (se figur 2.2), vil kraftlikevektsbetingelsene være[12]:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{H} &= 0 \\ d\bar{V}_z + qds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

Momentlikevekten om midtpunktet er gitt ved:

$$\bar{H} \frac{dz_c}{2} - \bar{V}_z \frac{dx}{2} + (\bar{H} + d\bar{H}) \frac{dz_c}{2} - (\bar{V}_z + d\bar{V}_z) \frac{dx}{2} \approx \bar{H} dz_c - \bar{V}_z dx = 0 \quad (2.1.2)$$

Fra kraftlikevekten (lign.(2.1.1)) sees at  $\bar{H}$  er konstant over hele kabelen, og lign. (2.1.1) og (2.1.2) gir:

$$\bar{V}_z = \bar{H} \frac{dz_c}{dx} \quad (2.1.3)$$

Videre gir dette:

$$\bar{H} \frac{d^2 z_c}{dx^2} + q \frac{ds}{dx} = 0 \quad (2.1.4)$$

definerer så  $\alpha = -\bar{H}/q$ , og pytagoras gir  $ds/dx = \sqrt{1 - \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2}$ . Dette fører til:

$$z_c'' = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - z_c'^2} \quad (2.1.5)$$

Introduserer så  $z_c' = \frac{dz_c}{dx} = \tan \gamma$

$$\Rightarrow z_c'' = \frac{d}{dx}(\tan \gamma) = \frac{1}{\cos^2 \gamma} \frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + \tan^2 \gamma} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\cos \gamma} \quad (2.1.6)$$

Noe som igjen fører til at:

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{\cos \gamma}{\cos^2 \gamma} d\gamma = \frac{\cos \gamma}{1 - \sin^2 \gamma} d\gamma \quad (2.1.7)$$

for å løse dette integreres hver side for seg. Venstre siden gir:

$$\int \frac{dx}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} + C_1 \quad (2.1.8)$$



hvor  $C_1$  er en ukjent integrasjonskonstant. Integralet av høyresiden kan løses ved å substituere inn  $\tau = \sin \gamma$ :

$$\int \frac{\cos \gamma}{1 - \sin^2 \gamma} d\gamma = \int \frac{1}{1 - \tau^2} d\tau = \operatorname{arctanh}(\tau) \quad (2.1.9)$$

Har dermed at  $\frac{x}{\alpha} + C_1 = \operatorname{arctanh}(\tau)$ , som gir:

$$\tau = \tanh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) \quad (2.1.10)$$

Videre sees det at siden:

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma &= 1 - \sin^2 \gamma = 1 - \tau^2 = 1 - \tanh^2\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right)} \\ \Rightarrow \cos \gamma &= \frac{1}{\cosh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right)} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

og siden:

$$\begin{aligned} z'_c = \tan \gamma &= \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\tau}{\cos \gamma} = \tanh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) \cosh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) \\ &= \sinh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

fåes det at:

$$\begin{aligned} z_c &= \int \sinh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) dx = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha} + C_1\right) + C_2 \\ &= -\frac{\bar{H}}{q} \cosh\left(-\frac{q}{\bar{H}}x + C_1\right) + C_2 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Siden  $\cosh$  er symmetrisk, er kabelens geometri gitt ved:

$$z_c = -\frac{\bar{H}}{q} \cosh\left(\frac{q}{\bar{H}}x - C_1\right) + C_2 \quad (2.1.14)$$

Hvor  $C_1$  og  $C_2$  er integrasjonskonstanter, som bestemmes fra grensebetingelsene. I tilfellet hvor  $z_c(x=0) = 0$  og  $z_c(x=L) = 0$  kan disse konstantene bestemmes ved:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow -\frac{\bar{H}}{q} \cosh(-C_1) + C_2 = 0 \\ x = L &\Rightarrow -\frac{\bar{H}}{q} \cosh\left(\frac{qL}{\bar{H}} - C_1\right) + C_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Noe som tilfredstilles når  $C_1 = \frac{qL}{2\bar{H}}$  og  $C_2 = \frac{\bar{H}}{q} \cosh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right)$ . Dermed er kabelens geometri gitt ved:

$$\begin{aligned} z_c &= -\frac{\bar{H}}{q} \cosh\left(\frac{q}{\bar{H}}x - \frac{qL}{2\bar{H}}\right) + \frac{\bar{H}}{q} \cosh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right) \\ &= \frac{\bar{H}}{q} \left[ \cosh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right) - \cosh\left(\frac{q}{\bar{H}}x - \frac{qL}{2\bar{H}}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Videre sees det at:

$$z'_c = -\sinh\left(\frac{qx}{\bar{H}} - \frac{qL}{2\bar{H}}\right) = \sinh\left(\frac{qL}{2\bar{H}} - \frac{qx}{\bar{H}}\right) \quad (2.1.17)$$

som er lik null på midten av kabelen. Kabelens høydeforskjell er da gitt ved:

$$e_c = z_c(x = L/2) = \frac{\bar{H}}{q} \left[ \cosh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right) - 1 \right] \quad (2.1.18)$$

For å finne en approksimativ løsning på  $z_c$  brukes så rekkeutviklingen  $\cosh(\eta) = 1 + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + \dots$ . For små verdier av  $\eta$  vil det være tilstrekkelig å inkludere kun de to første uttrykkene. Dette gir:

$$z_c \approx \frac{\bar{H}}{q} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right)^2 - \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{\bar{H}} - \frac{qL}{2\bar{H}}\right)^2 \right] \right\} = \frac{qL^2}{2\bar{H}} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2.1.19)$$

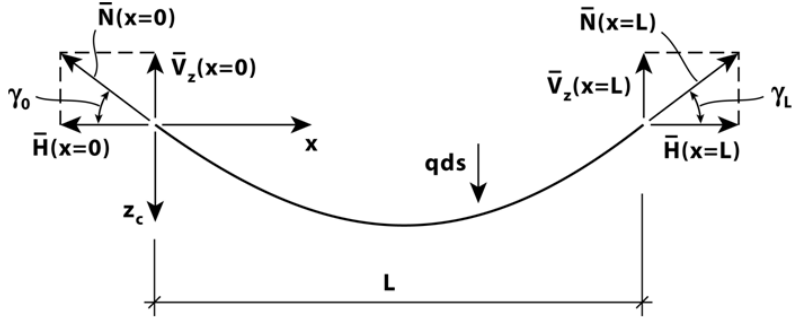
som er en parabolisk funksjon. Det er verdt å merke seg at den korresponderende høydeforskjellen til kabelen er gitt ved:

$$e_c \approx \frac{qL^2}{8\bar{H}} \quad (2.1.20)$$

og at:

$$z'_c \approx \frac{qL}{2\bar{H}} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \Rightarrow \begin{cases} z'_c(x=0) = \frac{qL}{2\bar{H}} \\ z'_c(x=L) = -\frac{qL}{2\bar{H}} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Videre ønskes det å se på kreftene til systemet:



Figur 2.3: Likevekten til kabelen[12]

### Normalkraften

Normalkraften som virker i kabelen er gitt ved Pytagoras:

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \sqrt{\bar{H}^2 + \bar{V}^2} = \bar{H} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{V}_z}{\bar{H}}\right)^2} = \bar{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2} \\ &= \bar{H} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{qx}{\bar{H}} - \frac{qL}{2\bar{H}}\right)} = \bar{H} \cosh\left(\frac{qx}{\bar{H}} - \frac{qL}{2\bar{H}}\right)\end{aligned}\quad (2.1.22)$$

Dette gir:

$$\left. \begin{aligned}\bar{N}(x=0) &= \bar{N}(x=L) = \bar{H} \cosh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right) \\ \bar{N}(x=L/2) &= \bar{H}\end{aligned}\right\} \quad (2.1.23)$$

### Kabelens lengde

Har fra rekkutvikling at  $\sinh(\eta) = \eta + \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^5}{5!} + \dots$ . Får dermed:

$$\begin{aligned}\bar{V}_z(x=0) &= \bar{V}_z(x=L) = \sqrt{\left[\bar{H} \cosh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right)\right]^2 - \bar{H}^2} = \bar{H} \sinh\left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right) \\ &\approx \bar{H} \left[ \left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right) + \frac{1}{3!} \left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right)^3 \right] = \frac{qL}{2} \left[ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{qL}{2\bar{H}}\right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.1.24)$$

Likevekt i z-retning gir:

$$\bar{V}_z(x=0) + \bar{V}_z(x=L) = qL \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{qL}{2\bar{H}} \right)^2 \right] = \int_l q ds = ql \quad (2.1.25)$$

hvor  $l$  er kabelens lengde. Dette gir at:

$$l = L \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{qL}{2\bar{H}} \right)^2 \right] \quad (2.1.26)$$

### Kabelens forlengelse

Ved å anta at kabelens lengde er lik over hele spennet, kan kabelens folengelse grunnet gravitasjon skrives som:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_L \epsilon ds = \int_L \frac{\sigma}{E} ds = \int_L \frac{\bar{N}}{EA} ds = \int_L \frac{\bar{H} \sqrt{1 + \left( \frac{dz_c}{dx} \right)^2}}{EA} \sqrt{1 + \left( \frac{dz_c}{dx} \right)^2} \\ &= \frac{\bar{H}}{EA} \int_L \left[ 1 + \left( \frac{dz_c}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{\bar{H}}{EA} \int_L \cosh^2 \left( \frac{qx}{\bar{H}} - \frac{qL}{2\bar{H}} \right) dx \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

setter så  $\beta = \frac{qx}{\bar{H}} - \frac{qL}{2\bar{H}}$ , og setter inn i uttrykket:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{\bar{H}^2}{qEA} \int_{-qL/2\bar{H}}^{qL/2\bar{H}} \cosh(\beta) d\beta = \frac{\bar{H}^2}{qEA} \left[ \frac{\sinh 2\beta}{4} + \frac{\beta}{2} \right]_{-qL/2\bar{H}}^{qL/2\bar{H}} \\ &= \frac{\bar{H}L}{2EA} \left[ \frac{\bar{H}}{qL} \sinh \left( \frac{qL}{\bar{H}} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

som ved hjelp av rekkeutvikling kan skrives som:

$$\Delta l \approx \frac{\bar{H}L}{2EA} \left\{ \frac{\bar{H}}{qL} \left[ \frac{qL}{\bar{H}} + \frac{1}{3!} \left( \frac{qL}{\bar{H}} \right)^3 \right] + 1 \right\} = \frac{\bar{H}L}{EA} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{qL}{\bar{H}} \right)^2 \right] \quad (2.1.29)$$

eller alternativt, beskrevet ved kabelens høydeforskjell:

$$\Delta l \approx \frac{\bar{H}L}{EA} \left[ 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{e_c}{L} \right)^2 \right] \quad (2.1.30)$$

### Den dynamiske likevektens differensialligning

Det kan nå utvikles likevektsbetingelser for det infinitesimale elementet  $ds$  av kabelen, utsatt for en dynamisk bevegelse. I utgangspunktet er problemet høyst ikkelineært, men ved å dele inn i infinitesimale elementer og se på små forskyvninger, vil en lineær tilnærming være en god løsning. Det antas at aksialkraften kan beskrives ved en tidsuavhengig variabel  $\bar{N}(x)$ , fra egenvekten, og en tidsavhengig variabel  $N(x, t)$ , fra kabelens dynamiske bevegelse. Det kan dermed sies at det samme gjelder for kabelens horisontale komponent  $H$  og vertikale komponent  $V_z$ :

$$N_{tot} = \bar{N}(x) + N(x, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_{tot} = \bar{H}(x) + H(x, t) \\ V_{z_{tot}} = \bar{V}_z(x) + V_z(x, t) \end{cases} \quad (2.1.31)$$

Mens komponenten  $V_y$ , som virker ut av planet, er forårsaket av den dynamiske bevegelsen alene:

$$V_{y_{tot}} = V_y(x, t) \quad (2.1.32)$$

Antar så at kabelen er grunn, og bruker den approksimative kurven til kabelen fra tidligere:

$$z_c \approx \frac{qL^2}{2\bar{H}} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = 4e_c \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2.1.33)$$

I tillegg til at det antas at kabelen er grunn, antas det som tidligere, at kabelens bevegelse i x-retning  $r_x$  er neglisjerbar. Dette er en lite kostbar forenkling da det sees på hengebruer, og har fordelen at likevektsbetraktningen i x-retning:

$$\frac{d}{dx}(\bar{H} + H) = 0 \quad (2.1.34)$$

viser at  $\bar{H}$  og  $H(t)$  er uavhengige av  $x$ . De korresponderende likevektene i y- og z-retning er da gitt som:

$$\left. \begin{aligned} dV_y - m_c \ddot{r}_y ds &= 0 \\ d(\bar{V}_z + V_z) + m_c g ds - m_c \ddot{r}_z ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.35)$$

hvor  $m_c$  er kabelens masse per lengdeenhet (antatt konstant). Tilsvarende er momentlikevektene om aksene som går gjennom elementets midtpunkt, og parallelt med y- og z-aksen gitt ved:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{H} + H)d(z_c + r_z) - (\bar{V}_z + V_z)dx &= 0 \\ (\bar{H} + H)dr_y - V_y dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.36)$$

Noe som fører til at:

$$\begin{aligned} V_y &= (\bar{H} + H) \frac{dr_y}{dx} \\ \bar{V}_z + V_z &= (\bar{H} + H) \frac{d(z_c + r_z)}{dx} \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

og dermed:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( (\bar{H} + H) \frac{dr_y}{dx} \right) &= m_c \ddot{r}_y \\ \frac{d}{ds} \left( (\bar{H} + H) \frac{d(z_c + r_z)}{dx} \right) + m_c g &= m_c \ddot{r}_z \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

Siden  $\bar{H}$  og  $H$  er uavhengige av  $x$ , kan dette skrives som:

$$\begin{aligned} (\bar{H} + H) \frac{d^2 r_y}{dx^2} \frac{dx}{ds} &= m_c \ddot{r}_y \\ (\bar{H} + H) \frac{d^2}{dx^2} (z_c + r_z) \frac{dx}{ds} + m_c g &= m_c \ddot{r}_z \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

som viser at den statiske situasjonen ( $H$ ,  $r_y$  og  $r_z$  lik null) kan beskrives som:

$$\bar{H} z_c'' + m_c g = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{H} z_c'' = -m_c g \quad \Rightarrow \quad H z_c'' = -\frac{m_c g}{H} H \quad (2.1.40)$$

Ved å anta at de dynamiske forskyvningene er små:

$$H r_y'' \ll \bar{H} r_y'' \quad \text{og} \quad H r_z'' \ll \bar{H} r_z'' \quad (2.1.41)$$

og at grunnheten til kabelen fører til at  $ds \approx dx$ , blir lign(2.1.39):

$$\left. \begin{aligned} r_y'' - \frac{m_c}{H} \ddot{r}_y &= 0 \\ r_z'' - \frac{m_c}{H} \ddot{r}_z &= \left( \frac{m_c g}{H} \right) \left( \frac{H}{H} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.42)$$

Dermed er differensialligningen til en ulastet og udempet bevegelse av en grunn kabel funnet. Det ønskes nå å finne uttrykket for  $H(t)$ , for å se hvordan strekkraften i kabelen utvikler seg ved en liten vertikal dynamisk bevegelse  $r_z(x, t)$ . Det er ikke behov for å se nærmere på  $r_y(x, t)$ , da bevegelsen vil være en slags "hoppetau"- bevegelse, og den ikke vil føre til noe strekk i kabelen. Kabelens forlengelse  $\Delta s(t)$  finnes så ved å kombinere  $ds^2 = dx^2 + dz_c^2$  (Pytagoras) og:

$$(ds^2 + \Delta ds)^2 = dx^2 + (dz_c + dr_z)^2 \quad (2.1.43)$$

Videre fører dette til at:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta ds}{ds} &= \frac{\sqrt{dx^2 + (dz_c + dr_z)^2} - ds}{ds} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_c}{ds} + \frac{dr_z}{ds}\right)^2} - 1 \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{dz_c}{ds}\frac{dr_z}{ds} + \left(\frac{dr_z}{ds}\right)^2} - 1 \approx \left\{1 + \frac{1}{2}\left[2\frac{dz_c}{ds}\frac{dr_z}{ds} + \left(\frac{dr_z}{ds}\right)^2\right]\right\} - 1 \quad (2.1.44) \\ &= \frac{dz_c}{ds}\frac{dr_z}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{dr_z}{ds}\right)^2 \approx \frac{dz_c}{ds}\frac{dr_z}{ds} \quad \text{pga. } dt_z \ll dz_c \end{aligned}$$

$\frac{H}{N} = \frac{dx}{ds}$  og  $\epsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$  fører til at  $\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{H}{EA} \frac{ds}{dx}$  og dermed:

$$\frac{H}{EA} \frac{ds}{dx} \approx \frac{dz_c}{ds} \frac{dr_z}{ds} \quad (2.1.45)$$

som kan skrives som:

$$\frac{H}{EA} \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = \frac{dz_c}{dx} \frac{dr_z}{dx} = z'_c + r'_z \quad (2.1.46)$$

har fra tidligere at  $r_z(x=0) = r_z(x=L) = 0$ , og at:

$$\left. \begin{aligned} z'_c &\approx \frac{qL}{2\bar{H}} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) = 4\frac{e_c}{L} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) = \frac{8e_c}{L^2} X \\ z''_c &= -\frac{8e_c}{L^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.47)$$

hvor  $e_c \approx m_c g L^2 / 8\bar{H}$  og  $X = \frac{L}{2} - x$ . Ved å så integrere høyresiden av uttrykket over spennet til kabelen fåes det at:

$$\int_L z'_c r'_z dx = [z'_c r_z]_0^L - \int_0^L z''_c r_z dx = \frac{m_c g}{\bar{H}} \int_0^L r_z dx = \frac{8e_c}{L^2} \int_0^L r_z dx \quad (2.1.48)$$

Tilsvarende integrasjon av venstresiden gir:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{H}{EA} \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx &= \frac{H}{EA} \int_L \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx = \frac{H}{EA} \int_L \left[1 + \left(\frac{dz_c}{dx}\right)^2\right]^{3/2} dx \\ &\approx \frac{H}{EA} \int_L \left[1 + \frac{3}{2}(z'_c)^2\right] dx = \frac{H}{EA} \int_{-L/2}^{L/2} \left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{8e_c}{L^2} X\right)^2\right] dX \quad (2.1.49) \\ &= \frac{H}{EA} \left[X + 32\left(\frac{e_c}{L^2}\right)^2 X^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{H}{EA} \left[L + 8\left(\frac{e_c}{L}\right)^2 L\right] = \frac{HL}{EA} \left[1 + 8\left(\frac{e_c}{L}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Setter så høyre- og venstresiden opp mot hverandre, og får:

$$\frac{HL}{EA} \left[ 1 + 8 \left( \frac{e_c}{L} \right)^2 \right] \approx \frac{8e_c}{L^2} \int_0^L r_z dx \quad \Rightarrow \quad H(t) = \frac{EA}{l_e} \frac{8e_c}{L^2} \int_L r(x, t) dx \quad (2.1.50)$$

hvor  $l_e = L \left[ 1 + 8 \left( \frac{e_c}{L} \right)^2 \right]$ . Definerer så:

$$\lambda^2 = \left( \frac{8e_c}{L} \right)^2 \frac{EA}{\bar{H}} \frac{L}{l_e} \quad (2.1.51)$$

og gjenbruker at  $e_c \approx m_c g L^2 / 8\bar{H}$ . Lign.(2.1.42) blir da:

$$\left. \begin{aligned} r_y'' - (m_c/\bar{H})\ddot{r}_y &= 0 \\ r_z'' - (m_c/\bar{H})\ddot{r}_z &= \lambda^2 (1/L^3) \int_L r_z dx \end{aligned} \right\} \quad (2.1.52)$$

Har dermed differensialligningene til en ulastet og udempet dynamisk bevegelse, i y- og z-retning, for en grunn kabel. Ser av dette at det ikke er noen kobling mellom  $r_y$  og  $r_z$ , og de kan derfor beregnes hver for seg. Den generelle løsningen til de andreordens differensialligningene blir da:

$$\left. \begin{aligned} r_y(x, t) &= \text{Re} [\phi_y(x)e^{i\omega t}] \\ r_z(x, t) &= \text{Re} [\phi_z(x)e^{i\omega t}] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.53)$$

hvor  $\phi_y$  og  $\phi_z$  er modeformene til de to bevegelsene. Det skal nå sees videre på disse bevegelsene.

### Horisontal bevegelse

Ser først på den horisontale bevegelsen ut av planet. Har at  $r_y(x, t) \neq 0$  og  $r_z(x, t) = 0$ . Setter inn løsningen  $r_y(x, t) = \text{Re} [\phi_y(x)e^{i\omega t}]$  i differensialligningen  $r_y'' - (m_c/\bar{H})\ddot{r}_y = 0$ . Dette gir:

$$\phi_y'' = \omega^2 (m_c/\bar{H}) \phi_y = 0 \quad (2.1.54)$$

Dette uttrykket kan tilfredstilles for alle verdier av  $x$  dersom  $\phi_y''$  har tilsvarende form som  $\phi_y$ , og grensebetingelsene  $\phi_y(x=0) = \phi_y(x=L) = 0$ . Dette gir at  $\phi_{y_n} = a_{y_n} \sin(n\pi x/L)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Noe som gir følgende ligning for bevegelsen:

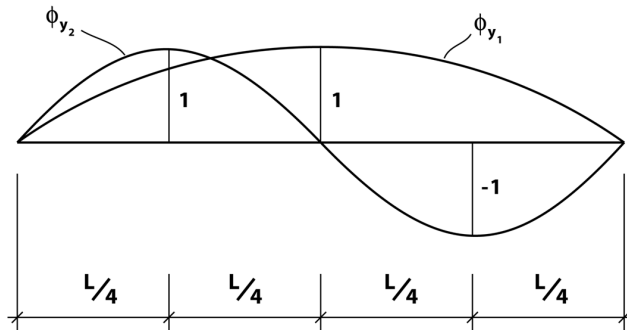
$$-\left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \omega^2 \left( \frac{m_c}{\bar{H}} \right) = 0 \quad (2.1.55)$$



Dermed kan det dannes et uttrykk for egenfrekvensene:

$$\omega_{y_n} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\bar{H}}{m_c}} = n\pi \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c L^2}} \quad (2.1.56)$$

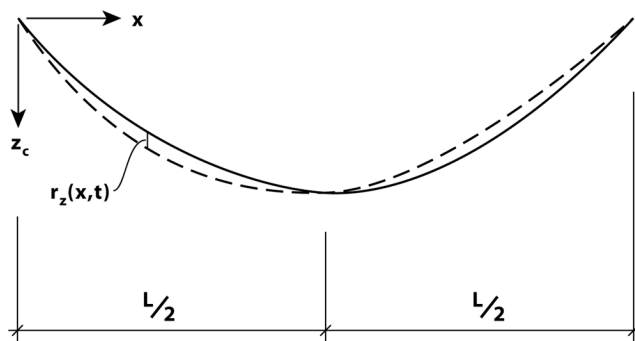
De to første egenmodene blir da:



Figur 2.4: De to første modene for horisontal bevegelse[12]

### Anti-symmetrisk vertikal bevegelse

Ser så på vertikal bevegelse. Først antas det anti-symmetrisk bevegelse. Har at  $r_y(x, t) = 0$  og  $r_z(x, t) = 0$ .



Figur 2.5: Anti-symmetrisk bevegelse[12]

Dette fører til at integralet  $\int_L r_z dx$  er lik null, og gir at:

$$r_z'' - (m_c \bar{H}) \ddot{r}_z = 0 \quad (2.1.57)$$

Setter så inn for  $r_z(x, t) = \text{Re} [\phi_z(x) e^{i\omega t}]$ , og får:

$$\phi_z'' + \omega^2 (m_c / \bar{H}) \phi_z = 0 \quad (2.1.58)$$

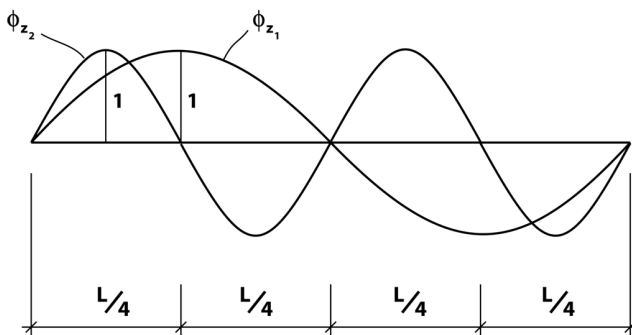
Den anti-symmetriske løsningen blir da  $\phi_{z_n} = a_{z_n} \sin(2n\pi x/L)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , og det fåes at:

$$-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{m_c}{\bar{H}}\right) = 0 \quad (2.1.59)$$

Uttrykket for egenfrekvensene blir dermed:

$$\omega_{z_n} = 2n\pi \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c L^2}} \quad (2.1.60)$$

Som gir de to første egenmodene som:



Figur 2.6: De to første modene for anti-symmetrisk bevegelse[12]

### Symmetrisk vertikal bevegelse

Ønsker nå å se på symmetrisk vertikal bevegelse. Har fortsatt at  $r_y(x, t) = 0$  og  $r_z(x, t) \neq 0$ , men antar nå symmetrisk bevegelse. Dette betyr at integralet  $\int_L r_z dx$  ikke er lik null, og gir at:

$$r_z'' - (m_c / \bar{H}) \ddot{r}_z = \lambda^2 \left(\frac{1}{L^3}\right) \int_L r_z dx \quad (2.1.61)$$

Setter så inn for  $r_z(x, t) = \text{Re} [\phi_z(x)e^{i\omega t}]$ :

$$\begin{aligned}\phi_z'' + \omega^2(m_c/\bar{H})\phi_z &= \lambda^2 \left(\frac{1}{L^3}\right) \int_L \phi_z dx \\ \Rightarrow \phi_z'' + \beta^2\phi_z &= \lambda^2 \left(\frac{1}{L^3}\right) \int_L \phi_z dx\end{aligned}\quad (2.1.62)$$

hvor  $\beta^2 = \omega^2(m_c/\bar{H})$ . Løsningen som tilfredstiller grensebetingelsene blir da:

$$\phi_z = a_z \left\{ 1 - \frac{\cos[\beta(x - \frac{L}{2})]}{\cos(\frac{\beta L}{2})} \right\} \quad (2.1.63)$$

Dette gir:

$$\int_L \phi_z dx = a_z \int_L \left\{ 1 - \frac{\cos[\beta(x - \frac{L}{2})]}{\cos(\frac{\beta L}{2})} \right\} dx \quad (2.1.64)$$

Setter så inn for  $X = x - L/2$ , og får:

$$\begin{aligned}\int_L \phi_z dx &= a_z \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ 1 - \frac{\cos[\beta X]}{\cos(\frac{\beta L}{2})} \right\} dx \\ &= a_z \left[ X - \frac{\sin[\beta X]}{\beta \cos(\frac{\beta L}{2})} \right]_{-L/2}^{L/2} = a_z \left[ L - \frac{2}{\beta} \tan\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right]\end{aligned}\quad (2.1.65)$$

Setter så inn i differensialligningen:

$$\begin{aligned}\beta^2 \frac{\cos[\beta(x - L/2)]}{\cos(\frac{\beta L}{2})} + \beta^2 \left\{ 1 - \frac{\cos[\beta(x - L/2)]}{\cos(\frac{\beta L}{2})} \right\} \\ = \frac{\lambda^2}{L^3} \left[ L - \frac{2}{\beta} \tan\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right]\end{aligned}\quad (2.1.66)$$

Dette gir:

$$\tan\left(\frac{\beta L}{2}\right) = \left(-\frac{\beta^2 L^3}{\lambda^2} + L\right) \frac{\beta}{2} = \frac{\beta L}{2} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\beta L}{2}\right)^3 \quad (2.1.67)$$

Siden  $\beta^2 = \omega^2 m_c / \bar{H}$ , vil alle  $\beta = \beta_n$  representere en egenfrekvens:

$$\omega_n = \beta_n \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c}} \quad (2.1.68)$$

Korresponderende egenmode er da gitt ved:

$$\phi_{z_n} = a_{z_n} \left\{ 1 - \frac{\cos [\beta_n(x - L/2)]}{\cos \left( \frac{\beta_n L}{2} \right)} \right\} \quad (2.1.69)$$

hvor  $a_{z_n}$  er tilfeldig, og kan være beleilig å sette som en enhetsstørrelse. Løsningen på egenmodene avhenger i stor grad av stivhetsparameteren  $\lambda$ . Ved å endre  $\lambda$  vil egenmodene endre form, og det er derfor viktig å merke seg stivhetens betydning. Dersom  $\lambda \rightarrow \infty$ , noe som betyr at kabelen ikke kan forlenges, fåes det følgende uttrykk for  $\tan \left( \frac{\beta L}{2} \right)$ :

$$\tan \left( \frac{\beta L}{2} \right) = \frac{\beta L}{2} \quad (2.1.70)$$

Dette gir den approksimative løsningen:

$$\text{Første mode :} \quad \frac{\beta_1 L}{2} \approx 1,43\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \approx 8,98 \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c L^2}}$$

$$\text{Andre mode :} \quad \frac{\beta_2 L}{2} \approx 2,46\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_2 \approx 15,45 \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c L^2}}$$

$$\text{Høyere mode, } n \geq 3 : \quad \frac{\beta_n L}{2} \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \Rightarrow \quad \omega_n \approx (2n + 1)\pi \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c L^2}} \quad (2.1.71)$$

Dersom  $\frac{e_c}{L} \rightarrow 0$ , som betyr at kabelen er en stram snor, så vil  $\lambda \rightarrow 0$  og uttrykket blir:

$$\tan \left( \frac{\beta L}{2} \right) \rightarrow -\infty \quad (2.1.72)$$

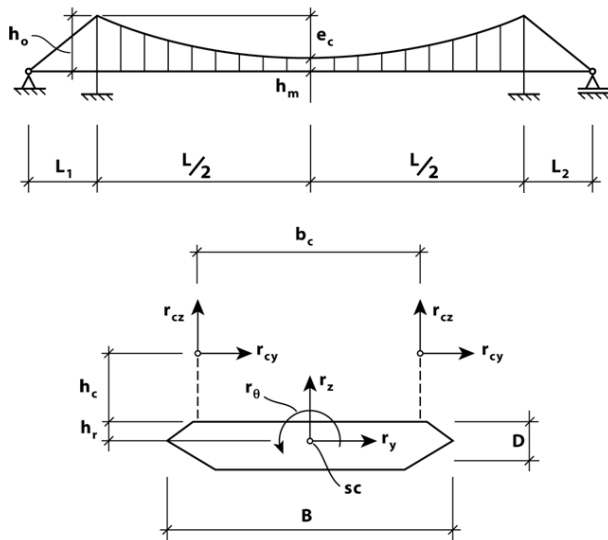
Løsningen blir da:

$$\frac{\beta_n L}{2} = \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \quad \Rightarrow \quad \omega_n = (2n - 1)\pi \sqrt{\frac{\bar{H}}{m_c L^2}} \quad (2.1.73)$$

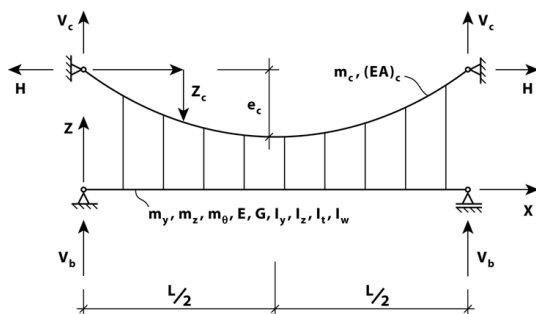
## 2.2 Hengebruer som virker over ett spenn

Etter å ha gått gjennom kabelteorien, skal det nå sees på hengebruer som virker over ett spenn. Ved å se på hengebruer som to eller flere kabler og en bjelke, kan kabelteorien trekkes inn i analysen av hengebruer.

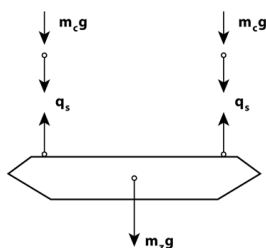
Når det sees på hengebruer har man tre hovedkomponenter, brubanen(bjelken), kablene og stagene som kobler kablene til brubanen. Massen deles derfor opp i forskjellige komponenter. Lasten  $m_y$  representerer bjelkens masse ved bevegelse i y-retning, mens  $m_z$  representerer den fordelte lasten ved bevegelse i z-retning.



