

Simulering av brudd og sprekkvekst med X-FEM

Jo Øivind Gjernes
Erik Remø Klokk

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: Juni 2012

Hovedveileder: Odd Sture Hopperstad, KT

Medveileder: Torodd Berstad, KT

Tore Børvik, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk



MASTEROPPGAVE 2012

FAGOMRÅDE: Beregningsmekanikk	DATO: 11. juni 2012	ANTALL SIDER: 130
----------------------------------	------------------------	--------------------------

TITTEL: Simulering av brudd og sprekkvekst med X-FEM Simulation of fracture and crack propagation using X-FEM	
UTFØRT AV: Jo Øivind Gjernes Erik Remø Klokk	

<p>SAMMENDRAG:</p> <p>X-FEM, den utvidede elementmetoden, er en relativt ny metode for simulering av sprekkvekst. X-FEM bygger på rammeverket til vanlig elementmetode, FEM. I X-FEM berikes nodene i et element for å inkludere diskontinuiteter og singulariteter innenfor elementet. X-FEM kan dermed beskrive arbitrær sprekkvekst uten å endre nettet i området rundt sprekkspissen.</p> <p>LS-DYNA er X-FEM koplet med en kohesiv materialmodell. Den kohesive materialmodellen lar brukeren definere en tri-lineær kohesiv lov for sprekkvekst. Den kohesive loven i denne oppgaven er definert til å være lineær og er dermed kun gitt av traksjonsspennning og maksimal separasjon før sprekkvekst. Alle numeriske simuleringer er utført med plan-tøyningsselementer i LS-DYNA.</p> <p>Oppgaven fokuserer på å evaluere X-FEM i LS-DYNA. X-FEM brukes for å simulere sprekkvekst i fire prøvestykker. To av prøvestykkene er modellert ut i fra forsøksdata fra et eksperiment som vi har utført ved NTNU og de to andre er hentet fra litteraturen. Resultat fra X-FEM sammenlignes med resultat fra en elementerosjonsmetode med skademodell fra SIMLab.</p> <p>X-FEM gav konsekvent bedre resultater enn elementerosjonsmetoden. Det ble observert en nettavhengighet, denne ble undersøkt for en av modellene. Sprekken ble bredere og forgrenet seg da elementstørrelsen ble redusert. X-FEM approksimerte sprekkstien godt i de numeriske modellene.</p>

FAGLÆRER: Professor Odd Sture Hopperstad
VEILEDER(E): Professor Tore Børvik, Torodd Berstad
UTFØRT VED: NTNU

Institutt for konstruksjonsteknikk

FAKULTET FOR INGENIØRVITENSKAP OG TEKNOLOGI
NTNU – Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

MASTEROPPGAVE 2012

for

Jo Øivind Gjernes og Erik Remø Klokk

Simulering av brudd og sprekkvekst med X-FEM

Simulation of fracture and crack propagation using X-FEM

En av hovedutfordringene i elementanalyse av metalliske komponenter og konstruksjoner er simulering av bruddpropagering. En propagerende sprekk introduserer en sterk diskontinuitet i elementløsningen som typisk blir sterkt nettavhengig. Det er foreslått en rekke metoder i litteraturen for å løse problemer med sprekkvekst. Elementerosjon, kohesive elementer og splitting av noder er metoder som er mye brukt. X-FEM, eller den utvidete elementmetoden, er en relativt ny metode for simulering av sprekkvekst. I denne metoden berikes forskyvningsfeltet slik at sprekkvekst kan beskrives uten endring av nettet i området rundt sprekkspissen. Oppgaven går ut på å evaluere X-FEM i LS-DYNA for simulering av sprekkvekst ved bruk av tilgjengelige forsøksdata, numeriske resultater fra litteraturen og/eller andre aktuelle løsningsmetoder som finnes i LS-DYNA. Kohesive elementer benyttes ofte for å beskrive energiabsorpsjonen ved sprekkpropagering. Det kan bli aktuelt å utføre laboratorietester for å kalibrere de kohesive elementene.

Opgaven inneholder følgende deloppgaver:

- Litteraturstudium: Kandidatene skal gjennomføres et litteraturstudium innen teorigrunnlaget for X-FEM og anvendelser av metoden, samt grunnleggende bruddmekanikk for metalliske materialer.
- Numerisk verktøy: Kandidatene skal sette seg inn i bruken av det ikke-lineære elementmetodeprogrammet LS-DYNA med spesiell vekt på X-FEM. Andre teknikker for simulering av brudd og sprekkpropagering skal også utredes.
- Eksempelproblemer: Kandidatene skal etablere et sett av eksempelproblemer for evaluering av X-FEM og andre tilgjengelige teknikker for simulering av brudd og sprekkpropagering. Problemene skal enten være løst numerisk av andre eller det skal finnes eksperimentelle data som kan brukes til validering.
- Numeriske studier: Kandidatene skal utføre numeriske simuleringer av de ulike eksempelproblemene og evaluere nøyaktigheten, robustheten og effektiviteten til X-FEM sammenlignet med andre tilgjengelige metoder.
- Rapportering: Kandidatene skal rapportere resultatene av arbeidet i form av en vitenskapelig rapport.

Veiledere: Odd Sture Hopperstad, Torodd Berstad og Tore Børvik.

Opgaven skal utformes i henhold til gjeldende retningslinjer og leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU, innen 15. juni 2012.

NTNU, 16 januar 2012

Odd Sture Hopperstad

Sammendrag

X-FEM, den utvidede elementmetoden, er en relativt ny metode for simulering av sprekkevekst. Vi har gått gjennom grunnleggende teori for bruddmekanikk og forklart teorien bak X-FEM. Vi har brukt X-FEM på to prøvestykker fra et laboratorieeksperiment utført på NTNU og på to prøvestykker vi fant i litteraturen. Prøvestykkene fra laboratorie er et CT-prøvestykke og en plate med hull, begge tatt ut fra en AA7075-T651 plate. Denne aluminiumslegeringen er anisotrop og prøvestykkene er tatt ut i to retninger; 0-retningen, med horisontalaksen parallell med valseretningen, og 90-retningen, med horisontalaksen normalt på valseretningen. Prøvestykkene fra litteraturen er en plate av herdet stål og en PMMA-plate med hull. Vi har sammenlignet X-FEM-resultatene med en elementerosjonsmetode med skademodell fra *SIMLab*.

Analysene er utført med LS-DYNA, der har vi brukt en kohesiv lov med X-FEM. X-FEM gir konsekvent bedre resultater enn elementerosjon. Vi har ikke brukt avanserte metoder som for eksempel kontinuerlig nett-tilpassing rundt sprekspissen i erosjonsanalysene. Nettene er kun tilpasset *SIMLab*-skademodellen, dvs. jevnstore og kvadratiske element.

Den numeriske modellen for CT-testen gav bra samsvar med data fra laboratorieforsøket. Vi fikk kun bruddformen for 0-retningen til materialet, det var forventet siden modellen vår ikke tar hensyn til anisotropien i materialet. I denne analysen var den kohesive loven kalibrert ut fra bruddenergien til et prøvestykke fra forsøket. Vi skalerte den kohesive loven til å passe prøvestykkene i plate-testen. Her fikk vi bruddformen til både 0- og 90-retningen avhengig av hvilken integrasjonsmetode vi brukte. Begge metodene gav for lave krefter ved brudd, men viste bedre overføringsverdi enn hva vi så for elementerosjon. Materialet var sterkere i 90-retningen så vi kjørte en ny analyse kalibrert for CT i 90-retningen. Det gav gode resultater for kraften ved brudd i platen.

For Kalthoff-eksperimentet greide vi å replikere resultater som vi har sett i [1] og [2]. Vi opplevde at resultatene var avhengige av elementstørrelse. Vi fikk dårligere resultater med mindre elementer. Dette går i mot det vi har sett i litteraturen, Song m.fl. [1] fikk bedre resultater med mindre elementer.

For PMMA-eksperimentet replikerte vi sprekkegeometrien, men vi fikk også et brudd der det ikke skulle forekomme. Dessuten stemte ikke sprekkeforløpet med forsøket.

Abstract

X-FEM, the extended finite element method, is a relatively new method for the simulation of crack growth. In this thesis, we go through basic theory for fracture mechanics and explain the theory behind X-FEM. We have applied the X-FEM on two specimens from a laboratory experiment performed at NTNU and two specimens we found in the literature. The laboratory specimens included a CT specimen and a plate with a hole cut from an AA7075-T651 plate. This aluminium alloy is anisotropic and specimens were cut out in two directions; the 0-direction, with the horizontal axis of the specimens in the rolling direction of the material, and the 90-direction, with the horizontal axis of the specimens normal to the rolling direction. The specimens from the literature include a hardened steel plate and a PMMA plate with a hole. We have compared the X-FEM results with the results of FEM analyses with an erosion damage model from *SIMLab*. The analyses is performed in LS-DYNA, in which a cohesive law is coupled with X-FEM. X-FEM consistently provide better results compared to the erosion damage model. The mesh is only adapted to the *SIMLab* damage model, meaning equally sized and quadratic elements.

The numerical model for the CT-test provided good agreement with the data from the laboratory experiment. Our model does not take the anisotropy of the material into account. In this analysis the cohesive law was calibrated with the fracture energy obtained from data from a specimen in the laboratory experiment. The cohesive law was scaled to fit the plate specimens. For the plate analyses we obtained the fracture paths for both the 0- og the 90-direction depending on which integration methods we used for the element partitions. Both integration methods underestimated the force when fracture occurred, regardless, these analyses provided better scale compliance than the element erosion analyses.

For the Kalthoff experiment we could replicate the results obtained in [1][2]. We did experience that the results was mesh dependent; our results got poorer when the element size was reduced. This opposes what we have seen in the literature, Song m.fl.[1] got more accurate results with a smaller element size.

For the PMMA experiment we could replicate the crack geometry to some extent, but an extra crack occurred in a place that should remain intact.

Forord

Denne masteroppgaven er utført ved SIMLab (Structural Impact Laboratory), institutt for konstruksjonsteknikk ved NTNU i Trondheim. Arbeidet startet 16. januar 2012 og ble avsluttet i juni 2012.

Bakgrunnen vår er studieretningen beregningsmekanikk. I tidligere semestre har vi fullført flere emner som omhandler elementmetoden i tillegg til konstruksjonstekniske emner. Bruddmekanikk, X-FEM og LS-DYNA var nytt for oss før vi startet på oppgaven, så en del av arbeidet er gått med til å lære og bruke LS-DYNA, lære bruddmekanisk teori og teorien bak X-FEM.

Vi retter en takk til Odd Sture Hopperstad, Tore Børvik og Torodd Berstad ved SIMLab for veiledning i ukentlige møter gjennom semesteret. Vi vil også takke Trond Auestad (Sintef), Andrew Marson (Sintef) og Egil Fagerholt (SIMLab) for gjennomføring av laboratorieeksperiment.

Trondheim 11.06.2012

Jo Øivind Gjernes Erik Remø Klokk

Figurer

1.1	Koordinatsystem for en sprekk	4
1.2	Mode I, åpning	4
1.3	Mode II, skjær i planet	4
1.4	Mode III, skjær ut av planet	4
1.5	A i samspillsintegralet om en sprekkspiss	11
1.6	Barenblatt-Dugdale-modell til venstre, Hillerborgmodell til høye	12
2.1	Et tilfeldig område Ω (t.v.) og et firesidet element Ω_e (t.h)	20
2.2	x er i et element (t.v.), tre støtter dekker x (t.h.)	23
2.3	Ulike elementnett av området, Ω , definert i a) med en sprekk Γ_c . b) viser et nett tilpasset sprekken, Γ_c . c) viser et rektangulært nett med berikede noder	26
2.4	Viser to berikede noder og deres influensområde.	27
2.5	Tre stavelementer med en diskontinuitet mellom node 2 og 3	29
2.6	Tradisjonelle formfunksjoner, node 2 og 3	30
2.7	Berikede formfunksjoner, node 2 og 3	30
2.8	Elementnett med (a) og uten (b) dobbelnode[3]	30
2.9	Nett med en diskontinuitet som går gjennom to elementer	31
2.10	Nett der diskontinuiteten stopper midt i et element	31
2.11	Lokalt koordinatsystem i sprekkspiss	33
2.12	Normal og tangentvektorer på en sprekk	34
2.13	Diskontinuitet (sprekk) i et homogent nett, 1 og 2 markerer sprekkspissene	35

2.14	Kurve i to dimensjoner danner grenseflaten	37
2.15	Nivåsett-funksjonen, grenseflaten er dannet der xy-planet krysser den kjegleformede overflaten	37
2.16	Eksempel på et to-dimensjonalt nivåsett	38
2.17	To nivåsett som definerer sprekkspissen der de krysser hverandre	40
2.18	Sprekk gitt av to nivåsett, med definisjon av koordinatsystem ved sprekkfront	41
2.19	Viser en diskontinuitet, der blandede elementer er markert.	42
2.20	45
2.21	Element med sprekk, delt inn i triangler	46
3.1	Kohesiv lov i LS-DYNA	52
3.2	Spenning-tøyningskurve - uniaksielt strekk	55
4.1	Kornstruktur i 7075-T651[4]	60
4.2	Uttak av prøvestykker på aluminiumsplate	61
4.3	CT-test, dimensjoner på prøvestykker	61
4.4	Plate med hull, dimensjoner på prøvestykker	61
4.5	Oppsett CT-test	63
4.6	Oppsett for platen med hull. Høyhastighetskamera til venstre, høyoppløstkamera til høyre	63
4.7	CT-test, parallellt med fiberretningen	65
4.8	CT-test, tvers av valseretning	65
4.9	CT-test, alle	66
4.10	Uvanlig CT-test, parallellt med fiberretningen	67
4.11	Uvanlig CT-test, tvers av valseretning	67
4.12	Uvanlig CT-test, alle	68
4.13	CT, prøvestykke 1-0	69
4.14	CT, prøvestykke 2-0	69
4.15	CT, prøvestykke 1-90	69
4.16	CT, prøvestykke 2-90	69

4.17	Plate med hull, prøvestykke 1-0	70
4.18	Plate med hull, prøvestykke 2-0	70
4.19	Plate med hull, prøvestykke 1-90	70
4.20	Plate med hul, prøvestykke 2-90	70
4.21	Plate med hull, prøvestykke 1-0, bruddflate	70
4.22	Plate med hull, prøvestykke 2-0, bruddflate	70
4.23	Plate med hull, prøvestykke 1-90, bruddflate	71
4.24	Plate med hull, prøvestykke 2-90, bruddflate	71
5.1	Nett med 0,19 mm maskestørrelse i interesseområdet	76
5.2	Forskyvning hentes ut i de merkede nodene.	76
5.3	XFEM, CT-analyse med kalibrert kohesiv lov	77
5.4	Kraft-ekstensometeråpning plot av CT-forsøk og kalibrert analyse	78
5.5	Kraft-ekstensometeråpning plot av CT-forsøk og kalibrert analyse med <i>SIMLab</i> -skademodell	78
5.6	Elementerosjon, CT-test, 0,38x0,38 mm elementer, kalibrert analyse	78
5.7	Elementerosjon, CT-test, 0,19x0,19 mm elementer, kalibrert analyse	78
5.8	XFEM-analyseresultat, plate-test, underdomeneintegrasjon, kalibrert ko- hesiv lov	79
5.9	XFEM-analyseresultat, plate-test, fantomnoder, kalibrert kohesiv lov	79
5.10	Kraft-ekstensometeråpning plot av kalibrert XFEM-analyse av platen, un- derdomeneintegrasjon	80
5.11	Kraft-tid plot av kalibrert XFEM-analyse av platen, underdomeneintegrasjon	80
5.12	Kraft-ekstensometeråpningplot av kalibrert XFEM-analyse av platen, fan- tomnoder. Kraften er interpolert, derfor har plottet en litt annen form når bruddet intreffer	81
5.13	Elementerosjon, plate-test, 0,38x0,38 mm og kalibrert analyse	81
5.14	Kraft-ekstensometeråpningplot av kalibrert elementerosjons-analyse av pla- ten	81
5.15	Ved fullstendig brudd - teoretisk bruddenergi (1)	82
5.16	Ved fullstendig brudd - bruddenergi som tidligere (2)	82

5.17	Ved fullstendig brudd - økt bruddenergi (3)	83
5.18	Ved fullstendig brudd, tidsskalert analyse (samme parametere som i (2))	84
5.19	Testoppsett / geometri	86
5.20	(a) Analyse med 50x50, underdomeneintegrasjon, kohesiv lov fra [1]	88
5.21	(b) Analyse med 50x50, fantomelement, kohesiv lov fra [1]	88
5.22	(c) Analyse med 50x50, underdomeneintegrasjon, kalibrert kohesiv lov	89
5.23	(d) Analyse med 50x50, fantomelement, kalibrert kohesiv lov	89
5.24	(e) Analyse med 79x79, underdomeneintegrasjon, kalibrert kohesiv lov	90
5.25	(f) Analyse med 101x101, underdomeneintegrasjon, kalibrert kohesiv lov	90
5.26	(g) Analyse med 101x101, fantomelement, kalibrert kohesiv lov	90
5.27	(h) Analyse med 0,3x0,3-elementer, elementerosjon, <i>SIMLab-skademodell</i>	90
5.28	PMMA, dimensjoner	92
5.29	Inn og ut hastigheter fra eksperiment[?]	94
5.30	Prøvestykke etter forsøk [?]	95
5.31	X-FEM-analyse med fantomnoder	95
5.32	X-FEM-analyse med underdomeneintegrasjon	96

Tabeller

3.1	Datakort, kohesiv skadmodell i LS-DYNA	51
3.2	Datakort for umat	56
4.1	Kjemisk sammensetning i vektprosent i 7075-T651	60
4.2	Mål på prøvestykker	62
4.3	Kraft og ekstensometeråpning ved brudd	64
4.4	Bruddenergi i laboratorieforsøk	71
5.1	Materialegenskaper, AA7075-T651 [4]	74
5.2	Utvalg av forsøk og analyser fra parameteranalyse	75
5.3	Valgte parametere for elementerosjonsmodell	75
5.4	Parametere for kohesiv lov	82
5.5	Materialegenskaper, X2 NiCoMo 1 8 95	87
5.6	PMMA, materialegenskaper[?]	93

Innhold

1	Bruddmekanikk	1
1.1	Bruddmekanikk	2
1.1.1	Bakgrunn	2
1.1.2	Lineær-elastisk bruddmekanikk	2
1.2	J -integralet	6
1.2.1	Bakgrunn	6
1.2.2	J -konturintegral	6
1.2.3	J i ikke-lineær analyse	8
1.2.4	Integralsamspillsmetoden	9
1.3	Kohesive soner	12
1.3.1	Bakgrunn	12
1.3.2	Kohesive modeller	12
1.3.3	Kohesiv sprekkvekst i numeriske metoder	13
2	X-FEM	17
2.1	Introduksjon til X-FEM	18
2.2	Historie	18
2.3	FEM	20
2.3.1	Utleddning av et isoparametrisk element	22
2.4	Maskeløse metoder	23
2.5	Oppdeling av enhet	24

2.6	X-FEM teori	26
2.6.1	Approximasjonsfunksjonen i X-FEM	26
2.7	Diskontinuiteter i X-FEM	29
2.7.1	En-dimensjonalt element - stav	29
2.7.2	To-dimensjonale elementer	29
2.7.3	Berikningsfunksjoner	33
2.7.4	Modellering av en arbitrær sprekk	35
2.8	Nivåsettmetoden	37
2.8.1	Nivåsettets egenskaper	38
2.8.2	Nivåsett for sprekker	40
2.9	Supplementerende teori	42
2.9.1	Blandingselementer	42
2.9.2	Elementpartisjoneringsmetoder	44
3	LS-DYNA	49
3.1	Analyser i LS-DYNA	50
3.2	X-FEM i LS-DYNA	50
3.3	Kohesiv-lov	51
3.4	UMAT	54
3.4.1	Oppsummering	56
4	Laboratorietest	57
4.1	Materiale	60
4.2	Prøvestykker	60
4.3	Testprosedyre	63
4.4	Resultater	63
4.4.1	CT-test, plot	65
4.4.2	Plate med hull, plot	67
4.4.3	Bruddretning	69

4.4.4	Bruddenergi	71
5	Numeriske analyser	73
5.1	Eksempel 1: Laboratorieeksperiment	74
5.1.1	Materialdata	74
5.1.2	Kalibrasjon av skademodeller	74
5.1.3	Numerisk modell	76
5.1.4	Resultater	77
5.1.5	Effekten av δ_{max}	82
5.1.6	Tidsskalering	84
5.1.7	Diskusjon	85
5.2	Eksempel 2: Kalthoff-eksperiment	86
5.2.1	Materialdata	87
5.2.2	Kalibrasjon av skademodeller	87
5.2.3	Numerisk modell	87
5.2.4	Resultater	88
5.2.5	Diskusjon	90
5.3	Eksperiment 3: Gregoire	92
5.3.1	Materialdata	92
5.3.2	Kalibrasjon av skademodell	93
5.3.3	Numerisk modell	94
5.3.4	Resultater	95
5.3.5	Diskusjon	96
6	Konklusjon	97
6.1	Konklusjon	98
6.2	Konklusjon	98
6.3	Videre studie	99

Begreper

Blending elements	Blandingsselementer
Corotational	Korotert
Domain	Domene, område
Energy release rate	Energifrigjøringsrate
Enrichment	Berikning
Fracture process zone	Bruddprosessone
Interaction integral	Samspillsintegral
Interaction integral method	Integralsamspillsmetoden
Interface	Grenseflate
Level-set	Nivåsett
Linear elastic fracture mechanics (LEFM)	Lineær-elastisk bruddmekanikk
Mesh	Nett, maske
Meshless	Nettløs, maskeløs
Mode	Mode (i forbindelse med SIF)
Notch	Skår
Partition of unity	Oppdeling av enhet
Partition of unity finite element method (PUFEM)	Oppdeling av enhet elementmetode
Path	Sti (i forbindelse med en kurve)
Rate-of-deformation tensor	Deformasjonsratetensor
Rigid mode	Stivlegememode
Stress intensity factor (SIF)	Spenningsintensitetsfaktor
Support	Understøtte
Traction	Traksjon - spenning per enhetslengde

Notasjon

A	Areal
\mathbf{C}	Elastisitetstensor
\mathbf{D}	Deformasjonsratetensor
d	Frihetsgrad
δ_{max}	Seperasjon i kohesiv lov
E	Energi
E	E-modul
E^*	Effektiv E-modul
G	Energifrigjøringsrate
G_c	Bruddenergi
Γ	Sti, kurve
h_e	Karakteristisk høyde
I	Sampsillsintegral
J	J-integral
K	Spenningsintensitetsfaktor
λ	Seperasjonsmål i LS-DYNA
Λ	Parameter i kohesiv lov i LS-DYNA
\mathbf{n}	Normal
Ω	Domene
\mathbf{R}	Rotasjonstensor
r	Radius
u	Forskyvning
V	Volum
w_1	Seperasjon i Hillerborgmodell
W	Arbeid
ε	Tøyning
ν	Poissons tall
Ω	Domene
ω	Skadevariabel
Π	Potensiell energi
ρ	Massetetthet
σ	Spenning
σ	Traksjon i Hillerborgmodell og LS-DYNA
σ	Spenningsstensor
T	Traksjonsvektor
τ_{max}	Traksjonsspenning
θ	Vinkel

Kapittel 1

Bruddmekanikk

1.1 Bruddmekanikk

Bruddmekanikk fokuserer i stor grad på hvordan brudd oppstår og på metoder som kan bestemme om en sprekk vil propagere eller ikke. Denne delen gir en kort innføring i bruddmekanikkens historie og grunnleggende teori.

1.1.1 Bakgrunn

Bruddmekanikk er et relativt ungt fagfelt [5]. Feltet fikk gjennombruddet sitt etter andre verdenskrig, mye på grunn av uhell som rammet *libertyskip* under krigen. Dette var handelsskip som var masseprodusert i USA for å kompensere for skipstapene til de allierte. Skipsskrogene var sveiste konstruksjoner i motsetning til naglede som var benyttet tidligere [5]. På de sveiste skrogene kunne brudd propagere over hele legemet siden det oppførte seg som en sammenhengende plate. For å kunne undersøke brudd i detalj ble det opprettet en gruppe ved *Naval Research Laboratory* i Washington D.C. Denne gruppen la grunnlaget for bruddmekanikk som fagfelt.

I tradisjonell bruiddimensjonering blir den opptredende spenningen på en konstruksjon sammenlignet med flytespenningen til materialet. En benytter sikkerhetsfaktorer for å sikre seg at konstruksjonen tåler lastene og dermed ikke går til brudd. I bruddmekanikken tar en utgangspunkt i at alle materialer har defekter. Størrelsen på defektene og bruddseigheten til materialet avgjør om materialet går til brudd ved en opptredende spenning. Denne tilnærmingen gjør at vi kan undersøke hvordan sprekker utvikler seg i et materiale.

1.1.2 Lineær-elastisk bruddmekanikk

Lineær-elastisk bruddmekanikk (LEFM) tar utgangspunkt i at materialet oppfører seg lineært, i tråd med Hooks lov. En går ut i fra at brudd inntreffer når maksimal lokal spenning overstiger en kritisk spenning. Den kritiske spenningen er knyttet til spenningskonsentrasjon som følge av defekter i materialet. Et globalt spenningskriterium er dermed ikke tilstrekkelig som bruddkriterium, siden materialets evne til å motså brudd er knyttet til typen material og struktur. I en bruddanalyse er det to kriterier som benyttes; energikriteriet og spenningsintensitetskriteriet [5].

Energikriteriet

Kriteriet tar utgangspunkt i at en sprekk kan oppstå eller øke i omfang kun dersom den totale energien minker eller forblir konstant [5]. For at en sprekk skal vokse må dermed den totale energien avta etterhvert som sprekk lengden øker. Likevektslikningen, kalt Griffiths energibalanse, er gitt som:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (1.1)$$

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (1.2)$$

E : Total energi

Π : Potensiell energi i form av intern tøyingsenergi og arbeid fra eksterne krefter

W_s : Arbeid som kreves for å skape ny sprekkflate

dA : Økning i sprekk lengde

"Energy Release Rate", G , er en generell utforming av Griffiths energibalanse:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (1.3)$$

G er energien som frigjøres når sprekken vokser et enhetsareal, altså den drivende kraften for sprekkvekst. Sprekkveksten oppstår når G når en kritisk verdi [5]:

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad (1.4)$$

G_c : Bruddenergi

Spenningsintensitetsfaktor

Spenningsfeltet nær sprekkspissen kan beskrives på lukket form om en forutsetter isotropisk lineær-elastisk materialoppførsel. I et polarkoordinatsystem med origo i sprekkspissen er spenningsfeltet gitt som:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (1.5)$$

σ_{ij} : Spenningsvektor

k : Konstant

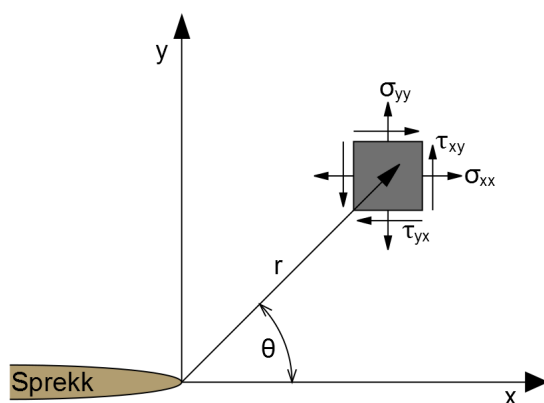
f_{ij} : Dimensjonsløs funksjon av vinkelen θ

r og θ : Polarkoordinater

m : m -te orden

A_m : Amplitude

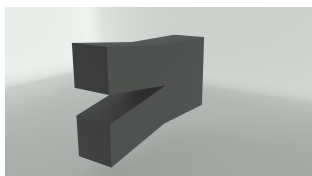
$g_{ij}^{(m)}$: Dimensjonsløs funksjon av vinkelen θ for m -te orden



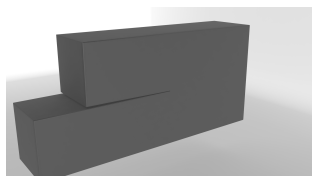
Figur 1.1: Koordinatsystem for en sprekk

Ligning (1.5) viser at løsningen for ethvert tilfelle vil inneholde et ledd som er proporsjonalt med $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Nær sprekkspissen vil dette leddet dominere og når $r = 0$ gir ligningen en singularitet. Spenningen vil da gå mot uendelig når en nærmer seg sprekkspissen og blir dermed ikke gyldig i dette området. Ut i fra ligningen kan en se at det er k som vil angi styrken på singulariteten. For enkelthetskyld bytter vi ut k med spenningsintensitetsfaktoren, K , slik at $K = k\sqrt{2\pi}$.

