

Numerisk modellering av spredning fra kuler og sylindere anvendt i romakustikk

Per Waagø

Master i kommunikasjonsteknologi
Oppgaven levert: Juni 2010
Hovedveileder: Ulf R Kristiansen, IET
Biveileder(e): Peter Svensson, IET

Oppgavetekst

Mange konsentrerte spredende element i et rom kan ha en gunstig diffuserende effekt på lyden. Dette skal undersøkes ved hjelp av numeriske simuleringer.

Detaljert undersøkelse av spredning fra de enkelte elementene, kuler og sylindere, skal også foretas, både analytisk og numerisk.

Oppgaven gitt: 29. januar 2010
Hovedveileder: Ulf R Kristiansen, IET

Sammendrag

Denne oppgaven handler om spredning av lyd fra kuler og sylindere. Den diffuse-rende effekten til en konstellasjon av spredende sylindere i et rom undersøkes ved hjelp av numeriske simuleringer med endelig element-metoden utført i COMSOL Multiphysics. Modellen av rommet er en todimensjonal, forenklet modell inspirert av St. Olavs domkirke i Trondheim hvor det henger flere klynger med kuleformede lamper i glass som trolig bidrar til å gjøre lydfeltet mer diffust.

Spredningsmønstrene fra ei kule og en sylinder studeres og sammenlignes analytisk. Det analytiske uttrykket for spredning fra en sylinder blir også benyttet til å evaluere de numeriske løsningene, og til å evaluere ulike valg for en totalt absorberende grensebetingelse i modellen.

Spredningen fra samlingen av sylindere sammenlignes med spredning fra en enkelt sylinder, et kvadratisk prisme og en plan reflektor, og med spredningen fra en samling kuler, en enkelt kule, en kube, og en kvadratisk reflektor. Sammenligningene gjøres ved hjelp av diffusjonskoeffisienter beregnet fra numeriske simuleringer.

Forord

Denne masteroppgaven har blitt utført ved akustikkgruppa ved institutt for elektronikk og telekommunikasjon, NTNU våren 2010.

Jeg vil gjerne takke mine veiledere, professor Ulf Kristiansen og professor Peter Svensson for kyndig veiledning og gode innspill underveis. Jeg ønsker også å takke Erlend M. Viggen for å ha forklart endelig element-metoden. Sist, men ikke minst vil jeg rette en stor takk til alle på lesesal B125 for et inspirerende og entusiastisk arbeidsmiljø.

Per Waagø,
24. juni 2010

Innhold

1	Innledning	1
1.1	Oppgavens oppbygning	1
2	Spredning av lyd	3
2.1	Andvendelser i romakustikk	3
2.2	Kvantifisering av spredning	4
3	Analytisk løsning	7
3.1	Spredning fra hard kule og sylinder	7
3.2	Matlab-implementasjon	10
3.3	Sammenligning av spredning fra kule og sylinder	11
4	Numerisk modellering	15
4.1	Endelig element-metoden	15
4.2	COMSOL Multiphysics	15
4.3	Sammenligning av numerisk og analytisk løsning	17
5	Modellering av en klynge av sylindere i et rom	21
5.1	Beregning av impulsresponser	24
6	Sammenligning og kvantisering av spredning fra ulike objekter	29
6.1	Beskrivelse av modellene	29
6.2	Polarrespons	31
6.3	Beregning av diffusjonskoeffisienter	34
7	Oppsummering og konklusjon	37
	Bibliografi	40
A	Notasjon	41
B	Kildekode	43

Kapittel 1

Innledning

I St. Olavs domkirke i Trondheim besørges belysningen av kuleformede lamper i glass som henger sammen i klynger. Lampene er såpass store og tallrike at det er grunn til å anta at de også har en hørbar diffuserende effekt på lydfeltet. Dette har gitt inspirasjon til å undersøke spredning fra fritthengende objekter i rom. Et annet eksempel på slike objekter er lysekroner i konsertsaler, som forekommer spesielt hyppig i saler av den eldre typen.

Spredning fra enkle objekter som kuler og sylindere kan beskrives analytisk. Men hvis geometriene er mer kompliserte enn som så, for eksempel i form av konstellasjoner av flere kuler eller sylindere, blir en analytisk tilnærming fort svært komplisert. Derfor er det gunstig å benytte numeriske metoder for å beregne lydfeltet. Det vil bli gjort i denne oppgaven, nærmere bestemt vil endelig element-metoden bli brukt slik den er implementert i programmet COMSOL Multiphysics.

Å studere lydfeltet i et helt rom ved hjelp av endelig element-metoden krever for mye datakraft. Derfor vil jeg forsøke å modellere problemet i to dimensjoner ved å erstatte kulene med sylindere. Det gjør det nødvendig å undersøke forskjellen mellom spredning fra sylindere og spredning fra kuler.

Cox og D'Antonio [5] har beskrevet spredning og diffusjon fra ulike typer veggpaneler utførlig, og de beskriver også de to standardiserte måtene å kvantifisere spredning på: Spredningskoeffisienten og diffusjonskoeffisienten. Studier av spredning fra fritthengende objekter anvendt i romakustikk har det imidlertid ikke lyktes meg å finne. Jeg vil her forsøke å benytte diffusjonskoeffisienten til å kvantifisere spredning fra fritthengende objekter.

1.1 Oppgavens oppbygning

I kapittel 2 redegjøres det kort for fenomenene spredning og diffusjon, deres betydning i romakustikk, og for de standardiserte måtene å kvantifisere dem på. Kapittel 3 inneholder hovedtrekkene i utledningen av de analytiske uttrykkene for spredning fra ei kule og fra en sylinder, etterfulgt av en presentasjon av to Matlab-programmer som beregner det spredte lydfeltet ved hjelp av disse uttrykkene. Programmet blir

så benyttet til å beregne den spredte lydbølgen for en sylinder og for ei kule for ulike frekvenser slik at disse kan sammenlignes.

En presentasjon av COMSOL Multiphysics og hvordan det kan benyttes til å løse spredningsproblemer følger i kapittel 4. Deretter blir løsninger fra COMSOL og Matlab-programmene fra kapittel 3 sammenlignet, slik at feilen som introduseres av de numeriske beregningene kan studeres og forskjellige innstillinger for de numeriske modellene evalueres.

I kapittel 5 gjøres en modellering i to dimensjoner i COMSOL av at lignende rom som kirkerommet i St. Olav domkirke der kulene er byttet ut med sylindre, og sylindrenes mulige innvirkning på lydfeltet studeres. I kapittel 6 sammenlignes spredningen fra en klynge av sylindere med spredningen fra andre objekter i to og tre dimensjoner. Diffusjonskoeffisienten presentert i kapittel 2 blir så benyttet til å karakterisere spredningen.

Presentasjon og diskusjon av resultater finnes i hvert kapittel. I kapittel 7 følger en oppsummering av disse diskusjonene.

Kapittel 2

Spredning av lyd

Dersom en lydbølge treffer en hindring, det vil si en inhomogenitet i mediumet den propagerer i, vil deler av lydbølgen skifte retning. Dette kalles spredning av lyd. Den spredte lydbølgen kan defineres som differansen mellom den virkelige lydbølgen og den uforstyrrede lydbølgen som ville vært der dersom hindringen ikke var til stede. [12]

Størrelsen på hindringen sammenlignet med bølgelengden er avgjørende for hvilken form den spredte lydbølgen antar. Dersom hindringen er mye større enn bølgelengden, vil den spredte bølgen interferere destruktivt med den innfallende bølgen på baksiden av hindringen, og det dannes en skygge der lydtrykket er svært lavt. Hvis hindringen er liten sammenlignet med bølgelengden dannes ingen slik skygge, og den innfallende bølgen blir ikke påvirket i særlig stor grad. Hvis bølgelengden og hindringen er av samme størrelsesorden blir lydbølgen spredt mer eller mindre uniformt i mange retninger, noe som har en diffuserende effekt på lydfeltet.

Dersom en lydbølge treffer en uendelig stor, plan flate, vil vinkelen mellom flata og den reflekterte bølgen være den samme som vinkelen mellom flata og den innfallende bølgen. Denne reflekterte bølgen kalles speilrefleksjon (*specular reflection*), fordi det er denne typen refleksjon av lysbølger som skaper speilbildet i et speil. Hvis flata ikke er helt plan og ujevnhetene er i samme størrelsesorden som bølgelengden, vil noe av lyden bli reflektert i mange andre retninger enn speilrefleksjonsretningen, og vi får en diffus refleksjon. Hvis flata som lydbølgen treffer har endelig utstrekning, vil diffraksjon fra kanten av flata interferere med den reflekterte bølgen, noe som også vil føre til en diffus refleksjon.[10]

Begrepene diffusjon og spredning brukes mye om hverandre, og tydelige definisjoner som skiller de ulike begrepene er vanskelige å finne. [5]

2.1 Andvendinger i romakustikk

Her blir noen anvendinger for diffusjon i romakustikk gjennomgått, med spesiell vekt på konsertsaler. En mer utførlig gjennomgang er å finne hos Cox og D'Antonio. [5]

Tydelige ekkoeffekter i rom er sjelden ønskelige. Disse kan behandles med ab-

sorpsjon, eller ved å spre speilrefleksjonen i mange retninger. I konsertsaler ønsker man gjerne lang etterklangstid, gjerne mellom 1.8 og 2.0 s i saler beregnet for orkestermusikk. Da er det gunstig å benytte diffusjon, framfor å fjerne energi fra lydfeltet med absorpsjon.

Harde glatte sidevegger fører til en ubehagelig frekvensfargingseffekt, av Bera- nek [2] kalt *acoustic glare*.¹ Denne effekten er funnet å være spesielt skjemmende ved høye frekvenser. Diffuserende elementer på veggene, det vil si ujevnheter i samme størrelsesorden som bølgelengden, er et tiltak for å motvirke dette. Det er også å foretrekke hvis det oppleves som at den sene etterklangen kommer fra mange kanter. Dette kan oppnås ved å ha diffuserende elementer i taket og på de øvre delene av veggene.

Det er et etablert resultat at den opplevde akustiske kvaliteten til et konsertsal henger sammen med hvor sterk romlig følelse lyden gir, kvantifisert ved å måle korrelasjonen mellom lyden i de to ørene til et menneske eller et kunstig målehode. [14, 2] For å oppnå dette er tidlige siderefleksjoner viktig. Takrefleksjoner derimot, bidrar ikke til økt romfølelse fordi det er mye vanskeligere å retningsbestemme lyd som kommer ovenfra. Derfor er det gunstig å spre takrefleksjonene mest mulig jevnt ut til sidene.

Det er i romakustikk mest fokus på spredning og diffusjon fra flater, det vil si spredning som oppstår ved å ha diffuserende tak og vegger. Trolig kan fritt hengende spredere også bidra til noe av den samme effekten, ved at direktelyden blir spredt før den når flata som ellers ville hatt behov for diffusjon.

2.2 Kvantifisering av spredning

Det finnes to måter å kvantifisere spredning fra flater på. Den ene, spredningskoeffisienten (*scattering coefficient*), sier hvor stor andel av lydenergien som blir reflektert bort fra speilretningen. Denne er standardisert i ISO 17497 del 1. [7]

Denne koeffisienten brukes til å spesifisere de diffuserende egenskapene til flater i romakustiske simuleringer basert på geometrisk akustikk. Her er lydfeltet modellert ved å la kilden sende ut stråler i alle retninger som så reflekteres fra flatene i rommet. Spredning modelleres ved å la en viss andel av strålene (avhengig av spredningskoeffisienten) bli reflektert i en tilfeldig retning valgt etter en Lambertfordeling.

Spredningskoeffisienten er imidlertid ikke så godt egnet til å evaluere kvaliteten til en akustisk diffuser. Hvis en diffuser omdirigerer lyden til en annen retning enn speilretningen, vil spredningskoeffisienten fortsatt bli høy, selv om lyden ikke blir spredt. Hvis hensikten med diffuseren er å unngå ekko og lett lokaliserbare refleksjoner, vil ikke dette være gunstig, da det bare vil føre til en forflytning av problemet. [5]

Derfor finnes også et annet mål for spredning, diffusjonskoeffisienten. Den er et mål på hvor uniformt lyden blir spredt. Denne er i ferd med å bli standardisert som ISO 17497 del 2, og er beskrevet i AES-4id-2001. [1] Den tar utgangspunkt i polarresponsen til diffuseren som skal karakteriseres.

¹ *Glare* kan bety å skjære i øynene eller å blende.

Polarresponsen sier hvordan den reflekterte lydenergien fordeler seg over en halvsirkel rundt diffusoren som skal karakteriseres dersom diffusoren er designet for å spre lyden i to dimensjoner. Dersom diffusoren er designet for å spre lyden i tre dimensjoner, beregnes polarresponsen over en halvkule. Polarresponsen er avhengig av innfalsvinkel (kildens posisjon) og av frekvens.

Sammenfatningen av en polarrespons til én diffusjonskoeffisient er basert på autokorrelasjon. Diffusjonskoeffisienten til innfalsvinkel ψ er definert som

$$d_{\psi} = \frac{\left(\sum_{n=1}^N 10^{L_n/10}\right)^2 - \sum_{n=1}^N (10^{L_n/10})^2}{(N-1) \sum_{n=1}^N (10^{L_n/10})^2} \quad (2.1)$$

der L_n er lydtrykksnivået målt i posisjon n , og N er antallet posisjoner det er målt i. Denne formuleringen av koeffisienten forutsetter at det er lik avstand mellom alle måleposisjonene. Standarden krever at det skal være en måleposisjon for hver 5° . For å få kun én koeffisient, kalt diffusjonskoeffisient for tilfeldig innfall, kan et gjennomsnitt over alle innfalsvinkler beregnes. Det skal da være minst én kildeposisjon per 10° .

