NTNU
Det skapende universitet

«Jeg skjønner hva han gjør, men ikke hvordan han kommer på å gjøre det»

En casestudie av R1-elevers forståelse av bevis

Thomas Westly Eriksen

Master i realfag
Innlevert: mai 2015
Hovedveileder: Frode Rønning, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven symboliserer slutten på en 5-årig lektorutdanning ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Det har vært 5 år fylt med mye læring, utfordringer, fortvilelse og mestring. Forelesninger, øvinger og eksamener har fylt opp ukene, og minnene er blitt mange. Jeg minnes Per Haag sine mxn-matriser, der jeg den dag i dag fremdeles sliter med skille mellom m-ene og n-ene i håndskriften hans. Jeg tenker tilbake på Marius Irgens billedlige beskrivelser av å se sammenhengene i matematikk, der jeg lærte at det var viktigere å se skogen enn trærne. Og så tenker jeg på Peter Lindquist sine humoristiske stikk til alle som ifølge ham ikke skjønte matematikk. Ingenting ville jeg vært foruten. I den forbindelse er det på sin plass å takke alle som har bidratt til 5 minneverdige år ved NTNU.

Først vil jeg takke alle medstudenter, kommende lektorer og ikke minst vennene jeg har hatt og fått i løpet av disse årene. Dere har alle bidratt til at disse 5 årene har forsvunnet i en fei. Årene har vært fylt med mange gleder, festligheter og opplevelser. Sammen har vi gjennom oppturer og nedturer kjempet oss gjennom et utfordrende 5-årig lektorstudium, og er nå klare for sette våre kunnskaper og ideer ut i praksis.

Jeg vil også benytte anledningen til å takke alle forelesere jeg har hatt på NTNU. Dere har bidratt med deres kunnskaper om og lidenskap for matematikk til å gjøre forelesningene både spennende og lærerike. Jeg er helt sikker på at jeg har lært noe fra hver og en av dere som jeg kommer til å få god nytte av som lektor. En spesiell takk vil jeg rette til Frode Rønning, min foreleser i flere didaktiske emner og ikke minst veileder i denne masteroppgaven. Du har vært en kjempeflott støttespiller som har kommet med mange gode innspill og råd.

En stor takk rettes også til den Trondheimsskolen, R1-klassen, R1-læreren og de R1-elevene som lot meg få forske på dem. Dere var alle både imøtekommende, engasjerte og hjelpsomme, og har vært fundamentale for denne studien.

Til slutt vil jeg takke min familie. Dere har vært mine viktigste støttespillere i alle disse årene, og betyr umåtelig mye for meg. I løpet av de siste fem årene har dere alle blitt veldig godt kjent i Trondheim etter mange besøk. Jeg vil takke for all støtte dere har gitt og tro dere har hatt på meg. Dere har alle kommet råd, innspill og erfaringer som har kommet veldig godt med for en ung student. Tusen takk for alt dere er og betyr for meg.

Trondheim, mai 2015.

Thomas Westly Eriksen

Sammendrag

Denne casestudien handler om bevisforståelse hos VG2-elever som har faget matematikk R1. Det overordnede forskningsspørsmålet for studien er: *Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?* Studien har også et underordnet forskningsspørsmål som lyder: *Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis?* I lys av disse to forskningsspørsmålene, har studien også et tredje forskningsspørsmål: *Hvilke sammenhenger kan man finne mellom R1-elevers forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema?*

For å svare på disse tre forskningsspørsmålene har det blitt foretatt en forskningsstudie av R1-elever på en stor videregående skole i Trondheim. Det har blitt forsket på to elevgrupper på fire elever hver, som fikk bevisoppgaver til henholdsvis temaene *skalarprodukt* og *derivasjon- og kontinuitet*. Læreren til disse R1-elevene ble intervjuet om bevis. Både læreboka og læreplanen til R1-elevene ble analysert med hensyn på det som var temaet for bevisoppgavene. Undervisningen til R1-klassen ble i forkant av begge oppgaveløsingssekvensene observert. Besvarelsene til elevene, som jobbet sammen to og to, ble samlet inn. Det ble også foretatt lydopptak av oppgaveløsingen til R1-elevene, intervjuet med læreren og under observasjonen av de to undervisningstimene til R1-klassen.

Det overordnede forskningsspørsmålet ble analysert med tanke på Harel og Sowder (1998a) sine bevisskjemaer og Zazkis og Chernoff (2008) sine teorier om moteksempler. Det underordnede forskningsspørsmålet ble analysert ved hjelp av relevante teorier om bevis, bevis i skolesammenheng, bevisargumentasjon og forståelse. Det tredje forskningsspørsmålet ble analysert ut i fra teoriene som de to første forskningsspørsmålene ble analysert ut i fra.

Forskningsresultatene til denne studien viser at R1-elevene benyttet seg av mange ulike bevisskjemaer når de beviste. Noen ganger benyttet de seg av flere bevisskjemaer samtidig, og andre ganger forandret de bevisskjemaet de benyttet i løpet av argumentasjonen. Visuelle forklaringer, og bruk av det visuelle bevisskjemaet, var den vanligste formen for bevisargumentasjon blant elevene. Deduktive bevis var derimot den mest uvanlige formen for bevis som elevene benyttet, og de benyttet derfor sjeldent analytiske bevisskjemaer.

Det forskningsresultatene også viser, er at de viktigste observerbare faktorene som hadde en betydning for de åtte R1-elevenes forståelse av bevis var læreplanen, læreboka, lærerens undervisningspraksis og matematiske språkbruk, lærerens og elevenes kunnskaper om bevis, lærerens og elevenes syn på bevis og elevenes forkunnskaper om begreper og logiske sammenhenger som inngår i beviset. Det virket også som R1-elevenes forståelse av bevis hadde betydning for hvilket bevisskjema de valgte å benytte i sin bevisargumentasjon.

Summary

This case study is about students' understanding of proof in a VG2 class with the subject mathematics R1 in high school. The main research question for this study is: *What kind of proof schemes do R1-students use when they prove?* The study also has a subordinate research question: *What observable factors influence R1-students' understanding of proof?* In light of these two research questions, a third and final research question arise: *What kind of connections exist between the R1-students' understanding of proof and their choice of proof scheme?*

To answer these three research questions, an R1-class at a large high school in Trondheim has been the participants in this research study. This research is mainly based on two groups of four students each, who received proof tasks connected to the themes *scalar product* and *derivation- and continuity*. The teacher of these R1-students was interviewed about proof. The R1-students' textbook and curriculum were both analysed with the theme of the proof tasks in mind. The two lessons in the R1-class prior to the task-solving sequences were observed. The students' answers from the pair work were collected. The task-solving sequences, the interview and the lessons that were observed were all audio recorded.

The main research question was analyzed in terms of Harel and Sowder's (1998a) proof schemes and Zazkis and Chernoff's (2008) theories about contradictions and counterexamples. The subordinate research question was analyzed using relevant theories of proof, proof in school, proof argumentation and understanding. The analysis of the third research question was based on the same theories as the first two research questions.

The research results of this study show that R1-students used many different proof schemes in their proving activity. Sometimes they used several proof schemes simultaneously, and at other times, they changed their proof scheme during the proof argument. Visual explanations and the use of the perceptual proof schemes was the most common mode of argumentation among students. Deductive proofs were on the other hand the most unusual mode of argumentation by the students, they therefore rarely used analytical proof schemes.

The research results also show that the main observable factors that influenced the eight R1-students' understanding of proof were the curriculum, the textbook, the teacher's teaching practice and mathematical language, the teacher's and the students' knowledge of proof, the teacher's and the students' view on proofs and the students' prior knowledge about concepts and logical relationships that form parts of the proof. It also seemed that R1-students' understanding of proof and their choice of proof scheme, were interrelated.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

«Ingen skjøtter om Beviis for at Solen er oppe, naar den skinner ham i Øinene.» (Stubhaug, 2009)

1.1. Bakgrunnen for studien

Utsagnet over tilhører Christopher Hansteen, som på 1800-tallet blant annet var fysiker, astronom og ikke minst professor i anvendt matematikk (Christiansen, 2012). Hansteen hadde et pragmatisk syn på bevis i matematikken, og han var opptatt av at matematikken skulle være praktisk rettet. I 1815 ble Bernt Michael Holmboe assistenten til Hansteen (Christiansen, 2012, s. 82). Holmboe hadde et annet syn på matematikken, all den tid han var teoretisk anlagt og tilhenger av abstrakt matematikk. Han stod bak nesten samtlige lærebøker i matematikk i den norske skolen mellom 1825 og fram til rundt 1860 (Christiansen, 2012, s. 82). I 1835 skrev Hansteen en lærebok i grunnleggende geometri som utfordret Holmboes lærebøker, og startet dermed en bitter kontrovers mellom de to matematikkprofessorene (Christiansen, 2012, s. 84). Kjernen til debatten var om skolematematikken skulle preges av logiske deduksjoner eller mer praktiske betraktninger, og i hvilken grad bevis skulle prege undervisningen. Det er ikke uvanlig at bruken av bevis er forskjellig i teoretisk og anvendt matematikk (Hersh, 1993, s. 392). Dette viser at selv store matematikere kan være uenige om bevisets plass i matematikken og i skolematematikken.

Et annet spørsmål å ta stilling til er fra hvilket alderstrinn elever eventuelt bør begynne å bevise i matematikk. Forskning viser nemlig at mange land introduserer bevis sent i skoleløpet (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2003, s. 908). Parallelt viser annen forskning at elever sin forståelse i matematikk profiterer på bevis i undervisningen allerede på barneskolenivå (Stylianides & Ball, 2008, s. 309). Blant annet har The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), som er en organisasjon som har hatt innflytelse på utdanningene i USA og Canada, anbefalt at resonnering og bevis bør være en del av læreplanen på alle alderstrinn gjennom utdanningsløpet (Hanna, 2000, s. 10). Det kan virke som om elevene ikke bare profiterer på bevis i utdanningsløpet, men at de også hemmes av mangelen på bevis. Yi-Yin Ko (2010) drar nemlig en parallell mellom sen innføring av bevis og manglende forståelse av matematiske begreper og det nødvendige matematiske språket (s. 1113).

NCTM kom i 2000 ut med følgende seks grunner til å lære bort bevis: etablere sannheter, få forståelse, kommunisere ideer, få intellektuelle utfordringer, skape noe elegant, overraskende og innsiktsfullt, og konstruere en større matematisk teori (Hanna, 2014, s. 404). Siden bevis også kan fungere som verifisering, forklaring, systematisering, oppdagelse, kommunikasjon, konstruksjon, utforskning og inkorporering av fakta i et nytt rammeverk (Hanna, 2000, s. 8), ser det ut til at bevis kan være et nyttig virkemiddel i matematikkundervisningen.

Med tanke på at flere forskere som nevnt mener at bevis kan være svært nyttig i undervisningen, var jeg derfor som kommende matematikk-lektor interessert i å forske på nettopp bevis og hvilken forståelse elever egentlig har av bevis. Selv, etter fem år på Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU), har jeg erfart mange bevis og mye matematikk etter Holmboe sin smak. Jeg har flere ganger tatt meg i å finne bevisene utfordrende å forstå. Av den grunn syntes jeg det var spennende å forske på hvordan elever i den videregående skolen beviste, og hvilke utfordringer de møtte på i sine forsøk på å oppnå matematisk forståelse gjennom bevis.

1.2. Forskningsspørsmålene

Det overordnede temaet for denne studien er hvilken forståelse elevene i den videregående skolen har av bevis. For å få et innsyn i dette, valgte jeg å la to grupper av fire elever få ulike påstander som de to og to sammen skulle forsøke å bevise eller motbevise. Det overordnede forskningsspørsmålet for denne casestudien var:

Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?

For å svare på dette, og for å kategorisere elevenes bevisføringer, valgte jeg å knytte elevenes bevisføring opp mot Harel og Sowder (1998a) sine bevisskjemaer. I og med at bevis ved moteksempel også var en type bevisføring påstandene la til rette for, valgte jeg i forlengelsen av bevisskjemaene til Harel og Sowder, å legge til bevis ved moteksempel som et eget bevisskjema. Dette bevisskjemaet ble knyttet opp mot Zazkis og Chernoff (2008) sine teorier om moteksempler.

Det er mange ulike faktorer som har betydning for elevenes forståelse av bevis. Derfor valgte jeg å formulere dette underordnede forskningsspørsmålet for studien:

Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis?

For å besvare dette forskningsspørsmålet, valgte jeg blant annet å ta for meg ulike teorier om bevis i undervisningen, lærerens og elevenes kunnskaper om bevis, lærerens og elevenes syn på bevis og ulike føringer fra læreplanen, samt lærebokas bevistilnærming.

Jeg har også et tredje forskningsspørsmål som tar for seg spenningsforholdet mellom det overordnede og det underordnede forskningsspørsmålet:

Hvilke sammenhenger kan man finne mellom R1-elevers forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema?

For å besvare alle disse tre forskningsspørsmålene, har jeg valgt å forske i en matematikklasse på VG2 som har programfaget *matematikk R1*. Læreren og elevene det refereres til i denne studien vil alle tilhøre den samme R1-klassen. Grunnen til at jeg har valgt å forske på en R1-klasse, er blant annet at de har den vanskeligste matematikken for sitt klassetrinn (Sirnes, 2012), og at det derfor er langt vanligere i dette matematikkfaget å ha en undervisning som inkluderer bevis og bevisargumentasjon. I tillegg legger læreplanen krav om at faget matematikk R1 inneholder bevis. Kompetansemålene for dette faget legger nemlig opp til at elevene skal utlede og gjøre rede for ulike bevis, regler, setninger og logiske sammenhenger (Kunnskapsløftet, 2006).

1.3. Studiens oppbygging

Denne casestudien er bygget opp slik at jeg starter i kapittel 2 med å presentere det teoretiske rammeverket for studien. Det teoretiske rammeverket er delt i fire deler, der jeg innledningsvis vil ta for meg begrepet forståelse, før jeg i del to vil redegjøre for bevisets plass i matematikken. Jeg vil ta for meg hva et bevis er, den historiske forankringen til bevis og symboler og logiske relasjoner som inngår i bevis. I del tre tar jeg for meg bevis i skolematematikken. Der vil jeg starte med å trekke fram forskjellen på formelle og akseptable bevis, før jeg tar for meg hva som menes med visuelle bevis. Videre vil jeg ta for meg ulike typiske bevisområder i skolematematikken, og i den forbindelse vil læreplanen for matematikk R1 bli trukket inn. Til slutt blir lærerens kunnskaper om og syn på bevis tatt for seg. I den fjerde delen vil jeg ta for meg ulike typer for bevisargumentasjon. Til og begynne med vil jeg da presentere ulike forutsetninger for bevisargumentasjon, der vil også begrepene forklaring, argumentasjon og bevis, og hvordan de vil bli benyttet i denne studien, bli gjort rede for. Deretter tar jeg for meg ulike typer bevisskjemaer, og føyer i den forbindelse til bevis ved moteksempel som et eget bevisskjema.

Etter det teoretiske rammeverket vil jeg i kapittel 3 presentere metodene som denne studien bygger på. Jeg vil da starte med å forklare forskningsdesignet, før jeg presenterer de ulike metodene som ble benyttet i datainnsamlingsprosessen. Deretter vil jeg ta for meg hvordan datamaterialet ble analysert, komme med etiske betraktninger rundt studien og til slutt redegjøre for studiens validitet og reliabilitet.

I kapittel 4 vil analysen av datamaterialet bli presentert. Analysen er delt inn i de to hovedkategoriene *forutsetninger for bevisargumentasjon* og *bevisargumentasjon*. *Forutsetninger for bevisargumentasjon* er igjen delt inn i de tre underkategoriene *bevis i undervisningen, kunnskaper om bevis* og *syn på bevis*. *Bevisargumentasjon* er på sin side delt inn i de fem underkategoriene *eksternt bevisskjema*, *empirisk bevisskjema*, *analytisk bevisskjema*, *bevis ved moteksempel* og *blandet bevisskjema*.

I kapittel 5 vil jeg diskutere forskningsresultatene og komme med en drøfting av studien. Forskningsresultatene vil bli diskutert med tanke på de tre forskningsspørsmålene. I drøftingen av studien vil jeg ta for meg studiens validitet, reliabilitet og generaliserbarhet, nye forskningsspørsmål som oppstod underveis og i etterkant av studien, og til slutt vil jeg komme med en perspektivisering av studien. Helt avslutningsvis vil jeg runde av studien med noen avsluttende ord.

2. Teoretisk rammeverk

2.1. Forståelse i matematikk

Mange elever synes bevis er vanskelig, noe som blant annet viser seg ved at selv kommende universitetsstudenter synes det å forklare er veldig vanskelig (Dreyfus, 1999, s. 93-94). Dette kan igjen komme av at elevene mangler den riktige forståelsen av hvordan ulike begreper skal benyttes i bevis (Dreyfus, 1999, s. 91). Nettopp denne manglende forståelsen kan blant annet komme til syne i en av to ekstremtilfeller av forklaringer. Noen elever kan «forklare» ved kun å gjenta påstanden, mens andre gir en utregning uten eller istedenfor en forklaring (Dreyfus, 1999, s. 89). For mange elever er bevis en rituell handling uten mening (Ball et al., 2003, s. 907). Grunnene til dette kan være mange, og må sees i sammenheng med undervisningspraksisen og hva slags forståelse læreren legger opp til at elevene skal utvikle. Hva slags forståelse er det egentlig ønskelig at elevene skal få gjennom bevis?

Skemp (1978) tar for seg to typer matematikkforståelse, nemlig instrumentell og relasjonell forståelse. Instrumentell forståelse baserer seg på å forstå hvordan, mens relasjonell forståelse baserer seg på å forstå både hvordan og hvorfor (Skemp, 1978, s. 9). Elever kan se på ulike matematiske definisjoner, representasjoner og begreper strukturelt som objekter, eller operasjonelt som prosesser (Sfard, 1991, s. 1). De strukturelle begrepene underbygger den relasjonelle forståelsen, mens de operasjonelle begrepene kan sees på som underbyggende for den instrumentelle forståelsen (Sfard, 1991, s. 29-30). Sowder og Harel (2003) påpeker at i bevissammenheng må elevene forstå den underliggende ideen, ikke bare steg-for-steg-forklaringer. Det virker med andre ord som at relasjonell forståelse både er en forutsetning for å forstå og konstruere bevis, og at det er den forståelsen som fortrinnsvis bør utvikles gjennom bevis, istedenfor instrumentell forståelse. Grunnen til at mange lærere likevel legger opp til en matematikkundervisning som fremmer instrumentell forståelse, eller rituelle handlinger uten mening, kan være at en slik type matematikk kan lettere gi mening og raskere gi riktige svar (Skemp, 1978, s. 12). Dette kan igjen være grunnen til at mange elever er dyktigere til å vurdere bevis enn å konstruere bevis selv (Healy & Hoyles, 2000, s. 407). Sfard (1991) påpeker riktignok at elever også har et behov for den mekaniske drillingen som er forbundet med utviklingen av den instrumentelle forståelse (Sfard, 1991, s. 32). Et problem med et for stort fokus på utvikling av den instrumentelle forståelsen, er at denne forståelsen baserer seg på mange regler istedenfor få generelle prinsipper (Skemp, 1978, s. 10). Dette kan blant annet føre til vansker når oppgavene ikke helt følger reglene.

Matematiske bevis har en forskjellig rolle i skolematematikken kontra forskningsmatematikken. I forskning er hovedoppgaven til bevis å overbevise, mens det i skolen er å forklare (Hersh, 1993, s. 398). I skolen er det viktigste aspektet med bevis å fremme forståelse, ifølge Hanna (1990, 1995, 2000). Hanna (1990) argumenterer derfor for at bevis i skolen må, så langt det lar seg gjøre, være forklarende. Hun skiller mellom bevis som beviser og bevis som forklarer. Mens et bevis som beviser kun viser at et teorem eller en påstand er riktig, vil et bevis som forklarer i tillegg vise hvorfor teoremet eller påstanden er sann (Hanna, 1990, s. 9). I og med at bevis først og fremst skal fremme forståelse blant elevene, er det derfor nødvendig å fokusere på bevis som forklarer istedenfor bevis som kun beviser. Utfordringen i skolematematikken virker derfor å være å finne pedagogiske og didaktiske tilnærminger, slik at bevis både kan få en forklarende og sentral rolle i undervisningen, siden validiteten til matematiske resultater hviler på nettopp bevis (Hanna, 2000, s. 12).

2.2. Bevis i matematikken

2.2.1. Hva er et bevis?

Bell (1976) forklarer bevis som et tre av påstander, forbundet med implikasjoner, hvor endepunktet er konklusjonen og startpunktene er generelt aksepterte fakta eller prinsipper (s. 26). Å bevise er ifølge Bell en offentlig prosess der man skal overbevise andre og sin egen potensielle tvil (1976, s. 24). Dette offentlige aspektet ved bevis påpekes også av Kleiner (1991), som viser til at det til syvende og sist er det offentlige matematiske fellesskapet som godkjenner eller underkjenner nye bevis. Jaffe (1997) trekker også fram verifikasjon som en sentral del av bevis, da han hevder bevis fungerer som verifikasjon i matematikk, slik som eksperimenter fungerer som verifikasjon i fysikk og andre naturvitenskaper. Et viktig poeng med bevis er ifølge Jaffe at bevis er et teknisk verktøy (1997, s. 133). Han påpeker i likhet med Bell den logiske sammenhengen mellom bevis og ny kunnskap, der aksepterte bevis senere kan bli tatt for gitt, og være grunnlag for å skape en forståelse av nye aspekter ved et matematisk problem (Jaffe, 1997, s. 134). Bevis er med andre ord, ifølge Bell og Jaffe, en metode for å utvikle ny kunnskap. Denne metoden, der man benytter definisjoner, aksiomer og kjente teoremer for å bevise nye teoremer, kalles den aksiomatiske metoden. Det er viktig å påpeke at den aksiomatiske metoden er måten vi registrer og lagrer matematikken på, det er ikke måten man oppdager matematikk på (Krantz, 2011, s. 25). Den definisjonen av bevis jeg vil benytte i resten av denne oppgaven, er det Stylianides (2007) som presenterer. Denne definisjonen ser bevis i lys av skolematematikken, som er fokuset for denne oppgaven:

> *Proof* is a *mathematical argument*, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:
>
> 1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justification;
> 2. It employs form of reasoning (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
> 3. It is communicated with forms of expression (*modes of argument representation*) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community (Stylianides, 2007, s. 291).

Det finnes mange ulike typer bevis. Av de vanligste bevistypene kan det nevnes direkte bevis, motsigelsesbevis, bevis ved moteksempel, kontrapositivt bevis og induksjonsbevis. Læreboka *Sinus Matematikk – R1*, som R1-klassen i denne oppgaven bruker, presenterer og forklarer fire vanlige bevismetoder, nemlig *direkte bevis*, *kontrapositivt bevis*,

bevis ved moteksempel og *motsigelsesbevis* (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl & Hals, 2013). Særlig av interesse i denne oppgaven er direkte bevis, bevis ved moteksempel og kontrapositive bevis. Induksjonsbevis er ikke pensum for elever før i VG3, og vil derfor ikke bli berørt. Motsigelsesbevis vil heller ikke bli berørt, da det for det første ikke er relevant for de bevisprosessene som elevene utfører i denne oppgaven. For det andre kunne motsigelsesbevis fortjent en studie alene, da denne bevisformen viser seg problematisk for mange elever (Harel & Sowder, 1998a, s. 254; Tall et al., 2012, s. 38). Direkte bevis baserer seg på logiske deduksjoner, såkalt *modus ponendo ponens*, der man benytter seg av implikasjoner for å konkludere (Krantz, 2011, s. 11). Kontrapositive bevis har derimot en litt mer sammensatt logisk forankring. I stedet for å vise direkte at A fører til B ($A \Longrightarrow B$), så benytter man såkalt *modus tolendo tollens* og viser at ikke B medfører ikke A ($\sim B \Longrightarrow \sim A$), da disse to påstandene er logisk ekvivalente (Krantz, 2011, s. 13). En slik bevisføring kan vise seg hensiktsmessig hvis det er vanskelig å føre et direkte bevis. De fleste steg av et bevis består av nettopp implikasjoner og kontrapositive implikasjoner (Krantz, 2011, s. 14). Bevis ved moteksempel er derimot en bevisform som baserer seg på moteksempeler til å falsifisere den gitte påstanden, der ett moteksempel er nok for å motbevise påstanden. Forståelsen av rollen til moteksempler for å avvise falske påstander er derfor viktig for denne bevisformen (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225).

2.2.2. Bevisets historiske forankring

Bevis, som i dag er en integrert og viktig del av den matematiske praksisen, har hatt en lang utvikling. Matematikk er sammen med filosofi den eldste menneskelige, intellektuelle aktiviteten, og hadde til å begynne med først og fremst en praktisk karakter (Krantz, 2011, s. 4). Den mest avanserte og sofistikerte matematikken før den greske matematikken, stod Babylonerne for. De manglet riktignok begrepet bevis og benyttet heller ikke deduksjon (Kleiner, 1991, s. 291). Det var det antikke Hellas som introduserte den aksiomatiske metoden. Euklid bidro sterkt til å formalisere matematikken gjennom blant annet sin Euklidske geometri. Ironisk nok bidro grekernes økte fokus på rigorøsitet til at man vendte seg vekk fra rigorøsitet igjen for en lang periode (Kleiner, 2011, s. 294). Euklid var influert av pytagoreerne, som blant annet er husket som de første som etablerte viktigheten av og nødvendigheten for bevis i matematikk (Krantz, 2011, s. 44). Av religiøse grunner var det flere matematiske begreper som i middelalderen slet med å få fotfeste. Bevis ble derfor benyttet, og bidro blant annet til at tallsystemet ble akseptert, da det ble klart at tallsystemet kom fra menneskenes intellekt og ikke fra djevelen selv (Krantz, 2011, s. 50-51).

Symbolbruken, som er en viktig del av bevis i matematikk og matematikken selv slik vi kjenner den i dag, ble først introdusert på 1500- og 1600-tallet (Kleiner, 1991, s. 294). Analysens fremtog på 1600- og 1700-tallet bidro til et skifte i matematikken fra visuelle geometriske forklaringer, inspirert av det antikke Hellas, til at algebra ble hovedverktøyet for å forklare nye sammenhenger (Kleiner, 1991, s. 301). Nettopp på grunn av den analytiske matematikken, ble rigorøsiteten og den aksiomatiske metoden på mange måter gjenfødt på 1800-tallet. Matematikken bevegde seg fra en empirisk til en mer abstrakt tilnærming, og på starten av 1900-tallet ble ideen om hva et bevis skulle være diskutert i lys av at logisme, formalisme og intuisjonisme vokste fram som ulike filosofiske retninger innenfor matematikk (Kleiner, 1991, s. 305).

Mens det tidligere hadde vært matematikken som hadde påvirket fysikken, påvirket fysikken på 1900-tallet, i langt større grad enn tidligere, også matematikken (Jaffe, 1997, s. 138). Slike påvirkninger fra andre vitenskapelige disipliner har også påvirket synet på bevis i matematikken, noe som blant annet kommer til syne gjennom den forskjellige bruken av bevis i teoretisk og anvendt matematikk (Hersh, 1993, s. 392). Disse ulike synene på bevis, førte som kjent også til en bitter strid mellom Holmboe og Hansteen om hvilken plass bevis burde ha i den norske matematikkundervisningen (Christiansen, 2012). En annen påvirkning på bevis har datamaskinen hatt, og enkelte har gått så langt som å hevde at datamaskinens inntreden er «døden av bevis» (Horgan, 1993). Sannsynlighetsbevis er en ny og kontroversiell form for bevis, der man går vekk fra absolutt sikkerhet og isteden godkjenner bevis på bakgrunn av at sannsynligheten er tilstrekkelig stor for at beviset er korrekt (Kleiner, 1991, s. 311-312). Siste ord er helt sikkert ikke sagt i debatten om hva et bevis er og hva som er riktig bevisføring. Krantz (2011) påpeker riktignok at tradisjonelle matematiske bevis, som er basert på den aksiomatiske metoden, vil forbli valide til evigheten og forbi (s. 221).

2.2.3. Symboler og logiske relasjoner

Symbolenes plass i matematikken og bevisene gjorde sitt inntog på 1500-tallet da bevisparadigmet skiftet fra geometri til algebra, og François Viète introduserte generell symbolisme i algebraen (Grabiner, 2012, s. 155). Den nye symbolske notasjonen viste seg som en metode for nye oppdagelser, da nye resultater var en konsekvens av sammenhengen mellom innhold og form (Kleiner, 1991, s. 294). Det virker derfor også nødvendig med en forståelse av hva symboler betyr og representer, både i seg selv og i sammenheng med ulike påstander og logiske relasjoner, for å kunne bevise. Det har vært diskutert blant lærere og lektorer i hvilken grad symbolsk logikk kan hjelpe elever med å forstå og produsere bevis (Hanna, 2014, s. 407)

Implikasjonstegnet er et slikt symbol som knytter sammen ulike påstander og skaper en logisk relasjon mellom påstandene. Mange elever sliter med implikasjoner på formen 'hvis A så B', da de sliter med å skille mellom påstandene 'hvis A så B' og 'hvis B så A' (Tall, 1989, s. 28). Grunnen til at mange sliter med implikasjon, kan være at den motsatte implikasjonen blandes med den kontrapositive implikasjonen (Krantz, 2011, s. 12). For en gitt implikasjon ($A \Longrightarrow B$), vil den motsatte implikasjon ($B \Longrightarrow A$) ha en helt annen logisk betydning, mens den kontrapositive implikasjonen ($\sim B \Longrightarrow \sim A$) derimot, er ekvivalent med den det gitte implikasjonen ($A \Longrightarrow B$). En forståelse av implikasjonssymbolet og den logiske relasjonen mellom ulike påstander som implikasjon fører med seg, virker derfor å være fundamentalt i bevisprosessen, da de fleste steg i et bevis består av nettopp implikasjoner og kontrapositive implikasjoner (Krantz, 2011, s. 14).