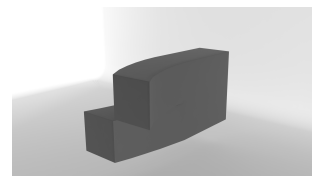
En sprekk kan ha tre ulike typer lastmoder; åpning, skjær i planet og skjær ut av planet. Skisser av modene er vist i figur ???. K er oftest gitt med et subskript som angir hvilken lastmode en har.



Figur 1.2: Mode I, åpning



Figur 1.3: Mode II, skjær i planet



Figur 1.4: Mode III, skjær ut av planet

Spenningsfeltene for modene i et isotropisk lineær-elastisk materiale skrives som:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) \quad (1.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (1.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (1.8)$$

σ_{ij} : Spenningsvektor
 K : Spenningsintensitetsfaktor avhengig av mode
 f_{ij} : Dimensjonsløs funksjon av vinkelen θ
 r og θ : Polarkoordinater

Spenningsintensitetsfaktoren, K , er last- og geometriavhengig. Uttrykket for spenningsintensitetsfaktoren skrives ofte ned til:

$$K_{mode} = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.9)$$

Y : Dimensjonsløs faktor
 a : Sprekklengde
 σ : Spenning fra ytre krefter

Siden alle spenninger i et lineær-elastisk legeme må være proporsjonale med ytre last, så må spenningen på sprekkspissen også være proporsjonal med ytre last. Ligning 1.6 viser at enhetene til spenningsintensitetsfaktorene er; spenning $\cdot\sqrt{\text{lengde}}$. Den relevante lengden er sprekkklengden. Faktoren Y taes med for å ta hensyn til geometriske forhold. Y vil altså påvirkes av dimensjoner på komponenten, sprekkens form og størrelse og lastpåføringen. \sqrt{a} og Y utgjør dermed proporsjonalitetsfaktorer som knytter ytre last til spenningsintensitetsfaktoren [5]. Løsninger på lukket form for en del enkle problemer er tilgjengelige, men oftest må spenningsintensitetsfaktorene bestemmes numerisk eller eksperimentelt [5].

Geometri og lastpåføring kan gjøre at mer enn én lastmode opptrer. Da gjelder superposisjonsprinsippet for å finne totalspenningen i en retning. Bidragene i retningen kan da summeres:

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (1.10)$$

En må merke seg at normalspenning ikke kan summeres med skjærspenning. For spenningsintensitetsfaktorene kan en ikke summere bidrag fra ulike moder til én samlet faktor, men en kan summere for hver enkelt mode [5]:

$$K_I(total) = K_I^A + K_I^B + K_I^C \quad (1.11)$$

Brudd vil initieres dersom K overstiger en kritisk verdi. Bruddkriteriet for spenningsintensitetsfaktorene er:

$$K_{mode} \geq K_{mode,c} \quad (1.12)$$

$K_{mode,c}$: Kritisk verdi for spenningsintensitetsfaktor

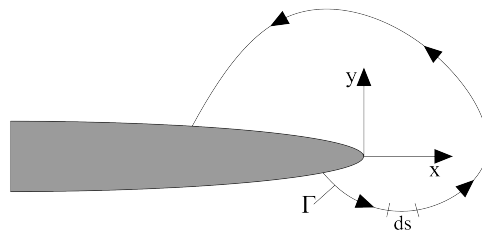
1.2 J -integralet

1.2.1 Bakgrunn

J -integralet er i likhet med G en måte å beregne tøyingsenergifrigjøringshastighet. J kan beskrives som et sti-uavhengig linjeintegral [6] og kan brukes både som en energiparameter og spenningsintensitetsparameter. Sti-uavhengigheten tilsier at J har den samme verdien for alle vilkårlige stier som omslutter en sprekkspiss i både elastiske- og elastisk-plastiske materialer. J kan dermed brukes som en bruddparameter i modeller til i både lineære- og ikke-lineære materialer [5]. Sti-uavhengigheten til J gjør at en kan velge konturet til å være på størrelse med sprekkspissområdet [7]. På den måten kan J brukes til å finne spenning og tøyning på sprekkspissen. En kan også velge et kontur som går fjernt fra sprekkspissen, slik at integralet kun inneholder elastiske laster og forskyvninger, noe som er spesielt nyttig i ikke-lineære materialmodeller.

1.2.2 J -konturintegral

Figur ?? viser et homogent legeme som er utsatt for et to-dimensjonelt deformasjonsfelt.



Legemet har et skår som går parallellt med x-aksen og en avrundet spiss.

J -integralet, i to-dimensjonale tilfeller, er definert som[6]:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T \cdot \frac{du}{dx} ds \right) \quad (1.13)$$

W : Tøyningsenergi-tetthet
 Γ : Vilkårlig kurve om sprekkspissen
 T : Traksjonsvektor
 u : Forskyvningsvektor
 ds : Buelengde

Tøyningsenergi-tettheten er definert som:

$$W = W(x, y) = W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.14)$$

Traksjonsvektoren er definert som normalspenninger ut av planet langs Γ :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.15)$$

$$n_j : \text{Komponentene til enhetsvektoren som er normal til } \Gamma \quad (1.16)$$

Dersom J omslutter sprekkspissen, så vil J være et mål for endringen i potensiell energi for en virtuell sprekkvekst [8].

Total potensiell energi i et to-dimensjonelt domene med en traksjonsfri sprekk som er omrisset av en konturkurve under kvasistatiske betingelser og fri for krefter på legeme kan skrives som [8]:

$$\Pi = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Gamma} T_i u_i d\Gamma \quad (1.17)$$

Π = Total potensiell energi

Endringen i potensiell energi for en virtuell sprekkvekst er:

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Omega} \frac{dW}{da} d\Omega - \int_{\Gamma} \left(T_i \frac{du_i}{da} + \frac{dT_i}{da} u_i \right) d\Gamma \quad (1.18)$$

da = Virtuell sprekkvekst

Ved å bruke divergensteoremet på ligning 1.18 og ved å stryke termer som blir null kommer en frem til [8]:

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma} W dy - T \frac{du}{dx} ds \quad (1.19)$$

En ser da at ligning 1.19 er lik ligning 1.13. Så for et lineær-elastisk materiale er:

$$J = G \quad (1.20)$$

1.2.3 J i ikke-lineær analyse

En potenslov kan uttrykke den plastiske sammenhengen mellom spenning og tøyning i et ikke-lineært materiale [?]:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1.21)$$

σ_0 : Flytespenning

ε : $\frac{\sigma_0}{E}$

α : Dimensjonsløs konstant avhengig av materialet

n : TøyningsfastningsekspONENT

Ligning ?? blir kalt Ramberg-Osgood-ligningen og er gunstig til kurvetilpassing for strekk- og tøyningdata. Rice og Rosengren [9] og Hutchinson [10] tok utgangspunkt i denne ligningen og kom frem til at spenninger og tøyninger ved sprekkspissen kunne uttrykkes ved J . Dette uttrykket kalles HRR-feltet:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \bar{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (1.23)$$

I_n : Integrasjonskonstant avhengig av n og spenningstilstand

$\bar{\sigma}_{ij}$: Dimensjonsløsfunksjon av θ , n og spenningstilstand

$\bar{\varepsilon}_{ij}$: Dimensjonsløsfunksjon av θ , n og spenningstilstand

Verdier for I_n , $\bar{\sigma}_{ij}$ og $\bar{\varepsilon}_{ij}$ finnes i litteraturen, blant annet i “Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material” av J.W. Hutchinson, 1968 [10].

HRR-feltet gir, i likhet med LEFM, singularitet når r går mot null. HRR er derfor ikke gyldig når feltet er nærmere sprekkspissen enn to ganger CTOD [7].

1.2.4 Integralsamspillmetoden

Integralsamspillmetoden er en metode for å hente ut spenningsintensitetsfaktorene ved å bruke J -integralet. En bruker tilleggsfelt og legger disse på de faktiske feltene for å oppfylle randbetingelsene. Det faktiske feltet refereres til som *tilstand 1* og tilleggsfeltet refereres til som *tilstand 2*. Denne utledningen av integralsamspillmetoden er hentet fra [11].

Koordinatene er lokale sprekkspisskoordinater med x_1 -aksen parallell med sprekkretningen. For mikset-mode i linær-elastiske tilfeller er sammenhengen mellom J -integralet og spenningsintensitetsfaktorene gitt som:

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (1.24)$$

E^* : Effektiv E-modul

$$E^* = \begin{cases} E & \text{for plan spenning} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{for plan tøyning} \end{cases}$$

J -integralet for de to tilstandene er:

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{ij} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (1.25)$$

Dette kan skrives om til:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (1.26)$$

$I^{(1,2)}$ i ligning 1.26 er samspillsintegralet:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (1.27)$$

$W^{(1,2)}$: Samspillstøyningsenergien

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$$

Ligning 1.24 for begge tilstander:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (1.28)$$

Kombinerer så ligning 1.26 og 1.24:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (1.29)$$

En velger da tilstand 2 som rene mode I asymptotiske felt med $K_I^{(2)} = 0$. $K_{II}^{(2)} = 1$ gir da spenningsintensitetsfaktoren for mode I til tilstand 1 (det faktiske feltet) gjennom samspillsintegralet:

$$K_I^{(1)} = \frac{2}{E^*} I^{1,modeI} \quad (1.30)$$

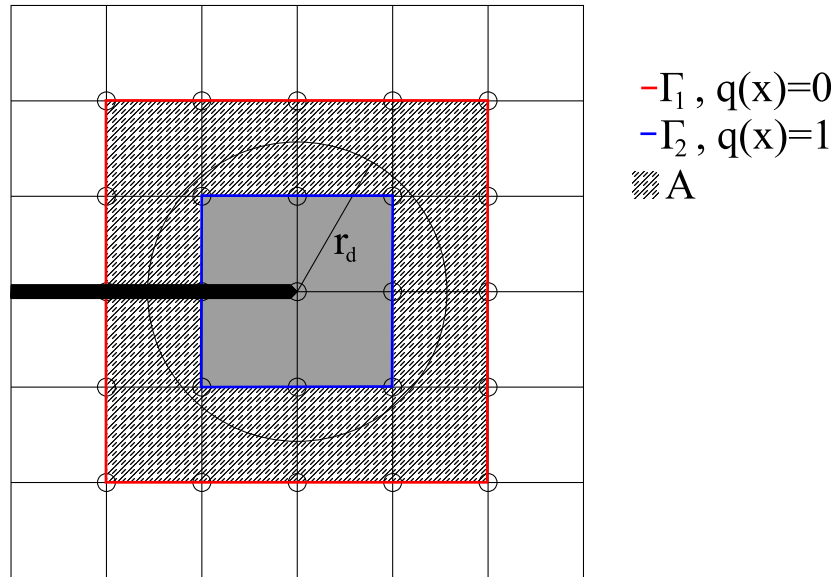
På samme vis kan en finne spenningsintensitetsfaktoren for mode 2; setter $K_I^{(2)} = 0$ og $K_{II}^{(2)} = 1$ og får:

$$K_{II}^{(1)} = \frac{2}{E^*} I^{1,modeII} \quad (1.31)$$

I FE-programvare skrives samspillsintegralet om til domeneform siden et konturintegral ikke egner seg for numeriske utregninger. Domenet er et areal, A , mellom en indre og en ytre sti. Størrelsen på A defineres gjerne som et sett som inneholder alle elementer som har en node innenfor en radius, r_d , om sprekkspissen. Konturintegralet multipliseres med en vektfunksjon, $q(x)$. Vektfunksjonen har enhetsverdi på den indre stien og går til null på den ytre stien, dvs $q(x)$ går fra $q(x) = 1$ på Γ_1 til $q(x) = 0$ på Γ_2 . Vektfunksjonen interpoleres i elementene mellom stiene ved å bruke formfunksjonene til nodene. Samspillsintegralet på domeneform er:

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (1.32)$$

Figur ?? viser *areal-stien* om en sprekkspiss i et nett med kvadratiske elementer. I [11] settes r_d ved å finne den karakteristiske lengden, h_{lokal} , av elementet som er berørt av sprekkspissen. I to-dimensjonale analyser settes radiusen til; $r_d = 2\sqrt{h_{lokal}}$. Vektfunksjonen får verdien, $q(x) = 1$ for alle noder innenfor r_d og $q(x) = 0$ for alle noder som ligger inntil r_d på utsiden av sirkelen.



Figur 1.5: A i samspillsintegralet om en sprekkspiss

Den matematiske utledningen av samspillsintegralet bygger på at tilleggsfeltene for σ , ε og u er nøyaktige for ligningen i problemet. I FEA vil ligningene ikke kunne gies eksakt og for kurvede sprekker vil mode I og II asymptotiske felt for tilleggsfeltene også være approksimasjoner. Approksimasjonene er gode nok til å gi tilfredsstillende resultater i analyser.

1.3 Kohesive soner

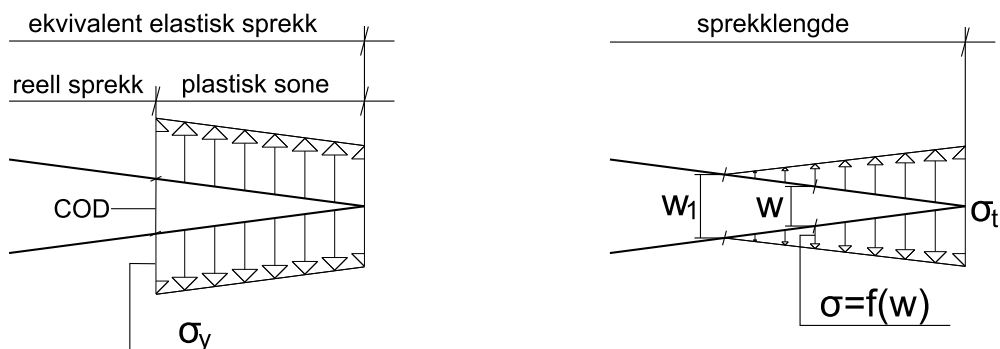
1.3.1 Bakgrunn

Analytiske løsninger basert på elastisk teori for sprekker gir singularitet i spenning- og tøyingsfeltet på sprekkespissen [8]. Singulariteten gir uendelig spenning og tøyning uendelig nær spissen. I realiteten er det ingen materialer som oppfører seg slik; materialet må derfor ha en plastisk sone rundt sprekkespissen. Denne sonen avgjør materialets styrke til å motstå sprekkevekst og evnen til å dissipere energi. En kohesiv sprekkemodell kan brukes til å ta hensyn til denne bruddprosessen.

Hovedkarakteristikken til en kohesiv sprekkemodell er fjerning av singulariteten ved sprekkespissen [8]. Spenningsintensitetsfaktoren må da være lik null for at sprekken skal ha en glatt spiss. I den kohesive sonen kalles denne tilstanden null-spenningintensitetsfaktortilstanden.

1.3.2 Kohesive modeller

Hillerborg m. fl. [12] introduserte sitt forslag for en kohesiv modell i 1976. Dette var en videreutvikling av Barenblatt- og Dugdalemodellen. Modellene er vist i figur ??.



Figur 1.6: Barenblatt-Dugdale-modell til venstre, Hillerborgmodell til høye

Dugdalemodellen antar en uniform traksjon som er lik flytespenningen i bruddprosessonen, mens Barenblattmodellen antar en ikke-uniform traksjon. Lengden på bruddprosessonen (plastisk sone i Barenblatt-Dugdalemodell) bestemmes ut fra de kohesive kreftene i materialet.

Hillerborg foreslo å modellere den kohesive kraften i bruddprosessonen som et energikriterie. Når en sprekke åpnes så reduseres spenningen i materialet ved økende sprekkeåpning og energi må absorberes for at sprekken skal propagere. Energien absorbert per enhetsprekkareal fra null til åpningen gav Hillerborg som:

$$G_c = \int_0^{w_1} \sigma(w) dw \quad (1.33)$$

G_c : Absorbert energi
 w_1 : Åpning ved brudd
 σ : Traksjon

En ser at spenningen om sprekkåpningen er bestemt av separasjonen av materialet i bruddprosessen. En slik formulering kalles en kohesiv lov. Kohesive lover brukes for å ta hensyn til endring i materialstyrke ved økende sprekkåpning. Siden materialer blir svakere etterhvert som en sprekk åpner seg, så har traksjonen sin maksimalverdi på sprekkspissen og den minste, oftest null, på punktet som har kritisk sprekkåpning [8]. Traksjonskurvene må velges ut i fra hvilket materiale en ser på, men arealet under kurven må være lik bruddenergien. Som et utgangspunkt i bestemmelse av maksimal traksjon kan en bruke maksimalspenning ved brudd i en rund strekkstav med skår [13]. En kan da bruke bruddenergien fra eksperimentet til å bestemme den kritiske åpningen. Videre må en bruke eksperimentresultatene for å tilpasse den kohesive loven til simuleringen.

1.3.3 Kohesiv sprekkvekst i numeriske metoder

Sonene som har traksjonsspenning i modellene i figur ?? er fiktive soner som er foran den fysiske sprekkspissen. For at den fysiske sprekkspissen skal være glatt, må spenningsintensitetsfaktoren forsvinne der den fiktive sonen starter [14]. Mode II-spenningintensitetsfaktoren er oftest neglisjerbar sammenlignet med mode I-spenningintensitetsfaktoren. En setter altså:

$$K_{I_{tip}} = 0 \quad (1.34)$$

$K_{I_{tip}}$: Mode I spenningsintensitetsfaktor

Denne betingelsen kan oppfylles gjennom superposisjon av to spenningsfelt; det singulære sprekkspisspenningsfeltet og det ikke-singulære sprekkoverflatetraksjonsfeltet [14]:

$$K_I^{ext} + K_I^{coh} = 0 \quad (1.35)$$

K_I^{ext} : Singulært sprekkspisspenningsfelt

K_I^{coh} : Ikke-singulært sprekkoverflatetraksjonsfelt

K_I^{ext} er da spenningsintensitetsfaktor som følge av ytre belastning og K_I^{coh} er en spenningsintensitetsfaktor som følge av kohesive krefter i bruddprosessen. I lineær-elastisk teori er K_I^{ext} erstattet med den kritiske spenningsintensitetsfaktoren, K_{Ic} , som er bruddseigheten til materialet. Null-spenningintensitetsfaktoren kan da skrives som [14]:

$$K_{I_{tip}} = K_I^{ext} + K_I^{coh} = 0 \quad (1.36)$$

$$K_I^{ext} = -K_I^{coh} = K_{Ic} \quad (1.37)$$

Den kohesive loven må derfor gi en bruddenergi som er lik den bruddenergien en kan regne ut ved å bruke forholdet mellom bruddseighet og E-modul.

Sprekkretningen bestemmes ved hjelp av spenningsintensitetsfaktorene for mode I og mode II:

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\frac{K_I}{K_{II}} + 8} \right) \quad (1.38)$$

θ : Sprekkretningen relativt til tangenten til sprekken på sprekkspissen

K_I : Mode I spenningsintensitetsfaktor

K_{II} : Mode II spenningsintensitetsfaktor

Denne utregningen må gjøres gjennom et domene integral. Spenningsintensitetsfaktorene bestemmes da gjennom integralsamspillsmetoden.

Alternativt kan singulariteten på sprekkspissen fjernes med å bruke et spenningstilstandskriterie. Null-spenningsintensitetsfaktoren forutsetter at spenningen sprekkspissen skal være endelig. En går ut i fra at spenningsprojeksjonen i normalretningen til sprekken, \mathbf{n} , er lik strekkfastheten til materialet [15]:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = f_t \quad (1.39)$$

\mathbf{n} : Spenningsprojeksjon i normalretning til sprekk

$\boldsymbol{\sigma}$: Spenning i sprekkspiss

f_t : Strekkfasthet til materialet

Sprekken er antas å gå i normalretningen til retningen til den maksimale hovedspenningen. f_t blir en grenseverdi for spenningsfeltet som gjør at en får en endelig spenning på sprekkspissen. f_t indikerer starten på den kohesive sonen [16]. Dette kriteriet forenkler utregningen ved at en slipper å gå via spenningintensitetsfaktorer og er dermed lettere å bruke direkte i numeriske metoder.

Kapittel 2

X-FEM

2.1 Introduksjon til X-FEM

X-FEM er en videreutvikling av elementmetoden. For å forstå X-FEM er det viktig å ha en grunnleggende forståelse av hvordan elementmetoden fungerer. XFEM er også basert på teorien rundt nettløse metoder. Denne seksjonen er basert på to bøker om X-FEM, hhv [8] og [2]. Andre kilder er spesifisert i teksten. I historiedelen under nevner vi noen publikasjoner som viser utviklingen av XFEM. Denne oversikten er selvfølgelig ikke komplett, men gir en indikasjon på hvem som introduserte hva og når de gjorde det.

2.2 Historie

The partition of unity finite element method (1996) [17]

Danner grunnlaget for PUFEM (partition of unity finite element method). Den globale løsningen gir et matematisk grunnlag for den lokale partisjon av enhet elementmetoden, senere kalt XFEM.

Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing(1999) [18]

Den første artikkelen som beskriver det som i dag kalles den utvidete elementmetoden (XFEM). For å beskrive sprekker i to dimensjoner har Belytschko og Black beriket elementmetoden med en diskontinuerlig berikningsfunksjon. Denne metoden gjorde det mulig å beskrive arbitrære sprekker, som ikke var avhengig av nettet.

A finite element method for crack growth without remeshing (1999)[3]

En forbedring av metoden til Belytschko og Black blir presentert av Möes et al. Metoden blir døpt XFEM. Nå er representasjonen av sprekker helt uavhengige av nettet. Berikningen består av diskontinuerlige funksjoner og nær sprekkespissen er den beriket med den asymptotiske løsningen (K_1, K_2).

An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics (1999) [19]

Doktorgradsavhandling av Dolbow som la grunnlaget for en rekke nyvinninger innenfor XFEM.

Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method (2000) [20]

Dolbow et al. presenterer lokale berikninger i elementmetoden for å beskrive arbitrære diskontinuiteter. Metoden blir demonstrert med en sprekke og sprekkevekst i to dimensjoner med Mindlin-Reissner plater. For å hente ut intensitetsfaktorer, blir løsningen av J-integralet på domeneform presentert.

An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact (2000) [11]

Dolbow m. fl. introduserte kontakt i XFEM.

Extended finite element method for three-dimensional crack modeling (2000) [21]

Sukumar et al. utvider XFEM til å kunne beskrive sprekker i tre dimensjoner.

Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method (2001) [22]

Nivåsett-metoden (LSM) blir koplet med XFEM. Nivåsett representerer sprekkenes geometri, og XFEM benyttes for å bestemme sprekkevæksten. Metoden er ideell for å representere sprekkevækt i tre dimensjoner.

Extended finite element method for cohesive crack growth (2001) [14]

Möes og Belytschko presenterer en metode for kohesiv sprekkevækt. Metoden innebærer at veksten til en kohesiv sone krever at spenningsintensitetsfaktorene, (SIF), på sprekkeuspissen blir lik null. Det blir gjort ved å dele SIFene i to, en del med SIF fra ytre last og en del med SIF fra kohesive krefter. Når summen av disse er null, vokser sprekken. Sprekkeorienteringen gies av et forhold mellom SIF for mode 1 og 2.

Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment (2003) [23]

Belytschko m. fl. introduserer dynamisk XFEM. De bruker en ny teknikk for behandling av elementer som inneholder sprekkeuspisser. Denne teknikken gjør at et element som inneholder en sprekkeuspiss kan ha en glatt overgang fra å være et delvis oppdelt element til et fullstendig oppdelt element.

An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method (2005) [24]

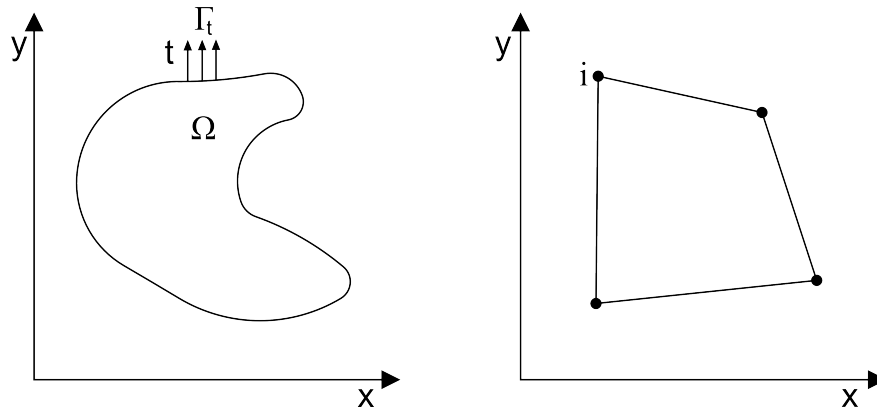
Réthoré m. fl. generaliserte dynamisk XFEM. De studerte Newmark-lignende algoritmer for problemer med kontinuerlige diskretiseringer og brukte dette til å finne en berikningsmetode som var stabil ved sprekkepropagering og sikret samtidig energikonservering i tidsavhengige problemer.

Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (XFEM) (2006) [25]

Menouillard m. fl. introduserte en konsentrert (diagonal) massematrise for berikede elementer som gjorde at en kunne bruke en ren eksplisitt formulering for XFEM. De viste at den formuleringen gav samme kritiske tidssteg for et XFEM-element som et element uten utvidede frihetsgrader.

2.3 FEM

Vi antar at leseren er kjent med elementmetoden. Her blir det gitt en kort beskrivelse av elementmetoden for å hjelpe leseren med og se sammenhenger mellom de ulike metodene vi går igjennom.