Det finnes ingen standardisert måte å måle spredning fra fritthengende objekter på. Spredningskoeffisienten kan vanskelig benyttes, siden det for annet enn flate reflektorer ikke er noen opplagt speilrefleksjon å sammenligne med. Diffusjonskoeffisienten kan beregnes, da det fint går an å måle polarresponsen til et fritthengende objekt. Imidlertid er det mindre opplagt å evaluere polarresponsen bare over en halvsirkel eller en halvkule, siden et fritthengende objekt vil spre lyden i alle retninger. Men hvis man benytter en 360° polarrespons, vil skyggen det spredende objektet danner for høye frekvenser også inngå i beregningene av diffusjonskoeffisienten.

Kapittel 3

Analytisk løsning

3.1 Spredning fra hard kule og sylinder

Spredning fra enkle geometrier, som for eksempel en enkelt sylinder eller en enkelt kule kan studeres analytisk. Analytiske løsninger for spredning fra to kuler [6] og for ei kule og en flate [11] er også beskrevet i litteraturen, men har langt mer kompliserte løsninger og vil ikke bli gått inn på her.

Spredning fra en hard kule som blir bestrålt med en planbølge er beskrevet både av Morse og Ingard [12] og av Williams [15]. Morse og Ingard beskriver også spredning fra en hard sylinder av uendelig lengde. Utledningene nedenfor støtter seg på disse to bøkene der ikke annet er oppgitt.

Harmoniske bølger i homogene medium er beskrevet av Helmholtzlikningen

$$(\nabla^2 + k^2)p(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.1)$$

der \vec{r} er en posisjonsvektor. I det følgende vil tidsavhengigheten bli sett bort fra. Ligningen løses ved separasjon av variable. Nøyaktig hvordan vil ikke bli gått inn på her, men er utførlig beskrevet andre steder. [8, 15]

Spredningsproblemer løses ved å se på det totale bølgefeltet, p , som en sum av den innfallende bølgen p_i og den spredte bølgen p_s :

$$p = p_i + p_s \quad (3.2)$$

Koordinatsystem for problemet velges ut fra hvilket spredningsobjekt som skal beskrives. For sylindren velges sylinderkoordinater (r, θ, z) , slik at sylindren, som har uendelig utstrekning i z -retningen er beskrevet av ligningen $r = a$, der a er radien til sylindren. Den innfallende bølgen beveger seg langs x -aksen, og er dermed beskrevet av

$$p_i = P_0 e^{ikr \cos \theta} \quad (3.3)$$

der P_0 er amplituden til bølgen.

For kula velges kulekoordinater (r, ϕ, θ) , slik at også kula er beskrevet av ligningen $r = a$ (merk at r er noe annet i dette koordinatsystemet, og at θ her betegner

vinkelen med xy -planet). Koordinatsystemet velges slik at den innfallende bølgen beveger seg langs z -aksen.¹ Dermed blir løsningen aksesymmetrisk om denneaksen, og avhengigheten av ϕ bortfaller. Den innfallende bølgen er dermed også i dette koordinatsystemet beskrevet av

$$p_i = P_0 e^{ikr \cos \theta} \quad (3.4)$$

I sylindervektor koordinater kan den innfallende bølgen også skrives som en uendelig sum av Besselfunksjoner:

$$p_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \cos(n\theta) J_n(kr) \quad (3.5)$$

der J_n er Besselfunksjonen av n te orden, og

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 2 & \text{for } n > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

I kulekoordinater kan den skrives som en sum av sfæriske Besselfunksjoner (j_n) og Legendrepolymer (P_n).

$$p_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (3.7)$$

De sfæriske Besselfunksjonene er definert som

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad (3.8)$$

Den spredte bølgen er for sylindertilfellet en utgående, sylindrisk bølge, beskrevet av

$$p_{s, \text{sylinder}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\omega) H_n(kr) \cos(n\theta) \quad (3.9)$$

der H_n er Hankelfunksjoner av første type, $H_n(x) = J_n(x) + iY_n(x)$, og funksjonene $A_n(\omega)$ skal bestemmes fra initialbetingelsene.

Det spredte feltet fra kula er beskrevet av

$$p_{s, \text{kule}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\omega) h_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (3.10)$$

der h_n er sfæriske Hankelfunksjoner av første type. De er relatert til de sylindriske Hankelfunksjonene på samme måte som de sfæriske Besselfunksjonene er relatert til de sylindriske Besselfunksjonene. $B_n(\omega)$ er funksjoner som skal bestemmes fra initialbetingelsene.

¹Når det spredte feltet framstilles i figuren senere i oppgaven, roteres koordinatsystemet slik at z -aksen peker i samme retning som x -aksen

Nå gjenstår det å bestemme $A_n(\omega)$ og $B_n(\omega)$. At spredningsobjektene er harde, vil si at den partikkelhastigheten normalt på overflaten til spredningsobjektene må være 0, noe som sammen med Eulers ligning gir

$$\frac{\partial}{\partial r} p_t = \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.11)$$

Dermed kan $A_n(\omega)$ beregnes:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{s, \text{sylinder}} \Big|_{r=a} = - \frac{\partial}{\partial r} p_i \Big|_{r=a} \quad (3.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\omega) H'_n(ka) \cos(n\theta) = -P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \cos(n\theta) J'_n(ka) \quad (3.13)$$

der $'$ betegner den deriverte med hensyn på argumentet. Det gir

$$A_n(\omega) = -P_0 \epsilon_n i^n \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} \quad (3.14)$$

For Bessel- og Hankelfunksjonene er den deriverte gitt av [8]

$$J'_n = \frac{1}{2} (J_{n-1} - J_{n+1}) \quad (3.15)$$

$$H'_n = \frac{1}{2} (H_{n-1} - H_{n+1}) \quad (3.16)$$

$B_n(\omega)$ beregnes på samme måte:

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{s, \text{kule}} \Big|_{r=a} = - \frac{\partial}{\partial r} p_i \Big|_{r=a} \quad (3.17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\omega) h'_n(ka) P_n(\cos \theta) = -P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j'_n(ka) P_n(\cos \theta) \quad (3.18)$$

som gir

$$B_n(\omega) = -P_0 i^n (2n+1) \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} \quad (3.19)$$

der den deriverte av de sfæriske Bessel- og Hankelfunksjonene er gitt av

$$j'_n(x) = j_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} j_n(x) \quad (3.20)$$

$$h'_n(x) = h_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} h_n(x) \quad (3.21)$$

Dermed er

$$p_{s, \text{sylinder}} = -P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} H_n(kr) \cos(n\theta) \quad (3.22)$$

$$p_{s, \text{kule}} = -P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (3.23)$$

3.2 Matlab-implementasjon

En Matlab-implementasjon av spredning for en enkelt kule og en enkelt sylinder, slik det er beskrevet av ligningene 3.22 og 3.23 gjør det mulig å studere hvordan spredningseffektene varierer med frekvens, og å sammenligne spredningen fra ei kule og en sylinder. Det gjør det også mulig å evaluere nøyaktigheten til numeriske løsninger. Kildekode er å finne i appendiks B.

Funksjonene `scatcyl` (B.2) og `scatsphere` (B.1) beregner det spredte, komplekse lydtrykket for henholdsvis ei kule eller en sylinder når de blir truffet av en planbølge gitt av

$$p_i = e^{ikr \cos \theta} \quad (3.24)$$

Trykket beregnes i (r, θ) -planet, og er uavhengig av z i sylinder tilfellet og uavhengig av ϕ (rotasjonssymmetrisk) i kule tilfellet.

Funksjonene tar inn som parametere radien a til kula eller sylinderen, bølgetallet k til den innfallende planbølgen, hvor mange ledd N av de uendelige summene som skal tas med i beregningen, og koordinatene trykket skal beregnes for. Funksjonene returnerer det spredte trykket p_s , og den tilhørende innfallende bølgen, p_i .

Koordinatene oppgis som vektorer eller matriser av r og θ -verdier. Dersom koordinatene er oppgitt som matriser, får trykkmatrisene samme form som koordinatmatrisene. Denne måten å spesifisere koordinater på er velegnet dersom trykket ønskes beregnet i et plan spesifisert i et kartesisk koordinatsystem. Følgende eksempel viser hvordan trykket avbildet i figur 3.1a er beregnet:

```
1 a=0.5;
2 k=2;
3 [x,y]=meshgrid(linspace(-8,8,800),linspace(-8,8,800));
4 [th,r]=cart2pol(x,y);
5 [p_s,p_i]=scatcyl(r,th,a,k);
6 surf(x,y,20*log(abs(p_s)./2e-5));
```

Dersom koordinatene er oppgitt som vektorer, returneres en matrise med like mange rader som det er θ -verdier, og like mange kolonner som det er r -verdier. Denne måten å spesifisere koordinatene på er egnet for å beregne trykket i et sirkulært område spesifisert i polarkoordinater. Her er et eksempel der et område med radius 3 m beregnes og visualiseres:

```
1 a=0.5; %Radius
2 k=2; %Boelgetall
3 th=linspace(0,2*pi,360);
4 r=linspace(a,3,200);
5 [p_s,p_i]=scatcyl(r,th,a,k);
6 [th_temp,r_temp]=meshgrid(th,r);
7 [x,y]=pol2cart(th_temp,r_temp);
8 surf(x,y,real(p_s));
```

De mest tidkrevende operasjonene i beregningene er evalueringen av besselfunksjonene og lagrangepolynomene (i kule tilfellet). Faktorene som inneholder besselfunksjoner er kun avhengige av radius og bølgetall, og faktorene med lagrangepolynomer er kun avhengige av θ . Dersom koordinatene er spesifisert som vektorer, kan disse faktorene beregnes separat før resultatet for hele løsningsområdet beregnes

ved å beregne ytreproduktet av faktorene.

$$j_n(k\vec{r}) \otimes P_n(\cos\theta) \quad (3.25)$$

Er koordinatene spesifisert som matriser, må alle faktorene evalueres for alle punktene i løsningsområdet, noe som tar mye lengre tid.

Evalueringen av lagrangepolynomene er ikke frekvensavhengig. Det er ofte behov for å beregne løsninger for de samme koordinatene, men for flere frekvenser. Dette utnyttes i effektiviseringsøyemed, ved at resultatet av evalueringen av lagrangepolynomene (B.3) lagres til neste gang funksjonen kjøres. Dersom koordinatene er de samme, returneres de lagrede resultatene, dersom det er nye koordinater slettes alle resultater. (Rent teknisk gjøres dette i Matlab ved hjelp av en persistent-variabel, som er en variabel som beholder sin verdi mellom hver gang en funksjon kjøres.)

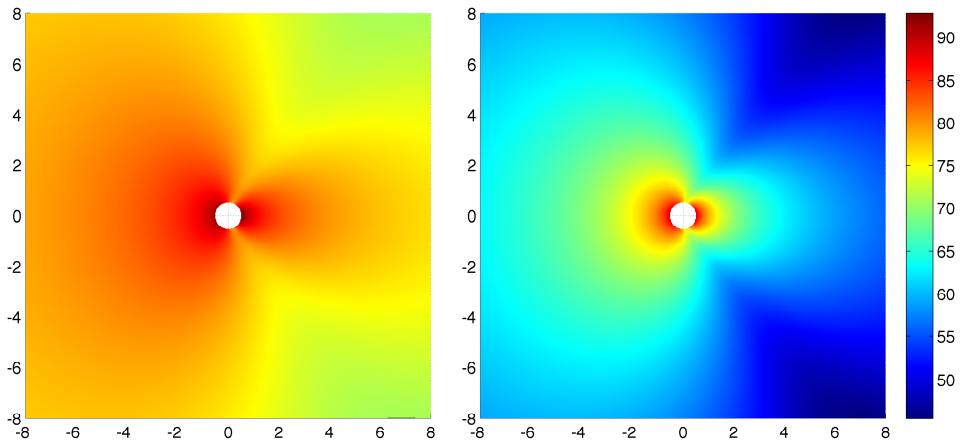
3.3 Sammenligning av spredning fra kule og sylindrer

Ved hjelp av Matlab-programmene beregnes det spredte lydtrykket fra en sylinder og ei kule med radius $a = 0,5\text{ m}$ over et område på $16 \times 16\text{ m}$ med en oppløsning på 2 cm når de blir truffet av en planbølge som propagerer i positiv x-retning med amplitude 1 Pa . Lydtrykket er beregnet for $ka = 1, 4$ og 32 , det vil si for frekvensene $109, 437$ og 1747 Hz . I figur 3.1 vises lydtrykksnivået til den spredte bølgen. I figur 3.2 vises realdelen av det totale lydtrykket, og i figur 3.3 vises det totale lydtrykksnivået.