2.3. Bevis i skolematematikken

2.3.1. Formelle og akseptable bevis

Av erfaring hevder Tall (1989) at elever sliter med formelle definisjoner, så formelle bevis virker ikke å være veien å gå i skolematematikken for å fremme økt forståelse (s. 30). Hanna (1990, 1995, 2000) har tatt for seg forskjellen på bevis i forskningsmatematikken og skolematematikken, og forskjellen på formelle bevis og akseptable bevis. Formelle bevis er et ideal som blir tilnærmet i den matematiske praksisen der en gitt setning blir bevist ved hjelp av en endelig sekvens av setninger som logisk bygger på hverandre, og hvor man benytter seg av aksiomer eller tidligere beviste setninger i bevisprosessen (Hanna, 1990, s. 6). De senere årene har det riktignok blitt en økt bevissthet, både blant matematikere og matematikklærere, på at bevis med ulik grad av formell validitet kan være like akseptable, all den tid forståelsen og signifikansen av det som er bevist veier tyngre enn rigorøsiteten og den formelle korrektheten av beviset (Hanna, 1990, s. 8). For disse akseptable bevisene er det med andre ord de matematiske implikasjonene et bevis fører med seg som er viktigere enn verifikasjonen av et resultat. En grunn til at man i skolen, som Hanna (1990) påpeker, har valgt å bevege seg vekk fra formelle bevis, kan være at det er kun de flinkeste elevene som forstår slike deduktive bevis (Bell, 1976, s. 23).

Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai og Tabach (2009) tar for seg i hvilken grad det skal være et krav at bevisene må være minimale for at de skal bli akseptert. Det vil si at bevisene ikke skal inneholde mer enn det aller mest nødvendige for å bevise den gitte påstanden. En konsekvens av dette er at en elev som beviser mer enn det som skulle bevises, får feil fra læreren, selv om alt i beviset er korrekt, da eleven ikke har kommet med et minimalt bevis. I denne oppgaven vil det ikke være et krav av beviset må være minimalt for at det skal betraktes som akseptabelt. Med andre ord vil et akseptabelt bevis i denne oppgaven være et bevis, som ikke nødvendigvis er minimalt eller har en fullstendig formell validitet, men som til gjengjeld er i samsvar med Stylianides (2007) definisjon av bevis.

2.3.2. Visuelle bevis

En type bevis som har en forklarende karakter er visuelle bevis. Spørsmålet er i hvilken grad slike bevis er å betrakte som akseptable. Visuelle bevis har eksistert i lang tid og i mange områder av matematikken, blant annet innen gresk geometri og aritmetikk (Grabiner, 2012, s. 148). I dag kan blant annet den store fremgangen innen data knyttes opp mot visualisering, og datavisualisering kan vise seg å være et viktig verktøy for bevis (Krantz, 2011, s. 142). Matematikeren Philip Davis hevder at visuelle bevis har blitt overskygget av formalismens inntreden i matematikken (Hanna & Janhke, 1996, s. 883). En kuriositet i så måte et at det greske ordet teorem faktisk betyr «å se på» (Grabiner, 2012, s. 148). Særlig på 1700-tallet vendte man seg vekk fra visuelle bevis da algebraens symbolisme kom i fokus, og geometriske intuisjoner kunne vise seg å være villedende for de påstandene og teoremene som skulle bevises (Grabiner, 2012, s.157). Denne geometriske villedningen kommer blant annet til syne i hyperbolsk geometri. I denne geometrien finnes det minst to linjer gjennom et punkt p som ikke ligger på linja l, som alle er parallelle med linja l (Venema, 2012, s. 21). Spørsmålet som Hanna (2000) fremmer, er i hvilken grad visuelle representasjoner kan bevise og ikke bare vise påstander (s. 15) eller være villedende. For at visuelle bevis skal kunne anses som valide bevis, synes det i hvert fall klart at det trengs tydelige krav som sikrer en slik validitet. Tre nødvendige, men ikke tilstrekkelige kriterier, har blitt foreslått å være reliabilitet, konsistens med andre kjente fakta, meninger og bevis, og etterprøvbarhet (Hanna, 2000, s. 17). Et eksempel på visuelle bevis er generiske eksempler, da dette er forklarende eksempler som benytter seg av figurer for å bevise ulike sammenhenger. Balacheff (1988) forklarer generiske eksempler som eksempler der man distanserer seg fra prosessen ved å benytte eksempler som avdekker den generelle strukturen (s. 219). Et potensielt problem med generiske eksempler er at læreren og elevene ikke nødvendigvis oppfatter det samme eksempelet på den samme måten. For læreren kan eksempelet være et eksempel på noe generelt, mens eksempelet for eleven kan oppleves som noe komplett for seg selv som ikke illustrerer noe generelt (Mason, 1996, s. 67). I denne oppgaven vil visuelle bevis bli ansett som akseptable bevis, så sant de tre nødvendige kriteriene til Hanna (2000) sammen med Stylianides (2007) tre krav for bevis er tilfredsstilt.

2.3.3. Bevisområder

Bevis i den videregående skolen har først og fremst vært knyttet opp til euklidsk geometri (Stylianides, 2007, s. 289; Tall, 1989, s. 28). En grunn til det kan være at geometri i lang tid har blitt undervist ut i fra den euklidske tradisjonen, der bevis og deduksjoner står sterkt, mens innenfor for eksempel aritmetikk ble deduktive aspekter først inkludert som en del av undervisningen på 1800-tallet (Harel & Sowder, 1998a, s. 234). En annen grunn kan være at i motsetning til geometri, der de fleste av bevisende er forklarende, er det i andre matematiske områder nødvendig å benytte motsigelsesbevis, induksjon og andre ikke-forklarende bevismetoder (Hanna, 2000, s. 9).

Læreplanen i matematikk R1 er delt opp i de fire hovedområdene geometri, algebra, funksjoner og kombinatorikk og sannsynlighet (Kunnskapsløftet, 2006). Kompetansemålene legger i liten grad opp til at elevene skal bevise ulike sammenhenger og påstander. Istedenfor å bruke ordene bevise og argumentere, bruker læreplanen ord som *gjøre rede for* og *utled*, som begge kan knyttes opp mot bevis. Innenfor geometri skal elevene gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras' setning og utlede skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant. Innenfor algebra skal elevene utlede de grunnleggende regnereglene for logaritmer og gjøre rede for implikasjon og ekvivalens, samt gjennomføre direkte og kontrapositive bevis. I hovedområde funksjoner er det ingen mål som er tilknyttet bevis eller noen form for bevisprosess. I kombinatorikk og sannsynlighet skal elevene utlede Bayes' setning på to hendelser og regler for beregning av sannsynlighet (Kunnskapsløftet, 2006). Siden matematikkundervisningen bygger på matematiske resultater, og som Hanna (2000) påpeker så hviler matematiske resultater igjen på bevis (s. 12), er det betimelig å stille seg spørsmålet om ikke alle områder av skolematematikken burde inkludere bevis og bevisargumentasjon?

Innenfor *skalarprodukt*, som er temaet for det første praksisbesøket, forventes det i læreplanen ingen bevis fra elevenes side. De to kompetansemålene som er tilknyttet vektorer er henholdsvis at eleven skal kunne:

- regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og analytisk på koordinatform
- beregne og analysere lengder og vinkler til å avgjøre parallellitet og ortogonalitet ved å kombinere regneregler for vektorer (Kunnskapsløftet, 2006).

Innenfor *derivasjon og kontinuitet*, som er temaet for det andre praksisbesøket, forventes det i læreplanen heller ingen bevis fra elevene. Det eneste kompetansemålet som er knyttet opp mot sammenhengen mellom derivasjon og kontinuitet er at eleven skal kunne:

- gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare (Kunnskapsløftet, 2006).

2.3.4. Lærerens kunnskaper og syn

I hvilken grad bevis gjennomsyrer matematikkundervisningen og hvordan bevis undervises, avhenger av læreren. Elevenes erfaringer med bevis vil påvirkes av i hvilket klasserom de er plassert (Dickerson & Duerr, 2014, s. 711). Det er særlig tre komponenter ved lærerens forhold til bevis som er essensielle for elevenes forståelse av bevis, nemlig lærerens kunnskaper om bevis, lærerens meninger om bevis og lærerens undervisningspraksis (Lin et al., 2012, s. 327).

Lærerens kunnskaper om bevis kan deles i de to kategoriene *logisk-lingvistiske kunnskaper om bevis* og *kunnskaper om situasjoner for å bevise* (Stylianides & Ball, 2008, s. 307). Den logisk-lingvistiske kunnskapen om bevis består av evnen til å forstå tre ting, nemlig at utviklingen av bevis avhenger av spesifikk matematisk kunnskap som er offentlig tilgjengelig, rollen til det matematiske språket i bevisene og forskjellen mellom deduktive og empiriske argumentasjonsformer (Stylianides & Ball, 2008, s. 310). Kategorien kunnskaper om situasjoner for å bevise består av kunnskaper om hensikten med forskjellige bevisoppgaver og kunnskaper om sammenhengen mellom bevisoppgaver og bevismetoder (Stylianides & Ball, 2008, s. 313-314).

Lærerens meninger og syn på bevis kan i mange tilfeller være like avgjørende for matematikkundervisningen som lærerens kunnskaper. Enkelte lærere mener at formelle bevis er upassende i undervisningen, mens andre lærere går lengre ved å hevde at bevis er bortkastet tid for elever flest (Dickerson & Doerr, 2014, s. 712). Dickerson og Doerr (2014) fant i sin studie at matematikklærere mente at forbedring av forståelse var den hovedsakelige hensikten med bevis (s. 716). Samtidig finnes det forskning som viser at lærere mener at hovedrollen til bevis er å etablere sannheter, ikke være forklarende (Ko, 2010, s. 1115). Dette er et paradoks da, som Hanna (1990) påpeker, bevis som forklarer, skaper eller forbedrer den matematiske forståelsen mer enn bevis om bare beviser. Hvilket syn læreren har på bevis, vedrørende om bevis skal overbevise eller forklare, vil til syvende og sist avgjøre hva slags undervisning elevene vil få om bevis (Reid, 2005, s. 462). Det viser seg at en del lærere er mer opptatt av det formelle aspektet ved beviset, slik som for eksempel algebraiske manipulasjoner, enn validiteten til argumentet som ligger bak (Lin et al., 2012, s. 332). Lærerens syn på hvilke områder av skolematematikken som bør inneholde bevis, påvirker i hvilken grad bevis gjennomsyrer matematikkundervisningen. Noen lærere ser først og fremst på geometri som det området av skolematematikken der bevis bør prege undervisningen (Lin et al., 2012 , s. 335). Det er verdt å merke seg at lærerens syn på og kunnskaper om bevis ikke bare påvirker undervisningspraksisen, men det påvirker også hverandre (Lin et al., 2012 , s. 336).

2.4. Bevisargumentasjon

2.4.1. Forutsetninger for bevisargumentasjon

Før elever setter i gang med å bevise og argumentere for å øke sin forståelse, må flere forutsetninger være på plass. I den sammenheng er det nødvendig med visse presiseringer. Enkelte matematikkforskere, som Sierpinska, skiller nemlig mellom forklaring og bevis, mens andre, som Duval, skiller mellom forklaring, argumentasjon og bevis (Dreyfus, 1999, s. 101). Hanna (1990) påpekte at bevis i skolesammenheng helst burde være forklarende. En forklaring vil, på sin side, i denne oppgaven kun bli ansett som akseptabel dersom den tilfredsstiller Stylianides (2007) tre kriterier for bevis. Dette fordi det ville vært merkelig å akseptere en forklaring som bygger på påstander som ikke er akseptert i klassen, en resonnering som ikke er valid eller innenfor rekkevidden til klassen, eller som er kommunisert på en upassende og ukjent måte i forhold til hva klassen er i stand til å forstå. Begrepene akseptabelt bevis og akseptabel forklaring vil derfor bli brukt om hverandre i denne oppgaven, da de blir ansett som ekvivalente. Slik bevis er definert i denne oppgaven, vil også bevis og argumentasjon være to sider av samme sak:

> *Proof* is a *mathematical argument*, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:
>
> 1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justification;

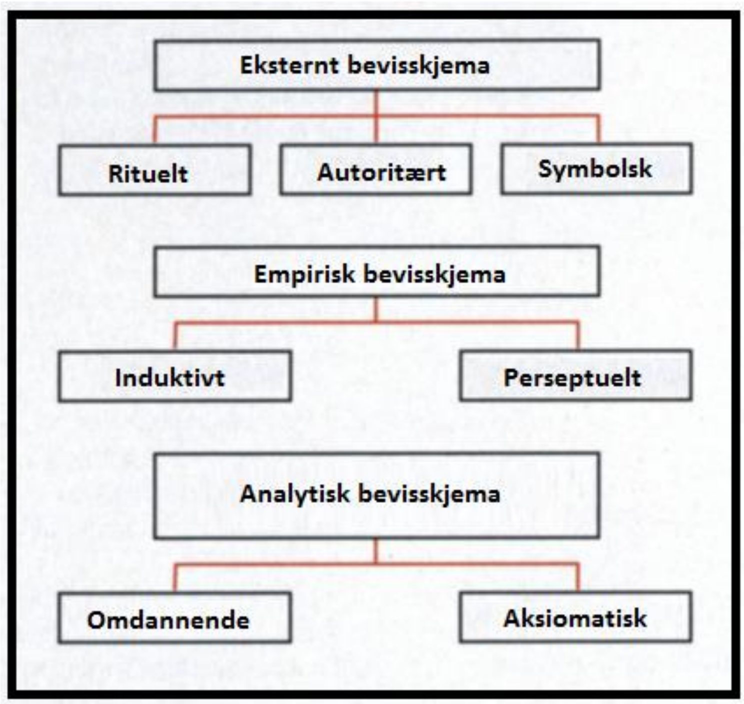
2. It employs form of reasoning (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
3. It is communicated with forms of expression (*modes of argument representation*) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community (Stylianides, 2007, s. 291).

Argumentasjon har de senere årene fått en økt plass i klasserommene, og noe av grunnen til det kan være forskning som viser at elever har utbytte av matematisk argumentasjon (Hanna, 2014, s. 406). Elevenes evne til å bevise avhenger riktignok av at de får ta del i bevisaktiviteter, noe som ikke alltid er tilfellet (Dreyfus, 1999, s. 94). Ofte er også tilfellet at elevene har fått få læringserfaringer med hva som karakteriserer et matematisk argument (Dreyfus, 1999, s. 91). Grunnen til dette kan blant annet være som tidligere nevnt bevisets manglende plass i læreplanene, lærerens kunnskaper om og syn på bevis og elevenes vansker med bevis.

En forutsetning for bevisargumentasjon er å ha et læringsmiljø der elevene har et personlig forhold til bevis, og at de ser nødvendigheten av å bevise og motbevise påstander (Alibert & Thomas, 1991, s.230). Da må blant annet elevene se behovet for steg-for-steg-forklaringer (Sowder & Harel, 2003, s. 264). Samtidig må elevene vite hva som tilfredsstiller et akseptabelt bevis i dette læringsmiljøet. Det er derfor nødvendig med en didaktisk kontrakt mellom læreren og elevene. En didaktisk kontrakt er de gjensidige oppfatningene, holdningene og forventningene mellom læreren og elevene som er karakteristiske for en undervisningssituasjon i matematikk (Blomhøj, s. 36, 1994). En annen forutsetning er at elevene får erfaringer med bevisoppgaver, og ikke bare oppgaver som baserer seg på utregninger. En måte å gjøre det på er at læreren har en aktiv rolle og stiller spørsmål ved elevenes egne overbevisninger knyttet til sine svar, og på den måten transformerer regneoppgaver til bevisoppgaver (Stylianides & Ball, 2008, s. 321). Manglende bevisoppgaver i undervisningen, kan sees i sammenheng med utformingen av eksamenen som indirekte legger føringer på matematikkundervisningen og dens innhold av bevis (Skemp, 1978, s. 13). Tidligere ble lærerens kunnskaper tatt opp som en forutsetning for elvenes forståelse av bevis. Elevene trenger nødvendigvis også kunnskaper om bevis. De trenger ikke bare kunnskaper om bevis, men også kunnskaper om symbolene, begrepene og de logiske relasjonene som involveres i bevisene. Bevis kan fungere som verifisering, forklaring, systematisering, oppdagelse, kommunikasjon, konstruksjon, utforskning og inkorporering av fakta i et nytt rammeverk (Hanna, 2000, s. 8). Hvilket syn elevene har på bevis og bevisets fremste rolle, vil derfor også være en forutsetning for hvordan elevene beviser.

2.4.2. Bevisskjemaer

I et matematisk læringsmiljø preget av bevis og bevisargumentasjon, vil elevenes personlige forhold til bevis føre til at de benytter forskjellige former eller skjemaer for bevis. Elevens valg av bevisskjema vil nemlig påvirkes av elevens syn på matematikk (Harel & Sowder, 1998a, s. 242). Harel og Sowder (1998a, 1998b, 2003) har i en rekke artikler tatt for seg ulike former for bevisargumentasjon, kalt bevisskjemaer, som universitetsstudenter benytter seg av når de beviser. I denne oppgaven vil den samme oppdelingen av bevisskjemaer som Harel og Sowder benytter bli brukt i forbindelse med elever i VG2 som tar matematikkurset R1. Harel og Sowder (1998a) skiller mellom tre hovedtyper bevisskjemaer, nemlig eksterne, empiriske og analytiske bevisskjemaer.



Figur 1: Bevisskjemaer.

Det eksterne bevisskjemaet, som mange elever benytter (Sowder & Harel, 2003, s. 253), består av tre ulike typer eksterne overbevisninger, nemlig ritualer, autoriteter og symboler. Når formaliteter i matematikk blir introdusert for tidlig for elevene, får de et inntrykk av at matematiske forklaringer og begrunnelser er basert på ritualer og form (Harel & Sowder, 1998a, s. 245). Elever som benytter det rituelle bevisskjemaet er mer opptatt av de rituelle aspektene ved et argument enn om argumentet i seg selv er riktig (Harel & Sowder, 1998a, s. 246). Formen blir derfor viktigere enn innholdet i beviset, hvilket blant annet kan føre til at elever kan akseptere feilaktige bevis fordi bevisene «ser riktige ut». Det autoritære bevisskjemaet blir benyttet av elever som kun stoler fullt og helt på læreboka, læreren og flinkere elever og matematikere når de skal begrunne et resultat (Sowder & Harel, 1998b, s. 671). Grunnen til at elever benytter dette bevisskjemaet kan være at det i skolematematikken har vært mer fokus på sannhetene enn grunnen til sannhetene (Harel & Sowder, 1998a, s. 247). Det symbolske bevisskjemaet benyttes av elever som tror symbolene lever et liv for seg selv fordi elevene ikke har noen innsikt i funksjonen symbolene spiller (Harel & Sowder, 1998a, s. 250). Denne ukritiske bruken av symboler tar ikke hensyn til konteksten symbolene er en del av. Healy og Hoyles (2000) observerte i sin studie at mange elever mente algebraiske argumenter ville få best resultat fra læreren (s. 412), samtidig som det viste seg at elever som selv ga algebraiske argumenter fikk dårligere resultat enn de elevene som ikke ga algebraiske argumenter, da elevene kastet om seg med bokstaver på en ulogisk måte (s. 413).

Begrunnelser som baserer seg på eksempler er en annen form for bevisskjema, kalt empirisk bevisskjema (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Generaliseringer er en viktig del av matematikken, og enkelte mener det er selve hjertet av matematikken (jfr. Mason, 1996, s. 74). Mange elever er riktignok overbevist av kun to eksempler (Hersh, 1993, s. 396). Dette bevisskjemaet består av to ulike typer bevisskjema, nemlig induktivt og perseptuelt bevisskjema. Det Harel og Sowder (1998a) kaller induktivt bevisskjema, er en form for bevis som mange forskere omtaler som empiriske bevis (jfr. Balacheff, 1988; Stylianides & Stylianides, 2009). Elever som benytter det induktive bevisskjemaet, overbeviser seg selv og andre på bakgrunn av ett eller flere eksempler eller tilfeller (Harel & Sowder, 1998a, s. 252). Slike induktive bevis er en svært vanlig bevisform blant elevene (Healy & Hoyles, 2000, s. 408), og mange benytter det induktive bevisskjemaet i møte med nye problemer som krever nye bevisstrategier (Recio & Godino, 2001, s. 91). En annen form for empiriske bevis er perseptuelle bevis, bevis som benytter sansene. I denne oppgaven vil det kun være visuelle bevis av de perseptuelle bevisene som vil bli tatt for seg. Derfor vil begrepene perseptuelle bevis og visuelle bevis, og perseptuelt bevisskjema og visuelt bevisskjema, bli benyttet om hverandre. Elever som overbeviser seg selv og andre ved hjelp av en eller flere tegninger har et perseptuelt bevisskjema (Sowder & Harel, 1998b, s. 672).

Analytisk bevisskjema er et bevisskjema som validerer formodninger på bakgrunn av logiske deduksjoner (Harel & Sowder, 1998a, s. 259), istedenfor intuisjon, empirisme og andre ikke-matematiske overbevisninger. Det er med andre ord et bevisskjema som inneholder bevis som både har en høyere grad av formalitet og akseptabilitet enn de eksterne og empiriske bevisskjemaene. Det analytiske bevisskjemaet kan igjen deles inn i omdannende[1] og aksiomatiske bevisskjemaer. Det vil være to forenklede versjoner av disse to bevisskjemaene som vil bli benyttet i denne oppgaven. Det omdannende bevisskjemaet er karakterisert ved hjelp av tre faktorer. For det første tar dette bevisskjemaet hensyn til de generelle aspektene ved situasjonen. For det andre tar det i bruk mentale omdannelser som er målorienterte og forutser hva resultatet av den mentale omdannelsen blir. For det tredje tar elever som benytter et omdannende bevisskjema og omdanner visuelle bilder i den deduktive prosessen (Harel & Sowder, 1998a, s. 261). Det aksiomatiske bevisskjemaet er en forlengelse av det omdannende bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s.274). Elevene som benytter et aksiomatisk bevisskjema forstår, i hvert fall i prinsippet, at matematiske begrunnelser har sitt utspring fra udefinerte begreper og aksiomer (Harel & Sowder, 1998a, s. 273).

Elever kan benytte seg av flere ulike bevisskjemaer samtidig (Harel & Sowder, 1998a, s. 244), og hvilke bevisskjemaer som benyttes kan forandre seg underveis i bevisprosessen (Recio & Godino, 2001, s. 91). Selv om elever benytter ulike bevisskjemaer, virker det ikke nødvendigvis som om det er noen korrespondanse mellom det matematiske området og bevisskjemaet som blir benyttet. Recio og Godino (2001) sammenlignet aritmetikk og geometri med tanke på hvilke bevisskjemaer elevene benytter, og de fant ut at elevenes bevisskjema var relativt uavhengig av det matematiske innholdet (s. 90). Det kan isteden være en korrespondanse mellom elevenes ulike bevisskjemaer og eventuelle samarbeidsproblemer mellom elevene, da elever som benytter ulike bevisskjemaer har ulik begrepsforståelse, og elever som har ulik begrepsforståelse kan slite med å samarbeide (Balacheff, 1988, s. 222).

2.4.3. Bevis ved moteksempel

Det trenger ikke å være noen motsetning mellom å ha et analytisk bevisskjema og benytte seg av bevis ved moteksempel. Harel og Sowder (1998a) hadde nemlig ikke moteksempler som et eget bevisskjema, og på sett og vis kan man si at bevis basert på moteksempler hører inn under det analytiske bevisskjemaet. Moteksempler har nemlig en helt annen logisk gyldighet enn for eksempel induktivisme. Der induktivisme feilaktig beviser påstander på bakgrunn av eksempler, motbeviser moteksempler påstander korrekt på bakgrunn av nettopp et

[1] Harel og Sowder kaller det ene analytiske bevisskjemaet for *transformational proof scheme*. Dette bevisskjemaet er i denne oppgaven oversatt til *omdannende bevisskjema*.

moteksempel. Grunnen til at moteksempler i denne oppgaven vil bli ansett som et eget bevisskjema er at bruken av moteksempler ikke nødvendigvis trenger å være analytisk, da dette avhenger av hvilken forståelse elevene har av moteksempler, og om de benytter moteksemplene på riktig måte.

Elevens manglende forståelse av bevis kan blant annet føre til at elever ikke nødvendigvis tror at deduktive bevis utelukker muligheten for moteksempler (Chazan, 1993, s. 384). Dette har ført til at forskere som Stylianides og Al-Murani (2010) har forsket på om elever tror at et bevis og et moteksempel kan sameksistere. I deres studie fant de riktignok ikke data som bekreftet dette, men det kan vel så mye skyldes deres metodiske tilnærminger. Stylianides og Al-Murani valgte nemlig å la elevene vurdere andres bevisargumentasjon istedenfor å konstruere bevisene selv, samtidig som det finnes forskning som viser at elevene er langt flinkere til å vurdere bevis enn å konstruerer dem selv (Healy & Hoyles, 2000, s.407). Derfor er det ikke sikkert at disse forskerne egentlig fikk innsyn i elevenes forståelse av bevis og moteksempel, og heller ikke deres tanker om sameksistensen av bevis og moteksempel. I hvilken grad elever evner å benytte seg av moteksempler til å motbevise påstander, avhenger av den matematiske konteksten. Det finnes eksempelvis forskning som viser at elever er langt mer overbevist innenfor geometri enn algebra om at ett moteksempel er tilstrekkelig for å motbevise en påstand (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 228). Zaslavsky og Ron (1998) fant blant annet ut at en del elever ikke klarte å skille mellom eksempler som tilfredsstilte kravene til å være et moteksempel, og eksempler som ikke tilfredsstilte disse kravene (s. 230).

Moteksempler kan blant annet være nyttige i undervisningen hvis de er med på å skape kognitive konflikter for elever med motstridende matematiske forståelser (Stylianides & Stylianides, 2009, s. 319). En kognitiv konflikt defineres av Zazkis og Chernoff (2008) som en indre konflikt som blir påkalt når den lærende møter på motsigelser eller mangel på konsistens i sine egne ideer (s. 196). Zazkis og Chernoff introduserer i sammenheng med moteksempler begrepet *avgjørende eksempel*[2], som er et eksempel som skaper en slik kognitiv konflikt, og er med på å skape begrepsforandring hos den lærende (2008, s. 197). Hvis det avgjørende eksempelet også er med på å løse den kognitive konflikten, kalles det et *avgjørende brobyggende eksempel*[3] (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197). Avgjørende

[2] Zazkis og Chernoff (2008) introduserer i sammenheng med moteksempler begrepet *pivotal example*. Dette begrepet er i denne oppgaven oversatt til *avgjørende eksempel*.

[3] Zazkis og Chernoff (2008) introduserer også begrepet *pivotal-bridging example*. Dette begrepet er i denne oppgaven oversatt til *avgjørende brobyggende eksempel*.

brobyggende eksempler er derfor et verktøy for å endre personlige begreper til konvensjonelle begreper (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197). Moteksempler, som er et matematisk begrep, kan derfor også være et pedagogisk begrep hvis de blir benyttet som avgjørende eksempler. Jeg vil i denne oppgaven gi avgjørende brobyggende eksempler en litt videre betydning enn hva Zazkis og Chernoff gir dem. I denne oppgaven, vil et eksempel være et avgjørende brobyggende eksempel for eleven, dersom det løser elevens matematikkoppgave, og samtidig er med på å gi klarhet i elevens begrepsforståelse. Avgjørende brobyggende eksempler kan, men trenger altså ikke å løse en kognitiv konflikt. Grunnen til at jeg har gjort denne endringen, er at det kan være elevens manglende, snarere enn motstridende begrepsforståelse, som skaper vansker for eleven i sin bevisargumentasjon. Jeg vil understreke at et avgjørende eksempel ikke må forveksles med et *avgjørende eksperiment*. Det avgjørende eksperimentet er et pragmatisk bevis som er mer generelt enn et eksempel, der man fastslår at hvis det stemmer i dette mer sammensatte spesialtilfellet, så må det stemme generelt (Balacheff, 1988, s. 219).

3. Metode

I dette metodekapittelet vil jeg først ta for meg forskningsdesignet, før jeg tar for meg hvilke metoder som ble benyttet i datainnsamlingen og hvilke analysemetoder som ble benyttet. Deretter vil jeg komme med etiske betraktninger rundt forskningsarbeidet, før jeg til slutt tar opp validiteten og reliabiliteten i forskningen. Det ble i alt foretatt tre forskningsbesøk. Det første besøket bestod av et intervju med læreren som underviste i den aktuelle R1-klassen. Det andre forskningsbesøket bestod av en time observasjon av matematikkundervisningen, etterfulgt av en time oppgaveløsning med fire elever fra den samme R1-klassen. Temaet for dette forskningsbesøket var skalarprodukt. Det tredje forskningsbesøket bestod også av en time observasjon av matematikkundervisningen, etterfulgt av en time oppgaveløsning med fire andre elever fra den samme klassen. Temaet for dette forskningsbesøket var derivasjon og kontinuitet.

3.1. Forskningsdesign

I denne masteroppgaven har jeg valgt casestudien som kvalitativt forskningsdesign. Robert K. Yin (2014) hevder at casestudien som forskningsmetode er en vanlig forskningsmetode blant annet når vi ønsker å få kunnskap fra et individ, en gruppe og relaterte fenomener (s.4). I denne oppgaven fungerte R1-elevene som arbeidet med oppgaveløsingen som individene. Elevgruppene som henholdsvis arbeidet med skalarproduktoppgavene og derivasjonsoppgavene fungerte som gruppene, og det relaterte fenomenet var forståelse av bevis i matematikkundervisningen.

Yin (2014) definerer en casestudie på en todelt måte. For det første er det en empirisk undersøkelse som undersøker et pågående fenomen i dybden og i sin virkelige kontekst, der grensen mellom fenomenet og konteksten ikke alltid er tydelig (Yin, 2014, s. 16). For det andre tar casestudien som forskningsmetode for seg særegne situasjoner der resultatene avhenger av flere datakilder. I denne studien var det pågående fenomenet R1-elevers forståelse av bevis i matematikkundervisningen. Datamaterialet i denne studien var rikt, og derfor vil kun de mest sentrale resultatene bli presentert. Datakildene, som vil bli presentert grundig i neste delkapittel, bestod av observasjon, intervju, oppgaveløsing og dokumentanalyse. Hovedfokuset var den forståelsen av bevis som elevene viste under oppgaveløsingen. I og med at elevenes forståelse av bevis er et komplekst område som påvirkes av mange faktorer, var det også i min interesse å se hvordan kunnskaper om og syn på bevis fra elevene selv og deres omgivelser, hadde betydning for elevenes forståelse. Intervjuet, observasjonene og dokumentanalysen var med for å belyse dette, samt vise hvilke oppfatninger av bevis som lå til grunn hos R1-elevene, læreren og lærebokas forfattere.