Figur 2.7: Hengebru som virker over ett spenn med tverrsnitt[12]



Figur 2.8: Idealisert system[12]



Figur 2.9: Kraften i stagene per lengdeenh[12]

Siden stivhetsegenskapene til systemet i stor grad avhenger av aksialkraften i kablene, er det nødvendig å starte med å se på den statiske situasjonen. Det antas at brua under konstruksjonsfasen bygges fra midten og utover, slik at lasten overføres via kablene til tårnene. Dette er den mest vanlige måten å bygge hengebruere på, og den har fordelen at skjærkraften mellom bjelken og tårnene er neglisjerbar, altså at  $V_b(x=0) = V_b(x=L) = 0$ . Det er to ting som er verdt å merke seg ved den tidsuavhengige likevekten før det gås videre til å se på dynamikken. Den første er at, som vist i figur 2.9, den jevnt fordelte lasten i stagene er gitt som  $q_s \approx m_z g/2$ . Den andre er at den vertikale tidsuavhengige likevekten til kablene krever at[12]:

$$d\bar{V} = \left( m_c ds + \frac{1}{2} m_z dx \right) g \quad (2.2.1)$$

Dermed kan den tidsuavhengige horisontale kabelkomponenten  $\bar{H}$  finnes ved å ta momentlikevekt av halve kabellengden med hensyn til toppunktet:

$$\begin{aligned}\bar{H} \cdot e_c &= \int_0^{L/2} \left( \frac{m_z}{2} dx + m_c ds \right) g \cdot x = g \int_0^{L/2} \left( \frac{m_z}{2} + m_c \frac{ds}{dx} \right) x dx \\ &= g \int_0^{L/2} \left\{ \frac{m_z}{2} + m_c \left[ 1 + \left( \frac{dz_c}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} x dx \\ &\approx g \int_0^{L/2} \left[ \frac{m_z}{2} + m_c \left( 1 + \frac{1}{2} z_c'^2 \right) \right] x dx \quad (2.2.2)\end{aligned}$$

Introduserer så  $z_c \approx 4e_c \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)$ , og får:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{H} e_c}{g} &= \frac{m_z}{2} \int_0^{L/2} x dx + m_c \int_0^{L/2} \left[ 1 + 8 \left( \frac{e_c}{L} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right)^2 \right] x dx \\ &= \frac{m_z L^2}{16} + \frac{m_c L^2}{8} \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{e_c}{L} \right)^2 \right] \quad (2.2.3)\end{aligned}$$

Noe som gir:

$$\bar{H} = \frac{m_z g L^2}{16 e_c} \left\{ 1 + \frac{2 m_c}{m_z} \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{e_c}{L} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.2.4)$$

### Dynamisk bevegelse i horisontal y-retning

Kan nå begynne å se på de dynamiske egenskapene til brua. Ser først på sideveis bevegelse i y-retning. Likevektsbetingelsene for et infinitesimalt element  $dx$  av bjelken er da gitt ved:

$$m_y \ddot{r}_y + c_y \dot{r}_y + EI_z \frac{d^4 r_y}{dx^4} + 2q_s \frac{r_y - r_{cy}}{h_c} = q_y \quad (2.2.5)$$

mens den korresponderende likevekten i hver av kablene er gitt ved:

$$m_c \ddot{r}_y + c_{cy} \dot{r}_y - \bar{H} \frac{d^2 r_{cy}}{dx^2} - q_s \frac{r_y - r_{cy}}{h_c} = q_{cy} \quad (2.2.6)$$

hvor  $q_y$  og  $q_{cy}$  er de dynamiske lastene bjelken og hver av kablene,  $r_y$  og  $r_{cy}$  er forskyvningene,  $c_y$  og  $c_{cy}$  er dempingskoeffisientene,  $q_s = m_z g / 2$  er kraften i stagene (pr. lengde) og  $h_c$  er stagenes lengde. Siden  $z_c \approx 4e_c \frac{x}{L} \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right)$ :

$$h_c = h_m + e_c - z_c = h_m + e_c \left( 1 - 2 \frac{x}{L} \right)^2 \quad (2.2.7)$$

hvor  $h_m$  er avstanden mellom kabelen og bjelken på midten. Videre sees det på tilfellet hvor systemet ikke er påkjent av last eller demping ( $c_y = c_{cy} = q_y = q_{cy} = 0$ ), og det antas en harmonisk sinus-Fourierrekke som løsningen.

$$\left. \begin{aligned} r_y(x, t) &= \phi_y(x)e^{i\omega t} \\ r_{cy}(x, t) &= \phi_{cy}(x)e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{ hvor } \left. \begin{aligned} \phi_y(x) &= \sum_{n=1}^N a_{y_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \phi_{cy}(x) &= \sum_{n=1}^N a_{cy_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)$$

Setter så dette inn i likevektsuttrykket (lign.(2.2.5)):

$$\begin{aligned} & m_y(i\omega)^2\phi_y + EI_z\phi_y'''' + 2q_s \frac{\phi_y - \phi_{cy}}{h_c} \\ = & \sum_{n=1}^N \left\{ \left[ EI_z \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 a_{y_n} + \frac{m_z g (a_{y_n} - a_{cy_n})}{h_m + e_c \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)^2} - m_y \omega^2 a_{y_n} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} = 0 \quad (2.2.9) \end{aligned}$$

Bruker så Galerkins tilnærming ved å multiplisere med  $\left(\frac{2}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ , og integrerer over lengden:

$$\sum_{n=1}^N [(\alpha_{pn} + \gamma_{pn})a_{y_n} - \gamma_{pn}a_{cy_n} - \omega^2 \tilde{m}_{y_n} a_{y_n}] = 0 \quad , \quad p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.2.10)$$

hvor:

$$\begin{aligned} \alpha_{pn} &= EI_z \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} EI_z \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{pn} &= \frac{m_z g}{e_c} \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{1 + \frac{h_m}{e_c} - 4\left(\frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right)} dx \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{hvis } p \text{ jevn og } n \text{ odd} & \Rightarrow \gamma_{pn} = 0 \\ \text{hvis } p \text{ odd og } n \text{ jevn} & \Rightarrow \gamma_{pn} = 0 \\ \text{ellers} & \Rightarrow \gamma_{pn} \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.12) \end{aligned}$$



$$\tilde{m}_{y_n} = \tilde{m}_{y_p} = m_y \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} m_y & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Kan også gjøre tilsvarende med kabelens likevekt(lign.(2.2.6)):

$$2m_c(i\omega)^2 \phi_{cy} - 2\bar{H}\phi_{cy}'' - m_z g \frac{\phi_y - \phi_{cy}}{h_c} \quad (2.2.14)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left\{ \left[ 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_{cy_n} - \frac{m_z g (a_{y_n} - a_{cy_n})}{h_m + e_c \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)^2} - 2m_c \omega^2 a_{cy_n} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \right\} = 0$$

multipliserer igjen med  $\left(\frac{2}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ , og integrerer over lengden:

$$\sum_{n=1}^N [-\gamma_{pn} a_{y_n} + (\beta_{pn} + \gamma_{pn}) a_{cy_n} - \omega^2 \tilde{m}_{c_n} a_{cy_n}] = 0 \quad , \quad p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.2.15)$$

hvor:

$$\beta_{pn} = 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \begin{cases} 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\tilde{m}_{c_n} = \tilde{m}_{c_p} = 2m_c \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 2m_c & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Det er også mulig å skrive beregningene på matriseform, ved å bytte ut  $p = 1, 2, 3, \dots, N$  og rekkeutviklingen med:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc}
 \alpha_{11} + \gamma_{11} & -\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} & -\gamma_{1p} & \cdots & \gamma_{1N} & -\gamma_{1N} \\
 -\gamma_{11} & \beta_{11} + \gamma_{11} & \cdots & -\gamma_{1p} & \gamma_{1p} & \cdots & -\gamma_{1N} & \gamma_{1N} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \gamma_{p1} & -\gamma_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} + \gamma_{pp} & -\gamma_{pp} & \cdots & \gamma_{pN} & -\gamma_{pN} \\
 -\gamma_{p1} & \gamma_{p1} & \cdots & -\gamma_{pp} & \beta_{pp} + \gamma_{pp} & \cdots & -\gamma_{pN} & \gamma_{pN} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \gamma_{N1} & -\gamma_{N1} & \cdots & \gamma_{Np} & -\gamma_{Np} & \cdots & \alpha_{NN} + \gamma_{NN} & -\gamma_{NN} \\
 -\gamma_{N1} & \gamma_{N1} & \cdots & -\gamma_{Np} & \gamma_{Np} & \cdots & -\gamma_{NN} & \beta_{NN} + \gamma_{NN}
 \end{array} \right\}$$

$$-\omega^2 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 \tilde{m}_{y_1} & & & & & & & \\
 & \tilde{m}_{c_1} & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \tilde{m}_{y_p} & & & & \\
 & & & & \tilde{m}_{c_p} & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \tilde{m}_{y_N} & \\
 & & & & & & & \tilde{m}_{c_N}
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c}
 a_{y_1} \\
 a_{cy_1} \\
 \vdots \\
 a_{y_p} \\
 a_{cy_p} \\
 \vdots \\
 a_{y_N} \\
 a_{cy_N}
 \end{array} \right\} = 0 \quad (2.2.18)$$

Dermed er forskyvningsamplitudevektoren definert:

$$\mathbf{a}_y = [a_{y_1} \quad \cdots \quad a_{y_p} \quad \cdots \quad a_{y_N}]^T \quad (2.2.19)$$

hvor  $\mathbf{a}_{y_p} = [a_{y_p} \quad a_{cy_p}]^T$ , stivhetsmatrisen:

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix}
 \mathbf{\Omega}_{11} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{1p} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{1N} \\
 \vdots & \ddots & & \mathbf{\Gamma}_{pn} & \vdots \\
 \mathbf{\Gamma}_{p1} & \cdots & \mathbf{\Omega}_{pp} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{pN} \\
 \vdots & \mathbf{\Gamma}_{np} & & \ddots & \vdots \\
 \mathbf{\Gamma}_{N1} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{Np} & \cdots & \mathbf{\Omega}_{NN}
 \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

hvor  $\mathbf{\Omega}_{pp} = \begin{bmatrix} \alpha_{pp} + \gamma_{pp} & -\gamma_{pp} \\ -\gamma_{pp} & \beta_{pp} + \gamma_{pp} \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{\Gamma}_{pn} = \gamma_{pn} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Massematrisen:

$$\mathbf{M}_y = \text{diag} [\tilde{m}_{y_1} \quad \cdots \quad \tilde{m}_{y_p} \quad \cdots \quad \tilde{m}_{y_N}] \quad (2.2.21)$$

hvor  $\tilde{\mathbf{m}}_{y_p} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{y_p} & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{c_p} \end{bmatrix}$ . Dermed kan likevekten skrives som:

$$(\mathbf{K}_y - \omega^2 \mathbf{M}_y) \mathbf{a}_y = \mathbf{0} \quad (2.2.22)$$

### Dynamisk bevegelse i planet i vertikal z-retning

Det er nå sett på forskyvningene inn og ut av planet. Det ønskes nå å se på vertikal forskyvning. Siden fleksibiliteten til stagene neglisjeres, vil de to kablene og bjelken bevege seg likt. Det er derfor ikke nødvendig å skille mellom bevegelsen til bjelken og kablene. Ved å definere  $H_{tot} = \bar{H} + H(t)$ , blir da likevektsbetingelsene for et infinitesimalt bruelement  $dx$ , med hensyn på kreftene i  $x$ -retning, gitt ved:

$$-2H_{tot} + 2(H_{tot} + dH_{tot}) = 0 \quad \Rightarrow \quad dH_{tot} = 0 \quad (2.2.23)$$

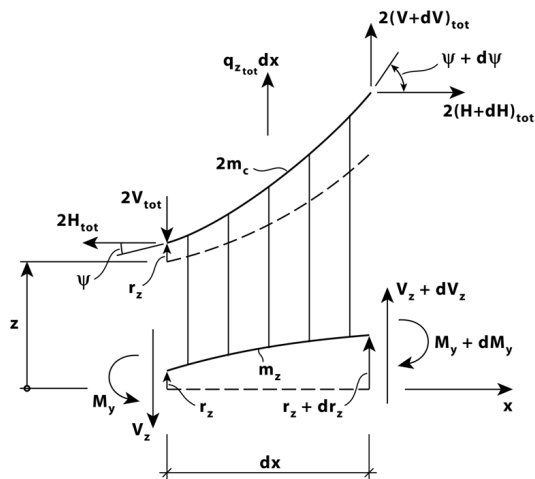
Har allerede at  $d\bar{H} = 0$ , og dermed vil også  $dH(t) = 0$ . Den korresponderende likevektsbetingelsen med hensyn på krefter i  $z$ -retning bli da:

$$(2m_c ds + m_z dx) \ddot{r}_z + (2m_c ds + m_z dx) g + c_z \dot{r}_z - 2dV_{tot} - dV_z = q_{z_{tot}} dx \quad (2.2.24)$$

hvor  $q_{z_{tot}} = q_z + 2q_{c_z}$  er dynamisk last per lengdeenhet for brudekket og de to kablene,  $r_z$  er vertikal forskyvning,  $c_z$  er dempingskoeffisienten,  $V_{tot} = \bar{V} + V(t)$  er den totale vertikale kraftkomponenten i hver av kablene, og  $V_z$  er den vertikale skjærkraften i bjelken.

Dermed blir differensialligningen for den vertikale bevegelsen:

$$\left( 2m_c \frac{ds}{dx} + m_z \right) \ddot{r}_z + c_z \dot{r}_z - 2V'_{tot} - V'_z + \left( 2m_c \frac{ds}{dx} + m_z \right) g = q_{z_{tot}} \quad (2.2.25)$$


 Figur 2.10: Det infinitesimale elementet  $dx$ [12]

Ved å se på det infinitesimale elementet, fåes:

$$\begin{aligned} \frac{V_{tot}}{H_{tot}} &= \frac{\bar{V} + V}{\bar{H} + H} = \tan \psi = \frac{d}{dx}(z + r_z) = z' + r'_z \\ &\Rightarrow \bar{V} + V = \bar{H}z' + Hz' + (\bar{H} + H)r'_z \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Som gir:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \bar{H}z' \\ V(t) &= Hz' + (\bar{H} + H)r'_z \end{aligned} \right\} \quad (2.2.27)$$

Introduserer så:

$$V_z = M'_y = \frac{d}{dx}(-EI_y r''_z) = -EI_y r'''_z \quad (2.2.28)$$

og den tidsuavhengige likevektsbetingelsen fra lign. (2.2.1). Ser så på tilfellet uten last og demping, og får differensialligningen for den vertikale bevegelsen på formen:

$$\left(2m_c \frac{ds}{dx} + m_z\right) \ddot{r}_z - 2[Hz'' + (\bar{H} + H)r''_z] + EI_y r''''_z = 0 \quad (2.2.29)$$

Innefor teorien om grunne kabler er en vanlig tilnærming at  $H(t) \ll \bar{H}$ , og at  $\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \approx 1$ . Videre fåes fra lign.(2.1.33) at:

$$z = e_c + h_m - z_c \approx e_c + h_m - 4e_c \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \Rightarrow z'' \approx \frac{8e_c}{L^2} \quad (2.2.30)$$

Fra teorien om grunne kabler er  $z_c$  og  $r_z$  definert positivt nedadrettet, ettersom det fokuseres på kabelens vibrasjon alene. Ettersom det her fokuseres på hele brua er det mer hensynsmessig å definere  $z_c$  og  $r_z$  positivt oppadrettet. Teorien om grunne kabler gir da:

$$H(t) = \frac{(EA)_c}{l_e} \frac{8e_c}{L^2} \int_0^L (-r_z) dx \quad \text{hvor} \quad l_e = L \cdot \left[1 + 8 \left(\frac{e_c}{L}\right)^2\right] \quad (2.2.31)$$

og hvor  $(EA)_c$  er produktet av elastisitetsmodulen og tverrsnittsarealet til kablene. Differensialligningen til den vertikale bevegelesen blir da:

$$(2m_c + m_z)\ddot{r}_z + \frac{128e_c^2 (EA)_c}{L^4 l_e} \int_0^L r_z dx - 2\bar{H}r_z'' + EI_y r_z'''' = 0 \quad (2.2.32)$$

Som tidligere taes det for gitt at brubanen er fritt opplagt på tårnene, og bruker en harmonisk Fourierrekke som løsning:

$$r_z(x, t) = \phi_z(x)e^{i\omega t} \quad \text{hvor} \quad \phi_z(x) = \sum_{n=1}^N a_{z_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.2.33)$$

Dermed blir differensialligningen for den vertikale bevegelsen:

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{128e_c^2 (EA)_c}{L^4 l_e} a_{z_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_{z_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + EI_y \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 a_{z_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \omega^2 (2m_c + m_z) a_{z_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} e^{i\omega t} = 0 \quad (2.2.34)$$

Galerkins tilnærming ved å multiplisere med  $\left(\frac{2}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ , og integrasjon over lengden gir da:

$$\sum_{n=1}^N [(\kappa_{pn} + \lambda_{pn}) a_{z_n} + \mu_{pn} a_{z_n} - \omega^2 \tilde{m}_{z_n} a_{z_n}] = 0 \quad , \quad p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.2.35)$$

hvor

$$\begin{aligned} \kappa_{pn} &= EI_y \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} EI_y \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{pn} &= 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Mens, pga. at  $\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{2L}{j\pi} & \text{for } j = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } j = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mu_{pn} &= \frac{128e_c^2 (EA)_c}{L^4} \frac{2}{l_e} \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} \left(\frac{32e_c}{\pi L}\right)^2 \frac{(EA)_c}{Ll_e} \frac{1}{pn} & \text{for } p \text{ og } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } p \text{ eller } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

og, hvor:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{z_p} &= (2m_c + m_z) \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} (2m_c + m_z) & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

På matriseform blir dette:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cccc} \kappa_{11} + \lambda_{11} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \kappa_{pp} + \lambda_{pp} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & \kappa_{NN} + \lambda_{NN} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cccc} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} & \cdots & \mu_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} & \cdots & \mu_{nN} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1} & \cdots & \mu_{Nn} & \cdots & \mu_{NN} \end{array} \right] \\ -\omega^2 \left[ \begin{array}{cccc} \tilde{m}_{z_1} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \tilde{m}_{z_p} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & \tilde{m}_{z_N} \end{array} \right] \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{c} a_{z_1} \\ \vdots \\ a_{z_p} \\ \vdots \\ a_{z_N} \end{array} \right] = 0 \quad (2.2.40)$$

Dermed er forskyvningsamplitudevektoren definert:

$$\mathbf{a}_z = [a_{z_1} \quad \cdots \quad a_{z_p} \quad \cdots \quad a_{z_N}]^T \quad (2.2.41)$$

Stivhetsmatrisen:

$$\mathbf{K}_z = \left[ \begin{array}{cccc} \kappa_{11} + \lambda_{11} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \kappa_{pp} + \lambda_{pp} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & \kappa_{NN} + \lambda_{NN} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cccc} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} & \cdots & \mu_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} & \cdots & \mu_{nN} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1} & \cdots & \mu_{Nn} & \cdots & \mu_{NN} \end{array} \right] \quad (2.2.42)$$

og massematrisen:

$$\mathbf{M}_z = (2m_c + m_z)\mathbf{I} \quad (2.2.43)$$

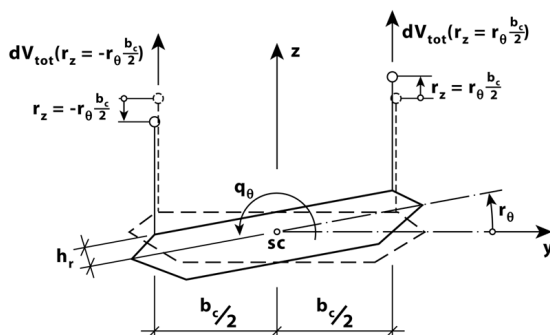
hvor  $\mathbf{I}$  er identitetsmatrisen. Likevekten kan dermed skrives på formen:

$$(\mathbf{K}_z - \omega^2 \mathbf{M}_z) \mathbf{a}_z = 0 \quad (2.2.44)$$

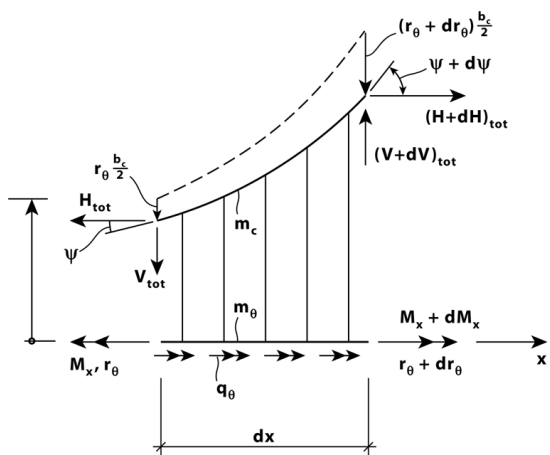

---

### Dynamisk bevegelse i ren torsjon

Til slutt skal det sees på dynamisk bevegelse i ren torsjon. Siden som nevnt tidligere, fleksibiliteten til stagene neglisjeres, vil kablene opptre harmonisk (se figur 2.11).



Figur 2.11: Tverrsnitt ved torsjon[12]



Figur 2.12: Infinitesimalt element i torsjon[12]

Ser fra figuren at  $r_{c_z} = \pm r_\theta \frac{b_c}{2}$ , hvor  $b_c$  er distansen mellom kablene. Som tidli-



gere er  $H_{tot} = \bar{H} + H(t)$  og  $V_{tot} = \bar{V} + V(t)$ , og siden det ikke er noen krefter som virker i  $x$ - og  $z$ -retning i bjelken:

$$dH_{tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\bar{H} = 0 \quad \text{og} \quad dH = 0 \quad (2.2.45)$$

I statisk tilstand er likevekten:

$$d\bar{V} - q_s dx - m_c g ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}' = \frac{m_z g}{2} + m_c g \frac{ds}{dx} \approx \frac{m_z g}{2} + m_c g \quad (2.2.46)$$

Videre ved å huske at  $V = hz' + (\bar{H} + H)r'_z$  og at  $H(t) = \left[ \frac{(EA)_c}{l_e} \right] \frac{8e_c}{L^2} \int_0^L (-r_z) dx$ , kan det sees fra figur 2.11 at ved  $y = -\frac{b_c}{2}$  er kabelen strukket vertikalt  $r_z = -\left(\frac{b_c}{2}\right) r_\theta$ , noe som betyr at:

$$V \left( y = +\frac{b_c}{2}, t \right) \approx H z' + \bar{H} r'_z = |H| z' - \bar{H} \frac{b_c}{2} r'_\theta \quad (2.2.47)$$

Torsjonsmomentlikevekten blir da:

$$\begin{aligned} q_\theta dx + dM_x - c_\theta dx \dot{r}_\theta - \left[ m_\theta dx + 2m_c \left( \frac{b_c}{2} \right)^2 ds \right] \ddot{r}_\theta + dV_{tot} \left( y = \frac{b_c}{2} \right) \left( \frac{b_c}{2} - r_\theta h_r \right) \\ - dV_{tot} \left( y = -\frac{b_c}{2} \right) \left( \frac{b_c}{2} + r_\theta h_r \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

hvor  $m_\theta$  er massetregghetsmomentet til brudekket,  $c_\theta$  er tverrsnittdempingskoeffisienten, og  $h_r$  er avstanden fra skjærsenteret til festepunktet til kablene. Antar  $\frac{ds}{dx} \approx 1$ , og får følgende differensialligning for bevegelse i ren torsjon:

$$\begin{aligned} \left[ m_\theta + 2m_c \left( \frac{b_c}{2} \right)^2 \right] \ddot{r}_\theta + c_\theta \dot{r}_\theta - \left[ V'_{tot} \left( y = \frac{b_c}{2} \right) - V'_{tot} \left( y = -\frac{b_c}{2} \right) \right] \\ + \left[ V'_{tot} \left( y = \frac{b_c}{2} \right) + V'_{tot} \left( y = -\frac{b_c}{2} \right) \right] h_r r_\theta - M'_x = q_\theta \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

hvor

$$\begin{cases} V'_{tot} \left( y = \frac{b_c}{2} \right) = \bar{V}' + V' \left( y = \frac{b_c}{2} \right) = m_c g + \frac{m_z g}{2} - |H| z'' + \bar{H} \frac{b_c}{2} r''_\theta \\ V'_{tot} \left( y = -\frac{b_c}{2} \right) = \bar{V}' + V' \left( y = -\frac{b_c}{2} \right) = m_c g + \frac{m_z g}{2} + |H| z'' - \bar{H} \frac{b_c}{2} r''_\theta \end{cases}$$

Dermed kan differensialligningen skrives som:

$$\left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2}\right) \ddot{r}_\theta + c_\theta \dot{r}_\theta + |H| b_c z'' - \bar{H} \frac{b_c^2}{2} r_\theta'' + (2m_c + m_z) g h_r r_\theta - M'_x = q_\theta \quad (2.2.50)$$

hvor  $m_{\theta_{tot}} = \left(m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2}\right)$ , og  $|H| = \frac{(EA)_c}{L e} \frac{8e_c}{L} \frac{b_c}{2} \int_0^L r_\theta dx$ . Vi introduserer så  $z'' = \frac{8e_c}{L^2}$  og  $M'_x = GI_t r_\theta''$ , og får:

$$m_{\theta_{tot}} \ddot{r}_\theta + c_\theta \dot{r}_\theta + 32 \left(\frac{e_c b_c}{L^2}\right)^2 \frac{(EA)_c}{l_e} \int_0^L r_\theta dx - \bar{H} \frac{b_c^2}{2} r_\theta'' + (2m_c + m_z) g h_r r_\theta - GI_t r_\theta'' + EI_w r_\theta'''' = q_\theta \quad (2.2.51)$$

Videre sees det på en udempet og ulastet situasjon, altså at  $q_\theta = c_\theta = 0$ . Antar at bjelken har gaffelopplagere og er fritt opplagt på tårnene. Ved å da bruke harmonisk Fourierrekke som løsning:

$$r_\theta(x, t) = \phi_\theta(x) e^{i\omega t} \quad \text{hvor} \quad \phi_\theta(x) = \sum_{n=1}^N a_{\theta_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.2.52)$$

fåes:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left\{ -\omega^2 m_{\theta_{tot}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + 32 \frac{e_c b_c}{L^2} \frac{(EA)_c}{l_e} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right. \\ \left. + \frac{\bar{H} b_c^2}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + (2m_c + m_z) g h_r \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right. \\ \left. + \left[ GI_t + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI_w \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} a_{\theta_n} e^{i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

Bruker Galerkins metode, og integrerer over hele lendgen:

$$\sum_{n=1}^N [(\Omega_{pn} + \vartheta_{pn} + \nu_{pn}) a_{\theta_n} + \chi_{pn} a_{\theta_n} - \omega^2 \tilde{m}_{\theta_{tot_n}} a_{\theta_n}] = 0 \quad , \quad p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.2.54)$$

hvor

$$\begin{aligned}\Omega_{pn} &= \left[ GI_t + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 EI_w \right] \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} (n\pi L)^2 [GI_t + (n\pi L)^2 EI_w] & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.55)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_{pn} &= \frac{\bar{H}b_c^2}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} \frac{\bar{H}b_c^2}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.56)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_{pn} &= (2m_c + m_z)gh_r \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} (2m_c + m_z)gh_r & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad (2.2.57)\end{aligned}$$

Mens pga at  $\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{2L}{j\pi} & \text{for } j = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } j = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$

$$\begin{aligned}\chi_{pn} &= 32 \left( \frac{e_c b_c}{L^2} \right)^2 \frac{(EA)_c}{l_e} \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \begin{cases} \left( \frac{16e_c b_c}{\pi L} \right)^2 \frac{(EA)_c}{L l_e} \frac{1}{pn} & \text{for } p \text{ og } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } p \text{ eller } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (2.2.58)\end{aligned}$$

På matriseform blir dette:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccccc} \Omega_{11} + \vartheta_{11} + \nu_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Omega_{pp} + \vartheta_{pp} + \nu_{pp} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \Omega_{NN} + \vartheta_{NN} + \nu_{NN} \end{array} \right] \\ & + \left[ \begin{array}{ccccc} \chi_{11} & \cdots & \chi_{1n} & \cdots & \chi_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \chi_{n1} & \cdots & \chi_{nn} & \cdots & \chi_{nN} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \chi_{N1} & \cdots & \chi_{Nn} & \cdots & \chi_{NN} \end{array} \right] \\ & - \omega^2 \left[ \begin{array}{cccccc} \tilde{m}_{\theta_{tot1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tilde{m}_{\theta_{totp}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \tilde{m}_{\theta_{totN}} \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} a_{\theta_1} \\ \vdots \\ a_{\theta_p} \\ \vdots \\ a_{\theta_N} \end{bmatrix} = 0 \tag{2.2.59}$$

Dermed er torsjonsamplitudevektoren definert:

$$\mathbf{a}_\theta = [a_{\theta_1} \quad \cdots \quad a_{\theta_p} \quad \cdots \quad a_{\theta_N}]^T \tag{2.2.60}$$

Massematrisen:

$$\mathbf{M}_\theta = m_{\theta_{tot}} \mathbf{I} \quad \text{hvor} \quad m_{\theta_{tot}} = m_\theta + m_c \frac{b_c^2}{2} \tag{2.2.61}$$

Stivhetsmatrisen:

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{bmatrix} \Omega_{11} + \vartheta_{11} + \nu_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Omega_{pp} + \vartheta_{pp} + \nu_{pp} & & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & & \Omega_{NN} + \vartheta_{NN} + \nu_{NN} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} \chi_{11} & \cdots & \chi_{1n} & \cdots & \chi_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \chi_{n1} & \cdots & \chi_{nn} & \cdots & \chi_{nN} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \chi_{N1} & \cdots & \chi_{Nn} & \cdots & \chi_{NN} \end{bmatrix} \tag{2.2.62}$$

Får dermed likevektsuttrykket:

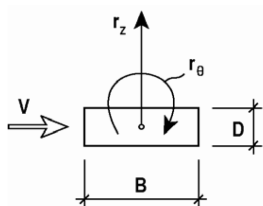
$$(\mathbf{K}_\theta - \omega^2 \mathbf{M}_\theta) \mathbf{a}_\theta = 0 \tag{2.2.63}$$

## 2.3 Virvelavløsninger

En gangbru vil være utsatt for flere laster, og det må sees på den totale virkningen av lastene når en bru skal dimensjoneres. I denne oppgaven er det valgt å legge fokus på virvelavløsningslast, og hvordan slanke brukonstruksjoner responderer til denne typen last.

Virvelavløsninger oppstår når vindstrømmen koliderer med broa, og den tvinges over eller under. Denne forandringen i vindfeltet gjør at vinden går ut i virvler som ruller over brutverrsnittet, som resulterer i vertikale forkyvninger. Hver gang bru forskyves i en retning vil virvlene skifte side i forhold til brudekket, og resulterer i svingninger i konstruksjonen. Virvelavløsningene inntreffer ved bestemte vindhastigheter, og er forbundet med lave vindhastigheter[5].

Det ønskes å se på tilfellet hvor virvelavløsningsresponsen går mot resonans. Først sees det på virvelavløsningsfrekvensen  $f_s$ , som finnes fra egenskapene til tverrsnittet til broa.



Figur 2.13: Tilfeldig tverrsnitt av bru[11]

$$f_s = St \cdot \frac{V}{D} \quad (2.3.1)$$

hvor  $St$  er Strouhal tallet. Resonans forekommer når  $f_s = f_i$ , hvor  $f_i$  er egenfrekvensen til systemet. Dermed er kritisk vindhastighet gitt som:

$$V_{R_i} = f_i \cdot \frac{D}{St} \quad (2.3.2)$$

For å se videre på vivelavløsningslasten startes det med å se på frekvensresponsmatrisen. Frekvensresponsfunksjonen  $\hat{H}_\eta(\omega)$  vil for virvelavløsninger være relatert til strukturens hastighet, og vil derfor avhenge av den modale responsen.

Får dermed[11]:

$$\hat{\mathbf{H}}_{\eta}(\omega) = \left\{ \mathbf{I} - \left( \omega \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_i} \right] \right)^2 + 2i\omega \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{\omega_i} \right] (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{ae}) \right\}^{-1} \quad (2.3.3)$$

hvor  $\boldsymbol{\xi} = \text{diag}[\xi_i]$ , og  $\boldsymbol{\xi}_{ae}$  er gitt ved:

$$\begin{aligned} \xi_{aeij} &= \frac{\omega_i \tilde{C}_{aeij}}{2 \omega_i^2 \tilde{M}_i} = \frac{\rho B^2 \int_{L_{exp}} (\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{C}}_{ae} \boldsymbol{\varphi}_j) dx}{4\tilde{m}_i \int_L (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j) dx} \\ &= \frac{\rho B^2 \int_{L_{exp}} \phi_{iz} \phi_{jz} H_1^* dx + B^2 \int_{L_{exp}} \phi_{i\theta} \phi_{j\theta} A_2^* dx}{4\tilde{m}_i \int_L (\phi_{iy}^2 + \phi_{iz}^2 + \phi_{i\theta}^2) dx} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

hvor  $H_1^*$  og  $A_2^*$  er gitt som:

$$H_1^* = K_{a_z} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] \quad \text{og} \quad A_2^* = K_{a_{\theta}} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\theta}}{a_{\theta}} \right)^2 \right] \quad (2.3.5)$$

og  $\tilde{m}_i$  er gitt som:

$$\tilde{m}_i = \frac{\tilde{M}_i}{\int_L (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i) dx} \quad (2.3.6)$$

Dersom  $H_1^*$  og  $A_2^*$  blir sett på som modale konstanter og uavhengige av posisjonen i spennet, blir  $\boldsymbol{\xi}_{ae}$  en diagonal matrise pga de ortogonale egenskapene til modeformene:

$$\boldsymbol{\xi}_{ae} = \text{diag} [\xi_{aei}] \quad (2.3.7)$$

hvor innholdet i matrisen er gitt som:

$$\xi_{aei} = \frac{\rho B^2 H_1^* \int_{L_{exp}} \phi_{iz}^2 dx + B^2 A_2^* \int_{L_{exp}} \phi_{i\theta} dx}{4\tilde{m}_i \int_L (\phi_{iy}^2 + \phi_{iz}^2 + \phi_{i\theta}^2) dx} \quad (2.3.8)$$

Dette betyr at  $\hat{\mathbf{H}}_{\eta}(\omega)$  er en  $N_{mod} * N_{mod}$  diagonal matrise. I tilfeller hvor det sees på virvelavløsninger, er det vanligvis ikke avgjørende å se på vindlastens effekt langs brubanen. Lastvektoren kan derfor forenklet skrives som:

$$\mathbf{q}(x, t) = [0 \quad q_z \quad q_{\theta}]^T \quad (2.3.9)$$

og tilsvarende blir da den Fouriertransformerte:

$$\mathbf{a}_q(x, \omega) = [0 \quad a_{q_z} \quad a_{q_{\theta}}]^T \quad (2.3.10)$$

Videre blir lastspekteret til tverrsnittet:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{qq}(\Delta x, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_q^* \mathbf{a}_q^T) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{q_z}^* a_{q_z} & a_{q_z}^* a_{q_\theta} \\ 0 & a_{q_\theta}^* a_{q_z} & a_{q_\theta}^* a_{q_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{q_z q_z} & S_{q_z q_\theta} \\ 0 & S_{q_\theta q_z} & S_{q_\theta q_\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Uttrykket blir vesentlig lettere å løse dersom det kan sees bort fra sammenhengen mellom  $q_z$  og  $q_\theta$ . Får da:

$$\mathbf{S}_{qq}(\Delta x, \omega) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{q_z q_z} & 0 \\ 0 & 0 & S_{q_\theta q_\theta} \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

hvor krysspektrene  $S_{q_z q_z}$  og  $S_{q_\theta q_\theta}$  er gitt ved:

$$\left. \begin{aligned} S_{q_z q_z} &= S_{q_z}(\omega) \hat{C}o_{q_z}(\Delta x) \\ S_{q_\theta q_\theta} &= S_{q_\theta}(\omega) \hat{C}o_{q_\theta}(\Delta x) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.13)$$

hvor:

$$\begin{bmatrix} S_{q_z}(\omega) \\ S_{q_\theta}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{(\frac{1}{2} \rho V^2)^2}{\sqrt{\pi} \omega_s} \begin{bmatrix} \frac{(B \hat{\sigma}_{q_z})^2}{b_z} e^{-\left(\frac{1-\frac{\omega}{\omega_s}}{b_z}\right)^2} \\ \frac{(B^2 \hat{\sigma}_{q_\theta})^2}{b_\theta} e^{-\left(\frac{1-\frac{\omega}{\omega_s}}{b_\theta}\right)^2} \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

og:

$$\hat{C}o_{q_m}(\Delta x) = \cos\left(\frac{2}{3} \frac{\Delta x}{\lambda_m D}\right) e^{-\left(\frac{\Delta x}{3\lambda_m D}\right)} \quad (2.3.15)$$

hvor  $m = z$  eller  $\theta$ ,  $\omega_s = 2\pi f_s$ ,  $\hat{\sigma}_{q_m} = \frac{\sigma_{q_m}}{\frac{1}{2} \rho V^2 B}$  er den udimensjonale effektivverdien til løftet eller torsjonsmomentkoeffisienten,  $b_m$  er en dimensjonsløs lastspekterbreddeparameter,  $\lambda_m$  er en udimensjonal koherenslengde og  $\Delta x$  er elementlengden. Det modale lastspekteret blir dermed:

$$\begin{aligned} S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j}(\omega) &= \frac{\int \int_{L_{exp}} \boldsymbol{\varphi}_i^T(x_1) \mathbf{S}_{qq}(\Delta x, \omega) \boldsymbol{\varphi}_j(x_2) dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i) (\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \\ &= \frac{S_{q_z} \int \int_{L_{exp}} \phi_{i_z}(x_1) \phi_{j_z} \hat{C}o_{q_z} dx_1 dx_2 + S_{q_\theta} \int \int_{L_{exp}} \phi_{i_\theta}(x_1) \phi_{j_\theta} \hat{C}o_{q_\theta} dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i) (\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$



Videre vil en fornuftig antagelse være at lengdeskalaen til integralet av virvlene  $\lambda D$  er liten sammenlignet med det strømningsinduserte området  $L_{exp}$  til strukturen. Siden  $q_z$  og  $q_\theta$  er forårsaket av de samme virvlene, vil koherenssegenskapene deres antagelig være identiske. Dette betyr at (med  $\int_0^\infty \hat{C}_{o_{q_n}}(\Delta x) d(\Delta x) \approx \lambda D$ ):

$$S_{\hat{Q}_i \hat{Q}_j}(\omega) \approx \frac{2\lambda D \left[ S_{q_z} \int_{L_{exp}} \phi_{i_z}(x) \phi_{j_z}(x) dx + S_{q_\theta} \int_{L_{exp}} \phi_{i_\theta}(x) \phi_{j_\theta}(x) dx \right]}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i) (\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \quad (2.3.17)$$

Og igjen pga. de ortogonale egenskapene til modeformene:

$$\mathbf{S}_{\hat{Q}} = \text{diag} \left[ S_{\hat{Q}_i} \right] \quad (2.3.18)$$

hvor

$$S_{\hat{Q}_i}(\omega) = \frac{2\lambda D \left[ S_{q_z}(\omega) \int_{L_{exp}} \phi_{i_z}^2 dx + S_{q_\theta}(\omega) \int_{L_{exp}} \phi_{i_\theta}^2 dx \right]}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)^2} \quad (2.3.19)$$

Videre sees det så på spektralresponsmatrisen. Med forenklingene som er gjort er både  $\hat{\mathbf{H}}_\eta$  og  $\mathbf{S}_{\hat{Q}}$  er diagonale. Dette betyr at:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) &= \mathbf{\Phi}_r(x_r) \cdot \text{diag} [S_{\eta_i}(\omega)] \cdot \mathbf{\Phi}_r^T(x_r) = \sum_{i=1}^{N_{mod}} \boldsymbol{\varphi}_i(x_r) \boldsymbol{\varphi}_i^T(x_r) S_{\eta_i}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{N_{mod}} \begin{bmatrix} \phi_y^2(x_r) & \phi_y(x_r) \phi_z(x_r) & \phi_y(x_r) \phi_\theta(x_r) \\ & \phi_z^2(x_r) & \phi_z(x_r) \phi_\theta(x_r) \\ \text{Sym.} & & \phi_\theta^2(x_r) \end{bmatrix}_i S_{\eta_i}(\omega) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

hvor

$$S_{\eta_i} = |\hat{H}_{\eta_i}(\omega)|^2 \cdot S_{\hat{Q}_i}(\omega) \quad (2.3.21)$$

og  $\hat{H}_{\eta_i}(\omega)$  er gitt som:

$$\hat{H}_{\eta_i}(\omega) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 + 2i (\xi_i - \xi_{ae_i}) \frac{\omega}{\omega_i} \right]^{-1} \quad (2.3.22)$$

og  $\xi_{ae_i}$  er gitt som tidligere. Den koresponderende kovariansresponsmatrisen  $\mathbf{Cov}_{rr}(x_r)$ , til den dynamiske responsen ved en koordinat  $x_r$  langs spennet, er

gitt som:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}_{rr}(x_r) &= \int_0^\infty \mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega) d\omega = \begin{bmatrix} \sigma_{r_y r_y}^2 & \text{Cov}_{r_y r_z} & \text{Cov}_{r_y r_\theta} \\ & \sigma_{r_z r_z}^2 & \text{Cov}_{r_z r_\theta} \\ \text{Sym.} & & \sigma_{r_\theta r_\theta}^2 \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^{N_{mod}} \begin{bmatrix} \phi_y^2(x_r) & \phi_y(x_r)\phi_z(x_r) & \phi_y(x_r)\phi_\theta(x_r) \\ & \phi_z^2(x_r) & \phi_z(x_r)\phi_\theta(x_r) \\ \text{Sym.} & & \phi_\theta^2(x_r) \end{bmatrix} \sigma_{\eta_i}^2 \quad (2.3.23)
 \end{aligned}$$

hvor  $\sigma_{\eta_i}^2 = \int_0^\infty S_{\eta_i} d\omega$ , er variansbidraget til en tilfeldig mode  $i$ .