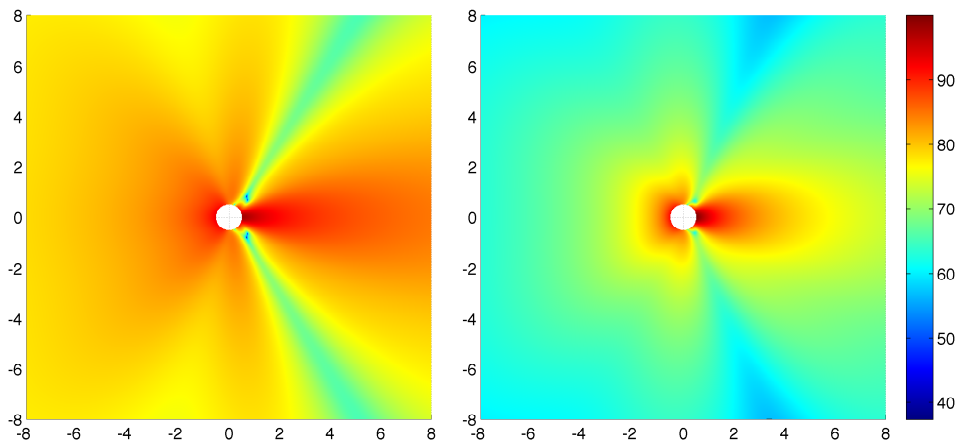
Av figur 3.1 framgår tylig at det spredte lydtrykket fra ei kule avtar mye raskere med avstanden enn lydtrykket fra en sylinder. Det kan også sees ved å studere formlene 3.23 og 3.22. Faktorene som er avhengig av avstand i de to formlene er henholdsvis $h_n(kr)$ og $H_n(kr)$. $h_n(kr) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}(kr)$, og forholdet mellom dem er dermed $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Dette virker rimelig, da lydtrykket avstrålt fra ei kule avtar som $\frac{1}{r}$, mens lydtrykket avstrålt fra en sylinder avtar som $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Det vil si at det spredte lydtrykksnivået fra kula avtar med 6 dB per avstandsdobling, mens det spredte trykket fra sylindren avtar med 3 dB .

Konsekvensen av dette er at påvirkningen på bølgefeltet er mye større fra sylindren enn fra kula. Dette framgår spesielt tydelig av figur 3.2. Selv om påvirkningen kan observeres mye tydeligere fra sylindren, ligner spredningsmønstrene på hverandre, siden både kula og sylindren sprer trykket jevnt i alle retninger på forsida av objektet (til venstre i figurene). Bak objektene dannes skygger der lydtrykksnivået er svært lavt. Skyggene blir skarpere med økende frekvens. Det framkommer tydelig av figur 3.3.

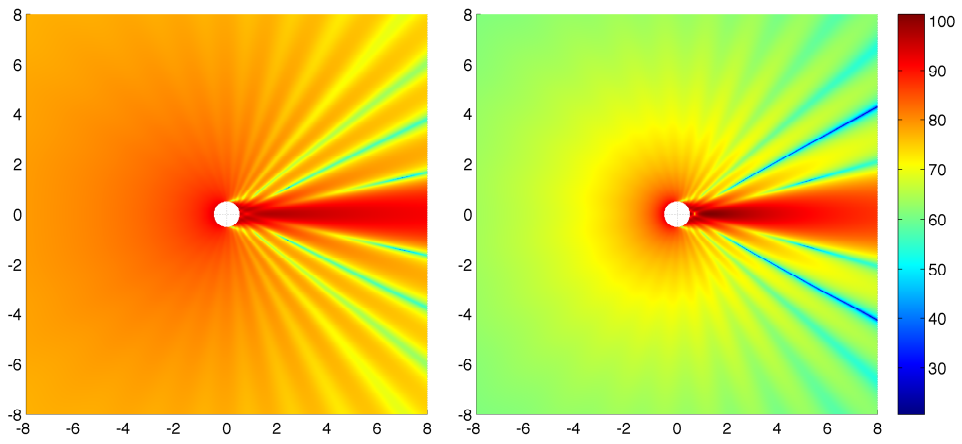
En svært viktig forskjell på bølgefeltene som ikke kommer fram i disse todimensjonale figurene, er hvordan bølgefeltet egentlig ser ut i tre dimensjoner: Bølgefeltene med sylindere er de samme uavhengig av z-retning, mens bølgefeltene med kuler er rotasjonssymmetriske om x-aksen i figurene.



(a) $ka = 1$

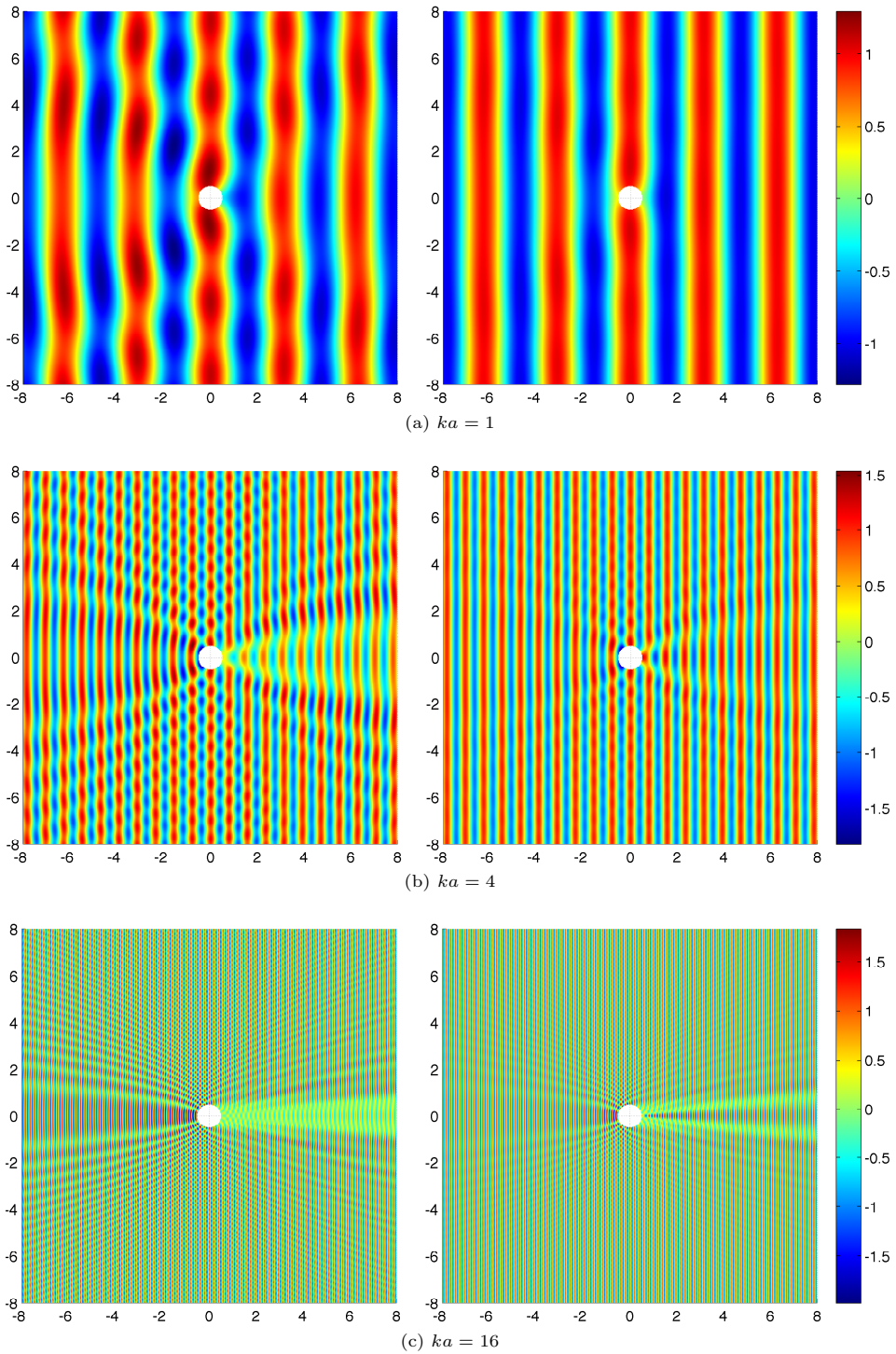


(b) $ka = 4$

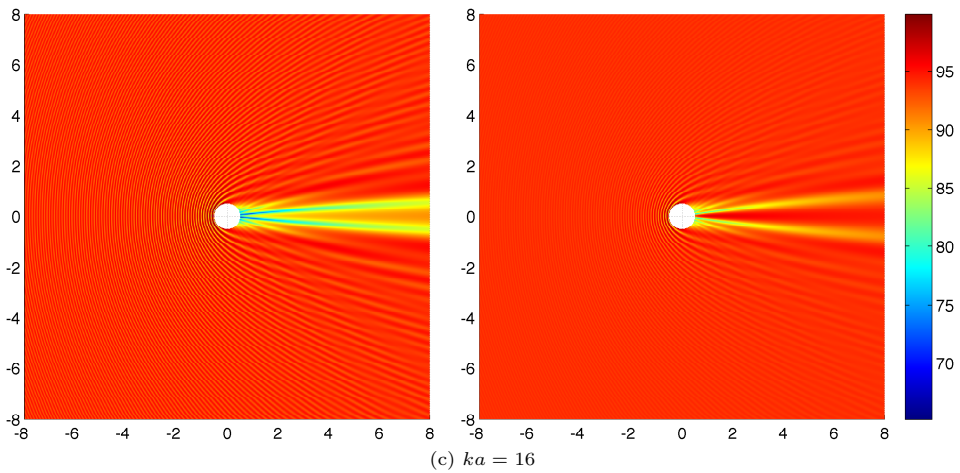
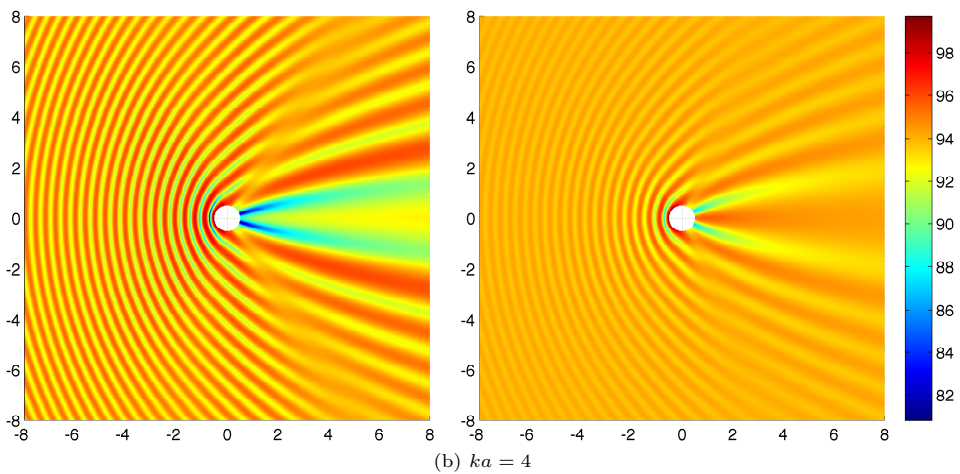
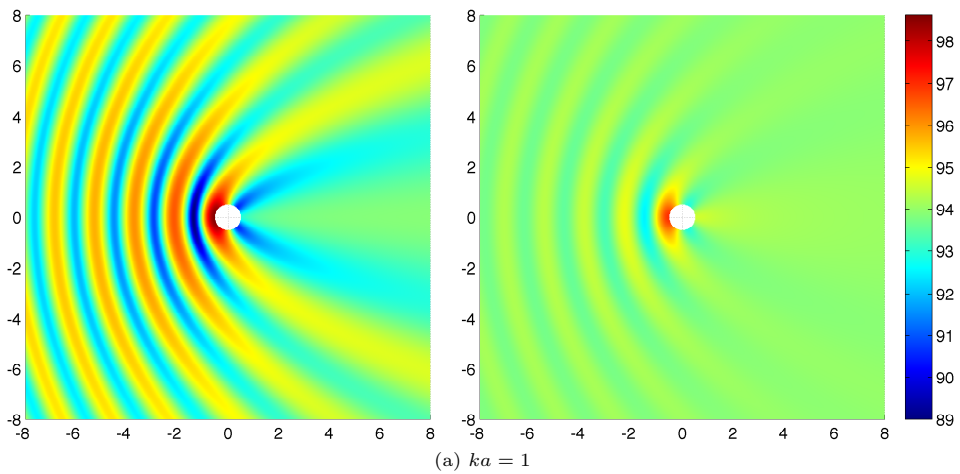


(c) $ka = 16$

Figur 3.1: Det spredte lydtrykksnivået (i dB) fra en sylinder (til venstre) og kule (til høyre)



Figur 3.2: Det totale lydfeltet $\text{Re}\{p_i + p_s\}$ i Pascal. Cylinder (til venstre) og kule (til højre)



Figur 3.3: Lydtrykksnivå (i dB). Sylinder (til venstre) og kule (til høyre)

Kapittel 4

Numerisk modellering

For å kunne løse partielle differensialligninger for mer kompliserte geometrier og grensebetingelser, kan numeriske metoder benyttes. Her vil endelig element-metoden, implementert i programmet COMSOL Multiphysics bli benyttet. Programmet gjør det mulig å løse problemer for kompliserte geometrier uten å kjenne alle detaljene i de aktuelle differensialligningene eller den numeriske metoden.

4.1 Endelig element-metoden

Endelig element-metoden fungerer ved at domenet der problemet skal løses, som kan være en-, to- eller tredimensjonalt, deles opp i elementer, eller masker. Her antas for enkelhets skyld at problemet, og dermed elementene, er todimensjonale. Da er elementene polygoner som kan dekke hele problemdomenet.

Hjørnene til elementene kalles noder. Endelig element-metoden forsøker å estimere den ukjente (trykket p) i disse nodene. Trykket i et vilkårlig punkt i et element med tre noder kan da skrives som

$$p(x, y) = N_1(x, y)p_1 + N_2(x, y)p_2 + N_3(x, y)p_3 \quad (4.1)$$

der p_i er trykket i node i og $N_i(x, y)$ er basisfunksjonen til node i . Basisfunksjonene er funksjoner som er valgt slik at de er 1 i noden de tilhører, og 0 i alle andre noder, og slik at summen av alle basisfunksjonene er 1 i hele elementet. For å få basisfunksjoner som kan brukes for alle elementene i problemet, velges gjerne lokale koordinatsystemer for hvert element, og basisfunksjonene settes til å være null utenfor elementet der de er gyldige.