Figur 2.1: Et tilfeldig område Ω (t.v.) og et firesidet element Ω_e (t.h)

Gitt et domene Ω med et ukjent felt. Når man skal analysere et domene Ω deler man det inn i geometriske underdomener Ω_e , kalt elementer. Samlingen av elementer danner et nett. Oppdelingen av domenet har denne egenskapen:

$$\Omega = \cup_{e=1}^{N_e} \Omega_e \quad (2.1)$$

N_e : antall elementer i domenet (Ω)

Det ukjente feltet blir diskretisert på elementnivå med enkle funksjoner. Disse funksjonene består av såkalte formfunksjoner, typisk polynomer, og ukjente koeffisienter kalt frihetsgrader. Disse gir tilnæringsfunksjonen for et element:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i^{N_n} \sum_{\alpha} d_i^{\alpha} \varphi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

\mathbf{x} : Vektorposisjon

N_n : Antall moder i element Ω_e

φ_i^{α} : Formfunksjon i retning α for node i

d_i^{α} : Forskyvningsfrihetsgrad i retning α for node i

Formfunksjonene er definert i et element, og har den egenskapen at de er lik én i den noden de tilhører og er lik null i de andre nodene i elementet. Summen av formfunksjonene vil også være lik en over hele elementet.

For at metoden skal være gyldig må ligning (2.2) være i stand til å kunne representere stivlegememoder og konstant tøyning over domenet for alle elementer. Kontinuitet (for tilnærmingen) over domenet får man ved å påtvinge at de ulike frihetsgradene i en node har lik verdi for de tilknyttede elementene.

For hvert element er stivhetsmatrisen, K_{ij}^e , og kreftene f_{ij}^e .

$$K_{i\alpha, j\beta}^e = \int_{\Omega_e} \varepsilon(\varphi_i^\alpha) : \mathbf{C} : \varepsilon(\varphi_j^\beta) d\Omega \quad (2.3)$$

$$f_{i\alpha}^e = \int_{\Gamma_t \cap \delta\Omega_e} \mathbf{t} \cdot \varphi_i^\alpha d\Gamma \quad (2.4)$$

2.3.1 Utledning av et isoparametrisk element

Approksimasjonsfunksjonen for et firkantet element er gitt som:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \quad (2.5)$$

\mathbf{N}_i : Matrise av formfunksjoner

\mathbf{d}_i : Frihetsgrader i node i

Tøyningsfeltet er definert over et element som:

$$\varepsilon = \sum_i^{N_n} \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i \quad (2.6)$$

\mathbf{B} er spenning-forskyvningsmatrisen, som er satt sammen av deriverte formfunksjoner.

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} : \text{For et todimensjonalt element} \quad (2.7)$$

Stivhetsmatrisen og nodalekrefter for et elementet er:

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} t dV \quad (2.8)$$

$$\mathbf{r}_e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV + \int \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int \mathbf{B} \mathbf{C} \varepsilon_0 dV - \int \mathbf{B}^T \sigma_0 dV \quad (2.9)$$

\mathbf{C} : Materialets spenning-tøyningsmatrise ($\sigma = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_i$).

\mathbf{t} : (overflatens)traksjonsvektor

t : Elementets tykkelse

ε_0 : Initielle tøyninger

\mathbf{F} : Kroppskrefter

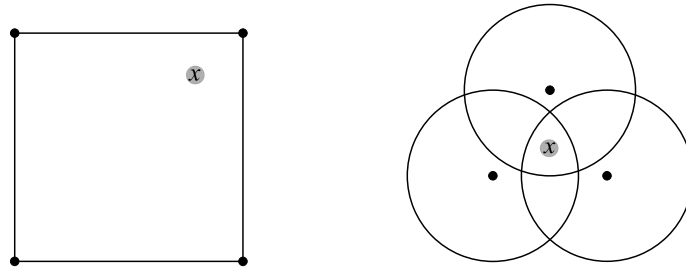
σ_0 : Initielle spenninger

2.4 Maskeløse metoder

I dag finnes det en rekke ulike maskeløse metoder. En enkel gjennomgang av teorien bak disse metodene gir en god introduksjon til hvordan berikningsfunksjoner fungerer. Noen av de mest kjente maskeløse metodene er:

- Difuse elementer
- Element Free Galerkin method (EFG)
- Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)
- h - p cloud method

I de maskeløse metodene har man fjernet elementer til fordel for punkter der man definerer funksjoner. Rundt punktene danner funksjonene et influensområde. Influensområdet (i to dimensjoner) er ofte definert som en sirkel eller et rektangel. Utenfor, og på grensen av området, er funksjonene lik null. Videre kommer vi til å kalle dette for en understøtte.



Figur 2.2: x er i et element (t.v.), tre støtter dekker x (t.h.)

Interpolasjonsfunksjonene understøttet av i er gitt som φ_i^α , der $\alpha = 1, \dots, N_f(i)$. d_i^α angir samsvarende frihetsgrader. Tilnærmingen, $u(x)$, ved punkt x er gitt i (2.10).

$$u(x) = \sum_{i \in N_s(\mathbf{x})} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} d_i^\alpha \varphi_i^\alpha(x) \quad (2.10)$$

N_s : Støtter som inneholder punktet x

$N_f(i)$: Formfunksjoner ved støtte i

For å sikre at metoden skal konvergere må funksjonene som inngår i (2.10) kunne representere alle stivlegeme-moder samt konstant tøyning i/på domenet.

Når interpolasjonsfunksjonene er bygget, kan man legge til berikningsfunksjoner. Berikningsfunksjoner er i teorien en måte å øke graden av kompletthet man kan oppnå (med approksimasjonen). I praksis vil en berikningsfunksjon representere en gitt forskyvningsmode, $F(\mathbf{x})\mathbf{e}_x$, på et underdomene $\Omega_F \subset \Omega$.

Det er i grunnen to måter å berike approksimasjonene, indre- og ytre berikning. Vi tar kun for oss metoden som blir beskrevet som ytre berikning[26]. Approksimasjonen med

ytre berikning er:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_s(\mathbf{x})} d_i^\alpha \varphi_i^\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{i \in N_s(\mathbf{x}) \cap N_F} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} b_i^\alpha \varphi_i^\alpha F(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

N_F : Alle understøtterstøtter som krysser underdomenet, Ω_F

b_i^α : Frihetsgrader innført ved berikning

$\varphi_i^\alpha(\mathbf{x})F(\mathbf{x})$: Beriket interpolasjonsfunksjon

Dersom man setter alle frihetsgrader, d_i^α , lik null og ordner uttrykket (2.11) får vi:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i \in N_s(\mathbf{x}) \cap N_F} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} b_i^\alpha \varphi_i^\alpha \right) F(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

Siden formfunksjonene, φ_i^α , kan representere alle stivlegememoder, kan vi velge frihetsgradene, b_i^α , i (2.12) på en slik måte at faktoren foran $F(\mathbf{x})$ er i stivlegememoden \mathbf{e}_x . Fra dette ser vi at $F(\mathbf{x})\mathbf{e}_x$ kan bli representert på underdomenet Ω_F med (2.11).

I forhold til den vanlige elementmetoden er det både fordeler og ulemper:

- + I elementmetodeanalyser må man definere et elementnett, noe som kan skape problemer ved komplekse geometrier. De maskeløse metodene trenger kun en sky av punkter.
- + Både approksimasjonen og berikningen er veldig fleksibel
- + Man kan definere glatte approksimasjonsfelt.
- I en arbitrær punktsky er det ingen åpenbare valg for plasseringen av integrasjonspunkter. Dette er ikke et problem i elementmetoden hvor elementene definerer hvor punktene havner.
- Brukeren må selv velge størrelsen på influensområdene.
- Randbetingelser på Dirichlet-form er vanskelig å påtvinge

2.5 Oppdeling av enhet

Gitt sett av n funksjoner, f_i , definert i et gitt område Ω (2.13). Summen av disse funksjonene er innenfor definisjonsområdet alltid lik én. Et sett funksjoner som oppfyller dette blir kalt for en oppdeling av enhet.

$$\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.13)$$

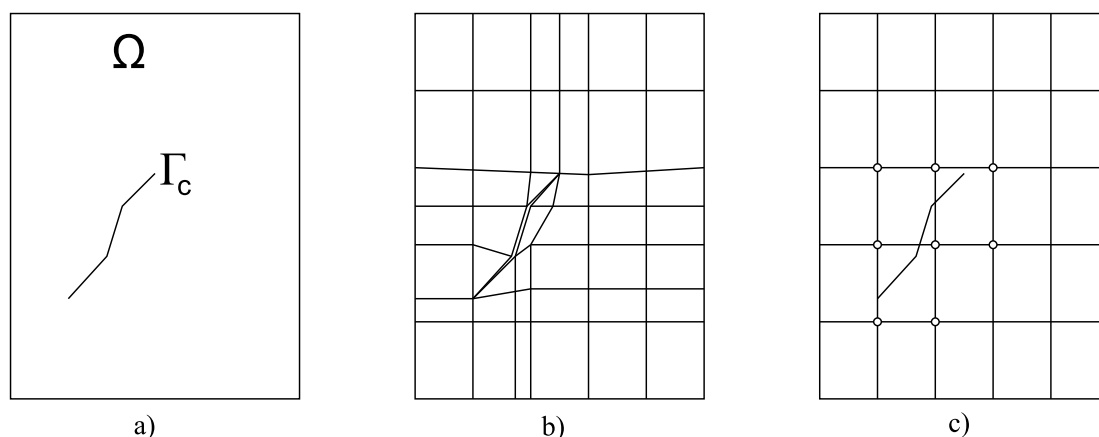
Et sett approksimasjonsfunksjoner som er en oppdeling av enhet, $f_i(\mathbf{x})$, kan representere en arbitrær funksjon, $F(\mathbf{x})$, eksakt. Dette tilsvarer at reproduseringsvilkåret er oppfylt:

$$\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

2.6 X-FEM teori

X-FEM er som den vanlige elementmetoden, men har også en mulighet for å modellere både sterke og svake diskontinuiteter. Diskontinuitetene representeres ved hjelp av berikningsfunksjoner. Utviklingen av disse funksjonene er påvirket av arbeidet gjort rundt de maskeløse metodene EFG og h-p clouds. I likhet med de nevnte maskeløse metodene benytter X-FEM seg av ytre berikning, men ikke på et globalt nivå. Berikningen innføres lokalt. Dette innebærer at berikning kun er nødvendig ved diskontinuiteter (som for eksempel en sprekke), noe som sparer regnekraft i forhold til den globale metoden.[18]

2.6.1 Approksimasjonsfunksjonen i X-FEM



Figur 2.3: Ulike elementnett av området, Ω , definert i a) med en sprekke Γ_c . b) viser et nett tilpasset sprekken, Γ_c . c) viser et rektangulært nett med berikede noder

Med utgangspunkt i området definert i figur 2.3 a) skal vi vise hvordan et klassisk nett kan berikes for å kunne representere diskontinuiteten som oppstår, uten å måtte tilpasse nettet rundt sprekken (figur 2.3 b)). Dette kan gjøres med X-FEM ved å legge til såkalte berikninger.

Berikninger kan introduseres i elementmetoden som følge av en egenskap som først ble omtalt på midten av 90-tallet[17]. Denne egenskapen kalles oppdeling av enhet, og er forklart i et tidligere kapittel. Oppdeling av enhet gjør det mulig å innføre globale berikningsfunksjoner på et lokalt nivå i elementmetodens approksimasjonsfunksjon[20]. I praksis utføres dette ved at den “vanlige” løsningen tilføres ekstra frihetsgrader i samsvar med globale berikningsfunksjoner i interesseområder (se figur 2.3).

Gitt et tilfeldig punkt, x , definert innenfor og på et område, Ω , med elementer med n noder. I området er det også definert en diskontinuitet Γ_c . I XFEM får vi følgende approksimasjonsfunksjon[18]:

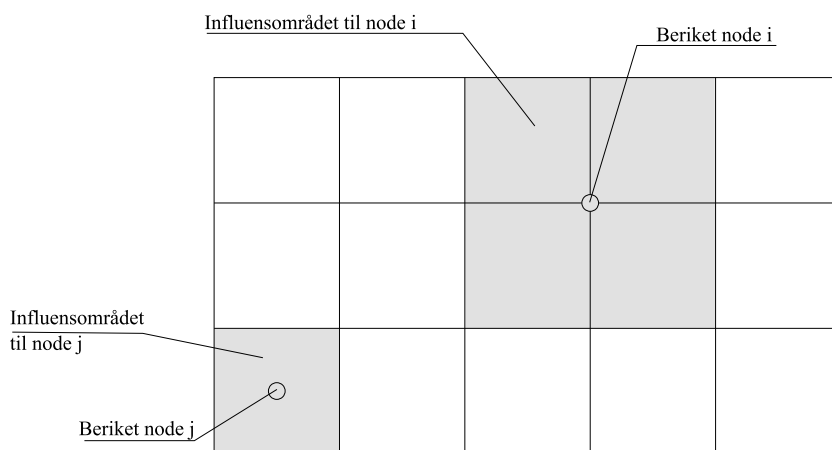
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{FE} + \mathbf{u}^{enr} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i}_{\text{klassisk elementmetode}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j \mathbf{b}_j F(\mathbf{x})}_{\text{XFEM tillegg}} \quad (2.15)$$

$F(\mathbf{x})$: Berikningsfunksjon

\mathbf{b}_j : Frihetsgrad introdusert i beriket node

Rundt de berikede nodene vil berikningsfunksjonen, $F(\mathbf{x})$, ha et influensområde. Influensområdet er definert av elementene som inneholder den berikede noden (se figur 2.4). På denne måten kan man se på (2.15) som en spesiell versjon av approksimasjonen i de maskeløse metodene (2.10) slik at [2]:

- punktskyen er nodene i nettet
- influensområdet til hver node er settet med elementer som er tilknyttet noden



Figur 2.4: Viser to berikede noder og deres influensområde.

Valget av berikningsfunksjonen, $F(\mathbf{x})$, er som oftest en analytisk løsning av diskontinuiteten man ønsker å beskrive. Hovedsakelig er målene med valget av berikningsfunksjon som følger:

1. Beskrive det singulære feltet rundt sprekspissen (analytisk løsning av spenningsintensitetsfaktoren(e))
2. Kontinuitet i forskyvning mellom elementer
3. Uavhengige tøyingsfelt på hver side av sprekken
4. Egenskaper relatert til en spesifikk diskontinuitet

For å kunne gi en god representasjon av f.eks en sprekk med X-FEM er det nødvendig med flere berikningsfunksjoner. Typisk trenger man minst to ekstra frihetsgrader, og dermed må approksimasjonsfunksjonen utvides.

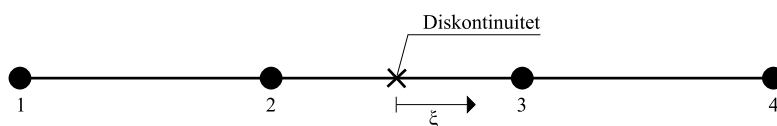
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{FE} + \mathbf{u}^{enr} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i + \sum_{k=1}^{np} \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j \mathbf{b}_j^k F^k(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

Ligning (2.16) viser X-FEM approksimasjonen utvidet til np berikninger. Et typisk eksempel på en løsning med flere berikninger er en kombinasjon av den analytiske løsningen for spenningsfeltet rundt sprekkspissen og diskontinuerlig funksjon. Der berikningsfunksjonene beskriver spenningsfeltet som følge av en sprekk, den diskontinuerlige funksjonen angir posisjonen og størrelsen på diskontinuiteten.

2.7 Diskontinuiteter i X-FEM

I dette avsnittet går vi gjennom hvordan man kan introdusere diskontinuiteter i den utvidede elementmetoden.

2.7.1 En-dimensjonalt element - stav



Figur 2.5: Tre stavelementer med en diskontinuitet mellom node 2 og 3

Fra elementmetoden får vi følgende approksimasjonsfunksjon:

$$u^{FE} = d_1 N_1 + d_2 N_2 + d_3 N_3 + d_4 N_4$$

For å kunne beskrive diskontinuiteten må man legge til en berikningsfunksjon. En måte å gjøre dette på er ved hjelp av en stegfunksjon, kalt “Heaviside”-funksjon¹.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \xi < 0 \\ -1 & \text{for } \xi > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Med berikning får vi følgende approksimasjon:

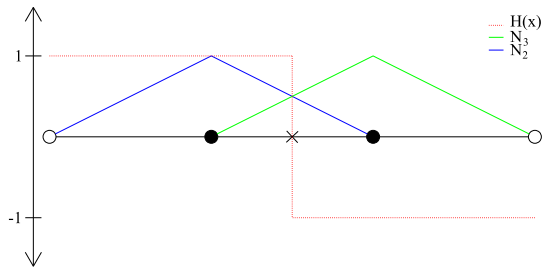
$$u = \underbrace{d_1 N_1 + d_2 N_2 + d_3 N_3 + d_4 N_4}_{\text{klassisk elementmetode}} + \underbrace{b_2 N_2 H + b_3 N_3 H}_{\text{berikning}} \quad (2.18)$$

Som (2.18) antyder, blir både node to og tre beriket med en stegfunksjon. Som en generell regel må noder berikes dersom (nodens) influensområde inneholder en diskontinuitet. I dette tilfellet kutter diskontinuiteten influensområdet til node to og tre. Dersom diskontinuiteten befinner seg på en node trenger man kun å berike den noden. Dette er et spesialtilfelle som kun gjelder for en-dimensjonale tilfeller[2].

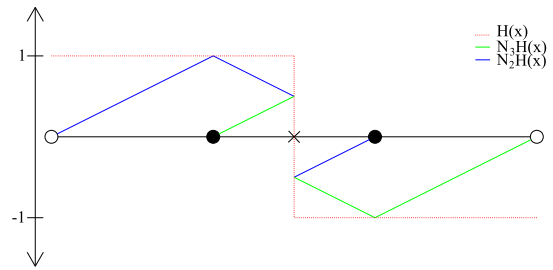
2.7.2 To-dimensjonale elementer

Figur 2.8 viser to nett med fire elementer. I a) har det blitt satt inn to noder for å representere en sprekke. Ved hjelp av berikningsfunksjoner kan man gjøre de to konfigurasjonene ekvivalente.

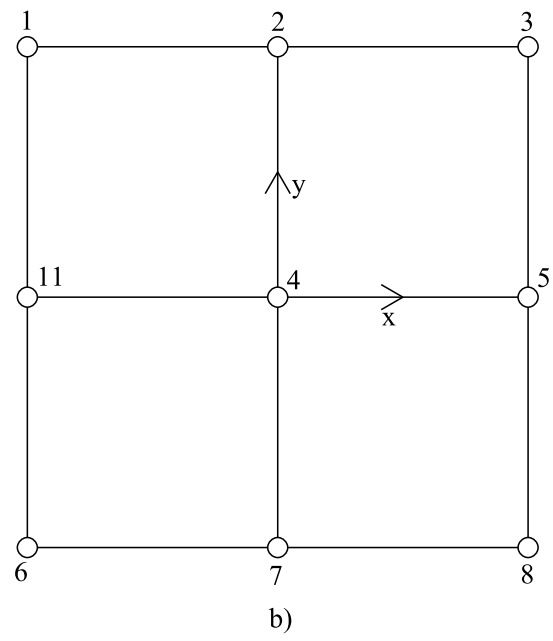
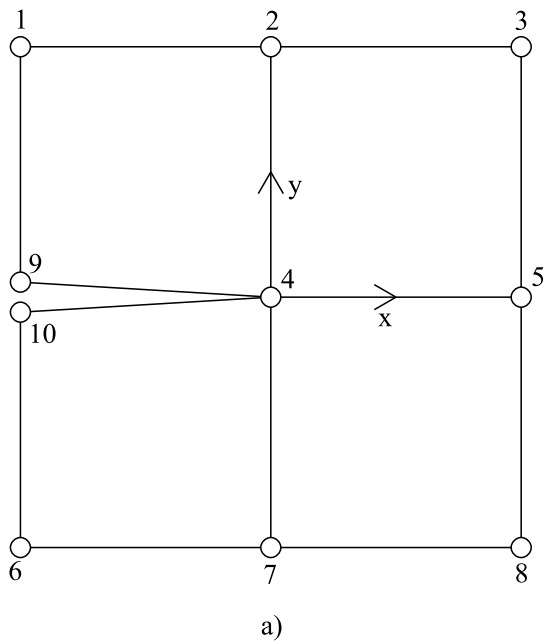
¹Den vanlige definisjonen av Heaviside-funksjonen varierer mellom 0 og 1



Figur 2.6: Tradisjonelle formfunksjoner, node 2 og 3



Figur 2.7: Berikede formfunksjoner, node 2 og 3



Figur 2.8: Elementnett med (a) og uten (b) dobbelnode[3]

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{10} \mathbf{d}_i N_i \quad (2.19)$$

Ligning (2.19) viser approksimasjonen ved en vanlig elementmetode tilnærming. Ved å definere gjennomsnittlig forskyvning, $\bar{\mathbf{d}}$, og hoppet i forskyvning, \mathbf{b} , kan (2.19) skrives om til å representere et nett uten dobbel node:

$$\bar{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}_9 + \mathbf{d}_{10}}{2} \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{d}_9 - \mathbf{d}_{10}}{2} \quad (2.20)$$

Omskrevet for å utrykke frihetsgradene:

$$\mathbf{d}_9 = \bar{\mathbf{d}} + \mathbf{b} \quad \mathbf{d}_{10} = \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{b} \quad (2.21)$$

Setter dette inn i approksimasjonsfunksjonen og får:

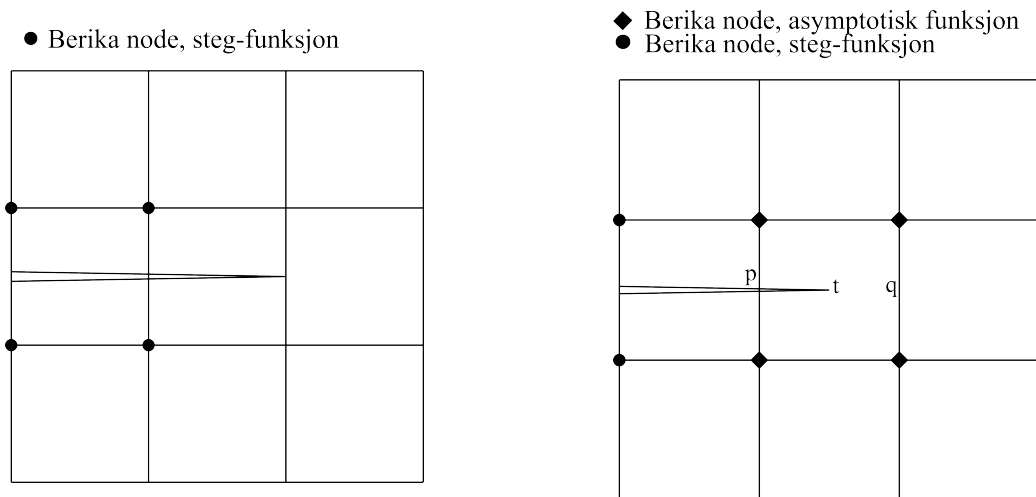
$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{d}_i N_i + \bar{\mathbf{d}}(N_9 + N_{10}) + \mathbf{b}(N_9 + N_{10})H(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

$$H(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{for } y < 0 \\ 1 & \text{for } y > 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Formfunksjonen til node elleve, N_{11} , i figur 2.8 b) er lik summen av N_9 og N_{10} . Dette følger av at formfunksjoner er oppdelinger av enhet. Dermed kan (2.22) skrives om:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\sum_{i=1}^8 \mathbf{d}_i N_i}_{\text{standard elementmetode}} + \mathbf{d}_{11} N_{11} + \underbrace{\mathbf{b} N_{11} H(\mathbf{x})}_{\text{berikning}} \quad (2.24)$$

Det er verdt å merke seg at de to første leddene i (2.24) tilsvarer elementmetode approksimasjonen for nettet i figur 2.8 b). Utledningen viser at en diskontinuitet representert med doble noder i elementmetoden er ekvivalent til en beriket løsning med en enkelt node.



Figur 2.9: Nett med en diskontinuitet som går gjennom to elementer

Figur 2.10: Nett der diskontinuiteten stopper midt i et element

Videre ser vi på et nett som vist på figur 2.9 og 2.10, der diskontinuiteten ikke følger kanten på elementet. På figur 2.9 er understøttene fullstendig kuttet av diskontinuiteten (merket). Her kan nodene berikes med en stegfunksjon, $H(x)$, for å representere diskontinuiteten. Stegfunksjonen har verdien 1 eller -1 avhengig av hvilken side av diskontinuiteten man er på. Berikede noder er merket med en sirkel.

I figur 2.10 stopper diskontinuiteten midt i et element. I dette tilfellet kan man ikke kun bruke stegfunksjoner som berikning. Med en stegfunksjon vil diskontinuiteten eksistere gjennom hele elementet (tilsvarende figur 2.9).

For å representere spissen korrekt, benyttes det andre berikningsfunksjoner i elementet som inneholder spissen (merket). Disse funksjonene er diskontinuerlige til og med punkt

t, og kontinuerlige for resten av elementet. I typiske problemer (elastiske) er disse funksjonene asymptotiske forskyvningsmoder.

Det er også mulig å bruke andre former for berikning i området rundt sprekspissen avhengig av hvilke egenskaper man skal modellere. Blant annet kohesive soner og ikke-lineære effekter har blitt implementert[14] [?]. Til felles har de ulike berikningsfunksjonene at de er diskontinuerlige i “sprekken” (punkt p til t) og kontinuerlige over resten av elementet (t til q).

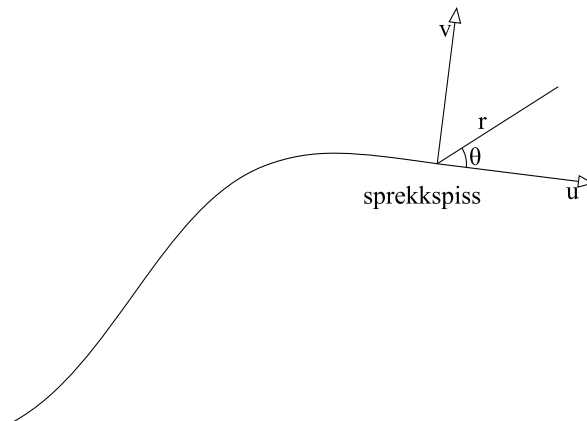
2.7.3 Berikningsfunksjoner

En kort gjennomgang av tradisjonelle berikningsfunksjoner i X-FEM, allerede beskrevet i en av de første artikkelene om metoden[3].

Nær-sprekkspiss berikning

I et element med en sprekkspiss (elastisk) er berikningsfunksjonene, $F_n^l(\mathbf{x})$, (2.25). Spissen defineres med et lokalt koordinatsystem gitt i polare koordinater (r, θ) , som definert i figur 2.11. Det er kun $F_n^1 = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ som er diskontinuerlig over sprekken[3].

$$\{F_n^l(\mathbf{x})\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (2.25)$$



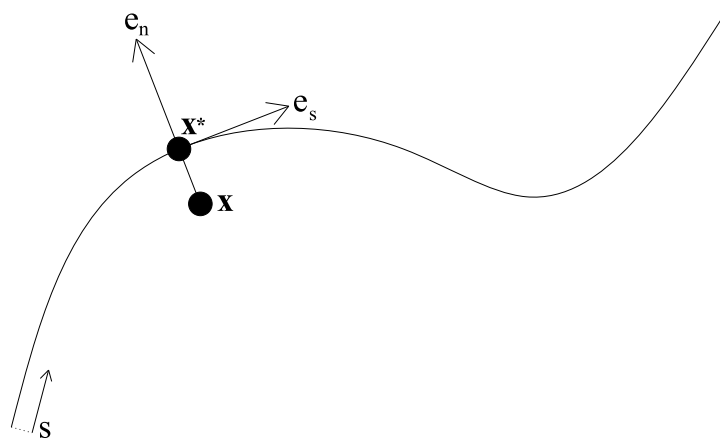
Figur 2.11: Lokalt koordinatsystem i sprekkspiss

Steg-funksjon

Stegfunksjonen, $H(\mathbf{x})$, er definert som følger:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & \text{Ene siden av sprekken} \\ -1 & \text{Andre siden av sprekken} \\ \text{n/a} & \text{Diskontinuerlig på sprekken} \end{cases} \quad (2.26)$$

Sprekken betraktes som en parametrisert kurve og er gitt av en buet koordinat s , som starter i en av sprekkepunktene (se figur 2.12).