Vanligvis er dynamisk respons pga virvelavløsninger resonant og entydig. Det er derfor stort sett tilstrekkelig å kun se på den resonante delen av frekvensdomenet, og forkaste de øvrige delene. Får dermed:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\eta_i}^2 &= \int_0^\infty S_{\eta_i} d\omega = \int_0^\infty |\hat{H}_{\eta_i}(\omega)|^2 \cdot S_{\hat{Q}_i}(\omega) d\omega \\
 &\approx \int_0^\infty |\hat{H}_{\eta_i}(\omega)|^2 d\omega \cdot S_{\hat{Q}_i}(\omega_i) = \frac{\pi \omega_i S_{\hat{Q}_i}(\omega_i)}{4(\xi_i - \xi_{ae_i})} \quad (2.3.24)
 \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned}
 S_{\hat{Q}_i}(\omega) &= \frac{2\lambda D \left[ S_{q_z}(\omega) \int_{L_{exp}} \phi_{i_z}^2 dx + S_{q_\theta}(\omega) \int_{L_{exp}} \phi_{i_\theta}^2 dx \right]}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)^2} \\
 &= \frac{2\lambda D}{(\omega_i \tilde{M}_i)^2} \frac{\left( \frac{\rho V^2 B}{2} \right)^2}{\sqrt{\pi} \omega_s} \left\{ \frac{\sigma_{q_z}^2}{b_z} \int_{L_{exp}} \phi_{i_z}^2 dx \cdot e^{-\left( \frac{1 - \frac{\omega_i}{\omega_s}}{b_z} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(B \sigma_{q_\theta})}{b_\theta} \int_{L_{exp}} \phi_{i_\theta}^2 dx \cdot e^{-\left( \frac{1 - \frac{\omega_i}{\omega_s}}{b_\theta} \right)^2} \right\} \quad (2.3.25)
 \end{aligned}$$

og  $\omega_s = 2\pi f_s$ . For å gjøre disse beregningene i praksis må man bruke iterasjoner. Dette fordi  $H_1^*$  og  $A_2^*$  er funksjoner som avhenger av  $\sigma_{r_z r_z}$  og  $\sigma_{r_\theta r_\theta}$ . Iterasjonene vil bli utført på forskjellen mellom  $\xi_i$  og  $\xi_{ae_i}$ , som vil være en liten størrelse.

### Enkel mode, enkel komponent - responsberegninger

Denne typen beregninger er aktuelt i tilfeller hvor det er forskyvninger i  $z$ -retning ( $r_z$ ) og ved torsjon ( $r_\theta$ ). Det gjelder altså modeformer hvor det i hovedsak

er bidrag fra  $z$ - og  $\theta$ -komponenter:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x) &\approx [0 \quad \phi_z \quad 0]_i^T \\ \varphi_i(x) &\approx [0 \quad 0 \quad \phi_\theta]_i^T \end{aligned} \right\} \quad (2.3.26)$$

Dette fører til at spektralresponsmatrisen  $\mathbf{S}_{rr}(x_r, \omega)$  blir diagonal, og inneholder kun responsvariansene til eksitasjonen i hver mode langs diagonalen. Får dermed:

$$\left. \begin{aligned} S_{r_n}(\omega) &= \phi_n^2(x_r) |\hat{H}_{\eta_n}(\omega)|^2 S_{\hat{Q}_n}(\omega) \\ \sigma_{r_n}^2 &= \int_0^\infty S_{r_n}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad \text{hvor } n = \begin{cases} z \\ \theta \end{cases} \quad (2.3.27)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_{\eta_n}(\omega) &= \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2i(\xi_i - \xi_{ae_i}) \frac{\omega}{\omega_n} \right]^{-1} \\ S_{\hat{Q}_n}(\omega) &= 2\lambda D \frac{S_{q_n}(\omega) \int_{Lexp} \phi_n^2(x) dx}{(\omega_n^2 \tilde{M}_n)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.28)$$

og hvor de aerodynamiske dempinsegenskapene blir:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ae_z} &= \frac{\tilde{C}_{ae_zz}}{2\omega_z \tilde{M}_z} = \frac{\rho B^2 H_1^*}{4\tilde{m}_z} \frac{\int_{Lexp} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} = \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_z} K_{a_z} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_z}{a_z D} \right)^2 \right] \frac{\int_{Lexp} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \\ \xi_{ae_\theta} &= \frac{\tilde{C}_{ae_\theta\theta}}{2\omega_\theta \tilde{M}_\theta} = \frac{\rho B^4 A_2^*}{4\tilde{m}_\theta} \frac{\int_{Lexp} \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} = \frac{\rho B^4}{4\tilde{m}_\theta} K_{a_\theta} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_\theta}{a_\theta} \right)^2 \right] \frac{\int_{Lexp} \phi_\theta^2 dx}{\int_L \phi_\theta^2 dx} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.29)$$

Som tidligere sees det på den resonante delen av frekvensdomenet:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_n}^2 &= \int_0^\infty S_{r_n} d\omega \approx \phi_n^2(x_r) \int_0^\infty |\hat{H}_{\eta_n}(\omega)|^2 d\omega S_{\hat{Q}_n}(\omega_n) \\ \Rightarrow \sigma_{r_n}^2 &= \phi_n^2(x_r) \frac{\pi \omega_n S_{\hat{Q}_n}(\omega_n)}{4(\xi_n - \xi_{ae_n})} \quad \text{hvor } n = \begin{cases} z \\ \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Som nevnt tidligere er det rimelig å anta at lengdeskalen  $\lambda D$  for  $q_z$  og  $q_\theta$  er tilnærmet like. Bruker så:

$$\tilde{M}_n = \tilde{m}_n \int_L \phi_n^2 dx \quad \text{hvor } n = \begin{cases} z \\ \theta \end{cases} \quad (2.3.31)$$

og  $S_{\hat{Q}_n}$  og  $S_{q_n}$  som tidligere, og får dermed:

$$\frac{\sigma_{r_z}}{D} = \frac{|\phi_z(x_r)|}{2^{7/2}\pi^{7/4}} \cdot \frac{\rho BD}{\tilde{m}_z} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{q_z}}{St^2} \cdot \left[ \frac{\lambda}{b_z(\xi_z - \xi_{aez})} \right]^{1/2} \cdot \frac{\left( D \int_{L_{exp}} \phi_z^2 dx \right)^{1/2}}{\int_L \phi_z^2 dx} g_z(V_{R_z}, V) \quad (2.3.32)$$

$$\frac{\sigma_{r_\theta}}{D} = \frac{|\phi_\theta(x_r)|}{2^{7/2}\pi^{7/4}} \cdot \frac{\rho(BD)^2}{\tilde{m}_\theta} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{q_\theta}}{St^2} \cdot \left[ \frac{\lambda}{b_\theta(\xi_\theta - \xi_{ae\theta})} \right]^{1/2} \cdot \frac{\left( D \int_{L_{exp}} \phi_\theta^2 dx \right)^{1/2}}{\int_L \phi_\theta^2 dx} g_\theta(V_{R_\theta}, V) \quad (2.3.33)$$

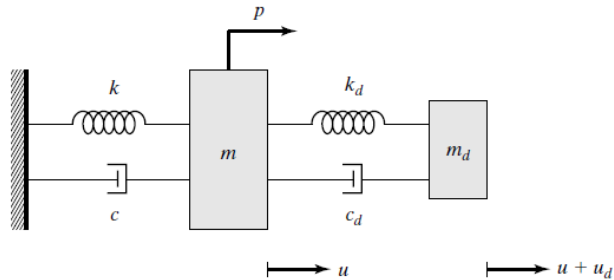
hvor

$$g_n(V_{R_n}, V) = \left( \frac{V}{V_{R_n}} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \frac{V_{R_n}}{V}}{b_n} \right)^2} \quad \text{hvor} \quad n = \begin{cases} z \\ \theta \end{cases}, \quad V_{R_n} = \frac{D\omega_n}{2\pi St} \quad (2.3.34)$$

## 2.4 Massedempere

Slanke konstruksjoner er særlig utsatt for dynamiske svingninger. En mulig måte å redusere svingninger på er ved å innføre massedempere. Massedemping er en enkel men svært effektiv måte å forhindre store svingninger i et system ved svingninger som nærmer seg egenfrekvens. Prinsippet er enkelt, har et gitt system, og bestemmer egenverdiene for systemet. Så festes en liten masse til systemet med en demper og en fjær, og det sørges for at den lille massen har samme egenfrekvens som systemet. Når egenfrekvensen inntreffer vil da også egenfrekvensen til den lille massen inntreffe, men den lille massen vil svinge i motfase til resten av systemet, grunnet demperen og fjæren. Dermed reduseres responsen til systemet ved egenfrekvens.

For å forklare hvordan massedempere fungerer gås det her gjennom et eksempel [2]:



Figur 2.14: SDOF-TMD system [2]

Bruker følgende notasjon:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad c = 2\xi\omega m \quad \omega_d^2 = \frac{k_d}{m_d} \quad c_d = 2\xi_d\omega_d m_d \quad (2.4.1)$$

Videre defineres masseforholdet:

$$\bar{m} = \frac{m_d}{m} \quad (2.4.2)$$

Ønsker så å se på bevegelsesligningen for primærmasse og TMD(Tuned Mass Damper):

Primærmasse:

$$(1 + \bar{m})\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p}{m} - \bar{m}\ddot{u}_d \quad (2.4.3)$$

TMD:

$$\ddot{u}_d + 2\xi_d\omega_d\dot{u}_d + \omega_d^2 u_d = -\ddot{u} \quad (2.4.4)$$

Meningen med TMD er å redusere responsen til systemet. For å gjøre dette må massedemperen tilpasses slik at den gir størst mulig effekt. Justeringsmulighetene man har til rådighet er å endre massen  $m_d$ , fjærstivheten  $k_d$  eller dempingen  $c_d$  til massedemperen. Et godt utgangspunkt er å se på tilfellet:

$$\omega_d = \omega \quad (2.4.5)$$

Ved å se på stivhet fører dette til:

$$\frac{k_d}{m_d} = \frac{k}{m} \Rightarrow k_d = \bar{m}k \quad (2.4.6)$$

Videre sees det på en periodisk forskyvning,  $p$  :

$$p = \hat{p} \sin \Omega t \quad (2.4.7)$$

Med denne forskyvningen fåes da følgende respons for de to massene:

$$u = \hat{u} \sin(\Omega t + \delta_1) \quad (2.4.8)$$

$$u_d = \hat{u}_d \sin(\Omega t + \delta_1 + \delta_2) \quad (2.4.9)$$

hvor  $\hat{u}$  og  $\hat{u}_d$  er forskyvningsamplitudene, og  $\delta_1$  og  $\delta_2$  er faseforskyvningene. Det kritiske lastscenario inntreffer når  $\Omega = \omega$ . Løsningen blir da:

$$\hat{u} = \frac{\hat{p}}{k\bar{m}} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\xi}{\bar{m}} + \frac{1}{2\xi_d}\right)^2}} \quad (2.4.10)$$

$$\hat{u}_d = \frac{1}{2\xi_d} \hat{u} \quad (2.4.11)$$

$$\tan \delta_1 = - \left[ \frac{2\xi}{\bar{m}} + \frac{1}{2\xi_d} \right] \quad \tan \delta_2 = -\frac{\pi}{2} \quad (2.4.12)$$

I tilfellet uten TMD vil responsen være gitt ved:

$$\hat{u} = \frac{\hat{p}}{k} \left( \frac{1}{2\xi} \right) \quad \delta_1 = \left( -\frac{\pi}{2} \right) \quad (2.4.13)$$

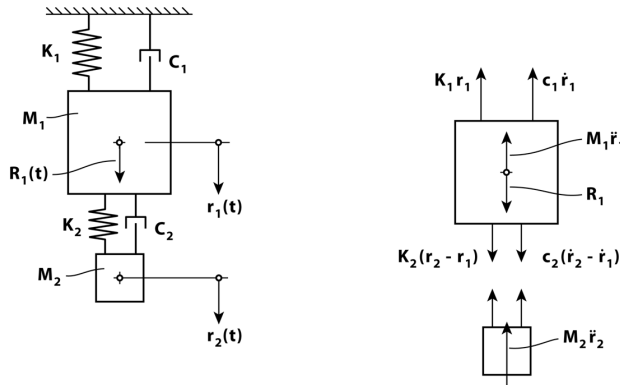
Ønsker nå å se hvilket bidrag TMD gir. Setter opp løsningen på generell form:

$$\hat{u} = \frac{\hat{p}}{k} \left( \frac{1}{2\xi_e} \right) \quad (2.4.14)$$

$$\xi_e = \frac{\bar{m}}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{2\xi}{\bar{m}} + \frac{1}{2\xi_d} \right)^2} \quad (2.4.15)$$

Ser dermed hvilket relativt bidrag massedemperen gir. Ved å øke masseforholdet  $\bar{m} = \frac{m_d}{m}$  øker dempingseffekten, men ettersom dette innebærer å øke massen til massedemperen, er det begrensninger på hvor stor den kan være. Samtidig øker dempingseffekten ved å redusere dempingskoeffisienten til massedemperen,  $\xi_d$ . Men ved å gjøre dette vil den relative forskyvningen øke for massedemperen, og det er her også begrenset hvor mye som kan tillates rent praktisk.

For å forklare nærmere hvordan en massedemper virker begynnes det med å se på et enkelt system:



Figur 2.15: SDOF-system med massedemper[13]

Setter opp likevektsuttrykk for de to massene[13]:

$$M_1 \ddot{r}_1 + C_1 \dot{r}_1 - C_2 (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + K_1 r_1 - K_2 (r_2 - r_1) - R_1 = 0 \quad (2.4.16)$$

$$M_2 \ddot{r}_2 + C_2 (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + K_2 (r_2 - r_1) = 0 \quad (2.4.17)$$

Som kan skrives på matriseform:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

Eller alternativt:

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{K}_0 \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0 \quad (2.4.19)$$

hvor:  $\mathbf{r}_0 = [r_1 \ r_2]^T$        $\mathbf{R}_0 = [R_1 \ 0]^T$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Videre introduseres for enkeltheds skyld  $r_1 = r$  og  $\Delta r = r_2 - r_1$ , slik at:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (2.4.20)$$

hvor  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{\Psi} \mathbf{r}$  ,       $\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  ,       $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ \Delta r \end{bmatrix}$

Kan dermed skrive ligning (2.4.19) som:

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{\Psi} \mathbf{r}_0 = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{R}_0 \quad (2.4.21)$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (2.4.22)$$

hvor  $\mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 \\ M_2 & M_2 \end{bmatrix}$  ,       $\mathbf{C} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{R} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For å se nærmere på egenskapene til systemet settes  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  ,  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  og  $\mathbf{r} = \mathbf{\Psi} e^{i\omega t}$ , hvor  $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2]^T$ . Dette gir:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.4.23)$$

og

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \boldsymbol{\psi} e^{i\omega t} \quad (2.4.24)$$

Multipliserer så med  $\mathbf{K}^{-1}$ , og får:

$$(\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2.4.25)$$



hvor:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/K_1 & 0 \\ 0 & 1/K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 \\ M_2 & M_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.26)$$

Dermed er egenverdioproblemet gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 1 - \omega^2 \frac{M_1 + M_2}{K_1} & -\omega^2 \frac{M_2}{K_2} \\ -\omega^2 \frac{M_2}{K_2} & 1 - \omega^2 \frac{M_2}{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.4.27)$$

Ved å løse egenverdioproblemet med hensyn på  $\omega^2$  fåes da:

$$\omega^2 = \frac{\frac{M_1 + M_2}{K_1} + \frac{M_2}{K_2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_1 + M_2}{K_1} + \frac{M_2}{K_2}\right)^2 - 4\left(\frac{M_1 M_2}{K_1 K_2}\right)}}{2\left(\frac{M_1 M_2}{K_1 K_2}\right)} \quad (2.4.28)$$

For en TMD vil massen til massedemperen være vesentlig mindre enn massen til konstruksjonen. En kan derfor anta  $M_2 \ll M_1$ , noe som gir:

$$\omega^2 \approx \frac{\frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{K_2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{K_2}\right)^2 - 4\left(\frac{M_1 M_2}{K_1 K_2}\right)}}{2\left(\frac{M_1 M_2}{K_1 K_2}\right)} \quad (2.4.29)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{K_2} \pm \left(\frac{M_1}{K_1} - \frac{M_2}{K_2}\right)}{2\left(\frac{M_1 M_2}{K_1 K_2}\right)} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{K_1/M_1} \\ \omega_2 &= \sqrt{K_2/M_2} \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Har nå funnet uttrykkene for egenfrekvensene til systemet. Ønsker videre å se på frekvensresponsfunksjonen  $\hat{\mathbf{H}}(\omega)$  til systemet, for å se på effekten massedemperen gir. Ser først på de Fouriertransformerte av responsen  $\mathbf{r}(t)$ , og lastresponsen  $\mathbf{R}(t)$ :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{\omega} \mathbf{a}_r(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.4.31)$$

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{\omega} \mathbf{a}_R(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.4.32)$$

hvor  $\mathbf{a}_r(\omega) = [a_r \quad a_{\Delta r}]^T$  og  $\mathbf{a}_R(\omega) = [a_{R_1} \quad 0]^T$  er Fourieramplitudene til de to responsene.

For at uttrykkene for responsene skal stemme for summen over  $\omega$ , må de også stemme for hver enkel  $\omega$ . Setter så inn i lign(2.4.22). Ved å løse for  $\mathbf{a}_r(\omega)$ , fåes da:

$$\mathbf{a}_r(\omega) = \frac{1}{\mathbf{I} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi_n \frac{\omega}{\omega_n} i} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}_R(\omega) \quad (2.4.33)$$

hvor  $\hat{\mathbf{H}}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{I} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi_n \frac{\omega}{\omega_n} i}$  er frekvensresponsfunksjonen.

Ønsker videre å finne et generelt uttrykk for frekvensresponsfunksjonen til et system med TMD. Ser derfor først på:

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1} = -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} + i\omega \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{I} \quad (2.4.34)$$

Dette gir, ved å se på masseforholdet  $\mu = \frac{M_2}{M_1}$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1} & \hat{\mathbf{H}}_{12}^{-1} \\ \hat{\mathbf{H}}_{21}^{-1} & \hat{\mathbf{H}}_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (1 + \mu) \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 2\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1} i & -\mu \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ -\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 & 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + 2\xi_2 \frac{\omega}{\omega_2} i \end{bmatrix} \quad (2.4.35)$$

Videre med  $D_1 = \hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}$  og  $D_2 = \hat{\mathbf{H}}_{22}^{-1}$  fåes dermed frekvensresponsfunksjonen som:

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega) = \frac{1}{D_1 D_2 - \mu \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} \begin{bmatrix} D_2 & \mu \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 & D_1 \end{bmatrix} \quad (2.4.36)$$

Ønsker nå å lage generelle uttrykk for innholdet i matrisen  $\hat{\mathbf{H}}(\omega)$ . Definerer:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega/\omega_1 \\ \alpha &= \omega_1/\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.37)$$

Videre defineres:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2(\xi_1 + \alpha\xi_2) & b_1 &= 2\xi_2\alpha \\ a_2 &= 1 + \mu + \alpha^2 + 4\alpha\xi_1\xi_2 & b_2 &= \alpha^2 \\ a_3 &= 2\alpha[\alpha\xi_1 + (1 + \mu)\xi_2] & d_2 &= \mu \\ a_4 &= \alpha^2 & c_1 &= 2\xi_1 \\ & & c_2 &= 1 + \mu \\ & & e_2 &= \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.38)$$

Får dermed følgende uttrykk for innholdet i matrisen  $\hat{\mathbf{H}}(\omega)$ :

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_{11}(\hat{\omega}) &= \frac{1+b_1(i\hat{\omega})+b_2(i\hat{\omega})^2}{1+a_1(i\hat{\omega})+a_2(i\hat{\omega})^2+a_3(i\hat{\omega})^3+a_4(i\hat{\omega})^4} \\ \hat{H}_{12}(\hat{\omega}) &= \frac{-d_2(i\hat{\omega})^2}{1+a_1(i\hat{\omega})+a_2(i\hat{\omega})^2+a_3(i\hat{\omega})^3+a_4(i\hat{\omega})^4} \\ \hat{H}_{21}(\hat{\omega}) &= \frac{-e_2(i\hat{\omega})^2}{1+a_1(i\hat{\omega})+a_2(i\hat{\omega})^2+a_3(i\hat{\omega})^3+a_4(i\hat{\omega})^4} \\ \hat{H}_{22}(\hat{\omega}) &= \frac{1+c_1(i\hat{\omega})+c_2(i\hat{\omega})^2}{1+a_1(i\hat{\omega})+a_2(i\hat{\omega})^2+a_3(i\hat{\omega})^3+a_4(i\hat{\omega})^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.39)$$

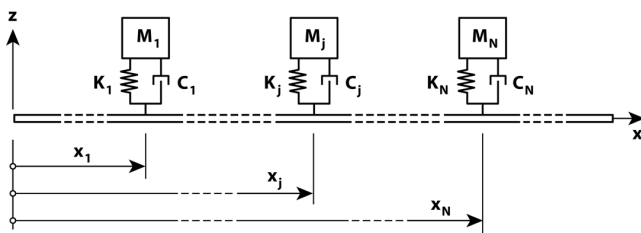
Kan nå se på spektraltettheten til responsen:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(\omega) &= \begin{bmatrix} S_{rr} & S_{r\Delta r} \\ S_{\Delta r r} & S_{\Delta r \Delta r} \end{bmatrix} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_r^* \mathbf{a}_r^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{bmatrix} a_r^* a_r & a_r^* a_{\Delta r} \\ a_{\Delta r}^* a_r & a_{\Delta r}^* a_{\Delta r} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \hat{\mathbf{H}}(\omega) \begin{bmatrix} a_{R_1}(\omega)/K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^* \left( \hat{\mathbf{H}}(\omega) \begin{bmatrix} a_{R_1}(\omega)/K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \frac{S_{R_1}(\omega)}{K_1^2} \begin{bmatrix} |\hat{H}_{11}(\hat{\omega})|^2 & \hat{H}_{11}^*(\hat{\omega}) \hat{H}_{21}(\hat{\omega}) \\ \hat{H}_{21}^*(\hat{\omega}) \hat{H}_{11}(\hat{\omega}) & |\hat{H}_{21}(\hat{\omega})|^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

hvor  $S_{R_1}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} a_{R_1}^*(\omega) a_{R_1}(\omega)$  er spektraltettheten til lasten som virker på systemet. Videre sees det på en last over et stort spekter, og en respons som nærmer seg resonans. Dette fører til at responsvariansen,  $\sigma_r^2$  og  $\sigma_{\Delta r}^2$ , er gitt ved:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \int_0^\infty S_{rr}(\omega) d\omega = \frac{S_{R_1}(\omega)}{K_1^2} \int_0^\infty |\hat{H}_{11}(\hat{\omega})| d\omega \\ &= \frac{\pi \omega_1 S_{R_1}(\omega_1)}{2K_1^2} \frac{a_2 a_3 - a_1 a_4 + a_1 b_2^2 + a_3 (b_1^2 - 2b_2^2)}{a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2} \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta r}^2 &= \int_0^\infty S_{\Delta r \Delta r}(\omega) d\omega = \frac{S_{R_1}(\omega)}{K_1^2} \int_0^\infty |\hat{H}_{21}(\hat{\omega})| d\omega \\ &= \frac{\pi \omega_1}{2K_1^2} S_{R_1}(\omega_1) \frac{a_1 d_2^2 - 2a_3 d_2}{a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2} \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

**TMD for et kontinuerlig linjeformet system**

 Figur 2.16: Bjelke/søyle med massedemper  $M_j$  i posisjon  $x_j$  [13]

For et reelt system vil det være ønskelig å innstalere dempere som demper ut flere enn en mode. Ser på en bjelke/søyle med demperene  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, N_j$ , ved korresponderende posisjoner  $x_j$  (se fig. 2.16). Bjelken i seg selv er utsatt for en last  $q_z(x, t)$ , mens det er tatt for gitt at det ikke er noen last direkte på massedemperene. Det antas også at massene til demperene er små i forhold massen til systemet. Bevegelsen til systemet kan beskrives modalt ved  $r_z(x, t) = \Phi(x) \cdot \eta(t)$ , hvor  $\Phi$  beskriver modeformene utifra egenverdianalysen av systemet. Ved en tilfeldig posisjon  $x$  og tid  $t$  er da systemet i bevegelse  $r_z(x, t)$ . Samtidig som dette skjer vil en massedemper  $M_j$  ved posisjon  $x_j$  ha bevegelsen  $r_j(t)$ . Ved dette tidspunktet sees det så på de virtuelle forskyvningene i systemet. Bjelken vil ha en virtuell forskyvning  $\delta r_z(x)$ , mens massedemperen vil ha en virtuell forskyvning  $\delta r_{jz}$ . Den totale energien til systemet vil være uforandret ved denne virtuelle forskyvningen, og dermed fåes et energilikevektsuttrykk for systemet, hvor ytre arbeid settes opp mot indre arbeid:

$$\begin{aligned}
 & \int_L [q_z(x, t) - m_z(x)\ddot{r}_z(x, t) - c_z(x)\dot{r}_z(x, t)] \delta r_z(x) dx \\
 & + \sum_j F_j(t) \delta r_z(x_j) - \sum_j [M_j \ddot{r}_z(t) + F_j(t)] \delta r_{jz} \\
 & = \int_L \int_A \sigma_x(x, z, t) \delta \epsilon_x(x, z, t) dA dx \quad (2.4.43)
 \end{aligned}$$

hvor  $q_z$ ,  $m_z$  og  $c_z$  er henholdsvis fordelt last, masse og viskøs demping, mens  $\sigma_x$  er normalspenningen forbundet med  $r_z$ ,  $\delta \epsilon_x$  er normaltøyningen forbundet med

$\delta r_z$ , og:

$$\begin{aligned} F_j(t) &= C_j [\dot{r}_{jz}(t) - \dot{r}_z(x_j, t)] + K_j [r_{jz}(t) - r_z(x_j, t)] \\ &= C_j \dot{r}_{jz}(t) + K_j r_{jz}(t) - [C_j \dot{r}_z(x_j, t) + K_j r_z(x_j, t)] \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

hvor igjen  $K_j$  og  $C_j$  er henholdsvis stivheten og dempingsegenskapen til massedemper nr  $j$ . Har at[13]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_y(x,t)}{I_y} z = \frac{-EI_y r_z''(x,t)}{I_y} z = -Er_z''(x,t) \cdot z \\ \delta \epsilon_x &= -\delta r_z''(x) \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (2.4.45)$$

og dermed:

$$\begin{aligned} \int_L \int_A \sigma_x(x, z, t) \delta \epsilon_x(x, z, t) dA dx &= \int_L \int_A [-Er_z''(x, t) \cdot z] \cdot [-\delta r_z''(x) \cdot z] dA dx \\ &= \int_L Er_z''(x, t) \delta r_z(x) \int_A z^2 dA dx = \int_L EI_y r_z''(x, t) \delta r_z''(x) dx \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

setter så inn i energilikevekten:

$$\begin{aligned} &\int_L m_z(x) \ddot{r}_z(x, t) \delta r_z(x) dx + \int_L c_z(x) \dot{r}_z(x, t) \delta r_z(x) dx \\ &\quad + \int_L EI_y r_z''(x, t) \delta r_z''(x) dx - \sum_j F_j(t) \delta r_z(x_j) \\ &\quad + \sum_j [M_j \ddot{r}_{jz}(t) + F_j(t)] \delta r_{jz} = \int_L q_z(x, t) \delta r_z(x) dx \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Videre sees det først, for enkelhets skyld, på et tilfelle hvor det er en enkelt mode  $\phi_z(x)$  og en enkelt massedemper ( $M_1, C_1, K_1$ ) ved posisjon  $x_1$  på spennet til bjelken. Får da:

$$\left. \begin{aligned} r_z(x, t) &= \phi_z(x) \eta_z(t) \\ r_1(t) &= 1 \cdot \eta_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.48)$$

og som tidligere ved å se på virtuell forskyvning:

$$\left. \begin{aligned} \delta r_z(x) &= \phi_z(x) \delta \eta_z \\ \delta r_1 &= 1 \cdot \delta \eta_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.49)$$

Ser så igjen på energilikevekten:

$$\begin{aligned}
 & \int_L m_z(x) \phi_z(x) \ddot{\eta}_z(t) \phi_z(x) \delta \eta_z dx \\
 & + \int_L c_z(x) \phi_z(x) \dot{\eta}_z(t) \phi_z(x) \delta \eta_z dx + \int_L EI_y \phi_z''(x) \eta_z(t) \phi_z''(x) \delta \eta_z dx \\
 & - \{C_1 \dot{\eta}_1(t) + K_1 \eta_1(t) - [C_1 \phi_z(x_1) \dot{\eta}_z(t) + K_1 \phi_z(x_1) \eta_z(x)]\} \phi_z(x_1) \delta \eta_z \\
 & + \{M_1 \ddot{\eta}_1 + C_1 \dot{\eta}_1(t) + K_1 \eta_1(t) - [C_1 \phi_z(x_1) \dot{\eta}_z(t) + K_1 \phi_z(x_1) \eta_z(t)]\} \delta \eta_1 \\
 & = \int_L q_z(x, t) \phi_z(x) \delta \eta_z dx \quad (2.4.50)
 \end{aligned}$$

som på matrisform kan skrives som:

$$\delta \boldsymbol{\eta}_z^T [\tilde{\mathbf{M}}_{z_0} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{z_0}(t) + \tilde{\mathbf{C}}_{z_0} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{z_0}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{z_0} \boldsymbol{\eta}_{z_0}(t)] = \delta \boldsymbol{\eta}_z^T \tilde{\mathbf{R}}_{z_0}(t) \quad (2.4.51)$$

hvor

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\eta}_{z_0} &= [\eta_z \quad \eta_1]^T & \delta \boldsymbol{\eta}_{z_0} &= [\delta \eta_z \quad \delta \eta_1]^T \\
 \tilde{\mathbf{R}}_{z_0} &= [\tilde{R}_z \quad 0]^T & \tilde{\mathbf{M}}_{z_0} &= \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{C}}_{z_0} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_z + \phi_z^2(x_1) C_1 & -\phi_z(x_1) C_1 \\ -\phi_z(x_1) C_1 & C_1 \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{K}}_{z_0} &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_z + \phi_z^2(x_1) K_1 & -\phi_z(x_1) K_1 \\ -\phi_z(x_1) K_1 & K_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

og

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_z \\ \tilde{C}_z = 2\xi_n \omega_n \tilde{M}_z \\ \tilde{K}_z = \omega_n^2 \tilde{M}_z \\ \tilde{R}_z \end{bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} \phi_z^2(x) \cdot m_z(x) \\ \phi_z^2(x) \cdot c_z(x) \\ \phi_z''^2(x) \cdot EI_y(x) \\ \phi_z(x) \cdot q_z(x, t) \end{bmatrix} dx$$

Multiplikasjon med  $\delta \boldsymbol{\eta}_z^T$  kan utelates. Får da:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{z_0} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{z_0}(t) + \tilde{\mathbf{C}}_{z_0} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{z_0}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{z_0} \boldsymbol{\eta}_{z_0}(t) = \tilde{\mathbf{R}}_{z_0}(t) \quad (2.4.52)$$

Definerer så den relative demperbevegelsen:

$$\Delta r_1(t) = 1 \cdot \Delta \eta_1(t) = r_z(x, t) - r_1(t) = \phi_z(x_1) \eta(t) - 1 \cdot \eta_1(t) \quad (2.4.53)$$

Ser så på forskyvningene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ r_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_z(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_z(x) \\ r_z(x_1) + \Delta r_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_z(x) & 0 \\ \phi_z(x_1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta \eta_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

og får at:

$$\boldsymbol{\eta}_{z_0}(t) = \boldsymbol{\Psi}_z(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_z(t) \quad (2.4.55)$$

hvor

$$\boldsymbol{\eta}_z(t) = [\eta_z \quad \Delta \eta_1]^T$$

og

$$\boldsymbol{\Psi}_z = \begin{bmatrix} \phi_z(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_z(x) & 0 \\ \phi_z(x_1) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_z(x_1) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.56)$$

Energilikevekten med relative modale koordinater blir da:

$$\tilde{\mathbf{M}}_z \ddot{\boldsymbol{\eta}}_z(t) + \tilde{\mathbf{C}}_z \dot{\boldsymbol{\eta}}_z(t) + \tilde{\mathbf{K}}_z \boldsymbol{\eta}_z(t) = \tilde{\mathbf{R}}_z(t) \quad (2.4.57)$$

hvor

$$\tilde{\mathbf{M}}_z = \boldsymbol{\Psi}_z^T \tilde{\mathbf{M}}_{z_0} \boldsymbol{\Psi}_z = \begin{bmatrix} \tilde{M}_z + \phi_z^2(x_1) M_1 & \phi_z(x) M_1 \\ \phi_z(x) M_1 & M_1 \end{bmatrix} \quad (2.4.58)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_z = \boldsymbol{\Psi}_z^T \tilde{\mathbf{C}}_{z_0} \boldsymbol{\Psi}_z = \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{K}}_z = \boldsymbol{\Psi}_z^T \tilde{\mathbf{K}}_{z_0} \boldsymbol{\Psi}_z = \begin{bmatrix} \tilde{K}_z & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \quad (2.4.59)$$

og

$$\tilde{\mathbf{R}}_z = \boldsymbol{\Psi}_z^T \tilde{\mathbf{R}}_{z_0} = [\tilde{R}_z \quad 0]^T \quad (2.4.60)$$