Metoden finner så trykket i nodene, og trykket for hele domenet kan dermed interpoleres.[9]

4.2 COMSOL Multiphysics

Svært mange ulike problemer kan løses i COMSOL, og svært mange parametere kan stilles inn. Her følger en kort beskrivelse av de problemtypene og innstillingene

som benyttes i modellene i denne oppgaven. For mer utførlige beskrivelser vises det til COMSOL-dokumentasjonen.[4, 3]

Modelleringen foregår ved at modellens geometri tegnes ved hjelp av programets innebygde DAK-verktøy. Modellene som brukes her består gjerne av et stort objekt som representerer løsningsdomenet. Fra dette fjernes så de spredende objektene som skal studeres. Da vi antar at disse ikke blir påvirket av lydtrykket, er det kun grensebetingelsene rundt de spredende objektene som er av interesse, selve objektene er ikke en del av modellen.

COMSOL har innebygde modi for ulike anvendelser, med forhåndsdefinerte differensialligninger og variabler. Akustikk, med lydtrykket som avhengig variabel («Pressure acoustics») er en slik modus. Differensialligningen som løses her er bølgeligningen for et tapsløst medium:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p(\vec{r}, t) = Q + \nabla \vec{q} \quad (4.2)$$

der ρ_0 er tettheten og c er bølgehastigheten i mediet, Q er en monopolkilde og \vec{q} en dipolkilde. Dipolkilder vil ikke bli benyttet her, så \vec{q} vil i det følgende alltid være 0.

4.2.1 Analysetyper

Ulike formuleringer av differensialligningen, ulike analysetyper, kan velges i programmet. To av dem vil bli benyttet her, nemlig tidsharmonisk analyse og transientanalyse.

Ved tidsharmonisk analyse antas at tidsavhengigheten til trykket er

$$p(\vec{r}, t) = p(\vec{r})e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

Hvis dette settes inn i 4.2 og begge kildene settes til 0, reduseres 4.2 til den homogene Helmholtz-ligningen

$$\left(\nabla^2 + k^2 \right) p(\vec{r}) = 0 \quad (4.4)$$

der $k = \frac{\omega}{c}$ er bølgetallet. Ligningen kan løses enten med hensyn på det totale eller det spredte lydtrykket. Dersom det løses med hensyn på det spredte lydtrykket, p_s , settes $p = p_i + p_s$. Det gir mulighet til å spesifisere en innfallende bølge, p_i , for eksempel en planbølge.¹

Transientanalyse brukes for å se hvordan trykkfordelingen utvikler seg over tid. Da kan en tidsavhengig kilde inngå. For en punktkilde (monopol) blir den

$$Q = \frac{\partial S}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (4.5)$$

der \vec{r}_0 er posisjonen til kilden. Her vil en Gauss-puls bli benyttet. Da er

$$S(t) = Ae^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_p)^2}, \quad \frac{1}{f_0} - t_p < t < \frac{1}{f_0} + t_p \quad (4.6)$$

¹ p_i kan også spesifiseres dersom ligningen løses med hensyn på det totale trykket, men da må minst en av flatene ha strålingsbetingelse som grensebetingelse

der A er amplituden, f_0 er båndbredden til pulsen, og t_p er tidspunktet pulsen når sitt maksimum. Differensialligningen blir da

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p(\vec{r}, t) = -2A\pi^2 f_0^2 (t - t_p) e^{-\pi^2 f_0^2 (t - t_p)^2} \quad (4.7)$$

4.2.2 Grensebetingelser

En rekke forskjellige grensebetingelser er tilgjengelige i COMSOL Multiphysics. Her er det spredning fra harde objekter som skal modelleres, så grensebetingelsen «*Sound hard boundary (wall)*» vil bli brukt på grensene mot de spredende objektene.

For ytterkantene til løsningsdomenet ønskes fullstendig absorpsjon for å simulere at det spredende objektet befinner seg i frifelt. Her blir såkalte strålingsbetingelser (*radiation condition*) benyttet. Strålingsbetingelser er grensebetingelser laget slik at en spesifikk bølge slipper gjennom med minimale refleksjoner. Dette kan være en planbølge, en sylindrisk bølge eller en sfærisk bølge. De fleste modeller som studeres har imidlertid mer kompliserte bølgefelt enn som så. Derfor blir det alltid noe refleksjon også fra disse grensene.

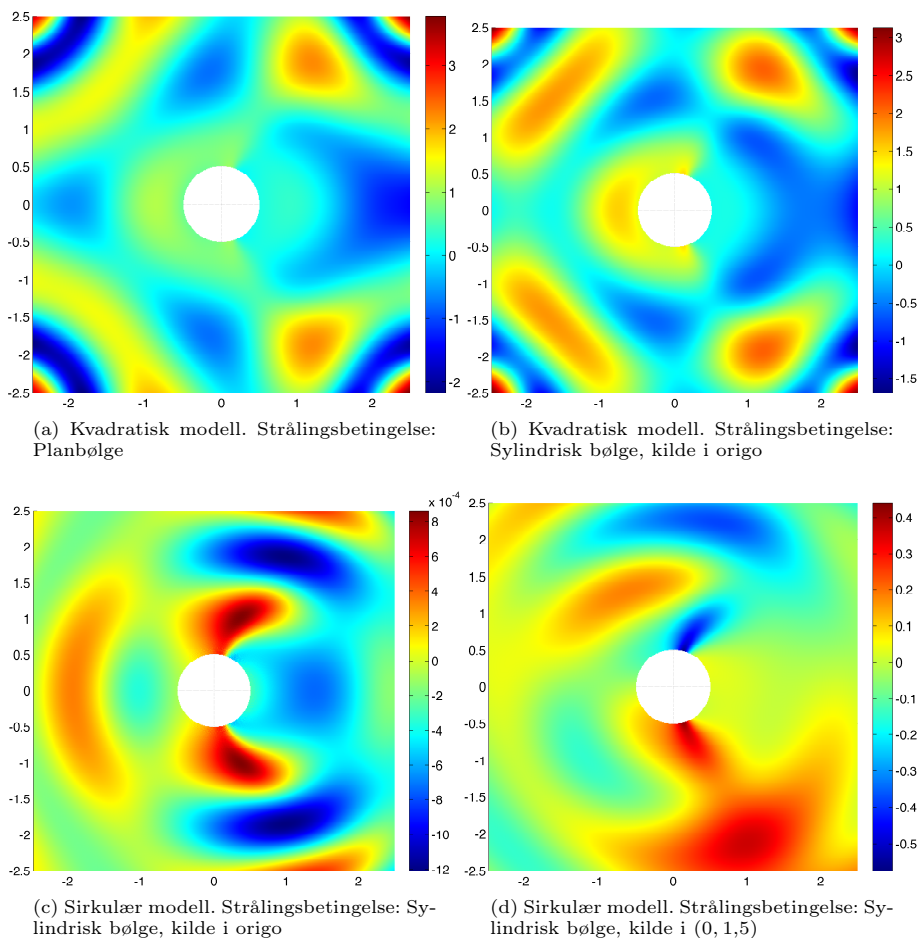
4.2.3 Oppdeling i maskenett

Som beskrevet i avsnitt 4.1 må området der problemet skal løses deles opp i et maskenett. Dette kan COMSOL gjøre automatisk, for eksempel ut fra en spesifisert maksimal elementstørrelse. Hvor fint maskenettet er avgjør hvor høyt opp i frekvens problemet kan løses. I følge COMSOL-manualen bør det være omtrent 12 frihetsgrader per dimensjon og bølgelengde. For å oppnå dette hvis andreordens Lagrange-elementer benyttes (standard for løsning av akustikk-problemer i COMSOL), må den maksimale elementstørrelsen settes til omtrent en femtedels bølgelengde.

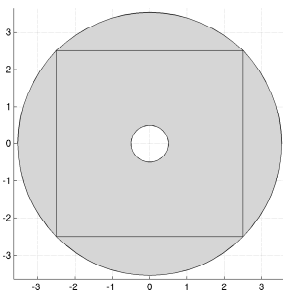
4.3 Sammenligning av numerisk og analytisk løsning

Nøyaktigheten til de numeriske løsningene fra COMSOL kan evalueres ved å sammenligne dem med den analytiske løsningen. Spesielt er det interessant å studere hvordan forskjellige valg av grensebetingelse for ytterkanten av modellen påvirker nøyaktigheten, og også om modellens form (kvadratisk eller sirkulær) har noe å si.

For å finne ut det, beregnes p_s over et område på 5×5 m når en sylinder med radius $a = 0,5$ m blir bestrålt med en planbølge som propagerer i positiv x-retning med $ka = 1$, både ved hjelp av Matlab-implementasjonen beskrevet i forrige kapittel (med $N = 50$), og ved hjelp av COMSOL. Figur 4.1 viser forskjellen mellom den analytiske løsningen og de numeriske løsningene i decibel.



Figur 4.1: Spredt trykk fra sylinder med radius 0,5 m, $ka = 1$. Forskjell mellom løsninger fra Comsol og analytisk løsning i decibel. Akser i meter.



Figur 4.2: Geometrien til COMSOL-modellen brukt for å generere 4.1c og (d), med utsnittet brukt i figurene markert.

I figur 4.1a og 4.1b er det benyttet en COMSOL-modell med samme form og størrelse som det som er avbildet i figuren, og strålingsbetingelsen er tilpasset henholdsvis en planbølge og en sylindrisk bølge. Feilen blir ganske stor, opptil 3,5 dB. Feilen er størst i hjørnene av modellen. Strålingsbetingelsen tilpasset sylindrisk bølge kommer noe bedre ut enn strålingsbetingelsen tilpasset en planbølge.

I figur 4.1c og 4.1d er det brukt en sirkulær modell med radius 3,54 m, slik at sirkelen akkurat omskriver kvadratet med løsningsområdet (se figur 4.2). Strålingsbetingelsen i figur 4.1c er tilpasset en sylindrisk bølge med kilde i origo, noe som er ganske likt den faktiske avstrålingen fra cylinderen. Dette gir en dramatisk forbedring, den maksimale feilen er i størrelsesorden $\pm 10^{-3}$ dB, og altså helt neglisjerbar.

De fleste modellene i denne oppgaven består av mer enn ett spredende objekt, slik at strålingsbetingelsen kan ikke alltid tilpasses avstrålingen fra alle objektene i modellen. Derfor er det i figur 4.1d vist hva som skjer hvis strålingsbetingelsen tilpasses en sylindrisk bølge med en kilde forskjøvet 1,5 m i forhold til cylinderen. Feilen blir større (i størrelsesorden $\pm 0,5$ dB), men er fortsatt akseptabel, og bedre enn i begge de kvadratiske modellene.

Sammenligningen mellom den kvadratiske og den sirkulære modellen er ikke helt rettferdig, da den sirkulære modellen har cirka 60% større areal, og dermed er mer ressurskrevende å beregne. Likevel må konklusjonen bli at de sirkulære modellene er bedre, da de kvadratiske modellene har større feil også i nærheten av cylinderen, slik at en kvadratisk modell med 60% større areal ville fortsatt komme dårligere ut.

Kapittel 5

Modellering av en klynge av sylindere i et rom

St. Olav domkirke i Trondheim¹ har gulvflate på omtrent 25×11 m som er 6 m høyt. Bakerst i rommet er et 5 m dypt galleri. Alle flatene i rommet er harde, og rommet har svært lang etterklangstid. Lampene i rommet er seks klynger av glasskuler av en slik størrelse at det er sannsynlig at de har en signifikant innvirkning på lydfeltet. Ellers er det svært få ujevnheter i rommet av en slik størrelse at de kan bidra til særlig diffusjon, kun noen skulpturer ved alteret, og kirkebenkene. Kirkerommet og lampene er avbildet i figur 5.1.

For at rommet skal la seg modellere, må noen forenklinger gjøres. Beregninger i tre dimensjoner for et helt rom av denne størrelsen vil være svært resurskrevende, derfor lages en todimensjonell modell. Den bakre delen av rommet, der galleriet befinner seg, tas ikke med i modellen. Modellen skal forestille et lengdesnitt av kirkerommet, og kulene modelleres som sirkler. Dermed er det egentlig et rom av uendelig bredde, med uendelig lange sylindere som modelleres.

Lydkilden plasseres der en kunne tenke seg at en taler ville stått, og av spesiell interesse er lydtrykket der tilhørerne ville sittet. Taket anses som fullstendig reflekterende. Det meste av gulvet er dekket av tilhørerne, og dette tilnærmes grovt som fullstendig absorberende. Veggene settes også til å være fullstendig absorberende for bedre å kunne se sylindrenes bidrag til lydfeltet.

Modellen består av et rektangel på 19×7 m med nederste venstre hjørne i origo. Fra rektangelet fjernes tre klynger med 11 sirkler. Koordinatene for sentrum og radius til sirklene er oppgitt i tabell 5.1. Kun x -verdiene er forskjellige for de tre klyngene. Kilden er en punktkilde plassert i punktet $(2,1.7)$. Taket og sylindrene har totalt reflekterende grensebetingelser. For gulvet og veggene velges strålingsbetingelse tilpasset en sylindrisk bølge med sentrum i samme punkt som kilden.

For bedre å se effekten av sylindrene, lages også en modell uten sylindre, men med ellers identiske innstillinger.