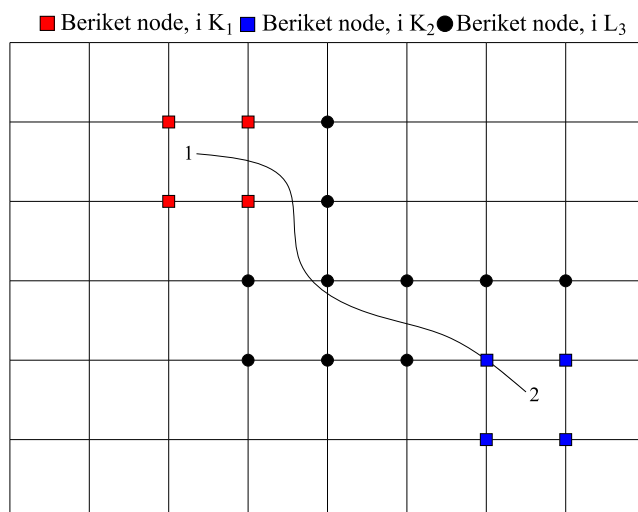
Figur 2.12: Normal og tangentvektorer på en sprekke

Gitt et punkt \mathbf{x} i/på domenet, \mathbf{x}^* er det nærmeste punktet på sprekken fra \mathbf{x} (se figur 2.12). e_n og e_s danner henholdsvis normal- og tangentvektoren til \mathbf{x}^* , vektorenes kryssprodukt danner vektoren ut av planet. $H(\mathbf{x})$ er da gitt som fortegnet av det skalare produktet $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n$. Denne metoden for å beregne funksjonen, $H(\mathbf{x})$, er ganske vanlig, men også tungvindt². En mer effektiv måte er å representere sprekken ved hjelp av nivåsett². Blant annet gjør nivåsett det lettere å evaluere r og θ , som er nødvendig for beregning av (2.25).

²Først introdusert i XFEM av Stolarska et al i 2001 [22]

2.7.4 Modellering av en arbitrær sprekk

Vi har gått gjennom den grunnleggende teorien for å modellere diskontinuiteter i X-FEM og effekten av berikningsfunksjoner. Nå viser vi hvordan en arbitrær sprekk kan modelleres i XFEM.



Figur 2.13: Diskontinuitet (sprekk) i et homogent nett, 1 og 2 markerer sprekkspissene

Med en sprekk som vist på figur 2.13 får vi følgende approksimasjonsfunksjon [3]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in I} \mathbf{d}_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in L} \mathbf{b}_i N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \\
 & + \sum_{i \in K_1} N_i(\mathbf{x}) \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{i,1}^l F_1^l(\mathbf{x}) \right) + \sum_{i \in K_2} N_i(\mathbf{x}) \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_{i,2}^l F_2^l(\mathbf{x}) \right)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

- N_i er formfunksjonen, ved node i .
- Alle noder i nettet tilhører settet I .
- $L \subset I$ utgjør nodene der et element blir “kuttet” av sprekk. \mathbf{b}_i er tilhørende frihetsgrad, på vektorform. Nodene i settet blir beriket med en stegfunksjon.
- $K_n \subset I$ utgjør nodene i elementet med en sprekkspiss, n . Nodene blir beriket med asymptotiske funksjoner, $F_n^l(\mathbf{x})$. $\mathbf{c}_{i,n}^l$ angir tilhørende frihetsgrader(vektor).

Denne måten for berikning rundt en sprekk er den samme som ble beskrevet av Mös m. fl. i 1999[3]. Siden den tid har det blitt foreslått en rekke forbedringer. Blant annet er det ingenting som utelukker å berike noder som ikke inneholder en diskontinuitet i influensområdet [2].

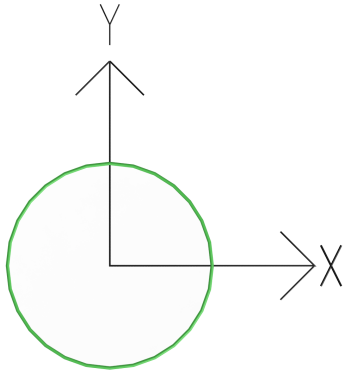
Initielt så var X-FEM utviklet til en- og to-dimensjonale tilfeller. I år 2000 ble metoden utvidet til tredimensjoner[21]. Denne utvidelsen var relativt direkte, og benytter seg av

samme prinsipper som i to dimensjoner. Berikningen er (som før) avhengig av sprekkens posisjon i henhold til nodens understøtte³. Sprekkens sideflate er beskrevet med en overflate og sprekkfronten er beskrevet med en (eller flere) kurve(r). Berikningsfunksjonene ved spissen er som i (2.25).

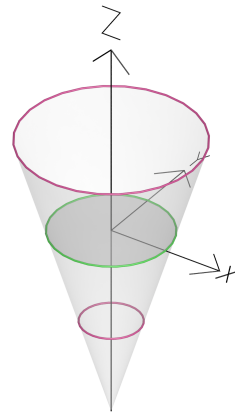
³I tre-dimensjoner er understøttene volumetriske

2.8 Nivåsettmetoden

Nivåsettmetoden er et verktøy, først introdusert av Osher og Sethian på slutten av 80-tallet, laget for å kunne følge en grenseflate der geometrien endres over tid. Inicialt ble metoden demonstrert for flammepropagering og krystallvekst. Tidlig på 2000-tallet ble nivåsett-metoden innført i X-FEM-rammeverket for å beskrive geometrien til en sprekk- og sprekkspiss, både i to og tre dimensjoner[22] [27].



Figur 2.14: Kurve i to dimensjoner danner grenseflaten

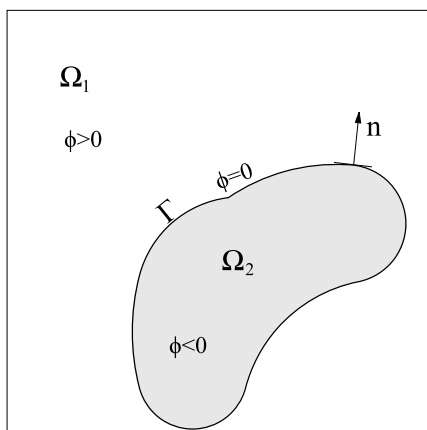


Figur 2.15: Nivåsett-funksjonen, grenseflaten er dannet der xy-planet krysser den kjegleformede overflaten

Gitt en kurve som vist på figur 2.14. Med nivåsett-metoden lager man en kjegleformet overflate som krysser xy-planet nøyaktig der kurven er istedenfor å følge selve kurven. Den grå overflaten på figur 2.15 kalles en nivåsett funksjon. Funksjonen tar et hvilket som helst punkt i planet og gir tilbake punktets høyde.

Grenseflaten representeres altså med et nivåsett som er en dimensjon høyere. I et to-dimensjonalt tilfelle, som i figur 2.15, endrer man grenseflatens geometri ved å flytte overflaten i forhold til xy-planet.

2.8.1 Nivåsettets egenskaper



Figur 2.16: Eksempel på et to-dimensjonalt nivåsett

Figur 2.16 viser to underdomener av Ω som deler en grenseflate Γ . Grenseflaten danner null-nivåsettet av nivåsett-funksjonen $\phi(\mathbf{x})$:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ < 0 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

En vanlig definisjon av nivåsettfunksjonen, $\phi(\mathbf{x})$, er gitt som en fortegnstestet avstand fra \mathbf{x} til Γ . Avstanden er angitt langs normalen til Γ .

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} d & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ -d & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Denne funksjonen oppfyller enhetsegenskapen⁴:

$$\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1 \quad (2.30)$$

Med nivåsettmetoden er det enkelt å finne ytterligere informasjon om grenseflaten. Den lokale normalvektoren \mathbf{n} og krumming \mathbf{k} er gitt som:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{\|\nabla\phi(\mathbf{x})\|} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{k} = \nabla \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{\|\nabla\phi(\mathbf{x})\|} \quad (2.32)$$

⁴Det er verdt å merke seg at dette ikke gjelder for alle nivåsett-funksjoner

Nivåsett kan diskretiseres på elementnivå. Nodale verdier av nivåsettet, $\phi_i = \phi_i \mathbf{x}_i$, og formfunksjoner N_i gir følgende approksimasjon:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i N_i(\mathbf{x}) \quad (2.33)$$

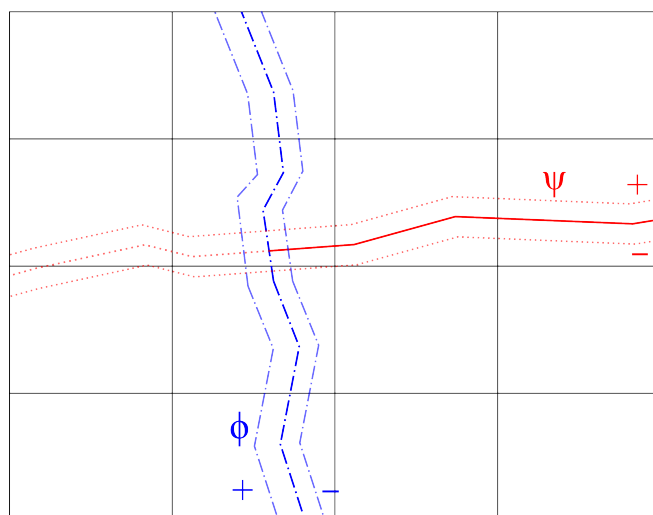
Videre kan man derivere formfunksjonene for å uttrykke den deriverte. Man trenger altså ikke å derivere nivåsettfunksjonen. Den deriverte (approksimasjonen) i retning j uttrykkes som:

$$\phi_{,j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i N_{i,j}(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

Det finnes også effektive og raske algoritmer for å oppdatere ϕ når null-nivået beveger seg som en funksjon av tid[2]. De nevnte egenskapene gjør nivåsett gunstige for bruk med X-FEM.

2.8.2 Nivåsett for sprekker

Generelt sett er det ikke nok med et nivåsett for å beskrive sprekkepropagering. Det er nemlig ikke nok å kun beskrive sprekken, man må også ha informasjon om sprekke spissen. Nullnivået av et nivåsett kan representere en geometri av ko-dimensjon 1; en kurve i et to-dimensjonalt nett eller en flate i et tre-dimensjonalt nett. En sprekke spiss er et objekt av ko-dimensjon 2 og kan representeres med to nivåsett[28].

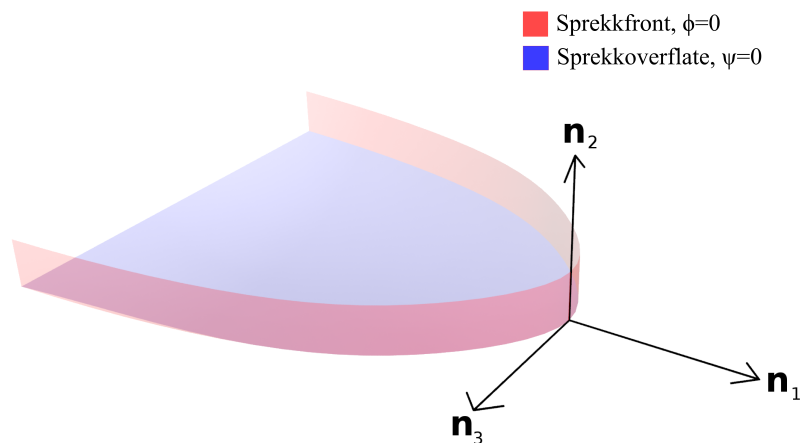


Figur 2.17: To nivåsett som definerer sprekke spissen der de krysser hverandre

Fra et annet synspunkt, så deler nivåsett rommet i to deler, noe en sprekke kun gjør når fullstendig brudd finner sted. Dermed trenger man flere nivåsett for å beskrive en sprekke. Sprekke spissen blir dannet der nullnivåene av to nivåsett krysser hverandre (se figur 2.17). Et av nivåsettene er assosiert med selve sprekke geometrien (ψ) og det andre krysser ψ der sprekke spissen befinner seg. I figur 2.17 er sprekke geometrien definert av alle punkter der $\phi \leq 0$, $\psi = 0$. Sprekke spissen er gitt der $\psi = \phi = 0$.

I sprekke spissen vil alltid nivåsettene danne en lokal ortogonal basis og dermed et lokalt koordinatsystem for sprekke spissen (som i figur 2.11 og 2.18). Den lokale ortogonaliteten er definert som:

$$\nabla(\mathbf{x}) \cdot \nabla(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.35)$$



Figur 2.18: Sprekk gitt av to nivåsett, med definisjon av koordinatsystem ved sprekkfront

I et tredimensjonalt tilfelle bestemmes koordinatsystemet som:

$$\mathbf{n}_1 = \nabla\phi \quad (2.36)$$

$$\mathbf{n}_2 = \nabla\psi \quad (2.37)$$

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2 \quad (2.38)$$

$$r = \sqrt{\phi^2(\mathbf{x}) + \psi^2(\mathbf{x})} \quad (2.39)$$

$$\theta = \arctan(\psi(\mathbf{x})/\phi(\mathbf{x})) \quad (2.40)$$

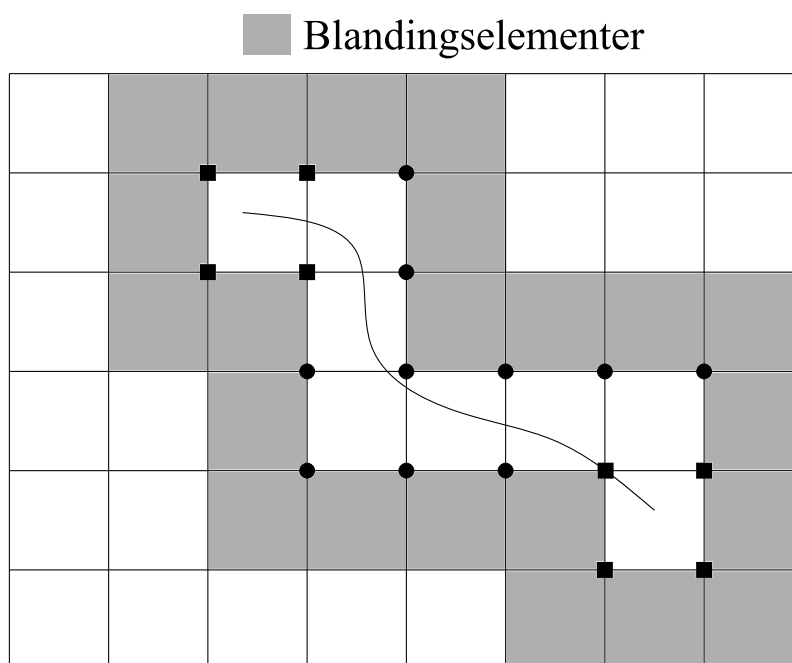
Det lokale koordinatsystemet brukes til å bestemme det asymptotiske feltet rundt bruddspissen.

2.9 Supplerende teori

I dette avsnittet går vi gjennom noen aspekter ved X-FEM det er verdt å merke seg, men som ikke hører til den grunnleggende teorien.

2.9.1 Blandingselementer

Dersom man ikke beriker alle elementene i en X-FEM-analyse, kan dette lede til ukompabile løsninger og interne diskontinuiteter. Figur 2.19 viser en bruddmekanisk analyse, der kun elementer som inneholder en sprekke er beriket. Vi ser da at man har elementer som følger den vanlige elementmetoden og elementer som følger X-FEM. Man får også en tredje type, som inneholder både berikede og vanlige noder. Disse kalles for blandingselementer.



Figur 2.19: Viser en diskontinuitet, der blandede elementer er markert.

Siden blandingselementene er hverken vanlige- eller XFEM-element, får de en litt annerledes approksimasjonsfunksjon. For et (firkantet) blandingselement med $m = 1, 2, 3$ (berika) noder er denne gitt som:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i + \underbrace{\sum_{j=1}^{m=1,2,3} N_j(\mathbf{x})\mathbf{b}_j F(\mathbf{x})}_{\text{berikning}} \quad (2.41)$$

Berikning av elementer i den utvidede elementmetoden er mulig på grunn av at berikningene er basert på formfunksjoner som er en oppdeling av enhet. I ligning (2.41) ser vi

at summen av formfunksjonene ikke vil summere til en over hele elementet, siden $m \neq 4$ i et blandingselement. Berikningen i blandingselementene utgjør med andre ord ikke en oppdeling av enhet. Dette innebærer at approksimasjonen vil kunne gi ugyldige svar. Til tross for dette, siden blandingselementer ikke vil inneholde noen diskontinuiteter, vil det ikke ha noen særlig innvirkning på resultatet [8].

En løsning på problematikken med blandingselementer vil være å berike alle elementene i nettet.

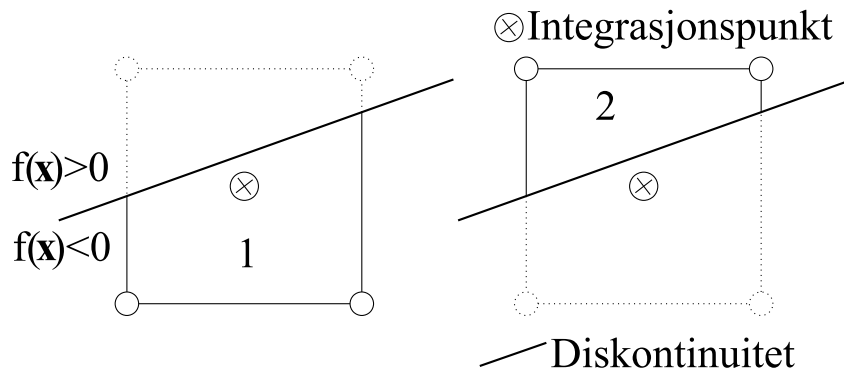
2.9.2 Elementpartisjoneringsmetoder

Vi presenterer en kort gjennomgang av teorien for de to elementpartisjonering/integrasjonsmetodene som er implementert i programvaren LS-DYNA.

Den mest utbredte integrasjonsmetoden i elementmetodeprogrammer er gauss-kvadraturer. Når man introduserer en diskontinuitet i X-FEM fører dette til svært ikke-lineære forskyvning- og spenningsfelt. Dette kan gi utslag ved at gauss-kvadraturet ikke vil gi tilstrekkelig nøyaktige resultater (med få integrasjonspunkter). Dette er videre forsterket av at gauss-integrasjon ikke integrerer berikningsfunksjoner nøyaktig. Det er ulike måter å håndtere denne problematikken på, som ofte innebærer en modifikasjon av integrasjonsregelen[8].

Fantomnoder

“Fantomnoder” er en elementpartisjoneringsmetode introdusert i 2006 av Song m. fl. Metoden er utviklet for dynamisk sprekkvekst i eksplisitte metoder og opererer på en element-for-element basis. Metoden har altså ikke støtte for elementer der diskontinuiteten har delvis propagert gjennom elementet. Dette kan føre til lavere nøyaktighet, særlig for grove nett. Metoden er et alternativ til underdomeneintegrasjon, men den er enklere å implementere [1].



Figur 2.20

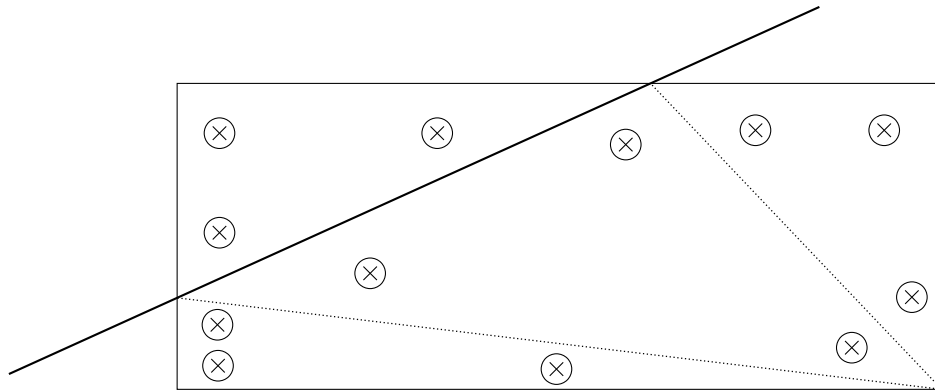
Diskontinuiteter blir representert ved å legge til et ekstra element, som vist på figur 2.20. Man deler elementet i to, der de nye elementene får fantomnoder (se figur 2.20). Man må også modifisere gausskvadraturet noe, men man beholder de eksisterende integrasjonspunktene. Metoden er gyldig både for elementer som er integrert med full og redusert integrasjon. Fantomnodene er bestemt på følgende måte (markert med stiplede sirkler på figur 2.20):

$$I \text{ er en fantomnode i } \begin{cases} \text{element 1} & \text{hvis } f(\mathbf{x}_I) > 0 \\ \text{element 2} & \text{hvis } f(\mathbf{x}_I) < 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

- $f(\mathbf{x})$ er stegfunksjonen, som beskriver diskontinuiteten. Fortegnet er avhengig av hvilken side av diskontinuiteten man betrakter, som vist på figur 2.20.
- \mathbf{x}_I punkt node I befinner seg i.

Metoden er demonstrert til å være lite avhengig av nettstruktur, men trenger finere nett for å oppnå tilsvarende nøyaktighet som underdomeneintegrasjon[1].

Underdomeneintegrasjon



Figur 2.21: Element med sprekk, delt inn i triangler

Underdomeneintegrasjon går ut på at man deler opp elementer som inneholder en diskontinuitet inn to underdomener, et på hver side av sprekk. Underdomenene kuttes i triangelformede områder, dette introduserer ingen nye noder eller elementer. Man bruker trianglene til å regne ut arealet av nodenes understøtte “over” og “under” sprekk, dersom dette forholdet blir svært lite beriker man ikke noden⁵. Denne sjekken gjennomføres for alle nodene i området rundt sprekk. Man fjerner med andre ord berikningen for noder der sprekk kun såvidt krysser influensområdet. Dette gjør man for å unngå å introdusere en lineær avhengighet i approksimasjonen. Triangelene brukes videre som grunnlag for integreringen. Istedenfor å integrere over elementene, integrerer man isteden over “undertriangelene” [20].

Sammenligning av de to metodene[29]

- Underdomeneintegrasjon gir mer nøyaktige resultater enn hva man får med fantom-noder
- Underdomeneintegrasjonen er vannskligere å implementere:
 - Ny integrasjonsregel
 - Flere integrasjonspunkter introdusert i løpet av analysen endrer datastrukturen
 - Man må overføre historievariabler fra gamle til nye integrasjonspunkt

⁵En verdi på 1% er brukt i [20]

Kapittel 3

LS-DYNA

3.1 Analyser i LS-DYNA

LS-DYNA er et analyseprogram for (hovedsakelig) eksplisitte dynamiske beregninger, med støtte for X-FEM. Vi har utført alle analyser med LS-DYNA. De fleste analysene er utført med LS-DYNA v.6.0.0, bortsett fra X-FEM analysene i Kahltoff-eksperimentet som er utført med v.5.1.1. Alle analyser er utført med plan-tøyningselementer.

3.2 X-FEM i LS-DYNA

I LS-DYNA er X-FEM kun implementert for plan-tøyning- og skall-elementer, ikke for 3D-elementer. X-FEM implementasjonen benytter nivåsett og er koplet opp mot en kohesiv skademodell[29].

Det er gjort to implementasjoner for elementpartisjonering(se teorikapittel):

- Fantomelementer
- Underdomene-integrasjon¹

Med fantomelementer er det kun støtte for sprekpropagering på element-for-element basis, en kan ikke ha elementer som inneholder en sprekspiss.

I de ferdige analysene er det ikke mulig å se nøyaktig hvor sprekken går, man kan kun se om en sprek har propagert gjennom et element. Disse elementene er vist som røde i figurene i denne oppgaven.

PRECRACK funksjonen er implementert for å representere sprekker i X-FEM analyser, og er anbefalt[29]. Kodeordet setter vise krav til hvordan man definerer nettet i en modell. Analysen vil kræsje dersom en *PRECRACK* er definert for nærme en node.

¹kun for plan-tøynings elementer

3.3 Kohesiv-lov

Skademodellen som er koplet sammen med X-FEM i LS-DYNA er en kohesiv lov. Skademodellen defineres gjennom to datakort, gjengitt i tabell 3.1.

Kort 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Variabel	MID	RO	ROFLG	INTFAIL	SIGMAX	NLS	TLS	
Type	A8	F	F	F	F	F	F	

Kort 2	1	2	3	4	5	6	7	8
Variabel	LAMDA1	LAMDA2	LAMDAF	STFSF				
Type	F	F	F	F				

Tabell 3.1: Datakort, kohesiv skademodell i LS-DYNA

Den kohesive loven bestemmes gjennom SIGMAX, NLS, TLS, LAMDA1, LAMDA2 og LAMDAF.

SIGMAX : Maksimal traksjon

NLS : Maksimal åpning (seperasjon) i normalretningen

TLS : Maksimal åpning (seperasjon) i tangentretingen

LAMDA1 : Skalert distanse til maksimaltraksjon (Λ_1)

LAMDA2 : Skalert distanse til starten på mykningen (Λ_2)

LAMDAF : Skalert distanse til brudd (Λ_{fail})

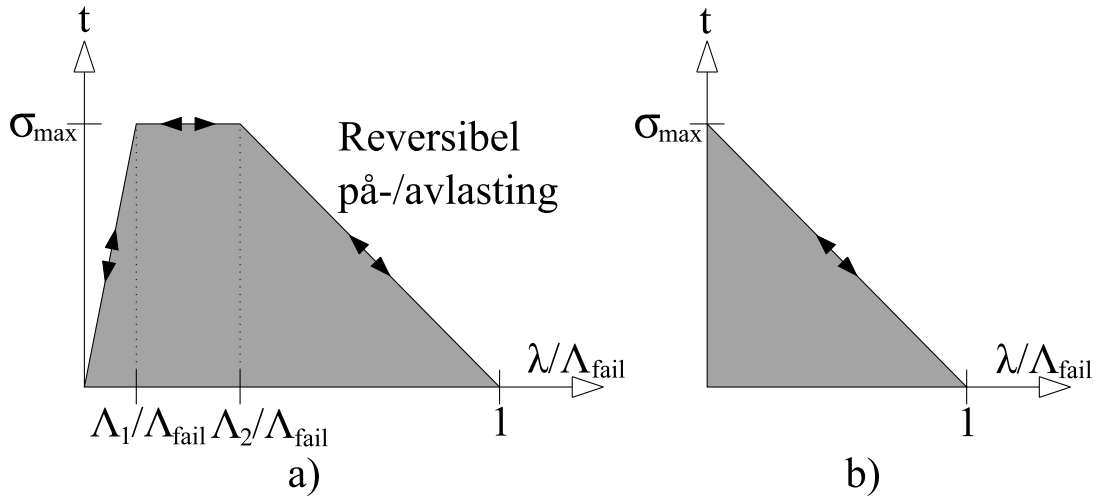
Modellen bruker et dimensjonsløst separasjonsmål, λ , som ta hensyn til interaksjonen mellom relative forskyvninger i normal- (δ_3 - mode I) og tangentretinger (δ_1, δ_2 - mode 2). Det brukes en *Macauley*-funksjon på δ_3 for å skille mellom strekk ($\delta_3 > 0$) og trykk ($\delta_3 < 0$).