Det er vanlig at man innen forskning ønsker å sammenligne sine funn med tidligere forskning. På den måten kan tidligere litteratur bli en guide for casestudien (Yin, 2014, s. 34). Dette var også tilfelle i denne casestudien, der det teoretiske rammeverket både la en føring på datainnsamlingen og samtidig satte datamaterialet i kontekst med tidligere og aktuell litteratur på området. Siden deler av denne teoriutviklingen skjedde *før* datainnsamlingen hadde startet, er det med og illustrerer at dette var en casestudie istedenfor andre kvalitative studier som etnografi og grounded theory (Yin, 2014, s. 37). Selv om en god del av teoriutviklingen skjedde før datainnsamlingen, forandret forskningsdesignet seg underveis, da noen forskningsspørsmål ikke så ut til å fungere og nye spørsmål dukket opp underveis. På den måten var også datamaterialet med og formet det teoretiske rammeverket. Forskningsfokuset var derfor progressivt (Stake, 1995, s. 9).

Denne casestudien var det Stake (1995) omtaler som en instrumentell casestudie. Han definerer en instrumentell casestudie som en studie der man søker en generell forståelse utover forståelsen av en spesiell case, der vi kan få innsikt i forskningsspørsmålene gjennom den spesielle casen (Stake, 1995, s. 3). Det overordnede temaet for denne casestudien var R1-elevers forståelse av bevis, og denne casestudien skulle gjennom å svare på forskningsspørsmålene være med på å gi innsikt i dette. Det overordnede forskningsspørsmålet for casestudien var: *Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?* Det underordnede forskningsspørsmålet var: *Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis?* Det tredje og siste forskningsspørsmålet for denne studien tok for seg sammenhengen mellom det overordnede og underordnede forskningsspørsmålet og var: *Hvilke sammenhenger kan man finne mellom R1-elevers forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema?*

I kvantitativ forskning ønsker man å forklare hvordan, mens man i kvalitativ forskning ønsker man å forstå hvorfor (Stake, 1995, s. 37). Måten jeg ønsket å skape en forståelse av elevenes forståelse av bevis på, var ved å ta for meg nøkkelepisoder fra datamaterialet, komme med egne tolkninger av hendelsene og sette disse inn i et teoretisk rammeverk. På den måten forsøkte jeg å gi leseren det Stake (1995) omtaler som erfaringsforståelse (s. 40). Som Stake påpeker er ikke en casestudie først og fremst en søken etter generaliteter, slik som kvantitative og statistiske studier er. Samtidig kan det for eksempel være hendelser eller problemer som virker å være gjentagende i datamaterialet. Dette kan gi grunnlag for såkalte små generaliseringer (Stake, 1995, s. 7). Det var slike gjentagelser i datamaterialet jeg var på jakt etter for å skape en mer generell forståelse av elevers forståelse av bevis.

3.2. Metode for datainnsamling

Metodene som ble benyttet i denne casestudien var intervju, observasjon, oppgaveløsing og dokumentanalyse. Den viktigste metoden var oppgaveløsing, der jeg fungerte som en deltakende observatør, og fikk innsyn i elevenes faktiske forståelse av bevis. Denne metoden ble benyttet for å kunne få innsyn i hvordan elevene beviser, og med det svare på det overordnede forskningsspørsmålet: *Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?* Intervjuet med læreren, observasjonen av undervisningen og dokumentanalysen ga innsikt i hvilke kunnskaper og oppfatninger henholdsvis læreren, læreboka og elevene selv hadde om bevis. Disse metodene ble benyttet med tanke på å svare på det underordnede forskningsspørsmålet: *Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis?* På bakgrunn av metodene og dataene som ble benyttet for å besvare de to første forskningsspørsmålene, ble også det tredje forskningsspørsmålet besvart. Jeg vil i de påfølgende delkapitlene ta for meg de ulike metodene som ble benyttet i datainnsamlingen, før jeg tar for meg triangulering, som står sentralt i denne studien.

3.2.1. Intervju

Intervju er en av de viktigste datakildene i casestudier (Yin, 2014, s. 110). Intervjuspørsmålene vil vanligvis være mer flytende enn rigide (Yin, 2014, s. 110), og som Kvale (1997) påpeker er intervjuet en balansegang mellom innhenting av kunnskap og de etiske sidene ved den menneskelig interaksjonen (s. 73). Intervjuet av læreren var halvstrukturert der det ble benyttet en intervjuguide (se vedlegg 4). I intervjuguiden ble forskningsspørsmålene omskrevet til mer uformelle og dagligdagse spørsmål for å legge til rette for spontane og rike beskrivelser (Kvale, 1997, s. 78). Grunnen til at jeg intervjuet læreren, var at det kunne være interessant å se hvilken oppfatninger han hadde av bevisets plass i skolematematikken, og hvordan disse oppfatningene hadde betydning for matematikkundervisningen, som igjen kunne tenkes å ha betydning for elevenes forståelse av bevis. Gjennom intervjuet med læreren ønsket jeg å få innsikt i lærerens hverdag fra hans eget perspektiv, noe som nettopp er hensikten med kvalitative forskningsintervjuer (Kvale, 1997, s. 37).

Intervjuet var en mellomting mellom det Cohen, Manion og Morrison (2011) kaller intervjuguide og strukturerte åpne intervjuer. Temaet og spørsmålene var forhåndsbestemt, noe som indikerer at intervjuet var et strukturert åpent intervju (s. 413). Samtidig ble rekkefølgen på spørsmålene endret underveis, avhengig av hvilken retning intervjuet tok. Derfor fungerte intervjuspørsmålene som en guide, snarere enn en manual. Kvale (1997) påpeker at ledende spørsmål under intervjuene kan påvirke svaret. Av den grunn valgte jeg å unngå å stille ledende spørsmål. Jeg stilte riktignok ledende oppfølgings-, oppklarings- og utdypningsspørsmål underveis i intervjuene. Det ble gjort som en sjekk av intervjusvarenes reliabilitet og som en verifisering av mine tolkninger (Kvale, 1997, s. 97). Intervjusvarene kan ha blitt påvirket av at refleksivitet, det vil si at intervjuer og intervjuobjekt ubevisst påvirker henholdsvis hverandres svar og spørsmål (Yin, 2014, s.112). Det ble tatt både notater og lydopptak av intervjuet. Ved å ta lydopptak kunne jeg fokusere på kommunikasjonen med læreren, og få et mer fullstendig datamateriale enn hva tilfellet hadde vært hvis jeg kun hadde tatt notater. Intervjuet ble senere møysommelig transkribert. Enkelte har en tendens til å betrakte transkripsjonen som selve det solide, empiriske datamaterialet (Kvale, 1997, s. 102).

Transkripsjonen i denne casestudien fungerte derimot som en plattform for den senere analysen.

3.2.2. Observasjon

Casestudier finner sted i den virkelige verden, noe som gjør direkte observasjon til en datakilde. Observasjonsdata er ofte nyttig, da det gir tilleggsinformasjon til det studerte temaet (Yin, 2014, s. 114). Til sammen ble to enkelttimer observert, en time for hvert av de to siste forskningsbesøkene. Jeg fungerte da som en ikke-deltakende observatør (eller det Cohen et al. (2011) omtaler som komplett observatør), da jeg satt bakerst i klasserommet og ikke påvirket undervisningen. Temaet for de to timene som ble observert var henholdsvis *skalarprodukt* og *derivasjon og kontinuitet*. Det samme var temaet for oppgavene som fire forskjellige elever jobbet med i hver av de påfølgende timene (se vedlegg 2 og vedlegg 3). Gjennom observasjonen ønsket jeg å få en bedre forståelse av casestudien, og observasjonene var styrt av de tre forskningsspørsmålene (Stake, 1995, s. 60). Det var flere aspekter ved elevenes forståelse av matematiske bevis jeg ønsket å få innsyn i gjennom observasjonene. For det første ønsket jeg å få innsyn i den forståelsen læreren la opp til at elevene skulle få av bevisene. For det andre ønsket jeg gjennom observasjonene å få et innblikk i om det var samsvar mellom lærerens syn på bevis og hvilket utbytte han mente elevene hadde av bevis, som han ga uttrykk for i intervjuet, og lærerens praksis. Jeg fikk også gjennom observasjonene et innblikk i R1-klassens bevisdiskurs, hvem som beviste og hvordan bevisargumentasjonen fortonte seg. Jeg valgte med jevne mellomrom å ta bilder av tavla, slik at jeg fikk med alle detaljer som læreren skrev på tavla. Dette gjorde jeg i tilfelle disse observasjonene skulle vise seg å være verdifulle (Yin, 2014, s. 115). Det ble gjort lydopptak av de to timene som ble observert og i ettertid ble disse opptakene transkribert. Grunnen til at jeg ville transkribere timene var at jeg ønsket å få en nøyaktig gjengivelse av hvordan læreren ordla seg og hvordan ulike påstander ble argumentert for underveis.

Under elevenes oppgaveløsing, som vil bli nøyere gjennomgått i kapittel 3.2.4, fungerte jeg som en deltakende observatør. Jeg valgte å ha denne rollen da det medførte at jeg kom tettere på elevgruppen og de hendelsene som oppstod underveis da de jobbet med oppgavene (Yin, 2014, s. 116). Det er riktignok knyttet ulike potensielle problemer til deltakende observasjon. Yin (2014) nevner blant annet at forskeren kan påvirke det som forskes på, og på den måten også påvirke kredibiliteten til forskningen. Jeg prøvde derfor på samme måte som under intervjuene å unngå å stille ledende spørsmål, og fokuserte heller på å få elevene til å forklare sin tankegang til meg uten å gi for mye hjelp eller komme med for mange hint. Det kan vise seg å være problematisk å få med seg alt som skjer av mulige observasjoner når man selv er en deltakende aktør (Yin, 2014, s. 117). Derfor valgte jeg å benytte lydopptak også under denne observasjonsdelen.

3.2.3. Dokumentanalyse

I analysen av datamaterialet utgjorde også dokumentanalysen en liten, men langt fra uviktig del av analysen. Det var læreboken *Sinus – matematikk R1* (Oldervoll et al., 2013), som R1-klassen i denne casestudien benyttet, som i all hovedsak ble analysert. Det ble den for å gi et perspektiv på hvordan lærerens argumentasjon og gjennomgang samsvarte med bokens, hvilke oppfatninger boken la opp til om bevis og bevisargumentasjon, og hvordan lærebokas innhold kunne ha betydning for elevenes forståelse av bevis. Språket som læreboka benyttet seg av var også av interesse. Dokumenter må forståes i sammenheng med hvordan mening er skapt i teksten, hvordan lesere finner mening i teksten og denne tvisten mellom intensjonen og tolkningen av teksten (Cohen et al, s. 253). Konteksten spilte her en naturlig rolle, da teksten i læreboka var rettet mot R1-elever, med de forkunnskapene og kravene det stilte. På grunn av disse sosiale betraktningene, samt at bevis og bevisføring kan sees på som en sosialt fenomen, tok jeg derfor som forsker en tolkende rolle i denne dokumentanalysen (Cohen et al., 2011, s. 254).

Som et supplement ble også læreplanen i *matematikk R1* analysert, både med tanke på innholdet av bevis innenfor de ulike hovedområdene av læreplanen, og med tanke på de matematiske temaene skalarprodukt og derivasjon og kontinuitet, som var temaene som ble behandlet i denne casestudien. Dette ble gjort for å se hva læreplanen legger opp til vedrørende bevis og bevisargumentasjonen innenfor de ulike hovedområdene, og innenfor de to områdene av matematikkfaget som denne oppgaven omhandler.

3.2.4. Oppgaveløsing

En av de viktigste datakildene i denne casestudien var elevenes arbeid med oppgaver, da dette arbeidet kunne vise hvilken forståelse elever hadde av bevis og bevisargumentasjon. Det kunne derfor også illustrere hvilke oppfatninger elevene hadde om bevis. Elevene skulle sammen, to og to, bevise og argumentere for ulike påstander og sammenhenger. I konstruksjonen av oppgavene, måtte jeg blant annet ta hensyn til formålet med oppgaveløsingen, valg av type oppgaver og innholdet i oppgavene (Cohen et al., 2011, s.

481). Formålet med oppgavene var å få en forståelse av elevenes forståelse av bevis og bevisargumentasjon gjennom deres bevisføring, argumentasjon og diskusjon. I og med at dette var en kvalitativ casestudie, ønsket jeg å få et dypere innblikk i elevenes tankegang, istedenfor å komme med generelle betraktninger basert på mange testobjekter. Gjennom oppgavesettene og elevenes bevisargumentasjon, ønsket jeg å oppdage spesielle styrker, svakheter og problemer elevene måtte ha.

Det var i alt to oppgavesekvenser, der det til sammen var åtte elever som deltok. Fire av elevene deltok på den første oppgaveløsingen der temaet var skalarprodukt, mens fire andre elever deltok på den andre oppgaveløsingen som omhandlet derivasjon og kontinuitet. Grunnen til at jeg hadde to ulike grupper med elever, var at læreren til elevene ikke ønsket at de samme elevene skulle bli tatt ut av undervisningen begge gangene. De to oppgavesekvensene var tilknyttet de to siste forskningsbesøkene jeg hadde i den samme R1-klassen. Oppgavene ble gitt i den andre timen i hver av de to dobbelttimene med matematikk, etter at den første timen av hver av dobbelttimene hadde blitt observert. På forhånd hadde jeg fått vite av læreren i R1-klassen hva som var temaet og innholdet for de to dobbelttimene, slik at oppgavene elevene skulle gjennomføre i den andre halvdelen av dobbelttimene, kunne bli utarbeidet på forhånd. Elevene ble lånt ut av klasserommet og jobbet to og to sammen på et grupperom, slik at de ikke ble forstyrret av andre elever enn de som deltok i oppgaveløsingen. I forkant, underveis og i etterkant av oppgaveløsningen fikk elevene noen muntlige spørsmål. Spørsmålene hadde en ganske generell karakter og handlet om hva elevene syntes, forbandt med og tenkte om bevis. Elevenes svar på disse spørsmålene kunne være med på å kaste lys over elevenes svar på oppgavene de løste, med tanke på hvilke kunnskaper om og syn de hadde på bevis.

Oppgavene som elevene gjennomførte i det første oppgavesettet, og som omhandlet plane vektorer, var de tre følgende:

1) Kari påstår at for vektorene $\vec{a}, \vec{b}\ og\ \vec{c}$ så gjelder følgende:

   Når $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ så må også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$.

   Forklar hvorfor eller hvorfor ikke dette stemmer.

2) Gitt følgende: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$ Hvordan kan dette gå an?

3) Gitt følgende: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Hva er sammenhengen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$?

I oppgave 1 ble elevene presentert med en påstand som ikke stemte. Det var med andre ord nok med ett moteksempel for å motbevise påstanden. Det var derfor interessant å få innsikt i elevenes forståelse av moteksempler, og hvordan de gikk fram når de beviste eller motbeviste påstanden. I oppgave 2 og 3 var det meningen å avdekke enda mer av elevenes forståelse av skalarprodukt, og forskjellen mellom skalarprodukt og vanlig multiplikasjon. Begrepene parallellitet og nullvektor, som var kjente for elevene, ville da bli nødvendig å introdusere i elevenes argumentasjon og bevisføring. Elevene kunne ha løst de to siste oppgavene ved å benytte definisjonen av skalarprodukt, for så å drøfte de ulike mulighetene for ligningssettene, der alle de ulike ligningene var lik null. I alle tre oppgavene var det også et poeng å se i hvilken grad elevene tydde til geometriske figurer og illustrasjoner i sine argumentasjoner, og eventuelt hvordan elevene verdsatte slike geometriske bevisføringer.

Oppgavene som elevene gjennomførte i det andre oppgavesettet, og som omhandlet derivasjon og kontinuitet, var de to følgende:

1) Forklar om de to følgende påstandene er sanne.
   a) $f(x) = g(x)\ for\ alle\ x \Rightarrow f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x$
   b) $f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x \Rightarrow f(x) = g(x)\ for\ alle\ x$
2) Er de to følgende funksjonene deriverbare for x=2? Forklar!
   a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$
   b) $g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

I de to oppgavene som utgjorde oppgavesett 2, skulle elevene jobbe med implikasjonstegnet i samspill med derivasjons- og kontinuitetsbegrepet. I den første oppgaven, som bestod av to deloppgaver, ble elevene presentert for to tilsynelatende ganske like påstander. Hensikten med denne oppgaven var å se hvordan elevene argumenterte for det ene eller det andre synet, og se hvordan eksempler og moteksempler ble benyttet for bevise påstandenes gyldighet eller ugyldighet. I 1a-oppgaven kunne elevene ha benyttet seg av at to funksjoner som har like funksjonsverdier for alle verdier av definisjonsmengden, nødvendigvis må være den samme funksjonen. Derfor må de to funksjonene også ha like deriverte funksjoner, noe som igjen medfører at alle funksjonsverdiene til de to deriverte funksjonene, må være like. Et moteksempel ville vært nok for å motbevise påstanden i oppgave 1b. I oppgave 2 hadde elevene i timen før blitt presentert for følgende sammenheng, som elevene også fikk utlevert på papir da de skulle gjøre oppgave 2:

$$f\ deriverbar\ for\ x = a \implies f\ er\ kontinuerlig\ for\ x = a$$

Hensikten med denne oppgaven var å se hvilken forståelse elevene hadde av implikasjon og kontrapositive bevis, samt argumentasjonen som ligger til grunnen for en slik bevisføring. I oppgave 2a kunne elevene brukt sammenhengen over, og ført et kontrapositivt bevis. Dette hadde ikke fungert i oppgave 2b, da funksjonen i dette tilfellet er kontinuerlig for $x = 2$. Elevene kunne løst deloppgaven grafisk, eller derivert funksjonen og sjekket om den deriverte funksjonen er kontinuerlig for $x = 2$. I både oppgave 1 og 2 var det, i likhet med oppgavene i oppgavesett 1, et poeng å se om elevene benyttet geometriske figurer og illustrasjoner når de argumenterte, og i så fall også få et innblikk i hva elevene syntes om slike geometriske bevisføringer. Det som var hensikten med begge de to oppgavesettene var å se hva slags argumentasjon og bevisskjema elevene benyttet seg av, og hva elevene selv mente var gyldige argumenter og bevis.

3.2.5. Triangulering

Yin (2014) nevner flere viktige prinsipper for datainnsamlingen. Ett prinsipp er bruken av flere kilder for bevis (s.118). I denne sammenheng ble derfor triangulering viktig i denne casestudien. Triangulering av datakildene er en prosess der man samler informasjon fra flere kilder som sikter mot å bekrefte de samme funnene (s.120-121). Stake (1995) tar for seg ulike former for triangulering. De formene for triangulering som denne masteroppgaven baserte seg på, er datatriangulering og metodetriangulering. Med datatriangulering vil man se om casen er den samme til forskjellige tider, i andre områder og om de involverte personene interagerer forskjellig (Stake, 1995, s. 112). I denne oppgaven var de ulike datakildene som ble benyttet innsamlede oppgaver, lydopptak av elevkommunikasjon i arbeid med oppgaver, feltnotater og lydopptak under observasjonen, intervjunotater og lydopptak av intervjuet med læreren, samt læreboka og læreplanen til R1-elevene. Alle disse ulike datakildene var med på å danne et bilde av elevenes forståelse av bevis i matematikkundervisningen, og hvilke observerbare faktorer som kunne ha betydning for denne forståelsen. Til hver av de ulike datakildene ble det benyttet ulike metodiske tilnærminger, såkalt metodisk triangulering. Metodene som ble benyttet var observasjon, intervju, oppgaveløsing og dokumentanalyse.

3.3. Analysemetoder

Det finnes ulike strategier for å analysere datamaterialet. Som ytterpunkter kan det nevnes at man kan basere analysen av dataene på teorier som er gitt på forhånd (Yin, 2014, s. 136). Man kan også gå empirisk til verks og la datamaterialet selv danne grunnlaget for hvilke teorier som skal utvikles, såkalt grounded theory (Yin, 2014, s. 138). I denne casestudien var det i hovedsak den første analysemetoden som ble benyttet, da mesteparten av analysen baserte seg på teorier som var gitt på forhånd. For å distansere seg fra hendelsene, kunne det derfor være en fordel å betrakte forskningsarenaen gjennom teori (Postholm, 2005, s. 100). Postholm (2005) velger å kalle en slik form for analyse teoretisk analyse, og hun hevder at slike analyser er vanlige for casestudier (s. 100-101). Jeg benyttet flere ulike analysemetoder. Mønstermatching er en analysemetode der man sammenligner empiriske mønstre opp mot teorier (Yin, 2014, s. 143). Denne analysemetoden ble benyttet da jeg på forhånd hadde et teoretisk rammeverk som jeg tolket datamaterialet ut fra. Elevenes bruk av ulike bevisføringer i oppgaveløsingen ble i all hovedsak knyttet opp mot Harel og Sowder (1998a) sine bevisskjemaer, samt Zazkis og Chernoff (2008) sine teorier om moteksempler. De ulike observerbare faktorene som kunne ha betydning for elevenes forståelse av bevis, ble knyttet opp mot ulik forskning om lærerens og elevenes kunnskaper om og syn på bevis, og ulike føringer for matematikkundervisningen til elevene, som ble presentert i det teoretiske rammeverket i kapittel 2. Jeg forsøkte å forklare datamaterialet i lys av teorien, for å få et innblikk i om teoriene samsvarte med denne studien eller eventuelt hvorfor det ikke gjorde det. Det er dette Yin (2014) omtaler som forklaringsbygging, og det kan være med på å kaste et nytt lys over de tidligere teoriene (s. 149).

Ifølge Stake (1995) er det to metoder en kan bruke for å få ny mening av caser, nemlig gjennom direkte tolkning og sammenføying av hendelser (s.75). Jeg valgte å analysere ved å trekke hendelsene fra hverandre og sette de sammen igjen. Grunnen til at jeg valgte å gjøre det slik, forklarer Postholm (2005) godt på denne måten:

> Hensikten med en slik oppdeling er ikke fortrinnsvis å forstå de ulike delene bedre. Men en bedre forståelse av de ulike delene kan bidra til en dypere, helhetlig forståelse av fenomenet eller settingen som er studert. Forskeren analyserer dermed de ulike delene for å forstå kompleksiteten og helheten bedre. (Postholm, 2005, s. 105)

Hva generalisering angår, kan man ifølge Stake lære mye som er generelt, selv fra en case. Hvis denne casen har likhetstrekk med andre lignende caser, kan den inkorporeres i den samme gruppen caser og dermed øke muligheten for generaliseringer, eller modifisere gamle generaliseringer (Stake, 1995, s. 85).

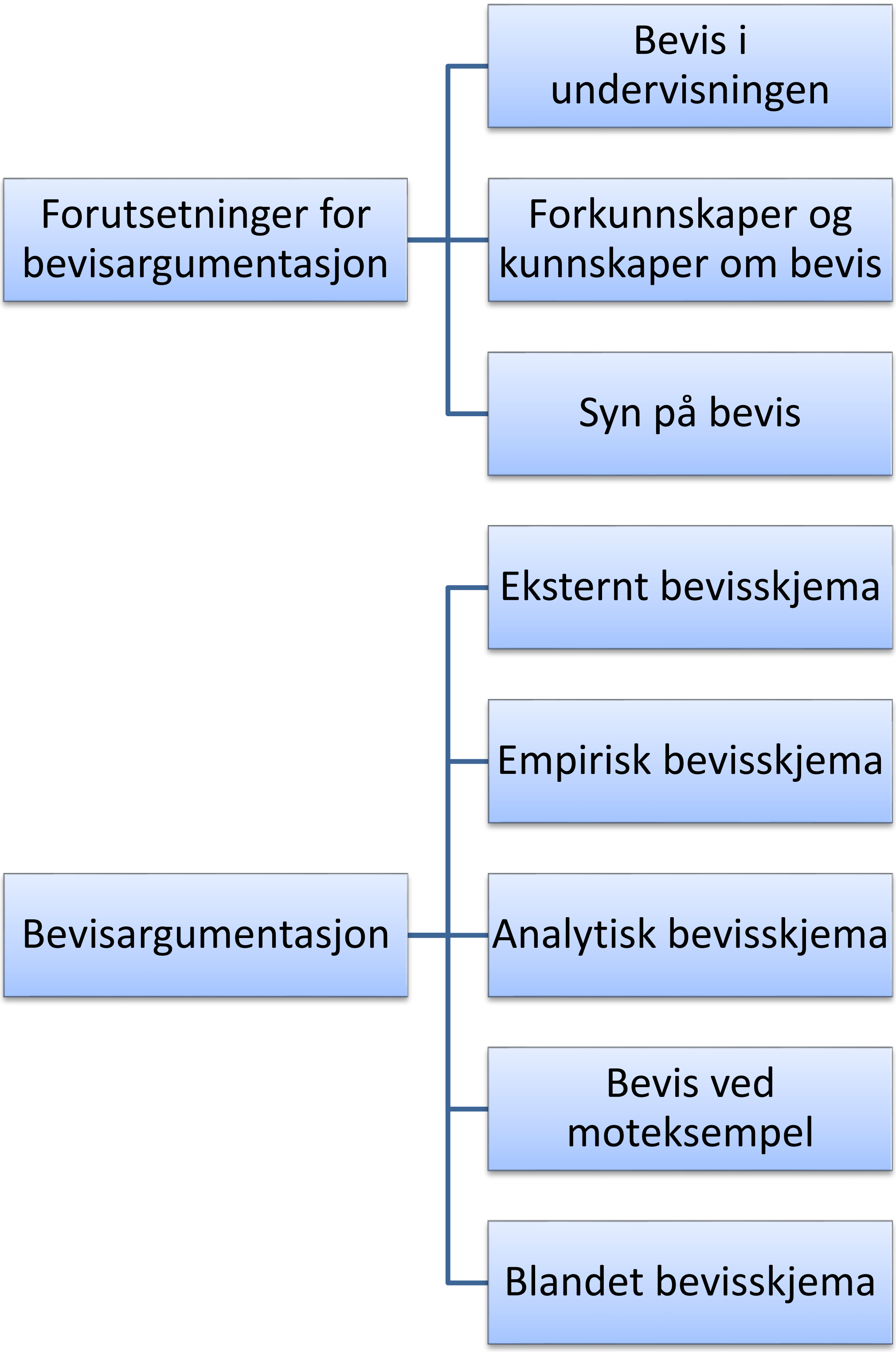
Intervjuet, observasjonene og besvarelsene på oppgavene ble ved hjelp av mønstermatchingen analysert ved å benytte koding og kategorisering, som er en av de vanligste dataanalysene (Kvale, 1997, s. 108). De aller fleste kodene og kategoriene ble utviklet forut for datainnsamlingen, da jeg valgte å analysere dataene i lys av tidligere teorier, noe Kvale (1997) omtaler som teoretiske forutantagelser. Denne analysen av datamaterialet med forhåndsdefinerte koder og kategorier kan derfor sies å ha en deduktiv tilnærmingsmåte (Nilssen, 2012, s. 99-100). Noen kategorier og koder ble utviklet på bakgrunn av interessante funn i datamaterialet. Dataene som ble samlet inn var med på å styre valget av litteratur, og derfor var det en gjensidig påvirkning mellom dataene og teorien (Postholm, 2005, s. 100). Analysen av læreboka baserte seg også på teoretiske forutantagelser, og ble sett i sammenheng med elevenes oppgavebesvarelser.

De to hovedkategoriene i analysekapittelet, som ble utviklet på bakgrunn av det teoretiske rammeverket og analysen av datamaterialet, er:

- Forutsetninger for bevisargumentasjon
- Bevisargumentasjon

Den første hovedkategorien er knyttet opp mot det underordnete forskningsspørsmålet: *Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis?* Den andre hovedkategorien er knyttet opp mot det overordnede forskningsspørsmålet: *Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?* Sammenhengen mellom de to hovedkategoriene, som jeg kommer tilbake til i diskusjonskapittelet, er sett i lys av det tredje forskningsspørsmålet: *Hvilke sammenhenger kan man finne mellom R1-elevers forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema?*

Innunder de to hovedkategoriene er det flere kategorier. Hovedkategorien *forutsetninger for bevisargumentasjon* består av de tre kategoriene *bevis i undervisningen*, *forkunnskaper og kunnskaper om bevis* og *syn på bevis*. Hovedkategorien *bevisargumentasjon* består av de fem kategoriene *eksternt bevisskjema*, *empirisk bevisskjema*, *analytisk bevisskjema*, *bevis ved moteksempel* og *blandet bevisskjema*. Analysekapittelet er organisert etter disse hovedkategoriene og underkategoriene, og kan illustreres med følgende flytskjema:



Figur 2: Hovedkategorier og underkategorier.

3.4. Etikk

I og med at denne casestudien omhandler mennesker, er det viktig å beskytte dem. Det er mange etiske hensyn man må ta som forsker. Cohen et al. (2011) nevner blant annet informert samtykke, å få aksess, vern av privatlivet, anonymitet og konfidensialitet som viktige etiske hensyn (s. 75). Yin (2012) nevner i tillegg at det er viktig å unngå at man på et urettferdig grunnlag inkluderer eller ekskluderer personer fra forskningen (s. 78).