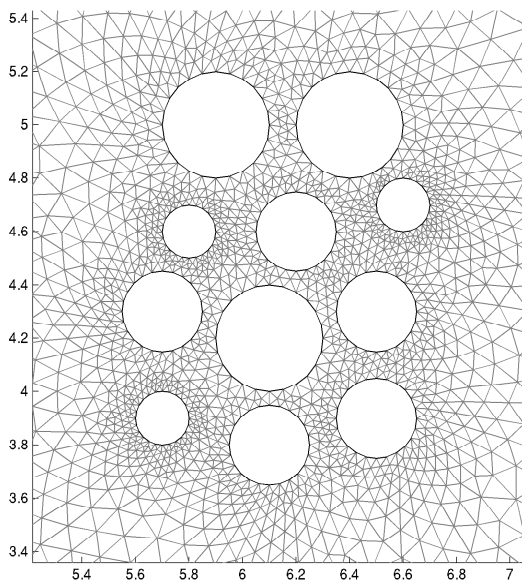
¹St. Olav domkirke er den katolske kirken i Trondheim. Den ligger like ved Elgeseter bro, og ble oppført i 1973. Kirken er planlagt revet for å gjøre plass til en ny kirke.[13]



Figur 5.1: St. Olav domkirke i Trondheim fotografert fra galleriet (øverst). Nærbilde av en av lampeklyngene, fotografert fra undersiden.

Tabell 5.1: Koordinater og radius for sylindrene i modellen. Alle tall i meter.

x_1	x_2	x_3	y	r
5.90	9.90	13.90	5.00	0.20
6.40	10.40	14.40	5.00	0.20
5.80	9.80	13.80	4.60	0.10
6.20	10.20	14.20	4.60	0.15
6.60	10.60	14.60	4.70	0.10
5.70	9.70	13.70	4.30	0.15
6.10	10.10	14.10	4.20	0.20
6.50	10.50	14.50	4.30	0.15
5.70	9.70	13.70	3.90	0.10
6.10	10.10	14.10	3.80	0.15
6.50	10.50	14.50	3.90	0.15



Figur 5.2: Utsnitt av modellen som viser sylindrene beskrevet i tabell 5.1 og maske-nettet rundt dem

For å se hvordan lydtrykket i rommet utvikler seg over tid benyttes transientanalyse. Punktkilden sender ut en Gauss-puls. Samme innstillinger for Gauss-pulsen som i eksempelet «Transient Gaussian Explosion» i COMSOL-manualen benyttes. [3, s. 70–78] Maskenettet lages ved at maksimal masketørrelse settes til 0.15 m. Med 6 bølgelengder per maskelengde gir det båndbredde for pulsen $f_0 = 381$ Hz. Maksimalt tidssteg for løsningen blir 20 μ s.

Simuleringen kjøres for de første 100 ms etter at pulsen sendes ut, og 10 løsninger lagres for hvert millisekund i simuleringen. Løsningene er satt sammen til en animasjon som viser resultatet av simuleringene med og uten sylindere parallelt. Animasjonen har en bildefrekvens på 25 bilder per sekund, hvert sekund av filmen svarer dermed til 2.5 ms av simuleringen. Figur 5.3 viser utsnitt av animasjonen 10, 20, 30 og 40 ms ut i simuleringen, der følgende kan observeres:

10 ms Pulsen har begynt å bre seg utover. Langs den gulvet har bølgefronten blitt noe deformert. Dette er trolig et numerisk problem, strålingsbetingelsen slipper ikke bølgen fullstendig refleksjonsfritt ut av domenet, noe som fører til interferens mellom bølgen og de uønskede refleksjonene.

20 ms Bølgefronten har passert den første sylinderklyngen, og interferensen med den spredte bølgen er tydelig. Sylinderklyngen har også spredt noe av lyden tilbake i et sirkulært mønster rundt klyngen. Bølgefronten har også truffet taket og blitt relektert tilbake, slik at vi nå har to tydelige bølgefronter: Direktelyden og takrefleksjonen.

De uønskede refleksjonene fra gulv og sidevegg er synlige som en hale bak bølgefronten fra direktelyden, spesielt i modellen uten sylindre. Vi kan tydelig se interferens mellom disse refleksjonene og takrefleksjonen.

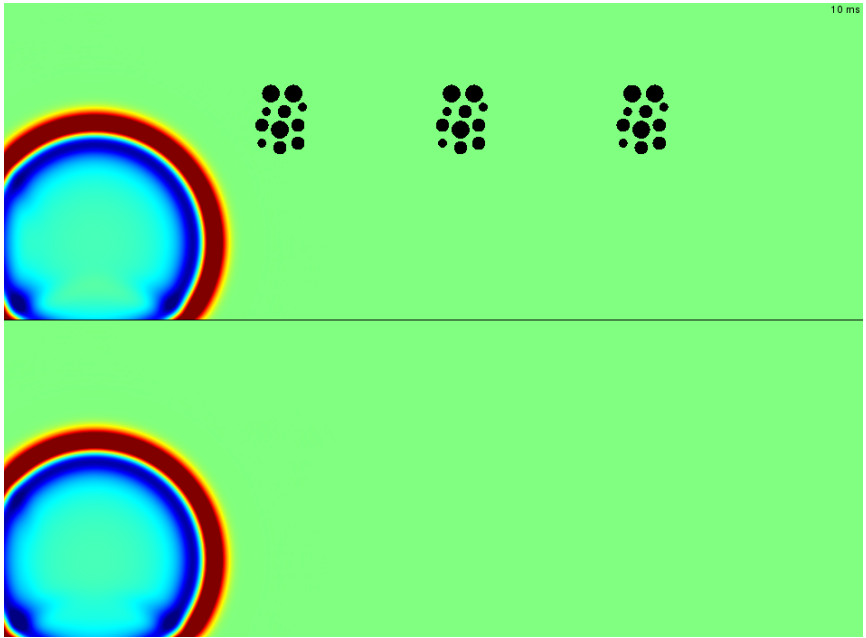
30 ms Direktelyden har passert den andre sylinderklyngen, takrefleksjonen har passert den første sylinderklyngen. Den spredte lyden fra den første sylinderklyngen går foran takrefleksjonen. Også takrefleksjonen har fått en hale av uønskede refleksjoner. Det er vanskelig å skille det spredte trykket fra sylindrene fra de uønskede refleksjonene.

40 ms Takrefleksjonen har passert den andre sylinderklyngen, og er tydelig svakere enn i modellen uten sylindere. Interferens mellom det spredte trykket fra sylinderklyngene har skapt et ganske kaotisk lydfelt.

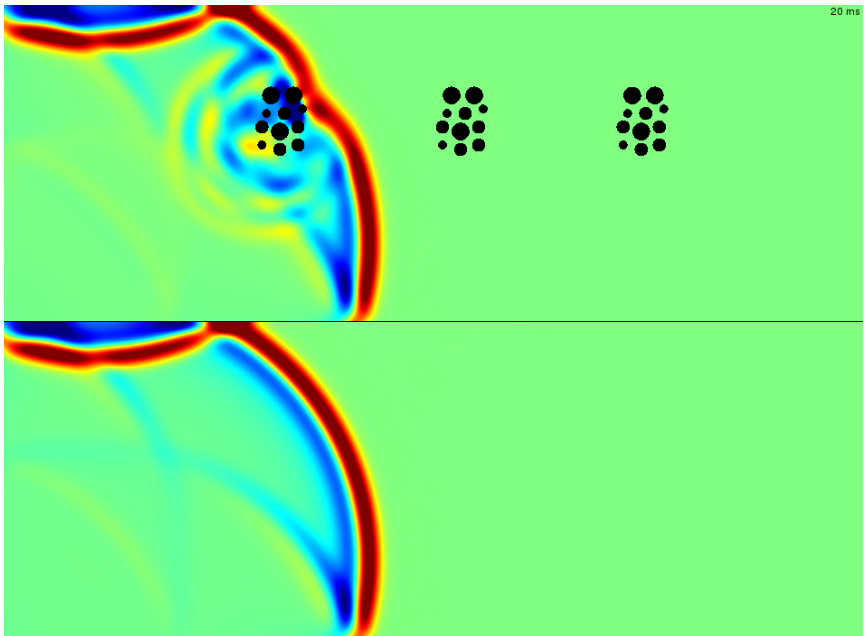
5.1 Beregning av impulsrespons

Det er tydelig at sylindrene påvirker lydfeltet. Et spørsmål som melder seg er hvor hørbart dette er. Fra løsningene er det også mulig å beregne impulsresponsen hvor som helst i modellen. Fra impulsresponsen er det mulig å lese ut hvor kraftige de ulike refleksjonene er.

Fra løsningene kan man lese ut trykket i punktet \vec{r} ved tiden t , $p(\vec{r}, t)$. Dette vil imidlertid ikke være impulsresponsen, men responsen til systemet når det blir

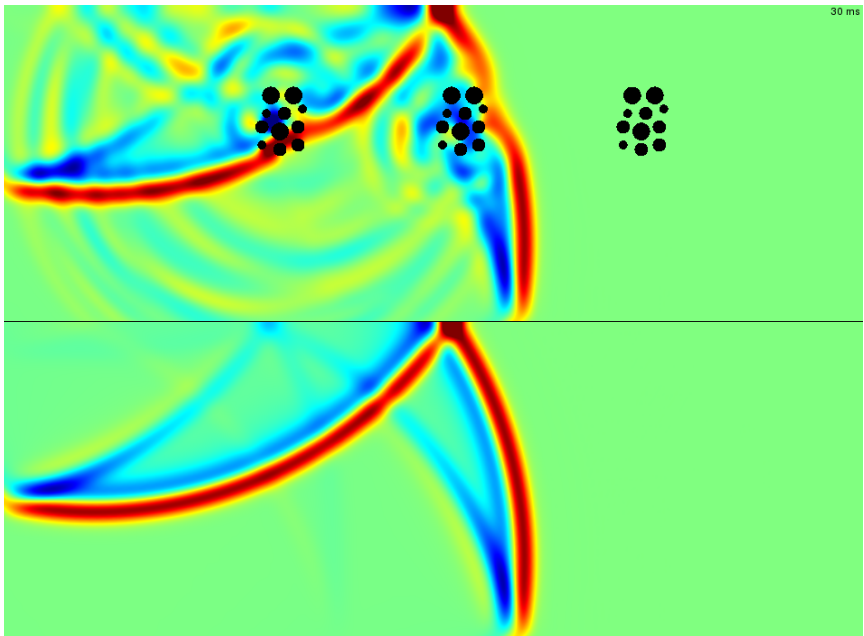


(a) 10 ms

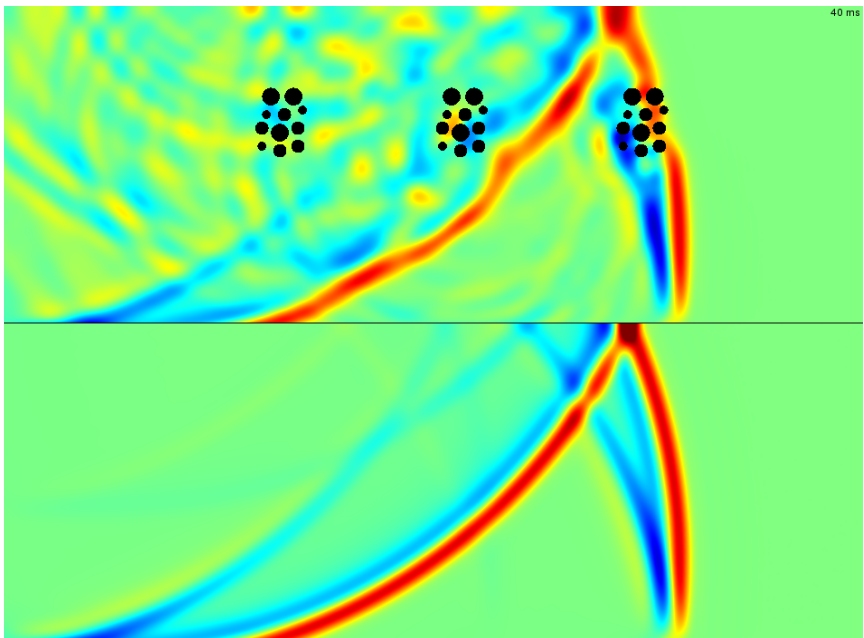


(b) 20 ms

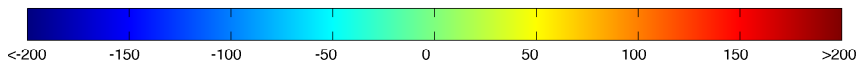
Figur 5.3: Simulering av rom med og uten sylindere



(c) 30 ms



(d) 40 ms



Figur 5.3: Simulering av rom med og uten sylindere

påtrykt en Gauss-puls, $g(t)$. Vi betrakter modellen som et lineært, tidsinvariant system, der den søkte impulsresponsen er $h(\vec{r}, t)$. Da har vi at

$$p(\vec{r}, t) = h(\vec{r}, t) * g(t) \quad (5.1)$$

La $B(\omega)$ være frekvensresponsen til et båndpassfilter som fjerner frekvenser som ikke er med i Gauss-pulsen. Da er impulsresponsen $h(\vec{r}, t)$ gitt av

$$h(\vec{r}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{p(\vec{r}, t)\} B(\omega)}{\mathcal{F}\{g(t)\}} \right\} \quad (5.2)$$