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\delta_1}{TLS}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{TLS}\right)^2 + \left(\frac{\langle \delta_3 \rangle}{NLS}\right)^2} \quad (3.1)$$

Den kohesive loven gis som en trilineær traksjon-seperasjonslov:

$$t(\lambda) = \begin{cases} \sigma_{max} \frac{\lambda}{\Lambda_{fail}} & : \lambda < \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{fail}} \\ \sigma_{max} & : \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{fail}} < \lambda < \frac{\Lambda_2}{\Lambda_{fail}} \\ \sigma_{max} \frac{1-\lambda}{1-\frac{\Lambda_2}{\Lambda_{fail}}} & : \frac{\Lambda_2}{\Lambda_{fail}} < \lambda < 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Denne formuleringen gjør at traksjonen blir null når $\lambda = 1$, altså når separasjonen i den kohesive loven når sin maksimalverdi.



Figur 3.1: Kohesiv lov i LS-DYNA

Figur 3.1 viser den kohesive loven i LS-DYNA. Diagrammet til venstre (a) viser hvordan loven er gitt i manualen. Vi ønsker å bruke en lineær kohesiv lov som vist til høyre (b) i figuren. Det oppnår vi ved å sette $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$. Loven er implementert slik at på- og avlasting følger samme kurve.

Arealet under traksjon-seperasjons-kurven er bruddenergien. Vi velger å bruke notasjonen τ istedenfor σ for traksjonspenning. For formuleringen vår vil bruddenergien bli gitt som arealet av en trekant med katetene lik $\tau_{max} = \text{SIGMAX}$ og $\delta_{max} = \text{NLS} = \text{TLS}$:

$$G_c = \frac{1}{2} \tau_{max} \delta_{max} \quad (3.3)$$

G_c : Bruddenergi

τ_{max} : Traksjonspenning

δ_{max} : Maksimal åpning (seperasjon)

Vi har bruddseigheten til materialene som brukes i eksperimentene vi undersøker. Vi kan derfor regne ut bruddenergien:

$$G_c = \frac{K_I^2}{E^*} \quad (3.4)$$

E^* : Effektiv E-modul

$$E^* = \begin{cases} E & \text{for plan spenning} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{for plan tøyning} \end{cases}$$

I LS-DYNA er XFEM implementert kun for plan tøyning, så alle analysene våre har plan tøyning. I manualen til LS-DYNA anbefales XFEM for sprø materialer med skår.

Vi setter bruddenergien som vi beregner i (3.4) inn i (3.3) og bruker (3.3) til å finne passende verdier for τ_{max} og δ_{max} . Det vil si at vi velger en rimelig verdi for en av variablene og regner ut den andre:

$$\tau_{max} = \frac{2G_c}{\delta_{max}} \quad (3.5)$$

$$\delta_{max} = \frac{2G_c}{\tau_{max}} \quad (3.6)$$

3.4 UMAT

For å ha full kontroll over skadeparamtere benytter vi en brukerdefinert materialmodell i LS-DYNA, utviklet av Torodd Berstad og Odd Sture Hopperstad ved SIMLab.

Materialmodellen er for anisotropisk elastiske materialer, mens skaden er isotropisk. For å gjøre modellen uavhengig av en referanseramme er en korotert hypoelastisk formulering benyttet. Tøyningene er antatt å være små.

Korotert deformasjonstensor, $\hat{\mathbf{D}}$, og korotert spennigstensor $\hat{\sigma}$ er definert som

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}, \hat{\sigma} = \mathbf{R}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R} \quad (3.7)$$

\mathbf{D} : Deformasjonsratetensor

σ : Spennigstensor (Cauchy)

\mathbf{R} : Rotasjonstensor

Når man tar hensyn til skadeutvikling får man en effektiv spennigstensor, $\hat{\sigma}_\omega$

$$\hat{\sigma}_\omega = \frac{\hat{\sigma}}{1 - \omega} \quad (3.8)$$

$$\omega : \text{Skadevariabel} \quad (0 \leq \omega \leq \omega_c)$$

Dermed defineres den hypoelastiske skaderelasjonen som

$$\dot{\hat{\sigma}}_\omega = \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{D}} \quad (3.9)$$

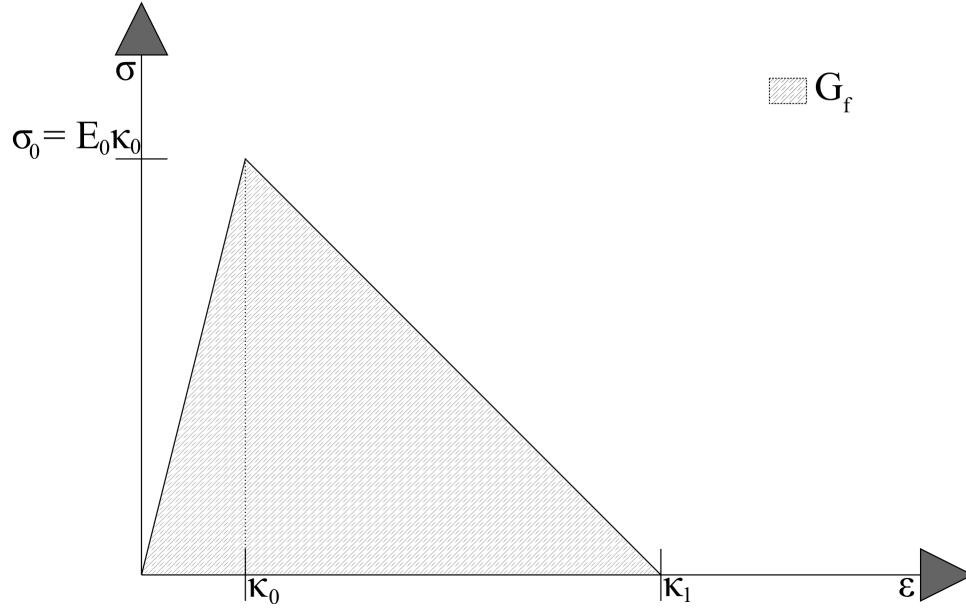
Videre er den elastiske tensoren, $\hat{\mathbf{C}}$, med Voigt-notasjon:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{1111} & \hat{C}_{1122} & \hat{C}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}_{1122} & \hat{C}_{2222} & \hat{C}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}_{1133} & \hat{C}_{2233} & \hat{C}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{C}_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{C}_{1212} \end{bmatrix}$$

På- og avlasting er definert på Kuhn-Tucker form:

$$f_\omega = \bar{\epsilon}_\omega - \kappa, \dot{\kappa} \geq 0, \dot{\kappa} f_\omega = 0 \quad (3.10)$$

Skadeutviklingen er gitt som



Figur 3.2: Spenning-tøyningskurve - uniaksielt strekk

$$\omega(\bar{\varepsilon}_\omega) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \left(\frac{\kappa_1}{\bar{\varepsilon}_\omega} - 1 \right) \quad (3.11)$$

Ekvivalent tøyning, $\bar{\varepsilon}_\omega$, er definert som

$$\bar{\varepsilon}_\omega = \sqrt[a]{\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\varepsilon}_i \rangle^a} \quad (3.12)$$

$\hat{\varepsilon}_i (i = 1, 2, 3)$: Hovedverdiene til den rotasjonsløse deformasjonstensoren

$$\hat{\varepsilon}(t) = \int_0^t \hat{\mathbf{D}} dt \quad (3.13)$$

Energien i et element med karakteristisk høyde, h_e , og karakteristisk volum, $V_e = h_e^3$, er ved bruddtøyning gitt som $\frac{1}{2} E_0 \kappa_0 \kappa_1 V_e$. For å gjøre bruddenergien, G_f , uavhengig av elementstørrelse er den definert med hensyn på elementets størrelse. En illustrasjon av forholdet mellom spenning, tøyning og bruddenergi er vist i figur 3.2

$$G_f A_e = \frac{1}{2} E_0 \kappa_0 \kappa_1 V_e \quad (3.14)$$

Det er også implementert støtte for en varierende tøyningfasthet for å simulere feil i materialet. Vi har ikke brukt dette i oppgaven så vi unnlater dette fra dokumentasjonen.

3.4.1 Oppsummering

Materialkonstanter som må defineres:

Elastiskemoduler, retning 1,2,3 : E_1, E_2 og E_3

Poisson-tall : ν_1, ν_2 og ν_3

Skjærmodul : G_1, G_2 og G_3

Eksponent for ekvivalent tøyning : a

Skadegrense : κ_0^{ref}

E-modul : E_0

Bruddenergi : G_f

Weibull-modul : m_w

Referansevolum : V_{rev}

Ekstremal-tøynings-verdier : $\kappa_0^{min}, \kappa_0^{max}$

Datakortet for bruk i LS-DYNA:

E_1 El.koeffisient	E_2 "	E_3 "	ν_1 Poisson-tall	ν_2 "	ν_3 "	G_1 Skjærmodul	G_2 "
G_3 "	A Ekv.tøyning eksponent	KREF kref	E_0 Elastisk ref.modul	G_f	MW Weibull	VREF Vol.ref	KOMIN min κ_0
K0MAX						K	G

Tabell 3.2: Datakort for umat

Kapittel 4

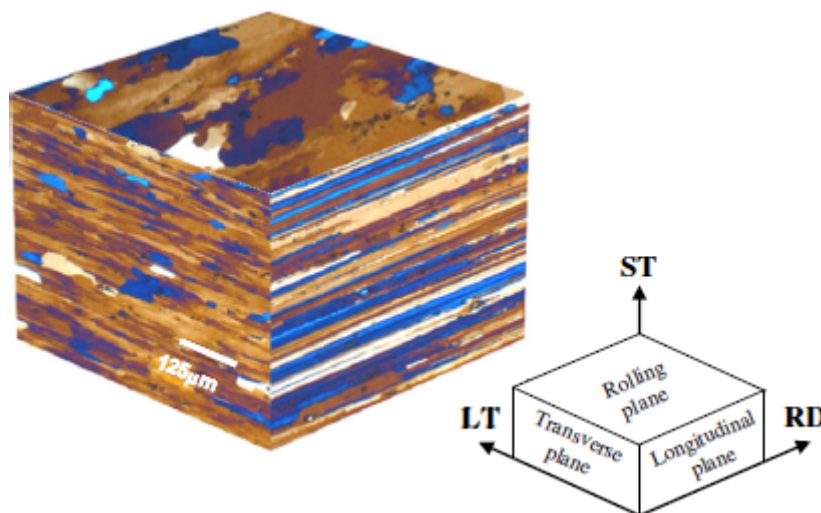
Laboratorietest

4.1 Materiale

Materialet i forsøket er den valsede aluminiumslegeringen 7075-T651. Tilstand T651 tilsier at legeringen er litt strukket og kunstig aldret for å oppnå ønsket styrke [30]. Aluminiumsplatene er 20 mm tykke og har flytespenning og strekkfasthet på henholdsvis 505 og 570 MPa. Den kjemiske komposisjonen er gitt i tabell 4.1. Kornstrukturen til en lignende aluminiumsplate er vist i figur 4.1 i tre plan ved hjelp av en optisk mikrograf. En ser at platen har en flat og strekt kornstruktur i valseretningen og en mer kompakt kornstruktur vinkelrett på valseretningen. Dette gjør at materialet har en anisotropisk oppførsel.

Al	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Andre
Balanse	0,06	0,19	1,3	0,04	2,4	0,19	5,7	0,08	0,15

Tabell 4.1: Kjemisk sammensetning i vektprosent i 7075-T651

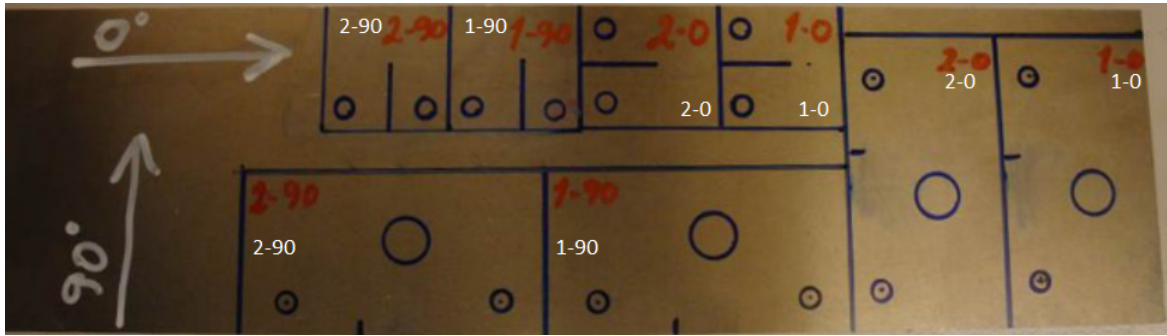


Figur 4.1: Kornstruktur i 7075-T651[4]

4.2 Prøvestykker

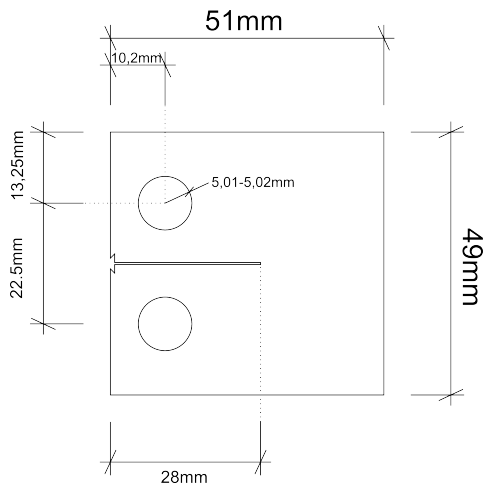
Det ble tatt ut totalt 8 prøvestykker en aluminiumsplate, 7075-T651. 4 av prøvestykkene er utformet for å nyttes i en CT-test og 4 er utformet for å studere hvordan bruddet går i en plate med hull. To av prøvestykkene for hver testtype er tatt ut i parallellt med valseretningen, disse er markert med 0, og to er tatt ut på tvers av valseretningen, disse er markert med 90. Figur 4.2 viser hvor hvert enkelt prøvestykke er tatt fra på aluminiumsplatene. Prøvestykkene markert med 0 har skår som er gnisset inn parallellt med valseretningen og prøvestykkene markert med 90 har skår er gnisset inn vinkelrett på valseretningen.

Prøvestykkene er relativt tykke i forhold til størrelsen sin. Materialet vil innsnevres i området rundt sprekken, men siden det er mye materiale som skal presses sammen gir dette høy triaksialitet og dermed en sprø karakteristikk av materialet.

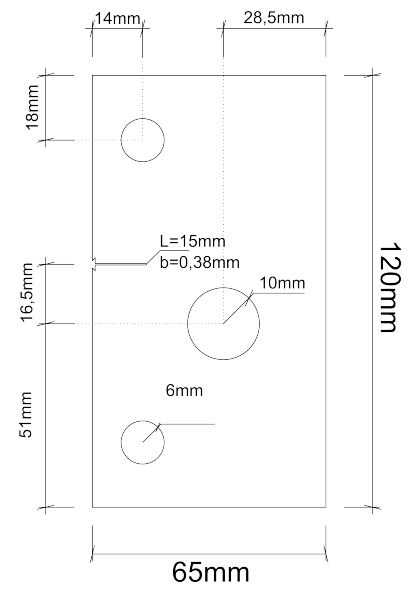


Figur 4.2: Uttak av prøvestykker på aluminiumsplate

Dimensjonene til CT-prøvestykkene er vist i figur 4.3. Dimensjonene til platen med hull er vist i figur 4.4.



Figur 4.3: CT-test, dimensjoner på prøvestykker



Figur 4.4: Plate med hull, dimensjoner på prøvestykker

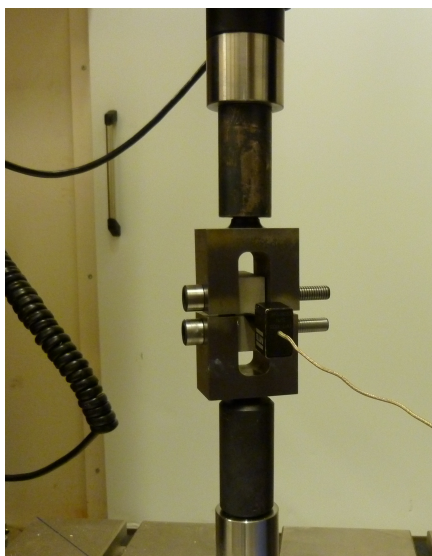
Mål hvert enkelt prøvestykke er gitt i tabell 4.2.

Prøvestykke	Tykkelse [mm]	Bredde [mm]	Skår til kant [mm]
CT-test			
1-0	19,98	51,06	23,02
1-90	19,99	51,01	23,10
2-0	20,00	51,06	23,07
2-90	19,98	51,03	23,05
Plate med hull			
1-0	19,96	-	49,52
1-90	19,93	-	49,62
2-0	19,95	-	49,52
2-90	19,97	-	49,49

Tabell 4.2: Mål på prøvestykker

4.3 Testprosedyre

Testene ble utførte på to universaltest-prøvemaskiner. CT-testene ble utført på en *Instron*, 100 kN, testene på platen med hull ble utført på en *Instron 1332*, 250 kN. Prøvestykkene festes ved hjelp av bolter. Last og forskyvning måles av maskinen. Sprekkåpningen måles med et ekstensometer. Prøvestykkene påføres last frem til brudd. Strekkhastigheten er 1 mm per minutt. For testen med platen med hull settes det opp to kameraer, et høyhastighetskamera og et med høy oppløsning, for at sprekkutviklingen skal kunne studeres i ettertid. Prøvestykkene ble lakkert med et tynt lag hvit spraylakk og et tynt lag sort spraylakk slik at en har mulighet for DIK-analyse. Dette ble ikke gjort for CT-testen siden festeanretningen skjuler mye av prøvestykkene når de er i maskinen. Kraft og forskyvning under forsøket hentes ut 10 ganger i sekundet. Figur 4.5 og 4.6 viser hvordan oppsettet så ut.



Figur 4.5: Oppsett CT-test



Figur 4.6: Oppsett for platen med hull. Høyhastighetskamera til venstre, høyoppløst kamera til høyre

4.4 Resultater

Plot av kraft mot ekstensometeråpning er vist i de to neste underkapitlene.

Data fra forsøk viser en svært sprø materialoppførsel. Kraft-forskyvnings-kurven er tilnærmet rett og har en hellning som tilsvarer E-modulen til 7075-T651.

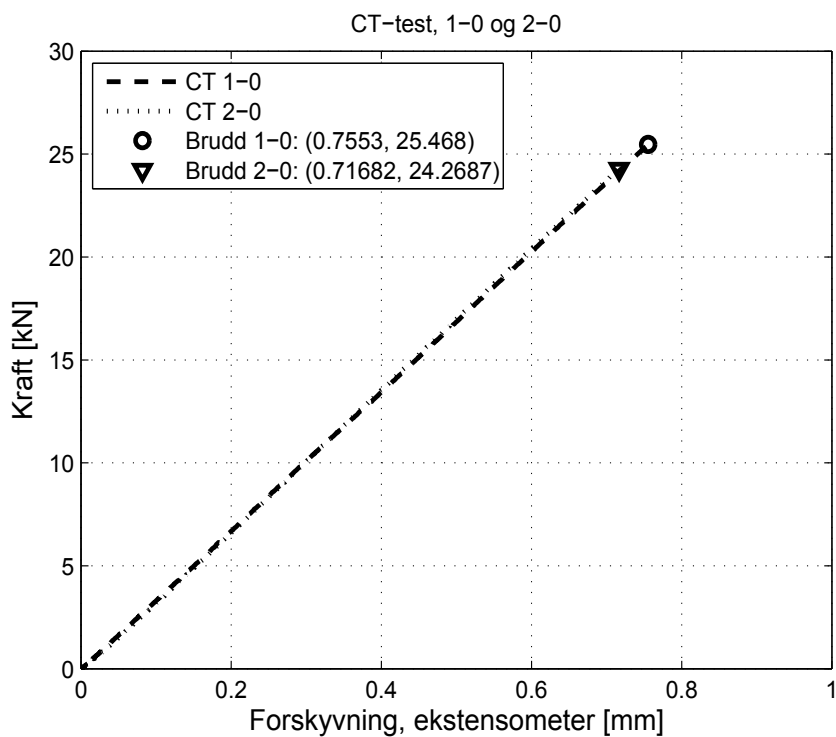
Tabell 4.3 viser kraft og ekstensometeråpning ved brudd. Både CT-testen og plate-testen viser at aluminiumslegeringen er sterkere i 90-retningen enn 0-retningen. De parvise verdiene for prøvestykkene er tilnærmet like for prøvestykkene med unntak av 1-0 og 2-0 for platen. Plateprøvestykke 1-0 ble først brukt i samme testmaskin som CT-testene ble utført på. Prøvestykket hadde da bolthull for 10 mm bolter og omtrent 10 mm kortere skår enn det hadde da det ble brukt i den andre testmaskinen. Under den testen viste det seg at boltene ikke hadde nok styrke og at maskinen ikke var kraftig nok til å påføre last

til brudd. Da ble det besluttet å lage nye bolthull til større bolter, forlenge skåret og bruke en kraftigere testmaskin for å være sikker på at brudd ville inntreffe. Dette prøvestykket var dermed deformert før testen startet og materialet kan ha fastnet og dermed være skyld i at forskjellen mellom det og 2-0-prøvestykket skiller seg ut.

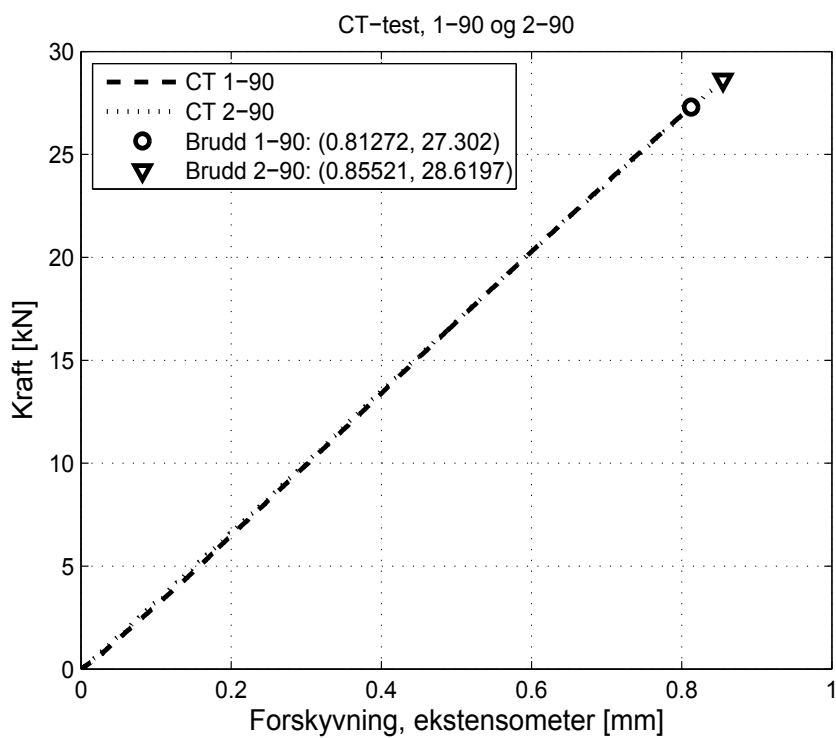
Prøvestykke	Forskyvning, ekstensometer [mm]	Kraft [kN]
CT-test		
1-0	0,7553	25,468
2-0	0,7168	24,2687
1-90	0,8127	27,302
2-90	0,8552	28,6197
Plate		
1-0	0,3637	91,5255
2-0	0,3344	85,1647
1-90	0,3896	96,0312
2-90	0,3951	96,6753