For å videre se på responsen i frekvensdomenet gjøres det samme som vist tidligere for SDOF-systemet. Ved å bytte ut egenskapene til SDOF-systemet med de modale egenskapene til det kontinuerlige systemet fåes da:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\eta(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_\eta^* \mathbf{a}_\eta^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{bmatrix} a_\eta^* a_\eta & a_\eta^* a_{\Delta \eta} \\ a_{\Delta \eta}^* a_\eta & a_{\Delta \eta}^* a_{\Delta \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\eta_z \eta_z} & S_{\eta_z \Delta \eta} \\ S_{\Delta \eta \eta_z} & S_{\Delta \eta \Delta \eta} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \hat{\mathbf{H}}(\omega) \begin{bmatrix} a_{\tilde{R}_z}(\omega) / \tilde{K}_z \\ 0 \end{bmatrix} \right)^* \left( \hat{\mathbf{H}}(\omega) \begin{bmatrix} a_{\tilde{R}_z}(\omega) / \tilde{K}_z \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \frac{S_{\tilde{R}_z}(\omega)}{\tilde{K}_z^2} \begin{bmatrix} |\hat{H}_{zz}(\hat{\omega})|^2 & \hat{H}_{zz}^*(\hat{\omega}) \hat{H}_{1z}(\hat{\omega}) \\ \hat{H}_{1z}^*(\hat{\omega}) \hat{H}_{zz}(\hat{\omega}) & |\hat{H}_{1z}(\hat{\omega})|^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

hvor  $S_{\tilde{R}_z}(\omega)$  er spektraltettheten til den modale lasten til hovedsystemet, og:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_{zz}(\hat{\omega}) &= \frac{1 + \tilde{b}_1(i\hat{\omega}) + \tilde{b}_2(i\hat{\omega})^2}{1 + \tilde{a}_1(i\hat{\omega}) + \tilde{a}_2(i\hat{\omega})^2 + \tilde{a}_3(i\hat{\omega})^3 + \tilde{a}_4(i\hat{\omega})^4} \\ \hat{H}_{1z}(\hat{\omega}) &= \frac{-\tilde{d}_2(i\hat{\omega})^2}{1 + \tilde{a}_1(i\hat{\omega}) + \tilde{a}_2(i\hat{\omega})^2 + \tilde{a}_3(i\hat{\omega})^3 + \tilde{a}_4(i\hat{\omega})^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega/\omega_z \\ \tilde{\alpha} &= \omega_z/\omega_1 \quad \text{hvor} \quad \omega_1 = \sqrt{K_1/M_1} \\ \tilde{\mu} &= M_1/M_z \end{aligned} \right\} \quad (2.4.63)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_1 &= 2(\xi_z + \tilde{\alpha}\xi_1) & \tilde{b}_1 &= 2\xi_z\tilde{\alpha} \\ \tilde{a}_2 &= 1 + \tilde{\mu} + \tilde{\alpha}^2 + 4\tilde{\alpha}\xi_z\xi_1 & \tilde{b}_2 &= \tilde{\alpha}^2 \\ \tilde{a}_3 &= 2\tilde{\alpha}[\tilde{\alpha}\xi_z + (1 + \tilde{\mu})\xi_1] & \tilde{d}_2 &= \tilde{\mu} \\ \tilde{a}_4 &= \tilde{\alpha}^2 & \tilde{c}_1 &= 2\xi_z \\ & & \tilde{c}_2 &= 1 + \tilde{\mu} \\ & & \tilde{e}_2 &= \tilde{\alpha}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.64)$$

hvor  $\xi_z$  er bjelkens dempingsrate og  $\xi_1$  er massedemperens dempingsrate. Ved å anta at bjelken er påkjent en jevnt fordelt stokastisk last  $q_z(x, t)$ , med kryss-spektraletthet  $S_{q_z}(\omega, \Delta x)$ , hvor  $\Delta x = |x_a - x_b|$  er absoluttverdien til avstanden mellom to tilfeldige punkter  $x_a$  og  $x_b$ , fåes da:

$$\begin{aligned} S_{\tilde{R}_z}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} a_{\tilde{R}_z}^*(\omega) \cdot a_{\tilde{R}_z}^T(\omega) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left[ \int_L \phi_z(x) a_{q_z}(\omega, x) dx \right]^* \cdot \left[ \int_L \phi_z(x) a_{q_z}(\omega, x) dx \right] \\ &= \int_L \int_L \phi_z(x_a) \phi_z(x_b) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} a_{q_z}^*(\omega, x_a) \cdot a_{q_z}(\omega, x_b) \\ &= \int_L \int_L \phi_z(x_a) \cdot \phi_z(x_b) \cdot S_{q_z}(\omega, \Delta x) dx_a dx_b \end{aligned} \quad (2.4.65)$$

Den fysiske responsen kan så finnes ved å se på at:

$$\begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \Delta r_1(t) \end{bmatrix} = \Psi_0 \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta \eta_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \Psi_0 = \begin{bmatrix} \phi_z(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.66)$$



Dette gir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{r_z}(x, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \Delta r_1(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \Delta r_1(t) \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} S_{r_z r_z} & S_{r_z \Delta r_1} \\ S_{\Delta r_1 r_z} & S_{\Delta r_1 \Delta r_1} \end{bmatrix} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \Psi_0 \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta \eta_1(t) \end{bmatrix} \right)^* \left( \Psi_0 \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta \eta_1(t) \end{bmatrix} \right)^T = \Psi_0 \mathbf{S}_{\eta_z}(\omega) \Psi_0^T \\
 &= \frac{S_{\tilde{R}_z}(\omega)}{\tilde{K}_z^2} \begin{bmatrix} \phi_z^2(x) \left| \hat{H}_{zz}(\hat{\omega}) \right|^2 & \phi_z(x) \hat{H}_{zz}^*(\hat{\omega}) \hat{H}_{1z}(\hat{\omega}) \\ \phi_z(x) \hat{H}_{1z}^*(\hat{\omega}) \hat{H}_{zz}(\hat{\omega}) & \left| \hat{H}_{1z}(\hat{\omega}) \right|^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.67)
 \end{aligned}$$

Som tidligere, hvis det sees på lasten over et stort spekter, vil det fåes en respons som nærmer seg resonans. Responsvariansen blir da:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r_z}^2(x_r) &= \int_0^\infty S_{r_z r_z}(\omega) d\omega \approx \phi_z^2(x_r) \frac{S_{\tilde{R}_z}(\omega_z)}{\tilde{K}_z^2} \int_0^\infty \left| \hat{H}_{zz}(\hat{\omega}) \right| d\omega \\
 &= \phi_z^2(x_r) \frac{\pi \omega_1 S_{\tilde{R}_1}(\omega_z)}{2 \tilde{K}_z^2} \frac{\tilde{a}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_4 + \tilde{a}_1 \tilde{b}_2^2 + \tilde{a}_3 (\tilde{b}_1^2 - 2 \tilde{b}_2^2)}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_4 - \tilde{a}_3^2} \quad (2.4.68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\Delta r}^2 &= \int_0^\infty S_{\Delta r \Delta r}(\omega) d\omega = \frac{S_{\tilde{R}_z}(\omega_z)}{K_1^2} \int_0^\infty \left| \hat{H}_{1z}(\hat{\omega}) \right| d\omega \\
 &= \frac{\pi \omega_z}{2 \tilde{K}_z^2} S_{\tilde{R}_z}(\omega_z) \frac{\tilde{a}_1 \tilde{d}_2^2 - 2 \tilde{a}_3 \tilde{d}_2}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_4 - \tilde{a}_3^2} \quad (2.4.69)
 \end{aligned}$$

### Systemer med flere massedempere som demper ut flere moder

Ovenfor sees det på systemer med bare en TMD. Det ønskes nå å se på et system med flere moder, og massedempere i posisjon  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Har da  $N_j$  antall dempere, som defineres ved:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{M}_d &= \text{diag}[M_j] \\
 \mathbf{C}_d &= \text{diag}[C_j] \\
 \mathbf{K}_d &= \text{diag}[K_j]
 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, N_j \quad (2.4.70)$$

Hensikten med disse massedemperene er å dempe ut svingninger i  $N_j$  eller færre moder. Det tas fortsatt for gitt at massene til demperene er små i forhold til de

modale massene. I modalkoordinater kan da systemets forskyvninger beskrives som:

$$r_z(x, t) = \sum_{n=1}^{N_{mod}} \phi_{z_n}(x) \cdot \eta_{z_n}(t) = \Phi_z(x) \eta_z(t) \quad (2.4.71)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} \Phi_z(x) &= \begin{bmatrix} \phi_{z_1} & \cdots & \phi_{z_n} & \cdots & \phi_{z_{N_{mod}}} \end{bmatrix} \\ \eta_z(t) &= \begin{bmatrix} \eta_{z_1} & \cdots & \eta_{z_n} & \cdots & \eta_{z_{N_{mod}}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \right\} \quad (2.4.72)$$

I originkoordinater kan forskyvningene til massedemperene beskrives ved:

$$\mathbf{r}_d(t) = [r_1 \quad \cdots \quad r_j \quad \cdots \quad r_{N_j}]^T \quad (2.4.73)$$

Siden forskyvningen til en massedemper vil beskrive en modeform ( $r_j = 1 \cdot \eta_j$ ), vil  $\mathbf{r}_d$  i originkoordinater være ekvivalent med  $\boldsymbol{\eta}_d$  i modalkoordinater:

$$\mathbf{r}_d(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t) = [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_j \quad \cdots \quad \eta_{N_j}]^T \quad (2.4.74)$$

Dermed kan koordinatene beskrives som:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \mathbf{r}_d(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_z(t) \\ \boldsymbol{\eta}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.4.75)$$

For disse frihetsgradene sees det så på et sett tidsuavhengige virtuelle forskyvninger:

$$\delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \delta r_z(x) \\ \delta \mathbf{r}_d \end{bmatrix} \quad (2.4.76)$$

hvor  $\delta \mathbf{r} = [\delta r_1 \quad \cdots \quad \delta r_j \quad \cdots \quad \delta r_{N_j}]^T$ . Setter så dette inn i energilikevekten:

$$\begin{aligned} & \int_L m_z \ddot{r}_z(x, t) \delta r_z(x) dx + \int_L c_z \dot{r}_z(x, t) \delta r_z(x) dx + \int_L EI_y r_z''(x, t) \delta r_z''(x) \\ & \quad - \sum_{j=1}^{N_j} [C_j \dot{r}_j(t) + K_j r_j(t) - C_j \dot{r}_z(x_j, t) - K_j r_z(x_j, t)] \delta r_z(x_j) \\ & \quad + \sum_{j=1}^{N_j} [M_j \ddot{r}_j(t) + C_j \dot{r}_j(t) + K_j r_j(t) - C_j \dot{r}_z(x_j, t) - K_j r_z(x_j, t)] \delta r_j \\ & \quad = \int_L q_z(x, t) \delta r_z(x) dx \end{aligned} \quad (2.4.77)$$

Ser så på orthogonalitetsegenskapene til modeformene:

$$\int_L \begin{bmatrix} m_z(x)\phi_n(x)\phi_m(x) \\ c_z(x)\phi_n(x)\phi_m(x) \\ EI_y(x)\phi_n''(x)\phi_m''(x) \end{bmatrix} dx = \mathbf{0} \quad (2.4.78)$$

og introduserer suksessivt:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \delta r_z = \phi_{z_1} \delta r_{z_1} \quad \text{og} \quad \delta \mathbf{r}_d = [\delta r_1 \cdots \delta r_j \cdots \delta r_{N_j}]^T \\ \vdots \\ n) \quad \delta r_z = \phi_{z_n} \delta r_{z_n} \quad \text{og} \quad \delta \mathbf{r}_d = [\delta r_1 \cdots \delta r_j \cdots \delta r_{N_j}]^T \\ \vdots \\ N_{mod}) \quad \delta r_z = \phi_{z_{N_{mod}}} \delta r_{z_{N_{mod}}} \quad \text{og} \quad \delta \mathbf{r}_d = [\delta r_1 \cdots \delta r_j \cdots \delta r_{N_j}]^T \end{array} \right\} \quad (2.4.79)$$

Bytter så ut  $r_z(x, t)$  med  $\Phi_z(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_z(t)$ , og  $r_j(t)$  med  $\eta_j(t)$ . Får da  $N_{mod} + N_j$  antall ligninger, hvor ligningen som assosieres med  $\delta r_z(x) = \phi_{z_n}(x)\delta r_{z_n}$  og  $\delta \mathbf{r}_d = [\delta r_1 \cdots \delta r_j \cdots \delta r_{N_j}]^T$  er gitt som:

$$\begin{aligned} \delta r_{z_n} \left\{ \tilde{M}_{z_n} \dot{\eta}_{z_n}(t) + \tilde{C}_{z_n} \dot{\eta}_{z_n}(t) + \tilde{K}_{z_n} \eta_{z_n}(t) + \sum_{j=1}^{N_j} C_j \phi_{z_n}^2(x_j) \dot{\eta}_{z_n}(t) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_j} K_j \phi_{z_n}^2(x_j) \eta_{z_n}(t) - \sum_{j=1}^{N_j} C_j \phi_{z_n}(x_j) \dot{\eta}_{z_n}(t) - \sum_{j=1}^{N_j} K_j \phi_{z_n}(x_j) \eta_{z_n}(t) \right\} \\ + \sum_{j=1}^{N_j} \delta r_j \{ M_j \ddot{\eta}_j(t) + C_j \dot{\eta}_j(t) + K_j \eta_j(t) - C_j \phi_{z_n}(x_j) \dot{\eta}_{z_n}(t) - K_j \phi_{z_n}(x_j) \eta_{z_n}(t) \} \\ = \delta r_{z_n} \tilde{R}_{z_n}(t) \quad (2.4.80) \end{aligned}$$

$$\text{hvor} \quad \begin{bmatrix} \tilde{M}_{z_n} \\ \tilde{C}_{z_n} \\ \tilde{K}_{z_n} \end{bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} m_z \phi_{z_n}^2 \\ c_z \phi_{z_n}^2 \\ EI_y \phi_{z_n}''^2 \end{bmatrix} dx \quad \text{og} \quad \tilde{R}_{z_n}(t) = \int_L \phi_{z_n}(x) q_z(x, t) dx \quad (2.4.81)$$

Definerer så på matriseform:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_z &= \text{diag} [\tilde{M}_{z_n}] \\ \tilde{C}_z &= \text{diag} [\tilde{C}_{z_n}] \\ \tilde{K}_z &= \text{diag} [\tilde{K}_{z_n}] \end{aligned} \right\} \text{ og } \tilde{\mathbf{R}}_z(t) = [\tilde{R}_{z_1} \cdots \tilde{R}_{z_n} \cdots \tilde{R}_{z_{N_{mod}}}]^T \quad (2.4.82)$$

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} \Phi_z(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_z(x_j) \\ \vdots \\ \Phi_z(x_{N_j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{z_1}(x_1) & \cdots & \phi_{z_n}(x_1) & \cdots & \phi_{z_{N_{mod}}}(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{z_1}(x_j) & \cdots & \phi_{z_n}(x_j) & \cdots & \phi_{z_{N_{mod}}}(x_j) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{z_1}(x_{N_j}) & \cdots & \phi_{z_n}(x_{N_j}) & \cdots & \phi_{z_{N_{mod}}}(x_{N_j}) \end{bmatrix} \quad (2.4.83)$$

og

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_d &= \Phi_d^T \mathbf{K}_d \Phi_d \\ \tilde{C}_d &= \Phi_d^T \mathbf{C}_d \Phi_d \end{aligned} \right\} \quad (2.4.84)$$

Kan dermed skrive lign(2.4.80) som:

$$\delta \mathbf{r}^T \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_z \\ \ddot{\eta}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_z + \tilde{C}_d & -\Phi_d^T \mathbf{C}_d \\ -\mathbf{C}_d \Phi_d & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_z \\ \dot{\eta}_d \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \tilde{K}_z + \tilde{K}_d & -\Phi_d^T \mathbf{K}_d \\ -\mathbf{K}_d \Phi_d & \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z \\ \eta_d \end{bmatrix} \right\} = \delta \mathbf{r}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.4.85)$$

eller alternativt uten  $\delta \mathbf{r}^T$ . Videre kan det sees at de totale frihetsgradene blir:

$$\begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \mathbf{r}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_z(x) \cdot \eta_z(t) \\ \eta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_z(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_d \end{bmatrix} \quad (2.4.86)$$

eller på relativ form:

$$\begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \mathbf{r}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \mathbf{r}_z(x_j, t) + \Delta \mathbf{r}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_z(x) & \mathbf{0} \\ \Phi_d & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta \eta_d \end{bmatrix} \quad (2.4.87)$$

alternativt:

$$\mathbf{r}_{rel} = \begin{bmatrix} r_z(x, t) \\ \Delta \mathbf{r}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_z(x) \cdot \eta_z(t) \\ \Delta \eta_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_z(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \eta_{rel}(t) \quad (2.4.88)$$

hvor

$$\eta_{rel}(t) = [\eta_z \quad \Delta \eta_d]^T \quad (2.4.89)$$

og hvor  $\mathbf{I}$  er en  $N_j \cdot N_j$  identitetsmatrise. Mens  $\mathbf{0}$  har en størrelse som avhenger av dens plassering i matrisen. Dersom den er plassert på første rad vil den være en  $1 \cdot N_j$  vektor, mens på andre rad vil den være en  $1 \cdot N_{mod}$  vektor. Ved å kombinere global og relativ form fåes da:

$$\begin{bmatrix} \Phi_z(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_z(x) & \mathbf{0} \\ \Phi_d & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta\eta_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.4.90)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_d & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta\eta_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.4.91)$$

Dermed er transformasjonsmatrisen  $\Psi$  definert:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_d & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.4.92)$$

og sammenhengen kan skrives på formen:

$$\eta(t) = \Psi \eta_{rel}(t) \quad (2.4.93)$$

Likevektsuttrykket for de relative modale frihetsgradene kan dermed skrives som:

$$\tilde{M} \ddot{\eta}_{rel}(t) + \tilde{C} \dot{\eta}_{rel}(t) + \tilde{K} \eta_{rel}(t) = \tilde{R}(t) \quad (2.4.94)$$

hvor

$$\tilde{M} = \Psi^T \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_d \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} \tilde{M}_z + \Phi_d^T M_d \Phi_d & \Phi_d^T M_d \\ M_d \Phi_d & M_d \end{bmatrix} \quad (2.4.95)$$

$$\tilde{C} = \Psi^T \begin{bmatrix} \tilde{C}_z + \Phi_d^T C_d \Phi_d & \Phi_d^T C_d \\ C_d \Phi_d & C_d \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_d \end{bmatrix} \quad (2.4.96)$$

$$\tilde{K} = \Psi^T \begin{bmatrix} \tilde{K}_z + \Phi_d^T K_d \Phi_d & \Phi_d^T K_d \\ K_d \Phi_d & K_d \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} \tilde{K}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_d \end{bmatrix} \quad (2.4.97)$$

$$\tilde{R} = \Psi^T \begin{bmatrix} \tilde{R}_z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.4.98)$$

En generell løsning på den modale likevekten kan finnes ved å se på frekvensdomenet. Deler først  $\tilde{M}$  opp i:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{M}_z \hat{D} \Phi_d + \Phi_d^T M_d & \tilde{M}_z \hat{D} \\ M_d \Phi_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.4.99)$$


---

hvor  $\hat{D} = \tilde{M}_z^{-1} \Phi_d^T M_d$ . Multipliserer så med  $\tilde{K}^{-1}$ :

$$\tilde{K}^{-1} \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_z^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_d \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} I_{N_{mod}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{N_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D} \Phi_d & \hat{D} \\ \Phi_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \quad (2.4.100)$$

og får likevektsuttrykket:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{N_{mod}} & \mathbf{0}_{N_{mod}N_j} \\ \mathbf{0}_{N_jN_{mod}} & I_{N_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z \\ \Delta \eta_d \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \omega_z^{-2} & \mathbf{0}_{N_{mod}N_j} \\ \mathbf{0}_{N_jN_{mod}} & \omega_d^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_{mod}} + \hat{D} \Phi_d & \hat{D} \\ \Phi_d & I_{N_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_z \\ \Delta \ddot{\eta}_d \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} \omega_z^{-1} & \mathbf{0}_{N_{mod}N_j} \\ \mathbf{0}_{N_jN_{mod}} & \omega_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_z & \mathbf{0}_{N_{mod}N_j} \\ \mathbf{0}_{N_jN_{mod}} & \xi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_z \\ \Delta \dot{\eta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_z^{-1} \tilde{R}_z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.4.101) \end{aligned}$$

hvor  $\begin{cases} \omega_z = \text{diag}[\omega_{z_n}] \\ \omega_d = \text{diag}[\omega_j] \end{cases}$  og  $\begin{cases} \xi_z = \text{diag}[\omega_{z_n}] \\ \xi_d = \text{diag}[\omega_j] \end{cases}$ , og indeksene til  $\mathbf{0}$  og  $I$  beskriver størrelsen deres. Ser videre på den Fouriertransformerte:

$$\begin{bmatrix} \eta_d \\ \Delta \eta_d \end{bmatrix} = \sum_{\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\eta_z}(\omega) \\ \mathbf{a}_{\Delta \eta_d}(\omega) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \tilde{K}_z^{-1} \tilde{R}_z \\ \mathbf{0}_{N_j 1} \end{bmatrix} = \sum_{\omega} \begin{bmatrix} \tilde{K}_z^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}(\omega) \\ \mathbf{0}_{N_j 1} \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

Ved å sette inn dette i likevektsuttrykket fåes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\eta_z}(\omega) \\ \mathbf{a}_{\Delta \eta_d}(\omega) \end{bmatrix} = \hat{H}(\omega) \begin{bmatrix} \tilde{K}_z^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}(\omega) \\ \mathbf{0}_{N_j 1} \end{bmatrix} \quad (2.4.102)$$

hvor:

$$\hat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} \left\{ I_{N_{mod}} - \hat{\omega}_z^2 (I_{N_{mod}} + \hat{D} \Phi_d) + 2i\hat{\omega}_z \xi_z \right\} & -\hat{\omega}_z^2 \hat{D} \\ -\hat{\omega}_d^2 \Phi_d & \left\{ I_{N_j} - \hat{\omega}_d^2 + 2i\hat{\omega}_d \xi_d \right\} \end{bmatrix} \quad (2.4.103)$$

og hvor  $\hat{\omega}_z = \text{diag}[\omega/\omega_{z_n}]$  og  $\hat{\omega}_d = \text{diag}[\omega/\omega_j]$ . Som vist tidligere er det i en gitt posisjon  $x_r$ , hvor det ønskes å finne den strukturelle forskyvningsresponsen  $r_z(x_r, t)$  og den korresponderende relative forskyvningsresponsen til alle  $N_j$  massedempere  $\Delta \mathbf{r}_d(t)$ , gitt at:

$$\begin{bmatrix} r_z(x_r, t) \\ \Delta \mathbf{r}_d(t) \end{bmatrix} = \Psi_r(x_r) \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \Delta \eta_d(t) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \Psi_r = \begin{bmatrix} \Phi_z(x_r) & \mathbf{0}_{1N_j} \\ \mathbf{0}_{N_jN_{mod}} & I_{N_j} \end{bmatrix} \quad (2.4.104)$$

En Fouriertransformasjon gir da at:

$$\begin{bmatrix} a_{r_z}(x_r, \omega) \\ \mathbf{a}_{\Delta_r}(\omega) \end{bmatrix} = \Psi_r(x_r) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\eta_z}(\omega) \\ \mathbf{a}_{\Delta_\eta} \end{bmatrix} \quad (2.4.105)$$

Dermed fåes det at:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(x_r, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{bmatrix} a_{r_z} \\ \mathbf{a}_{\Delta_r} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a_{r_z} \\ \mathbf{a}_{\Delta_r} \end{bmatrix}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left\{ \Psi_r(x_r) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\eta_z}(\omega) \\ \mathbf{a}_{\Delta_\eta}(\omega) \end{bmatrix} \right\}^* \left\{ \Psi_r(x_r) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\eta_z}(\omega) \\ \mathbf{a}_{\Delta_\eta}(\omega) \end{bmatrix} \right\}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left\{ \Psi_r(x_r) \hat{\mathbf{H}}(\omega) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_z^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}(\omega) \\ \mathbf{0}_{N_j 1} \end{bmatrix} \right\}^* \left\{ \Psi_r(x_r) \hat{\mathbf{H}}(\omega) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_z^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}(\omega) \\ \mathbf{0}_{N_j 1} \end{bmatrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (2.4.106)$$

Dette gir:

$$\mathbf{S}_r(x_r, \omega) = \Psi_r(x_r) \cdot \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \hat{\mathbf{S}}_{\tilde{R}}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \cdot \Psi_r^T(\omega) \quad (2.4.107)$$

hvor

$$\hat{\mathbf{S}}_{\tilde{R}}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_z^{-1} \mathbf{S}_{\tilde{R}_z}(\omega) \left( \tilde{\mathbf{K}}_z^{-1} \right)^T & \mathbf{0}_{N_{mod} N_j} \\ \mathbf{0}_{N_j N_{mod}} & \mathbf{0}_{N_j} \end{bmatrix} \quad (2.4.108)$$

og

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\tilde{R}_z}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}^*(\omega) \cdot \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}^T(\omega) \\ \mathbf{a}_{\tilde{R}_z}(\omega) = \left[ a_{\tilde{R}_{z_1}} \cdots a_{\tilde{R}_{z_n}} \cdots a_{\tilde{R}_{z_{N_{mod}}}} \right]^T \\ a_{\tilde{R}_{z_n}}(t) = \int_L a_{q_z}(x, \omega) \phi_{z_n}(x) dx \end{cases}$$

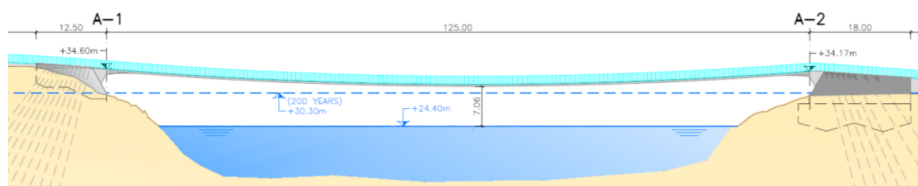




## Kapittel 3

# Hafslundsøy bru

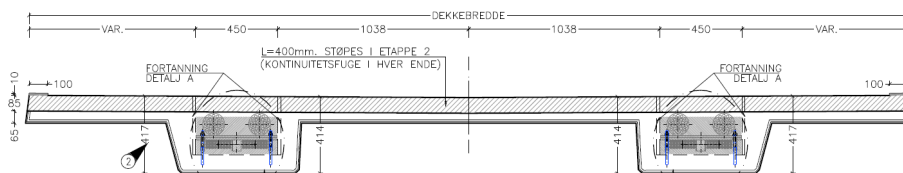
I dette kapitlet ønskes det å undersøke hvilken effekt massedempere vil gi på de dynamiske egenskapene til Hafslundsøy gangbru. For å undersøke effekten gjøres det først en egenverdianalyse, så påkjennes det en virvelavløsningslast. Videre innføres det massedempere på brua, og det gjøres en ny analyse med virvelavløsninger. Dermed kan det sees hvilke utslag i responsen massedempere gir ved virvelavløsninger. Hvert delkapittel tar for seg fremgangsmåte og resultater.



Figur 3.1: Hafslundsøy gangbru, med Hafslundsøy på høyre side, og Opsund på venstre[8]

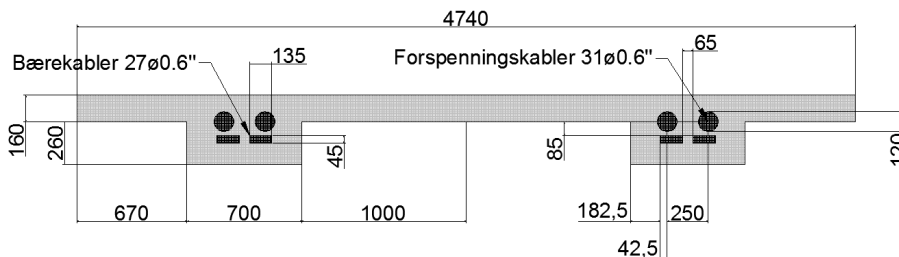
Hafslundsøy gangbru er en slank hengebru som bygges over Glomma mellom Opsund og Hafslundsøy i Sarpsborg, Østfold. Brua har et spenn på 125 m, og en tverrsnittsbredde som varierer fra 3,945 m ved landkarene, til 4,742 ved midten av spennet. Brua er bygget i betong B45, med fire bærekabler av typen 27 $\phi$ 0.6", og fire forspenningskabler av typen 31 $\phi$ 0.6". Kablene er lagt inn i to dragere, hvor hver har 2 bærekabler og 2 forspenningskabler.

### KAPITTEL 3. HAFSLUNDSØY BRU



Figur 3.2: Originaltverrsnittet til Hafslundsøy (mål i mm) [7]

I beregningene nedenfor er det benyttet et forenklet tverrsnitt av brua. Det er valgt å forenkle ved å si at brua har en bredde på 4,74 m over hele spennet. I tillegg er alle vinklene gjort rettvisklet, og høyden  $D$  er satt til 0,42 m.



Figur 3.3: Forenklet tverrsnitt av Hafslundsøy gangbru (mål i mm)

Materialparametrene og de dynamiske egenskapene til brua er hentet fra dr. techn. Olav Olsen[9]:

Parameter	Stål	Betong
E-modul $E$ [MPa]	200 000	36 000
Skjærmodul $G$ [MPa]	75 000	14 675
Tyngdetetthet $\rho$ [kN/m <sup>3</sup> ]	7 850	2 500

Tabell 3.1: Materialparametre for Hafslundsøy[9]

Tverrsnittskonstantene er så regnet ut i Cross X[1], og følgende verdier er benyttet:

---

Konst.	$EI_y$ [kNm <sup>2</sup> ]	$I_y$ [mm <sup>4</sup> ]	$m_z$ [kg/m]	$GI_t$ [kNm <sup>2</sup> ]	$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]
Verdi	$5,82 \cdot 10^5$	$1,62 \cdot 10^{10}$	3178	$4,22 \cdot 10^5$	$2,88 \cdot 10^{10}$	$3,60 \cdot 10^{10}$

Tabell 3.2: Konstanter beregnet fra CrossX

Originalt har landkarene til Hafslundsøy en høydeforskjell på 0,43 m, men for enkelhetsskyld er det antatt at høyden til landkarene er lik for de videre beregningene som er gjort. Slakken  $e_c$  til brua er satt til 2,8 m for korttidslast, og 2,35 m for langtidslast i henhold til dr. techn. Olav Olsen[8]. Videre er den fordelte massen til kablene og betongen for det forenklede tverrsnittet:

Betong, $m_b$ [kg/m]	Forspenningkabler, $m_{c1}$ [kg/m]	Bærekabler, $m_{c2}$ [kg/m]
2632	88,75	47,75

Tabell 3.3: Fordelt masse for Hafslundsøy

Brua bygges med 3 m lange plastøpte betongelementer, som flyttes ut på kablene til den ønskede posisjonen. Disse betongelementene gjør sammen med forspenningskabler at brua i ferdigstilt fase får en aksialkraft som virker over hele spennet. For å utnytte bruas design er dermed betongen satt i trykk, og kablene i strekk, slik at brua er best mulig rustet for påkjenninger. Kreftene som virker i brua er[4]:

	Betongdekke	Forspenningkabler	Bærekabler
Etter oppspenning	-17812	26178	15014
Etter lang tid	-9694	24724	13954

Tabell 3.4: Aksialkraft [kN]

Disse aksialkreftene gir en total aksialkraft i brua som:

$$\bar{H}_1 = -17812 + 26178 + 15014 = \underline{23380} \quad [kN] \quad \text{Etter oppspenning}$$

$$\bar{H}_2 = -9894 + 24724 + 13954 = \underline{28784} \quad [kN] \quad \text{Etter lang tid}$$

Ettersom betongen står i trykk, vil den bidra til aksialstivheten til brua. Aksialstivheten til komponenten i brua er:

Betong $EA_b$	Forspenningskabler $(EA)_{c_1}$	Bærekabler $(EA)_{c_2}$
$3,79 \cdot 10^{10}$	$2,26 \cdot 10^9$	$1,215 \cdot 10^9$

Tabell 3.5: Aksialstivheten for tverrsnittskomponentene [N]

Dermed kan den total aksialstivhet,  $EA_{tot}$ , for tverrsnittet til brua beregnes:

$$EA_{tot} = EA_b + 4(EA)_{c_1} + 4(EA)_{c_2} = \underline{5,1804 \cdot 10^{10}} \quad [N]$$

Dempingsraten til brua gitt som  $\xi = 0,01$  [8].

I de videre beregningene sees det på tilfellet etter oppspenning. Brua er i en mer kritisk fase før den har fått "satt" seg, og det er derfor interessant å se hvordan responsen er i dette tilfellet. Dersom responsen pga. virvelavløsningene blir for stor for korttidstilfellet vil brua nå kritisk fase før langtidsvirkningene har inntruffet.

### 3.1 Egenverdianalyse

Før det kan begynnes å se på plassering og egenskaper for massedemperene, må det som nevnt over gjøres en egenverdianalyse. Teorien i kap. 2.1 og 2.2 tar for seg slanke hengebruer med strekkabler. Hafslundsøy går inn under denne kategorien, og teorien kan derfor brukes direkte. Ettersom det sees på virvelavløsninger i denne oppgaven er det gjort egenverdiberegninger for eksitasjoner i  $z$ -retning og torsjon.

### 3.1.1 Egenverdier for eksitasjon i $z$ -retning

Har fra lign.(2.2.44):

$$(\mathbf{K}_z - \omega^2 \mathbf{M}_z) \mathbf{a}_z = 0$$

For Hafslundsøy ønskes det å se på de 4 første egenmodene ( $N = 4$ ). Ønsker først å finne stivhetsmatrisen  $\mathbf{K}_z$  og massematrisen  $\mathbf{M}_z$ . For å gjøre dette må lign.(2.2.36), (2.2.37), (2.2.38) og (2.2.39), skrives om til formen:

$$\kappa_{pn} = \begin{cases} EI_y \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases} \quad \lambda_{pn} = \begin{cases} 2\bar{H} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

$$\mu_{pn} = \begin{cases} \left(\frac{64e_c}{\pi L}\right)^2 \frac{(EA)_{c1}}{Ll_e} \frac{1}{pn} + \left(\frac{64e_c}{\pi L}\right)^2 \frac{(EA)_{c2}}{Ll_e} \frac{1}{pn} & \text{for } p \text{ og } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } p \text{ eller } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{z_p} = \begin{cases} (4m_{c1} + 4m_{c2} + m_b) & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

Lign.(2.2.42) og (2.2.43) gir da for korttidslast:

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} 0,5126 & 0 & 0,0716 & 0 \\ 0 & 1,2186 & 0 & 0 \\ 0,0716 & 0 & 2,8701 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,3198 \end{bmatrix} * 10^5 \quad [N/m^2]$$

$$\mathbf{M}_z = \underline{diag}[m_z] \quad \text{hvor } m_z = 3178 \quad [kg/m]$$

Ser så på egenverdiproblemet  $\det(\mathbf{K}_z - \omega^2 \mathbf{M}_z) = 0$ , og løser for å finne egenfrekvensene. Definerer:

$$c = \frac{2}{\pi^2} \frac{\bar{H}_i L^2}{EI_y} \quad d = \left(\frac{32}{\pi^3}\right)^2 \left(\frac{e_c}{L}\right)^2 \frac{L}{l_e} \frac{(EA)_{tot} L^2}{EI_y} \quad \hat{\omega}_z = \frac{\omega_z}{(\pi/L)^2 \sqrt{EI_y/m_z}}$$

Og egenverdiproblemet kan dermed skrives som:

$$(16 + 4c - \hat{\omega}_z^2) (256 + 16c - \hat{\omega}_z^2) \left[ (1 + c + d - \hat{\omega}_z^2) \left( 81 + 9c + \frac{d}{9} - \hat{\omega}_z^2 \right) - \left( \frac{d}{3} \right)^2 \right] = 0$$

får så egenfrekvensene som:

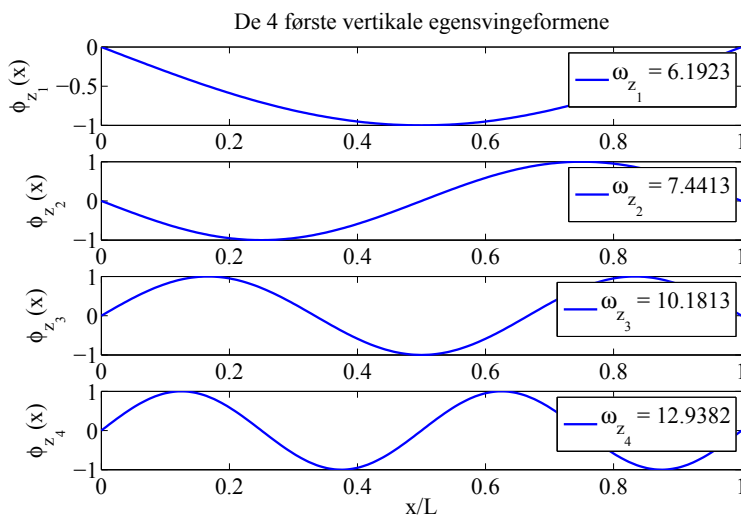
$$\omega_{z_1} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi^2 EI_y + 2\bar{H}L^2}{(4m_{c_1} + 4m_{c_2} + m_b)L^4}} = \underline{6,1923} \quad [rad/s]$$

$$\omega_{z_3} = 4\pi \sqrt{\frac{16\pi^2 EI_y + 2\bar{H}L^2}{(4m_{c_1} + 4m_{c_2} + m_b)L^4}} = \underline{10,1813} \quad [rad/s]$$

$$\omega_{z_{2,4}} = \pi \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y}{(4m_{c_1} + 4m_{c_2} + m_b)L^4} \left[ 41 + 5c + \frac{5d}{9} \mp \sqrt{\left(40 + 4c - \frac{4d}{9}\right)^2 + \left(\frac{d}{3}\right)^2} \right]}$$

$$= \begin{cases} \underline{7,4413} \\ \underline{12,9382} \end{cases} [rad/s]$$

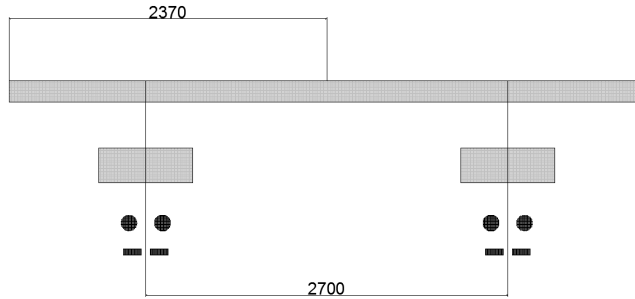
Løser så egenverdioproblemet  $(\mathbf{K}_z - \omega_z^2 \mathbf{M}_z)\mathbf{a}_z = 0$ , og finner modene som harmoniske fourierrekker.