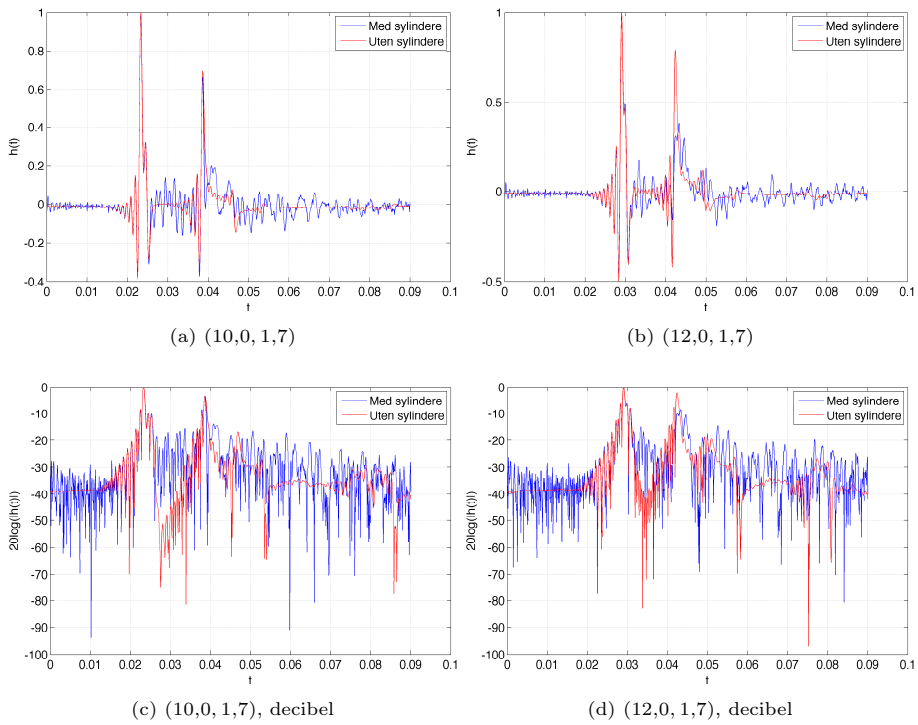
Filtreringen introduserer en forsinkelse som må kompenseres for. Denne fremgangsmåten er den samme som for beregning av impulsrespons fra målinger, beskrevet for eksempel av Kuttruff. [10]

Inngangssignalet $g(t)$ er trykket der kilden er plassert. Også dette punktet blir truffet av takrefleksjonen. Denne fjernes ved interpolasjon. Filteret b er et FIR-filter av orden 200, med cut-off-frekvenser 20 og 1000 Hz. I figur 5.4 er den beregnede impulsresponsen gjengitt for to punkter 8 og 10 m unna kilden, både for modellen med og uten sylindere. Skriptet som er brukt til å beregne dem er å finne i tillegg B som kildekode B.4. Det første punktet ligger rett under den andre sylinderklyngen, det andre midt mellom andre og tredje sylinderklynge.

I impulsresponsene ser man tydelig direktelyden etterfulgt av takrefleksjonen. I figur 5.4b er takrefleksjonen betydelig svekket av sylindrene. Det har ikke skjedd i 5.4a. Den svekkede takrefleksjonen skyldes interferens mellom de spredte feltene fra sylindrene. Siden de er relativt tilfeldig plassert, varierer fenomenet veldig fra sted til sted. Det spredte lydtrykket fra sylindrene er tydelig å se i begge impulsresponsene, både mellom direktelyden og takrefleksjonen, og etter takrefleksjonen.

Impulsresponsene er skjemmet av bieffekter fra filtreringen, i form av rippel før og etter direktelyden, som faktisk er av samme størrelsesorden som refleksjonene fra sylindrene. Feil som resultat av de imperfekte absorberende grensebetingelsene kan også observeres: Hadde modellen vært perfekt, ville impulsresponsene til modellen uten sylindre vært null bortsett fra der direktelyden og takrefleksjonen.

Figurene som viser impulsresponsene i decibel viser at nivået til refleksjonene fra sylindrene som kommer mellom direktelyden og takrefleksjonen ligger omtrent 20 dB under nivået til direktelyden, noe som kan tyde på at de ikke er særlig hørbare. Men takrefleksjonen i modellen med sylindre i figur (b) og (d) er redusert med omtrent 10 dB i forhold til i modellen uten sylindre, og er dermed ikke så mye kraftigere enn refleksjonene fra sylindrene. I posisjonen i figur (a) og (c) har ikke takrefleksjonen blitt svekket. Hvor hørbar spredningen fra sylindrene er varierer dermed fra posisjon til posisjon.



Figur 5.4: Impulsrespons i to forskjellige punkter

Kapittel 6

Sammenligning og kvantisering av spredning fra ulike objekter

I dette kapittelet sammenlignes spredningen fra sylinderklyngen fra forrige kapittel med spredning fra en enkelt sylinder, et rett, kvadratisk prisme og en plan reflektor. Disse sammenlignes også med tilsvarende tredimensjonale modeller, det vil si en klynge av kuler, ei enkelt kule, en kube, og en kvadratisk, plan reflektor.

6.1 Beskrivelse av modellene

En modell lages for hvert objekt som skal studeres: Fire todimensjonale modeller og fire tredimensjonale modeller. Analysetypen som benyttes er tidsharmonisk analyse. Løsninger beregnes for hver tredjedels oktav for $0,5 \leq k \leq 32$ for de todimensjonale modellene, og for hver oktav for $0,5 \leq k \leq 16$ for de tredimensjonale. Innfallsvinkelen ψ settes til 45° .

Geometriene til de todimensjonale modellene defineres som følger:

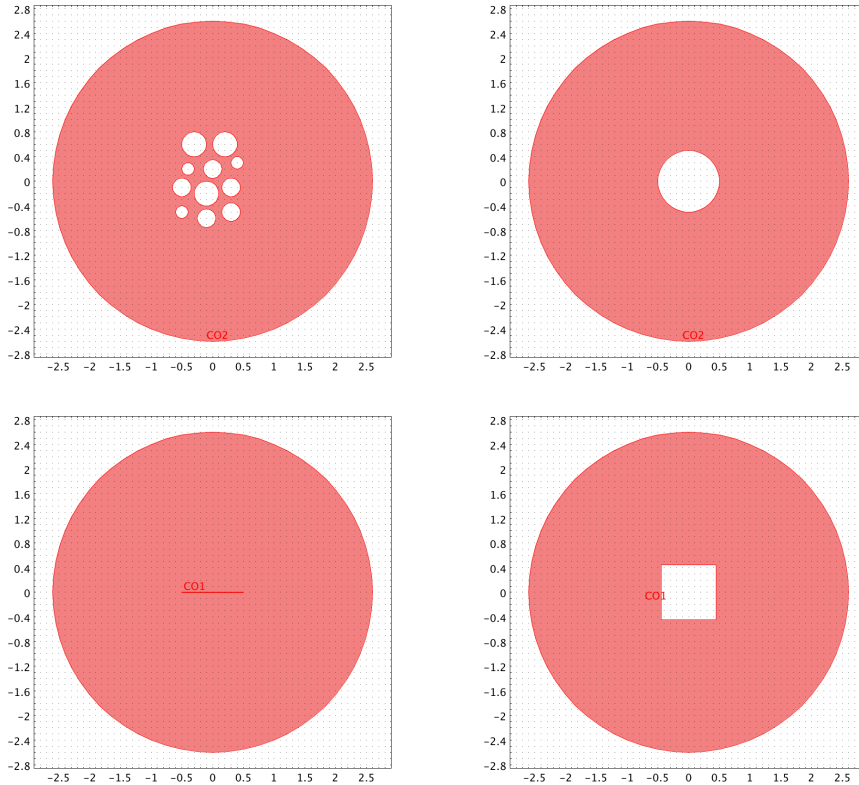
- Sylinderklyngen er én av sylinderklyngene i tabell 5.1, men flyttet til å være sentrert rundt origo ved å trekke fra 6,2 m fra x-koordinatene i første kolonne og 4,4 m fra y-koordinaten.
- Modellen av en sylinder består av en sirkel med radius 0,5 m og sentrum i origo.
- Det kvadratiske prismet er modellert som et kvadrat. Det skal ha samme areal som sirkelen som forestiller sylinderen, det vil si at sidene er 0,88 m lange. Også denne har sentrum i origo.
- Reflektoren er modellert som et rektangel på $1 \times 0,1$ m.

Alle objektene har sentrum i origo. Alle de todimensjonale modellene omslutes av en sirkel med radius 2,5 m. Grensebetingelsen langs kanten av denne settes til

strålingsbetingelse tilpasset en sylindrisk bølge med opphav i origo. Geometriene til modellene er avbildet i figur 6.1. Den innfallende bølgen settes til

$$p_i = e^{-ik(x \sin \psi + y \cos \psi)} \quad (6.1)$$

der ψ er innfallsvinkelen, det vil si vinkelen propagasjonsretningen til bølgen danner med y-aksen.



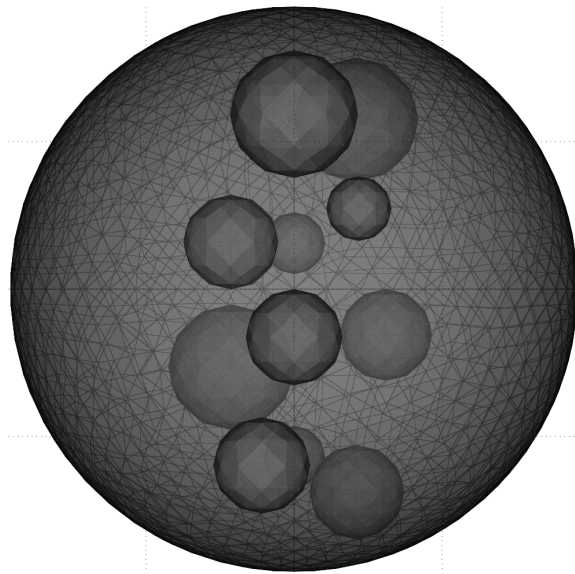
Figur 6.1: Geometriene til de todimensjonale modellene. xz -planene til de tredimensjonale modellene

De tredimensjonale modellene defineres slik:

- Kuleklyngen har samme x-koordinater som sylinderklyngen. z-koordinatene er de samme som y-koordinatene til sylinderklyngen. y-koordinatene er valgt slik:

0 0,2 0,2 -0,2 0 0 -0,2 0,3 0 0,2 -0,1

- Kula har radius 2,5 m
- Kuben har sidekanter på 0,88 m



Figur 6.2: yz-planet til modellen av kuleklyngen

- Reflektoren er modellert som et rett, rektangulært prisme på $1 \times 1 \times 0,01$ m.

Modellene er omsluttet av ei kule med radius 0,9 m. På kanten av denne settes grensebetingelsen til strålingsbetingelse tilpasset kulebølge med opphav i origo. Avbildningene av de todimensjonale geometriene i figur 6.1 kan også tjene som avbildninger av xz-planet til de tredimensjonale modellene. I tillegg viser figur 6.2 yz-planet til kuleklyngemodellen.

Den innfallende bølgen settes til

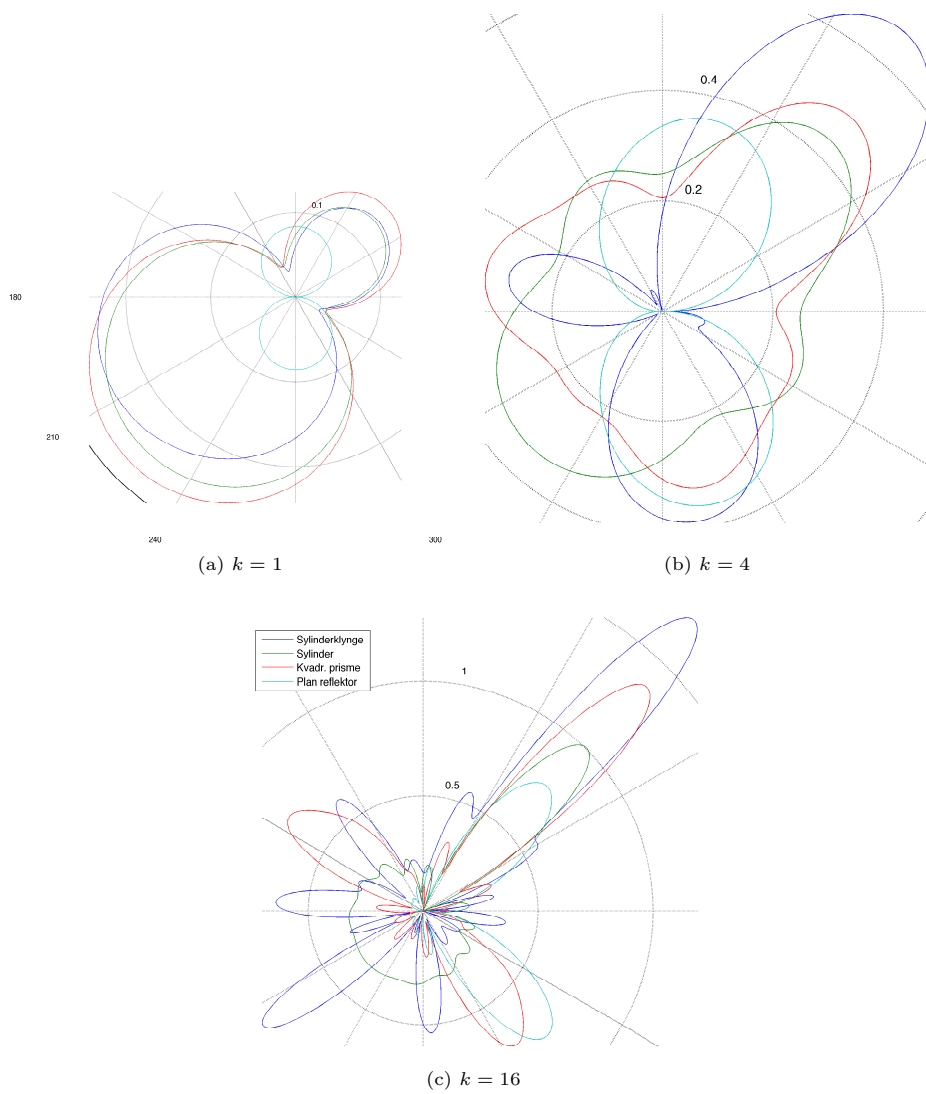
$$p_i = e^{-ik(x \sin \psi + z \cos \psi)} \quad (6.2)$$

der ψ er innfallsvinkelen, i dette tilfellet vinkelen propagasjonsretningen til bølgen danner med z-aksen i xz-planet.