Tabell 4.3: Kraft og ekstensometeråpning ved brudd

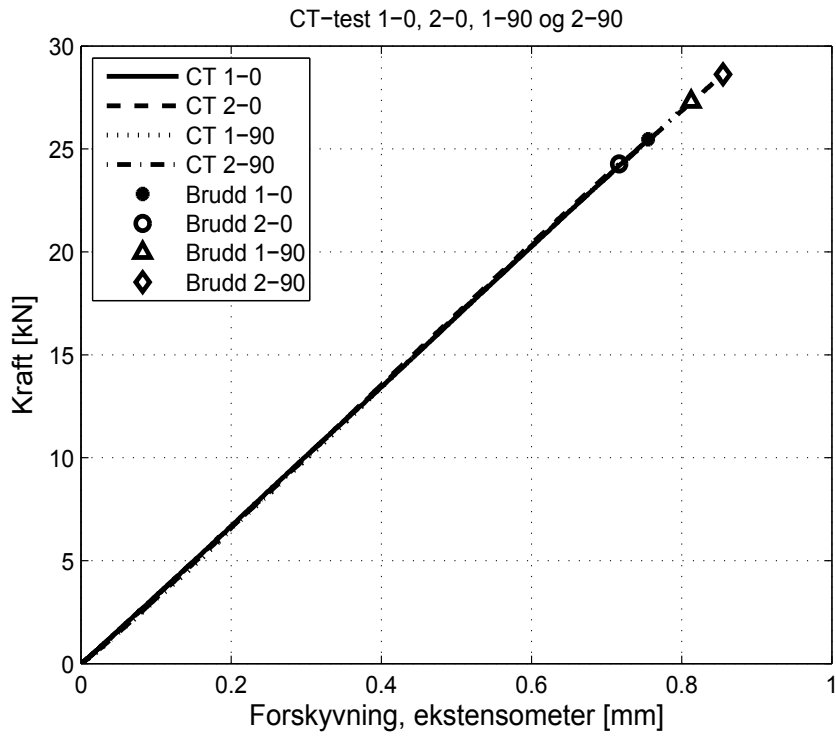
4.4.1 CT-test, plot



Figur 4.7: CT-test, parallellt med fiberretningen

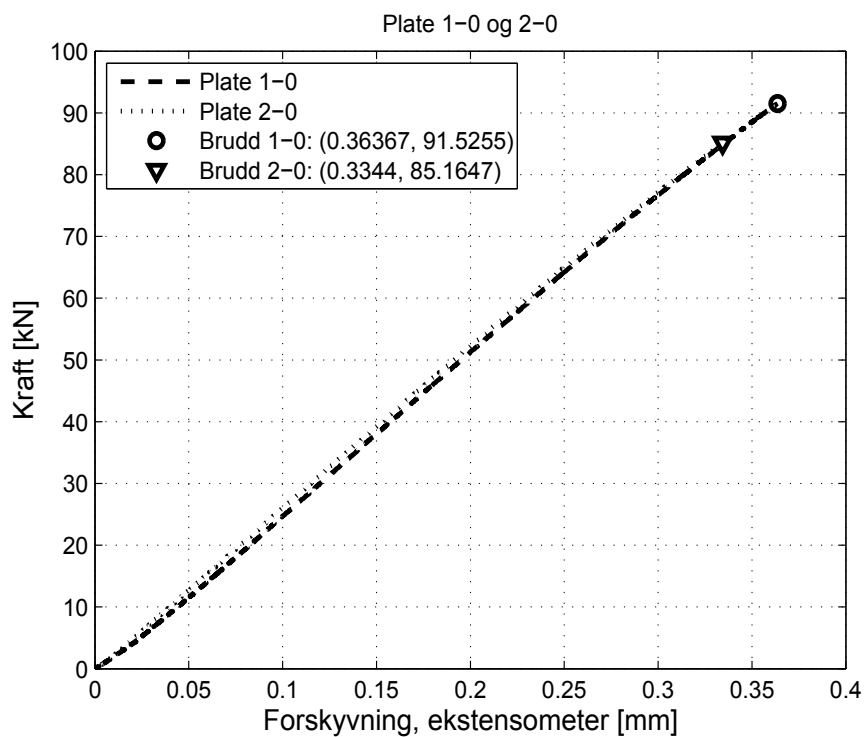


Figur 4.8: CT-test, tvers av valseretning

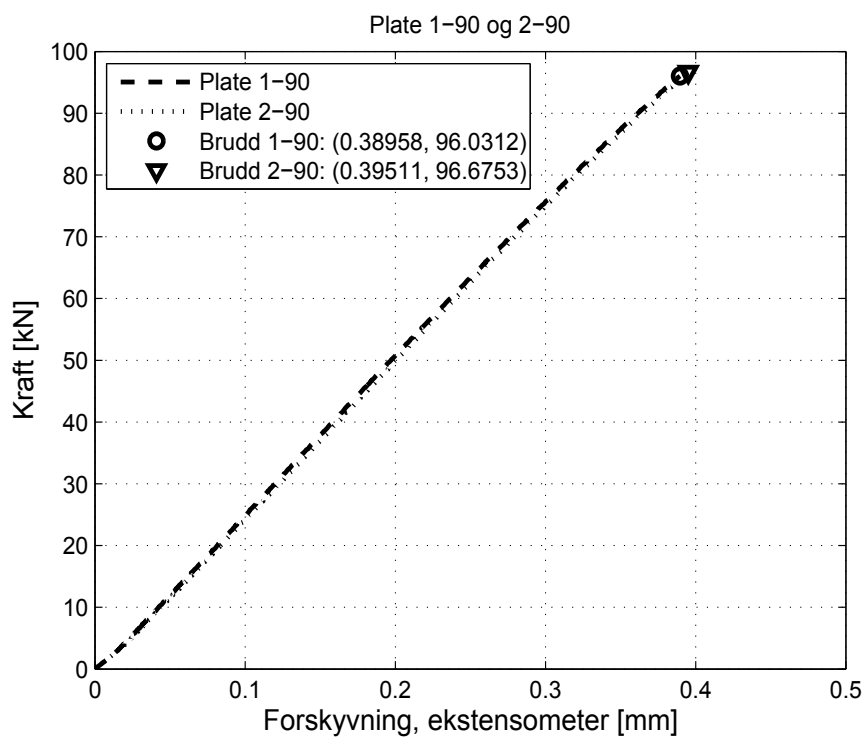


Figur 4.9: CT-test, alle

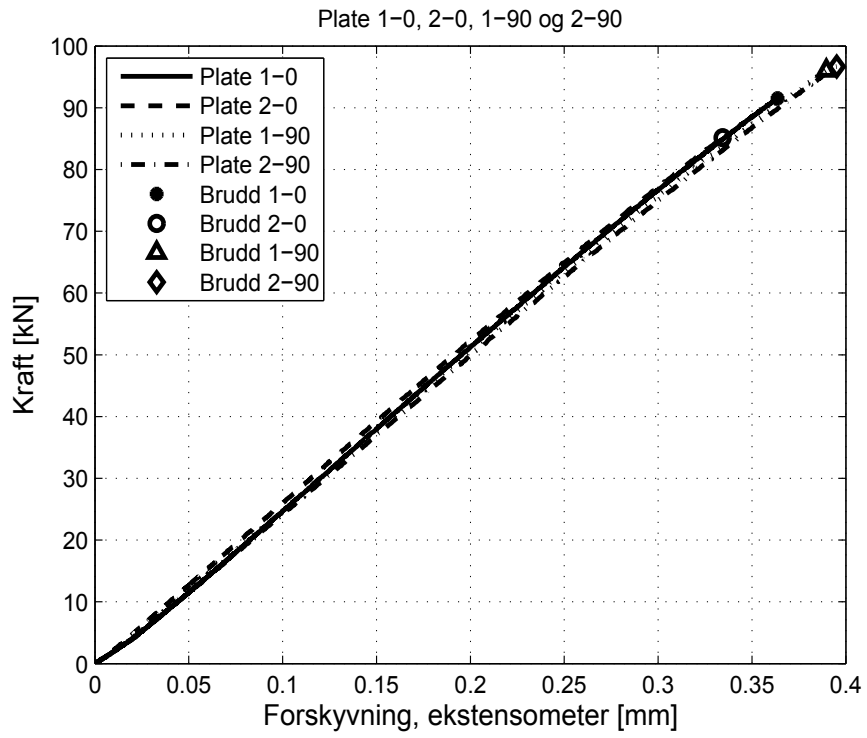
4.4.2 Plate med hull, plot



Figur 4.10: Uvanlig CT-test, parallellt med fiberretningen



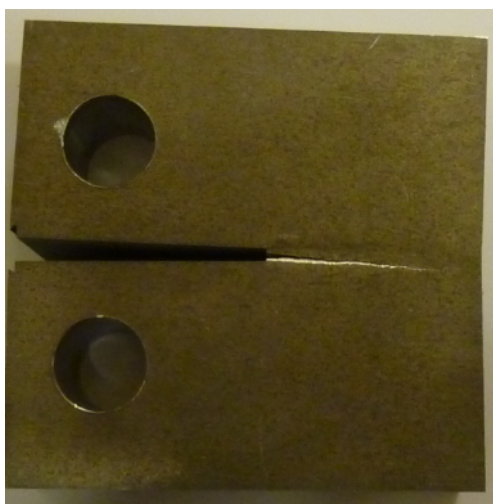
Figur 4.11: Uvanlig CT-test, tvers av valseretning



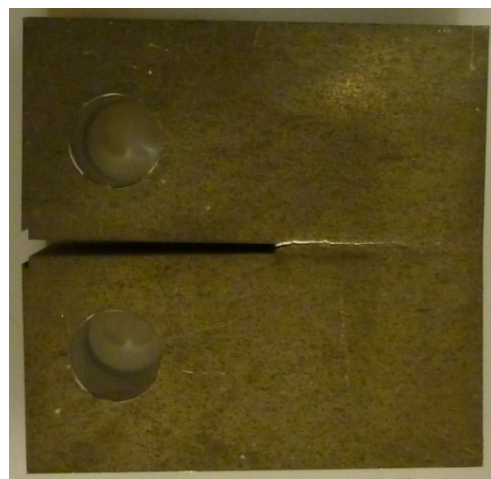
Figur 4.12: Uvanlig CT-test, alle

4.4.3 Bruddretning

Figur 4.13 og 4.14 viser prøvestykkene fra CT-testen som har skår parallellt med valseretningen. Bruddretningen går tilnærmet i samme retning som skåret. Dette var forventet siden prøvestykkene er symmetriske om skåret. I 1-0 starten sprekken i underkanten av skåret og i 2-0 starter den på overkanten. Det kommer sannsynligvis av at gnissingen av skåret gir en rett kant og at de største spenningskonsentrasjonene dermed går til hjørnene.

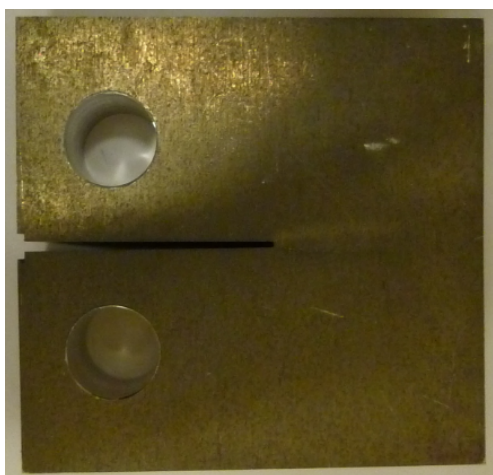


Figur 4.13: CT, prøvestykke 1-0

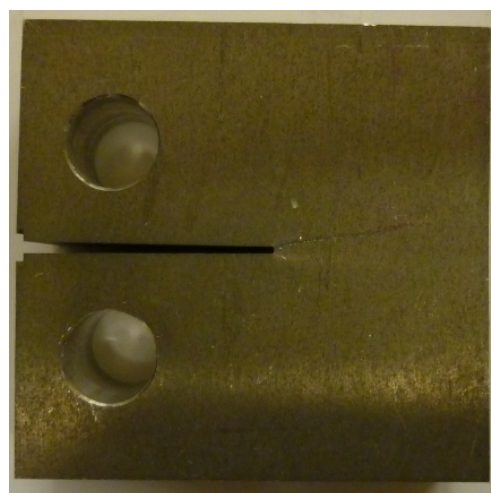


Figur 4.14: CT, prøvestykke 2-0

Figur 4.15 og 4.16 viser prøvestykkene fra CT-testen som har skår normalt på valseretningen. Bruddretningen er ikke i samme retning som skåret, men avviker litt fra senterlinjen på prøvestykkene. Prøvestykkene viser en innsnevring med vifteform under bruddet. Viften ser tilnærmet symmetrisk ut rundt senteraksen på prøvestykkene.



Figur 4.15: CT, prøvestykke 1-90

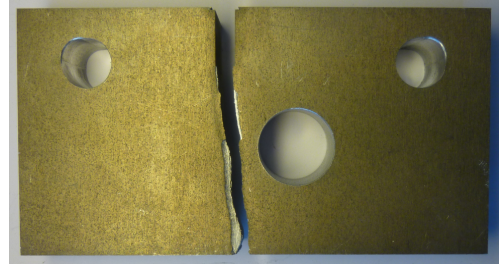


Figur 4.16: CT, prøvestykke 2-90

Figur 4.17 og 4.18 viser prøvestykkene fra testen med platen med hull som har skår parallellt med valseretningen. Bruddet går over hele platen. Bruddretningen går hullet og flater ut etter hullet.

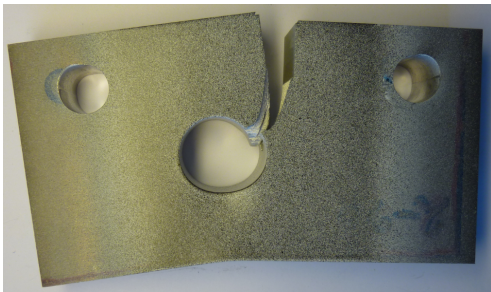


Figur 4.17: Plate med hull, prøvestykke 1-0

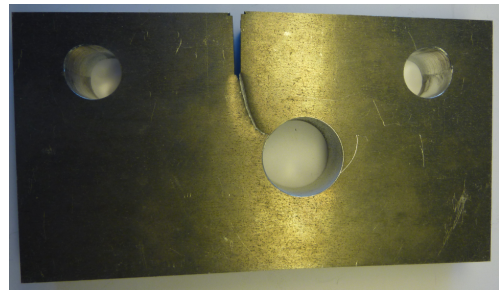


Figur 4.18: Plate med hull, prøvestykke 2-0

Figur 4.19 og 4.20 viser prøvestykkene fra testen med platen med hull som har skår normalt på valseretningen. Bruddet kurver seg fra enden av skåret og inn til hullet.



Figur 4.19: Plate med hull, prøvestykke 1-90

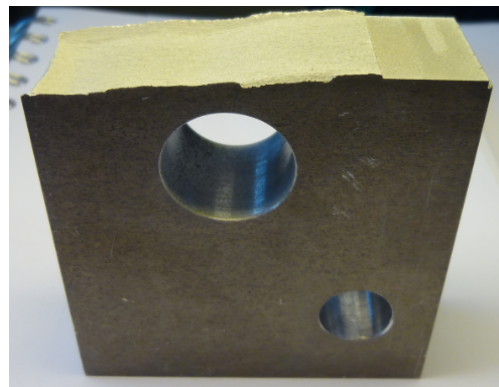


Figur 4.20: Plate med hull, prøvestykke 2-90

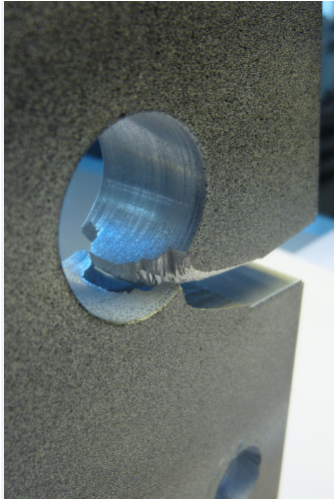
Bruddflatene til prøvestykkene er vist i figur 4.21, 4.22, 4.23 og 4.24. Bruddflatene til prøvestykkene som ble tatt ut i 0-retningen er relativt plane, mens bruddflatene til prøvestykkene som ble tatt ut i 90-retningen går fra flat til å få en tann når en kommer nært hullet. Legeringen 7075-T651 har større styrke i midten enn ved overflatene [?].



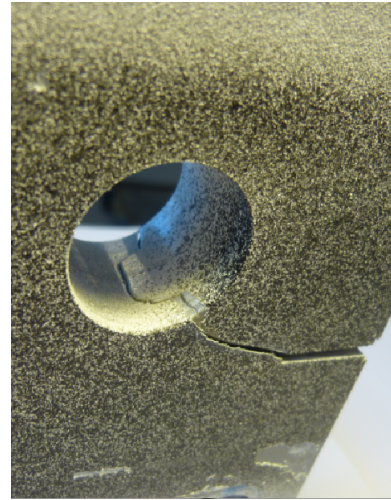
Figur 4.21: Plate med hull, prøvestykke 1-0, bruddflate



Figur 4.22: Plate med hull, prøvestykke 2-0, bruddflate



Figur 4.23: Plate med hull, prøvestykke 1-90, bruddflate



Figur 4.24: Plate med hull, prøvestykke 2-90, bruddflate

4.4.4 Bruddenergi

Den kohesive energien ved brudd, G_c , er lik J for mode I i CT-testen [?]. Denne verdien er nyttig som en første tilnærming for G_c i den kohesive loven som skal brukes i den virtuelle modelleringen.

Energien beregnes som integralet av kraft-forskyvnings-kurven fra forsøket. Det er brukt et Matlab-skript for å gjøre denne beregningen, dette er beskrevet i appendiks. Bruddenergien gis som Joule pr kvadratmeter. Vi må da ta med et areal i prøvestykkene for å regne ut spenningene. I CT-testene er dette arealet tversnittet som går fra skår til kant. I platen med hull gir dette snittet ikke bruddenergien, men siden det er en svært kompleks oppgave å beregne det effektive arealet i prøven, så brukes dette snittet som utgangspunkt for å gi en pekepinn på bruddenergien.

Prøvestykke	Areal [mm]	Bruddenergi [$\frac{Nm}{m^2}$]
CT-test		
1-0	459,94	20 861
2-0	461,40	18 763
1-90	461,77	23 923
2-90	460,54	26 692
Plate		
1-0	988,42	16 748
2-0	988,93	14 469
1-90	988,93	19 027
2-90	989,32	19 300

Tabell 4.4: Bruddenergi i laboratorieforsøk

Kapittel 5

Numeriske analyser

5.1 Eksempel 1: Laboratorieeksperiment

Dette er eksperimentet som ble utført på NTNU. Eksperimentet er dokumentert i kapittel 4. Vi kalibrerer to materialmodeller i henhold til CT-tester og ser om disse verdiene gir gode resultater for plateforsøkene.

5.1.1 Materialdata

Materialegenskapene til aluminiumslegeringen, 7075-T651, er gitt i tabell 5.1.

E [GPa]	ν	σ_y [MPa]	σ_{yt} [MPa]	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	K_{Ic} [MPa $\sqrt{\text{m}}$]
70	0,3	505	570	2700	25

Tabell 5.1: Materialegenskaper, AA7075-T651 [4]

5.1.2 Kalibrasjon av skademodeller

Bruddenergi:

Bruddenergien for CT 1-0, 2-0, 1-90 og 2-90 var henholdsvis $20\,861 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2}$, $18\,763 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2}$, $23\,692 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2}$ og $26\,692 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2}$ i laboratorietesten. Vi tar utgangspunkt i verdien for CT 1-0 = $20\,861 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2} = 0,0209 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$.

$$G_c = \frac{1}{E} \cdot K_{Ic}^2$$
$$G_c = \frac{1}{70 \text{ GPa}} \cdot (25 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}})^2 = 8929 \text{ Pa} \cdot \text{m} = 0,008929 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$

Den kohesive loven:

Som parameter for CT-testen fant vi at $\tau_{max} = 1,7 \text{ GPa}$ (omtrent 3 ganger strekkfastheten), samsvarte godt med laboratorietestene. For å kalibrere modellen utførte vi en parameteranalyse (se tabell), der vi holdt bruddenergien konstant, mens vi varierte τ_{max} . Kalibrasjonen samsvarer med Scheider og W. Brocks[13], som viste at for en annen aluminiumslegering, Al 5083, så gav $\tau_{max} = 2,8 \cdot \sigma_{yt}$ gode resultat for en kohesiv lov.

Utregning for valgt verdi:

$$\delta_{max} = \frac{2 \cdot 0,0209 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}}{1,7 \text{ GPa}} = 2,459 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

Elementerosjon:

Forsøk	τ_{max}	Sprekkåpning ved brudd	Kraft ved brudd
CT 1-0		0,7553	25,468kN
CT 2-0		0,7168	24,268kN
XFEM1	1,5GPa	$\approx 0,649\text{mm}$	$\approx 22,2\text{kN}$
XFEM2	1,7GPa	$\approx 0,738\text{mm}$	$\approx 25,2\text{kN}$
XFEM3	1,9GPa	$\approx 0,832\text{mm}$	$\approx 28\text{kN}$

Tabell 5.2: Utvalg av forsøk og analyser fra parameteranalyse

Elementhøyde	κ_0	G_c
0,19mm	0,05	$0,0209 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$
0,38mm	0,034	$0,0209 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$

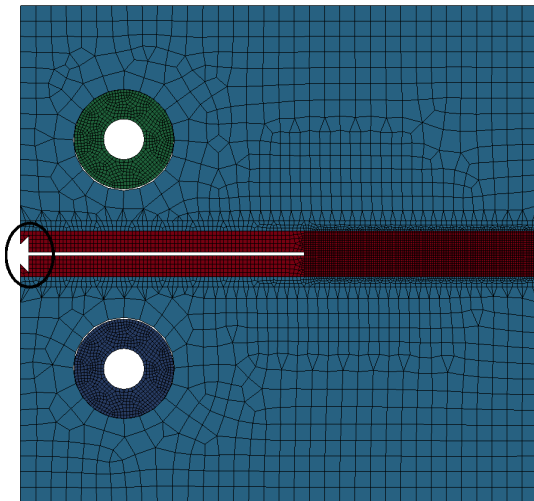
Tabell 5.3: Valgte parametere for elementerosjonsmodell

Vi bestemte også parameterene for elementerosjonsmodellen ved hjelp av en parameteranalyse, og brukte bruddenergien fra laboratorieforsøket (utgangspunkt i CT 1-0). Valgte parametere:

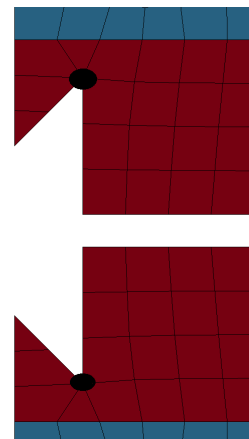
5.1.3 Numerisk modell

Alle de numeriske modellene modelleres etter figur 4.3 og 4.4 i 4. Tykkelsen settes til enhetstykkelse og vi har plan tøyningstilstand. Elementer med høy tykkelse i forhold til størrelse på nettet vil introdusere feil. Boltene i prøvemaskinen modelleres som stivlegemer, og påsettes en kraft som øker lineært. Grunnen til dette er å sørge for at kraften øker frem til fullstendig brudd, som i forsøkene. Med en påkjent hastighet avtar kraften med en gang bruddet oppstår i analysen, og dermed propagerer ikke bruddet fullstendig. Kontakten mellom boltene og prøvestykket er antatt friksjonsløs. I XFEM-analysen brukes *precrack*-funksjonen i LS-DYNA for å modellere skåret og i analysen med elementerosjon er skåret modellert med en separasjon på 0,38 mm. Modellene masseskaleres med en faktor på 10^6 .

Interesseområdet, der vi forventer brudd, blir modellert med et finere nett en resten av modellen. Dette gjøres for å redusere beregningstiden. I analysene med elementerosjon har vi valgt en nettstørrelse (i interesseområdet) på henholdsvis 0,19 mm og 0,38 mm. Vi valgte disse størrelsene siden de passer med dimensjonene på sprekken, og dermed får vi så kvadratiske elementer som mulig. I X-FEM analysene brukte vi en elementstørrelse på 0,7 mm i interesseområdet.



Figur 5.1: Nett med 0,19 mm maskestørrelse i interesseområdet



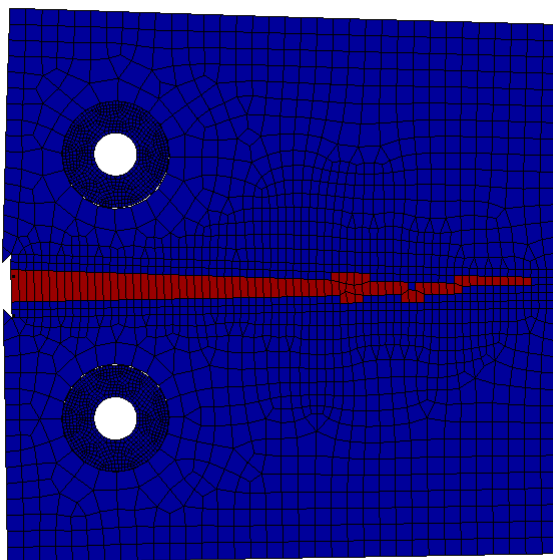
Figur 5.2: Forskyvning hentes ut i de merkede nodene.

Forskyvningen hentes som summen av forskyvningen i de to markerte nodene, som vist på figur 5.2. Dette tilsvarer der ekstensometeret ble plassert i laboratorieforsøket.

5.1.4 Resultater

CT-test

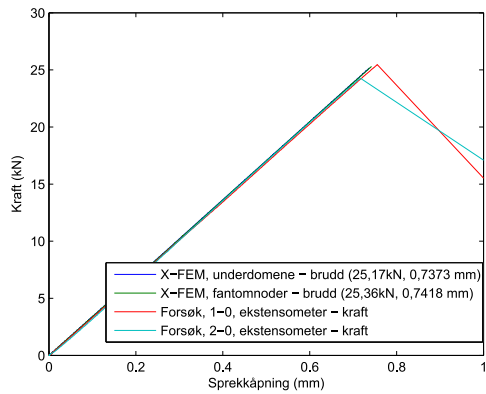
Figur 5.3 viser XFEM-analysen for CT-testen med vår kohesive lov. Sprekkpropageringen starter midt på symmetriaksen, propagerer langs symmetriaksen gjennom modellen. Vi observerer noen små avvik fra aksen. Det minner om ruheten til sprekken som vi så i laboratorieforsøket. Figur ?? viser FEM-analysen for CT-testen med *SIMLab*-skademodelen. Sprekkpropageringen følger symmetriaksen gjennom hele modellen.



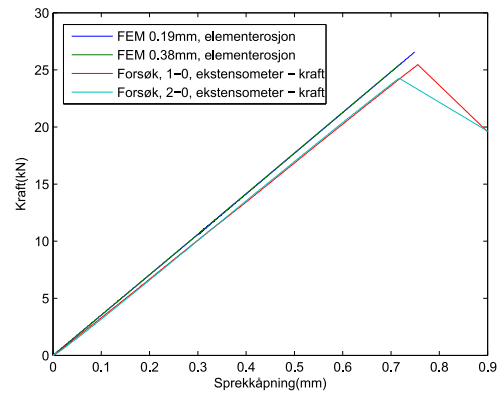
Figur 5.3: XFEM, CT-analyse med kalibrert kohesiv lov

Figur 5.4 viser et kraft-forskyvningsplot med resultat fra XFEM-analyser sammenlignet med data fra forsøkene for CT-testen. Med vår kalibrerte kohesive lov havner maksimalkraften og maksimalforskyvning mellom verdiene for CT 1-0 og 2-0; $Kraft_{CT\ 2-0} = 24,268\text{ kN} < Kraft_{XFEM} = 25,2\text{ kN} < Kraft_{CT\ 1-0} = 25,468\text{ kN}$ og $Forskyvning_{CT\ 2-0} = 0,7168\text{ mm} < Forskyvning_{XFEM} = 0,738\text{ mm} < Forskyvning_{CT\ 1-0} = 0,7553\text{ mm}$. Avvik mellom CT 1-0 og 2-0 er 4,7 %. Mellom CT 1-0 og X-FEM er det 1 %. Stivheten i forsøkene sammenlignet med analysen stemmer godt. Det er verdt å merke at det er svært liten forskjell mellom underdomeneintegrasjon og fantomnoder.

Figur 5.5 viser et kraft-forskyvningsplot med resultat fra FEM-analyse med *SIMLab*-skademodell sammenlignet med data fra forsøkene for CT-testen. Det er brukt 0,38x0,38- og 0,19x0,19-masker i analysen. Materialparametrene er de samme som i XFEM-analysen. Denne analysen gir høyere stivhet enn både XFEM og forsøket viser, og dermed høyere kraft ved brudd. Med det fineste nettet ble kraften høyest; kraft ved brudd ble 26,556 kN med en ekstensometeråpning på 0,7490 mm. Det groveste nettet gav; kraft ved brudd lik 25,544 kN med ekstensometeråpning på 0,7226 mm. Begge forskyvningene havner mellom

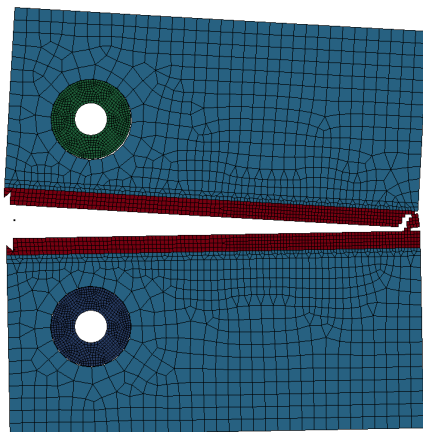


Figur 5.4:
Kraft-ekstensometeråpning
plot av CT-forsøk og kalibrert analyse

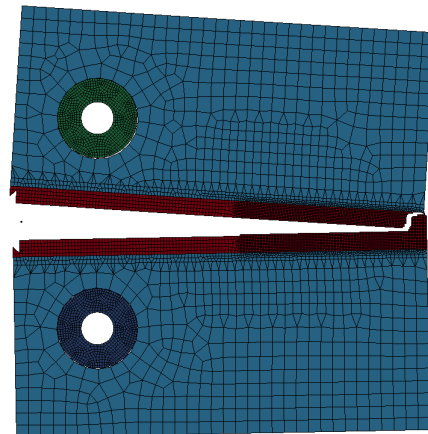


Figur 5.5: Kraft-ekstensometeråpning
plot av CT-forsøk og kalibrert analyse
med *SIMLab*-skademodell

verdiene fra CT 1-0 og 2-0, men kreftene ble større.