Stake (1995) påpeker også nødvendigheten av å både få tilgang og tillatelse til å forske på forskningsobjektene. I denne casestudien søkte jeg først om tillatelse til dette forskningsprosjektet av «Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste» (NSD), og forskningsprosjektet har fått prosjektnummer 41587. Der ble nødvendig informasjon som skole, metoder, datainnsamlingsinstrumenter med mer gjort rede for. Videre forhørte jeg meg med skolens rektor og programfagssjefen i matematikk ved den aktuelle skolen, med tanke på å få tillatelse til å komme til skolen og bedrive forskning i en R1-klasse. Elevene i denne studien ble på forhånd informert om min rolle av deres lærer, og elevene som deltok i studien takket ja til å delta på et samtykkeskjema (se vedlegg 1). På samtykkeskjemaet stod det blant annet at deltakelsen var frivillig og at deltakerne kunne trekke seg fra studien om de ikke lenger ønsket å delta. Dette ble også presisert muntlig for elevene.

Cohen et al. (2011) refererer til *Ethical Guidelines for the Institututional Review Committee for Research with Human Subjects*, som påpeker at retten til beskyttelse av privatlivet omhandler informasjon som omhandler en persons fysiske og mentale tilstand, personlige omstendigheter og sosiale forhold som ikke er offentlig kjent (s.90). Denne informasjonen ble holdt privat før, under og etter denne forskningsstudien. I denne studien var det opplysninger om elevenes oppfatninger og forståelse av bevis som var av interesse, ikke sensitive opplysninger om elevene selv. Siden alle elevene som deltok i denne casestudien var over 16 år og ingen sensitive opplysninger om elevene ble innsamlet, så kunne elevene, ifølge NSD, skrive under selv. Nettopp for å beskytte elevenes og lærerens privatliv ble forskningsobjektene anonymisert. Ifølge Stake (1995) er det forventet at forskningsobjektene får beskjed om at de blir anonymisert (s. 57). I denne casestudien fikk elevene beskjed både muntlig og skriftlig på samtykkeskjemaet om dette. Selv om forskningsobjektene ble anonymisert i denne studien, ble det foretatt ansikt-til-ansikt-intervju med læreren under intervjuet med ham. Det var også en slik direkte kommunikasjon med elevene da de arbeidet med oppgaveløsingen. Som Cohen et al. (2011) påpeker, så kunne derfor ikke forskningsobjektene da forvente full anonymitet, all den tid de ikke var anonyme for forskeren selv (s. 91). Det de derimot kunne forvente var konfidensialitet. I tillegg til at det ble presisert at forskningsobjektene ville bli anonymisert, ble det derfor også presisert at all privat informasjon som jeg som forsker fikk om forskningsobjektene, ville forbli hemmelig. Til slutt fikk elevene og læreren beskjed om at all data som var tilknyttet dem ville bli slettet etter at prosjektet var avsluttet, senest 1/9-2015.

Elevene og læreren fikk i denne studien fiktive navn, og de vil bli referert til kun med deres fiktive fornavn. De fire elevene som arbeidet med oppgaver innenfor temaet skalarprodukt, fikk navnene Anders, Bjørn, Camilla og David. De fire elevene som arbeidet med oppgaver innenfor temaet derivasjon og kontinuitet, fikk navnene Emilie, Frida, Gunnar og Halvard. Læreren fikk navnet Ivar.

Yin (2014) påpeker også at forskeren må unngå plagiering eller falsifisering av informasjon, samt være oppdatert på relevant forskning og forstå og røpe arbeidets begrensninger (s.76-77). For å få til dette, har jeg strebet etter å finne relevant forskning om bevis, oppfatninger om bevis og forståelsen av bevis. Jeg har også gjort mitt ytterste for å sitere, parafrasere og omskrive tekster, artikler og bøker fra andre forskere riktig og nøyaktig, slik at det tydelig kom fram hva som var mine og andre forskeres tanker, meninger og funn.

3.5. Validitet og reliabilitet

Yin (2014) tar opp ulike utfordringer knyttet til casestudier. Blant annet må forskeren gi et riktig bilde av dataene, og rapportere dataene rettferdig (Yin, 2014, s. 20). Dette har jeg etterstrebet i denne studien for at casestudien skal få økt validitet. Det finnes ifølge Cohen et al. (2011) mange ulike former for validitet. Av særlig interesse for casestudien, hevder Yin at valideten kan sikres ved å ha tre former for validitet, nemlig konstruksjon av validitet, indre validitet og ytre validitet (2014, s. 45). Konstruksjonen av validitet skjer ved å definere begrepene som benyttes i studien og identifisere operasjonelle målinger som matcher disse begrepene (Yin, 2014, s. 46). I denne casestudien bestod konstruksjonen av validitet av at jeg i kapittel 2 tok for meg det teoretiske rammeverket som denne studien bygger på, samtidig som jeg i kapittel 3 tok for meg de ulike metodene som ble benyttet, og til slutt i analysekapittelet søkte jeg etter samsvar mellom dataene og begrepene fra teoriene. Konstruksjonen av validitet øker hvis man blant annet benytter flere datakilder (Yin, 2014, s. 47). I mitt tilfelle benyttet jeg meg av flere ulike datakilder, nemlig intervju, observasjon, oppgavebesvarelser, og læreboka og læreplanen til R1-elevene. Som tidligere nevnt ble triangulering benyttet, blant annet fordi det er med på å øke validiteten til forskningen (Yin, 2014, s.121). En grunn til at jeg benyttet flere metodiske tilnærminger er at jeg da kan belyse eller oppheve utenforliggende påvirkninger (Stake, 1995, s. 114).

For å oppnå indre validitet er det viktig å finne mønstre, forklaringer og adressere rivaliserende forklaringer (Yin, 2014, s. 45). Dette ble gjort i analysen og diskusjonen av casestudien. Det var da blant annet viktig å unngå å feilkonkludere med ulike kausale sammenhenger. Jeg forsøkte som forsker å ikke påvirke resultatene eller tolkningen av resultatene. Dette kan nemlig være en utfordring hvis forskeren selv på forhånd har en formening om hva resultatet vil bli. På den måten kan forskeren bevisst eller ubevisst ha en tendens til enten å bekrefte eller avkrefte denne formeningen. Derfor var jeg, etter anbefaling av Yin (2014), åpen for motstridende bevis i datamaterialet (s. 76). Ved å benytte passende teorier ønsket jeg å sikre det Yin kaller en ytre validitet (2014, s. 45).

En annen utfordring med casestudier er i hvilken grad man kan generalisere fra resultatene av forskningen. Yin (2014) påpeker at resultatene ikke kan generaliseres til populasjoner eller universer, men isteden til teoretiske forslag (s.21). Med andre ord kan ikke resultatene generaliseres statistisk, men de kan isteden generaliseres analytisk, som vil si at man kan bekrefte, modifisere, avvise eller nærme seg teoretiske konsepter som casestudien bygger på eller nye konsepter som oppstod underveis i studien (Yin, 2014, s. 41). Det var en slik analytisk form for generalisering som også ble benyttet i denne studien. Det skal riktignok sies at man må være forsiktig med å generalisere i casestudier, da de kan være komplekse, kontekstavhengige og spesielle. Likevel ønsket jeg å sammenligne mine funn med andre forskeres funn for å se om det var noe samsvar.

Et annet viktig aspekt ved forskningen er at den må ha reliabilitet. Det vil si at hvis en annen forsker hadde fulgt de samme prosedyrene, så ville forskeren kommet fram til de samme funnene og konklusjonene. Yin (2014) påpeker at for casestudiet vil dette si at en annen forsker skal være i stand til å gjennomføre den samme casen på nytt, ikke reprodusere de samme resultatene (s. 48-49). Dette påpekes også av Cohen et al. (2011, s. 202). I denne casestudien forsøkte jeg å sikre denne reliabiliteten ved å tydelig redegjøre for hvilke teorier og metoder som ligger til grunn, og hvilket datamaterialet som ble samlet inn. Ved å benytte flere ulike datakilder, oppnå en større database og se etter mønstre på tvers av datakildene, har jeg prøvd å øke reliabiliteten til mine tolkninger av dataen. Stake (1995) advarer nemlig mot casestudieforskere som tolker og kommer med påstander på grunnlag av en relativ liten database. Han påpeker samtidig at i kvalitativ forskning skal forskerens personlige tolkninger komme mer til syne enn hva tilfellet er for kvantitativ forskning (Stake, 1995, s. 41). Jeg forsøkte å unngå å misforstå, misoppfatte og mistolke dataen slik at ikke den subjektive tilnærmingen ble en potensiell fare for den kvalitative studien (Stake, 1995, s. 45).

Cohen et al. (2011) tar for seg validitet og reliabilitet spesifikt for intervjuer, observasjoner og oppgaver. En fare med intervjuer er nemlig at forskeren påvirker intervjuet ved at han har sine meninger og forventinger både om intervjuet og respondentene (Cohen et al., 2011, s. 204). Observatøren kan være uvitende om tidligere hendelser forut for observasjonene, og det kan hende at informantene ikke er representative for gruppen (Cohen et al., 2011, s. 210). Cohen et al. (2011) påpeker at oppgaveresultatene blant annet kan påvirkes av tidspunktet på dagen, når i skoleåret oppgaveløsingen utføres, formaliteten på oppgavene og nervøsitet (s. 210). Et annet vesentlig poeng er at forskningsobjektene kan påvirkes av de blir forsket på slik at de bevisst eller ubevisst påvirkes enten positivt eller negativt i deres prestasjoner, såkalt Hawthorneeffekt (Halle, 2014). På den måten kan det være at forskningsresultatene ikke alltid gir et objektivt bilde av forskningsobjektene.

4. Analyse

I denne analysen vil jeg analysere de to hovedkategoriene *forutsetninger for bevisargumentasjon* og *bevisargumentasjon*. Hovedkategorien *forutsetninger for bevisargumentasjon* er delt opp i henholdsvis kategoriene *bevis i undervisningen*, *forkunnskaper og kunnskaper om bevis* og *syn på bevis*, som alle vil bli analysert med tanke på det teoretiske rammeverket. Analysen av denne hovedkategorien har til hensikt å besvare det underordnede forskningsspørsmålet: *Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis?* Hovedkategorien *bevisargumentasjon* er delt opp i de fem kategoriene *eksternt bevisskjema*, *empirisk bevisskjema*, *analytisk bevisskjema*, *bevis ved moteksempel* og *blandet bevisskjema*. Disse kategoriene vil hovedsakelig bli analysert på bakgrunn av Harel og Sowder (1998a) sine bevisskjemaer og Zazkis og Chernoff (2008) sine teorier om moteksempler. Analysen av denne hovedkategorien har til hensikt å besvare det overordnede forskningsspørsmålet: *Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?*

4.1. Forutsetninger for bevisargumentasjon

4.1.1. Bevis i undervisningen

En av de viktigste forutsetningene for at elevene skal bevise og utvikle forståelse gjennom å bevise, og trolig den mest banale, er at undervisningen legger til rette for slike bevisprosesser. På spørsmål om i hvilken grad bevis preger undervisningstimene hans, svarte lærer Ivar[4]: «Bevis er ganske avgrenset i bøkene, men jeg forsøker å knytte inn bevis der det er hensiktsmessig». At bevis er ganske avgrenset i bøkene må sees i sammenheng med at lærebøkene baserer seg på læreplanen. Læreplanen i matematikk R1 legger gjennom kompetansemålene i liten grad opp til at elevene skal bevise ulike sammenhenger og påstander. Eksempelvis er det innenfor hovedområdet *funksjoner* ingen kompetansemål som er tilknyttet bevis eller noen form bevisprosess (Kunnskapsløftet, 2006). Ivar ga en grunn til hvorfor dette var tilfellet: «Analysebevisa blir så tekniske». Dette kan sees i sammenheng med at det innenfor dette hovedområdet, i motsetning til geometri, kan være nødvendig å benytte ikke-forklarende bevismetoder som for eksempel motsigelsesbevis og induksjon (Hanna, 2000, s. 9).

Et hovedområde der bevis har en mer sentral plass er innenfor *geometri*. Der skal elevene gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras' setning og utlede skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant (Kunnskapsløftet, 2006). Bevis hadde ifølge Ivar også en sentral rolle i hans undervisningstimer i geometri, noe som kom til uttrykk gjennom svaret hans på hvilke områder av hans matematikkundervisning som inneholder mest bevis:

> Det er selvsagt ganske mye bevis i geometri da, og bevis av geometriske sammenhenger. Det gjør de selvsagt ganske masse selv da. Påvise formlikhet og utnytte formlikhet og ja, alt det her da. Der er de ganske godt trent og det gjør de selv i stor stil.

Ivar er ikke den eneste som fremhever geometri som bevisområde, da det er mange lærere som ser på geometri som det området av skolematematikken der bevis virkelig kommer til sin rett (Lin et al., 2012, s. 335). Bevisets mer fremtredende plass i geometriundervisningen til denne R1-klassen, kan sees i sammenheng med at bevis i den videregående skolen har vært tett knyttet opp til euklidsk geometri (Tall, 1989, s. 28; Stylianides, 2007, s. 289), og fremdeles er det (Kunnskapsløftet, 2006).

[4] Alle utsagn fra læreren og elevene vil bli skrevet eksakt slik det ble sagt, selv om det vil medføre grammatiske feil.

Et annet område av matematikkundervisningen som ifølge Ivar var preget av bevis, var tallteori:

> Altså, det som er når vi skal inn med bevis og slike ting, så henter vi faktisk ofte stoff fra tallteori og slike ting da. Så her starter boka med bevis, men da er det [liten pause]. Det er veldig ofte henta fra tallteori. Bevisa er ikke så tekniske som analysebevisa.

Tallteori, som Ivar omtalte det som, er beslektet med algebra, da deler av tallteorien regnes som en del av algebraen (Aubert, 2011). En grunn til at tallteori- eller algebraundervisningen i denne R1-klassen inneholder en del bevis, skyldes trolig blant annet at logikk og bevismetoder er plassert innunder kapittelet *algebra* i læreboka *Sinus Matematikk – R1* (Oldervoll et al., 2013), som denne klassen benytter. Grunnen til at læreboka har valgt å legge logikk og bevismetoder til dette algebrakapittelet har trolig en sammenheng med at det er innen hovedområdet *algebra* R1-elever skal «gjøre rede for implikasjon og ekvivalens, samt gjennomføre direkte og kontrapositive bevis» (Kunnskapsløftet, 2006).

Det virket altså som om Ivar sin matematikkundervisning følger undervisningstradisjonen, der bevis først og fremst opptrer i geometri og algebra, og da særlig i geometri. Ivar påpekte riktignok at bevis var en del av alle områder av hans undervisning. Likevel fortalte Ivar at bevis ble litt nedtonet i undervisningen i denne R1-klassen på grunn av eksamen: «Det er alltid veldig vanskelig å teste det til skriftlig eksamen. Slik at det blir kanskje litt nedtonet av den grunn da, på grunn av vanskeligheter». Dette viser hvordan den skriftlige eksamen er med og legger føringer på innholdet av bevis i matematikkundervisningen i denne R1-klassen (Skemp, 1978, s. 13). Ivar påpekte riktignok: «Bevis er mer aktuelt til muntlig eksamen, for da kan du hjelpe de litt underveis, sant? Det blir en helt annen greie.» Ivar påpekte her viktigheten av lærerens aktive rolle, da han sa at grunnen til at bevis var mer aktuelt til muntlig eksamen, var at elevene da kunne få litt hjelp underveis. Lærerens viktige, aktive rolle under elevenes bevisargumentering ble også påpekt av Stylianides og Ball (2008).

Nedtoningen av bevis i undervisningen til denne R1-klassen kom også til syne gjennom eleven Bjørn sin kommentar: «Vi regner som regel oppgaver med tall.» Dette tydet på at Ivar trolig kunne transformert regneoppgaver til bevisoppgaver i langt større grad i undervisningen. Grunnen til at en slik transformasjon i liten grad fant sted, kan være, som elevene som arbeidet med skalarproduktoppgavene fortalte, at det var læreren som beviste de gangene de hadde bevis i timene, og at de sjelden beviste selv. Det vil i så fall være uheldig, all den tid elever sliter med å konstruere bevis selv (Healy & Hoyles, 2000, s. 407). Ivar fortalte riktignok: «Noen ganger har jeg en løpende dialog med elevene mens jeg gjennomgår det, så de virkelig får det til og følger med på det som skjer da.» Dette tydet på at Ivar, gjennom sin tavlegjennomgang av bevis, ønsket at elevene skulle få læringserfaringer med hva som karakteriserer et matematisk argument, noe som har vært en mangelvare i mange matematikklasser (Dreyfus, 1999, s. 91).

Observasjonene av de to undervisningstimene nyanserte bildet av hvem som beviste i denne R1-klassen. Den undervisningstimen elevene hadde om regnereglene for skalarprodukt, var det nemlig elevene selv, og ikke læreren som skulle bevise koordinatformelen for skalarprodukt. Det var derfor tydelig at Ivar var klar over viktigheten av at elevene konstruerte bevis selv, noe han også presiserte: «Istedenfor å dure gjennom slikt på tavla, så må en på en måte prøve å få de til å forstå hva det egentlig går ut på». Det kunne virke som om Ivar, i likhet med Sowder og Harel (2003, s. 264), mente at elevene kunne forstå de underliggende ideene bedre ved å bevise selv, snarere enn gjennom steg-for-steg-forklaringene til Ivar på tavla. I hvilken grad de observerte undervisningstimene til Ivar ble påvirket av refleksivitet, da han visste han skulle bli forsket på, er vanskelig å svare på. Elevene syntes i hvert fall å mene at det hovedsakelig var læreren som stod for bevisene i denne klassen, noe Ivar også selv innrømmet ofte var tilfellet.

Elevene syntes det var vanskeligere å konstruere bevis enn å regne tradisjonelle oppgaver. Det kom blant annet til syne da eleven Camilla vurderte vanskeligheten av å bevise koordinatformelen opp mot regneoppgaver med skalarprodukt fra boka: «Det er mye enklere når du får tall enn når du får det med sånne enhetsvektorer og indekser og sånn. Hvis du får mange ukjente liksom. Jeg vet ikke jeg, det blir bare enklere å bruke tall istedenfor.» Dette kunne tyde på Camilla var vant til å jobbe med operasjonelle oppgaver, noe som er med og bygger opp den instrumentelle forståelsen (Sfard, 1991, s. 29-30). Da eleven Frida ble spurt, før hun skulle sette i gang med oppgavene, i hvilken grad hun forstod mer av bevis etter å ha sett læreren gjøre det på tavla først, svarte hun følgende:

> Jeg føler ofte ikke utbyttet av at læreren går gjennom bevis på tavla. Når man går gjennom en formel, så skjønner jeg det han gjør, men jeg skjønner ikke hvordan man kommer på å gjøre det, hvis du skjønner hva jeg mener? Så ofte skjønner jeg ikke så mye mer.

Elevene ga derfor ikke bare uttrykk for at det var vanskelig å konstruere bevis, men også at det kunne være veldig vanskelig å forstå bevis som ble gjennomgått på tavla. I og med at hun forstod hvordan læreren gjorde det, men ikke forstod hvorfor han gjorde, tydet det på at Frida her viste en instrumentell forståelse av matematikk (Skemp, 1978, s. 9).

4.1.2. Forkunnskaper og kunnskaper om bevis

Elevers forkunnskap om bevis, samt kunnskapen deres om begrepene, symbolene og de logiske relasjonene som inngår i beviset, er viktig med tanke på elevenes forståelsesutvikling i arbeidet med bevis. Noe av denne forkunnskapen avhenger av hvilken lærer elevene har, og hvilke kunnskaper denne læreren har om bevis og bevisets betydning for matematikken. Ivar hadde følgende forklaring på hva et matematisk bevis var:

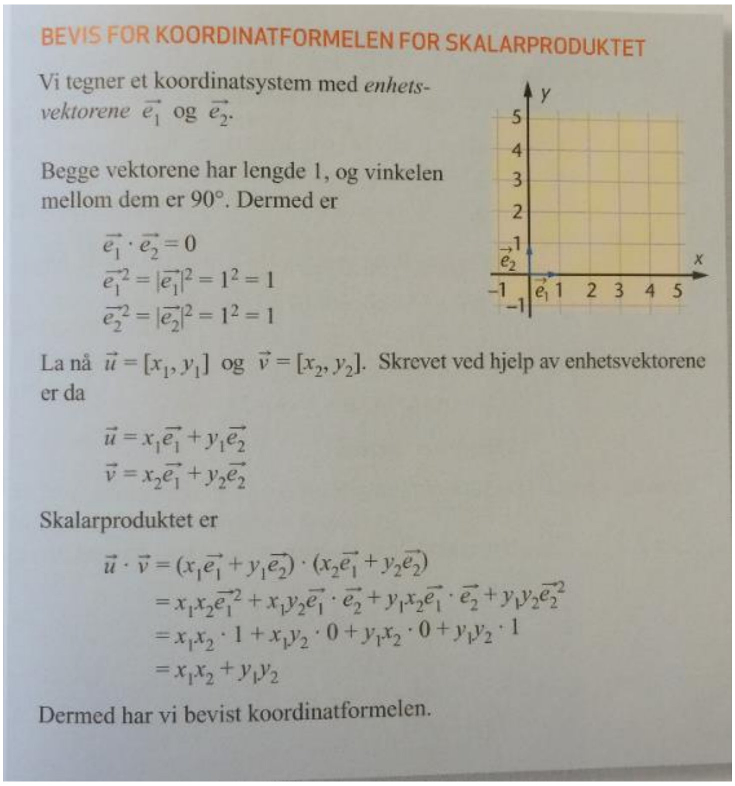
> Det er egentlig å utvikle en ny kunnskap på grunn av tidligere kjente ting. Ut fra definisjoner, og tidligere ting som er bevist [liten pause]. Aksiomer, logiske ting som utvikler ny kunnskap. Ikke bare bygge på antagelser, men kunne bygge opp et byggverk med absolutt riktige påstander.

Her var Ivar helt på bølgelengde med Bell (1976) og Jaffe (1991). Ivar påpekte at bevis er en metode for å utvikle ny kunnskap, og fortalte også at denne utviklingen må skje på bakgrunn av tidligere kjente definisjoner og ting som er bevist. Dette viste i tillegg at Ivar sin forståelse av bevis var i overensstemmelse med det første kriteriet som brukes i denne oppgaven for hva et matematisk bevis i skolen er (Stylianides, 2007), da utviklingen av bevis avhenger av spesifikk matematisk kunnskap som er offentlig tilgjengelig (Stylianides & Ball, 2008, s. 310). Ivar sin forståelse av bevis må sees i sammenheng med hans utdanningsbakgrunn og erfaring. Ivar er nemlig en erfaren lærer som er utdannet lektor med en 5-årig universitetsutdanning og en mastergrad i ren matematikk. Det vil derfor være nærliggende å tro at han hadde god erfaring med bevis, bevisføring og den aksiomatiske metoden.

At de matematiske resultatene bygger på hverandre var også Ivar fullt klar over. Etter at Ivar hadde gått gjennom beviset av koordinatformelen for skalarprodukt på tavla, som bygger på den distributive loven som ikke hadde blitt bevist i denne R1-klassen, presiserte han:

> Det som ikke gjør det helt fullkomment det her, det er at vi ikke beviste den regneregelen nummer to her [refererer til den distributive lov for skalarprodukt], den burde vi egentlig tatt opp men. Hvis de regnereglene er riktige er i hvert fall koordinatformelen riktig.

Dette var en presisering som læreboka *Sinus Matematikk – R1* (Oldervoll et al., 2013), som denne R1-klassen benyttet, ikke inkluderte. Ivar benyttet den eksakt samme bevisføringen som i læreboka, men lærebokforfatterne kommenterte ingen steder at de benyttet den distributive loven for skalarprodukt selv om denne ikke hadde blitt bevist:



BEVIS FOR KOORDINATFORMELEN FOR SKALARPRODUKTET

Vi tegner et koordinatsystem med *enhetsvektorene* $\vec{e_1}$ og $\vec{e_2}$.

Begge vektorene har lengde 1, og vinkelen mellom dem er 90°. Dermed er

$$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$$
$$\vec{e_1}^2 = |\vec{e_1}|^2 = 1^2 = 1$$
$$\vec{e_2}^2 = |\vec{e_2}|^2 = 1^2 = 1$$

La nå $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Skrevet ved hjelp av enhetsvektorene er da

$$\vec{u} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}$$
$$\vec{v} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2}$$

Skalarproduktet er

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}) \cdot (x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2}) \\ &= x_1x_2\vec{e_1}^2 + x_1y_2\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + y_1x_2\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + y_1y_2\vec{e_2}^2 \\ &= x_1x_2 \cdot 1 + x_1y_2 \cdot 0 + y_1x_2 \cdot 0 + y_1y_2 \cdot 1 \\ &= x_1x_2 + y_1y_2\end{aligned}$$

Dermed har vi bevist koordinatformelen.

Figur 3: Bevis av koordinatformelen for skalarprodukt (Oldervoll et al., 2013, s. 249).

Eleven David ga i en samtale med Camilla også uttrykk for en forståelse av at bevis benytter seg av kjent kunnskap:

> Camilla: Jeg skjønner ikke hvorfor vi må bevise sånn jeg.
>
> David: Beviset gjør det lettere å forstå, for da bruker man noe man har lært sjøl.

Camilla derimot, så ikke ut til å forstå poenget med bevis, noe som ifølge Ivar ikke var uvanlig:

> Bevis synes de ofte er vanskelig. Det er en langvarig prosess som må gjentas lenge før det har sunket inn. Utbyttet varierer nok med typen bevis som gjennomgås. Det skal ikke mye til før utbyttet uteblir, men man venner seg til at i matematikken skal man bevise ting, og etter hvert har de sett så mange eksempler på bevis at de skjønner mer av både poeng, metodikk og hva bevis er for noe.

Grunnen til at elevene synes bevis var vanskelig, kan være at de manglet den riktige forståelsen for de begrepene som ble involvert i bevisene (Dreyfus, 1999, s. 91). Da elevene skulle arbeide med bevisoppgavene om skalarprodukt, var det nødvendig at elevene hadde tilstrekkelige forkunnskaper om parallellitet og nullvektor. Det viste seg at dette ikke var tilfellet. Camilla og David var nemlig langt i fra sikre på hva en nullvektor var:

> David: Jeg lurer på om absoluttverdien til en vektor kan være lik null da.

Camilla: Det er akkurat det. Det var det jeg prøvde å si at ikke gikk an i stad, men så gikk jeg over til okey det var fint svar, nå går vi videre [liten pause].

David: For at en vektor skal være en vektor må det ha retning og en lengde. Du kan jo ha lengde null, kan du ha en retning hvis du ikke har noen lengde?

Camilla: Nei. Eller jo, du kan si jeg går null meter nordover. Så står du jo fortsatt i ro, men du går jo fortsatt nordover, men du går like mye sørover.

David: Den kan være pekt, uten noen strek. Så hvis den hadde gått noen vei så hadde det vært den veien [latter].

David og Camilla ble her usikre på om en vektor kan ha absoluttverdi lik null. Grunnen til denne usikkerheten skyldes blant annet at en vektor *måtte*, ifølge David, ha både ha retning og lengde. Læreboka *Sinus Matematikk – R1* (Oldervoll et al., 2013) forklarer en vektor slik: «En størrelse der vi må kjenne retningen for å kunne beskrive størrelsen fullstendig, kaller vi vektor (s. 176).» Det kan være denne språklige formuleringen som forvirrer elevene til å tro at alle vektorer må ha en retning. Riktig nok presiserer denne læreboka tre sider senere at nullvektoren er den eneste vektoren som ikke har noen retning.

Språket virket å være kilde til flere problemer for elevene i arbeidet med skalarproduktoppgavene. Observasjonen av skalarprodukttimen viste at Ivar konsekvent benyttet ord og fraser som «gange» og «gange sammen vektorene» når de skulle finne skalarproduktet av to vektor. En gang sa han også:

Det som er poenget med regnereglene her nå da [refererer til kommutative lov, distributive lov og ombytte av rekkefølgen på skalarer for skalarprodukt], er at vi regner på akkurat samme måten som vi gjør når vi holder på med tallregning.

Ivars forklaring kunne her tolkes som at multiplikasjon av vektorer og tall var to sider av samme sak, og noen av elevene i denne R1-klassen ga uttrykk for en slik misoppfattet forståelse av skalarproduktet. Elevene mente blant annet at den distributive loven var en «selvfølge», og at den ikke trengtes og bevises:

Intervjuer: Når dere beviser det her [koordinatformelen for skalarprodukt] så bruker dere en regel som han skrev på tavla, a prikket med b pluss c [$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$], at det er lik a prikket med b pluss a prikket med c [$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$]. Han gikk ikke gjennom hvorfor det var sånn.

Camilla: Det er jo en selvfølge.

Intervjuer: Er det en selvfølge?

Bjørn: Ja, vi har jo regnet sånn der siden 5. klasse liksom.

Intervjuer: Så dere synes ikke det er nødvendig å ha sett det beviset for å få det til?

Elevene i kor: Nei!

Camilla illustrerte riktignok i samtale med David at hun hadde en misoppfatning om at de samme reglene for multiplikasjon av tall gjaldt for multiplikasjon av vektorer. Hun mente nemlig at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ medførte at enten $\vec{a} = 0$ eller $\vec{b} = 0$:

Camilla: Du tenker at dem ikke står vinkelrett på hverandre du. Da tenker du for komplisert. Når du ganger sammen noe, så må en av tallene være 0 for å få 0.

David: Ja, det kan du også si og.

Camilla: Ja, for at det her skal bli 0 må enten den [peker på $\vec{a}$] eller den [peker på $\vec{b}$] være 0.

[pause 10 sek]

Camilla: Så hvis den [peker på $\vec{a}$] ganger den [peker på $\vec{b}$] ikke er 0 så er ingen av dem 0.

David: Ja, så må du huske på den der cosinus av vinkelen da. Så hvis det der er cosinus av, nei det er sinus av 0 som er 0. Kan du ta cosinus av noe tall å få null?