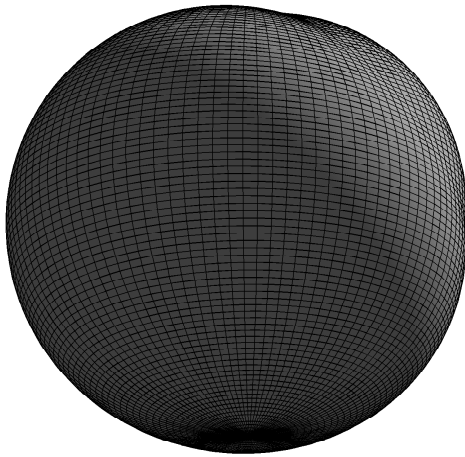
6.2 Polarrespons

Polarresponsene beregnes ved å hente ut det spredte lydtrykket langs grensen av modellen, som er omkretsen til en sirkel i de todimensjonale modellene, og overflata av ei kule i de tredimensjonale. Polarresponsen for $k = 1, 4$ og 16 (absoluttverdien av trykket) fra de todimensjonale modellene er framstilt som polarplott i figur 6.3. Polarresponsen for de samme frekvensene fra kuleklyngemodellen er vist i figur 6.4.

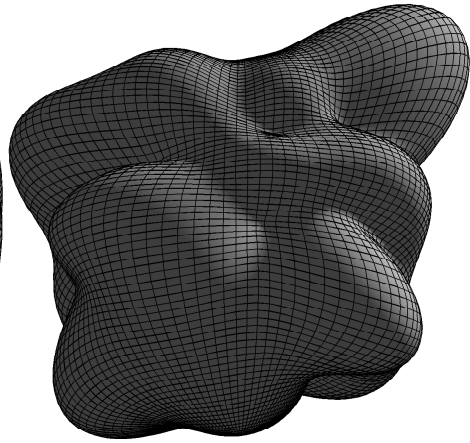
De tredimensjonale figurene har framkommet ved at amplituden til det spredte trykket er lagt til radiusen til ei kule. En kuleformet polarrespons vil dermed si at



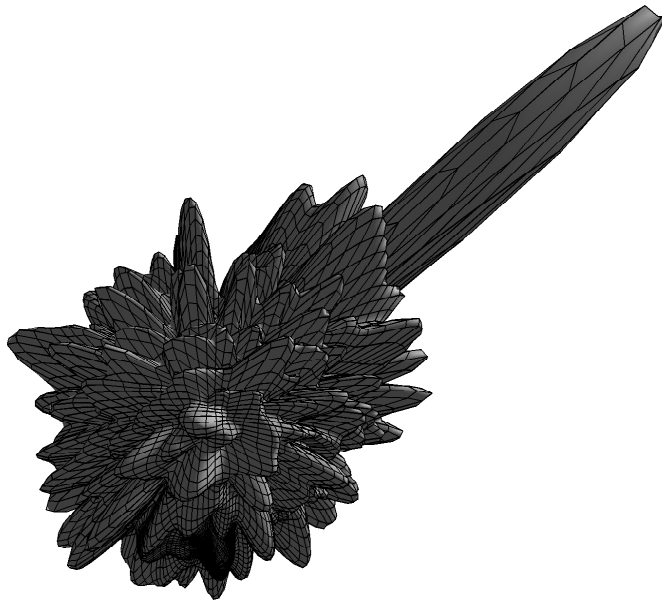
Figur 6.3: Polarrespons, todimensjonale modeller, $\psi = 45^\circ$



(a) $k = 1$



(b) $k = 4$



(c) $k = 16$

Figur 6.4: Polarrespons, kuleklynge, $\psi = 45^\circ$

det er lite trykkvariasjoner. I figuren 6.4c er det spredte trykket mye høyere i én bestemt retning. Dette er egentlig i motfase med den innkommende bølgen, slik at dette danner en skygge bak kuleklyngen der trykket er lavt, på samme måte som vi kan observere i figur 3.3.

Alle de tre tredimensjonale figurene er orientert på samme måte, slik at den kraftige lydtrykksskyggen i figur 6.4c, som peker i samme retning som den innfallende bølgen, kan brukes til å orientere etter i alle de tre figurene.

6.3 Beregning av diffusjonskoeffisienter

Diffusjonskoeffisienten beregnes etter ligning 2.1. Hvis vi setter inn for lydtrykknivået, $L_n = 20 \log \frac{p_n}{p_{ref}}$, blir koeffisienten

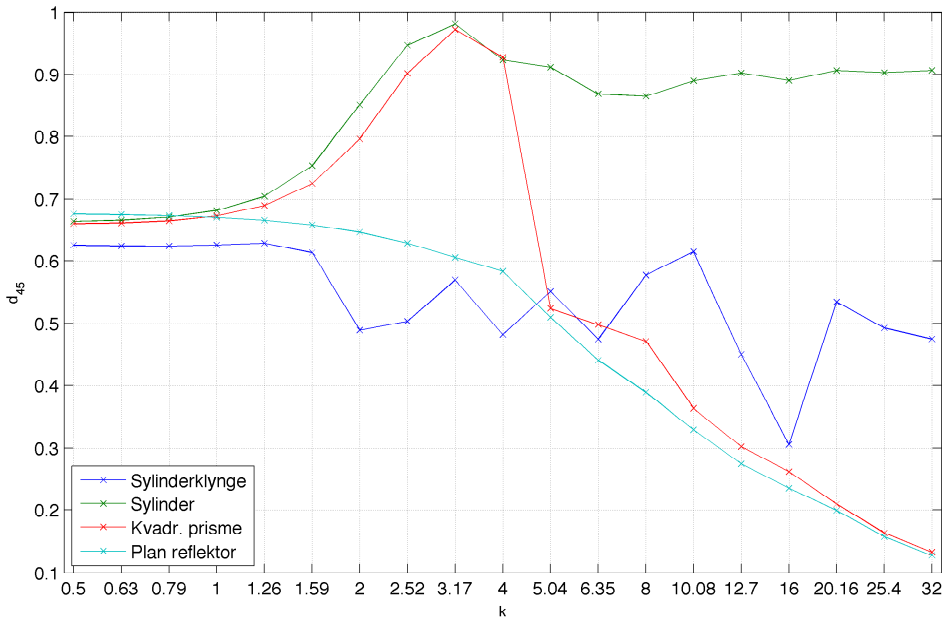
$$d_\psi = \frac{\left(\sum_{n=1}^N p_n^2\right)^2 - \sum_{n=1}^N p_n^4}{(N-1) \sum_{n=1}^N p_n^4} \quad (6.3)$$

Diffusjonskoeffisienten er et mål på det spredte trykkets distribusjonen over vinkler. En høy diffusjonskoeffisient betyr at trykket blir spredt jevnt i alle retninger, en lav koeffisient betyr at én eller noen få retninger dominerer. Fra polarresponsene ser vi tydelig skyggeeffekten objektene har på lydfeltet ved høye frekvenser. Dersom hele polarresponsene skulle tas med i beregningene av diffusjonskoeffisientene, ville skyggene totalt dominere, og gjøre at koeffisienten ble svært lave for høye frekvenser, til tross for at lydtrykket spres jevnt i alle retninger på den andre siden av objektet. Derfor beregnes diffusjonskoeffisientene fra lydtrykket over den nedre halvsirkelen i de todimensjonelle modellene, det vil si der $y < 0$, og for den nedre halvkula for de tredimensjonale modellene, det vil si der $z < 0$.

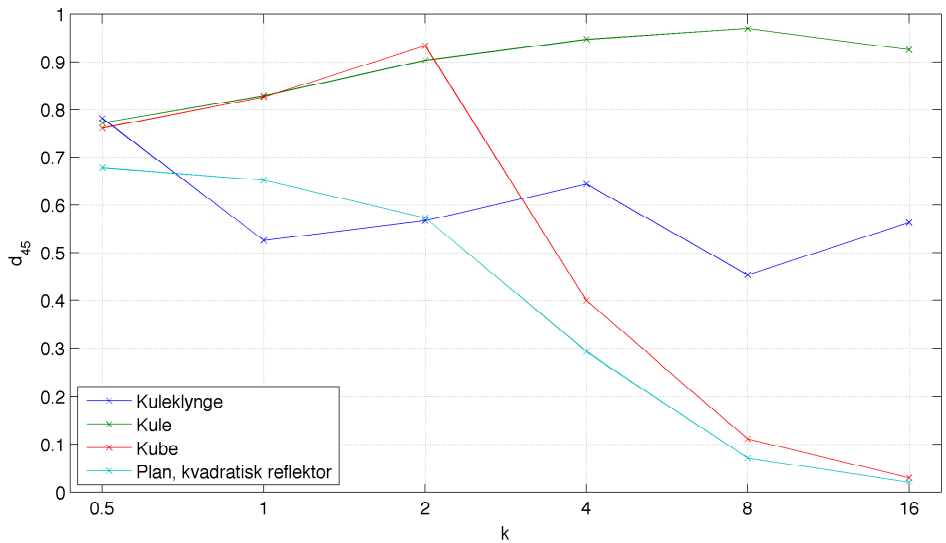
Diffusjonskoeffisientene som er beregnet er vist i figur 6.5. En enkelt kule eller en enkelt sylinder har høyest diffusjonskoeffisient, og er dermed de objektene som sprer lyden jevnest fordelt på retning, noe som også stemmer godt med det man kan observere fra figur 6.3. De plane reflektorene har lav diffusjonskoeffisient for høye frekvenser, siden speilrefleksjonen dominerer mer og mer etter som bølgelengden blir kortere sammenlignet med lengden på reflektoren.

Det er interessant å merke seg at diffusjonskoeffisientene for kubene og det kvadratiske prismet er ganske lik de for kula og sylindere for lave frekvenser, men at de brått synker for høye frekvenser og blir likere diffusjonskoeffisientene for de flate reflektorene. Grunnen til dette er trolig også en tydelig speilrefleksjon som oppstår for korte bølgelengder.

For sylinderklyngen viser ikke diffusjonskoeffisienten noen tydelig tendens, den varierer veldig fra frekvens til frekvens. Opp til og med $k = 4$ er den lavere enn for de enkle objektene, for høyere frekvenser ligger den stort sett over reflektoren og prismet, men under sylindere. Også diffusjonskoeffisienten til kuleklyngen varierer på lignende måte. For $k = 0,5$ er den høyere enn alle de andre, for $k = 1$ og 2 er



(a) Todimensjonale modeller



(b) Tredimensjonale modeller

Figur 6.5: Diffusjonskoeffisienter og gjennomsnitt av polarrespons, $\psi = 45^\circ$

den lavest, og for $4 \leq k \leq 16$ ligger den langt under en enkelt kule, men over de to andre. At disse objektene som består av mange spredere av ulik størrelse og med uregelmessig avstand har et mer uforutsigbart spredningsmønster enn de enkle spredningsobjektene virker rimelig.

Kapittel 7

Oppsummering og konklusjon

Fra de analytiske uttrykkene for det spredte trykket fra kuler og sylindere og fra visualiseringene av dem viste det seg at det er en del forskjeller på kuler og sylindere som spredningsobjekter. Det spredte trykket fra kula avtar mye raskere med avstanden enn det spredte trykket fra kula. Trykket fra kula avtar som $\frac{1}{r}$, mens trykket fra sylindere avtar som $\frac{1}{\sqrt{r}}$. For lave frekvenser påvirker ikke kula og sylindere lydfeltet så mye, sylindere har større innvirkning enn kula. For høye frekvenser dannes en skygge bak det spredende objektet der lydtrykket er mye lavere. På forsiden av objektet spres trykket jevnt i alle retninger.

Hoveddelen av denne oppgaven er basert på numeriske simuleringer gjort i COMSOL. Tilgjengeligheten av en analytisk løsning gjorde det mulig å evaluere nøyaktigheten til de numeriske løsningene. Ulike valg for fullstendig absorberende grensebetingelser har blitt prøvd ut, og for en spredende sylinder viste det seg at en sirkulær modell med strålingsbetingelse tilpasset en sylinderbølge ga et nær perfekt resultat. Selv om sentrum for sylinderbølgen flyttes, er resultatet ganske bra. Kvadratiske modeller gir større feil, men mest i hjørnene av modellene, og ikke større enn at modellene fortsatt er brukbare. Det er altså all grunn til å feste lit til de numeriske løsningene COMSOL produserer.

Med utgangspunkt i de kuleformede lampene i St. Olav domkirke i Trondheim ble det laget en COMSOL-modell for å undersøke effekten av mange spredende elementer i et rom. Siden det er for resurskrevende å modellere et helt rom i tre dimensjoner, ble det benyttet en todimensjonal modell med sylindere i stedet for kuler. Diskusjonen om forskjellene på spredningen fra kuler og sylindere har synliggjort at det slett ikke er det samme, men noe relevans vil likevel en todimensjonal modell ha. Hensikten var heller ikke å modellere lydfeltet i dette rommet konkret, men å modellere et lydfelt som ligner på lydfeltet i et virkelig rom.