Figur 3.4: De fire første svingemodene i  $z$ -retning

### 3.1.2 Egenverdier for eksitasjon i torsjon

Før egenverdiene for torsjon kan beregnes må massetregghetsmomentet  $m_\theta$  for tverrsnittet finnes. For å beregne  $m_\theta$  deles tverrsnittet inn i tre deler, en plate, de to dragerene og kablene.



Figur 3.5: Referansefigur for massetregghet

Finner først massetreggheten til platen:

$$m_{\theta_p} = \int_A r^2 \rho_b dA = 2 \cdot 1,185^2 \cdot 2500 \cdot (0,16 \cdot 2,37) = 2662,411 \quad [kgm^2/m]$$

Dragerene:

$$m_{\theta_d} = 2 \cdot 1,35^2 \cdot 2500 \cdot (0,26 \cdot 0,7) = 1658,475 \quad [kgm^2/m]$$

Kablernes fortrengte betong:

$$m_{\theta_k} = 2 \cdot (1,35^2 \cdot 2500 (0,06^2 \cdot \pi \cdot 2 + 0,045 \cdot 0,135 \cdot 2)) = 316,837 \quad [kgm^2/m]$$

Dermed blir den totale massetreggheten for betongen:

$$m_\theta = m_{\theta_p} + m_{\theta_d} - m_{\theta_k} = 4004 \quad [kgm^2/m]$$

Kan nå se på egenverdiproblemet fra lign.(2.2.63):

$$(\mathbf{K}_\theta - \omega_\theta^2 \mathbf{M}_\theta) \mathbf{a}_\theta = 0$$

Det ønskes også her å se på de 4 første egenmodene. Skriver om lign.(2.2.55), (2.2.56), (2.2.57), og (2.2.58), slik at de gjelder for Hafslundsøy:

$$\Omega_{pn} = \begin{cases} (n\pi L)^2 GI_t & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

$$\vartheta_{pn} = \begin{cases} \frac{\bar{H}b_c^2}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \text{for } p = n \\ 0 & \text{for } p \neq n \end{cases}$$

$$\nu_{pn} = 0$$

$$\chi_{pn} = \begin{cases} \left(\frac{16e_cb_c}{\pi L}\right)^2 \frac{(EA)_c}{Ll_e} \frac{1}{pn} & \text{for } p \text{ og } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{for } p \text{ eller } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Legg her merke til at  $EI_w = 0$  i uttrykket for  $\Omega_{pn}$  ettersom det ikke er noen fare for vridning i dette tverrsnittet, og at  $\nu_{pn} = 0$  ettersom kablene ligger tilnærmet på linje med skjærsenteret til tverrsnittet. Dermed kan stivhetsmatrisen og massematrisen finnes:

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{bmatrix} 0,0651 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,2605 & 0 & 0 \\ 0,0000 & 0 & 0,5861 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0420 \end{bmatrix} * 10^{12} \quad [N]$$

$$\mathbf{M}_\theta = m_{\theta_{tot}} \mathbf{I} \quad \text{hvor} \quad m_{\theta_{tot}} = m_\theta + 2(m_{c1} + m_{c2}) \frac{b_c^2}{2} = \underline{4,9991 \cdot 10^3} \quad [kgm^2/m]$$

Kan dermed finne  $\omega_{\theta_2}$  og  $\omega_{\theta_4}$  ved å se på:

$$(\Omega_{22} + \vartheta_{22} - \omega_\theta^2 m_{\theta_{tot}}) = 0 \quad \text{og} \quad (\Omega_{44} + \vartheta_{44} - \omega_\theta^2 m_{\theta_{tot}}) = 0$$

Ved å løse for  $\omega_\theta$  fåes da:

$$\omega_{\theta_2} = \sqrt{\frac{\Omega_{22} + \vartheta_{22}}{m_{\theta_{tot}}}} = \underline{6,5791} \quad [rad/s]$$

$$\omega_{\theta_4} = \sqrt{\frac{\Omega_{44} + \vartheta_{44}}{m_{\theta_{tot}}}} = \underline{13,1583} \quad [rad/s]$$

Har nå funnet egenfrekvensene for de antisymmetriske modene. Ønsker så å finne de symmetriske. Har at:

$$(\Omega_{11} + \vartheta_{11} + \chi_{11} - \omega_\theta^2 m_{\theta_{tot}}) \cdot (\Omega_{33} + \vartheta_{33} + \chi_{33} - \omega_\theta^2 m_{\theta_{tot}}) - \chi_{13} = 0$$

Definerer:

$$k_1 = 10 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 GI_t + 10 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \bar{H} \frac{b_c^2}{2} + \frac{10}{9} \left(\frac{16e_cb_c}{\pi L}\right)^2 \frac{(EA)_{tot}}{Ll_e}$$



$$k_2 = 8 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 GI_t + 8 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \bar{H} \frac{b_c^2}{2} + \frac{8}{9} \left( \frac{16e_c b_c}{\pi L} \right)^2 \frac{(EA)_{tot}}{Ll_e}$$

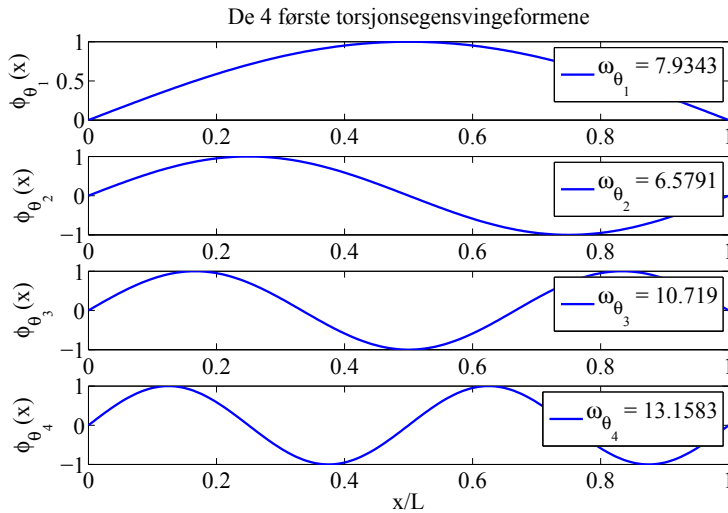
$$k_3 = \frac{2}{3} \left( \frac{16e_c b_c}{\pi L} \right)^2 \frac{(EA)_{tot}}{Ll_e}$$

Får da de symmetriske egenfrekvensene som:

$$\omega_{\theta_1} = \sqrt{\frac{k_1 - \sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{2m_{\theta_{tot}}}} = \underline{7,9343} \quad [rad/s]$$

$$\omega_{\theta_3} = \sqrt{\frac{k_1 + \sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{2m_{\theta_{tot}}}} = \underline{10,7190} \quad [rad/s]$$

Løser så egenverdiproblemet  $(\mathbf{K}_\theta - \omega_\theta^2 \mathbf{M}_\theta) \mathbf{a}_\theta = 0$ , og finner modene som harmoniske Fourierrekker.



Figur 3.6: De 4 første svingemodene for torsjon

### 3.1.3 Oppsummering - egenverdier

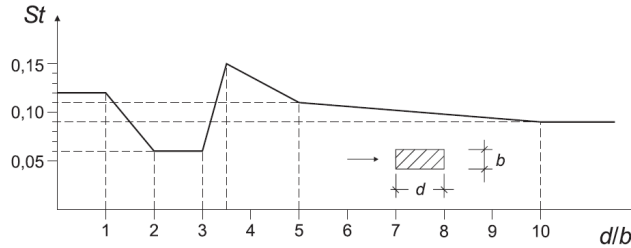
Egenverdiberegningene gir fire egensvingeformer for eksitasjon i både  $z$ -retning og torsjonsvridning, hvor begge har to symmetriske og to antisymmetriske svingeformer. Ser at for torsjon blir svingeformen med lavest egenfrekvens  $\phi_{\theta_2}$ , som er antisymmetrisk. En forklaring på dette kan være at oppspenningskraften i kablene gjør at brua lettere kan svinge antisymmetrisk enn symmetrisk. Når brua vris inn i en torsjonssvingeform blir en av kabelgruppene utsatt for mer trykk enn strekk, og en annen motsatt, dersom svingeformen er symmetrisk. Mens dersom svingeformen er antisymmetrisk, vil hver kabelgruppe bli utsatt for like mye strekk som trykk.

### 3.2 Virvelavløsningslast

Ettersom det nå er beregnet egenverdier for brua kan det begynnes å se på virvelavløsningslasten. Begynner med å definere kritiske vindhastigheter. Lign.(2.3.2) gir:

$$V_{R_i} = f_i \cdot \frac{D}{St}$$

For regne ut den kritiske vindhastigheten må Strouhallet  $St$  defineres. Fra Norsk standard er Strouhal tallet for rektangulære tverrsnitt gitt som[10].



Figur 3.7: Strouhallet for rektangulært tverrsnitt[10]

Med et bredde/høydeforhold på  $d/b = 11,286$  vil  $St = 0,09$  for Hafslundsøy. De kritiske vindhastighetene for egenfrekvensene blir da:

$V_{R_{z_1}}$	$V_{R_{z_2}}$	$V_{R_{z_3}}$	$V_{R_{z_4}}$
4,5991	5,5268	7,5619	9,6095
$V_{R_{\theta_1}}$	$V_{R_{\theta_2}}$	$V_{R_{\theta_3}}$	$V_{R_{\theta_4}}$
5,893	4,8865	7,9612	9,773

Tabell 3.6: Kritiske vindhastigheter [m/s]

Må nå bestemme tverrsnittsegenskapene som trengs for å beregne virvelavløsningseffekten. Etter møte med veileder 06.05.2013 ble følgende verdier foreslått[14]:

$\rho_v$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\hat{\sigma}_{q_z}$ [ ]	$b_z$ [ ]	$b_\theta$ [ ]	$a_z$ [ ]	$\lambda$ [ ]	$K_{a_{z0}}$ [ ]	$K_{a_{\theta 0}}$ [ ]
1,25	1	0,15	0,1	0,4	3	0,2	0,02

Tabell 3.7: Verdier fra veiledningstime[14]

Kan dermed begynne å se på lastens virkning på brua. Antar at hele bruspenet er eksponert for vindstrømmen,  $L_{exp} = L$ .

### 3.2.1 Virvelavløsningslast med respons i $z$ -retning

Har fra egenverdianalysen verdiene for  $\omega_z$ , og siden massen er jevnt fordelt over hele spennet, vil den modale fordelte massen  $\tilde{m}_z = m_z$ . Ønsker så å finne den aerodynamiske dempingsparameteren  $K_{a_z}$ .

$$K_{a_z} = 2,6 \cdot K_{a_{z0}} \cdot \left( \frac{V}{V_{Rz}} \right)^{-6} \cdot e^{-\left( \frac{V}{V_{Rz}} \right)^{-8}}$$

Kan nå se på virvelavløsningsresponsen. Har fra lign.(2.3.34):

$$g_n(V_{R_n}, V) = \left( \frac{V}{V_{R_n}} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \frac{V_{R_n}}{V}}{b_n} \right)^2} \text{ hvor } n = \begin{cases} z \\ \theta \end{cases}$$

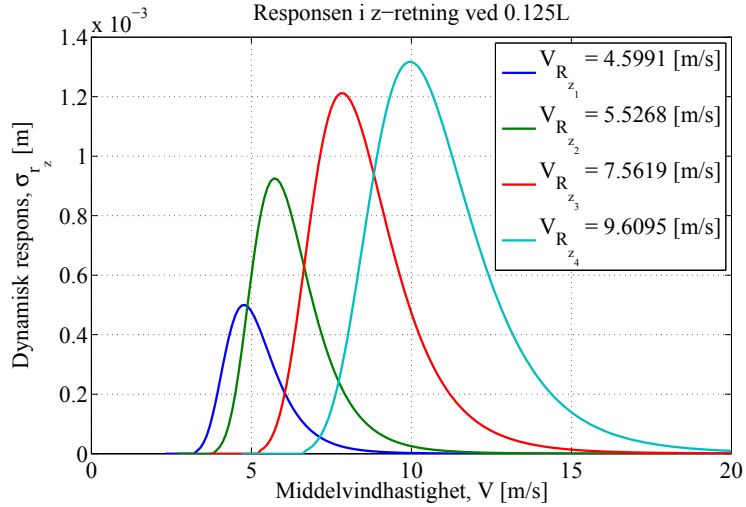
Videre defineres:

$$\hat{\xi}_z = \frac{4m_z}{\rho_v B^2} \frac{\xi_z}{K_{a_z}} \text{ og } \hat{\beta}_z = \frac{|\phi_z(x)|}{2^{5/2} \pi^{7/4}} \sqrt{\frac{\rho D^3}{m_z \int_L \phi_z^2(x) dx} \frac{\lambda}{b_z K_{[a_z]}}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{q_z}}{St^2} \cdot \frac{g_z}{a_z}$$

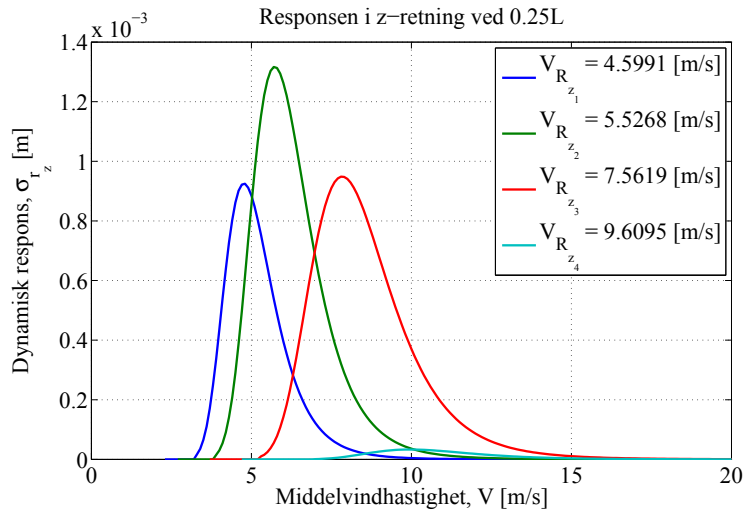
Virvelavløsningsresponsen er dermed gitt som:

$$\hat{\sigma}_{r_z} = \sqrt{\frac{1 - \hat{\xi}_z}{2} + \sqrt{\left( \frac{1 - \hat{\xi}_z}{2} \right)^2 + \hat{\beta}_z^2}} \Rightarrow \sigma_{r_z} = \frac{\hat{\sigma}_{r_z}}{a_z D}$$

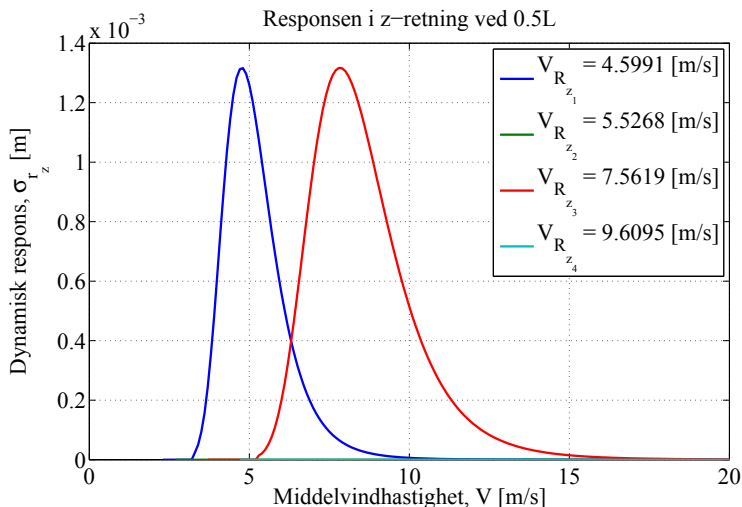
Får dermed følgende dynamisk respons:



Figur 3.8: Dynamiske respons i z-retning ved 0,125 L [m]



Figur 3.9: Dynamisk respons i z-retning ved 0,25 L [m]


 Figur 3.10: Dynamisk respons i  $z$ -retning ved  $0,5 L$  [m]

### 3.2.2 Virvelavløsninger med respons i torsjon

Har nå sett på responsen for eksitasjon i  $z$ -retning. Ønsker så å se på torsjonsresponsen. Beregner tverrsnittsegenskapene for torsjonsvridning[14]:

$$\hat{\sigma}_{q_\theta} = \frac{\sigma_{q_\theta}}{\frac{1}{2}\rho_v V^2 B^2} = \frac{\sigma_{q_z} \frac{b_c}{2}}{\frac{1}{2}\rho_v V^2 B \cdot B} \Rightarrow \hat{\sigma}_{q_\theta} = \hat{\sigma}_{q_z} \frac{b_c}{2B}$$

$$a_\theta = \frac{a_z D}{b_c/2} = \frac{2D}{b_c} a_z$$

Den aerodynamiske dempingsparameteren blir:

$$K_{a_\theta} = 2,6 \cdot K_{a_{\theta_0}} \cdot \left(\frac{V}{V_{R_\theta}}\right)^{-6} \cdot e^{-\left(\frac{V}{V_{R_\theta}}\right)^{-8}}$$

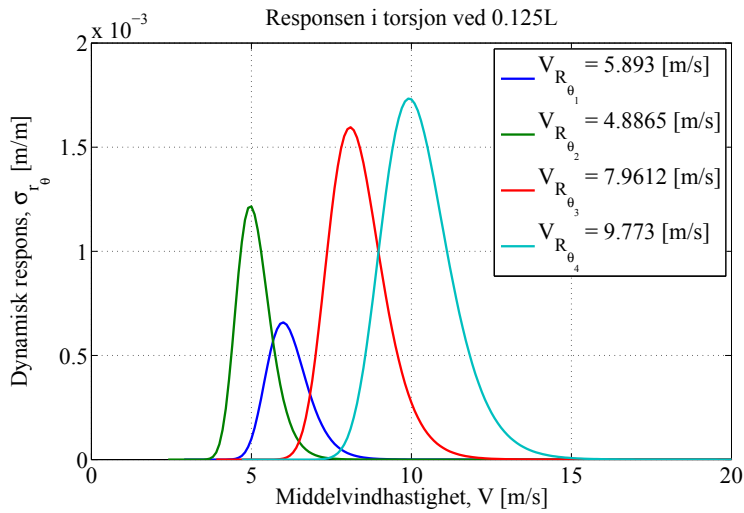
$g_\theta(V_{R_\theta}, V)$  er gitt som for  $z$ -retning, og tilsvarende blir også:

$$\hat{\xi}_\theta = \frac{4m_\theta}{\rho_v B^4} \frac{\xi_\theta}{K_{a_\theta}} \quad \text{og} \quad \hat{\beta}_\theta = \frac{|\phi_\theta(x)|}{2^{5/2}\pi^{7/4}} \sqrt{\frac{\rho D^5}{m_\theta \int_L \phi_\theta^2(x) dx} \frac{\lambda}{b_\theta K_{[a_\theta]}}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{q_\theta}}{St^2} \cdot \frac{g_\theta}{a_\theta}$$

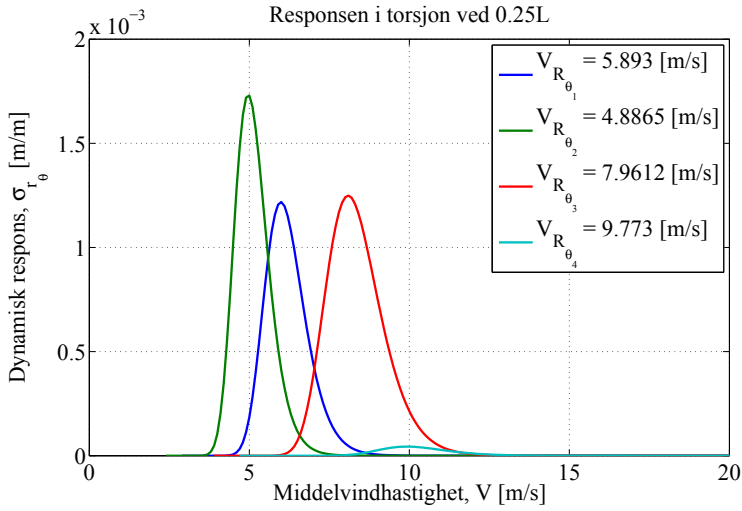
og den dynamiske responsen er gitt som:

$$\hat{\sigma}_{r_\theta} = \sqrt{\frac{1 - \hat{\xi}_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - \hat{\xi}_\theta}{2}\right)^2 + \hat{\beta}_\theta^2}} \Rightarrow \sigma_{r_\theta} = \frac{\hat{\sigma}_{r_\theta}}{a_\theta}$$

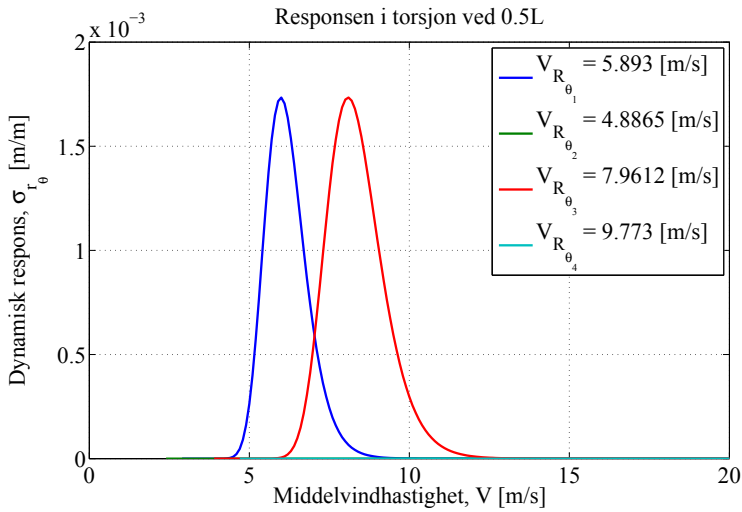
Dermed blir den dynamiske responsen i torsjon:



Figur 3.11: Dynamisk respons i torsjon ved 0,125 L [m/m]



Figur 3.12: Dynamisk respons i torsjon ved 0,25 L [m/m]



Figur 3.13: Dynamisk respons i torsjon ved 0,5 L [m/m]



### 3.2.3 Oppsummering - virvelavløsninger

Det sees fra resultatene at virvelavløsningene gir små forskyvninger både i  $z$ -retning og i torsjon. Standardavvikene  $\sigma_r$  er i størrelsesorden  $mm$  og  $rad$ , og torsjon gir den største forskyvningen for standardavviket med  $\sigma_{r_\theta} = 1,7 \cdot 10^3 rad$ , som utgjør en vertikal forskyvning i ytterkant av tverrsnittet på  $2,74 m \cdot 1,7 \cdot 10^3 rad = 4,658 mm$ . Ser også at de kritiske vindhastighetene er lave i forhold til referansevindhastigheten for Sarpsborg,  $V_{ref} = 24 m/s$  [10], som er typisk for virvelavløsninger, da det er den vindeffekten som er mest aktuell ved lave vindhastigheter tradisjonelt.

### 3.3 Innføring av massedempere

Det er nå beregnet egenverdier og virvelavløsningsrespons. Ønsker nå å innføre massedempere langs brua, for så å se på responsen med TMD. Før det kan sees på massedempere, er det nødvendig å se nærmere på virvelavløsningsresponsen. Ser først på lastresponsen. Har fra lign.(2.3.14):

$$\begin{bmatrix} S_{q_z}(\omega) \\ S_{q_\theta}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{(\frac{1}{2}\rho V^2)^2}{\sqrt{\pi}\omega_s} \begin{bmatrix} \frac{(B\hat{\sigma}_{q_z})^2}{b_z} e^{-\left(\frac{1-\frac{\omega}{\omega_s}}{b_z}\right)^2} \\ \frac{(B^2\hat{\sigma}_{q_\theta})^2}{b_\theta} e^{-\left(\frac{1-\frac{\omega}{\omega_s}}{b_\theta}\right)^2} \end{bmatrix}$$

Det modale lastresponspekteret er gitt i lign.(2.4.65). Ettersom koherenslengden  $\lambda D$  for virvlene er liten sammenlignet med lengden til brua  $L$ , kan uttrykket skrives om til[13]:

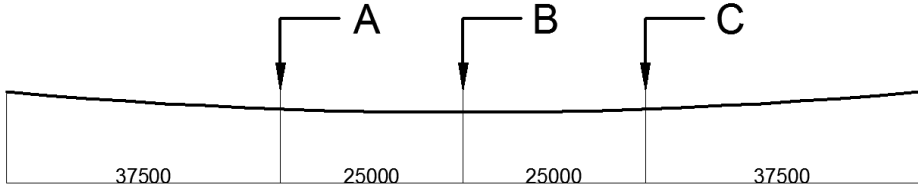
$$S_{\tilde{R}_n}(\omega) \approx 2\lambda D S_{q_n}(\omega) \int_0^L \phi_{z_n}^2 dx \quad \text{hvor } n = \begin{cases} z \\ \theta \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Dermed kan responspekteret til virvelavløsningslasten i frekvensdomenet beregnes fra lign.(2.3.27), ved å skrive om til originalkoordinater:

$$S_{r_n}(\omega) = \left(\frac{\phi_n(x_r)}{\tilde{K}_n}\right)^2 |\hat{H}_n(\omega)|^2 S_{\tilde{R}_n}(\omega) \quad (3.3.2)$$

Kan nå begynne å se på massedempere. Ut ifra modeformene, og beregnet respons bestemmes det å tilpasse demperene slik at de har størst effekt på mode 1 og 2. Det besluttes derfor å innføre 3 TMD med følgende egenskaper:

	Massedemper A	Massedemper B	Massedemper C
Masseforholdstall, $\mu$	0,0025	0,006	0,0025
Plassering	0,3L	0,5L	0,7L



Figur 3.14: Massedemperenes plassering på hafslundsøy (mål i mm)

Den valgte plasseringen og egenskapene til massedemperene brukes videre for å dempe ut både eksitasjon i  $z$ -retning og torsjon. Dempere tilpasses så modeformene ved Den Hartog[13]:

$$\omega_d = \frac{\omega_n}{1 + \mu} \quad \text{og} \quad \xi_d = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (3.3.3)$$

Det foretas så målinger i 1/8, 1/4 og 1/2 punktene på brua, ettersom dette er punktene med størst eksitasjon for de fire svingeformene, for å se hvordan responsen reduseres.

### 3.3.1 Massedempere som demper mot bevegelse i $z$ -retning

Har at  $\sigma_{q_z} = \hat{\sigma}_{q_z} \frac{\rho_v V^2 B}{2}$ , som gir:

$$S_{q_z}(\omega) = \frac{\sigma_{q_z}^2}{\sqrt{\pi} \omega_s b_z} e^{-\left(\frac{1 - \frac{\omega}{\omega_s}}{b_z}\right)^2}$$

Den Hartog gir:

$$\begin{aligned} \omega_A = \omega_C = \frac{\omega_{z2}}{1 + \mu_A} = \underline{7,4227} \quad [rad/s] & \quad \xi_A = \xi_C = \sqrt{\frac{3\mu_A}{8(1 + \mu_A)^3}} = \underline{0,0305} \\ \omega_B = \frac{\omega_{z1}}{1 + \mu_B} = \underline{6,1553} \quad [rad/s] & \quad \xi_B = \sqrt{\frac{3\mu_B}{8(1 + \mu_B)^3}} = \underline{0,0470} \end{aligned}$$

og masse- og stivhetsmatrisen blir:

$$\mathbf{M}_{z_d} = \begin{bmatrix} M_{z_d A} & 0 & 0 \\ 0 & M_{z_d B} & 0 \\ 0 & 0 & M_{z_d C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 993,3 & 0 & 0 \\ 0 & 2383,5 & 0 \\ 0 & 0 & 993,3 \end{bmatrix} \quad [kg]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{z_d} &= \begin{bmatrix} K_{z_{dA}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{z_{dB}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{z_{dC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_z^2 M_{dA} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_z^2 M_{dB} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z^2 M_{dC} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5,4727 & 0 & 0 \\ 0 & 9,0306 & 0 \\ 0 & 0 & 5,4727 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \quad [N/m] \end{aligned}$$

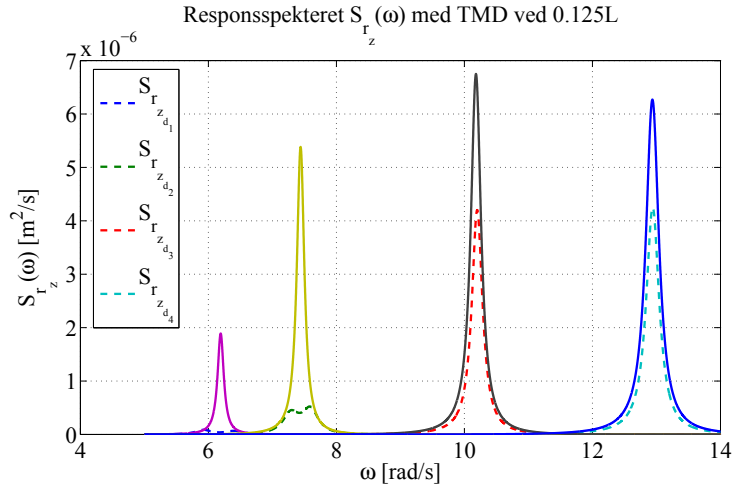
Etablerer så modeformene for massedemperene:

$$\bar{\Phi}_{z_d} = \begin{bmatrix} \phi_{z_1}(x_A) & \phi_{z_2}(x_A) & \phi_{z_3}(x_A) & \phi_{z_4}(x_A) \\ \phi_{z_1}(x_B) & \phi_{z_2}(x_B) & \phi_{z_3}(x_B) & \phi_{z_4}(x_B) \\ \phi_{z_1}(x_C) & \phi_{z_2}(x_C) & \phi_{z_3}(x_C) & \phi_{z_4}(x_C) \end{bmatrix}$$

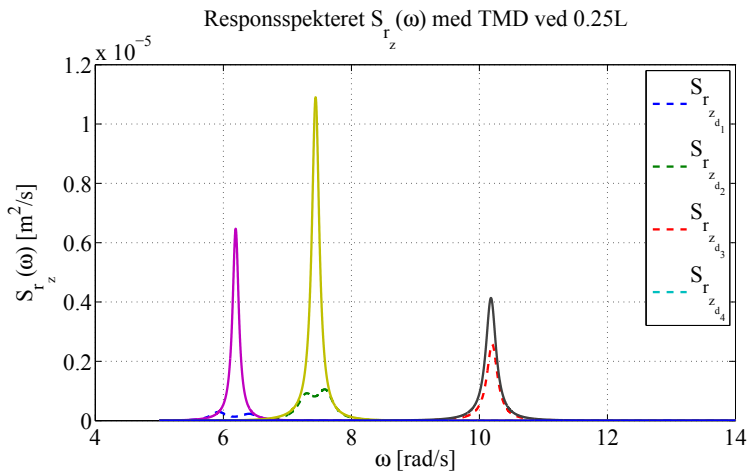
Finner så  $\Psi_r(x_r)$  fra lign.(2.4.104),  $\hat{\mathbf{H}}(\omega)$  fra lign.(2.4.103) og  $\hat{\mathbf{S}}_{\bar{R}}(\omega)$  fra lign.(2.4.108), og får spektraltettheten til responsen fra lign.(2.4.107):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(x_r, \omega) &= \Psi_r(x_r) \cdot \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \hat{\mathbf{S}}_{\bar{R}}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \cdot \Psi_r^T(x_r) \\ &= \begin{bmatrix} S_{r_z} & S_{r_z r_A} & S_{r_z r_B} & S_{r_z r_C} \\ & S_{r_A} & S_{r_A r_B} & S_{r_A r_C} \\ & & S_{r_B} & S_{r_B r_C} \\ Sym. & & & S_{r_C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

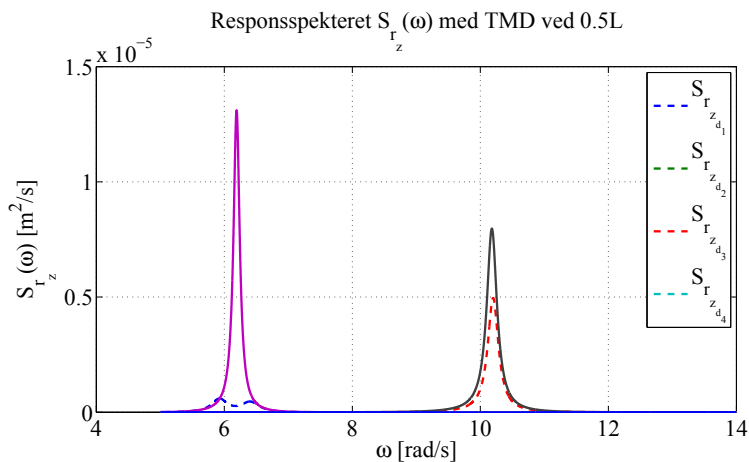
de reduserte responsspektrene blir da:



Figur 3.15: Responspekter og redusert responspekter ved 0,125L



Figur 3.16: Responspekter og redusert responspekter ved 0,25L

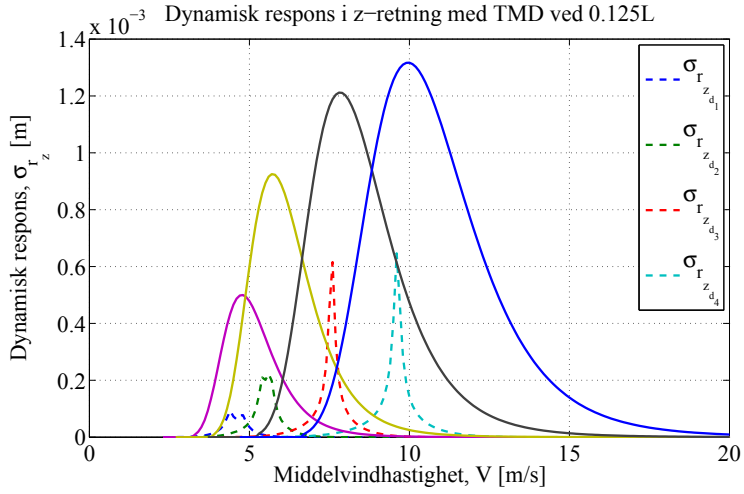


Figur 3.17: Responsspekter og redusert responspekter ved 0,5L

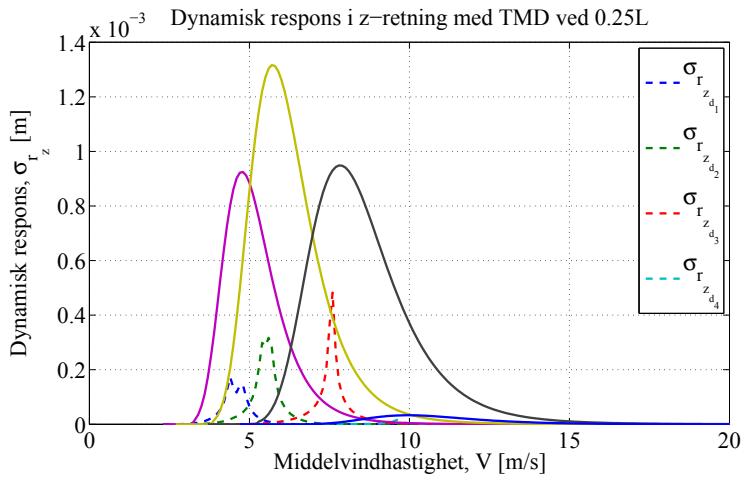
Videre sees det på den reduserte dynamiske responsen. Har fra lign.(2.3.27):

$$\sigma_{r_z}^2 = \int_0^\infty S_{r_z}(\omega) d\omega \quad \Rightarrow \quad \sigma_{r_z} = \sqrt{\int_0^\infty S_{r_z}(\omega) d\omega}$$

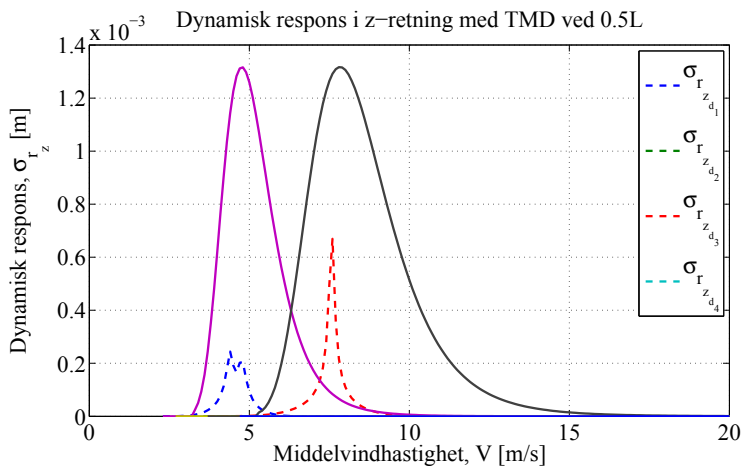
Løser og finner dynamisk respons  $\sigma_{r_z}$  for vindfeltet:



Figur 3.18: Dynamiske respons i z-retning med TMD ved 0,125 L [m]



Figur 3.19: Dynamiske respons i z-retning med TMD ved 0,25 L [m]



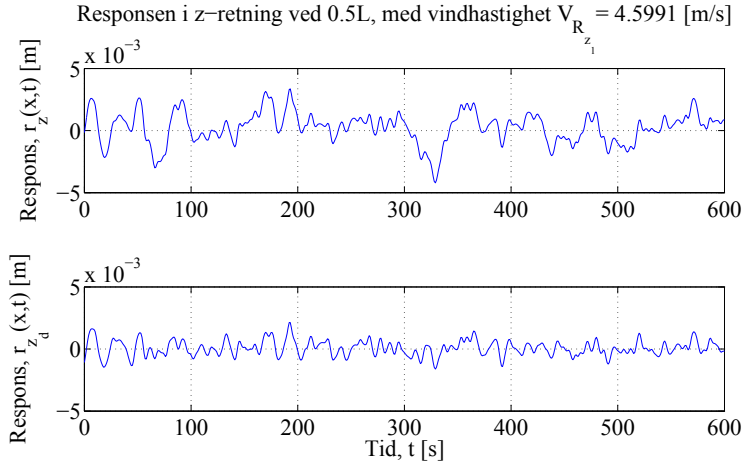
Figur 3.20: Dynamiske respons i z-retning med TMD ved 0,5 L [m]

Det gjøres så en simulering i tidsdomenet for å vise hvordan responsen dempes ut over tid. Har fra[11]:

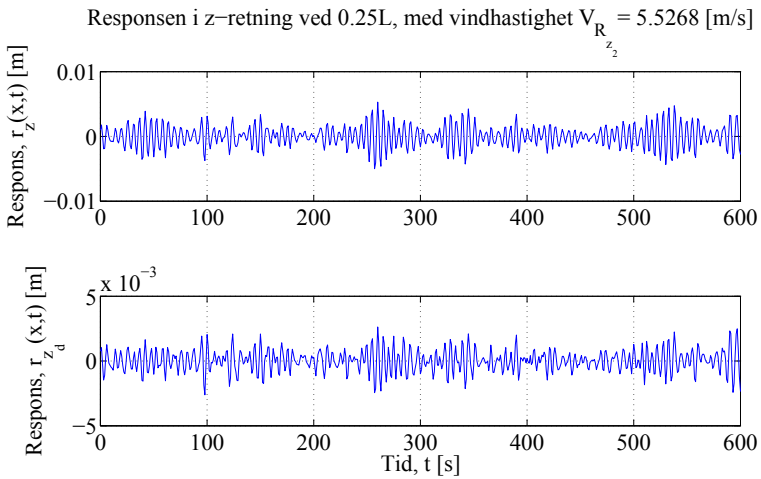
$$r_z(x, t) = Re \left( \sum_{k=1}^N a_{z_k} \cdot e^{(i\omega_k t - \psi_k)} \right) = Re \left( \sum_{k=1}^N a_{z_k} \cdot \cos(\omega_k t - \psi_k) \right) \quad (3.3.4)$$

hvor  $\psi_k$  er en tilfeldig fasevinkel for hver av de harmoniske komponentene, og  $a_{z_k} = \sqrt{2 \cdot S_r(\omega_k) \cdot \Delta\omega_k}$ . Viser her responsen over en tid  $T = 600$  s, for de mest utsatte punktene for de forskjellige kritiske vindhastighetene:

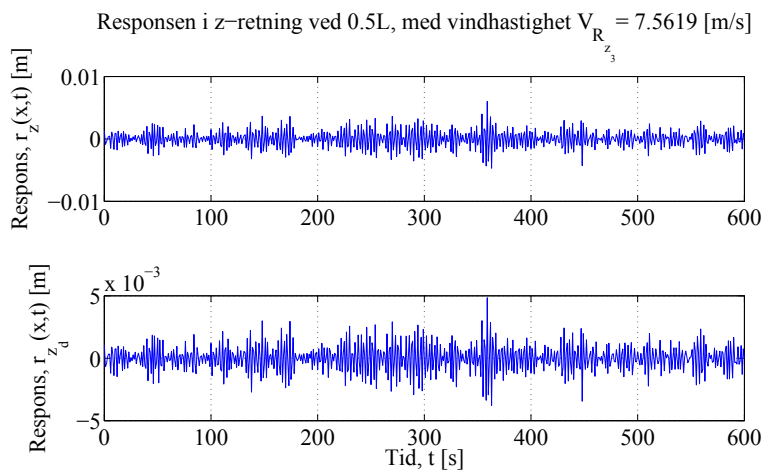




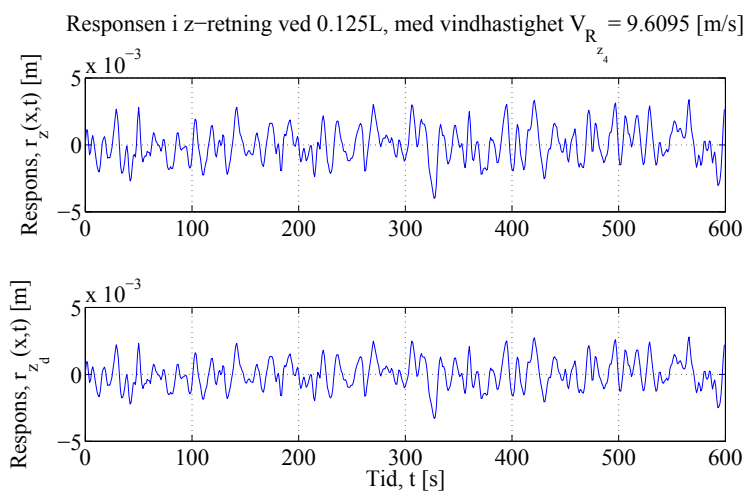
Figur 3.21: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_1}}$  ved 0,5 L



Figur 3.22: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_2}}$  ved 0,25 L



Figur 3.23: Respsen  $r_z(t)$  og dempet respsen  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_3}}$  ved 0,5 L



Figur 3.24: Respsen  $r_z(t)$  og dempet respsen  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_4}}$  ved 0,125 L

Ser at massedemperene gir en reduksjon i maksimal respons for de forskjellige svingeformene som:

$$\begin{aligned}
 V_{R_{z_1}} \text{ ved } 0,5L \text{ med } \begin{cases} r_{z_1} = 4,2 & [mm] \\ r_{z_{d_1}} = 2,1 & [mm] \end{cases} & \Rightarrow 1 - \frac{r_{z_{d_1}}}{r_{z_1}} = \underline{50\%} \\
 V_{R_{z_2}} \text{ ved } 0,25L \text{ med } \begin{cases} r_{z_2} = 5,3 & [mm] \\ r_{z_{d_2}} = 2,6 & [mm] \end{cases} & \Rightarrow 1 - \frac{r_{z_{d_2}}}{r_{z_2}} = \underline{50,94\%} \\
 V_{R_{z_3}} \text{ ved } 0,5L \text{ med } \begin{cases} r_{z_3} = 6,0 & [mm] \\ r_{z_{d_3}} = 4,8 & [mm] \end{cases} & \Rightarrow 1 - \frac{r_{z_{d_3}}}{r_{z_3}} = \underline{20\%} \\
 V_{R_{z_4}} \text{ ved } 0,125L \text{ med } \begin{cases} r_{z_4} = 4,0 & [mm] \\ r_{z_{d_4}} = 3,3 & [mm] \end{cases} & \Rightarrow 1 - \frac{r_{z_{d_4}}}{r_{z_4}} = \underline{17,5\%}
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Massedempere som demper mot bevegelse i torsjon

Har at  $\sigma_{q_\theta} = \hat{\sigma}_{q_\theta} \frac{\rho_v V^2 B^2}{2}$ , som gir:

$$S_{q_\theta}(\omega) = \frac{\sigma_{q_\theta}^2}{\sqrt{\pi} \omega_s b_\theta} e^{-\left(\frac{1 - \frac{\omega}{\omega_s}}{b_\theta}\right)^2}$$

Den Hartog gir:

$$\begin{aligned}
 \omega_A = \omega_C = \frac{\omega_{\theta_2}}{1 + \mu_A} = \underline{6,5627} \quad [rad/s] & \quad \xi_A = \xi_C = \sqrt{\frac{3\mu_A}{8(1 + \mu_A)^3}} = \underline{0,0305} \\
 \omega_B = \frac{\omega_{\theta_1}}{1 + \mu_B} = \underline{7,8870} \quad [rad/s] & \quad \text{og} \\
 & \quad \xi_B = \sqrt{\frac{3\mu_B}{8(1 + \mu_B)^3}} = \underline{0,0470}
 \end{aligned}$$

og masse- og stivhetsmatrisen blir:

$$\mathbf{M}_{\theta_d} = \begin{bmatrix} M_{\theta_{dA}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\theta_{dB}} & 0 \\ 0 & 0 & M_{\theta_{dC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1251,4 & 0 & 0 \\ 0 & 3003 & 0 \\ 0 & 0 & 1251,4 \end{bmatrix} \quad [kg]$$

$$\mathbf{K}_{\theta_d} = \begin{bmatrix} K_{\theta_{dA}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta_{dB}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta_{dC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\theta}^2 M_{\theta_{dA}} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{\theta}^2 M_{\theta_{dB}} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{\theta}^2 M_{\theta_{dC}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5,3899 & 0 & 0 \\ 0 & 18,6800 & 0 \\ 0 & 0 & 5,3899 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \quad [N/m]$$

Etablerer så modeformene for massedemperene:

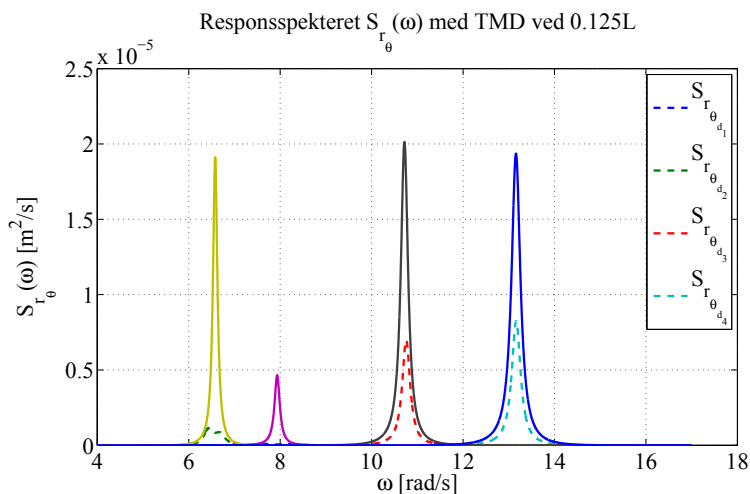
$$\Phi_{\theta_d} = \begin{bmatrix} \phi_{\theta_1}(x_A) & \phi_{\theta_2}(x_A) & \phi_{\theta_3}(x_A) & \phi_{\theta_4}(x_A) \\ \phi_{\theta_1}(x_B) & \phi_{\theta_2}(x_B) & \phi_{\theta_3}(x_B) & \phi_{\theta_4}(x_B) \\ \phi_{\theta_1}(x_C) & \phi_{\theta_2}(x_C) & \phi_{\theta_3}(x_C) & \phi_{\theta_4}(x_C) \end{bmatrix}$$

og finner spektral tettheten til responsen som for  $z$ -retning:

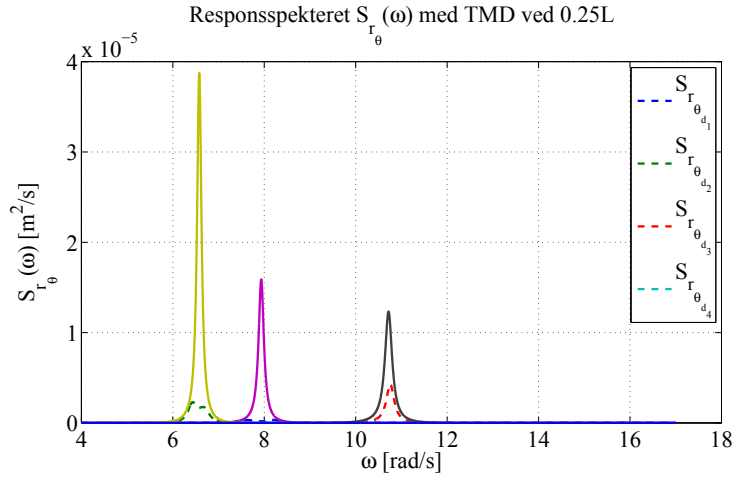
$$\mathbf{S}_r(x_r, \omega) = \Psi_r(x_r) \cdot \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \hat{\mathbf{S}}_{\hat{R}}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \cdot \Psi_r^T(x_r)$$

$$= \begin{bmatrix} S_{r\theta} & S_{r\theta r_A} & S_{r\theta r_B} & S_{r\theta r_C} \\ & S_{r_A} & S_{r_A r_B} & S_{r_A r_C} \\ & & S_{r_B} & S_{r_B r_C} \\ Sym. & & & S_{r_C} \end{bmatrix}$$

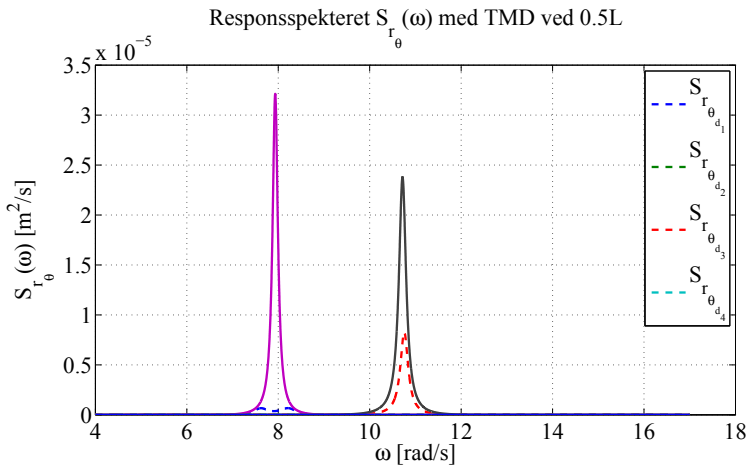
de reduserte responspektrene i torsjon blir da:



Figur 3.25: Responsspekter og redusert responspekter ved 0,125L



Figur 3.26: Responsspekter og redusert responspekter ved 0,25L

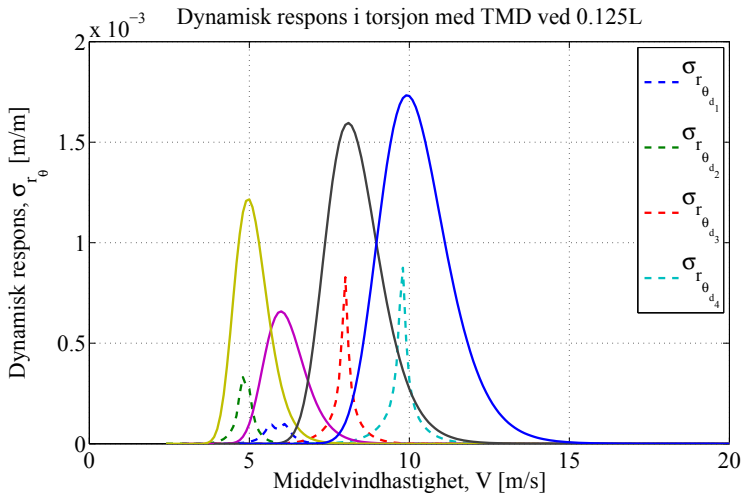


Figur 3.27: Responsspekter og redusert responspekter ved 0,5L

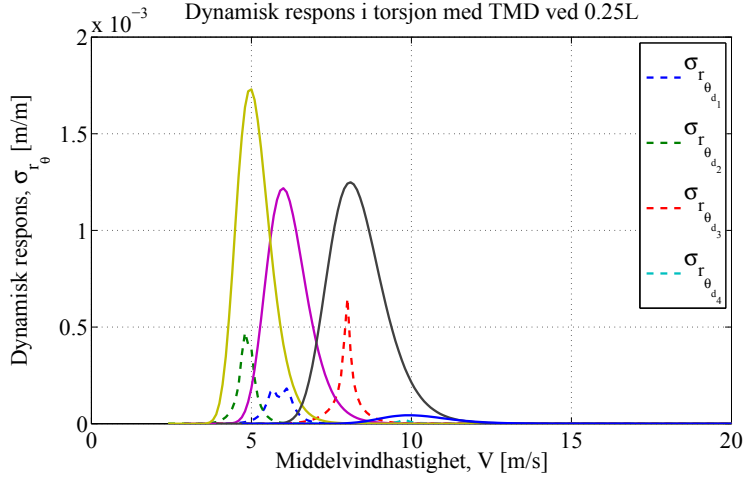
Som for  $z$ -retning, kan den reduserte dynamiske responsen skrives som:

$$\sigma_{r_\theta}^2 = \int_0^\infty S_{\theta_z}(\omega) d\omega \quad \Rightarrow \quad \sigma_{r_\theta} = \sqrt{\int_0^\infty S_{r_\theta}(\omega) d\omega}$$

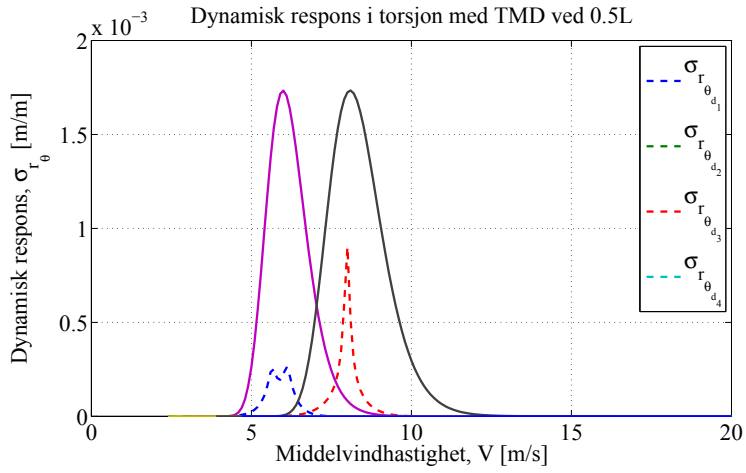
Løser og finner dynamisk respons  $\sigma_{r_\theta}$  for vindfeltet:



Figur 3.28: Dynamiske respons i torsjon med TMD ved 0,125 L [m/m]



Figur 3.29: Dynamiske respons i torsjon med TMD ved 0,25 L [m/m]

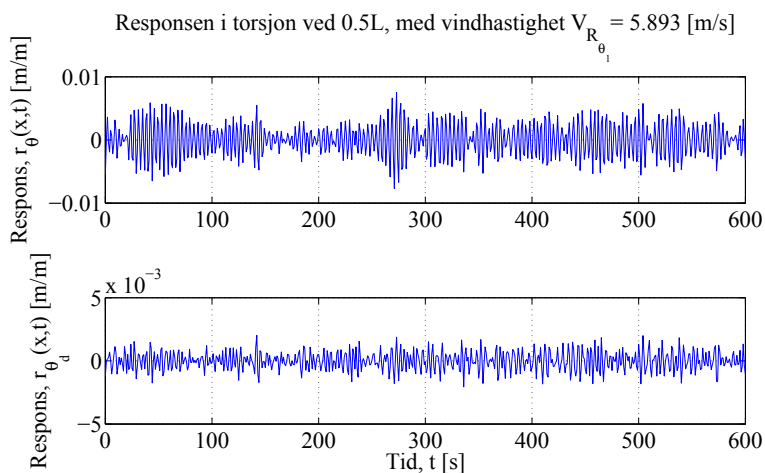


Figur 3.30: Dynamiske respons i torsjon med TMD ved 0,5 L [m/m]

Det gjøres så en simulering i tidsdomenet på samme måte som for  $z$ -retning:

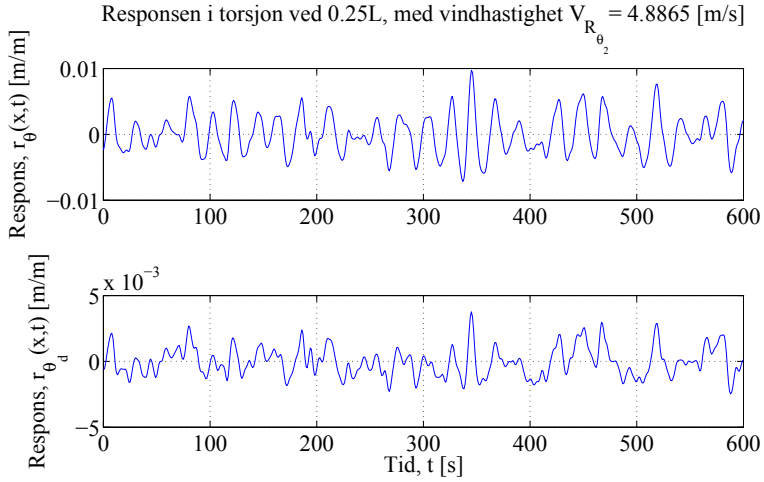
$$r_{\theta}(x, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^N a_{\theta_k} \cdot e^{(i\omega_k t - \psi_k)} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^N a_{\theta_k} \cdot \cos(\omega_k t - \psi_k) \right) \quad (3.3.5)$$

hvor  $\psi_k$  er en tilfeldig fasevinkel for hver av de harmoniske komponentene, og  $a_{\theta_k} = \sqrt{2} \cdot S_{\theta}(\omega_k) \cdot \Delta\omega_k$ . Viser også her responsen over en tid  $T = 600$  s, og for de mest utsatte punktene for de forskjellige kritiske vindhastighetene:

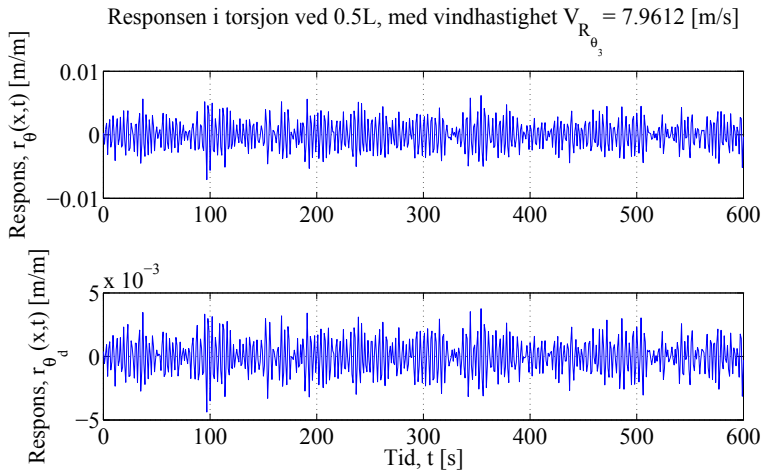


Figur 3.31: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_1}}$  ved 0,5 L

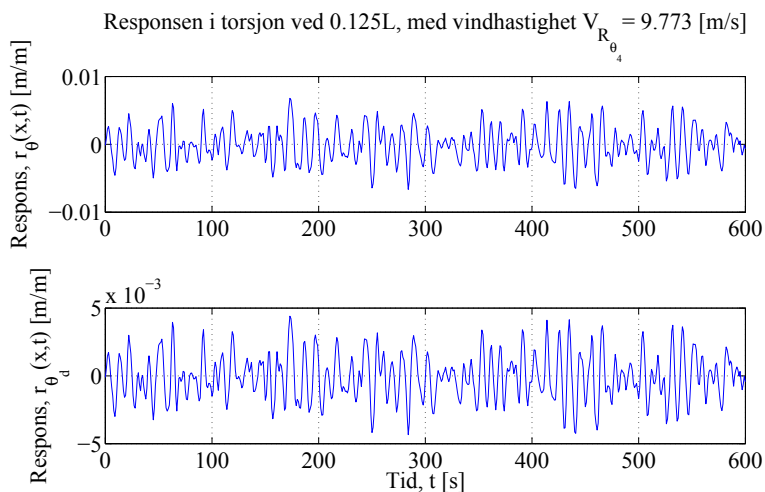




Figur 3.32: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_2}}$  ved 0,25 L



Figur 3.33: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_3}}$  ved 0,5 L



Figur 3.34: Respsen  $r_{\theta}(t)$  og dempet respsen  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_4}}$  ved 0,125 L

Ser at massedemperene gir en reduksjon i maksimal respsen for de forskjellige svingeformene som:

$$\begin{aligned}
 V_{R_{\theta_1}} \text{ ved } 0,5L \text{ med } & \begin{cases} r_{\theta_1} = 0,0077 \text{ [rad]} \\ r_{\theta_{d_1}} = 0,0021 \text{ [rad]} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{r_{\theta_{d_1}}}{r_{\theta_1}} = \underline{72,73 \%} \\
 V_{R_{\theta_2}} \text{ ved } 0,25L \text{ med } & \begin{cases} r_{\theta_2} = 0,0097 \text{ [rad]} \\ r_{\theta_{d_2}} = 0,0038 \text{ [rad]} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{r_{\theta_{d_2}}}{r_{\theta_2}} = \underline{60,82 \%} \\
 V_{R_{\theta_3}} \text{ ved } 0,5L \text{ med } & \begin{cases} r_{\theta_3} = 0,0071 \text{ [rad]} \\ r_{\theta_{d_3}} = 0,0044 \text{ [rad]} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{r_{\theta_{d_3}}}{r_{\theta_3}} = \underline{38,03 \%} \\
 V_{R_{\theta_4}} \text{ ved } 0,125L \text{ med } & \begin{cases} r_{\theta_4} = 0,0068 \text{ [rad]} \\ r_{\theta_{d_4}} = 0,0044 \text{ [rad]} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{r_{\theta_{d_4}}}{r_{\theta_4}} = \underline{35,29 \%}
 \end{aligned}$$

### 3.3.3 Oppsummering - Massedempere

Ut ifra resultatene ovenfor sees det at massedemperene gir en tydelig reduksjon i responsen. Den største reduksjonen er for  $V_{R\theta}$ , hvor responsen dempes ut med over 70 % på det meste. Selv om forskyvningene som følge av virvelavløsninger er små for Hafslundsøy, viser resultatene at massedempere gir en meget positiv effekt for denne typen konstruksjoner. Den største responsen som er kalkulert i tidsserieanalysen blir  $r_{\theta_2} = 9,7 \cdot 10^3 \text{ rad}$ , som tilsvarer en forskyvning vertikalt i ytterkant av tverrsnittet på 22,989 mm. Den dempede responsen derimot gir en forskyvning på bare 9 mm. Det legges også merke til at masse og stivhet for massedemperene er i en størrelsesorden som er innenfor rimelighetens grenser, da det gjelder praktisk gjennomførbarhet.



## Kapittel 4

# Oppsummering og konklusjon

Beregningene gjort i denne oppgaven tyder på at det ikke er nødvendig med massedempere på Hafslundøy bru. I likhet med Svend Ole Hansen ApS[3], fåes det at virvelavløsningslast ikke gir store responsutslag på konstruksjonen. Allikevel viser beregningene som er gjort at massedempere er svært effektivt for slanke gangbru, og at responsen kan reduseres betraktelig.

Eigenverdianalysen som er gjort er utført med noen forenklinger. Det forenklete tverrsnittet gjør at stivhets- og masse-egenskapene til systemet avviker noe fra det originale tverrsnittet med varierende bredde. Det varierende tverrsnittet vil ha lavere stivhet og masse enn det forenklete for hele bruas lengde. I tillegg blir systemet sett på som en hengebru med kablene inne i tverrsnittet. Det er ikke tatt hensyn til innspenningsegenskapene til brua mot landkarene, annet en forspennings-/aksialkrefter. Innspenningene er blitt antatt tilsvarende som innfestingen for en hengebru, med utvendige kabler, mot tårnene. Denne forenklingen vil gjøre brua noe mindre stiv ved innfestingene, og vil dermed gi et bidrag som virker motsatt av forenklingen av tverrsnittet, i forhold til den totale stivheten.

Beregningene som er gjort for virvelavløsningene er også gjort med noen forenklinger. Strouhal tallet som er brukt gjelder for rektangulært tverrsnitt, men er en god tilnærming for det forenklete tverrsnittet. Responsen er beregnet for  $z$ -retning og torsjon hver for seg, og det er ikke sett på den kombinerte effekten.

Det er i denne oppgaven innført tre massedempere både for eksitasjon i  $z$ -retning og torsjon. I likhet med beregningene for virvelavløsningslasten er det kun sett på effektene i hver retning for seg. Det er altså ikke sett på effekten demperene mot torsjon har ved eksitasjon i  $z$ -retning, og motsatt. Det er også benyttet samme masseforholdstall  $\mu$  for demperene for de to analysene. Demperene ble tilpasset mode 1 og 2 for begge. Det ble også gjort en beregning for dempere som var innstilt for mode 2 og 3, men resultatene for denne beregningen ga dårligere demping for systemet totalt enn for det først nevnte tilfellet, og ble

## KAPITTEL 4. OPPSUMMERING OG KONKLUSJON

---

derfor ekskludert. Resultatene viser at demperene gir størst effekt mot torsjon, med i overkant av 70 % reduksjon av responsen på det meste, men at effekten også er betydelig for eksitasjon i  $z$ -retning(50 %).

Alt i alt viser resultatene i denne oppgaven at innføring av TMD'er er en svært effektiv måte å redusere responsen til slanke gangbruer på. Selv om virvel-avløsningsresponsen er liten for Hafslundsøy vil massedempere kunne være et godt alternativ for å dempe ut andre laster som fører til resonante svingninger. Det vil derfor være interessant videre å se på responsen som følge av andre typer vindlaster, jordskjelv og gangtrafikk for Hafslundsøy, og se om det her vil være behov for å dempe ut svingningene.

# Referanser

- [1] Kolbein Bell. Crossx, 2000.
- [2] Jerome J. Connor. *Introduction to structural motion control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2003.
- [3] Svend Ole Hansen. Glomma pedestrian bridge - memo on violent wind-induced vibrations. Technical report, 2012.
- [4] Stein Atle Haugerud. Mail - anngående aksialkrefter i hafslundsøy bru, 14. mars 2013.
- [5] J. A. Jurado. *Bridge aeroelasticity: sensitivity analysis and optimal design*. WIT Press, Southampton, 2011. Tilgang via Internett.
- [6] Björn Åkesson. *Understanding bridge collapses*. Taylor and Francis, London, 2008.
- [7] Dr. techn. Olav Olsen. G/s - bru opsund - hafslundsøy - tegninger 01112012 - del 1 av 4, 2012.
- [8] Dr. techn. Olav Olsen. Pedestrian bridge opsund-hafslundsøy - structural analysis and design, 2012.
- [9] Dr. techn. Olav Olsen. G/s - bru opsund - hafslundsøy - modal analyse, 2013.
- [10] Norsk Standard. Ns-en 1991-1-4:2005+na:2009 - vindlaster, 07.05.2013 2005.
- [11] Einar N. Strømmen. *Theory of bridge aerodynamics*. Springer, Berlin, 2010. Tilgang via Internett 2nd ed.
- [12] Einar N. Strømmen. *Chapter 3 - Continuous systems*, chapter 3, pages 93 – 164. Springer, Berlin, 2013.
- [13] Einar N. Strømmen. *Chapter 9 - Damping*, chapter 9, pages 361 – 414. Springer, Berlin, 2013.
- [14] Einar N. Strømmen. Veiledningstime - 06.05. 2013.