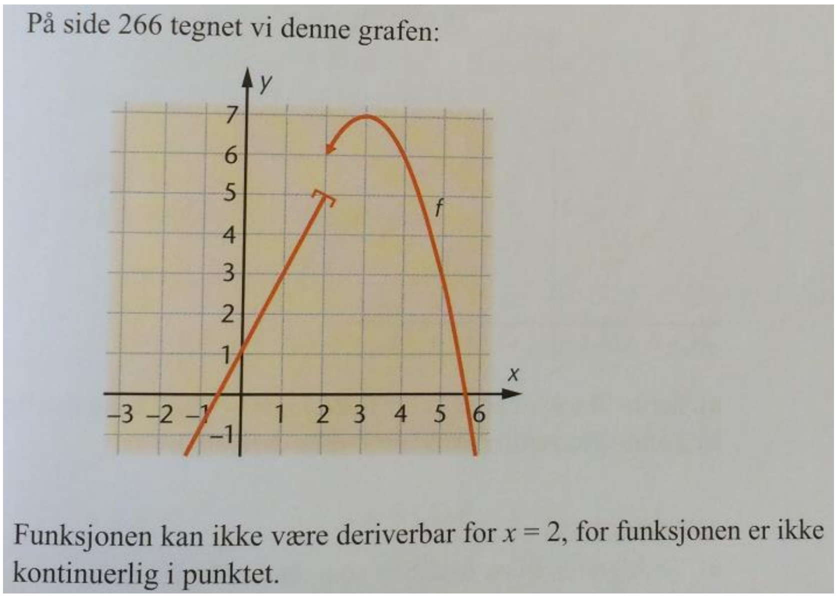
Camilla: Ja, 90.

Camilla: Så hvis dem står vinkelrett på hverandre da er det null?

David: Ja, siden det er vektorer så må du tenke sånn. Du kan ikke tenke som det bare er vanlige tall.

I samtalen over viste Camilla hvordan hun til å begynne med trodde at multiplikasjon av tall var direkte overførbart til multiplikasjon av vektorer. David viste her at han hadde en annen og riktigere forståelse av skalarprodukt. Camilla ble oppmerksom, gjennom samarbeidet med David, på at skalarproduktet også kunne være null dersom vektorene stod vinkelrett på hverandre. Med tanke på at elever med veldig forskjellig begrepsforståelse kan ha samarbeidsproblemer (Balacheff, 1988, s. 222), tolker jeg det dit hen at Camilla hadde en mer ufullstendig forståelse av skalarprodukt enn David, snarere enn en veldig forskjellig forståelse.

Ifølge Ivar hadde elevene i denne R1-klassen problemer med formalismen og de logiske relasjonene i bevisene, slik som implikasjon: «De har litt problemer med implikasjon og ekvivalens og sånn, og hvilken vei er det egentlig den der tanken går da.» Denne klassen skilte seg derfor ikke ut fra andre klasser som også sliter med å forstå «hvilken vei den der tanken egentlig går» (Tall, 1989, s.28). Grunnen til at mange elever slet med dette, kan være at de blandet sammen den motsatte implikasjonen med den kontrapositive implikasjonen (Krantz, 2011, s. 12). Da er det interessant at læreboka til R1-klassen, etter å ha utledet implikasjonen $f\ deriverbar\ for\ x = a \ \Rightarrow f\ er\ kontinuerlig\ for\ x = a,$ likevel benyttet et kontrapositivt eksempel for å vise denne sammenhengen mellom deriverbarhet og kontinuitet:


På side 266 tegnet vi denne grafen:

Funksjonen kan ikke være deriverbar for $x = 2$, for funksjonen er ikke kontinuerlig i punktet.

Figur 4: Eksempel på sammenhengen mellom deriverbarhet og kontinuitet (Oldervoll et al., 2013, s.277).

Fra et pedagogisk perspektiv, kan en derfor spørre seg hva elevene forstår av dette eksempelet, da læreboka tar for gitt at elevene har god kontroll på kontrapositive bevis. Resultatene i denne studien, som er i overenstemmelse med Ivar sine betraktninger om R1-klassen, viser nemlig at så ikke er tilfellet.

Da elevene Emilie og Frida skulle finne ut om funksjonen $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ var deriverbar for $x = 2$ og kunne benytte sammenhengen $f\ deriverbar\ for\ x = a \implies f\ er\ kontinuerlig\ for\ x = a$, kunne det virke som om de ikke var helt komfortable med kontrapositive bevis:

> Frida: Om dem her er kontinuerlig så vil det første uttrykket og det andre uttrykket gå mot det samme, samme punktet. Hvis x går mot 2 da, og det gjør dem ikke. Og da er den ikke kontinuerlig, og ifølge den regelen så vil den heller ikke være deriverbar.
>
> Intervjuer: For det den regelen her sier egentlig er at hvis den er deriverbar, så er den kontinuerlig.
>
> Frida: Det funker ikke motsatt?
>
> Intervjuer: Ja, funker det motsatt vei? Jeg spør dere.
>
> Frida: Nei, ikke ut fra de pilene der nei.
>
> Emilie: Da måtte pila stått den veien der [peker med hånden mot venstre].

> Intervjuer: Vi vet at en påstand A medfører en påstand B. Og du har sagt at ikke B medfører ikke A [skriver opp de to ekvivalente logiske sammenhengene på et ark]. Er det ikke det dere har sagt på en måte?
> Emilie: Ja
> Frida: Jo.
> Emilie: Det kan ikke gå.
> Intervjuer: Går ikke det? Er det det samme, eller er det ikke det samme? De to her [peker på de to logiske sammenhengene].
> Frida: Det er ikke det samme.
> Intervjuer: Er det ikke?
> Frida: Du kan vel si ikke A medfører ikke B, men du kan ikke bytte om på dem tror jeg. Med mindre du har piler begge veier, eller?
> Emilie: Det var det jeg trodde hvert fall, men.

Frida benyttet til å begynne med helt korrekt et kontrapositivt bevis for å bevise at funksjonen ikke var deriverbar. Da hun ble konfrontert med hennes logiske argumentasjon med hensyn på den gitte sammenhengen, som sa at deriverbarhet i et punkt medførte kontinuitet i dette punktet, var hun derimot ikke like sikker på at hennes eget svar var riktig. Denne usikkerheten kan skyldes av at Frida ble usikker da hun ble stilt oppfølgingsspørsmål om svaret sitt, og derfor tolket at svaret måtte være feil. Frida ga riktignok uttrykk for at de to logiske relasjonene $A \Longrightarrow B$ og $\sim B \Longrightarrow \sim A$ ikke var ekvivalente, da hun sa «det er ikke det samme». Hun sa til slutt: «du kan vel si, ikke A medfører ikke B, men du kan ikke bytte om, tror jeg». En kan spørre seg hva Frida mente med at man «ikke kan bytte om». Det kunne virke som hun mente at når $A \Longrightarrow B$ gjaldt så måtte også $\sim A \Longrightarrow \sim B$ gjelde. Grunnen til denne usikkerheten eller uvitenheten rundt kontrapositive bevis, kan være at elevene blandet sammen den motsatte implikasjon $B \Longrightarrow A$, som de visste ikke gjaldt, med den kontrapositive implikasjonen $\sim B \Longrightarrow \sim A$ (Krantz, 2011, s. 12).

4.1.3. Syn på bevis

Det var ikke bare Ivars kunnskaper om bevis som hadde en betydning for hva slags undervisning elevene i denne R1-klassen fikk om bevis. Ivar sitt syn på bevisets funksjon i matematikkundervisningen hadde også en betydning for undervisningen hans, da lærerens syn på bevis og om bevisets funksjon skal være å overbevise eller forklare, også vil være med å påvirke undervisningen (Reid, 2005, s. 462). Ivar mente at bevis i skolematematikken var helt avgjørende: «For meg er liksom matematikk bevis. Det er det som er hele poenget med matematikk, ikke sant? Det er viktig at elevene ikke bare tror på en formel, men forstår hvorfor den fungerer.» Dette kan indikere at det derfor er nødvendig at elevene ser behovet for steg-for-steg-forklaringer (Sowder & Harel, 2003, s. 264). Ivar forklarte videre: «Jeg synes vi skal bli mye flinkere til å ta bevis-delen etter hvert da. Det med hvorfor blir bare viktigere og viktigere. Hvordan, det tar pc-en seg av, sant?» Der Horgan (1993) reiste spørsmålet om introduksjon av PC var bevisets død, viste Ivar her et nyansert syn. PC-en kan ifølge Ivar være nyttig med tanke på å forstå hvordan, og dermed være med på å utvikle den instrumentelle forståelsen, da denne forståelsen er basert på å forstå hvordan (Skemp, 1978, s. 9). Samtidig ga han uttrykk for at man burde være flinkere til å inkludere bevis i undervisningen, da det ble stadig viktigere å besvare hvorfor, og ikke bare hvordan, noe er sant. Dette kan tyde på at Ivar mente bevis kunne være med å utvikle den relasjonelle forståelsen, da denne forståelsen baserer seg på å forstå hvordan og ikke minst hvorfor (Skemp, 1978, s. 9). Det at Ivar mener at bevis er viktig med tanke på å forbedre forståelsen, er i overensstemmelse med hva mange andre matematikklærere mener om bevis (Dickerson & Doerr, 2014, s. 716). Eleven Gunnar påpekte også i etterkant av oppgavene at det kunne være en fordel for elevene å forstå hvorfor, og ikke bare hvordan, noe fungerte: «Mange forstår mer når de forstår hvorfor, men samtidig er det dumt hvis det blir altfor komplisert.»

Ivar påpekte også at bevisene i skolen ikke måtte bli for tekniske: «Bevisene må ikke bli for tekniske, for da faller de fort av. Bevisa i en del ting som for eksempel trigonometri blir så tekniske. Kan ikke plutselig be de å bevise cosinussetningen, sant?» Her er Ivar inne på noe sentralt, nemlig at bevisene i skolesammenheng må være annerledes enn bevisene i matematikken for øvrig, da hovedhensikten med bevis i matematikkforskning er å overbevise, mens det i skolematematikken er å forklare (Hersh, 1993, s. 398). Ivar mente, i likhet med en del andre lærere (Dickerson & Doerr, 2014, s. 712), at formelle bevis ikke var passende i undervisningen:

> Jeg er mer opptatt av, i stedet for formalisme altså, at de tydelig får fram den matematiske tankegangen i det de gjør, istedenfor veldig streng formalisme. Jeg tror den der formalismen kan ofte ødelegge mer enn det hjelper egentlig, for det blir for [liten pause]. Man henger seg opp i den type formelle ting istedenfor idéene og tanken som ligger i beviset.

Ivar ga her tydelig uttrykk for at formelle bevis som regel ble i overkant vanskelig for elevene, noe han ifølge Tall (1989) ikke er alene om å mene (s. 30). I motsetning til en del andre lærere (Lin et al., 2012, s. 332), mente Ivar at validiteten til argumentet som ligger bak var viktigere enn det formelle aspektet ved beviset.

Selv om Ivar ga uttrykk for at bevisene måtte være forklarende og illustrerende, hadde ikke elevene det samme synet på hva bevis i skolesammenheng innebar. I en samtale mellom Camilla og David, ga David uttrykk for at bevis måtte være noe konsist som inneholdt symboler:

> Camilla: Kan vi forklare med ord?
>
> David: Det er jo matte da!
>
> Camilla: Du hadde forklart det hvis du hadde skrevet det jeg sa.
>
> David: Du hadde ikke forklart det, du hadde sagt det.
>
> Camilla: Jeg kunne ha skrevet akkurat det jeg sa.
>
> David: Det er jo ikke noe bevis! Vi kan ikke skrive et essay på hvorfor.

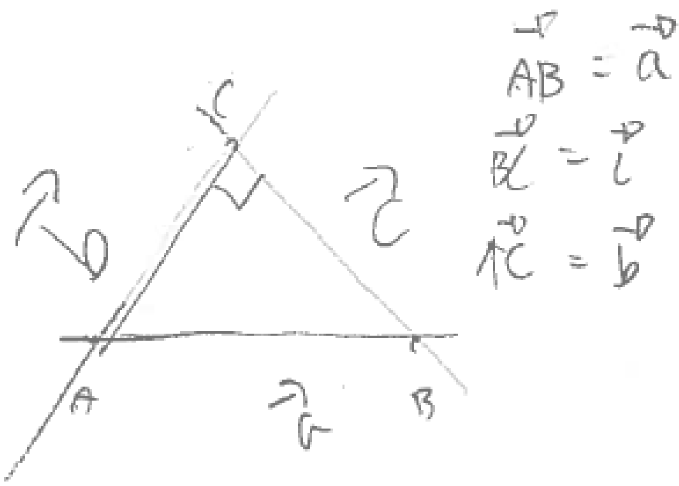
David sin forståelse av bevis, som jeg kommer tilbake til senere, minnet veldig mye om bevis i forskningsmatematikken, da hans bevisføring stort sett var utpreget formell. Dette stod i motsetning til Ivar, som nedprioriterte formalismen i bevisene og mente at bevisene i skolen først og fremst skulle være forklarende. I samtalen over virket det som om David mente at et matematisk bevis ikke kunne inneholde noe særlig tekst for å bli betraktet som bevis, selv om teksten var riktig. David ga et inntrykk av at bevis kun skulle inneholde det mest nødvendige som trengtes for å bevise påstanden, og med det ga han uttrykk for at et bevis måtte være minimalt for å være et akseptabelt bevis (Tsamir et al., 2009). Dette er ikke nødvendig slik akseptabelt bevis er definert i denne oppgaven. David kjenner naturligvis ikke til hvordan et akseptabelt bevis er definert i denne oppgaven, men det virket heller ikke som om David var på bølgelengde med sin egen lærer når det gjelder hva som var et akseptabelt bevis. Dette til tross for at elevene, ifølge Ivar, hadde gitte krav å forholde seg til for hva som var et akseptabelt bevis: «Vi har absolutte krav for bevisa. Det er ikke noe forskjell egentlig [fra høyere, mer akademiske kurs]». Dette kan tyde på at den didaktiske kontrakten mellom David og Ivar derfor enten ble brutt eller ikke var til stede.

De fleste elevene som jobbet med skalarproduktoppgavene, virket ikke overbevist om at visuelle bevis kunne klassifiseres som et akseptabelt bevis i skolesammenheng. Da elevene Anders og Bjørn skulle forklare hvordan det gikk an at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ samtidig, og forklarte svaret ved å henvise til en figur, sa de følgende:

> Anders: Det er jo ikke noe bevis. Men jeg vet ikke hvordan jeg skal bevise det.
>
> Intervjuer: Kan det ikke være et matematisk bevis å illustrere det med en figur?
>
> Anders: Neeeei [drar litt på det], da må man gå gjennom alle figurer som finnes da.
>
> Bjørn: Som går an da.

Anders: Jeg vil anta at det må være et matematisk bevis.

Når Anders hevder at man må «gå gjennom alle figurer som finnes», kan det tyde på at han sliter med å se generaliteten av en figur. Dette understreker at eleven og læreren kan ha forskjellig oppfatning av det generelle og spesielle ved et eksempel (Mason, 1996, s. 67). Slike forskjellige oppfatninger av generalitet kan være en utfordring med tanke på bruken av generiske eksempler, der man distanserer seg fra prosessen ved å avdekke den generelle strukturen med bruk av eksempler (Balacheff, 1988, s. 219). David var heller ikke overbevist over gyldigheten av visuelle forklaringer:



Figur 5: Camillas visuelle forklaring.

David: Tenk vanlig regning da! Det her blir så…

Camilla: Jeg synes tegninga mi forklarte jeg. Hva er det du holder på med?

David: Altså jeg vet ikke hva jeg gjør da, men det er alltid sånn jeg starter når jeg prøver å forklare, så plutselig har jeg noe.

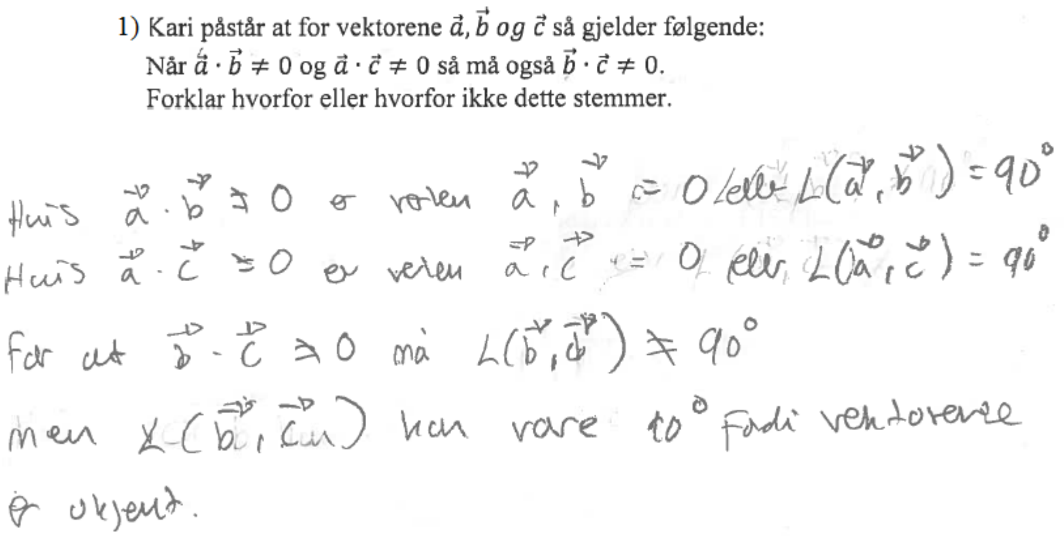
Det var tydelig at David betraktet figuren til Camilla som utilstrekkelig for å være et matematisk bevis. David ville ha et mer formelt og algebraisk bevis. Problemet var at han, som mange andre elever, slet med å produsere et formelt bevis (Tall, 1989, s. 30).

4.2. Bevisargumentasjon

4.2.1. Eksternt bevisskjema

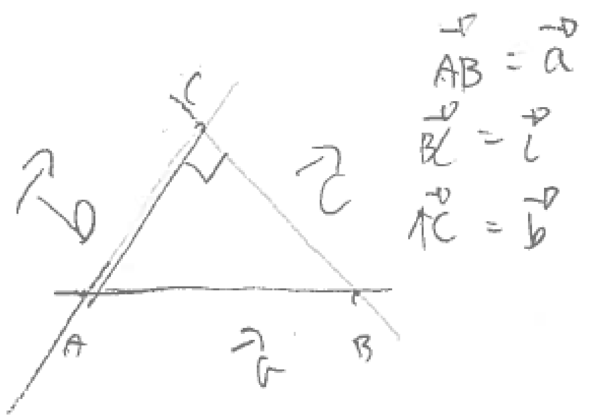
De tre typene rituelt, autoritært og symbolsk bevisskjema som til sammen utgjør det eksterne bevisskjemaet, var til sammen synlige da elevene arbeidet med enten skalarproduktoppgavene eller derivasjon- og kontinuitetsoppgavene. Det beste eksempelet vedrørende det rituelle bevisskjemaet stod David for gjennom en samtale med Camilla, da de to elevene skulle forklare hvorfor eller hvorfor ikke $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ medførte at også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$:

> Camilla: Hva er det du holder på med?
>
> David: Altså jeg vet ikke hva jeg gjør da, men det er alltid sånn jeg starter når jeg prøver å forklare, så plutselig har jeg noe. [liten pause]. Jeg skriver bare det her [se bilde under] og så gidder jeg ikke mer. Kan være 90 grader fordi?
>
> Camilla: Fordi de to andre vinklene ikke er det.
>
> David: Nei, det er ikke noe [bevis].
>
> Camilla: Hvis det hadde vært sånn [peker på trekanten hun har tegnet] så hadde det vært det. Den kan være det [vinkelen kan være 90°]! Der er jo ingen grunn til at den ikke kan være det når det er helt tilfeldige vektorer.
>
> David: Ja, fordi de er tilfeldige.


1) Kari påstår at for vektorene $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ så gjelder følgende:
Når $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ så må også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$.
Forklar hvorfor eller hvorfor ikke dette stemmer.

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ er verken $\vec{a}, \vec{b} = 0$ eller $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$
Hvis $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ er verken $\vec{a}, \vec{c} = 0$ eller $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 90°$
For at $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$ må $\angle(\vec{b}, \vec{c}) \neq 90°$
men $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ kan være $90°$ fordi vektorene er ukjent.

Figur 6: Davids rituelle forklaring.



Figur 7: Camillas visuelle forklaring.

David var mer opptatt av de rituelle aspektene ved argumentasjon enn i hvilken grad argumentasjonen var riktig, noe som er typisk for det rituelle bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 246). Han godtok ikke Camillas forklaring, som baserte seg på at vinklene i en trekant er $180°$ som hun argumenterte ut fra, og ga uttrykk for at han syntes forklaringen var lite matematisk. Samtidig virket det som om David var mer opptatt av formen enn innholdet, da han selv sa at han ikke visste hva han gjorde, og kun ville skrev ned de ordene i Camillas forklaring som hadde en viss matematisk karakter, som for eksempel «tilfeldige». David slet med å konstruere et bevis selv, noe som ikke er uvanlig blant elever (Healy & Hoyles, 2000, s. 407). Han viste en trang til å formulere beviset på en veldig matematisk måte, helst med så mye algebraisk notasjon som mulig. Dette kan sees i sammenheng med Healy og Hoyles (2000), som påpekte i sin studie at elevene som ga algebraiske argumenter, stort sett fikk dårligere resultat enn de som ikke gjorde det (s. 413).

Elevene viste også tilbøyelighet overfor et autoritært bevisskjema. Selv om elevene i liten grad direkte benyttet dette bevisskjemaet i skalaroppgavene eller i derivasjon- og kontinuitetsoppgavene, tydet det likevel på at læreren som autoritetsperson spilte en rolle i bevisprosessen. Hanna (2000) påpekte at beviset har mange funksjoner, blant annet verifisering (s.8). Det var nettopp rollen som verifiserer læreren spilte i bevisprosessen til noen av elevene. Da Gunnar fikk i oppgave å avgjøre om funksjonen $f(x) = \begin{cases} x+1, \ x<2 \\ x^2, \ x \geq 2 \end{cases}$ var deriverbar for $x = 2$, viste han et slikt autoritært bevisskjema:

> Gunnar: Vi vet jo at den der kan jo være kontinuerlig, men ikke deriverbar. Men vi vet ikke hvordan vi kan finne ut av det.
>
> Intervjuer: Sier disse uttrykkene dere noe om deriverbarhet og kontinuitet når x er lik 2?
>
> Gunnar: Skal vi sette inn 2 for x da?
>
> Intervjuer: Jeg spør deg.
>
> Gunnar: Det blir 3 og 4 da, det vil si at den ikke er kontinuerlig. Eller? Blir det ikke det da?
>
> Intervjuer: Ja, den er ikke kontinuerlig fordi du får ut forskjellig funksjonsverdier for den samme grenseverdien. Men det var ikke det vi lurte på i oppgaven, var det vel? Vi lurte på om den var deriverbar.
>
> Gunnar: Den er jo ikke det da hvis…
>
> Halvard: Funksjonen er deriverbar når x ikke er lik 2.
>
> Gunnar: Men det er jo ikke deriverbar siden den ikke er kontinuerlig. [Pause 5 sek] Er det ikke det da?

Gunnar søkte her hele tiden etter bekreftelse fra intervjuer, som utspilte rollen som lærer gjennom oppgaveløsingen. Grunnen til at han ville ha slike bekreftelser, kan blant annet være at det i skolematematikken har vært mer fokus på sannhetene enn grunnen til sannhetene (Harel & Sowder, 1998a, s. 247). Om så også var tilfellet i denne R1-klassen skal være usagt. Ivar påpekte, som tidligere nevnt, viktigheten av at elevene hans forstod den underliggende tanken i bevisene, samtidig som observasjonen av undervisningstimene hans ga et inntrykk av at han ikke alltid la til rette for dette. En annen grunn til at Gunnar tydde til et autoritært bevisskjema, kan være at Ivar ofte gjennomgikk bevis på tavla:

> Det er klart at en del av bevisa blir veldig ofte tatt på tavlen. Særlig de litt mer tekniske bevisene. Noen ganger har jeg en løpende dialog med elevene mens jeg gjennomgår det, så de virkelig får det til og følger med på det som skjer da. Ikke når det er sånn hvordan altså, da bryr jeg meg ikke om å ha noen dialog med elevene i det hele tatt. Det er mer sånn rett fram.

Camilla viste ved en anledning også at hun tydde til et autoritært bevisskjema, men i hennes tilfelle var det hennes medelev David som ble sett på som autoriteten, noe som kom til syne da hun underveis sa til ham: «Bekreft at jeg har riktig!». Læreboka ble også nevnt som en kilde til sannhet. Eleven Halvard hevdet at han ofte benyttet læreboka for å få ting forklart: «Ofte når jeg lurer på hvordan jeg skal bevise noe, så leser jeg bare i boka. Andre ganger så er det fint hvis læreren forklarer det.» Halvard ga her uttrykk for at både lærer og læreboka ble benyttet som autoriteter i hans bevisprosess. Læreren Ivar refererte også flere ganger til læreboka for å utdype når det var nødvendig å bevise og når det ikke var det:

> Den tredje regneregelen her [ombytte av rekkefølgen på skalarer for skalarprodukt] står ikke vist i boka. Det er litt knotete å vise, men det er ikke så veldig komplisert det heller. Men det står ikke i boka, og vi lar det ligge vi og. Kanskje vi kan se på det en gang vi har god tid. Hvis vi får en sånn anledning noen gang.

Gunnar, Camilla og Halvard viste henholdsvis hvordan de benyttet seg av læreren, en medelev og læreboka når de skulle bevise eller begrunne et resultat, noe som er veldig typisk for det autoritære bevisskjemaet (Sowder & Harel, 1998b, s. 671).

Det symbolske bevisskjemaet er den tredje og siste formen for eksternt bevisskjema. Hvis vi husker tilbake til kapittelet *forkunnskaper og kunnskaper om bevis*, så ga Ivar et inntrykk av at multiplikasjon av vektorer og tall var to sider av samme sak, hvilket ga noen av elevene noen misoppfatninger om skalarproduktsymbolet. Bjørn var en av elevene som hadde en slik misoppfatning, noe han viste da han i den ene timen skulle bevise koordinatformelen for skalarprodukt:

Bjørn: Svaret mitt er x_1 gange x_2, pluss x_1 gange y_2, pluss y_1 gange x_2, pluss y_1 gange y_2.

Ivar: Ja, men har du [blir avbrutt av Bjørn].

Bjørn: Dem er jo 1.

Ivar: Du har glemt e-ene de her, de er kjempeviktige.

Bjørn: Ganget med 1, ikke sant?

Ivar: Nei, det er ikke ganget med 1. Det er ikke ganget med lengden. Gjør sånn som vi gjorde på tavla.

Her viser Bjørn at han benytter det symbolske bevisskjemaet, da symbolene lever et liv for seg selv uten noen referanse til funksjonen symbolene spiller i denne skalarproduktkonteksten (Harel & Sowder, 1998a, s. 250). Det virket som om Bjørn trodde at multiplikasjon av vektorer og multiplikasjon av tall vitterlig var to sider av samme sak. Hans utregning av skalarproduktet av u-vektor og v-vektor, der $\vec{u} = (x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2})$ og $\vec{v} = (x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2})$, som skulle lede til koordinatformelen for skalarprodukt, ga i hvert fall inntrykk av det. Utregningen hans var som følger:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2}) \cdot (x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$$

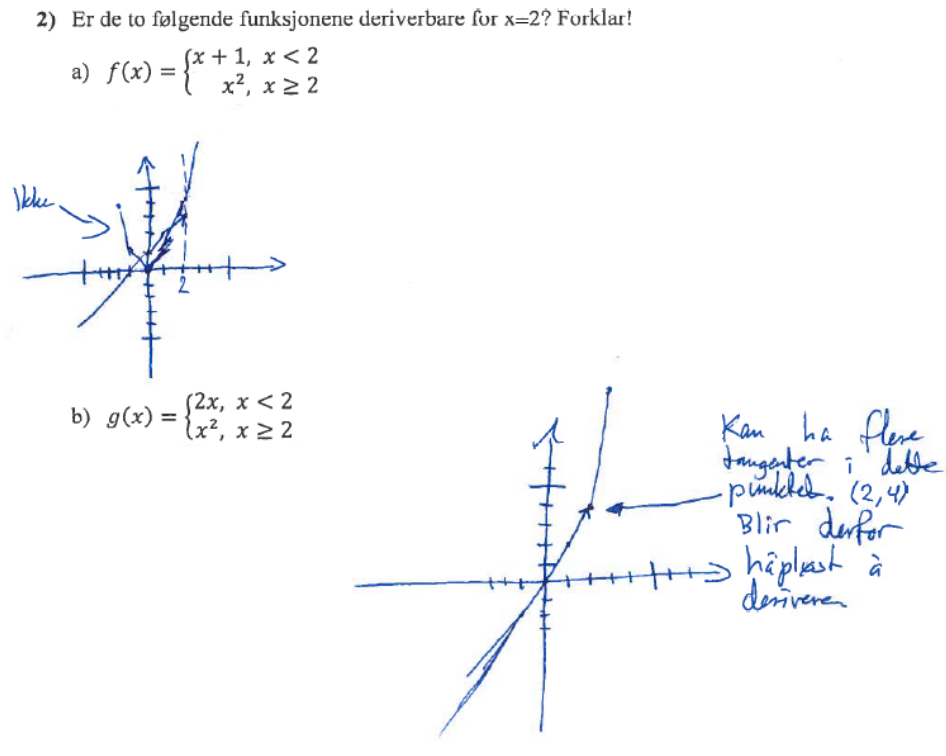
Det virket som Bjørn tolket det dit hen at alle enhetsvektorene var lik 1. Derfor kunne han multiplisere parentesene, eller vektorene, slik som han multipliserte tall. Det er riktignok ikke enhetsvektorene som er lik 1, men absoluttverdiene eller lengdene av disse vektorene som er lik 1. Dette så det ikke ut til at Bjørn enten var klar over eller husket, og av den grunn fikk han feil uttrykk ut for skalarproduktet. Dette viser hvordan symbolene fikk sitt eget liv for Bjørn fordi han ikke hadde tilstrekkelig forkunnskaper om skalarprodukt og enhetsvektorer, og at han som mange andre elever manglet den riktige forståelsen for hvordan ulike begreper skulle benyttes i beviset (Dreyfus, 1999, s. 91).