Fra simuleringene ble det laget en animasjon som viser hvordan lydtrykket fra en punktkilde utvikler seg over tid. Det er tydelig at konstellasjonen av sylindere har en viss innvirkning på lydfeltet. Refleksjonen fra taket blir i en del posisjoner gjort mindre framtrepende siden den blir påvirket av sylinderklyngen før den når tilhørerne. I tillegg vil sylindrene fungere som reflektorer, og sørge for at flere svakere refleksjoner når tilhørerne før takrefleksjonen, noe som trolig bidrar til å

gjøre denne mindre tydelig. Fra impulsresponser beregnet for to ulike posisjoner i modellen kunne disse effektene kvantifiseres. Det viser seg at refleksjonene fra sylindrene ligger omtrent 20 dB lavere enn direktelyden, og at takrefleksjonen blir dempet omtrent 10 dB i den ene posisjonen, og ingenting i den andre.

Modellen har mange begrensninger. I tillegg til det åpenbare som allerede er nevnt, at to dimensjoner ikke er det samme som tre, og at sylindere og kuler ikke er det samme, er også grensebetingelsene urealistiske. Publikumsflaten er langt i fra helt absorberende, og taket er neppe fullstendig reflekterende for alle frekvenser. Det finnes også noen andre spredende elementer i rommet som trolig vil spille inn. I tillegg kommer imperfeksjoner ved de absorberende grensebetingelsene. Alt dette gjør det vanskelig å vurdere hvor stor effekt sylindrene ville hatt i et virkelig rom, og enda vanskeligere å si noe om hvilken effekt en klynge av kuler ville hatt.

Sammenligningen av spredning fra ulike objekter ved hjelp av diffusjonskoeffisient viser at spredningen fra en klynge av sylindere og en klynge av kuler varierer veldig med frekvens. Dette er ikke overraskende, siden avstanden mellom kulene og sylindrene og størrelsen på dem varierer og derfor gir ulike spredningsmønstre for ulike bølgelengder.

Bibliografi

- [1] AES4id2001: *AES Information document for room acoustics and sound reinforcement systems - Characterization and measurement of surface scattering uniformity*. The Journal of the Audio Engineering Society, 49(3):149–165, 2001.
- [2] Beranek, Leo: *Concert Halls and Opera Houses - Music, Acoustics and Architecture*. Springer, 2. utgave, 2004.
- [3] COMSOL AB: *Acoustics Module Model Library - Version 3.5a*, november 2008.
- [4] COMSOL AB: *Acoustics Module User's guide - Version 3.5a*, november 2008.
- [5] Cox, Trevor J. og Peter D'Antonio: *Acoustic Absorbers and Diffusers - Theory, design and application*. Taylor & Francis, 2004.
- [6] Gaunaurd, G. C., H. Huang og H. C. Strifors: *Acoustic scattering by a pair of spheres*. The Journal of the Acoustical Society of America, 98(1):495–507, 1995.
- [7] ISO17497-1: *Acoustics - Measurement of the sound scattering properties of surfaces. Part 1: Measurement of the random incidence scattering coefficient in a reverberation room.*, 2004.
- [8] Kreyszig, Erwin: *Advanced engineering mathematics*. John Wiley & Sons, 8. utgave, 1999.
- [9] Kristiansen, Ulf R. og Erlend M. Viggren: *Computational Methods in Acoustics*. Kompendium i TTT12 Numerisk akustikk, NTNU, 2009.
- [10] Kuttruff, Heinrich: *Room Acoustics*. Spon Press, 4. utgave, 2000.
- [11] Li, K. M., W. K. Lui og G. H. Frommer: *The Scattering of Sound by a Hard Sphere Above an Impedance Ground*. Acta Acustica united with Acustica, 90(2):251–262, 2004.
- [12] Morse, Philip M. og K. Udo Ingard: *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, 1968.
- [13] Nilsen, Tine: *Bygger ny katolsk kirke*. http://www.nrk.no/nyheter/distrikt/nrk_trondelag/1.7137518ent 25. juni 2010.

- [14] Schröder, Manfred R.: *Binaural dissimilarity and optimum ceilings for concert halls: More lateral sound diffusion*. Journal of the Acoustical Society of America, 65(4):958–963, 1979.
- [15] Williams, E.G.: *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press, 1999.

Tillegg A

Notasjon

Vektorer noteres med piler over variabelnavnet.

$i = \sqrt{-1}$, imaginærenhet

p Lydtrykk

L Lydtrykksnivå

f Frekvens

$\omega = 2\pi f$, vinkelfrekvens

$c = 343 \text{ m/s}$, lydhastigheten i luft

$\rho_0 = 1,25 \text{ kg/m}^3$, tettheten til luft når lydtrykket er 0

$k = \frac{\omega}{c}$, bølgetall

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k}$, bølgelengde

a Radius til kula eller sylindren

J_n Besselfunksjon av orden n

H_n Hankelfunksjon av orden n

j_n Sfærisk besselfunksjon av orden n

h_n Sfærisk hankelfunksjon av orden n

P_0 Amplitude

$\epsilon_n \quad \epsilon_0 = 1, \epsilon_{n>0} = 2$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, Laplace-operatoren

\propto Proporsjonal med

\prime Den deriverte med hensyn på argumentet, $g'(x) = \frac{dg}{dx}$

\otimes Ytreprodukt.

ψ Innfallsvinkelen til den innfallende planbølgen, det vil si vinkelen propagasjonsretningen danner med y-aksen i koordinatsystemet i todimensjonale modeller, og vinkelen propagasjonsretningen danner med z-aksen i xz-planet i tredimensjonale modeller.

d_ψ Diffusjonskoeffisientene for innfallsvinkel ψ

$\mathcal{F}\{g\}$ Den fouriertransformerte av g

Tillegg B

Kildekode

Kildekoden er også å finne i vedlegget til oppgaven sammen med et brukergrensesnitt som demonstrerer funksjonene `scatsphere` og `scatcyl`. For å starte brukergrensesnittet, kjør m-fila `scatgui`

Kildekode B.1: `scatsphere.m`

```
1 function [p_scat,p_ins]=scatsphere(r,th,a,k,N)
2
3 if nargin<5 %Default to order 20
4     N=20;
5 end
6
7 if isvector(r) && isvector(th)
8     %Both r and th are vectors. This means that the output matrix
9     %is organized in polar coordinates (r by theta)
10    pol=true;
11
12    if size(r,1)<size(r,2) %Make sure that r is a column vector
13        r=r';
14    end
15    if size(th,2)<size(th,1) %Make sure that th is a row vector
16        th=th';
17    end
18
19    %Compute incidence field
20    p_ins=exp(1i*k*r*cos(th));
21 else
22    %r and theta are matrices. The output matrix is organized in
23    %cartesian coordinates
24
25    pol=false;
26    if size(r)~=size(th)
27        error('Sizes of r and theta matrices mismatch');
28    end
29
30    %Compute incidence field
31    p_ins=exp(1i*k*r.*cos(th));
32 end
33
```

```

34 p_scat=zeros(size(r,1),size(th,2));
35
36 %Define spherical bessel and hankel functions and their derivatives
37 j = @(n,x) sqrt(pi./(2*x)).*besselj(n+0.5,x);
38 h = @(n,x) sqrt(pi./(2*x)).*besselh(n+0.5,x);
39 jdif = @(n,x) j(n-1,x) - j(n,x)*(n+1)./x;
40 hdif = @(n,x) h(n-1,x) - h(n,x)*(n+1)./x;
41
42 %This loop computes N elements of the infinite sum in eq 3.23
43 for n=0:N
44     pn_scat=-1i^n * (2*n+1) *jdif(n,k*a).*h(n,k*r)./hdif(n,k*a);
45
46     if pol %Polar coordinates. Use matrix multiplication
47         pn_scat=pn_scat*P(n,cos(th));
48     else %Cartesian coordinates. Use element by element
49         %multiplication
50         pn_scat=pn_scat.*P(n,cos(th));
51     end
52     p_scat=p_scat+pn_scat;
53 end
54
55 %Computations are not valid inside sphere
56 if ~pol
57     p_ins(r<a)=NaN;
58     p_scat(r<a)=NaN;
59 end

```

Kildekode B.2: scatcyl.m

```

1 function [p_scat,p_inc]=scatcyl(r,th,a,k,N)
2
3 if nargin<5 %Default to N 20
4     N=20;
5 end
6
7 if isvector(r) && isvector(th)
8     %Both r and th are vectors. This means that the output matrix
9     %is organized in polar coordinates (r by theta)
10    pol=true;
11
12    if size(r,1)<size(r,2) %Make sure that r is a column vector
13        r=r';
14    end
15    if size(th,2)<size(th,1) %Make sure that th is a row vector
16        th=th';
17    end
18
19    %Compute incidence field
20    p_inc=exp(1i*k*r*cos(th));
21 else
22     %r and theta are matrices. The output matrix is organized in
23     %cartesian coordinates
24     pol=false;
25     if size(r)~=size(th)
26         error('Sizes of r and theta matrices mismatch');
27     end
28

```

```

29     %Compute incidence field
30     p_inc=exp(1i*k*r.*cos(th));
31 end
32
33 p_scat=zeros(size(r,1),size(th,2));
34
35 %Define functions
36 epsilon=@(m) (m>0)+1;
37 Jdiff=@(n,x)(besselj(n-1,x)-besselj(n+1,x))/2;
38 Hdiff=@(n,x)(besselh(n-1,x)-besselh(n+1,x))/2;
39
40 %Compute N elements of the infinite sum in eq 3.22
41 for n=0:N
42     pn_scat=-epsilon(n)*i^n.*besselh(n,k*r) .*Jdiff(n,k*a)./Hdiff(n,k
        *a);
43
44     if pol %Polar coordinates. Use matrix multiplication
45         pn_scat=pn_scat*cos(n*th);
46     else %Cartesian coordinates. Use element-wise multiplication
47         pn_scat=pn_scat.*cos(n*th);
48     end
49
50     p_scat=p_scat+pn_scat;
51 end
52
53 if ~pol
54     p_inc(r<a)=NaN;
55     p_scat(r<a)=NaN; %Computations not valid inside cylinder
56 end

```

Kildekode B.3: P.m

```

1 %Evaluates the legendre-polynomial of degree n
2 function [res,calc]=P(n,x)
3 persistent legp last_x;
4
5 %Reset persistent variables if x argument has changed
6 if ~isequal(x,last_x)
7     legp={};
8     last_x=x;
9 end
10
11 calc=false;
12 %Calculate only if it was not already calculated for this degree
13 if length(legp)<n || isempty(legp{n+1})
14     legp{n+1}=calc_legp(n,x);
15     calc=true;
16 end
17
18 res=legp{n+1};
19
20 function P=calc_legp(n,x)
21 %This does the actual calculations by calling the built in legendre
    function
22 %and discarding the functions of order>0
23 Ptemp=legendre(n,x);
24 if isvector(x)
25     P=Ptemp(1,:);

```

```

26 else
27     if n==0
28         P=Ptemp;
29     else
30         P=zeros(size(Ptemp,2),size(Ptemp,3));
31         P(:,:)=Ptemp(1,:,:);
32     end
33 end

```

Kildekode B.4: beregn_ir.m

```

1  %Modellene med og uten sylindere er lagret i variablene
2  %fem_syl og fem_uten
3  %Matlab maa vaere startet fra COMSOL for at koden skal fungere
4
5  %Posisjonene der impulsresponsene skal beregnes
6  pos=[10 12;1.7 1.7];
7  kildepos=[2;1.7];
8
9  %Les ut tidspunktene for loesningene
10 t=fem_uten.sol.tlist;
11 %Les ut trykket i punktet der kilden er plassert
12 p_kilde=postinterp(fem_uten,'p',kildepos,'Solnum','all');
13 %Takrefleksjonen naar kilden mellom sample 300 og 390
14 indices=[1:300 390:length(t)];
15 %Denne fjernes ved interpolasjon
16 p_kilde=interp1(t(indices),p_kilde(indices),t);
17 %Beregn frekvensresponsen
18 G=fft(p_kilde');
19
20 %Les ut trykket i posisjonene der impulsresponsene skal beregnes
21 p_uten=postinterp(fem_uten,'p',pos,'Solnum','all');
22 p_syl=postinterp(fem_syl,'p',pos,'Solnum','all');
23
24 %Design bandpassfilter av orden 200,
25 %passband mellom 20 og 1000 Hz
26 fs=1e4; %Samplingsfrekvens
27 N=200; %Filterorden
28 passband=[20 1000]*2/fs;
29 b=fir1(N,passband);
30 B=fft(b',length(t));
31
32 %Beregn B/G. Denne er konstant for hver impulsrespons.
33 %Lag en kopi for hver impulsrespons som skal beregnes,
34 %og plasser dem i hver sin kolonne
35 BdivG=(B./G)*ones(1,size(pos,2));
36
37 %Beregn impulsresponsene med og uten sylindere
38 h_uten=real(ifft(fft(p_uten).*BdivG));
39 h_syl=real(ifft(fft(p_syl).*BdivG));
40
41 %Fjern forsinkelsen fra filtreringen
42 h_uten=h_uten(N/2+1:end,:);
43 h_syl=h_syl(N/2+1:end,:);
44 %t=t(1:end-N/2);
45 h_uten(1:N/2,:)=[];
46 h_syl(1:N/2,:)=[];
47 t(end-N/2+1:end)=[];

```