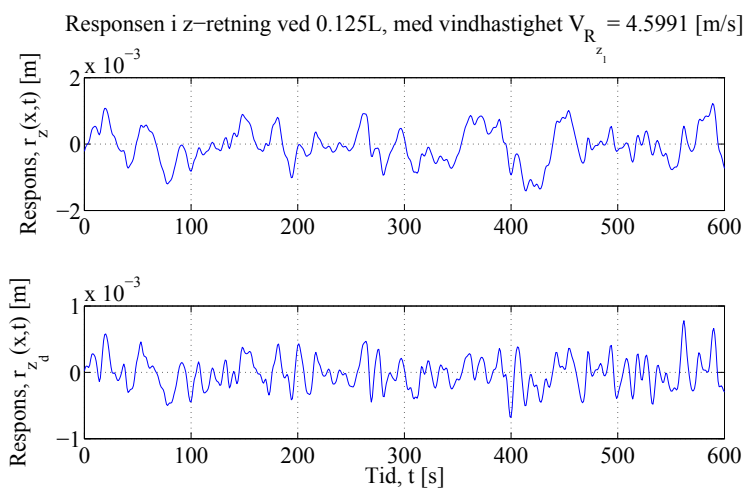




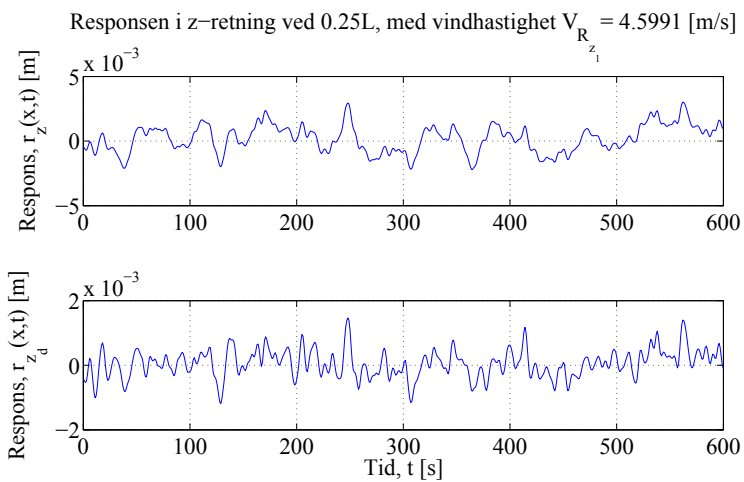
# Vedlegg A

## Tidsserier for respons og redusert respons

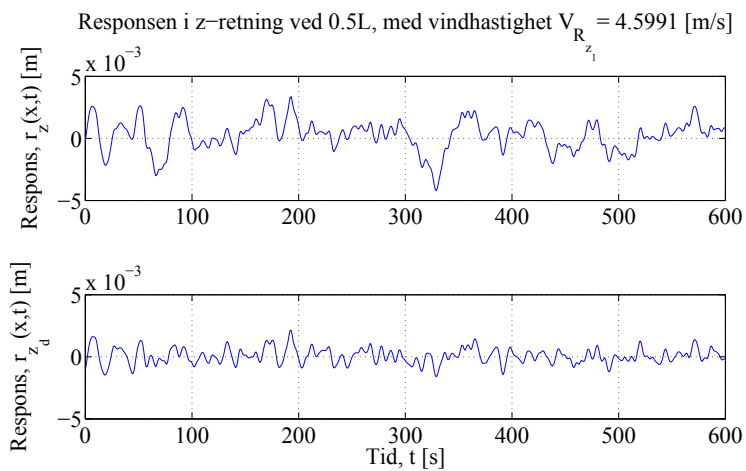
### A.1 Respons i z-retning



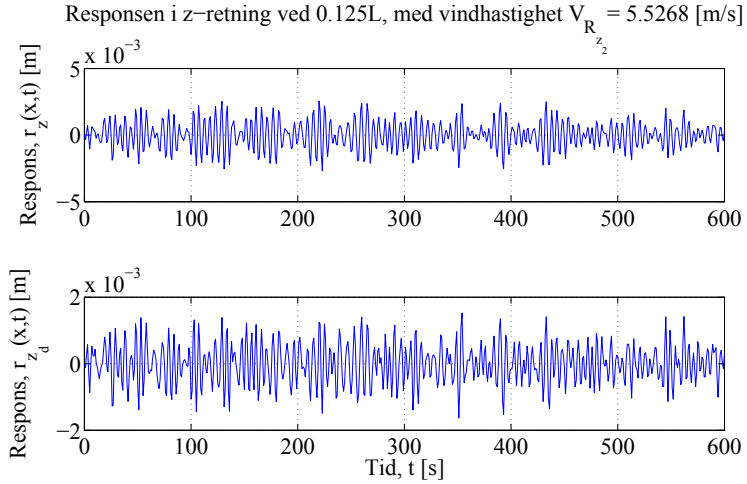
Figur A.1: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_1}}$  ved 0,125 L



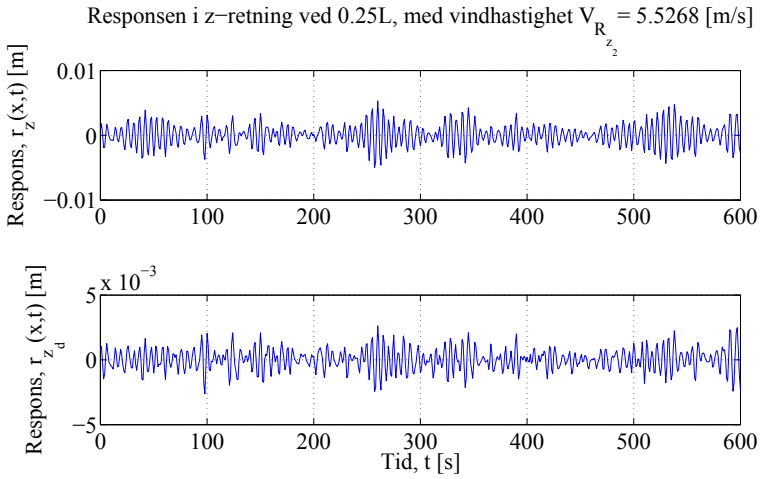
Figur A.2: Respsen  $r_z(t)$  og dempet respsen  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_1}}$  ved 0,25 L



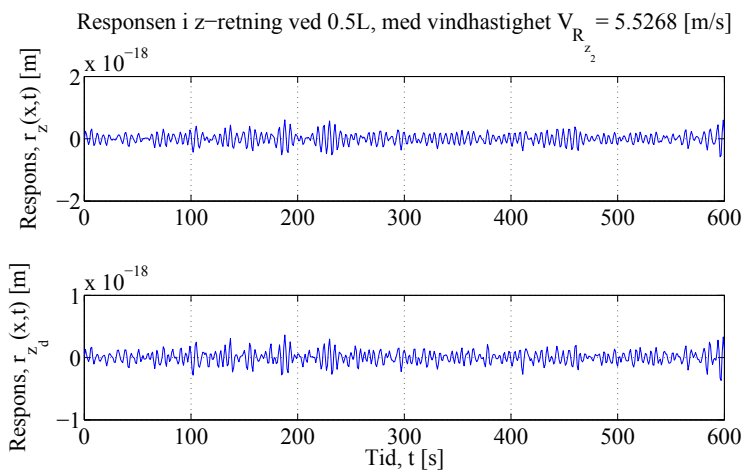
Figur A.3: Respsen  $r_z(t)$  og dempet respsen  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_1}}$  ved 0,5 L



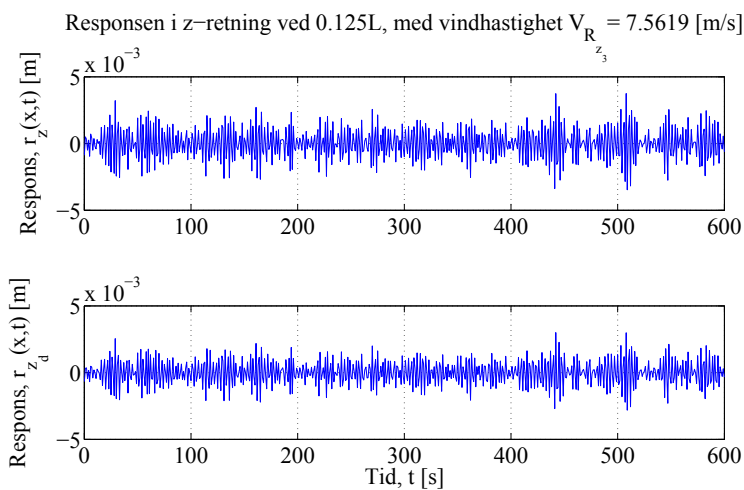
Figur A.4: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_2}}$  ved 0,125 L



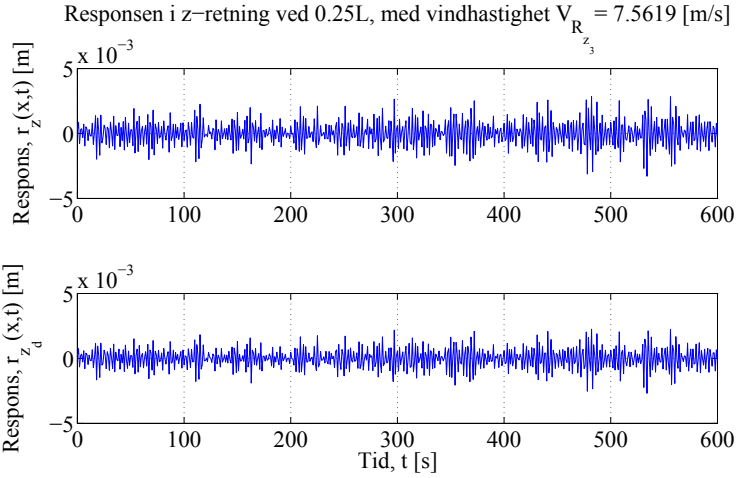
Figur A.5: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_2}}$  ved 0,25 L



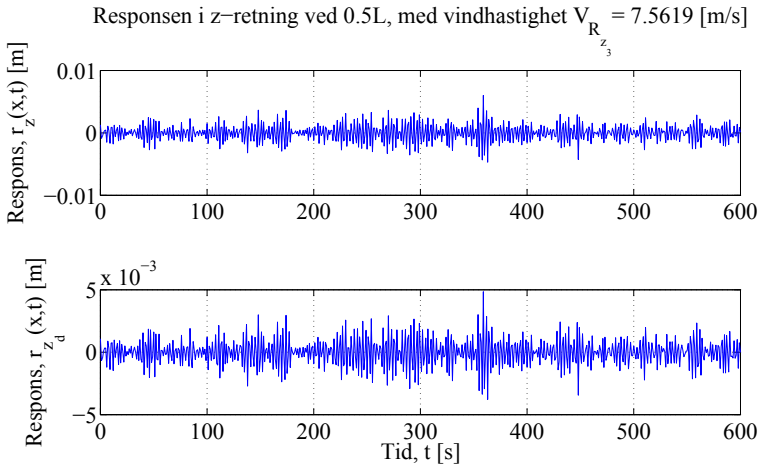
Figur A.6: Respsen  $r_z(t)$  og dempet respsen  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_2}}$  ved 0,5 L



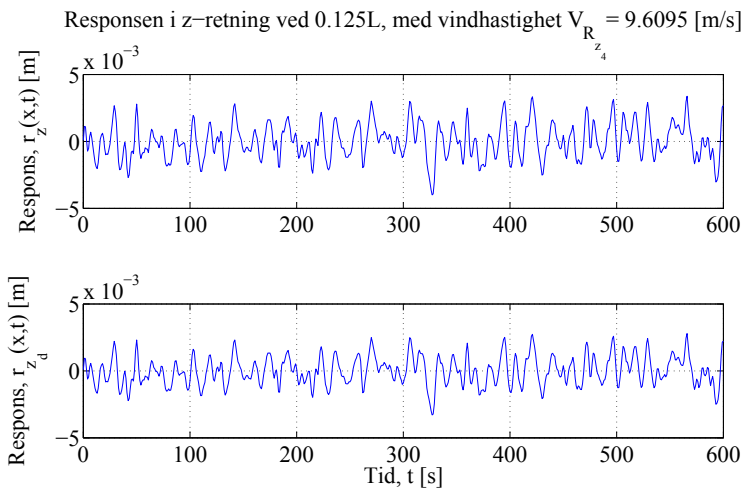
Figur A.7: Respsen  $r_z(t)$  og dempet respsen  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_3}}$  ved 0,125 L



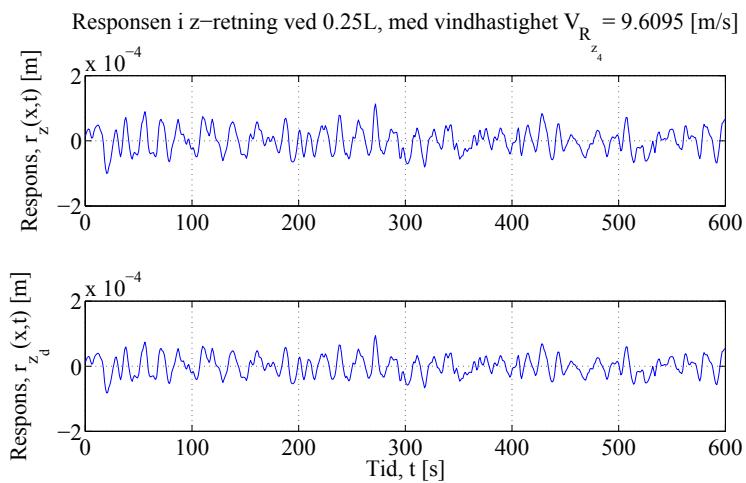
Figur A.8: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{zd}(t)$  for  $V_{R_{z_3}}$  ved 0,25 L



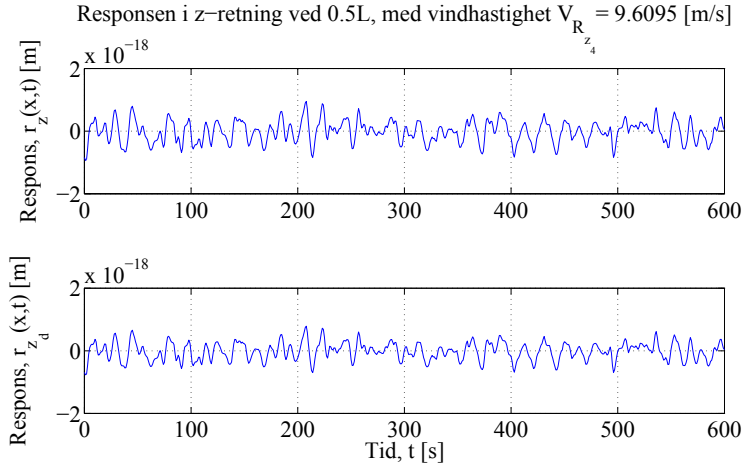
Figur A.9: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{zd}(t)$  for  $V_{R_{z_3}}$  ved 0,5 L



Figur A.10: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_4}}$  ved 0,125 L



Figur A.11: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_4}}$  ved 0,25 L

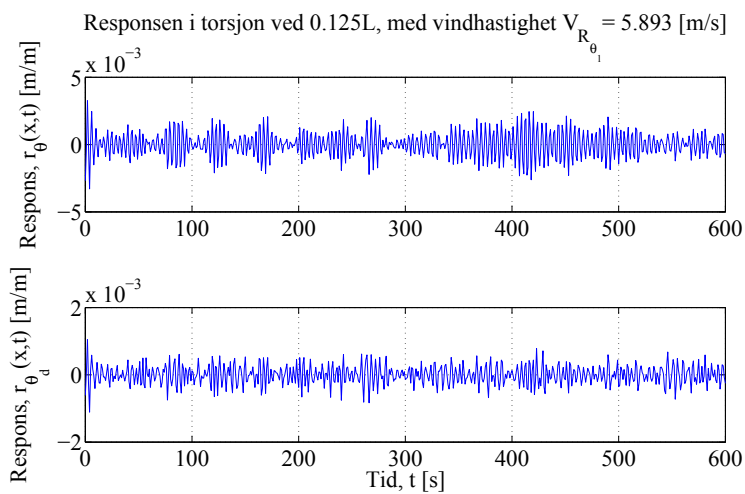


Figur A.12: Respons  $r_z(t)$  og dempet respons  $r_{z_d}(t)$  for  $V_{R_{z_4}}$  ved  $0,5 L$

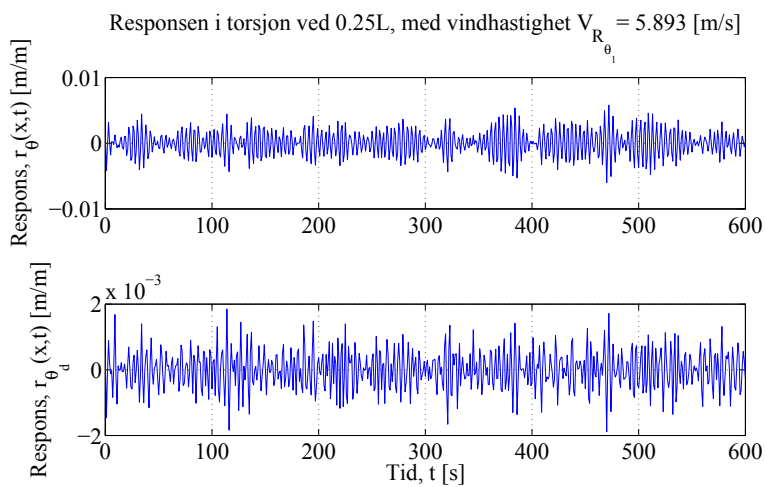
	Punkt på brua	$V_{R_{z_1}}$	$V_{R_{z_2}}$	$V_{R_{z_3}}$	$V_{R_{z_4}}$
$r_z$	$0,125L$	1,4	2,7	3,7	4,0
	$0,25L$	3,0	5,3	3,3	0
	$0,5L$	4,2	0	6,0	0
$r_{z_d}$	$0,125L$	0,78	1,6	3,0	3,3
	$0,25L$	1,5	2,6	2,7	0
	$0,5L$	2,1	0	4,8	0

Tabell A.1: Maksimalverdi for respons og redusert respons over tidsserien [mm]

## A.2 Respons i torsjon

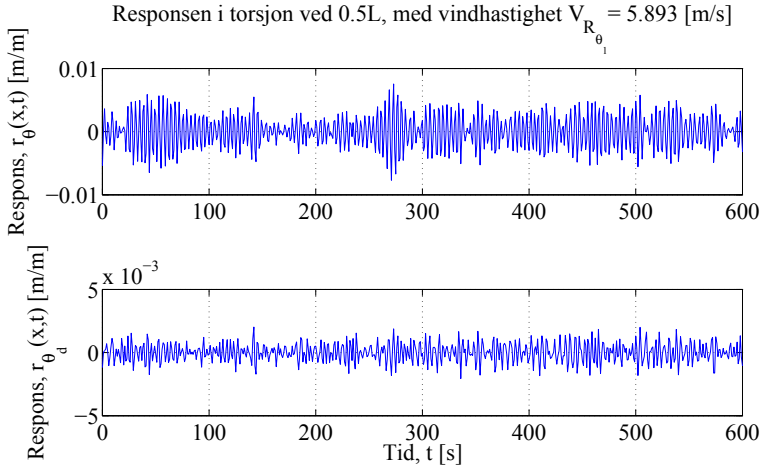


Figur A.13: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_1}}$  ved 0,125 L

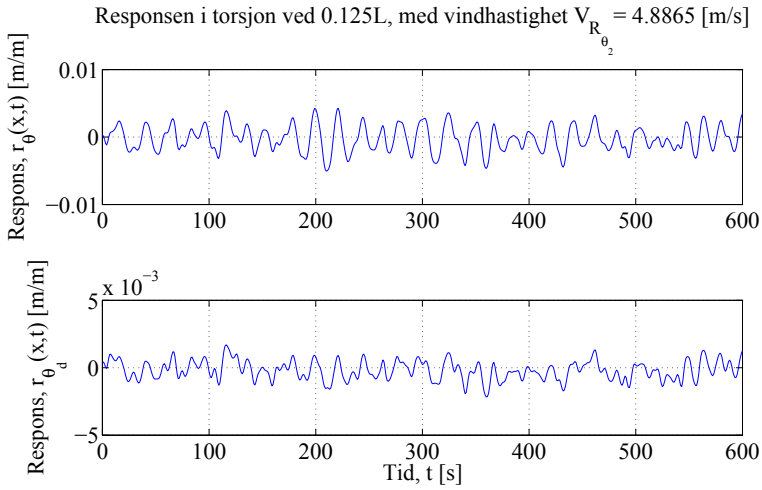


Figur A.14: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_1}}$  ved 0,25 L

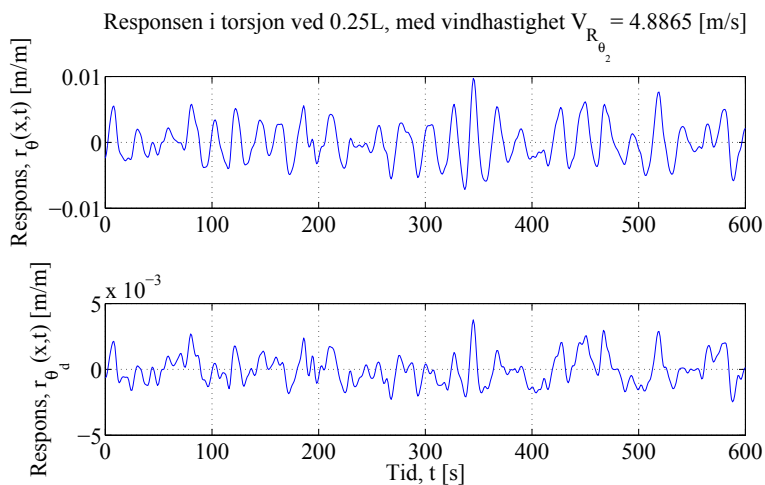




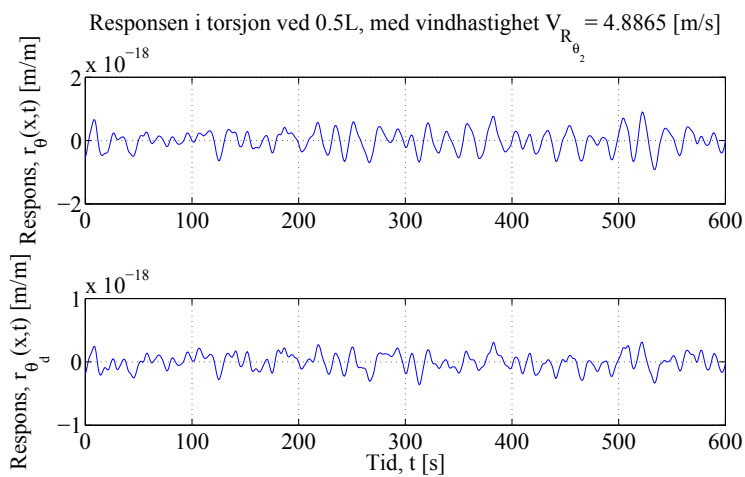
Figur A.15: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_1}}$  ved 0,5 L



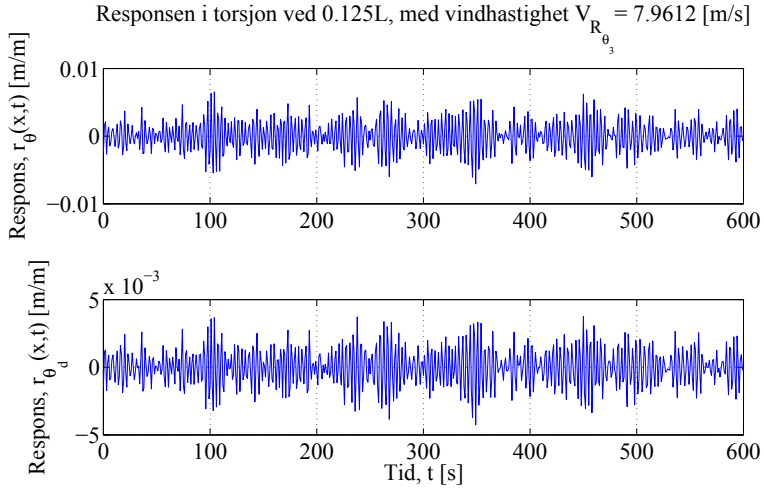
Figur A.16: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_2}}$  ved 0,125 L



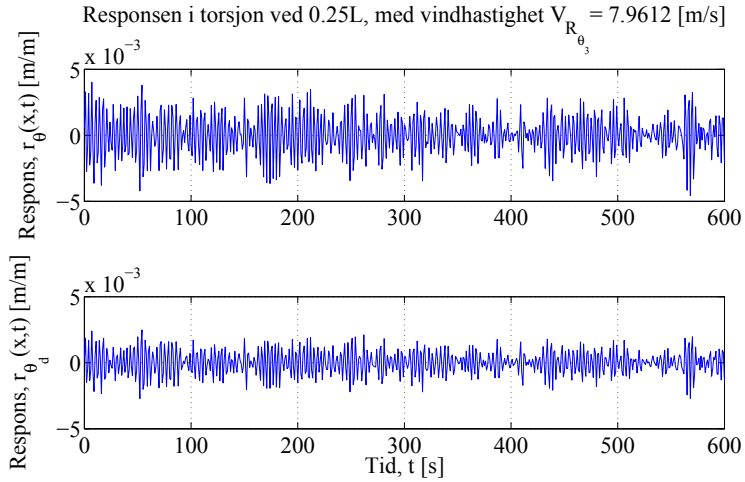
Figur A.17: Respsen  $r_{\theta}(t)$  og dempet respsen  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_2}}$  ved 0,25 L



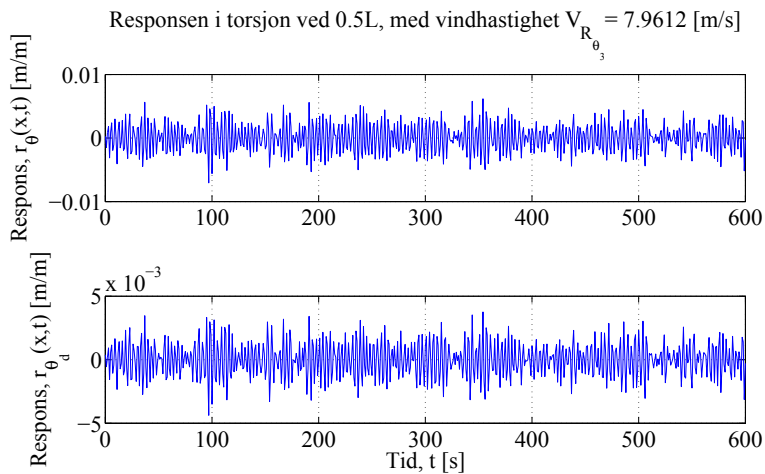
Figur A.18: Respsen  $r_{\theta}(t)$  og dempet respsen  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_2}}$  ved 0,5 L



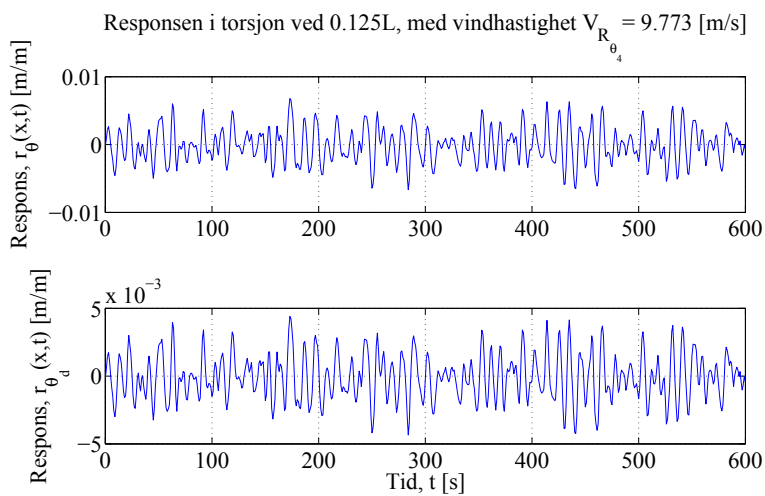
Figur A.19: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_3}}$  ved 0,125 L



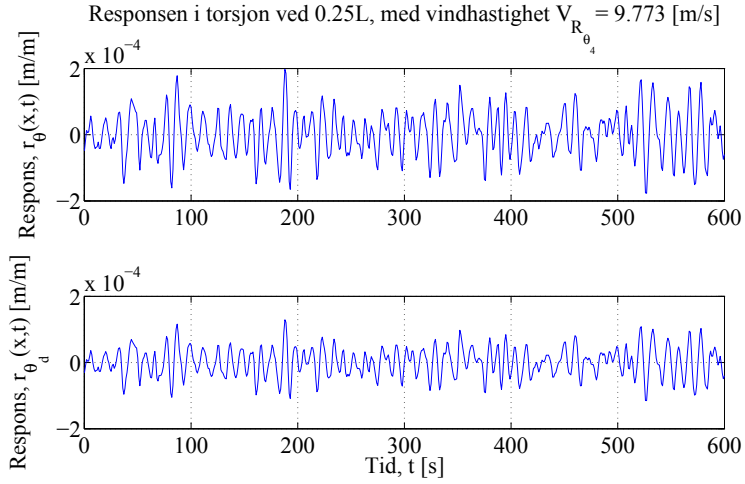
Figur A.20: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_3}}$  ved 0,25 L



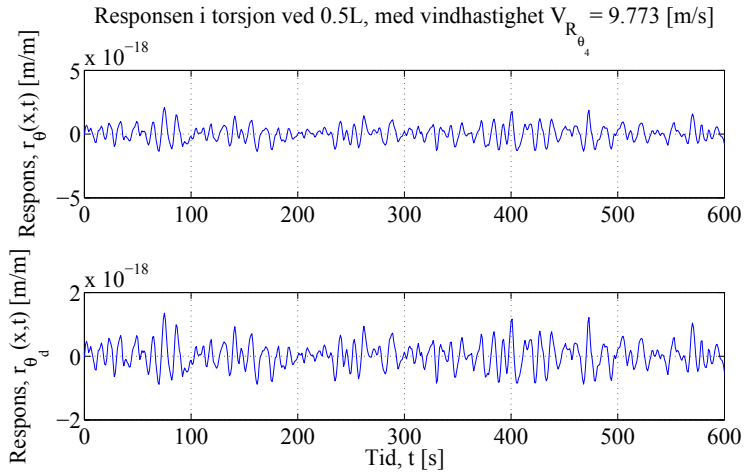
Figur A.21: Respsen  $r_{\theta}(t)$  og dempet respsen  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_3}}$  ved 0,5 L



Figur A.22: Respsen  $r_{\theta}(t)$  og dempet respsen  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_4}}$  ved 0,125 L



Figur A.23: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_4}}$  ved 0,25 L



Figur A.24: Respons  $r_{\theta}(t)$  og dempet respons  $r_{\theta_d}(t)$  for  $V_{R_{\theta_4}}$  ved 0,5 L

	Punkt på brua	$V_{R\theta_1}$	$V_{R\theta_2}$	$V_{R\theta_3}$	$V_{R\theta_4}$
$r_\theta$	0,125L	0,0033	0,0051	0,0071	0,0068
	0,25L	0,0060	0,0097	0,0046	0
	0,5L	0,0077	0	0,0071	0
$r_{\theta_d}$	0,125L	0,0011	0,0022	0,0043	0,0044
	0,25L	0,0019	0,0038	0,0027	0
	0,5L	0,0021	0	0,0044	0

Tabell A.2: Maksimalverdi for respons og redusert respons over tidsserien [rad]

# Vedlegg B

## Masterskript - MATLAB

```
%% Analyse av bru
% Simen H. Holtberget
% Masteroppgave vår 2013
% 09.04.2013
%% Henter inn skript
% Ønsker her å hente inn de nødvendige beregningene i andre skript, slik at
% jeg får et bedre system i beregningene enn om jeg hadde hatt alt i et
% enkelt skript.
%%

%% Henter ut egenverdier for z-retning

% Her må det legges inn egenskaper for systemet

hafs_test1

%% Henter ut egenverdier for torsjon

hafs_test2

%% Henter ut responsen for virvelavløsninger i z-retning

% Her må det legges inn egenskaper for virvelavløsningslast, samt hvor
% på bruspenet responsen skal beregnes

Virvel1

%% Henter ut responsen for virvelavløsninger i torsjon

Virvel2

%% Henter ut beregningene for massedempere i z-retning

massedemper1

%% Henter ut beregningene for massedempere i torsjon

massedemper2
```





# Vedlegg C

## Egenverdiberegninger i $z$ -retning

### - MATLAB

```
%% Hafslundsøy - Bestemmelse av stivhet og massematrise for bevegelse i z-retning
% 08.05.2013
% Simen Hellgren Holtberget
% simenhel@stud.ntnu.no
%%

clear all
close all

%%
set(0,'DefaultAxesFontName','Times New Roman')
set(0,'defaultaxesfontsize',20)
set(0,'defaulttextfontsize',20)

%%

h_m = 0; % Høydeforskjell mellom brubanen og kablene på midten
g = 9.81; % [m/s^2] Tyngdeakselerasjon
L = 125; % [m] Lengden av brua
rho = 2831; % [kg/m^3] Tyngdetettheten til brua med betong og kabel
B = 4.74; % [m]
D = 0.42; % [m]
m_b = 2632; % [kg/m] Vekt av betong pr. meter
m_c_1 = 88.75; % [kg/m] Vekt av hver forspenningskabel pr. meter
m_c_2 = 47.75; % [kg/m] Vekt av hver bærekabel pr. meter
xi_z = 0.01; % [] Dempingsraten i z-retning
xi_theta = 0.01; % [] Dempingsraten i torsjon
St = 0.09; % Strouhal tallet
% e_c = 2.57; % [m] Middelveidien av slakken til kablene
e_c = 2.8; % [m] Slakken til kablene ved korttidslast
% e_c = 2.35; % [m] Slakken til kablene ved langtidslast
b_c = 2.7; % [m] Avstanden mellom kabelgruppene
j_1 = 4; % Antall forspenningskabler
j_2 = 4; % Antall bærekabler
EI_y = 5.8161e8; % [Nm^2] Bøyestivheten beregnet fra Cross X
GI_t = 4.2231e5; % [Nm^2] Torsjonsstivheten beregnet fra Cross X
EA_c_1 = 2.26E9; % [N] Aksialstivheten til hver av forspenningskablene
EA_c_2 = 1.215E9; % [N] Aksialstivheten til hver av bærekablene
EA_b = 3.79044e10; % [N] Aksialstivheten til betongen
EA = EA_b + (4*EA_c_1) + (4*EA_c_2); % [N] Aksialstivheten til hele tverrsnittet
l_e = L*(1 + 8*(e_c/L)^2); % [m] Lengden av kabelen
N = 4; % Antall egenverdier
m_theta = 4004; % [kg*m^2/m] Massetregghetsmoment
EI_w = 0; % [Nm^4] Ingen vridning for dette tverrsnittet
```

## Vedlegg C

---

```
h_r = 0; % [m] kablene ligger på linje med skjærsenteret

x = 0:0.5:L;
hatt_x = x/L;

%% Horizontal kraft bar_H fra Vegvesenets tall [N]

bar_H_1 = (- 17812 + 15014 + 26178)*1000; % Etter oppspenning
bar_H_2 = (- 9694 + 13954 + 24724)*1000; % Etter lang tid
bar_H = bar_H_1; % Velger hvilket tilfelle vi skal se på

%% Beregner stivhetsmatrisen og massematrisen

kappa_pn = @(p) EI_y*(p*pi/L)^4; % Gjelder for p = n. 0 ellers
lambda_pn = @(p) (2*bar_H*(p*pi/L)^2); % Gjelder for p = n. 0 ellers

mu_pn = @(p,n) ((64)*((e_c)/(pi*L))^2 * (EA/(L*l_e))*(1/(p*n)))...
+ ((64)*((e_c)/(pi*L))^2 * (EA/(L*l_e))*(1/(p*n)));
% For p og n = 1,3,5,... -> 0 dersom p eller n = 2,4,6,...

kappa_lambda = zeros(N,N);

for i = 1:N
    kappa_lambda(i,i) = kappa_pn(i)+lambda_pn(i);
end

mu = zeros(N,N);

% Sørger for at kun elementene med oddetall i mu får verdi

for i = 1:N
    for k = 1:N
        if mod(i,2) == 1
            if mod(k,2) == 1
                mu(i,k) = mu_pn(i,k);
            else
                mu(i,k) = 0;
            end
        else
            mu(i,k) = 0;
        end
    end
end

%% Får dermed stivhetsmatrisen

K_z = kappa_lambda + mu;

% og Massematrisen

M_z = (((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2))+m_b)*eye(N,N);

%% Skal så finne egenmodene

% definerer
```

```

c = (2/(pi^2))*((bar_H)*L^2)/(EI_y);
d = (32/(pi^3))^2 * (e_c/L)^2 * (L/l_e) * ((EA)*L^2)/(EI_y);
% Finner dermed egenfrekvensene(E.S kap. 3.5 s.155)
omega_z_1 = 2*pi*sqrt(((4*(pi^2)*EI_y)+(2*(bar_H)*(L^2)))...
/(((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2)) + m_b)*(L^4)));
omega_z_3 = 4*pi*sqrt(((16*(pi^2)*EI_y)+(2*(bar_H)*(L^2)))...
/(((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2)) + m_b)*(L^4)));
omega_z_2 = pi*sqrt((((pi^2)*EI_y)/(((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2)+m_b)*(L^4)))...
*(41+(5*c)+((5*d)/9))...
- sqrt((40 +(4*c)-((4*d)/9))^2 + (d/3)^2));
omega_z_4 = pi*sqrt((((pi^2)*EI_y)/(((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2)+m_b)*(L^4)))...
*(41+(5*c)+((5*d)/9))...
+ sqrt((40 +(4*c)-((4*d)/9))^2 + (d/3)^2));
omega_z = [omega_z_1;omega_z_2;omega_z_3;omega_z_4];
omega_z = sort(omega_z);

matr = [1+c+d 0 d/3 0;...
        0 16+(4*c) 0 0;...
        d/3 0 81+(9*c)+(d/9) 0;...
        0 0 0 256+(16*c)];

hatt_omega_z = omega_z/((pi/L)^2 ...
* sqrt(EI_y/((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2) + m_b)));

dummy_z = matr-diag(hatt_omega_z.^2);

% Må så finne egenmodene
a_z = eig(dummy_z);

phi_z_1 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_z_1(i) = a_z(1)*sin((pi*x(i)/L));
end

phi_z_1 = phi_z_1/max(abs(phi_z_1));
phi_z_2 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_z_2(i) = a_z(2)*sin((2*pi*x(i)/L));
end

phi_z_2 = phi_z_2/max(abs(phi_z_2));
phi_z_3 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_z_3(i) = a_z(3)*sin((3*pi*x(i)/L));

```

## Vedlegg C

---

```
end

phi_z_3 = phi_z_3/max(abs(phi_z_3));

phi_z_4 = zeros(1,length(x));

for i = 1:length(x)
    phi_z_4(i) = a_z(4)*sin((4*pi*x(i)/L));
end

phi_z_4 = phi_z_4/max(abs(phi_z_4));
Phi_z = [phi_z_1;phi_z_2;phi_z_3;phi_z_4];

figure
subplot(4,1,1)
plot(hatt_x,phi_z_1,'LineWidth',2)
title('De 4 første vertikale egensvingeformene')
ylabel('\phi_{z_1}(x)')
legend(['\omega_{z_1} = ' num2str(omega_z(1))])
subplot(4,1,2)
plot(hatt_x,phi_z_2,'LineWidth',2)
ylabel('\phi_{z_2}(x)')
legend(['\omega_{z_2} = ' num2str(omega_z(2))])
subplot(4,1,3)
plot(hatt_x,phi_z_3,'LineWidth',2)
ylabel('\phi_{z_3}(x)')
legend(['\omega_{z_3} = ' num2str(omega_z(3))])
subplot(4,1,4)
plot(hatt_x,phi_z_4,'LineWidth',2)
xlabel('x/L')
ylabel('\phi_{z_4}(x)')
legend(['\omega_{z_4} = ' num2str(omega_z(4))])
```

# Vedlegg D

## Eigenverdiberegninger i torsjon - MATLAB

```
%% Hafslundsøy - Bestemmelse av stivhet og massematrise for bevegelse
%% i ren torsjon
% 08.05.2013
% Simen Helligren Holtberget
% simenhel@stud.ntnu.no

%% Må finne m_theta_tot

m_theta_tot = m_theta + ((2*(m_c_1+m_c_2)*b_c^2)/2);

%% Beregner stivhetsmatrisen og massematrisen

Omega_pn = @(n) ((n*pi*L)^2)*(GI_t + (((n*pi*L)^2)*EI_w));
% For p = n, 0 ellers

varphi_pn = @(n) (bar_H*(b_c^2)/2)*(n*pi/L)^2;
% For p = n, 0 ellers

eta_pn = @(n) ((j_1*m_c_1)+(j_2*m_c_2)+m_b)*g*h_r;
% For p = n, 0 ellers

kji_pn = @(p,n) ((16*e_c*b_c)/(pi*L))^2 * ((EA)/(L*e))*(1/(p*n));
% For p og n = 1,3,5,... -> 0 dersom p eller n = 2,4,6,...

Omega_varphi_eta = zeros(N,N);

for i = 1:N
    Omega_varphi_eta(i,i) = Omega_pn(i) + varphi_pn(i) + eta_pn(i);
end

kji = zeros(N,N);

% Sørger for at kun elementene med oddetall i kji får verdi

for i = 1:N
    for k = 1:N
        if mod(i,2) == 1
            if mod(k,2) == 1
                kji(i,k) = kji_pn(i,k);
            else
                kji(i,k) = 0;
            end
        else
            kji(i,k) = 0;
        end
    end
end
```