Figur 5.6: Elementerosjon, CT-test,
0,38x0,38 mm elementer, kalibrert ana-
lyse

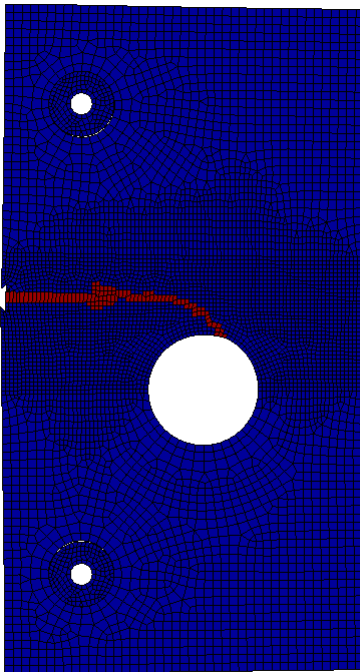


Figur 5.7: Elementerosjon, CT-test,
0,19x0,19 mm elementer, kalibrert ana-
lyse

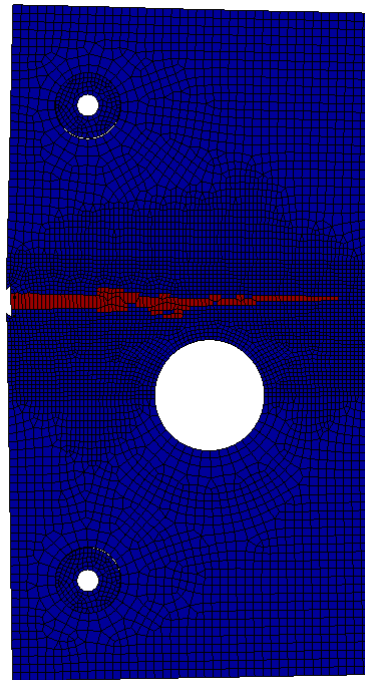
Figur 5.6 og 5.7 viser analysene med elementerosjon med elementer på henholdsvis 0,38x0,38 mm og 0,19x0,19 mm. Sprekken propagerer i en rett linje gjennom begge modellene frem til modellen “knekker” når sprekken er nær enden.

Plate-test

Figur 5.8 og 5.9 viser resultatene fra XFEM-analysen. I figur 5.8 er det brukt underdomeneintegrasjon. Sprekken propagerer inn til hullet og treffer hullet omtrent 3,5 mm til høyre for toppen. I forsøket traff sprekken til venstre for toppen. Vi antar dette er et resultat av kornstrukturen i materialet. I prøvestykke 1-90 og 2-90 er skåret vinkelrett på valseretningen. Disse prøvestykkene har dermed avlange korn i vertikalretningen og kortere korn i horisontalretningen. En sprekk vil kunne propagere lettere langs de avlange kornene (se sprekkretning på CT-testene i forsøket). Sprekken i forsøket kurver dermed krappere inn mot hullet. Analysen er gjort med en isotropisk materialmodell. “Kornstrukturen” vår er da lik i alle retninger og sprekken vil ikke styres av annet enn geometri og nettstørrelse. I figur 4.23 og 4.24 i 4 ser en at bruddflatene til prøvestykkene får en “tann”-form for den nederste flaten og en “grop” i den øverste. Denne “gropen” går horisontalt ut fra skårspissen, mens sprekkkanten kurver inn mot hullet fra starten av. Sprekken i analysen følger en kurve lignende denne gropen. Selv om prøvestykket er relativt tykt, så vil vi ikke ha en plantøyningstilstand over hele tykkelsen siden triaksialiteten vil være mindre når en nærmer seg en overflate.



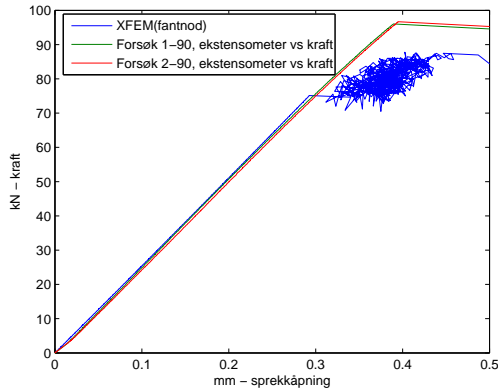
Figur 5.8: XFEM-analyseresultat, plate-test, underdomeneintegrasjon, kalibrert kohesiv lov



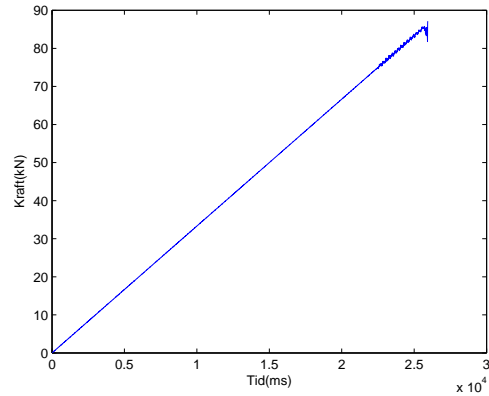
Figur 5.9: XFEM-analyseresultat, plate-test, fantomnoder, kalibrert kohesiv lov

I figur 5.9 brukt fantomnoder som elementpartisjoneringsmetode. Sprekken propagerer langs horisontalaksen gjennom modellen og ligner på sprekken vi såg i forsøket for prøvestykkene 1-0 og 2-0 som hadde skår parallellt med valseretningen. Fantomnoder opererer på en element-for-element basis. Elementene får da en diskontinuitet som går tvers gjennom elementet (deler elementer i to). Sprekken starter å propagere i samme retning som sprekken

i analysen gjort med underdomeneintegrasjon, men ser ut til å ha problemer med rettingsendring.



Figur 5.10: Kraft-ekstensometeråpning plot av kalibrert XFEM-analyse av platen, underdomeneintegrasjon

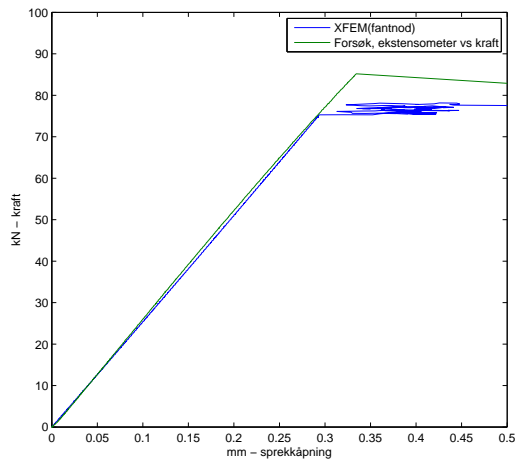


Figur 5.11: Kraft-tid plot av kalibrert XFEM-analyse av platen, underdomeneintegrasjon

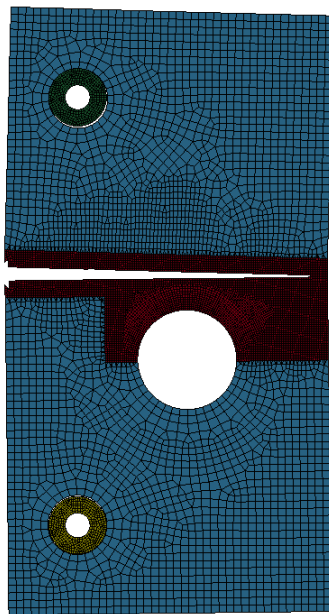
Figur 5.10 viser kraft-forskyvningsplot for XFEM-analysen av platen med underdomeneintegrasjon. Modellen går til brudd tidligere enn forsøket, det skjer når kraften er omtrent 75,2 kN. Det gir en liten sprekkvekst, kraften øker så mer før sprekken går gjennom til hullet. I forsøket gikk sprekken inn til hullet uten en slik tidlig sprekkvekst. Etter modellen gikk til brudd startet forskyvningspunktet å svinge, det blir derfor svært vanskelig å lese ut noe fra kurven mens bruddet propagerer. Figur 5.11 viser et kraft-tidsplot der vi har fjernet støy ved å lineær interpolere kraftverdiene. Kraften ved fullstendig brudd så da ut til å være omtrent 85,7 kN. I laboratorietesten var kraften ved brudd 96,03 kN og 96,68 kN for platene der bruddet gikk inn til hullet (90-retningen) og 85,26 kN for 2-0 platen (1-0 platen: 91,53 kN, men denne var deformert og hadde sannsynligvis fastnet før forsøket ble gjort). Den numeriske modellen er isotropisk og den kohesive loven har verdier med utgangspunkt fra 0-retningen. Sammenlignet med 90-retningen gir modellen for liten kraft og forskyvning ved brudd. Forskyvningen etter brudd er ugyldig.

Figur 5.12 viser kraft-forskyvningsplot for XFEM-analysen av platen med fantomnoder. Som i analysen med underdomeneintegrasjon gikk modellen til brudd tidligere enn forsøket. Denne analysen gikk også til brudd da kraften var 75,2 kN og viste samme sprekkvekst før sprekken fortsatte å propagere gjennom modellen. Forskyvningspunktene starter å svinge når brudd inntreffer. Kraften like før fullstendig brudd inntreffer ble omtrent 77,6 kN. I analysen gikk bruddet som nevnt ikke inn til hullet, men rett frem gjennom platen. I 2-0 platen var bruddkraften 85,26 kN. Modellen gir for liten kraft når brudd først inntreffer, og når bruddet propagerer gjennom platen.

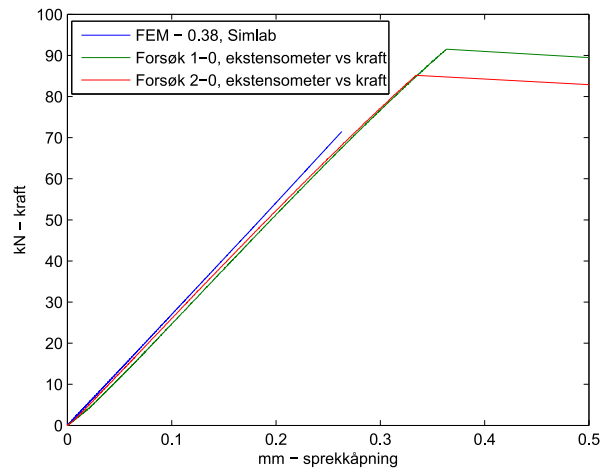
Figur 5.13 viser resultatet fra analysen med elementerosjon. Sprekken propagerer i en rett linje, slik vi så for CT-modellen.



Figur 5.12: Kraft-ekstensometeråpningplot av kalibrert XFEM-analyse av platen, fantomoder. Kraften er interpolert, derfor har plottet en litt annen form når bruddet intreffer



Figur 5.13: Elementerosjon, plate-test, 0,38x0,38 mm og kalibrert analyse



Figur 5.14: Kraft-ekstensometeråpningplot av kalibrert elementerosjons-analyse av platen

Figur 5.14 viser et kraft-ekstensometeråpningplot av elementerosjonsanalysen av platen. Som i CT-analysen gir denne analysen høyere stivhet enn E-modulen skulle tilsi. Platen går til brudd ved 0,2631 mm forskyvning, kraften er da 71,50 kN.

5.1.5 Effekten av δ_{max}

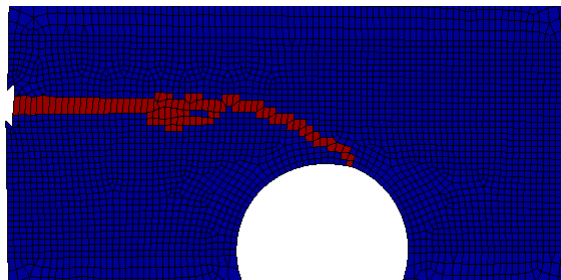
Vi gjorde en parameteranalyse for å undersøke hvilken effekt maksimal separasjon, δ_{max} , har på analysen. Samtidig økte vi τ_{max} til 1,9GPa, siden det passet med styrken i 90-retningen på CT-testene.

- Analyse 1: Velger δ_{max} slik at bruddenergien tilsvarer den utregnet fra K_{Ic}
- Analyse 1: Velger δ_{max} slik at bruddenergien tilsvarer tidligere analyser.
- Analyse 1: Velger δ_{max} slik at bruddenergien tilsvarer gjennomsnittet av CT-90-1 og CT-90-2¹

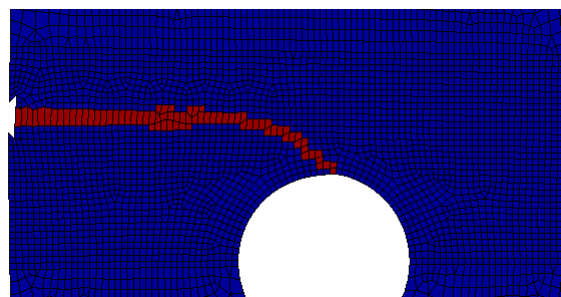
Analyse	δ_{max}	G_c
1	0,0094mm	0,008929 $\frac{kN}{mm}$
2	0,0220mm	0,0209 $\frac{kN}{mm}$
3	0,0266mm	0,0253 $\frac{kN}{mm}$

Tabell 5.4: Parametere for kohesiv lov

I samtlige analyser intrefrer bruddene samtidig. Både når det går til fullstendig brudd, og når bruddet starter i de første elementene. Endring av δ_{max} påvirker bruddformen.



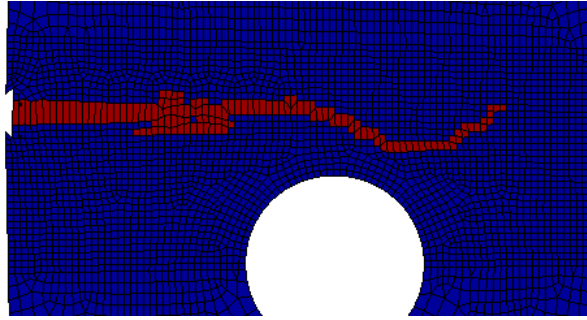
Figur 5.15: Ved fullstendig brudd - teoretisk bruddenergi (1)



Figur 5.16: Ved fullstendig brudd - bruddenergi som tidligere (2)

Figur 5.15-5.17 viser formen på endelig brudd i analyser med parametere for den kohesive loven som vist i tabell 5.4. Vi ser at δ_{max} har stor innvirkning på formen på sprekken.

¹CT-analysen med en $\tau_{max}=1.9\text{GPa}$ havner ca midt i mellom CT-90-1 og CT-90-2



Figur 5.17: Ved fullstendig brudd - økt bruddenergi (3)

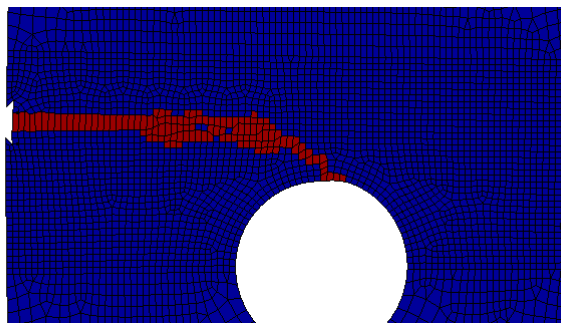
Analyse nr 2 er den som passer best med den observerte sprekkveksten i forsøket, dette tyder på at denne bruddenergien var et godt utgangspunkt for analysene.

5.1.6 Tidsskalering

Vi gjorde en analyse med tidsskalering i stedet for masseskalering for å se hvilken effekt dette hadde på analysen. Analysen er utført med samme parametere som analyse (2) i forrige seksjon. Det kritiske tiddsteget i en eksplisitt dynamisk analyse er gitt som^[31]²:

$$\Delta t_{cr} \leq \frac{h_e}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (5.1)$$

Vi tidsskalerte analysen med en faktor på 10^3 . Med utgangspunkt i ligning (??) er det lett å vise at en masseskalering på 10^6 vil gi samme reduksjon i analysetiden.



Figur 5.18: Ved fullstendig brudd, tidsskalert analyse (samme parametere som i (2))

En tiddskalert analyse gir brudd med samme tidsforløp (tilsvarende) som vi har observert på forsøkene med masseskalering. Forskjellene viser seg i bruddgeometrien, med tidsskalering ser vi en konsentrasjon av sprekker i to klumper”.

²Tidsskrittet regnes ut på en annen måte med X-FEM, men formelen er ment som en illustrasjon

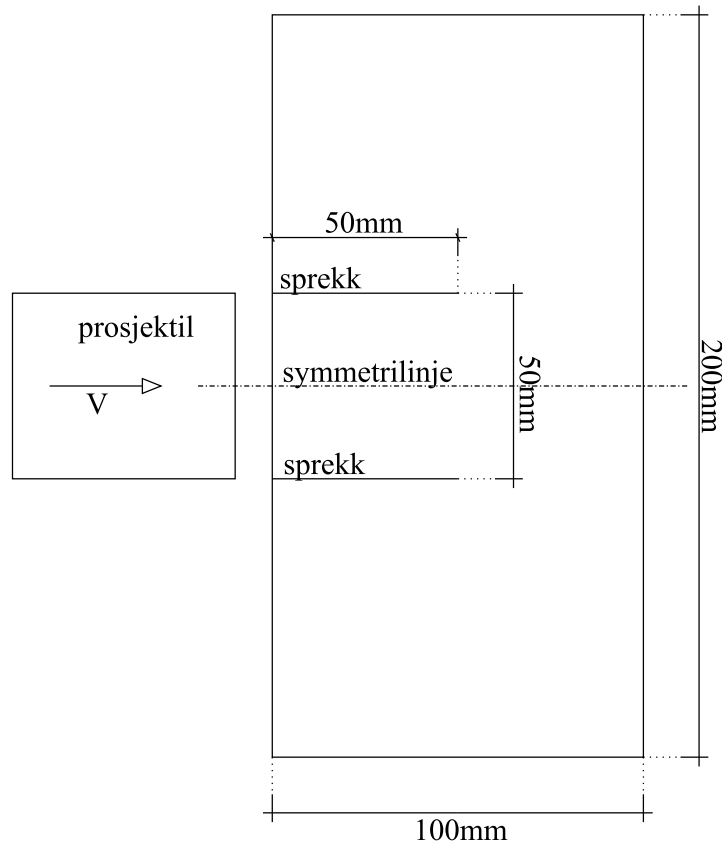
5.1.7 Diskusjon

I disse analysene har vi forsøkt å kalibrere materialmodellene etter CT-prøven, og sett hvor godt de fungerer på det plateformede prøvestykke. På CT-testen gir X-FEM gode resultater. Samsvaret mellom i kraft-ekstensometeråpningkurvene er bra. Med finere kalibrasjon kunne vi truffet nøyktig i toppunktet, vi gikk ikke videre med dette siden det uansett er variasjon mellom styrken i like prøvestykker. Vi klarer ikke å lage en modell som gir sprekkvekst som man så på plater i 90-retningen i forsøket. Valget av elementpartisjoneringsmetode hadde liten effekt på resultatet i CT-analysen. Elementerosjonsmetoden gav en rettlinjett sprekk gjennom hele modellen, så vi ser en sterk avhengighet av nett.

I plate-testene får vi begge bruddformene, avhengig av hvilken elementpartisjoneringsmetode vi benytter i analysen. Både underdomeneintegrasjon og fantomnoder gav "første" sprekkvekst samtidig. Dette er naturlig siden begge nytter samme skademodell. Underdomeneintegrasjon gir et greit resultat for 90-retningen. Fantomnoder viser antydninger til å gå mot hullet før bruddet fortsetter videre rett frem. Dette kan skyldes at denne metoden trenger mindre elementer for å oppnå samme nøyaktighet som underdomeneintegrasjon, forutsatt at skademodellen er god nok. Elementerosjonsmetoden gav en rettlinjett sprekk gjennom modellen, slik den gjorde i CT-modellen, den ga også brudd tidligst av alle. Elementerosjonsmetoden egner seg ikke til å beskrive bruddstien. Videre så vi mindre overføringverdi fra kalibreringen av elementerosjonsmodellen. Bruddet i 1-0 og 2-0 platen hadde en svak bølgeform.

5.2 Eksempel 2: Kalthoff-eksperiment

På midten av 1980-tallet gjorde Kalthoff og Winkler en rekke forsøk som er mye brukt som eksempler i litteraturen[32]. I forsøkene blir en plate av herdet stål³ skutt med et prosjektil (se figur 5.19). Prøvestykkene hadde skår som var plassert hver sin side av symmetriaksen. Prosjektilet traff prøvestykket i mellom skårene. Forsøkene viste at prosjektilets hastighet i stor grad påvirket sprekkutviklingen. Ved lave hastigheter så man strekkbrudd og ved høyere hastigheter observerte man skjærbånd.



Figur 5.19: Testoppsett / geometri

³X2 NiCoMo 1 8 95

5.2.1 Materialdata

Materialeegenskapene til herdet stål, X2 NiCoMo 1 8 95, er gitt i tabell ??.

E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	K_{Ic} [MPa $\sqrt{\text{m}}$]
190 000	0,3	2 100	8000	68

Tabell 5.5: Materialeegenskaper, X2 NiCoMo 1 8 95

5.2.2 Kalibrasjon av skademodeller

Bruddenergi:

$$G_c = \frac{1}{E^*} \cdot K_{Ic}^2 = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot K_{Ic}^2$$
$$G_c = \frac{1 - 0.3^2}{190 \text{ GPa}} \cdot (68 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}})^2 = 22147 \text{ Pa} \cdot \text{m} = 0.022147 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}$$

Den kohesive loven:

Vi gjør to analyser for å se hvordan parametrene påvirker bruddutviklingen. I den første er den maksimale åpningen hentet fra [1] der samme kohesiv lov er brukt. I den andre setter vi maksimaltraksjon lik flytespenningen til stålet. Stålet har en høy flytespenning og har en tilnærmet lineær-elastisk oppførsel [33].

$$\delta_{max} = 5,245 \cdot 10^{-2} \text{ mm:}$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 0,022147 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}}{5,245 \cdot 10^{-2} \text{ mm}} = 0,8445 \text{ GPa}$$

$$\tau_{max} = \sigma_y = 2,1 \text{ GPa:}$$

$$\delta_{max} = \frac{2 \cdot 0,022147 \frac{\text{kN}}{\text{mm}}}{2,1 \text{ GPa}} = 2,109 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

SIMLab-modellen

Vi har benyttet den beregnede bruddenergien sammen med en verdi for $\kappa_0 = 4.4 \cdot 10^{-3}$ [34]

5.2.3 Numerisk modell

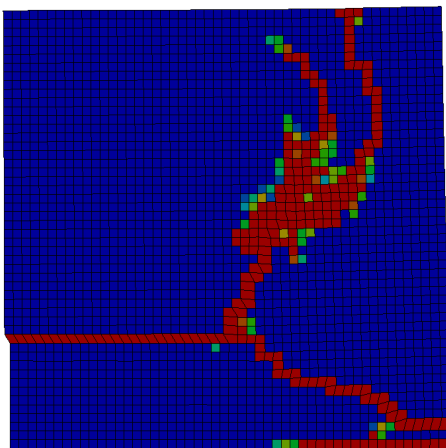
Modellen modelleres etter samme prinsipp som [?]. På grunn av symmetri modelleres kun den øverste halvdel av platen. Vi har plantøyningstilstand så tykkelsen er satt til

enhetstykkelse. Prosjektilet treffer på venstre side av platen, under skåret. Det er tatt utgangspunkt i at prosjektilet har samme elastiske impedans som prøvestykket, så prosjekttilhastigheten settes på som initialfart på nodene der prosjektilet treffer. Siden strekkbrudd inntraff ved lave hastigheter er hastigheten satt til $16,5 \frac{m}{s}$ [1]. Randen i modellen er fri. I XFEM-analysen brukes *precrack*-funksjonen i LS-DYNA for å modellere skåret og i analysen med elementerosjon er skåret modellert med en separasjon på 0,3 mm. Modellen masseskaleres ikke. Curantallet er spesifisert til 0,1 [1]. Analysene kjøres med 50×50 -, 79×79 - og 101×101 -nett for XFEM. I analysen med elementerosjon, *SIMLab-skademodell*, er nettet delt opp i 0,3-mm kvadratiske elementer.

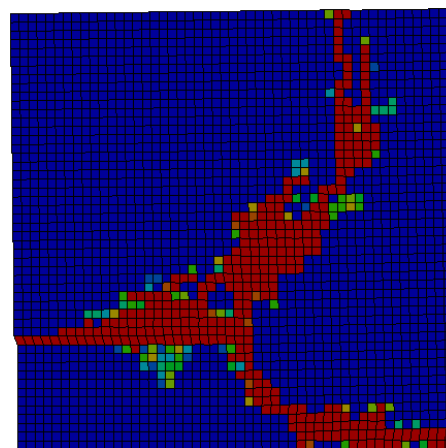
5.2.4 Resultater

Kalthoff og Winkler observerte at bruddet skjedde i en retningen som dannet en vinkel på 70 grader med symmetriaksen [32]. Dette var et strekkbrudd, altså mode I. Song m. fl. [1] gjorde en numerisk studie av forsøket. De brukte XFEM med kohesiv lov og en Lemaitre-skademodell, fantomelementer, 50×50 - og 100×100 -nett og et strekkspenningskriterie som bruddinitieringskriterie. De fikk en initialvinkel på omtrent 64 grader og tilslutt en vinkel på 60 grader når sprekken hadde propagert gjennom platen. De observerte nettavhengighet for bruddvinkelen i de to nettene. Tiden fra sprekkinitering til sprekken hadde propagert gjennom platen var $88,58 \mu s$. I modellen fikk de skade til høyre som følge av bølgerrefleksjon.

Figur ?? og ?? viser analysen med kohesiv lov, med parametere fra [1] med 50×50 -nett. (a) er med underdomeneintegrasjon, (b) er med fantomelementer. $\tau_{max} = 0,8445 \text{ GPa}$ og $\delta_{max} = 5,245 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$. Røde elementer angir sprekker. Vi fikk mye mer skade og forgreninger; dårlig overenstemmelse med eksperimentet.



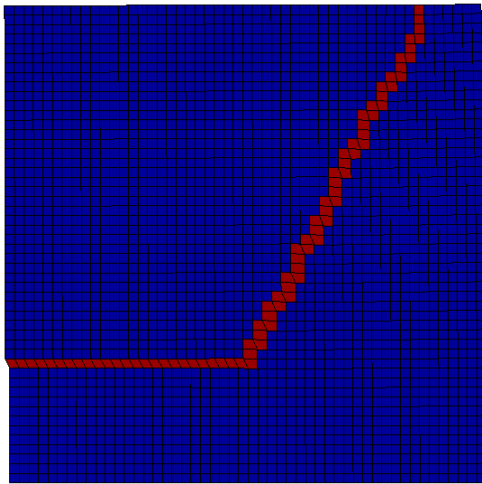
Figur 5.20: (a) Analyse med 50×50 , underdomeneintegrasjon, kohesiv lov fra [1]



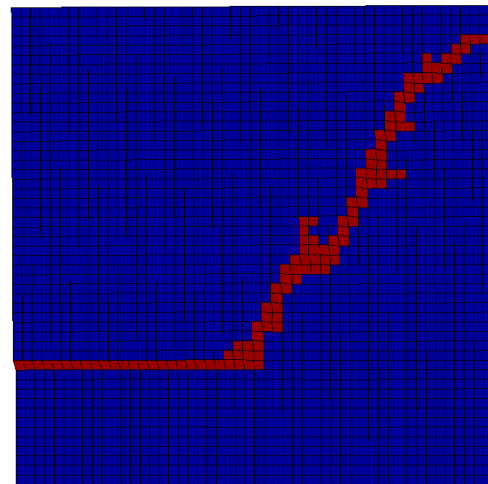
Figur 5.21: (b) Analyse med 50×50 , fantomelement, kohesiv lov fra [1]

Figur ?? og ?? viser resultater fra analysen med vår kohesive lov; $\tau_{max} = 2,1 \text{ GPa}$ og $\delta_{max} = 2,109 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$. Nettet er 50×50 . Vinkelen i (c) danner omtrent 63 grader med symmetriaksen. Fra sprekkiniteringen skjer til sprekken har propagert gjennom hele pla-

ten er det gått $86 \mu\text{s}$. Disse resultatene stemmer godt overens med resultatene fra Song m. fl.[1]. (d) er gjort med fantomelementer istedenfor underdomeintegrasjon. Sprekkvinkelen ble da 54 grader og vi fikk også mer skade, samt små forgreninger.