4.2.2. Empirisk bevisskjema

Noen elever baserte sine begrunnelser ut fra eksempler, og benyttet derfor et empirisk bevisskjema (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Det var i all hovedsak det perseptuelle bevisskjemaet som da ble benyttet av elevene. Det induktive bevisskjemaet ble i mindre grad benyttet, noe som kan ha en sammenheng med at oppgavene elevene jobbet med i liten grad la opp til generalisering. Frida var den eneste eleven som i noen grad benyttet et induktivt bevisskjema, men siden hun i den sammenheng samtidig også benyttet seg av andre typer bevisskjemaer, vil ikke dette bli gått nærmere innpå før i kapittelet om blandede bevisskjemaer.

Et vanlig bevisskjema blant elevene viste seg derimot å være et perseptuelt bevisskjema. Dette var også et bevisskjema som læreren benyttet seg av. I gjennomgangen av definisjonen av den deriverte, verifiserte Ivar nemlig svaret han hadde regnet ut med definisjonen av den deriverte, ved å referere til den grafiske løsningen han viste fram i GeoGebra: «Så det [utregningen av den deriverte ved hjelp av definisjonen] stemte med det her borte og, sant? [peker på den grafiske løsningen i GeoGebra].» Det var altså ikke den visuelle bevisforklaringen i GeoGebra som ble verifisert i lys av definisjonen av den deriverte, men definisjonen av den deriverte som gjennom hans eksempel ble verifisert av den grafiske løsningen.

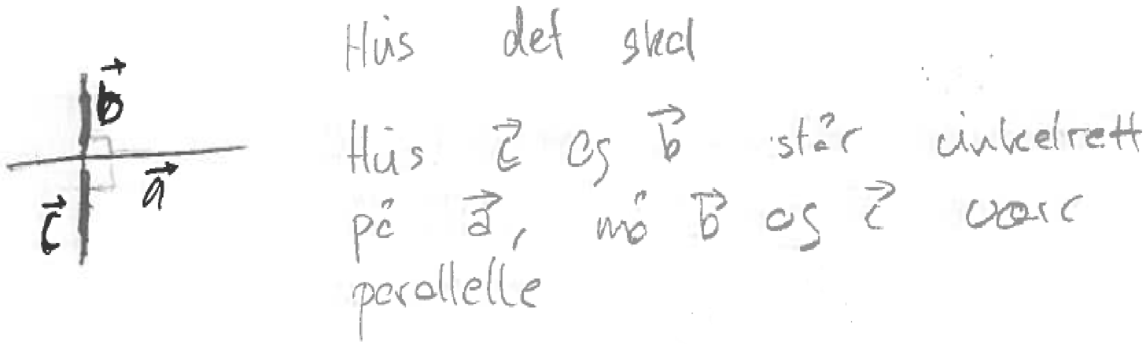
Halvard var en av elevene som benyttet et perseptuelt bevisskjema. Da han og Gunnar skulle finne ut om funksjonene $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ og $g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ var deriverbare for $x = 2$, ga Halvard følgende forklaringer:



Figur 8: Halvards visuelle forklaringer.

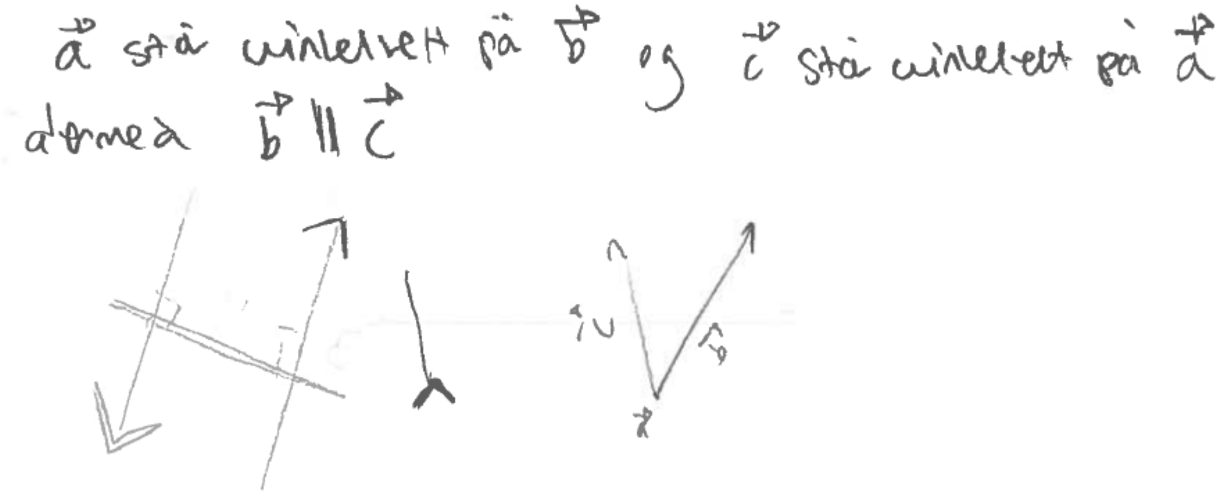
I oppgave 2a svarte han bare med en figur, uten å forklare denne figuren nærmere. Dette er et eksempel på det Dreyfus (1999) omtaler som ekstremtilfeller av forklaringer (s. 89), da Halvard kun viste én utregning, eller nærmere bestemt én figur, uten noen forklaring. I oppgave 2b svarte han også med en figur, men denne gangen kom han med en begrunnelse for hva figuren viste. I begge tilfeller benyttet Halvard seg av et perseptuelt bevisskjema, da han overbeviste seg selv og prøvde å overbevise andre ved hjelp av figurtegninger (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Halvard forsøkte å bevise ved å benytte seg av visuelle bevis. Det beviset han kom med i oppgave 2a var ikke et fullstendig visuelt bevis, da det manglet det forklarende aspektet som visuelle bevis blant annet kjennetegnes med. Det vil derfor heller ikke kunne klassifiseres som et akseptabelt bevis. Beviset han kommer med i oppgave 2b derimot kan klassifiseres som et akseptabelt visuelt bevis, da dette beviset kommer med en begrunnelse som tilfredsstiller alle kravene for et akseptabelt visuelt bevis (jfr. Hanna, 2000, s. 17; Stylianides, 2007).

Elevene som arbeidet med skalarproduktoppgavene ga, før de fikk hjelp, et ufullstendig svar på hva sammenhengen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$ var, når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Anders og Bjørn, som jobbet sammen, ga følgende svar:



Figur 9: Anders og Bjørn sin visuelle forklaring.

Camilla og David, som jobbet sammen, hadde følgende svar:



Figur 10: Camilla og David sin visuelle forklaring.

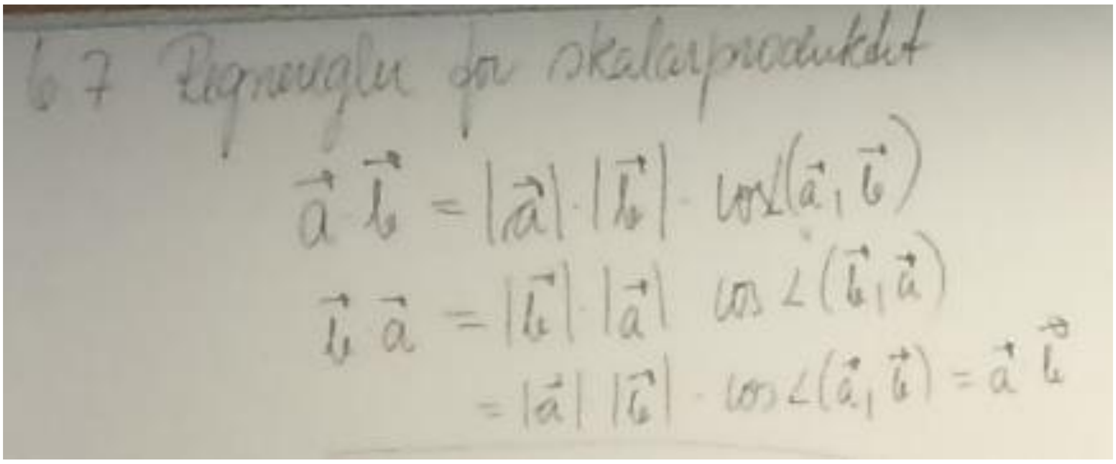
I begge tilfellene mente de to elevparene at $\vec{b}$ og $\vec{c}$ måtte være parallelle. Forskjellen på de to svarene er at Anders og Bjørn hevdet at $\vec{b}$ og $\vec{c}$ måtte være parallelle *hvis* $\vec{b}$ og $\vec{c}$ stod vinkelrett på $\vec{a}$, noe Camilla og David derimot ikke presiserte. Det hører likevel til historien at det er usikkert i hvilken grad Anders og Bjørn var klar over denne presiseringen, noe følgende samtale illustrerte:

> Intervjuer: Har dere fått til noe i oppgave 3?
>
> Anders: Vi har noe vi tror er riktig hvert fall.
>
> Intervjuer: Og det er?
>
> Bjørn: At b og c må stå vinkelrett på hverandre, nei ikke vinkelrett, men må være parallelle. På grunn av at det er 90 grader mellom a og b, og mellom a og c så er det 90 grader. Og da, som her, står de jo parallelt [peker på figuren på arket]. Det er jo fortsatt ikke noe matematisk bevis da.

Det virket uansett som om elevene benyttet seg av sine figurer til å forklare hvorfor vektor $\vec{b}$ og $\vec{c}$ var parallelle. Disse fire R1-elevene benyttet derfor seg av et perseptuelt bevisskjema, da de ble overbevist ved hjelp av sine figurer (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Anders, Bjørn, Camilla og David klarte derimot ikke å se begrensningene til figurene sine. Ingen av elevene forklarte hva som var tilfellet hvis $\vec{b}$ eller $\vec{c}$ ikke stod vinkelrett på $\vec{a}$, og ingen av elevene ga uttrykk for at en eller flere av de tre involverte vektorene kunne være nullvektoren. Dette understreket bare den store overbevisningskraften figurene hadde på elevene. Det var på grunn av visuelle utilstrekkeligheter som dette, at man på 1700-tallet valgte å gå vekk fra geometriske intuisjoner i bevisene av teoremer (Grabiner, 2012, s. 157).

4.2.3. Analytisk bevisskjema

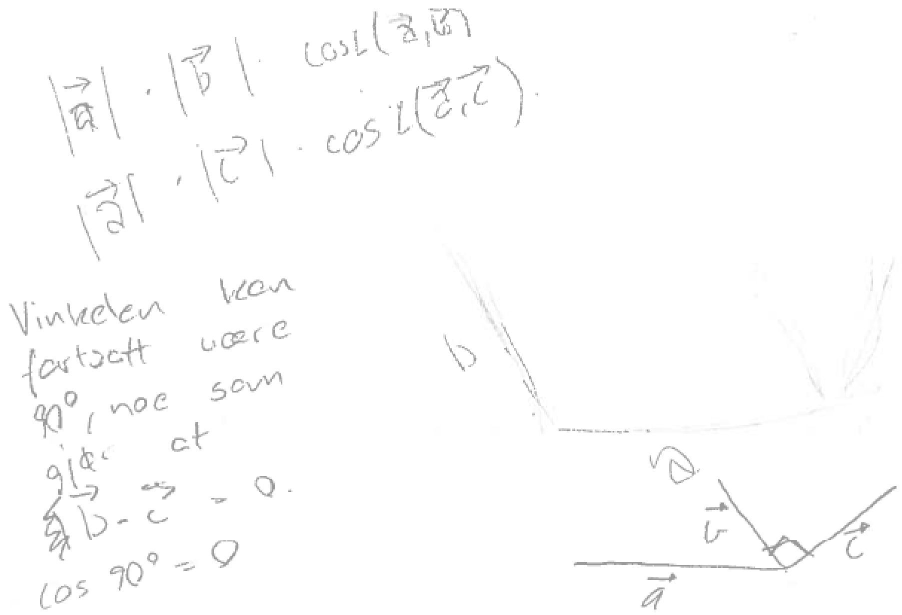
Der det visuelle bevisskjemaet stod sterkt blant flere av elevene i denne R1-klassen, ble det analytiske bevisskjemaet benyttet i betraktelig mindre grad. Det analytiske bevisskjemaet var det bevisskjemaet elevene i minst grad benyttet, uavhengig om elevene arbeidet med skalarproduktoppgavene eller derivasjon- og kontinuitetsoppgavene. Det kunne derfor virke som om elevenes bevisskjema ikke hadde noe sammenheng med det matematiske temaet, noe som også andre forskere har påpekt (Recio & Godino, 2001, s. 90). Som tidligere nevnt var det ofte læreren selv som gikk gjennom bevisene på tavlen i denne R1-klassen. I de timene han ble observert, benyttet han seg stort sett av, i motsetning til elevene, et utpreget analytisk bevisskjema, da han beviste ulike sammenhenger og regler i undervisningstimene. Den kommutative loven for skalarprodukt førte han på denne måten på tavlen:



Figur 11: Ivars aksiomatiske forklaring.

Det analytiske bevisskjemaet deles, som tidligere nevnt, inn i de to underkategoriene *omdannede bevisskjema* og *aksiomatisk bevisskjema*. Den matematiske begrunnelsen til Ivar av den kommutative loven for skalarprodukt hadde en deduktiv tilnærming, der han brukte kjente regler (ombytte av skalarer) og definisjoner (definisjonen på skalarprodukt), og dermed tydelig benyttet et aksiomatisk bevisskjema (Harel & Sowder, 1998a, s. 273). Ivar benyttet stort sett denne tilnærmingen i de bevisene han tok på tavlen. I beviset av koordinatformelen for skalarprodukt, der han som tidligere nevnt benyttet en identisk utledning med det vi kunne finne i læreboka til R1-klassen, viste han også en klar aksiomatisk tilnærming.

Elevene selv benyttet i liten grad noen av disse to analytiske bevisskjemaene. Camilla viste riktignok ved ett tilfelle at hun benyttet et omdannende bevisskjema. I og med at hun samtidig også benyttet flere andre bevisskjemaer, vil dette bli tatt opp i kapittelet om blandede bevisskjemaer. Anders og Bjørn stod for det eneste andre tilfellet der elevene benyttet et bevisskjema som til en viss grad kunne klassifiseres som omdannende. Da de skulle finne ut om $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ medførte $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, ga de følgende svar:



Figur 12: Anders og Bjørn sin bruk av det omdannende bevisskjema.

Anders og Bjørn forklarte svaret sitt på denne måten:

> Anders: Vi tenkte at ingen av vektorene a, b eller c kan være 0. Siden hvis du ganger et 0-tall så blir det jo 0. Så da måtte det ha med vinkelen å gjøre. Og da kan vel vinkelen mellom [blir avbrutt av Bjørn].
>
> Bjørn: Ser ikke noe grunn til at [blir avbrutt av Anders].
>
> Anders: Da kan vel vinkelen mellom b og c være 90 grader, selv om det ikke er det mellom a og b, eller a og c.

Anders og Bjørn ga en figur som en del av sitt svar, og det går derfor an å argumentere for at de her derfor benyttet et visuelt bevisskjema. Grunnen til at de etter mitt syn benyttet et omdannende bevisskjema er at deres svar ikke baserte seg på figuren, men i stedet virket det som om de to elevene kun hadde med figuren som en illustrasjon. Dette baseres blant annet på at de tegnet figuren etter at de hadde skrevet ned resten av svaret på oppgaven. På den måten kunne det virke som om det hadde skjedd en omdannelse hos elevene fra visuelle bilder, da de ikke trengte å tegne opp en figur før de gikk deduktivt til verks. Elevene gikk mer analytisk til verks enn hva tilfellet er for det visuelle bevisskjemaet. De gikk nemlig ut i fra definisjonen for skalarprodukt, da de begynte sin bevisargumentasjon. Derfor virket fokuset å være på de generelle aspektene ved situasjonen, noe som kjennetegner det omdannende bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 261).

Det var ingen elever som ene og alene benyttet seg av et aksiomatisk bevisskjema. David var den eleven som var nærmest å benytte et bevisskjema som kunne minne om et aksiomatisk bevisskjema. Som tidligere nevnt, hadde David klare meninger om hva et matematisk bevis skulle inneholde og ikke inneholde, noe som blant annet førte til at han var tilbøyelig til å benytte et rituelt bevisskjema, der formen ble viktigere enn innholdet. David benyttet seg ofte av definisjoner og kjente regler når han beviste:

1) Kari påstår at for vektorene $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ så gjelder følgende:
Når $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ så må også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$.
Forklar hvorfor eller hvorfor ikke dette stemmer.

Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ er vinkelen $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ eller $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$
Hvis $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ er vinkelen $\vec{a}, \vec{c} \neq 0$ eller $\angle(\vec{a}, \vec{c}) \neq 90^\circ$
For at $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$ må $\angle(\vec{b}, \vec{c}) \neq 90^\circ$
men $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ kan være 90° fordi vektorene er ukjent.

Figur 13: Davids forsøk på en aksiomatisk forklaring.

Her var det tydelig at David hadde en deduktivt tilnærming, der han benyttet den kjente definisjonen av skalarprodukt i sin bevisargumentasjon. Det at David virket å være klar over at matematiske begrunnelser bygger på kjent kunnskap, viste at hans bevisskjema kunne tolkes i retning av å være aksiomatisk (Harel & Sowder, 1998a, s. 273). Likevel endte som regel Davids bevis opp som rituelle bevis, selv om han hadde en analytisk tilnærming, da han var mer opptatt av formen på bevisene enn innholdet i dem (Harel & Sowder, 1998a, s. 246).

4.2.4. Bevis ved moteksempel

Et annet bevisskjema som derimot var langt vanligere blant elevene, var bruken av moteksempler til å motbevise en påstand. Ikke alle elevene forstod riktignok at de hadde motbevist en påstand ved hjelp av et moteksempel. Anders og Bjørn, som hadde benyttet et omdannende bevisskjema da de forklarte hvorfor $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ ikke nødvendigvis medførte $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, kom i realiteten i sin forklaring med et moteksempel. Det var riktignok tydelig at de ikke anerkjente moteksempelet som et matematisk motbevis:

> Anders: Da kan jo vinkelen mellom b og c være 90 grader selv om det ikke er det mellom a og b eller a og c.

Bjørn: Ja, vi tenkte hvert fall sånn.

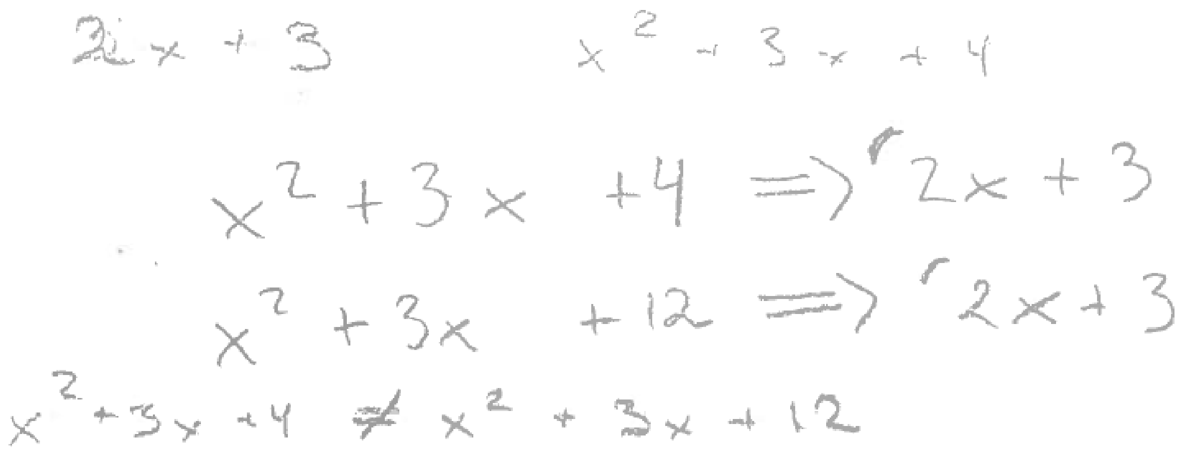
Intervjuer: Så da har dere motbevist det da, eller?

Anders: Det er jo ikke noe matematisk bevis men.

Bjørn: Jeg ser liksom ikke noe grunn til at den ikke kan være det da.

Anders ga her uttrykk for at moteksempelet deres ikke var noe matematisk bevis. Dette kunne tyde på at Anders ikke anerkjente at ett moteksempel var nok for å tilfredsstille et motbevis. Dette vil i så fall igjen tyde på Anders ikke hadde den riktige forståelsen av rollen til moteksempler i matematiske bevis, noe som er en viktig forutsetning for motbevis (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225). Anders og Bjørn ga, som tidligere nevnt, en figur som en del av svaret. Likevel virket det ikke som om de to elevene ble tilstrekkelig overbevist av figurens rolle som moteksempel, noe som er en kontrast til en del andre elever som i langt større grad blir overbevist av et geometrisk moteksempel (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 228).

De to elevparene som arbeidet med derivasjonsoppgavene, benyttet i oppgaven der de skulle forklare om påstanden $f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x \implies f(x) = g(x)\ for\ alle\ x$ var sann, bevis ved moteksempel som sitt bevisskjema. Emilie kom med følgende forklaring:



Figur 14: Emilies bevis ved moteksempel.

Hennes forklaring overfor Frida kom til syne i samtalen de hadde underveis mens Emilie skrev ned svaret over:

Frida: Jeg lurer på om den også er riktig [refererer til oppg. 1b].

Emilie: Jeg tror ikke det er riktig.

Frida: Hvorfor ikke det?

Emilie: For hvis du har de deriverte da, f.eks. hvis den deriverte er 2x pluss 3 da. Så hvis den ikke er derivert, sånn før derivasjonen, så kan det være x i andre pluss 3x, men det kan også være pluss fire for eksempel.

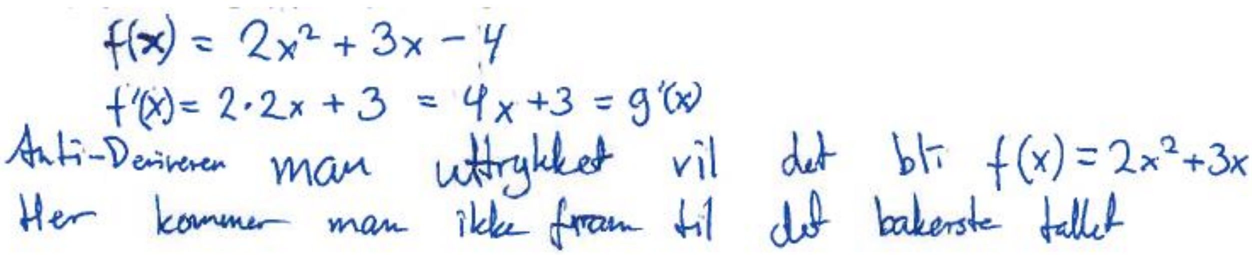
Frida: Ja. Eller pluss 8 eller pluss 12.

Emilie: Ja, hvilket som helst tall. Så jeg tror ikke den er sann.

Frida: Nei, den [påstanden] er ikke sann.

Emilie viste her at hun hadde god forståelse av moteksempelets rolle til å avvise falske påstander (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225). Emilie klarte også gjennom sitt eksempel å overbevise Frida, som først trodde at påstanden kunne stemme, slik at Frida ikke lenger trodde at påstanden stemte. Moteksempelet utløste ikke noen kognitiv konflikt hos Frida, da hun ikke viste tegn på noen motstridende ideer (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197). Det var derfor ikke i dette tilfellet snakk om et avgjørende eksempel. Frida innså derimot, ved hjelp av moteksempelet, at uavhengig av hva konstantleddet i funksjonene til Emilie var, så ville funksjonene bli derivert til den samme funksjonen. På den måten virket det som hun fikk en klarere forståelse av sammenhengen mellom to funksjoner og deres deriverte funksjoner. Derfor fungerte moteksempelet til Emilie, selv om det ikke utløste noen kognitiv konflikt hos Frida, som et avgjørende brobyggende moteksempel for Frida, da moteksempelet bidro til at hun fikk en klarere forståelse av funksjoner og deriverte funksjoner.

Da Halvard og Gunnar skulle løse den samme oppgaven, var det også tydelig at det ble benyttet et moteksempel til å falsifisere påstanden, noe svaret og den tilhørende samtalen mellom de to elevene illustrerte:



Figur 15: Gunnar og Halvard sitt bevis ved moteksempel.

Gunnar: Skal vi prøve på et uttrykk da?

Halvard: Skal vi bare gjøre et eksempel liksom?

Gunnar: Det blir lettere å se det for seg da.

Halvard: Ja, okey. Skal vi skrive opp f av x er lik what? 2 x i andre pluss et eller annet greier?

Gunnar: Ja, vi finner på noen random tall. Vi kan kjøre på med 3x – 4. Nå kan vi gjøre det enkelt ved å skrive f derivert av x er [skriver opp på ark]. Sånn.

Halvard: Vi vet ikke hvordan vi får tilbake den da? [peker på 4-tallet]

Gunnar: Nei.

Halvard: Her får du jo bare 2 x i andre pluss 3 x. Det vil si at det ikke går da? Slik at vi ikke får tilbake den da [peker på 4-tallet]. Det tallet kan jo være 79, liksom.

Gunnar: Ja, det kan også være 100, og det gjør ingen forskjell.

Halvard: Så da har vi motbevist det da?

Gunnar: Ja.

Her ble eksempelet eller moteksempelet $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ benyttet. Innledningsvis i samtalen mellom Gunnar og Halvard så det ut til at de hadde en litt forskjellig forståelse av rollen til moteksempler i bevis. Gunnar foreslo at de kunne prøve på et uttrykk, mens Halvard var undrende til om de bare kunne gjøre et eksempel. Dette kan tyde på at Gunnar visste at ett moteksempel var nok til å avvise påstanden. Han ga gjennom sin forklaring uttrykk for å vite hva som tilfredsstilte kravene til et moteksempel, noe som en del elever finner vanskelig (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 230). Halvard, på sin side, var muligens ikke klar over at Gunnar hadde til hensikt å motbevise påstanden, og grunnen til hans skepsis kunne skyldes at Gunnar benyttet ett eksempel til å bevise påstanden. I så fall viste Halvard en god forståelse av generalisering og den manglende gyldigheten til argumenter basert på det induktive bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 252).

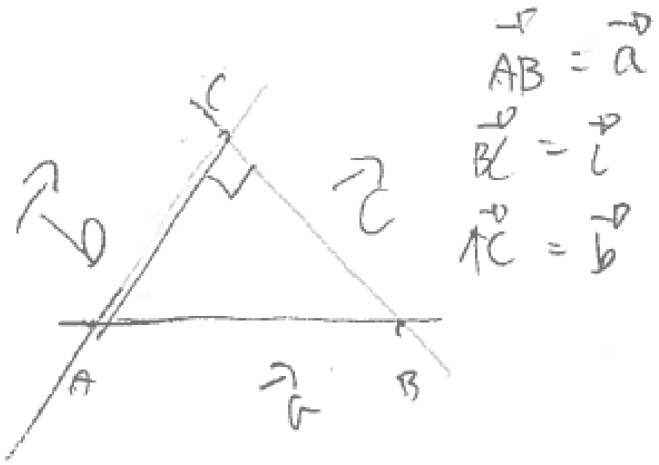
Hvis derimot tilfellet var at Halvard forstod fra starten av at Gunnar forsøkte å motbevise påstanden, kunne det se ut til at eksemplet til Gunnar fungerte som et avgjørende brobyggende eksempel for Halvard. Halvard viste i så fall nemlig en manglende forståelse av moteksempelets rolle i å avvise falske påstander, noe som er en viktig forutsetning for motbevis (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225). Til å begynne med var det da ikke mer enn forslaget til Gunnar om å benytte et eksempel til å motbevise påstanden, som skapte en kognitiv konflikt for Halvard, da han var usikker på om ett eksempel var nok for å motbevise påstanden. Etter hvert som moteksempelet ble formulert og skrevet ned, gikk det da opp for Halvard at moteksempelet ikke bare var et tilfeldig eksempel, men at det var et eksempel som faktisk motbeviste påstanden. Det kunne derfor virke som den kognitive konflikten til Halvard også ble løst gjennom eksempelet til Gunnar, og i så fall fungerte eksempelet som et avgjørende brobyggende eksempel (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197). Halvards personlige begrep om moteksempler, og moteksemplers utilfredsstillende evne til å motbevise påstander, forandret seg da gjennom dette eksemplet til konvensjonelle begreper om moteksempler og deres tilfredsstillende evne til å motbevise påstander, noe som er typisk for nettopp avgjørende brobyggende eksempler (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197).

Vi kan også tolke Gunnar dit hen at han benyttet et omdannende bevisskjema. Dette fordi han blant annet tok hensyn til de generelle aspektene ved situasjonen, noe som kom til syne ved at han sa at de kunne skrive en ligning med «noen random tall». Det virket dessuten som at Gunnar var klar over at den gitte påstanden var feil, og at han derfor benyttet moteksempelet fordi han forutså hva resultatet skulle bli. Dette er ifølge Harel og Sowder (1998a) typiske tegn på det omdannende bevisskjemaet (s. 261). Likevel virket det som om omdannelsene til Gunnar skjedde ved hjelp av moteksempelet, og det var hans moteksempel som også etter hvert overbeviste Halvard om at påstanden måtte være gal. Siden bruken av moteksempel var såpass fremtredende, blir Gunnar derfor tolket her til å ha bevis ved moteksempel som sitt bevisskjema.

4.2.5. Blandet bevisskjema

De foregående kapitlene illustrerte at det kunne være utfordrende å plassere elevenes bevisargumentasjon innenfor et bestemt bevisskjema. Likevel ble bevisargumentasjonen plassert i ulike bevisskjemaer, da forklaringene til elevene hadde hovedvekt av et bestemt bevisskjema. Det viste seg derimot flere ganger at elevene benyttet flere bevisskjemaer samtidig, der hovedvekten av argumentasjonen ikke nødvendigvis tilhørte et bestemt bevisskjema. Det var med andre ord ikke alltid like entydig hvilket bevisskjema elevene benyttet, noe som ikke er overraskende, da det er vanlig at elever benytter seg av flere ulike bevisskjemaer samtidig (Harel & Sowder, 1998a, s. 245). I noen tilfeller virket det dessuten som om elevenes valg av bevisskjema forandret seg i løpet av bevisprosessen, noe som også er vanlig (Recio & Godino, 2001, s. 91).