## Vedlegg D

---

```
end
end
end

% Stivhetsmatrisen
K_theta = Omega_varphi_eta + kji;

% Massematrisen
M_theta = m_theta_tot*eye(N,N);

%% Skal så finne egenverdiene(eksempel 3.5 E.S)
omega_theta_2 = sqrt((((2*pi)/L)^2*((GI_t + (((2*pi)/L)^2)*EI_w)...
+ (bar_H*((b_c^2)/2)))/m_theta_tot)...
+ (((j_1*m_c_1) + (j_2*m_c_2) + m_b)*g*h_r)/m_theta_tot);
omega_theta_4 = sqrt((((4*pi)/L)^2*((GI_t + (((4*pi)/L)^2)*EI_w)...
+ (bar_H*((b_c^2)/2)))/m_theta_tot)...
+ (((j_1*m_c_1) + (j_2*m_c_2) + m_b)*g*h_r)/m_theta_tot);
k_1 = (10*((pi/L)^2)*GI_t) + (82*((pi/L)^4)*EI_w)...
+ (10*((pi/L)^2)*bar_H*(b_c^2)/2)...
+ (((j_1*m_c_1) + (j_2*m_c_2) + m_b)*g*h_r)...
+ ((10/9)*(((16*e_c*b_c)/(pi*L))^2)*(EA)/(L*1_e));
k_2 = (8*((pi/L)^2)*GI_t) + (80*((pi/L)^4)*EI_w)...
+ (8*((pi/L)^2)*bar_H*(b_c^2)/2)...
- ((8/9)*(((16*e_c*b_c)/(pi*L))^2)*(EA)/(L*1_e));
k_3 = (2/3)*(((16*e_c*b_c)/(pi*L))^2)*(EA)/(L*1_e);
omega_theta_1 = sqrt((k_1 - sqrt(k_2^2 + k_3^2))/(2*m_theta_tot));
omega_theta_3 = sqrt((k_1 + sqrt(k_2^2 + k_3^2))/(2*m_theta_tot));
omega_theta = [omega_theta_1;omega_theta_2;omega_theta_3;omega_theta_4];
dummy_theta = K_theta-(diag(omega_theta.^2)*M_theta);

% Må så finne egenmodene
a_theta = eig(dummy_theta);
phi_theta_1 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_theta_1(i) = a_theta(1)*sin((pi*x(i)/L));
end
phi_theta_1 = phi_theta_1/max(abs(phi_theta_1));
phi_theta_2 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_theta_2(i) = a_theta(2)*sin((2*pi*x(i)/L));
end
```

```
phi_theta_2 = phi_theta_2/max(abs(phi_theta_2));
phi_theta_3 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_theta_3(i) = a_theta(3)*sin((3*pi*x(i)/L));
end
phi_theta_3 = phi_theta_3/max(abs(phi_theta_3));
phi_theta_4 = zeros(1,length(x));
for i = 1:1:length(x)
    phi_theta_4(i) = a_theta(4)*sin((4*pi*x(i)/L));
end
phi_theta_4 = phi_theta_4/max(abs(phi_theta_4));
Phi_theta = [phi_theta_1;phi_theta_2;phi_theta_3;phi_theta_4];
figure
subplot(4,1,1)
plot(hatt_x,phi_theta_1,'LineWidth',2)
title('De 4 første torsjonsegensvingeformene')
ylabel('\phi_{\theta_1}(x)')
legend(['\omega_{\theta_1} = ' num2str(omega_theta(1))])
subplot(4,1,2)
plot(hatt_x,phi_theta_2,'LineWidth',2)
ylabel('\phi_{\theta_2}(x)')
legend(['\omega_{\theta_2} = ' num2str(omega_theta(2))])
subplot(4,1,3)
plot(hatt_x,phi_theta_3,'LineWidth',2)
ylabel('\phi_{\theta_3}(x)')
legend(['\omega_{\theta_3} = ' num2str(omega_theta(3))])
subplot(4,1,4)
plot(hatt_x,phi_theta_4,'LineWidth',2)
xlabel('x/L')
ylabel('\phi_{\theta_4}(x)')
legend(['\omega_{\theta_4} = ' num2str(omega_theta(4))])
```





# Vedlegg E

## Virvelavløsnings- respons i z- retning - MATLAB

```
%% Hafslundsøy - Virvelavløsninger
% 12.05.2013
% Simen Hellgren Holtberget
% simenhel@stud.ntnu.no
%%

%% Definerer koherenslengdeskalaen

lambda = 3;

%% Finner kritiske vindhastigheter

f_z = omega_z/(2*pi);

V_R_z = f_z*(D/St);           % Kritisk vindhastighet for
                             % vertikale svingninger [m/s]

f_theta = omega_theta/(2*pi);

V_R_theta = f_theta*(D/St);  % Kritisk vindhastighet for
                             % torsjonssvingninger [m/s]

%% Ser først på z-retning

% Definerer konstantene

hatt_sigma_q_z = 1;
b_z = 0.15;
a_z = 0.4;
m_z = 3178;
lambda_z = 3;
rho_v = 1.25;
B = 4.74;
D = 0.42;
L_exp = L;
K_a_z_0 = 0.2;

%% Bestemmer hvor på spennet vi skal se på responsen

koord = 1/2;           % Koord multipliseres med lengden av brua L

% Bestemmer modal masse

tilde_m_z = zeros(N,N);
```

## Vedlegg E

---

```
for j = 1:1:N
    for i = 1:1:length(x)
        tilde_m_z(j,j) = tilde_m_z(j,j) + m_b*abs(Phi_z(j,i));
    end
end

K_a_z = @(V_R,V) 2.6*K_a_z_0*((V/V_R).^(-6))*exp(-((V/V_R).^(-8)));

g_z = @(V_R,V) ((V/V_R).^(-3/2))*exp(-1/2)*(((1-(V_R/V))/b_z).^2);

kvadintphi1 = zeros(4,1);

for j = 1:1:N
    for i = 1:1:length(x)
        kvadintphi1(j) = kvadintphi1(j) + abs(Phi_z(j,i))^2;
    end
end

hatt_xi_z = @(V_R,V) ((4*m_z)/(rho_v*B^2))*(xi_z/K_a_z(V_R,V));

%% Bestemmer hvor vi skal se på responsen

hatt_beta_z = @(n,V_R,V) (abs(Phi_z(n,ceil(length(x)*koord)))...
    /((2^(5/2))*(pi^(7/4))))*sqrt(((rho_v*D^3)/(m_z*kvadintphi1(n)))...
    *(lambda_z/(b_z*K_a_z(V_R,V))))*(hatt_sigma_q_z/(St^2))*(g_z(V_R,V)/a_z);

f_hatt_sigma_r_z = @(n,V_R,V) sqrt(((1-hatt_xi_z(V_R,V))/2)...
    + sqrt((((1-hatt_xi_z(V_R,V))/2)^2 + hatt_beta_z(n,V_R,V)^2));

%% Vi kan nå beregne hatt_sigma_r_z

dV = 0.1;
V = 0:dV:20;

hatt_sigma_r_z = zeros(4,length(V));

for i = 1:1:length(V)
    for n = 1:1:N
        hatt_sigma_r_z(n,i) = f_hatt_sigma_r_z(n,V_R_z(n),V(i));
    end
end

sigma_r_z = a_z*D*hatt_sigma_r_z;

figure
plot(V,sigma_r_z(1,:),V,sigma_r_z(2,:),...
    V,sigma_r_z(3,:),V,sigma_r_z(4,:),'LineWidth',2)
title(['Responsen i z-retning ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('Middelvindhastighet, V [m/s]')
ylabel('Dynamisk respons, \sigma_{r_z} [m]')
legend(['V_{R_{z_1}} = ' num2str(V_R_z(1)) ' [m/s]',...
    ['V_{R_{z_2}} = ' num2str(V_R_z(2)) ' [m/s]',...
    ['V_{R_{z_3}} = ' num2str(V_R_z(3)) ' [m/s]',...
    ['V_{R_{z_4}} = ' num2str(V_R_z(4)) ' [m/s]'])
grid on
```

# Vedlegg F

## Virvelavløsnings- respons i torsjon - MATLAB

```
%% Hafslundsøy - Virvelavløsninger
% 12.05.2013
% Simen Hellgren Holtberget
% simenhel@stud.ntnu.no
%%

%% Finner kritiske vindhastigheter

f_z = omega_z/(2*pi);

V_R_z = f_z*(D/St);           % Kritisk vindhastighet for
                              % vertikale svingninger [m/s]

f_theta = omega_theta/(2*pi);

V_R_theta = f_theta*(D/St);   % Kritisk vindhastighet for
                              % torsjonssvingninger [m/s]

%% Ser nå på på torsjon

% Definerer konstantene

hatt_sigma_q_theta = hatt_sigma_q_z*(b_c/(2*B));
b_theta = 0.1;
a_theta = a_z*((2*D)/b_c);
m_theta = 4004;
lambda_theta = 3;
rho_v = 1.25;
B = 4.74;
D = 0.42;
L_exp = L;
K_a_theta_0 = 0.02;

% Bestemmer modal masse

tilde_m_z = zeros(N,N);

for j = 1:1:N
    for i = 1:1:length(x)
        tilde_m_z(j,j) = tilde_m_z(j,j) + m_b*abs(Phi_z(j,i));
    end
end

K_a_theta = @(V_R,V) 2.6*K_a_theta_0*((V/V_R).^(-6))*exp(-((V/V_R).^(-8)));
```

## Vedlegg F

---

```
g_theta = @(V_R,V) ((V/V_R).^3/2)*exp(-(1/2)*(((1-(V_R/V))/b_theta)).^2);
kvadintphi2 = zeros(4,1);
for j = 1:1:N
    for i = 1:1:length(x)
        kvadintphi2(j) = kvadintphi2(j) + Phi_theta(j,i)^2;
    end
end
hatt_xi_theta = @(V_R,V) ((4*m_theta)/(rho_v*B^4))...
    *(xi_theta/K_a_theta(V_R,V));
hatt_beta_theta = @(n,V_R,V) (abs(Phi_theta(n,ceil(length(x)*koord)))...
    /((2^(5/2))*pi^(7/4)))*sqrt(((rho_v*D^5)/(m_theta*kvadintphi2(n)))...
    *(lambda_theta/(b_theta*K_a_theta(V_R,V))))...
    *(hatt_sigma_q_theta/(St^2))*(g_theta(V_R,V)/a_theta);
f_hatt_sigma_r_theta = @(n,V_R,V) sqrt(((1-hatt_xi_theta(V_R,V))/2)...
    + sqrt(((1-hatt_xi_theta(V_R,V))/2)^2) + hatt_beta_theta(n,V_R,V)^2));
%% Vi kan nå beregne hatt_sigma_r_theta
dV = 0.1;
V = 0:dV:20;
hatt_sigma_r_theta = zeros(4,length(V));
for i = 1:1:length(V)
    for n = 1:1:N
        hatt_sigma_r_theta(n,i) = f_hatt_sigma_r_theta(n,V_R_theta(n),V(i));
    end
end
sigma_r_theta = a_theta*hatt_sigma_r_theta;
figure
plot(V,sigma_r_theta(1,:),V,sigma_r_theta(2,:),...
    ,V,sigma_r_theta(3,:),V,sigma_r_theta(4,:),'LineWidth',2)
title(['Responsen i torsjon ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('Middelvindhastighet, V [m/s]')
ylabel('Dynamisk respons, \sigma_{r\_theta} [m/m]')
legend(['V_{R_{theta_1}} = ' num2str(V_R_theta(1)) ' [m/s]',...
    ['V_{R_{theta_2}} = ' num2str(V_R_theta(2)) ' [m/s]',...
    ['V_{R_{theta_3}} = ' num2str(V_R_theta(3)) ' [m/s]',...
    ['V_{R_{theta_4}} = ' num2str(V_R_theta(4)) ' [m/s]'])
grid on
```

# Vedlegg G

## Virvelavløsnings- respons i $z$ -retning med TMD - MATLAB

```
%% Hafslundsøy - Massedempere
% 23.05.2013
% Simen Helligren Holtberget
% simenhel@stud.ntnu.no
%% Definerer først lastens forventningsverdi

sigma_q_z = @(V) hatt_sigma_q_z*(rho_v*V^2*B/2);

%% Finner spektral tettheten for lasten

S_q_z = @(omega,omega_s,V) ((sigma_q_z(V)^2)/(sqrt(pi)*omega_s*b_z))...
    *exp(-((1-(omega/omega_s))/b_z)^2);

%% Ser så på den modale lastresponsen

f_S_tilde_R_z = @(omega,omega_s,V) 2*lambda*D*S_q_z(omega,omega_s,V)...
    *kvadintphi1(1);

omega = 4:0.001:18;

S_tilde_R_z = zeros(4,length(omega));

for n = 1:N
    for i = 1:length(omega)
        S_tilde_R_z(n,i) = f_S_tilde_R_z(omega(i),omega_z(n),V_R_z(n));
    end
end

figure
plot(omega,S_tilde_R_z,'LineWidth',2)
grid on
title('Lastresponspekteret S_{R_z}(\omega)')
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('S_{R_z}(\omega) [N^2s]')
legend(['\omega_{z_1} = ' num2str(omega_z(1))],...
    ['\omega_{z_2} = ' num2str(omega_z(2))],...
    ['\omega_{z_3} = ' num2str(omega_z(3))],...
    ['\omega_{z_4} = ' num2str(omega_z(4))])

%% Ser på den aerodynamiske dempingen
```

## Vedlegg G

---

```
xi_ae_z = @(n,V_R,V) ((rho_v*B^2)/(4*m_b))*K_a_z(V_R,V)...
                *(1-(((a_z*D*f_hatt_sigma_r_z(n,V_R,V))^2)/(a_z*D))^2);

% Finner frekvensresponsfunksjonen

hatt_H_z = @(omega,omega_s,n,V_R,V) (1-(omega/omega_s)^2 ...
                + 2*sqrt(-1)*(xi_z - xi_ae_z(n,V_R,V))...
                *(omega/omega_s)^(-1));

% Den modale stivheten

tilde_K_z = @(n) omega_z(n)^2*m_b*kvadintphi1(n);

%% Spektraltettheten til responsen

f_S_r_z = @(omega,omega_s,n,V_R,V) ((Phi_z(n,ceil(length(x)*koord))...
                /tilde_K_z(n))^2)*...
                (abs(hatt_H_z(omega,omega_s,n,V_R,V))^2)...
                *f_S_tilde_R_z(omega,omega_s,V);

domega = 0.001;
omega = 5:domega:14;

S_r_z = zeros(4,length(omega));

for n = 1:N
    for i = 1:1:length(omega)
        S_r_z(n,i) = f_S_r_z(omega(i),omega_z(n),n,V_R_z(n),V_R_z(n));
    end
end

figure
plot(omega,S_r_z,'LineWidth',2)
grid on
title(['Responsspekteret S_{r_z}(\omega) ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('S_{r_z}(\omega) [m^2/s]')
legend(['V_{R_{z_1}} = ' num2str(V_R_z(1)) ' [m/s]',...
        ['V_{R_{z_2}} = ' num2str(V_R_z(2)) ' [m/s]',...
        ['V_{R_{z_3}} = ' num2str(V_R_z(3)) ' [m/s]',...
        ['V_{R_{z_4}} = ' num2str(V_R_z(4)) ' [m/s]'])

%% Ønsker nå å innføre massedempere

tilde_M_z = m_z*kvadintphi1;

% bestemmer massen til demperene

mu = 0:0.0001:0.01;

M_z_d = @(n,mu) mu*tilde_M_z(n);

% Plasserer massedemperene

N_j = 3;          % Antall dempere

x_A = 0.3*L;
x_B = 0.5*L;
x_C = 0.7*L;
```

```
mu_A = 0.0025;
mu_C = mu_A;

mu_B = 0.006;

% Finner egenfrekvensene til massedemperene
f_omega_z_A = zeros(N,1);

for n = 1:N
    f_omega_z_A(n) = omega_z(n)/(1+mu_A);
end

omega_z_C = f_omega_z_A(2);
omega_z_A = f_omega_z_A(2);

f_omega_z_B = zeros(N,1);

for n = 1:N
    f_omega_z_B(n) = omega_z(n)/(1+mu_B);
end

omega_z_B = f_omega_z_B(1);

% Finner dempingskoeffisientene til massedemperene
xi_d = @(mu) sqrt((3*mu)/(8*(1+mu)^3));

xi_z_A = xi_d(mu_A);
xi_z_B = xi_d(mu_B);

xi_z_C = xi_z_A;

% Definerer massen til demperene
f_M_z_d_A = zeros(N,1);

f_M_z_d_B = zeros(N,1);

for n = 1:N
    f_M_z_d_A(n) = M_z_d(n,mu_A);
    f_M_z_d_B(n) = M_z_d(n,mu_B);
end

M_z_d_B = f_M_z_d_B(1);
M_z_d_C = f_M_z_d_A(2);
M_z_d_A = f_M_z_d_A(2);

% Finner stivheten til demperene
f_K_z_d_A = zeros(N,1);

f_K_z_d_B = zeros(N,1);

for n = 1:N
    f_K_z_d_A(n) = (f_omega_z_A(n)^2)*f_M_z_d_A(n);
```

## Vedlegg G

---

```
f_K_z_d_B(n) = (f_omega_z_B(n)^2)*f_M_z_d_B(n);
end

K_z_d_B = f_K_z_d_B(1);
K_z_d_C = f_K_z_d_A(2);
K_z_d_A = f_K_z_d_A(2);

% Må etablere modeformene til massedemperene

Phi_z_d = @(n) [Phi_z(n,ceil(length(x)*x_A/L));
               Phi_z(n,ceil(length(x)*x_B/L));
               Phi_z(n,ceil(length(x)*x_C/L))];

tilde_M_z = diag(tilde_M_z);

f_hatt_S_tilde_R_z = @(n,omega) ((omega_z(n)^2*tilde_M_z(n,n))^( -2))...
                               *f_S_tilde_R_z(omega,omega_z(n),V_R_z(n));

dummy_N_N_j = zeros(1,N_j);
dummy_N_j_N = zeros(N_j,1);
dummy_N_j = zeros(N_j,N_j);

hatt_S_tilde_R_z = @(n,omega) [f_hatt_S_tilde_R_z(n,omega) dummy_N_N_j;
                              dummy_N_j_N dummy_N_j];

dummy_1_N_j = zeros(1,N_j);
dummy_I_N_j = eye(N_j);
Psi_z = [Phi_z(1,ceil(length(x)*koord)), Phi_z(2,ceil(length(x)*koord)),...
         Phi_z(3,ceil(length(x)*koord)), Phi_z(4,ceil(length(x)*koord))];

Psi_z = @(n) [Psi_z(n) dummy_1_N_j;
             dummy_N_j_N dummy_I_N_j];

%% Finner så frekvensresponsmatrisen

dummy_I_N = eye(N);

invomega_z = @(n) 1/omega_z(n);

hatt_omega_z = @(n,omega) omega*invomega_z(n);

invomega_z_d = [1/omega_z_A 0 0;
               0 1/omega_z_B 0;
               0 0 1/omega_z_B];

hatt_omega_z_d = @(omega) omega*invomega_z_d;

Xi_d = [xi_z_A xi_z_B xi_z_C];
Xi_d = diag(Xi_d);

Xi_z = @(n,V_R,V) xi_z-xi_ae_z(n,V_R,V);

f_M_z_d = [M_z_d_A M_z_d_B M_z_d_C];
M_z_d = diag(f_M_z_d);

hatt_D = @(n,Phi_d) Phi_d'*M_z_d/tilde_M_z(n,n);
```



```

% Frekvensresponsmatrisen blir da

hatt_E = @(n,V_R,V,omega) [1-((hatt_omega_z(n,omega)^2)*...
    (1+(hatt_D(n,Phi_z_d(n))*Phi_z_d(n))))+...
    (2*sqrt(-1)*hatt_omega_z(n,omega).*...
    Xi_z(n,V_R,V)), -(hatt_omega_z(n,omega).^2)*...
    hatt_D(n,Phi_z_d(n));
    -(hatt_omega_z_d(omega).^2)*...
    Phi_z_d(n), (dummy_I_N_j-(hatt_omega_z_d(omega).^2)+...
    (2*sqrt(-1).*hatt_omega_z_d(omega)*Xi_d))];

hatt_H = @(n,V_R,V,omega) inv(hatt_E(n,V_R,V,omega));

f_S_r_z_d = @(n,V_R,V,omega) Psi_z(n)*(conj(hatt_H(n,V_R,V,omega)))*...
    hatt_S_tilde_R_z(n,omega)*hatt_H(n,V_R,V,omega) .*Psi_z(n) .';

S_r_z_d = zeros(N,length(omega));

for n = 1:N
    for i = 1:length(omega)
        dummy_S_r_z_d = f_S_r_z_d(n,V_R_z(n),V_R_z(n),omega(i));
        S_r_z_d(n,i) = dummy_S_r_z_d(1,1);
    end
end

figure
plot(omega,S_r_z_d,'--',omega,S_r_z,'LineWidth',2)
grid on
title(['Responspekteret S_{r_z}(\omega) med TMD ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('S_{r_z}(\omega) [m^2/s]')
legend('S_{r_{z_{d_1}}}','S_{r_{z_{d_2}}}','S_{r_{z_{d_3}}}','S_{r_{z_{d_4}}}')

kvad_sigma_r_d_z = zeros(N,length(V));

for n = 1:N
    for i = 1:length(V)
        dummy_sigma_r_d_z = f_S_r_z_d(n,V_R_z(n),V(i),2*pi*V(i)*St/D)*dV;
        kvad_sigma_r_d_z(n,i) = dummy_sigma_r_d_z(1,1);
    end
end

sigma_r_d_z = sqrt(kvad_sigma_r_d_z);

figure
plot(V,sigma_r_d_z,'--',V,sigma_r_z,'LineWidth',2)
title(['Dynamisk respons i z-retning med TMD ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('Middelvindhastighet, V [m/s]')
ylabel('Dynamisk respons, \sigma_{r_z} [m]')
legend('\sigma_{r_{z_{d_1}}}','\sigma_{r_{z_{d_2}}}',...
    '\sigma_{r_{z_{d_3}}}','\sigma_{r_{z_{d_4}}}')
grid on

% Ønsker nå å gjøre en simulering i tidsdomenet

T = 600;

```

## Vedlegg G

---

```
k_p = sqrt(2);           % Narrow-banded

c_k_z = @(n,k) sqrt(2*S_r_z(n,k)*domega);
c_k_z_d = @(n,k) sqrt(2*S_r_z_d(n,k)*domega);

t = 0:1:600;

r_z = zeros(N,length(t));
r_z_d = zeros(N,length(t));

phaseangle = zeros(1,length(omega));

for i = 1:length(omega)
    phaseangle(1,i) = rand*2*pi;
end

for n = 1:N
    for i = 1:length(t)
        for k = 1:length(omega)
            r_z(n,i) = r_z(n,i) + c_k_z(n,k)*cos(omega(k)*t(i) + phaseangle(1,k));
            r_z_d(n,i) = r_z_d(n,i) + c_k_z_d(n,k)*cos(omega(k)*t(i) + phaseangle(1,k));
        end
    end
end

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_z(1,:))
title(['Responsen i z-retning ved ' num2str(koord) 'L,...
    med vindhastighet V_{R_{z_1}}= ' num2str(V_R_z(1)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_z(x,t) [m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_z_d(1,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons, r_{z_d}(x,t) [m]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_z(2,:))
title(['Responsen i z-retning ved ' num2str(koord) 'L,...
    med vindhastighet V_{R_{z_2}}= ' num2str(V_R_z(2)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_z(x,t) [m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_z_d(2,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons, r_{z_d}(x,t) [m]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_z(3,:))
title(['Responsen i z-retning ved ' num2str(koord) 'L,...
    med vindhastighet V_{R_{z_3}}= ' num2str(V_R_z(3)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_z(x,t) [m]')
grid on
```

```
subplot(2,1,2)
plot(t,r_z_d(3,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons, r_{z_d}(x,t) [m]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_z(4,:))
title(['Responsen i z-retning ved ' num2str(koord) 'L,...
      med vindhastighet V_{R_{z_4}}= ' num2str(V_R_z(4)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_z(x,t) [m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_z_d(4,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons, r_{z_d}(x,t) [m]')
grid on
```



# Vedlegg H

## Virvelavløsnings- respons i torsjon med TMD - MATLAB

```
%% Hafslundsøy - Massedempere
% 23.05.2013
% Simen Hellgren Holtberget
% simenhel@stud.ntnu.no
%% Definerer først lastens forventningsverdi

sigma_q_theta = @(V) hatt_sigma_q_theta*(rho_v*V^2*(B^2)/2);

%% Finner spektraltettheten for lasten

S_q_theta = @(omega,omega_s,V) ((sigma_q_theta(V)^2)/(sqrt(pi)*omega_s*b_theta))...
    *exp(-((1-(omega/omega_s))/b_theta)^2);

%% Ser så på den modale lastresponsen

f_S_tilde_R_theta = @(omega,omega_s,V) 2*lambda*D*S_q_theta(omega,omega_s,V)...
    *kvadintphi2(1);

omega = 4:0.001:17;

S_tilde_R_theta = zeros(4,length(omega));

for n = 1:N
    for i = 1:length(omega)
        S_tilde_R_theta(n,i) = f_S_tilde_R_theta(omega(i),omega_theta(n),V_R_theta(n));
    end
end

figure
plot(omega,S_tilde_R_theta,'LineWidth',2)
grid on
title('Lastresponspekteret S_{R\theta}(\omega)')
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('S_{R\theta}(\omega) [N^2s]')
legend(['\omega_{\theta_1} = ' num2str(omega_theta(1))],...
    ['\omega_{\theta_2} = ' num2str(omega_theta(2))],...
    ['\omega_{\theta_3} = ' num2str(omega_theta(3))],...
    ['\omega_{\theta_4} = ' num2str(omega_theta(4))])

%% Ser på den aerodynamiske dempingen

xi_ae_theta = @(n,V_R,V) ((rho_v*B^4)/(4*m_b))*K_a_theta(V_R,V)...
    *(1-((a_theta*f_hatt_sigma_r_theta(n,V_R,V))^2)/(a_theta)^2);
```

## Vedlegg H

---

```
% Finner frekvensresponsfunksjonen
hatt_H_theta = @(omega,omega_s,n,V_R,V) (1-(omega/omega_s)^2 ...
      + 2*sqrt(-1)*(xi_theta - xi_ae_theta(n,V_R,V))...
      *(omega/omega_s)^(-1));

% Den modale stivheten
tilde_K_theta = @(n) omega_theta(n)^2*m_b*kvadintphi2(n);

%% Spektraltettheten til responsen
f_S_r_theta = @(omega,omega_s,n,V_R,V) ((Phi_theta(n,ceil(length(x)*koord))...
      /tilde_K_theta(n))^2*...
      (abs(hatt_H_theta(omega,omega_s,n,V_R,V))^2)...
      *f_S_tilde_R_theta(omega,omega_s,V));

S_r_theta = zeros(4,length(omega));

for n = 1:N
    for i = 1:1:length(omega)
        S_r_theta(n,i) = f_S_r_theta(omega(i),omega_theta(n),n,V_R_theta(n),V_R_theta(n));
    end
end

figure
plot(omega,S_r_theta,'LineWidth',2)
grid on
title(['Responsspekteret S_{r\_theta}(\omega) ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('S_{r\_theta}(\omega) [m^2/s]')
legend(['V_{R_{theta_1}} = ' num2str(V_R_theta(1)) ' [m/s]',...
      ['V_{R_{theta_2}} = ' num2str(V_R_theta(2)) ' [m/s]',...
      ['V_{R_{theta_3}} = ' num2str(V_R_theta(3)) ' [m/s]',...
      ['V_{R_{theta_4}} = ' num2str(V_R_theta(4)) ' [m/s]'])

%% Ønsker nå å innføre massedempere
tilde_M_theta = m_theta*kvadintphi2;

% bestemmer massen til demperene
mu = 0:0.0001:0.01;

M_d = @(n,mu) mu*tilde_M_theta(n);

% Plasserer massedemperene
N_j = 3;          % Antall dempere

x_A = 0.3*L;
x_B = 0.5*L;
x_C = 0.7*L;

mu_A = 0.0025;
mu_C = mu_A;
```

```
mu_B = 0.006;

% Finner egenfrekvensene til massedemperene
f_omega_theta_A = zeros(N,1);
for n = 1:N
    f_omega_theta_A(n) = omega_theta(n)/(1+mu_A);
end

omega_theta_C = f_omega_theta_A(2);
omega_theta_A = f_omega_theta_A(2);

f_omega_theta_B = zeros(N,1);
for n = 1:N
    f_omega_theta_B(n) = omega_theta(n)/(1+mu_B);
end

omega_theta_B = f_omega_theta_B(1);

% Finner dempingskoeffisientene til massedemperene
xi_d = @(mu) sqrt((3*mu)/(8*(1+mu)^3));

xi_A = xi_d(mu_A);
xi_B = xi_d(mu_B);

xi_C = xi_A;

% Definerer massen til demperene
f_M_d_A = zeros(N,1);
f_M_d_B = zeros(N,1);

for n = 1:N
    f_M_d_A(n) = M_d(n,mu_A);
    f_M_d_B(n) = M_d(n,mu_B);
end

M_d_B = f_M_d_B(1);
M_d_C = f_M_d_A(2);
M_d_A = f_M_d_A(2);

% Finner stivheten til demperene
f_K_d_A = zeros(N,1);
f_K_d_B = zeros(N,1);

for n = 1:N
    f_K_d_A(n) = (f_omega_theta_A(n)^2)*f_M_d_A(n);
    f_K_d_B(n) = (f_omega_theta_B(n)^2)*f_M_d_B(n);
end

K_d_B = f_K_d_B(1);
K_d_C = f_K_d_A(2);
```

## Vedlegg H

---

```
K_d_A = f_K_d_A(2);

% Må etablere modeformene til massedemperene

Phi_d = @(n) [Phi_theta(n,ceil(length(x)*x_A/L));
             Phi_theta(n,ceil(length(x)*x_B/L));
             Phi_theta(n,ceil(length(x)*x_C/L))];

tilde_M_theta = diag(tilde_M_theta);

f_hatt_S_tilde_R_theta = @(n,omega) ((omega_theta(n)^2*tilde_M_theta(n,n))^(-2))*...
                                 f_S_tilde_R_theta(omega,omega_theta(n),V_R_theta(n));

dummy_N_N_j = zeros(1,N_j);
dummy_N_j_N = zeros(N_j,1);
dummy_N_j = zeros(N_j,N_j);

hatt_S_tilde_R_theta = @(n,omega) [f_hatt_S_tilde_R_theta(n,omega) dummy_N_N_j;
                                 dummy_N_j_N dummy_N_j];

dummy_1_N_j = zeros(1,N_j);
dummy_I_N_j = eye(N_j);
Psi_theta = [Phi_theta(1,ceil(length(x)*koord)), Phi_theta(2,ceil(length(x)*koord)),...
            Phi_theta(3,ceil(length(x)*koord)), Phi_theta(4,ceil(length(x)*koord))];

Psi_theta = @(n) [Psi_theta(n) dummy_1_N_j;
                dummy_N_j_N dummy_I_N_j];

%% Finner så frekvensresponsmatrisen

dummy_I_N = eye(N);

invomega_theta = @(n) 1/omega_theta(n);

hatt_omega_theta = @(n,omega) omega*invomega_theta(n);

invomega_theta_d = [1/omega_theta_A 0 0;
                  0 1/omega_theta_B 0;
                  0 0 1/omega_theta_B];

hatt_omega_theta_d = @(omega) omega*invomega_theta_d;

Xi_d = [xi_A xi_B xi_C];
Xi_d = diag(Xi_d);

Xi_theta = @(n,V_R,V) xi_theta-xi_ae_theta(n,V_R,V);

f_M_d = [M_d_A M_d_B M_d_C];
M_d = diag(f_M_d);

hatt_D = @(n,Phi_d) Phi_d'*M_d/tilde_M_theta(n,n);

% Frekvensresponsmatrisen blir da

hatt_E = @(n,V_R,V,omega) [1-((hatt_omega_theta(n,omega)^2)*...
(1+(hatt_D(n,Phi_d(n))*Phi_d(n))))+...
(2*sqrt(-1)*hatt_omega_theta(n,omega)).*...]
```



```

        Xi_theta(n,V_R,V)), -(hatt_omega_theta(n,omega).^2)*...
        hatt_D(n,Phi_d(n));
        -(hatt_omega_theta_d(omega).^2)*...
        Phi_d(n), (dummy_I_N_j-(hatt_omega_theta_d(omega).^2)+...
        (2*sqrt(-1).*hatt_omega_theta_d(omega)*Xi_d));

hatt_H = @(n,V_R,V,omega) inv(hatt_E(n,V_R,V,omega));

f_S_r_theta_d = @(n,V_R,V,omega) Psi_theta(n)*(conj(hatt_H(n,V_R,V,omega)))*...
        hatt_S_tilde_R_theta(n,omega)*hatt_H(n,V_R,V,omega) .*Psi_theta(n) .';

S_r_theta_d = zeros(N,length(omega));

for n = 1:N
    for i = 1:length(omega)
        dummy_S_r_theta_d = f_S_r_theta_d(n,V_R_theta(n),V_R_theta(n),omega(i));
        S_r_theta_d(n,i) = dummy_S_r_theta_d(1,1);
    end
end

figure
plot(omega,S_r_theta_d,'--',omega,S_r_theta,'LineWidth',2)
grid on
title(['Responsspekteret S_{r\_theta}(\omega) med TMD ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('omega [rad/s]')
ylabel('S_{r\_theta}(\omega) [m^2/s]')
legend('S_{r\_theta_{d_1}}','S_{r\_theta_{d_2}}',...
        'S_{r\_theta_{d_3}}','S_{r\_theta_{d_4}}')

kvad_sigma_r_d_theta = zeros(N,length(V));

for n = 1:N
    for i = 1:length(V)
        dummy_sigma_r_d_theta = f_S_r_theta_d(n,V_R_theta(n),V(i),2*pi*V(i)*St/D)*dV;
        kvad_sigma_r_d_theta(n,i) = dummy_sigma_r_d_theta(1,1);
    end
end

sigma_r_d_theta = sqrt(kvad_sigma_r_d_theta);

figure
plot(V,sigma_r_d_theta,'--',V,sigma_r_theta,'LineWidth',2)
title(['Dynamisk respons i torsjon med TMD ved ' num2str(koord) 'L'])
xlabel('Middelvindhastighet, V [m/s]')
ylabel('Dynamisk respons, \sigma_{r\_theta} [m/m]')
legend('\sigma_{r\_theta_{d_1}}','\sigma_{r\_theta_{d_2}}',...
        '\sigma_{r\_theta_{d_3}}','\sigma_{r\_theta_{d_4}}')
grid on

% Ønsker nå å gjøre en simulering i tidsdomenet

T = 600;

k_p = sqrt(2);          % Narrow-banded

c_k_theta = @(n,k) sqrt(2*S_r_theta(n,k)*domega);
c_k_theta_d = @(n,k) sqrt(2*S_r_theta_d(n,k)*domega);

```

```

t = 0:1:600;

r_theta = zeros(N,length(t));
r_theta_d = zeros(N,length(t));

phaseangle = zeros(1,length(omega));

for i = 1:1:length(omega)
    phaseangle(1,i) = rand*2*pi;
end

for n = 1:N
    for i = 1:1:length(t)
        for k = 1:1:length(omega)
            r_theta(n,i) = r_theta(n,i) + c_k_theta(n,k)*cos(omega(k)*t(i)+phaseangle(1,k));
            r_theta_d(n,i) = r_theta_d(n,i) + ...
                c_k_theta_d(n,k)*cos(omega(k)*t(i) + phaseangle(1,k));
        end
    end
end

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_theta(1,:))
title(['Responsen i torsjon ved ' num2str(koord) 'L,...
    med vindhastighet V_{R_{\theta_1}}= ' num2str(V_R_theta(1)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_{\theta}(x,t) [m/m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_theta_d(1,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons, r_{\theta_d}(x,t) [m/m]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_theta(2,:))
title(['Responsen i torsjon ved ' num2str(koord) 'L,...
    med vindhastighet V_{R_{\theta_2}}= ' num2str(V_R_theta(2)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_{\theta}(x,t) [m/m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_theta_d(2,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons, r_{\theta_d}(x,t) [m/m]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_theta(3,:))
title(['Responsen i torsjon ved ' num2str(koord) 'L,...
    med vindhastighet V_{R_{\theta_3}}= ' num2str(V_R_theta(3)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons, r_{\theta}(x,t) [m/m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_theta_d(3,:))
xlabel('Tid, t [s]')

```

```
ylabel('Respons,  $r_{\{\theta_d\}}(x,t)$  [m/m]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,r_theta(4,:))
title(['Responsen i torsjon ved ' num2str(koord) 'L,...
med vindhastighet  $V_{\{R_{\{\theta_4\}}\}}=$  ' num2str(V_R_theta(4)) ' [m/s]'])
ylabel('Respons,  $r_{\theta}(x,t)$  [m/m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,r_theta_d(4,:))
xlabel('Tid, t [s]')
ylabel('Respons,  $r_{\{\theta_d\}}(x,t)$  [m/m]')
grid on
```