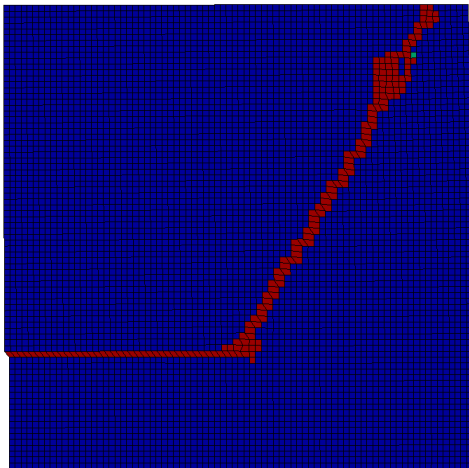
Figur 5.22: (c) Analyse med 50×50 , underdomeintegrasjon, kalibrert kohesiv lov



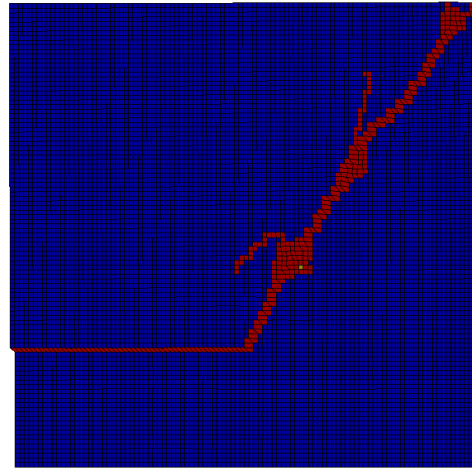
Figur 5.23: (d) Analyse med 50×50 , fantomelement, kalibrert kohesiv lov

Figur ?? og ?? viser resultatene for analysene med underdomeintegrasjon og vår kohesive lov, altså samme som (c), med finere nett på henholdsvis 79×79 og 101×101 . Vinkelen i (e) er omtrent 60 grader og i (f) er den omtrent 56 grader. Et finere nett ser ut til å gi skadekonsentrasjoner og redusering av sprekkevinkel. I (f) har skadekonsentrasjonene resultert i forgreninger. Et finere nett, 101×101 , med fantomelementer er vist i figur ??. Den ene grenen ser ut til å gå i samme retning som i (d), sprekken som propagerer helt gjennom platen danner en vinkel som er betraktelig lavere, ca 37 grader (om vi trekker en linje fra sprekken til skårspissen).

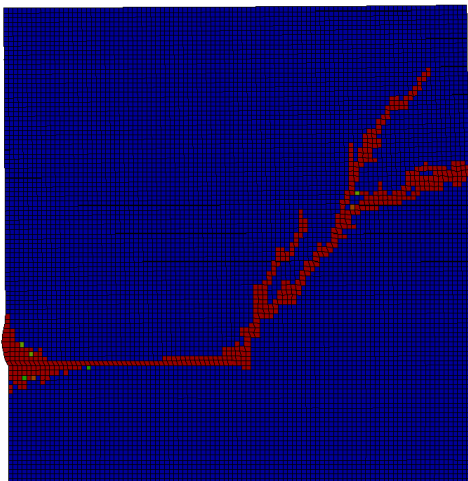
Figur ?? viser resultat fra analysen gjort med *SIMLab*-skademodellen. Denne modellen er avhengig av kubiske elementer for å gi riktig energi. Analysen er gjort med elementstørrelse på $0,3 \times 0,3$. Sprekken starter i en retning som danner omtrent 36 grader med symmetriaksen. Den endrer så retning og går rett opp. Dersom vi trekker en linje fra der sprekken ender til skårspissen, vil denne linjen danne en vinkel på 66 grader med symmetriaksen. Elementnettet er symmetrisk, så et usymmetrisk nett kan gjøre sprekke retningen riktigere, et usymmetrisk nett er problematisk for skademodellen på grunn av avhengigheten av kubiske elementer. Sprekkprogeringen tok $90 \mu\text{s}$, det stemmer godt overens med resultatene i (c).



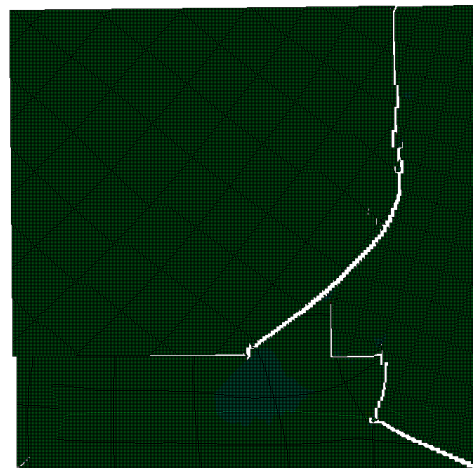
Figur 5.24: (e) Analyse med 79×79 , underdomeneintegrasjon, kalibrert kohesiv lov



Figur 5.25: (f) Analyse med 101×101 , underdomeneintegrasjon, kalibrert kohesiv lov



Figur 5.26: (g) Analyse med 101×101 , fantomelement, kalibrert kohesiv lov



Figur 5.27: (h) Analyse med $0,3 \times 0,3$ -elementer, elementerosjon, *SIMLab-skademodell*

5.2.5 Diskusjon

I den første analysen, figur ?? og ??, er verdiene i den kohesive loven tatt rett ut fra en tilsvarende kohesiv lov[1]. Det resulterte i større sprekker og forgreninger som ikke stemmer overens med eksperimentet til Kalthoff m. fl.[32]. Song m. fl.[1] brukte den kohesive loven sammen med maksimal-strekkspenningskriterie. Maksimal-strekkspenningskriteriet ble brukt sprekkiniteringskriterie, mens den kohesive loven ble brukt for sprekkevæksten.

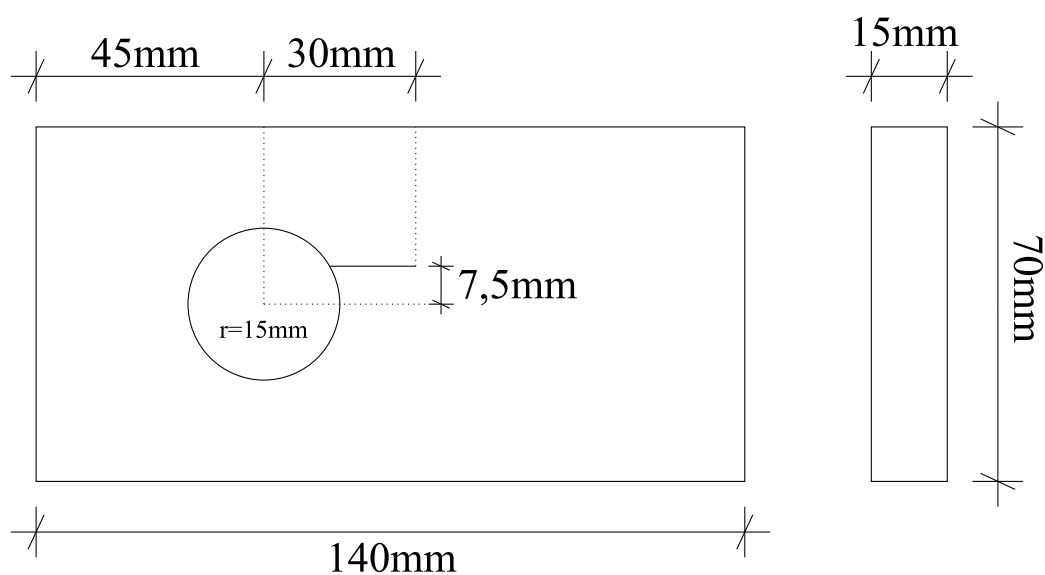
I analysene med vår kalibrerte kohesive lov, figur ?? og ??, ser vi at resultatene gir et rimelig samsvar med de numeriske analysene gjort av Song m. fl.[1] og eksperimentet til Kalthoff m. fl.[32] når nettet er grovt. Med finere nett, figur ?? og ??, i analysene ser

vi at resultatene viser en tendens til å gi større sprekker og forgreninger slik vi så i den første analysen. I motsetning til Song m. fl.[1] opplevde vi altså at finere nett gav dårligere resultater. Det ser ut som at sprekken har for lett for å forgrene seg.

Analysen med elementerosjon, figur ??, klarer ikke å beskrive riktig sprekksti. I denne modellen får vi også en sprekk nede til høyre på platen. Denne er et resultat av bølgerrefleksjon i modellen. Song m. fl.[1] fikk også en slik skade, det gjorde ikke X-FEM-analysene våre.

5.3 Eksperiment 3: Gregoire

D. Grégoire, H. Maigre, J. Réthoré og A. Combescure utførte et eksperiment der de undersøkte dynamisk sprekkvekst [?]. De brukte en plate av polymetylmetakrylat, PMMA, som prøvestykke. Det ble plassert i en testrigg som kalles en “Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB)”. I denne testriggen plasseres prøvestykket mellom to stenger. Stangen på venstresiden blir slått av en tredje stang i forsøket. Slagpulsen kommer fra venstresiden til prøvestykket. I et slikt oppsett må de mekaniske egenskapene til stengene og prøvestykket være slik at kraftpulsene overføres tilstrekkelig godt. I forsøket ble det brukt nylon, siden nylon har lignende mekaniske egenskaper som PMMA. Stengene er runde, med radius 20 mm, og er plassert slik at aksialaksen er på linje med symmetriaksen til prøvestykket. Dimensjoner på prøvestykket er vist i figur 5.28.



Figur 5.28: PMMA, dimensjoner

Prøvestykket har et skår blitt maskinert inn inntil hullet 7,5 mm fra symmetriaksen. Skåret er plassert der for at en skal få mikset-modelast. Lengden på skåret skal være kort nok til at sprekkene ikke påvirkes av grenseffekter når den propagerer.

5.3.1 Materialdata

Materialeegenskaper er gitt i tabell 5.6 [?]. PMMA er et viskoelastisk materiale. Hastigheten lasten påføres med påvirker dermed materialoppførselen og sprekkveksten. Når et viskoelastisk materiale er utsatt for trykk, så vil den dynamiske E-modulen reduseres [?]. I forsøket går en ut i fra elastisk materialoppførsel, men velger å bruke en uniform dynamisk E-modul for å ta hensyn til den viskoelastiske materialoppførselen. Det brukes derfor en sekant-E-modul som istedenfor dynamisk E-modul. Den dynamiske bruddseigheten ble funnet gjennom FEA.

E, statisk [MPa]	E, dynamisk [MPa]	E, sekant [MPa]	ν	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	K_{Ic} [MPa $\sqrt{\text{m}}$]
3300	4250	2400	0.42	1180	1,33

Tabell 5.6: PMMA, materialegenskaper[?]

5.3.2 Kalibrasjon av skademodell

Vi regnet ut bruddenergien fra verdien for K_{Ic} som gav best resultater i [?].

$$G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E_{sekant}} \quad (5.2)$$

$$G_c = \frac{(1,33 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}})^2}{2400 \text{ MPa}} = 7,3704 \cdot 10^{-7} \text{ MPa} \cdot \text{mm} = 7,3704 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kN}}{\text{mm}} \quad (5.3)$$

Vi har gjort en parameteranalyse for å finne gode verdier for den kohesive loven. Vi baserte valget på:

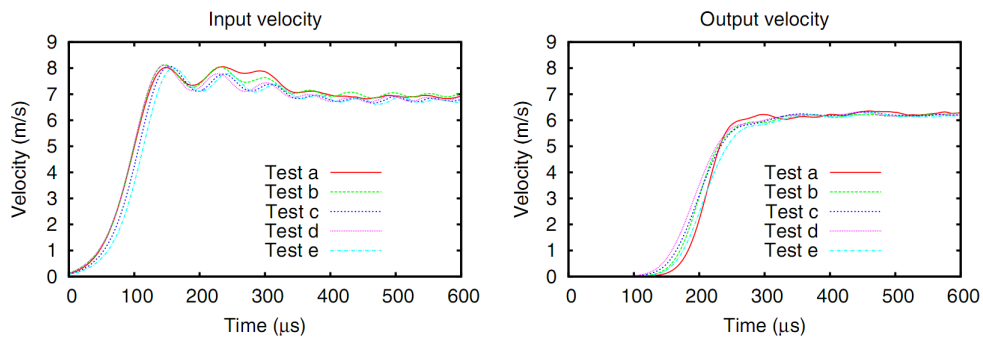
- Bruddinitiering som samsvarer med eksperimentielle data (ved ca 200 μ s)
- Tilsvarende sprekkklengde

Den beste tilnærmingen fant vi med en $\tau_{max} = 0,0425$ GPa:

$$\delta_{max} = \frac{2 \cdot 7,3704 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kN}}{\text{mm}}}{0,0425 \text{ GPa}} = 3,47 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \quad (5.4)$$

5.3.3 Numerisk modell

Vi har modellert prøvestykket i LS-DYNA, og har antatt en elastisk materialoppførsel. Vi brukte sekant modulen istedenfor den vanlige elastisitetsmodulen. Som randbetingelser valgte vi den målte eksperimentelle inn og ut hastigheten. Tallene er hentet fra eksperiment d som vist på figur ???. Hastighetene er satt på nodene i et område på ca 40mm der prøvemaskinen treffer prøvestykket. Analysen varer i $600\mu\text{s}$.

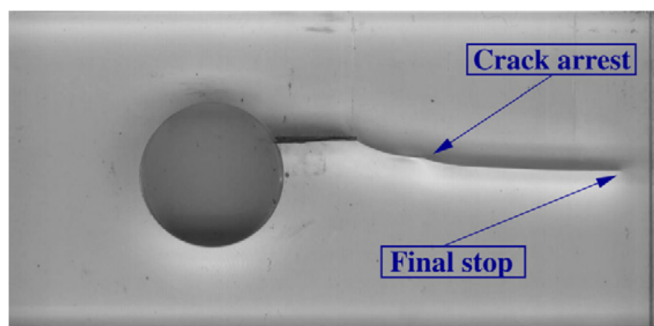


Figur 5.29: Inn og ut hastigheter fra eksperiment[?]

Geometrien er modellert som vist på figur 5.28. Nettet er definert med en gjennomsnittelig maskestørrelse på 1mm. Elementene er gitt enhetstykkelse⁴ og er plan-tøyningsselementer med X-FEM. Sprekken er modellert ved hjelp av *precrack* kommandoen i LS-DYNA. I alle analysene har vi brukt et Couranttall på 0.1.

⁴1mm

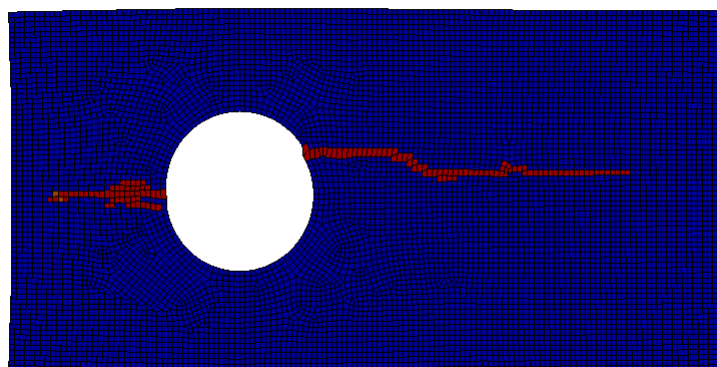
5.3.4 Resultater



Figur 5.30: Prøvestykke etter forsøk [?]

Figure 5.30 viser sprekken i forsøket til Grégoire m. fl.[?]. Sprekkveksten startet ved $200 \mu s$ og vokste i $70 \mu s$, stoppet i $50 \mu s$ og fortsetter igjen til den stopper etter $500 \mu s$. Sprekken går mot symmetriaksen som er sonen som har mest spenning. Den initielle sprekkveksten danner $37,5$ grader med en linje parallellt med skåret[?].

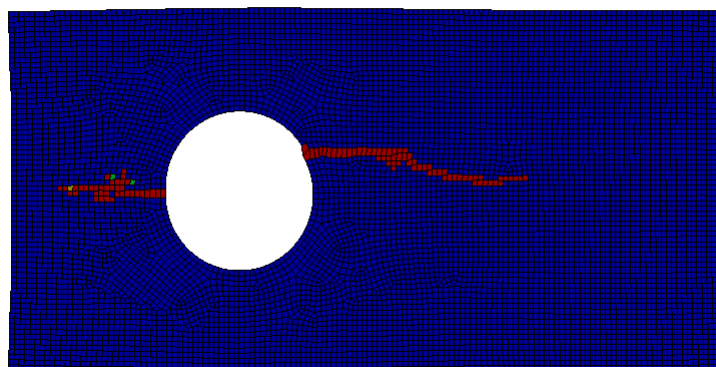
I analysene starter sprekkveksten etter $200 \mu s$ som i forsøket, men sprekken stopper aldri propageringen slik det ble beskrevet i forsøket. Sprekkveksten stanser ved $325 \mu s$.



Figur 5.31: X-FEM-analyse med fantomnoder

Figur ?? viser X-FEM-analysen med fantomnoder. Sprekken går raskere mot symmetriaksen enn forsøket siden propageringen ikke har en midlertidig stopp slik som i forsøket. Vår initielle sprekkvekst danner omtrent 36 grader med en linje parallellt med skåret og nærmest som en rett linje ned til symmetriaksen. Det kommer også en sprekk på den venstre siden av hullet som ikke forekom i forsøket.

Figur 5.32 viser X-FEM-analysen med underdomeneintegrasjon. Sprekkformen stemmer bedre overens med forsøket. Krumningen er positiv i hele sprekken, men sprekken propagerer også her for raskt ned til symmetriaksen siden sprekkveksten ikke har en midlertidig stopp. Før sprekken går mot symmetriaksen får vi en “sprekk”-konsentrasjon ved skårspissen, sprekken propagerer fra dette punktet med en vinkel på omtrent 45 grader og flater ut når den nærmer seg symmetriaksen. Vi får også her en sprekk på venstre siden av hullet.



Figur 5.32: X-FEM-analyse med underdomeneintegrasjon

5.3.5 Diskusjon

Inn- og ut hastighetene i den numeriske modellen vår er tabulerte fra diagrammer gitt i studien til Grégoire m. fl. [?] og kurvetilpasset for at de skal kunne settes på modellen for å simulere inn- og ut-stengene i eksperimentoppsettet. Det kan ha introdusert feil i modellen siden målingene i eksperimentet er beskrevet som upresise. For å oppnå like randbetingelser som i eksperimentet trengs en perfekt synkronisasjon mellom inn- og ut-krefter. Simuleringen vår gir dermed opphav til refleksjonsbølger. Sprekkveksten på venstre side i analysene skjer etter den første har propagert ferdig. Denne ekstra sprekken kan altså skyldes refleksjonsbølger. Mangelen på nøyaktig forsøksdata gjør altså den numeriske simuleringen for dette prøvestykket svært vanskelig.

Kapittel 6

Konklusjon

6.1 Konklusjon

6.2 Konklusjon

X-FEM, den utvidede elementmetoden, er en relativt ny metode for simulering av sprekkvekst. Vi har gått gjennom grunnleggende teori for bruddmekanikk og forklart teorien bak X-FEM. Vi har brukt X-FEM på to prøvestykker fra et laboratorieeksperiment utført på NTNU og på to prøvestykker vi fant i litteraturen. Prøvestykkene fra laboratorie er et CT-prøvestykke og en plate med hull, begge tatt ut fra en AA7075-T651 plate. Denne aluminiumslegeringen er anisotrop og prøvestykkene er tatt ut i to retninger; 0-retningen, med horisontalaksen parallell med valseretningen, og 90-retningen, med horisontalaksen normalt på valseretningen. Prøvestykkene fra litteraturen er en plate av herdet stål og en PMMA-plate med hull. Vi har sammenlignet X-FEM-resultatene med en elementerosjonsmetode med skademodell fra *SIMLab*. Analysene er utført med LS-DYNA, der har vi brukt en kohesiv lov med X-FEM.

X-FEM gir konsekvent bedre resultater enn elementerosjon. Vi har ikke brukt avanserte metoder som for eksempel kontinuerlig nett-tilpassing rundt sprekkspissen i erosjonsanalysene. Nettene er kun tilpasset *SIMLab*-skademodellen, dvs. jevnstore og kvadratiske element.

Den numeriske modellen for CT-testen gav bra samsvar med data fra laboratorieforsøket. Vi fikk kun bruddformen for 0-retningen til materialet, det var forventet siden modellen vår ikke tar hensyn til anisotropien i materialet. I denne analysen var den kohesive loven kalibrert ut fra bruddenergien til et prøvestykke fra forsøket. Vi skalerte den kohesive loven til å passe prøvestykkene i plate-testen. Her fikk vi bruddformen til både 0- og 90-retningen avhengig av hvilken integrasjonsmetode vi brukte. Begge metodene gav for lave krefter ved brudd, men viste bedre overføringsverdi enn hva vi så for elementerosjon. Materialet var sterkere i 90-retningen så vi kjørte en ny analyse kalibrert for CT i 90-retningen. Det gav gode resultater for kraften ved brudd i platen, men bruddet gikk ikke mot hullet.

For Kalthoff-eksperimentet greide vi å replikere resultater som vi har sett i [1] [2]. Vi opplevde at resultatene var avhengige av elementstørrelse. Vi fikk dårligere resultater med mindre elementer. Etterhvert som nettet ble gjort mindre gav sprekken større skade og fikk forgreninger. Dette går i mot det vi har sett i litteraturen, Song m.fl.[1] fikk bedre resultater med mindre elementer.

For PMMA-eksperimentet replikerte vi sprekkgeometrien, men vi fikk også et brudd der det ikke skulle forekomme. Dessuten stemte ikke sprekkforløpet med forsøket. Dette kommer i stor grad av at vi ikke fikk modellert randbetingelsene i den numeriske modellen godt nok på grunn av dårlig synkronisering av inn- og ut-impulsen.

Det var også stor variasjon i hvilke traksjonsspenninger som var nyttige parametere; i AA7075-T651 brukte vi en verdi som var omtrent tre ganger strekkfastheten til materialet. For stålplaten i Kalthoff-eksperimentet var den absolutte strekkfastheten en god verdi. I PMMA var en verdi rett under strekkfastheten en grei verdi.

Elementerosjonsmetoden fungerte kun på CT-modellen i 0-retningen, i resten de andre analysene resulterte den i feil retning på sprekpropageringen.

6.3 Videre studie

En kan undersøke effekten av en tri-lineær kohesiv lov. Det kan være gunstig å undersøke nærmere hvordan resultatene blir for *SIMLab*-skademodellen med et bedre tilpasset nett. XFEM er en relativt ny implementasjon i LS-DYNA, så med nye programvareversjoner kan det bli nyttig å teste ut analysene gjort i denne oppgaven på nytt.

Bibliografi

- [1] J.-H. Song, P. Areias, and T. Belytschko, “A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes,” *International journal for numerical methods in engineering*, 2006.
- [2] S. Pommier, A. Gravouil, A. Combescure, and N. Moës, *Extended Finite Element Method for Crack Propagation*. John Wiley & Sons, 2011.
- [3] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, “A finite element method for crack growth without remeshing,” *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1999.
- [4] M. Fourmeau, T. Børvik, A. Benallal, and O. Hopperstad, “On the plastic anisotropy of an aluminum alloy and its influence on constrained multiaxial flow,” *International Journal of Plasticity*, 2005.
- [5] T. Anderson, *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*. Taylor & Francis Group, LLC, third ed., 2005.
- [6] R. J. R., “A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks,” *Journal of Applied Mechanics*, 1968.
- [7] M. Janssen, J. Zuidema, and R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*. Vereniging voor Studie en Studentenbelangen te Delft, VSSD, second ed., 2006.
- [8] S. Mohammadi, *Extended Finite Element Method*. Blackwell Publishing, 2008.
- [9] R. J. R. and R. G. F., “Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material,” 1967.
- [10] H. J. W., “Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material,” *J. Mech. Phys. Solids*, 1968.
- [11] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko, “An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2000.
- [12] A. Hillerborg, M. Modeer, and P. E. Petersson, “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements,” *Cement and concrete research*, 1976.
- [13] I. Scheider and W. Brocks, “Cohesive elements for thin-walled structures,” *Computational Materials Science*, 2006.

- [14] N. Moës and T. Belytschko, “Extended finite element method for cohesive crack growth,” *Engng. Fract. Mech.*, 2002.
- [15] G. Zi and T. Belytschko, “New crack-tip elements for xfem and applications to cohesive cracks,” *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 2003.
- [16] A. Carpinteri, “Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive crack propagation,” *Engineering Fracture Mechanics*, 1980.
- [17] J. Melenk and I. Babuska, “The partition of unity finite element method: basic theory and applications,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1996.
- [18] T. Black and T. Belytschko, “Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing,” *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1999.
- [19] J. Dolbow, *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. PhD thesis, 1999.
- [20] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko, “Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method,” *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000.
- [21] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko, “Extended finite element method for three-dimensional crack modeling,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000.
- [22] M. Stolarska, D. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko, “Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001.
- [23] T. Belytschko, H. Chen, J. Xu, and G. Zi, “Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003.
- [24] J. Réthoré, A. Gravouil, and A. Combescure, “An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005.
- [25] T. Menouillard, J. Réthoré, A. Combescure, and H. Bung, “Efficient explicit time stepping for the extended finite element method (x-fem),” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006.
- [26] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, and T. Belytschko, “Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields,” *Internat. J. Numer. Methods. Engrg.*, 1997.
- [27] N. Moes, A. Gravouil, and T. Belytschko, “Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets,” *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 2002.
- [28] P. Burchard, L.-T. Cheng, B. Merriman, and S. Osher, “Motion of curves in three spatial dimensions using a levelset approach,” *J. Comput. Phys*, 2001.
- [29] L. S. T. Corperation, “Efg and xfem cohesive fracture methods in ls-dyna,” 2012.

- [30] K. O. Pedersen, T. Børvik, and O. Hopperstad, “Fracture mechanisms of aluminium alloy aa7075-t651 under various loading conditions,” *Materials and Design*, 2011.
- [31] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley and Sons, Inc, fourth ed., 2002.
- [32] J. Kalthoff and S. Winkler, “Failure mode transition at high rates of shear loading,” 1985.
- [33] J. Kalthoff, “Modes of dynamic shear failure in solids,” *International Journal of Fracture*, 2000.
- [34] J.-H. Song, H. Wang, and T. Belytschko, “A comparative study on the finite element methods for dynamic fracture,” *Comput Mech*, 2007.