Camilla var en av elevene som benyttet et blandet bevisskjema. Da hun skulle avgjøre om $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ medførte at også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, ga hun følgende forklaring gjennom sin figur og samtalen med David:



Figur 16: Camillas forklaring med bruk av flere bevisskjemaer.

Camilla: Tenk deg det at, hvis a går bortover sånn [tegner $\vec{a}$]. B står ikke vinkelrett på a, så den står sånn her sånn [tegner $\vec{b}$]. Eh, også a og c står ikke vinkelrett på hverandre. C står sånn her sånn [tegner $\vec{c}$], så kan likevel den være 90 [peker på vinkelen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$ på figuren]. Tenker jeg da. Det er ikke sikkert jeg har riktig, men jeg tror det. Det er en dårlig tegning da.

David: Men jeg kan jo ikke skrive, vinkelen kan være 90?

Camilla: Jo, du kan det. Fordi dem to andre vinklene er ukjente og da kan den siste vinkelen være 90 grader.

David: Det eneste vi vet om de to andre vinklene er at de ikke er 90 grader.

Camilla: Når du har en trekant der to vinkler ikke er 90 grader da kan den siste være 90 grader for alt du vet, si det. Du trenger ikke forklare så ille.

David: Jo, jo. Vi må tenke hvordan vektorene er plassert nå. Vi går jo ikke ut i fra at det er en trekant. Se nå, se nå, se nå. Nå tenker vi da vettu, helt rart her. Drit i den trekanten, det er jo viktigere å snakke om. De kan jo stå sånn her [kladder ned ulike vektorer].

Camilla: Men du kan gjøre det så mye enklere enn det du gjør. Hvis du ser på dem der reglene for a gange b, det er jo a gange b gange cosinus til vinkelen som ikke er 90. For hvis den er 90 så blir den jo 0. Den er ikke 90 da. Og så tar du den andre og gjør akkurat det samme der.

David: Jammen, de kan stå sånn. Og sånn [kladder ned ulike vektorer på et ark].

Camilla: Ja, men det er det som er greia med vektorer. Du kan sette dem hvor du vil. Ja, de kan stå sånn.

David: Ja, det er sant. Vi kan kanskje bare bruke den figuren din.

Dette lange utdraget viser hvordan Camilla både overbeviste seg selv og prøvde å overbevise David ved hjelp av en figur, noe som er typisk for et perseptuelt bevisskjema (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Det som gjorde at Camillas argumentasjon falt inn under kategorien blandede bevisskjemaer, var at hennes visuelle figur egentlig var et moteksempel som motbeviste påstanden. Det kunne derfor tyde på at Camilla hadde en god forståelse av rollen til moteksempelet for å avvise falske påstander (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225). Det virket nemlig som om Camillas figur var ment som et illustrerende eksempel som motbeviste påstanden, og av den grunn kombinerte hun det perseptuelle bevisskjemaet med bevis ved moteksempel som bevisskjema.

Camilla lot seg overbevise av dette ene geometriske moteksempelet, noe som er vanlig blant elever innenfor geometri (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 228). David lot seg derimot ikke helt overbevise. I og med at moteksempelet til Camilla ikke helt overbevisste David, kan det ikke sies å ha fungert som et avgjørende brobyggende eksempel for ham. Det visuelle moteksempelet skapte derimot en kognitiv konflikt hos David. Til å begynne med var han totalt avvisende til figuren til Camilla, mens han til slutt modererte dette synet, da han var enig om at vektorene var vilkårlige, og at det derfor kanskje kunne tenkes at figuren til Camilla hadde noe for seg likevel. Siden moteksempelet skapte en kognitiv konflikt som ikke ble endelig løst, fungerte moteksempelet som et avgjørende eksempel for David (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197).

Grunnen til at David modererte synet sitt kan ha vært at Camilla underveis, da hun forsøkte å overbevise David, også benyttet seg av et analytisk bevisskjema. Dette var som kjent det bevisskjemaet David ofte selv forsøkte å benytte. Det var først etter at Camilla trakk inn skalarproduktformelen, og argumenterte med tanke på den, at David noe motvillig så ut til kunne akseptere Camillas forklaring. Camilla benyttet i denne overbevisningsprosessen et omdannede bevisskjema, siden hun blant annet forsøkte å omdanne den visuelle figuren sin i en mer deduktiv prosess. Denne omdannelsen var målorientert, siden Camilla allerede forutså at hun kunne knytte skalarproduktformelen inn sammen med figuren sin for å motbevise påstanden. Dette er typiske karakteristikker for det omdannende bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 261). Altså benyttet Camilla seg av til sammen tre forskjellige bevisskjemaer i løpet av sin bevisprosess.

Frida benyttet seg også av flere bevisskjemaer da hun skulle avgjøre om påstanden $f(x) = g(x)\ for\ alle\ x \implies f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x$ var sann:

$x^3 - 8 \implies 3x^2$

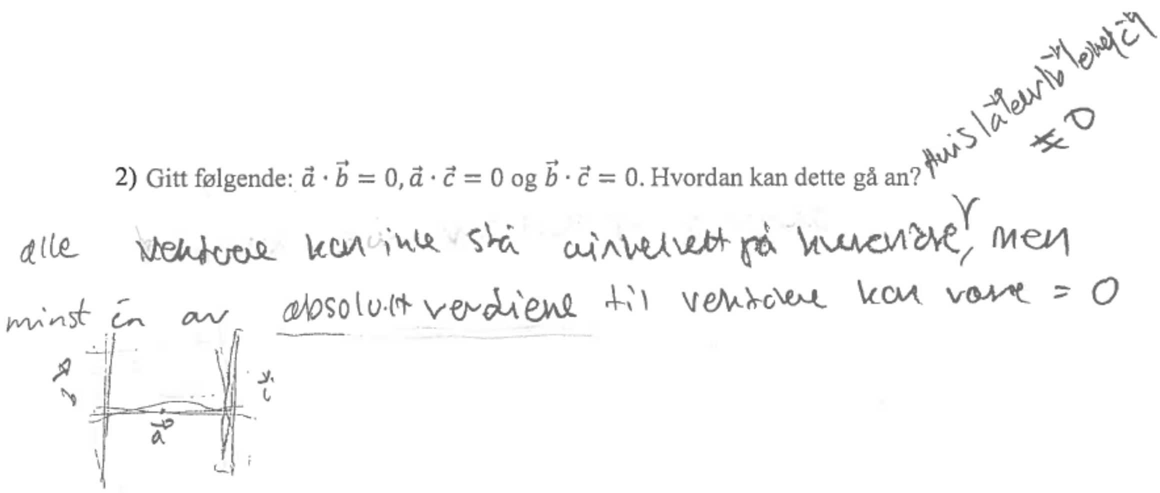
$x^2 - 4 \implies 2x$

Dersom $x = 2$, vil $f(x)$ være lik $g(x)$, men $f'(x)$ og $g'(x)$ vil ikke bli like

Figur 17: Fridas forklaring med bruk av flere bevisskjemaer.

Frida fant her to funksjoner, gitt ved henholdsvis $x^3 - 8$ og $x^2 - 4$, der denne påstanden ikke var sann for $x = 2$. Hun tok med andre ord ikke hensyn til at påstanden skulle gjelde $for\ alle\ x$. Hun så ikke ut til å forstå at når $f(x) = g(x)\ for\ alle\ x$, så må funksjonene f og g være den samme. I og med at hun testet den gitte påstanden kun for verdien $x = 2$, der hun fant ut at påstanden ikke stemte og generaliserte at påstanden derfor ikke kunne stemme, kunne det virke som at Frida benyttet et empirisk, eller nærmere bestemt, et induktivt bevisskjema (Harel & Sowder, 1998a, s. 252). Det virket som Frida også benyttet seg av det symbolske bevisskjemaet, da hun benyttet de symbolske sammenhengene mellom funksjoner, deriverte funksjoner og funksjonsverdier ukritisk, noe som kjennetegner det symbolske bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 250). Frida kom fram til en gal konklusjon, og grunnen til det virket å ha en sammenheng med hennes manglende forståelse av hva det vil si at to funksjoner er like.

Flere av elevene viste en tendens til å kombinere sammen det visuelle og det analytiske bevisskjemaet. Camilla og David ga følgende svar med tilhørende forklaring:



Figur 18: Camilla og David sin forklaring ved bruk av flere bevisskjemaer.

> Camilla: Først så tegnet jeg opp sånn at. Hvis det her var a, så ville b stå vinkelrett på og c stå vinkelrett på, og da kan ikke dem stå vinkelrett på hverandre. Ehh, så tenkte vi på hva om noe er null? Så sa vi at det var absoluttverdiene [som var null].
>
> David: Ja, fordi a gange b vektor er lik absoluttverdiene av a gange absoluttverdiene av b gange cosinus til vinkelen mellom dem. Og for at det skal gå an da, når ikke alle tre kan stå vinkelrett [peker på figuren], altså cosinus til 90 kan ikke være null der, så må absoluttverdiene til en av vektorene være lik null.

Som tidligere nevnt hadde Camilla en tilbøyelighet til å benytte seg av visuelle bevis, mens David på sin side forsøkte seg på mer analytiske bevis. I dette tilfellet kombinerte de to elevene disse to bevisskjemaene. Camilla angrep oppgaven ved å tegne en figur og prøvde å bli overbevist ved hjelp av den ene figuren, noe som er typisk for et perseptuelt bevisskjema (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Hun ble ikke i denne oppgaven villedet til å tro at figuren hennes tok for seg alle tenkelige tilfeller, muligens fordi hun som kjent tidligere ikke hadde tatt hensyn til figurenes begrensninger. Dermed virket det som hun i dette tilfellet så begrensningen til hennes perseptuelle bevisskjema, og det analytiske bevisskjemaet ble så introdusert for å forklare påstanden. Camilla og David benyttet seg nemlig av skalarproduktregelen for å forklare at en av vektorene måtte være nullvektoren. Siden deres begrunnelse hadde sitt utspring fra denne kjente regelen, virket det derfor som elevene benyttet seg av et aksiomatisk bevisskjema (Harel & Sowder, 1998a, s. 273). Samtidig refererte David til den visuelle figuren da han forklarte at ikke alle vektorene kunne stå vinkelrett på hverandre, noe som tydet på at han benyttet en blanding av visuelt og aksiomatisk bevisskjema. I og med at David tok hensyn til de generelle aspektene ved situasjonen og benyttet seg av den visuelle figuren i den deduktive prosessen, kunne det derfor tyde på at det bevisskjemaet David egentlig benyttet, var nærmest beslektet med et omdannende bevisskjema (Harel & Sowder, 1998a, s. 261).

5. Diskusjon

I dette diskusjonskapittelet vil jeg diskutere de viktigste forskningsresultatene fra denne studien. Jeg vil diskutere dette i lys av de forskningsspørsmålene: *Hvilke observerbare faktorer kan ha betydning for R1-elevers forståelse av bevis? Hvilke bevisskjemaer benytter R1-elever seg av når de beviser?* Jeg vil også diskutere spenningsforholdet mellom disse to forskningsmålene gjennom forskningsspørsmålet: *Hvilke sammenhenger kan man finne mellom R1-elevers forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema?* Til slutt vil jeg komme med en drøfting av studien som helhet. I den forbindelse vil jeg ta for meg studiens validitet, reliabilitet og generaliserbarhet. Jeg vil også drøfte nye forskningsspørsmål og komme med en perspektivisering av studien.

5.1. Forskningsresultater

«Bevis synes de ofte er vanskelig», fortalte Ivar om elevene i sin R1-klasse. Både Ivar og elevene selv ga uttrykk for at elevene ikke alltid fikk et utbytte av bevis. Hvilket utbytte elevene har av bevis er vanskelig å måle. Denne casestudien ga innblikk i hvilken forståelse noen elever i en R1-klassen hadde av bevis. Dette ble illustrert gjennom R1-elevenes bruk av ulike bevisskjemaer da de arbeidet med ulike bevisoppgaver. Casestudien ga også et innblikk i hvilke observerbare faktorer som kunne ha betydning for R1-elevenes forståelse av bevis, og sammenhengen mellom R1-elevenes forståelse av bevis og deres valg av bevisskjemaer.

5.1.1. Hvilke observerbare faktorer kunne ha betydning for R1-elevenes forståelse av bevis?

Det var mange faktorer som kunne ha betydning for R1-elevenes forståelse av bevis. De viktigste faktorene som ble funnet i denne studien var: læreplanen, læreboka, lærerens undervisningspraksis og matematiske språkbruk, lærerens og elevenes kunnskaper om bevis, lærerens og elevenes syn på bevis og elevenes forkunnskaper om begreper og logiske sammenhenger som inngår i beviset.

Læreren Ivar fortalte at bevis var ganske avgrenset i læreboka *Sinus – matematikk R1* (Oldervoll et al., 2013), som denne R1-klassen benyttet. Læreboka tok utgangspunkt i Læreplanen for Kunnskapsløftet 2006 (*LK06*), der bevis ikke har en spesielt sentral rolle (Kunnskapsløftet, 2006). Læreplanen legger opp til mer bevisføring i enkelte områder av matematikken enn i andre. Der hovedområdet *funksjoner* er blottet for bevis, har bevis en mer sentral plass innenfor spesielt hovedområdet *geometri*, men også innenfor hovedområdet *algebra* (Kunnskapsløftet, 2006). Dette samsvarte med Ivar sitt syn på bevis i skolematematikken, da han også fremhevet disse to områdene som særlig egnet for bevis. Det kan være betenkelig å inkludere bevis kun i noen områder av skolematematikken, da som Hanna (2000) påpekte, det nettopp er bevis som validerer resultatene i matematikken (s. 12), og det er disse resultatene som igjen utgjør innholdet i hovedområdene av læreplanen til R1-elevene. Læreplanen *LK06* valgte å plassere logikk og bevismetoder under hovedområdet *algebra*, og læreboka ga kun algebraiske eksempler på de ulike bevismetodene. Dette kan gi et inntrykk at bevis er noe som kun tilhører algebra. Algebraens sterke posisjon i skolematematikken med tanke på bevis, kan skyldes at algebra ble hovedverktøyet for å forklare nye matematiske sammenhenger på 1600- og 1700-tallet (Kleiner, 1991, s. 301). Ulike logiske relasjoner og bevismetoder benyttes riktignok i bevis i alle områder av matematikken, og en kan argumentere for at bevis og bevismetoder derfor burde vært inkludert i alle hovedområdene av læreplanen.

Elevene i denne casestudien ga et inntrykk av at det var læreren som stort sett førte bevisene på tavla, noe han til en viss grad også ga uttrykk for selv. Dette kan være uheldig, da en viktig forutsetning for å skape forståelse gjennom et bevis, er at elevene har et personlig forhold til beviset (Alibert & Thomas, 1991, s.230). Spørsmålet blir derfor om elevene får et personlig forhold til bevis ved at læreren går gjennom bevis på tavlen, istedenfor at elevene får prøve å bevise selv? Grunnen til at flere av elevene i denne studien hadde vansker med å konstruere bevis, kan nettopp skyldes at bevisene ofte var lærerstyrte på tavla. Det kan også være dette som er grunnen til at mange elever er dyktigere til å vurdere bevis enn å konstruere bevis selv (Healy & Hoyles, 2000, s. 407). Elevene ga også uttrykk for at var lettere å regne med tall enn å konstruere bevis. Dette kan indikere at elevene hadde mest erfaring med å jobbe med operasjonelle oppgaver, som er med og bygger opp den instrumentelle forståelsen (Sfard, 1991, s. 29-30). Det kan blant annet være derfor elevene hadde vanskeligheter med å konstruere bevis, da det er den relasjonelle forståelsen, og ikke den instrumentelle forståelsen, som er en viktig forutsetning for bevisargumentasjon.

Læreboka *Sinus – matematikk R1* (Oldervoll et al., 2013) ga ikke alltid inntrykk av at de matematiske resultatene bygde på hverandre. I beviset av koordinatformelen benyttet de seg av den distributive loven, uten at denne verken hadde blitt bevist eller ble henvist til. Dette er uheldig da elevene kunne få den samme forståelsen av matematikk som det læreboka her ubevist ga inntrykk av, nemlig at den matematiske kunnskapen ikke naturlig bygger på hverandre. I ytterste konsekvens kunne dette igjen føre til at elevene i denne R1-klassen så på matematikk som en bunke regler, og derfor utviklet en mekanisk, instrumentell forståelse i stedet for innsiktsbringende relasjonell forståelse (Skemp, 1978).

En annen forutsetning for elevenes forståelse av bevis var deres forkunnskaper om og forståelse av de ulike begrepene som inngikk i beviset. Dette virket ikke alltid å være på plass hos elevene, og gikk derfor utover elevenes forståelse av beviset (Dreyfus, 1999, s. 91). David og Camilla var for eksempel ikke sikre på hva en nullvektor var, og de glemte at vektorene kunne være nullvektor, da de skulle avgjøre sammenhengen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$, når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Bjørn, på sin side, klarte ikke å utlede koordinatformelene for skalarprodukt, da han manglet kunnskaper om skalarprodukt, eller nærmere bestemt kunnskaper om enhetsvektorene som inngikk i skalarproduktet.

Det matematiske språket hadde også en betydning for elevenes forståelse av bevis. Læreren Ivar benyttet ofte ord som «gange» eller «ganging av to vektorer» om skalarproduktet av to vektorer. Camilla var en av elevene som trodde multiplikasjon av vektorer var det samme som multiplikasjon av tall, noe som medførte problemer da hun skulle bevise hvordan det samtidig gikk an at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. I hvilken grad hennes gale forkunnskaper om skalarprodukt ble påvirket av måten læreren ordla seg på, er usikkert. Dette understreker hvert fall hvorfor det er viktig med logisk-lingvistiske kunnskaper hos lærere og lærebokforfattere (Stylianides & Ball, 2008, s. 310), slik at det ikke oppstår misoppfatninger blant elevene på grunn av språket.

Elevenes forkunnskaper om de logiske sammenhengene i bevisene, som implikasjon, hadde stor innvirkning på om elevene klarte å bevise ulike sammenhenger. Ivar påpekte at elevene hadde litt problemer med implikasjon, ekvivalens og «hvilken vei den der tanken går», noe som Frida og Emilie viste da de skulle bevise om funksjonen $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ var deriverbar for $x = 2$. Deres problem var knyttet til hvordan de skulle bruke implikasjonen $f\ deriverbar\ for\ x = a \implies f\ er\ kontinuerlig\ for\ x = a$ for å bevise eller motbevise om den gitte funksjonen var deriverbar for $x = 2$. Elevene hadde helt riktig benyttet et kontrapositivt bevis til å bevise påstanden, men da de ble gjort oppmerksomme på hva slags argumentasjon de hadde benyttet, ga de et uttrykk av at de ikke lenger trodde at $A \implies B$ og $\sim B \implies \sim A$ var to ekvivalente relasjoner. Det var mulig at den kontrapositive implikasjonen ($\sim B \implies \sim A$) og den motsatte implikasjonen ($B \implies A$) ble sammenblandet (Krantz, 2011, s. 12). Med tanke på at de fleste steg av de ulike bevisene består av implikasjoner og kontrapositive implikasjoner (Krantz, 2011, s. 14), kan det derfor uansett virke som at en forståelse av symbolsk logikk er en forutsetning for at elevene skal kunne forstå og produsere bevis, noe som også har vært oppe til diskusjon (Hanna, 2014, s. 407). I lys av usikkerheten rundt om disse to elevenes forståelse av kontrapositive bevis, var det interessant at læreboka *Sinus – matematikk R1* (Oldervoll et al., 2013) benyttet nettopp et kontrapositivt eksempel for å illustrere implikasjonen $f\ deriverbar\ for\ x = a \implies f\ er\ kontinuerlig\ for\ x = a.$ Det er ikke utenkelig at det er flere elever enn Frida og Emilie som sliter med kontrapositive bevis i denne R1-klassen. Derfor kan det hende at lærebokforfatternes illustrerende eksempel av den logiske sammenhengen, virket mot sin hensikt.

Det viste seg at læreren og elevene i denne R1-klassen hadde et litt forskjellig syn på hva som tilfredsstilte et matematisk bevis i skolesammenheng. Ivar påpekte, i likhet med mange andre lærere (Tall, 1989, s. 30), at tekniske og formelle bevis ikke hadde noe for seg i skolesammenheng. For David var dette nettopp typiske karakteristikker for hvordan et bevis skulle være. Læreren og elevene var heller ikke helt på bølgelengde i sitt syn på om visuelle bevis var akseptable bevis. Både Anders, Bjørn og David ga alle uttrykk for at visuelle forklaringer var utilstrekkelige for å kunne betegnes som matematiske forklaringer. Ivar på sin side benyttet seg av figurer i sine forklaringer, og ved en anledning så verifiserte han til og med svaret han fikk ved å benytte definisjonen av den deriverte, på bakgrunn av en figur!

Siden læreren og elevene ga uttrykk for forskjellige oppfatninger og forventninger av hva som var et akseptabelt bevis i denne R1-klassen, kunne det tyde på brudd på eller mangler i den didaktiske kontakten mellom læreren og elevene (Blomhøj, 1994).

5.1.2. Hvilke bevisskjemaer benyttet R1-elevene seg av når de beviste?

R1-elevene benyttet seg av ulike typer bevisskjema. På bakgrunn av elevenes forklaringer brukt i de to oppgavesettene med henholdsvis skalarproduktoppgaver og derivasjon- og kontinuitetsoppgaver, virket det som elevenes bevisskjemaer ikke hadde noe sammenheng med det matematiske temaet, noe som også andre forskere har påpekt (Recio & Godino, 2001, s. 90).

Noe av det som utmerket seg mest, var at elevene ganske ofte benyttet seg av visuelle bevis, da de ofte benyttet seg av figurer i sine forklaringer. Dette førte til at det visuelle bevisskjemaet stod sterkt blant elevene (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Elevene klarte i ulik grad å bevise ved hjelp av dette bevisskjemaet. Halvard benyttet, som tidligere nevnt, dette bevisskjemaet da han skulle finne ut om to funksjoner var deriverbare for $x = 2$. I oppgave 1a svarte han kun med en figur. Grunnen til det, kan ha vært at Halvard selv, syntes at figuren var selvforklarende, noe en kan stille spørsmålstegn ved. Dette førte til at Halvard sitt bevis ikke kunne klassifiseres som et fullverdig visuelt bevis, da det manglet det forklarende aspektet som kreves av slike bevis. Det var flere elever som hadde problemer med bruken av det perseptuelle bevisskjemaet. De elevene som arbeidet med skalarproduktoppgavene benyttet perseptuelle bevisskjemaer da de skulle bevise hva sammenhengen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$ var, når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Elevene benyttet ikke bare dette bevisskjemaet, men ble også villedet til å tro at $\vec{b}$ og $\vec{c}$ måtte være parallelle. Med andre ord så brakte bruken av dette bevisskjemaet med seg en ekstra utfordring, nemlig at figurene som elevene benyttet ikke alltid var generelle nok, da de ikke alltid tok for seg alle mulige aspekter ved situasjonen. På den måten baserte begrunnelsen seg på et eksempel, noe som er typisk for empiriske bevisskjemaer (Sowder & Harel, 1998b, s. 672). Noen ganger kom til og med det perseptuelle bevisskjemaet til kort, da det ikke var mulig å visualisere situasjonen. For eksempel var det ikke mulige for elevene å illustrere nullvektoren med en figur.

Det eksterne bevisskjemaet var etter det perseptuelle bevisskjemaet et av de mest benyttede bevisskjemaene. Dette bevisskjemaet bestod av tre ulike typer bevisskjemaer som alle kom til syne i elevenes bevisprosess. Bruken av det rituelle og det symbolske bevisskjemaet hadde sammenheng med henholdsvis elevenes syn på bevis og forkunnskaper om begreper i beviset. Av den grunn vil dette derfor bli betraktet nærmere i det neste delkapittelet. Det autoritære bevisskjemaet ble ved flere anledninger benyttet av elevene, og det var særlig to ting som utmerket seg. For der første ble læreren, når han ble benyttet i bevisprosessen til R1-elevene, hovedsakelig benyttet som verifiserer. For det andre ga Halvard uttrykk for at han benyttet boka som et oppslagsverk når han skulle bevise. Lærebokas sterke plass i hans bevisargumentasjon kan sees i sammenheng med at også læreren refererte til læreboka for å avgjøre når det var nødvendig å bevise, og når det ikke var nødvendig. I begge de to tilfellene ga elevene et inntrykk av at den matematiske kunnskapen var noe henholdsvis læreren og læreboka var i besittelse av, noe som er typisk for det autoritære bevisskjemaet (Sowder & Harel, 1998b, s. 671). Den matematiske kunnskapen har verken læreren eller læreboka noen særskilt rett på. Det er derfor uheldig hvis det er en konsensus blant elever om at matematikk er en bunke med ferdig regler og kunnskaper de må tilegne seg. Dette skrider imot hvordan den matematiske kunnskapen har blitt til (jfr. Bell, 1976 ; Jaffe, 1997 ; Krantz, 2011)!

Det analytiske bevisskjemaet var det klart minst benyttede bevisskjemaet. Det var flere ting å bite merke i angående bruken, eller snarere den manglende bruken, av dette bevisskjemaet. For det første benyttet R1-elevene i liten grad en aksiomatisk tilnærming i bevisene sine, mens læreren på sin side veldig ofte benyttet seg av et aksiomatisk bevisskjema. Grunnen til dette kan for det første skyldes elevenes og lærerens forståelse av bevis, og vil derfor bli diskutert ytterligere i det neste delkapittelet. For det andre virket det som om bruken av det analytiske bevisskjemaet hadde et nært slektskap med det rituelle bevisskjemaet. I David sitt tilfelle var det kun formen og ikke innholdet som hadde en mer analytisk tilnærming, noe som førte til at hans aksiomatiske tilnærming som regel endte opp som rituelle bevis (Harel & Sowder, 1998a, s. 246). Knyttes dette opp mot at Ivar ofte gikk gjennom bevisene på en aksiomatisk måte, kan det være at det var flere enn David i denne R1-klassen som var mer opptatt av formen enn innholdet i slike typer bevis. Det at elever sliter med formelle bevis er nemlig ikke noe nytt (Tall, 1989, s. 30). Bell (1976) påpekte at kun de flinkeste elevene forstod deduktive bevis (s.23), noe som kan ha ført til at man i skolen har gått vekk fra slike bevis (Hanna, 1990). Elevene i denne studien gikk som kjent i en R1-klasse. Det vil derfor være nærliggende å tro at de lå over gjennomsnittet for VG2-elever hva matematiske kunnskaper angikk, da R1-faget er ansett som det vanskeligste matematikk-faget elevene kan ha på dette nivået (Sirnes, 2012). Da R1-elevene i denne studien slet med slike formelle, analytiske og deduktive bevis, kan dette derfor indikere at også mange andre elever vil slite med slike bevis.

Bruken av det omdannende bevisskjemaet fungerte flere ganger på sin side som en mellomliggende overgang fra det visuelle bevisskjemaet til det aksiomatiske bevisskjemaet. Camilla, som ofte benyttet seg av et visuelt bevisskjema, klarte da hun skulle bevise om $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ medførte at også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$ å overbevise David ved å bruke et omdannende bevisskjema. Camilla benyttet nemlig figuren sin en mer deduktiv prosess, noe som indikerte at hun bevegde seg fra det visuelle bevisskjemaet til det omdannende bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 261). Dette virket det som David, som selv ofte prøvde å benytte et aksiomatisk bevisskjema, kunne akseptere. David benyttet også det omdannende bevisskjemaet som en overgang fra det visuelle til det aksiomatiske bevisskjemaet, da han prøvde å skape en forståelse av Camillas overgang fra det perseptuelle til det aksiomatiske bevisskjemaet, da hun forklarte hvordan det gikk an at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Dette viste hvordan det omdannende bevisskjemaet kunne være nyttig med tanke på å skape en felles forståelse for elever som i utgangspunktet benyttet et perseptuelt og et aksiomatisk bevisskjema.

Bevis ved moteksempel var et bevisskjema som elevene benyttet seg av særlig da de skulle motbevise påstanden $f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x \Rightarrow f(x) = g(x)\ for\ alle\ x.$ Dette bevisskjemaet fungerte forskjellig for de to elevparene som skulle motbevise den nevnte påstanden. I Gunnar og Halvard sitt tilfelle virket det som moteksempelet til Gunnar skapte en kognitiv konflikt hos Halvard, da han ble usikker på om ett moteksempel var nok for å motbevise påstanden. I Frida og Emilie sitt tilfelle skapte ikke moteksempelet til Emilie noen kognitiv konflikt hos Frida, da hun ikke hadde noen motstridene ideer (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 196). Fridas problem var isteden at hun ikke visste om påstanden stemte eller ikke stemte. Likheten mellom Halvard og Frida, var at de begge fikk en klarere forståelse som var fri for motsigelser ved hjelp av moteksemplet. Moteksemplene fungerte derfor som avgjørende brobyggende eksempler for elevene. Dette indikerer at det det ikke trenger å være et absolutt krav at moteksempler må skape en kognitiv konflikt for at de skal ha noen nytteverdi i undervisningen.

5.1.3. Hvilke sammenhenger fantes mellom R1-elevenes forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema?

Frida benyttet i sin bevisprosess både det induktive og det symbolske bevisskjemaet. Hennes valg av bevisskjema hadde, som for de fleste elevene, en sammenheng med hennes forståelse av bevis. Frida hadde ikke en riktig forståelse av hva det ville si at to funksjoner var like, noe som medførte problemer i hennes bevisargumentasjon. Det kan ha vært denne manglende forståelsen som gjorde at hun gikk induktivt til verks og prøvde å bevise at påstanden stemte. Hennes manglende forståelse av funksjoner kan ha vært grunnen til at hun også benyttet et symbolsk bevisskjema, da det virket som hun benyttet de symbolske sammenhengene mellom funksjoner, deriverte funksjoner og funksjonsverdier på en ukritisk måte, noe som kjennetegner det symbolske bevisskjemaet (Harel & Sowder, 1998a, s. 250). Bjørn benyttet seg også av det symbolske bevisskjemaet da han ikke klarte å utlede koordinatformelen for skalarprodukt. I hans tilfelle så det ut til å være en nær korrespondanse mellom hans bruk av det symbolske bevisskjemaet og hans manglende forkunnskap og forståelse av de involverte begrepene i bevisargumentasjonen. Det virket nemlig som om grunnen til at Bjørn «kastet om seg med bokstaver på en ulogisk måte», men på en logisk måte for ham selv, i større grad skyldes hans manglende begrepsforståelse og relasjonelle forståelse, enn mangelen på en operasjonell, instrumentell forståelse. Dreyfus (1999) påpekte at elevers vanskeligheter med bevis kunne skyldes at de manglet den riktige forståelsen for hvordan ulike begreper skulle benyttes i bevis (s. 91). På bakgrunn av denne studien, kan det tyde på at elevers manglende forståelse av begrepene som inngår i bevisene også hadde en betydning for hvilket bevisskjema elevene benyttet i sin bevisargumentasjon.

David benyttet seg ofte av rituelle bevis. Hans forståelse av bevis samsvarte en del med bevisets rolle i forskningsmatematikken, der matematiske resultater ofte er en konsekvens av sammenhengen mellom innhold og form (Kleiner, 1991, s. 294). Grunnen til at han, som tidligere nevnt, forsøkte å føre aksiomatiske bevis har muligens derfor en sammenheng med synet hans på bevis. Hans trang til å føre beviset på en matematisk måte, førte til at han slet med å konstruere bevis og valide forklaringer, noe som også universitetsstudenter sliter med ifølge Dreyfus (1999, s. 93-94). Dette viser hvordan manglende kunnskaper om begrepene og de logiske relasjonene som inngår i et bevis kan føre til at forsøk på aksiomatiske bevis i praksis heller kan ende opp som rituelle bevis, da bevis isteden blir en rituell handling uten mening (Ball et al., 2003, s. 907).

Ivar benyttet som sagt ofte et aksiomatisk bevisskjema. Dette kan ha en sammenheng med hans utdanningsbakgrunn og erfaring. Ivar var en erfaren lektor med solid matematisk bakgrunn, noe som må kunne tenkes å ha influert hans forståelse av bevis. Trolig var det hans forståelse av bevis som igjen bidro til at han benyttet det aksiomatiske bevisskjemaet. Det kan være lignende årsaker til at dette bevisskjemaet ble benyttet minst av elevene. Elevene viste ved flere anledninger at de ikke hadde tilstrekkelige matematiske kunnskaper til å føre slike formelle og mer deduktive bevis. Dette gir en indikasjon på at det kun er de flinkeste elevene som klarer å benytte et slikt bevisskjema og forstå deduktive bevis (Bell, 1976, s. 23). Dette underbygges blant annet av at Ivar mente slike bevis hadde lite for seg i undervisningen.

Som tidligere nevnt benyttet elevene seg ofte av et visuelt bevisskjema. Det paradoksale var at flere av de samme elevene mente at slike visuelle forklaringer ikke kunne regnes som matematiske bevis. Elevene virket uansett i mange tilfeller overbevist av figurene. En grunn til elevene benyttet et slikt bevisskjema kan være at også Ivar benyttet dette. Tydeligst var dette da Ivar benyttet et eksempel for å vise hvordan bruken av definisjonen av den deriverte fungerte, og verifiserte denne løsningen på grunnlag av den grafiske løsningen. Det er derfor ikke utenkelig at de bevisskjemaene læreren benyttet seg av, hadde betydning for elevenes valg av bevisskjemaer, og lærerens undervisningstimer satte sitt preg på hva slags forståelse elevene fikk av bevis. Dette vil trolig gjøre seg særlig gjeldende for de elevene som benytter det autoritære bevisskjemaet, da de blant annet vil stole fullt og helt på læreren når de begrunner svarene sine (Sowder & Harel, 1998b, s. 671).

Elevenes bruk, eller mangel på bruk, av bevis ved moteksempel som sitt bevisskjema, så ut til å ha en sammenheng med elevenes forståelse, eller mangel på forståelse, av moteksempler. Anders, David og Halvard virket alle usikre på om ett moteksempel var nok til å motbevise en påstand. Det virket altså som noen av elevene manglet en forståelse av moteksempelets rolle i å avvise påstander, hvilket er en nødvendig forutsetning for bevis ved moteksempel (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225). Moteksemplene som verken Anders eller David anerkjente som matematiske bevis, var tilknyttet hver sin figur. Det kan derfor også være at det var de visuelle forklaringene, snarere enn moteksemplene, som disse to elevene ikke anerkjente. Det kan ha vært derfor de ikke benyttet bevis ved moteksempel som sitt bevisskjema.

Det viste seg ved flere anledninger utfordrende for elevene å samarbeide. Camilla og David hadde ved flere tilfeller litt opphetede diskusjoner, da Camilla som nevnt ofte tydde til visuelle forklaringer, mens David ønsket seg analytiske forklaringer, som var mer matematiske. Da Gunnar og Halvard skulle motbevise påstanden $f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x\ \Rightarrow f(x) = g(x)\ for\ alle\ x$, var det usikkert i hvilken grad Halvard forstod at påstanden kunne motbevises. Usikkerheten Halvard viste gjennom motbeviset som Gunnar førte, kan simpelthen skyldes at han ikke forstod at Gunnar hadde til hensikt å motbevise påstanden. Flere av samarbeidsproblemene til elevene så derfor ut til å skyldes at elevene benyttet ulike bevisskjemaer. Elever som benytter seg av ulike bevisskjemaer har ulik begrepsforståelse, og Balacheff (1988) påpekte nettopp at elever med ulik begrepsforståelse kan slite med å samarbeide (s. 222).

5.2. Drøfting av casestudien

5.2.1. Studiens validitet, reliabilitet og generaliserbarhet

I metodekapittelet ble det redegjort for hvordan validiteten og reliabiliteten til studien ble ivaretatt, samt hva slags form for generalisering resultatene av denne studien kunne være med på å gi. I etterkant av analysen og diskusjonen av forskingsresultatene, er det derfor interessant å komme med noen betraktninger rundt dette.

Den kanskje viktigste kilden til validitet av denne studien var at jeg benyttet flere datakilder, noe også Yin (2014) poengterte (s. 47). Jeg benyttet datakildene intervju, observasjon, oppgavebesvarelser og, læreboka og læreplanen til R1-elevene. Dette ble gjort for å oppheve utenforliggende påvirkninger av dataen (Stake, 1995, s. 114), og ved at jeg benyttet triangulering av dataen så økte validiteten til forskningen (Yin, 2014, s.121). Grunnen til at jeg presentere en del utdrag fra transkripsjonene, var at jeg ønsket å vise tydelig hva som lå til grunn for analysen og tolkningen, og på den måten øke validiteten til studien. Jeg valgte underveis å komme med alternative tolkninger av dataresultatene, da blant annet Yin påpekte at det var viktig å være åpen for motstridene bevis i datamaterialet (2014, s. 76). Gjennom å adressere rivaliserende forklaringer oppnådde jeg økt validitet (Yin, 2014, s. 45), og sannsynligheten ble derfor større for at jeg unngikk feilaktige kausale konklusjoner.

Jeg stiller meg i etterkant av studien spørsmålet om hvor nyttig observasjonen av R1-undervisningen var for forskningen og forskningsspørsmålene. I og med at jeg som observatør er uvitende om tidligere hendelser forut for (og i etterkant av) observasjonene (Cohen et al., 2011, s. 210), var det vanskelig å få noen klar oppfatning av undervisningens betydning for elevenes valg av bevisskjema kun basert på observasjonen av et par undervisningstimer. Det var av den grunn derfor også umulig å komme med konkluderende analyser av lærerens kunnskaper om og syn på bevis, utover det han selv fortalte i intervjuet. En siste kritisk bemerkning er at oppgavesettene elevene benyttet i denne studien kunne vært mer mangfoldige. Blant annet ble nærmest ikke det induktive bevisskjemaet benyttet, noe som jeg tidligere har påpekt kunne skyldes at det var få av oppgavene som la opp til at elevene skulle generalisere. En kan også stille seg spørsmålet om oppgavene elevene fikk i denne studien i tilstrekkelig grad la opp til at elevene kunne benytte seg av analytiske bevisskjemaer. Grunnen til at disse bevisskjemaene ble lite benyttet, samtidig som det visuelle bevisskjemaet ble mye benyttet, kan skyldes at flere av oppgavene la opp til at elevene kunne benytte seg av figurer og visualiseringer i sine bevis. Derfor ga ikke studien noen generelle svar på hvilke bevisskjemaer R1-elevene benytter seg av når de beviser, men den ga isteden svar på hvilke bevisskjemaer elevene benyttet seg av når de beviste eller motbeviste de ulike påstandene de fikk presentert i denne studien.

Hensikten med denne casestudien var ikke å generalisere R1-elevenes valg av bevisskjemaer i denne studien til å gjelde alle R1-elever. Isteden ønsket jeg å sammenligne mine funn med de teoretiske konseptene som denne casestudien bygde på, og på den måten isteden foreta analytiske generaliseringer (Yin, 2014, s. 41). Som Stake (1995) påpekte, kan man lære mye generelt fra kun en case. Jeg tror at mange lærere kan kjenne seg igjen i hvordan elevene i denne studien argumenterte innenfor henholdsvis temaene skalarprodukt og derivasjon og kontinuitet. På den måten kan denne studien være med å skape refleksjon rundt hvordan undervisningen og bevisføringen innenfor disse temaene bør eller kan legges opp.

Selv om jeg forsøkte å benytte passende teorier for å øke validiteten til oppgavene (Yin, 2014, s. 45), så kan nettopp dette også ha ført til subjektive tolkninger, da dataen har blitt tolket gjennom teoretiske briller. Samtidig prøvde jeg å sikre reliabiliteten ved å redegjøre for hvilke teorier, metoder og data som ble benyttet og samlet inn. Grunnen til at jeg benyttet mange ulike datakilder og så etter mønstre på tvers av datamaterialet, var også for å øke reliabiliteten til mine tolkninger av dataen. I og med at jeg som forsker har mine meninger og forventinger både om intervjuet og respondentene, kan jeg potensielt ha påvirket intervjuet av læreren og svarene på spørsmålene elevene fikk underveis (Cohen et al., 2011, s. 204). Dette vil i så fall svekke reliabiliteten til studien. En annen potensiell påvirkning i studien var at læreren og elevene kan ha blitt påvirket av at de ble forsket på, og på den måten spilte Hawthorneeffekten en rolle (Halle, 2014). Dette kan ha ført til at datamaterialet ikke nødvendigvis gjenspeilet læreren og elevene væremåte og tankegang, noe som i så fall gikk utover validiteten til forskningsresultatene. Læreren kan også under intervjuet ha blitt påvirket av å ha blitt forsket på, og intervjusvarene hans kan derfor ha vært påvirket av refleksivitet (Yin, 2014, s.112).

5.2.2 Nye forskningsspørsmål

Underveis og i etterkant av denne studien har det dukket om nye forskningsspørsmål som det kunne vært interessant å forske videre på. Som jeg var inne på, var det ikke mulig å vite hvilken betydning undervisningen hadde på R1-elevenes valg av bevisskjema kun ved å observere er par undervisningstimer. Det kunne derfor ha vært interessant og observert en R1-klasse over en lang tidsperiode, for å se hvordan læreren legger til rette for bevis i undervisningen. Interessant ville det også ha vært å observere flere R1-lærere over tid, for å kunne sammenligne hvordan de legger til rette for bevis, og hvordan dette igjen har betydning for R1-elevenes valg av bevisskjema.

Det hadde også vært spennende å sammenligne mange casestudier som tok for seg elevenes valg av bevisskjema med hensyn på ulike områder av skolematematikken. På bakgrunn av denne studien virket det ikke som om det var noen sammenheng mellom elevenes valg av bevisskjema og om temaet for bevisene var skalarprodukt eller derivasjon og kontinuitet. Recio og Godino (2001) fant heller ingen sammenheng mellom valg av bevisskjema og det matematiske temaet i sin studie. En grundigere analyse av alle områder av skolematematikken kunne derimot gitt et mer helhetlig bilde over denne potensielle sammenhengen. Det ville nemlig vært nyttig for lærere å vite hvilke bevisskjemaer elever har en tendens til å bruke innenfor de ulike matematikkområdene, særlig med tanke på tilretteleggingen av undervisningen.

Det viste seg flere ganger utfordrende å plassere elevenes argumentasjon innenfor et bevisskjema. Grunnen til det var som Harel og Sowder (1998a) påpekte, at elevene benyttet ulike bevisskjemaer samtidig (s. 245), og som Recio og Godino (2001) påpekte, forandret bevisskjemaet som elevene benyttet seg av underveis i bevisprosessen (s. 91). Denne studien viste også at det var en flytende overgang mellom flere av bevisskjemaene. David demonstrerte blant annet at det virket å være et slektskap mellom det rituelle og det aksiomatiske bevisskjemaet. Det virket også å være en sammenheng mellom det visuelle og det omdannende bevisskjemaet. Av den grunnen kunne det derfor ha vært interessant å forske nærmere på sammenhengen mellom de ulike bevisskjemaene. I den forbindelse kunne det da ha vært aktuelt å se på utviklingen i elevenes forståelse og deres bevisprosess fra pragmatiske bevis til begrepsbevis. Det kunne da ha vært hensiktsmessig å knytte inn Sfards (1991) utviklingsprosess av forståelse, og Balacheffs (1988) ulike klassifikasjoner av bevis.

I forlengelsen av utviklingsprosessen av elevenes forståelse og bevisføring, hadde det vært interessant og forsket ytterligere på hvordan en som lærer kan implementere bevis i undervisningen for å utvikle bevisforståelsen. På den måten hadde man istedenfor å kartlegge elevenes argumentasjon, fokusert på hvilke virkninger og konsekvenser de ulike konkrete, didaktiske tiltakene hadde hatt for elevene. Denne studien har gitt meg noen tanker og ideer om hvordan bevis kan implementeres i undervisningen, og hvilke utfordringer en som lærer må ta hensyn til.

5.2.3. Perspektivisering

Det første som denne studien fortalte meg, var at det er viktig at læreren og elevene har en tydelig felles forståelse og oppfatning av hva et bevis i skolesammenheng vil innebære. Læreren og elevene må altså ha en tydelig didaktisk kontrakt (Blomhøj, 1994, s. 36) for hva et bevis er, hva det bygger på, hva som er gyldig argumentasjon og hvordan beviset skal kommuniseres. Den didaktiske kontakten kan derfor bygge på Stylianides (2007, s. 291) sin definisjon av bevis, som også ble benyttet i denne studien. Det blir i den forbindelse viktig å klargjøre hva som er et akseptabelt bevis, og hvilke krav som må være tilfredsstilt for at visuelle bevis også kan betraktes som akseptable bevis i en skolesammenheng.

Noe jeg merket meg, var at elevene var langt mer ukomfortable med moteksempler og bevis ved moteksempler enn hva jeg hadde trodd på forhånd. Flere elever viste manglende forståelse av at ett moteksempel var nok til å motbevise en påstand, noe som er en nødvendig forutsetning for slike bevis (Zaslavsky & Ron, 1998, s. 225). I forbindelse med elevers motstridende matematiske forståelse, fikk jeg erfart at moteksempler både kunne bidra til å skape kognitive konflikter (avgjørende eksempler) og samtidig løse disse kognitive konfliktene (avgjørende brobyggende eksempler). Av den grunnen ser jeg den pedagogiske nytten i mine undervisningstimer av å endre elevenes personlige begreper til konvensjonelle begreper ved å benytte avgjørende brobyggende eksempler (Zazkis & Chernoff, 2008, s. 197).

Det var interessant å se elevenes forståelse og manglende forståelse av visuelle bevis. Flere elever anerkjente ikke slike bevis, noe som må sees i sammenheng med viktigheten av å ha en tydelig didaktisk kontrakt. Andre elever så ikke begrensingene til figurene i sine visuelle bevis, da figurene ved flere anledninger ikke var generelle nok. Det virker derfor viktig å få elevene til forstå figurenes i noen tilfeller manglende gyldighet eller tilstrekkelighet, samtidig som de også kan se generaliteten av en figur. Det siste blir blant annet viktig ved bruk av generiske eksempler, som er noe jeg er nysgjerrig på å prøve ut i mine undervisningstimer. Mason (1996) påpekte nemlig at læreren og elevene kan oppfatte generaliteten av figurer ulikt (s. 67).

Det aksiomatiske bevisskjemaet ble i all hovedsak ikke benyttet av elevene. Jeg har alltid tenkt at deduktive og formelle bevis er vanskelige for mange elever å forstå. Gjennom denne studien fikk jeg innsyn i noen potensielle grunner til elevenes vansker med slike bevis. De to viktigste grunnene syntes å være at elevene enten ikke visste hvordan slike bevis skulle føres, eller at de manglet tilstrekkelige matematiske kunnskaper for å føre deduktive bevis. Det sistnevnte kunne føre til at bevisene isteden ble rituelle. I skolen har en gått vekk fra deduktive bevis (Hanna, 1990), muligens fordi kun de flinkeste elevene forstår slike bevis (Bell, 1976, s. 23). Jeg tror ikke veien å gå i skolen er å utelukke deduktive bevis fullstendig, da dette kan føre til at skolematematikken og forskningsmatematikken kan bli to veldig forskjellige grener av matematikken. Deduktive bevis tror jeg også kan ha sin verdi i mine undervisningstimer, særlig i matematikk R1 og matematikk R2, som er ansett for den mest krevende matematikken i den videregående skolen (Sirnes, 2012). Dette er i så fall avhengig av at elevene har de nevnte forutsetningene på plass for slike bevis.

6. Avsluttende ord

I denne casestudien har jeg tatt for meg hvilken forståelse elever i den videregående skolen har av bevis. Nærmere bestemt har jeg sett på hvilke bevisskjemaer åtte VG2-elever i faget matematikk R1 benyttet når de beviste, hvilke observerbare faktorer som hadde en betydning for disse elevenes forståelse av bevis, og hvilke sammenhenger det fantes mellom R1-elevenes forståelse av bevis og deres valg av bevisskjema. Elevenes bevisskjemaer ble klassifisert etter Harel og Sowder (1998a) sine bevisskjemaer, med det unntaket at bevis ved moteksempel ble knyttet inn som et eget bevisskjema. I den forbindelse ble Zazkis og Chernoff (2008) sine teorier om moteksempler vitale, der avgjørende eksempel og avgjørende brobyggende eksempel stod sentralt.

På bakgrunn av denne studien har jeg observert at R1-elevenes valg av bevisskjema er sammensatt, der mange faktorer har betydning for elevenes forståelse av bevis, som igjen har betydning for elevenes valg av bevisskjema. Studien viste, i likhet med andre studier (Recio

& Godino, 2001, s. 90), ingen sammenheng mellom R1-elevenes valg av bevisskjema og det matematiske temaet for bevisoppgavene. Studien viste derimot at elevene benyttet det visuelle bevisskjemaet oftest, og sjelden de to analytiske bevisskjemaene. Det induktive bevisskjemaet ble så godt som ikke benyttet, noe som trolig hadde en sammenheng med at generalisering ikke var særlig fremtredende i oppgavene.

De viktigste observerte faktorene som hadde en betydning for R1-elevenes forståelse av bevis, var læreplanen, læreboka, lærerens undervisningspraksis og matematiske språkbruk, lærerens og elevenes kunnskaper om bevis, lærerens og elevenes syn på bevis og elevenes forkunnskaper om begreper og logiske sammenhenger som inngår i beviset. Elevenes forståelse av bevis hadde, på ulike måter, igjen betydning for deres valg av bevisskjema.

Ved flere anledninger benyttet elevene flere bevisskjemaer samtidig, og hvilket bevisskjema elevene benyttet, forandret seg i løpet av bevisargumentasjonen. Studien indikerte at det så ut til å være et nært slektskap mellom flere av bevisskjemaene. Ved flere anledninger virket det å være elevenes forståelse, eller manglende forståelse, som avgjorde hvilket bevisskjema elevene benyttet, snarere enn elevenes egne valg av bevisskjema.

Denne studien ga inspirasjon til nye forskningsspørsmål og perspektivisering inn mot matematikklasserommet. Særlig fikk jeg gjennom studien sett behovet for en tydelig didaktisk kontrakt mellom læreren og elevene, hvordan moteksempler kan være et verktøy for å øke forståelsen blant elever, hvordan visuelle bevis kan brukes, og brukes feil, for å skape forståelse, og hvor viktig det er med tilstrekkelig forkunnskaper for å kunne både forstå og konstruere aksiomatiske bevis.

På bakgrunn av denne studien er jeg, i likhet med The National Council of Teachers of Mathematics (Hanna, 2000, s. 10), av den oppfatning at bevis har noe for seg i matematikkundervisningen i R1. Stylianides og Ball (2008) påpekte at elever profiterte på bevis i matematikkundervisningen allerede på barneskolen (s. 309). Elever som tar matematikk R1 har, i motsetning til barneskoleelever, mange forkunnskaper i matematikk, noe som er nødvendig for bevisargumentasjonen. Derfor bør R1-elever ha gode forutsetninger for å skape forståelse i matematikk gjennom bevis. R1-elevene i denne studien viste noen av de utfordringene som bevis fører med seg i undervisningen for elevene. I tillegg viste studien noen av de oppfatningene om bevis som finnes blant elevene.

I denne studien har jeg blant annet forsøkt å legitimere bruken av visuelle bevis i undervisningen, og hvilke utfordringer, begrensninger og syn slike bevis har blant elevene. I lys av dette, er derfor debatten på 1800-tallet mellom Holmboe og Hansteen som dreide seg om skolematematikken skulle preges av logiske deduksjoner eller mer praktiske betraktninger (Christiansen, 2012), like aktuell i dag som for to århundrer siden. Læreren i denne studien påpekte, i likhet med det en del andre lærere har gjort før ham (Dickerson & Doerr, 2014, s. 712), at formelle bevis ikke var veien å gå i undervisningen. Visuelle bevis, som generiske eksempler, mener jeg derfor kan sees på som en krysning mellom deduktive bevis og praktiske betraktninger. Blir bevisene for deduktive, blir de ofte også for matematiske for elevene. Blir bevisene for praktiske, blir de derimot fort for lite matematiske. Til syvende og sist kan det virke som elevene selv må føle et behov for å bevise, hvis bevis skal ha noen nytteverdi i undervisningen. For det er som Hansteen sa det: «Ingen skjøtter om Beviis for at Solen er oppe, naar den skinner ham i Øinene» (Stubhaug, 2009).

Litteraturliste

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. D. Tall (Red.), *Advanced mathematical thinking* (11, s. 215-230). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1

Aubert, K. E. (2011). *Tallteori*. Hentet 5. mai 2015, fra https://snl.no/tallteori

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. D. Pimm (Red.), *Mathematics, Teachers and Children* (s. 216-230). London: Hodder Education.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). The teaching of proof. *arXiv preprint math/0305021.*

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1), 23-40. doi: 10.1007/BF00144356

Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren 21*(4), 36-45.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387. doi: 10.1007/BF01273371

Christiansen, A. (2012). A controversy about geometry textbooks in Norway 1835–36. *Proceedings of the second International Conference on the History of Mathematics Education*, 80-91.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7. Utg). London: Routledge.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers’ perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711-733. doi: 10.1007/s13394-013-0091-6

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 85-109. doi: 10.1023/A:1003660018579

FORSIDEBILDE: And then a miracle occurs. (2010). Hentet 29. mai 2015, fra https://www.flickr.com/photos/jpallan/4633000725

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. Gila, H., & de Villiers, M. (Red.). *Proof and Proving in Mathematics Education* (15, s. 147-167). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_6

Halle, N. H. (2014). *Hawthorneeffekten*. Hentet 8. mai 2015, fra https://snl.no/Hawthorneeffekten

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13. doi: 10.1007/BF01809605

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, 42-49.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International Handbook of Mathematics Education* (4, s. 877-908). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_24

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465

Hanna, G. (2014). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 404-408. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Harel, G., & Sowder, L. (1998a). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. A. Schoenfeld, J. Kaput, & J. Dubinsky (Red.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (7, s. 234-283).

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 396-428. doi: 10.2307/749651

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399. doi: 10.1007/BF01273372

Horgan, J. (1993, oktober). The death of proof. *SCIENTIFIC AMERICAN*, s. 92-103.

Jaffe, A. (1997). Proof and the evolution of mathematics. *Synthese*, *111*(2), 133-146. doi: 10.1023/A:1004903010713

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 291-314. doi: 10.2307/2690647

Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(6), 1109-1129. doi: 10.1007/s10763-010-9235-2

Krantz, S. G. (2011). *The Proof is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof*. New York: Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-0-387-48744-1

Kunnskapsløftet. (2006). *Kompetansemål – matematikk R1*. Hentet 3. mars 2015, fra http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/Matematikk-R1/

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D., & Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. H. Gila, & M. de Villiers (Red.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (15, s. 327-346). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_14

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (18, s. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3_5

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren* (1. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2013). *Sinus Matematikk – R1* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (1. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99. doi: 10.1023/A:1015553100103

Reid, D. A. (2005). The meaning of proof in mathematics education. *WORKING GROUP 4 Argumentation and proof*, 458-468.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sirnes, S. M. (2012). *Matematikk: vgs*. Hentet 30. april 2015, fra https://snl.no/matematikk%2Fvgs

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Sowder, L., & Harel, G. (1998b). Types of Students' Justifications. *Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-75.

Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *3*(2), 251-267. doi: 10.1080/14926150309556563

Stake, R. E. (1995). *The Art Of Case Study Research*. Thousand Oaks: SAGE Publications

Stubhaug, A. (2009). *Christopher Hansteen 1*. Hentet 14. mai 2015, fra https://nbl.snl.no/Christopher_Hansteen_-_1

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321. doi: 10.2307/30034869

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 307-332. doi: 10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 314-352.

Stylianides, A. J., & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 21-36. doi: 10.1080/14794800903569774

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 28-32.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive Development of Proof. G. Hanna, & M. de Villiers (Red.), *Proof and proving in mathematics education* (s. 13-49). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_2

Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R., & Tabach, M. (2009). Should proof be minimal? Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 58-67. doi: 10.1016/j.jmathb.2009.04.002

Venema, G. A. (2012). *Foundations of Geometry* (2. utg.). Boston: Pearson Education.

Yin, R. K. (2014). *Case Study Research*: *Design and Methods.* (5. utg.). Thousand Oaks: SAGE Publications

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understandings of the role of counterexamples. A. Olivier, & K. Newstead (Red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4, s. 225-232). Stellenbosch: The Program Committee of the 22nd PME Conference.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, *68*(3), 195-208. doi: 10.1007/s10649-007-9110-4

VEDLEGG

Vedlegg 1

Thomas Westly Eriksen
Thoning Owesensgate 25, Falkenborg
Studentby, leil. Nr. 17, 7044 Trondheim
93889289, thomeri@stud.ntnu.no

Frode Rønning
Alfred Getz' vei 1
7491 Trondheim
73550256, frode.ronning@math.ntnu.no

Til elever på VG2 ved [redacted]

Anmodning om tillatelse til lydopptak under oppgaveløsning og oppfølgingsspørsmål, samt innsamling av elevbesvarelser/tekster.

Jeg er student på lektorprogrammet i realfag ved NTNU. Dette året skal jeg skrive en master i matematikkdidaktikk. Masterprosjektet handler om hvilken forståelse R1-elever har av bevis i matematikkundervisningen, og hvordan bevis i matematikken kan være med på å utvikle matematikkforståelsen til elevene.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å gjøre lydopptak under elevenes arbeid med oppgavene. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre lydopptak, samt samle inn tekster skrevet av elever som tar matematikk R1 ved [redacted]. Det er snakk om observasjon av en undervisningssekvens på 1-3 skoletimer, samt oppgaveløsing med oppfølgingsspørsmål som vil ta i underkant av en time. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta, og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Observasjonene og besvarelsene vil bli benyttet til å belyse prosjektet og forme prosjektoppgaven, og er nødvendige for at prosjektet skal ha noen verdi. Opptakene vil kun bli hørt av meg og min veileder Frode Rønning ved NTNU. I materialet som skrives, eller på annen måte presenteres for andre, vil de involverte personene bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1/9-15.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å være med på det. Jeg ber dere om å fylle ut svarslippen på neste side, om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å være med på dette prosjektet.
På forhånd takk!

Vennlig hilsen
Thomas Westly Eriksen

Tillatelse

Som del av prosjektet ber jeg om tillatelse til å samtale med deg, gjøre lydopptak der du er med og kopiere/bruke tekster skrevet av deg.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i den ruta som passer:

☐ Jeg gir tillatelse.

☐ Jeg gir ikke tillatelse.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn: …………………..………………… …………………..

Underskrift:

……………………………………………………………………………………...

Vennligst returner svarslippen til meg eller lærer [redacted] så snart som mulig.

Vedlegg 2

Oppgaver – skalarprodukt

1) Kari påstår at for vektorene $\vec{a}, \vec{b}\ og\ \vec{c}$ så gjelder følgende:
Når $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ så må også $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$.
Forklar hvorfor eller hvorfor ikke dette stemmer.

2) Gitt følgende: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$ Hvordan kan dette gå an?

3) Gitt følgende: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Hva er sammenhengen mellom $\vec{b}$ og $\vec{c}$?

Vedlegg 3

<u>Oppgaver – derivasjon og kontinuitet</u>

1) Forklar om de to følgende påstandene er sanne.

a) $f(x) = g(x)\ for\ alle\ x \Longrightarrow f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x$

b) $f'(x) = g'(x)\ for\ alle\ x \Longrightarrow f(x) = g(x)\ for\ alle\ x$

2) Er de to følgende funksjonene deriverbare for x=2? Forklar!

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

Vedlegg 4

Intervjuguide - lærer

1. Hva er et matematisk bevis?

2. Hva er ditt forhold til matematiske bevis?

3. Hva er elevenes forhold til bevis?

4. Hvilken rolle synes du matematiske bevis har i utviklingen av forståelse i matematikk?

5. Hvilket utbytte synes du elever kan ha av bevis?

6. I hvilken grad preger bevis dine undervisningstimer?

7. Hvilke områder av din matematikkundervisning inneholder mest bevis?

8. Hvilke krav har dere for bevis i undervisningen?