NTNU
Det skapende universitet

Elevers begrunnelsesmåter i sannsynlighet

En kvalitativ studie av 1T- og 1P-elevers begrunnelsesmåter i sannsynlighet

Susanne Mehus

Master i realfag
Innlevert: mai 2015
Hovedveileder: Frode Rønning, MATH

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på min lektorutdanning i realfag ved NTNU. Arbeidet med masteroppgaven har vært spennende, lærerikt og givende. Jeg føler dette er en verdig avslutning på fem fantastiske år i Trondheim og på LUR.

Først vil jeg takke veilederen min Frode Rønning min for gode og viktige tilbakemeldinger underveis i arbeidet. Dine kommentarer har gjort oppgaven min mye bedre.

En takk må også familien min få for at dere alltid støtter meg. Ekstra takk til min søster Martine for at du har holdt ut å bo med en småstresset masterstudent.

De fem årene på LUR hadde ikke blitt de samme uten fantastiske og engasjerte medstudenter. En takk går til gjengen på lesesalen i Matteland, og lunsjgjengen for gode lunsjpauser. En spesiell takk går til Ingrid, Thomas og Rune som har vært gode medstudenter under masterarbeidet, og som jeg har kunnet diskutere både små og store problemer med under masterarbeidet. Jeg vil også takke Madeleine for tilbakemeldinger på det engelske sammendraget.

Sist, men ikke minst må de to lærerene og klassene som deltok i studien takkes. Uten dere hadde ikke denne masteroppgaven blitt til!

Trondheim, 31. mai 2015

Susanne Mehus

Sammendrag

Denne masteroppgaven forsøker å bidra til å kartlegge elevers begrunnelsesmåter i sannsynlighet ved å besvare denne problemstillingen: *Hvilke begrunnelser bruker 1T- og 1P-elever i diagnostiske oppgaver i sannsynlighet?* [1] Studien har et sosialkonstruktivistisk perspektiv på læring og tar i bruk tidligere forskningsresultater om forståelse, misoppfatninger og begrunnelser i sannsynlighetsregning.

Studien er en kvalitativ kasusstudie med fleksibelt design og ble gjennomført med et utvalg av 15 elever fra 1T og 1P på en videregående skole i Nordland. Det ble brukt to former for datainnsamling. Disse var elevbesvarelser på et sett med skriftlige oppgaver og observasjoner av en elevgruppe fra 1T og en elevgruppe fra 1P som diskuterte et annet sett med oppgaver. Observasjonene ble dokumentert ved hjelp av lydopptak. Oppgavene som blir brukt i studien er hentet fra tidligere forskningsstudier. Tidligere har mange av oppgavene blitt brukt som diagnostiske oppgaver i sannsynlighet. I denne studien blir oppgavene derimot brukt til å kartlegge hvilke begrunnelsesmåter elevene bruker i møte med disse oppgavene

Datamaterialet ble analysert ved hjelp av den konstant komparative analysemetoden. Analysen viste at elevene brukte tre forskjellige former for begrunnelser. Disse var matematiske begrunnelser, følelsesmessige begrunnelser og begrunnelser som refererer til konkreter. Flere av begrunnelsene elevene brukte førte til at de ikke fikk korrekt svar på oppgavene. Det var også eksempler på at selv om begrunnelsene ikke var matematiske korrekte fikk elevene korrekt svar på oppgavene. Det kan altså være vanskelig å avgjøre hvilken forståelse elever har i sannsynlighetsregning uten å se på begrunnelsene og resonnementene elevene bruker. I så måte blir denne studien et viktig bidrag til å få et sammenhengende rammeverk av begrunnelser som elever tar i bruk i sannsynlighet.

[1] 1T og 1P er to matematikkurs som tilbys på VG1 for studieforberedende utdanningsprogram. 1T er mer teoretisk orientert og 1P er mer praktisk orientert.

Summary

This master thesis attempts to identify how students reason when dealing with probability by answering the following research question: *What reasoning does 1P and 1T students use in diagnostic probability exercises?* [2] The study has a social constructivist perspective on learning and makes use of previous research findings about understanding, misconceptions and justifications in probability.

The study is a qualitative case study with flexible design and was conducted on a sample of 15 students from 1T and 1P at a high school in Nordland. Two forms of data collection were applied. These were the students answers to written exercises and observations of 1T and 1P student groups discussing a different set of tasks. The observations were documented using audio recording. The exercises used in the study were taken from previous research studies. In these studies, many of the exercises were used as diagnostic probability exercises. In this study however, the exercises are used to identify how the students reason when faced with these exercises.

The data was analyzed using the constant comparative method. The analysis found that the students used three different types of reasoning. These were mathematical reasoning, emotional reasoning and reasoning that refers to concretes. Several of the students' reasoning led to wrong answers. There were also examples that although the mathematical reasoning was incorrect, the answers where correct. Therefore it can be difficult to determine if the students understand probability theory without looking at the students' reasoning and justification. Thus, this study is an important contribution to a coherent framework of reasoning students adopt in probability.

[2] 1T and 1P are two different mathematic courses offered in Norwegian high school. 1T is more theoretical and 1P is more practically oriented.

Innhold

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn

Opp gjennom skole- og studietiden min har jeg opplevd sannsynlighet som et spennende og interessant fagfelt i matematikken. Men jeg har følt at sannsynlighet er spesielt vanskelig å få "taket på", både for meg og andre. At sannsynlighet er utfordrene og komplekst for elever samsvarer godt med internasjonal forskning. Det har blant annet blitt beskrevet svært mange ulike misoppfatninger (se for eksempel Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein & Schnarch, 1997; Jones & Thornton, 2005; Konold, 1989; Tversky & Kahneman, 1974). Det jeg savner fra tidligere forskning er en beskrivelse av tenkemåtene og begrunnelsene elevene bruker. Mange av de tidligere studiene har klassifisert svarene elevene gir som enten korrekte eller som misoppfatninger, og gir lite innblikk i begrunnelsene og resonnementene elevene bruker. Rubel (2007) skriver at dette impliserer at man har behov for å inkludere elevenes begrunnelser i fremtidige studier. I min studie blir derfor begrunnelsene elevene bruker viktige, og det er også disse jeg er ute etter å finne.

Borovcnik og Peard (1996) skiller mellom tre forskjellige tenkemåter, som er logisk tenkning, årsakstenkning og sannsynlighetstenkning. De mener at en uheldig blanding av disse tenkemåtene kan gjøre at elevene får problemer med sannsynlighet. En annen grunn til at sannsynlighet er komplekst er at det finnes flere ulike tilnærminger til sannsynlighetsbegrepet. Tre av disse er den klassiske tilnærmingen, den frekventistiske tilnærmingen og den subjektivistiske tilnærmingen (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991). De forskjellige tilnærmingene kan gjøre at det er vanskelig for elevene å se sammenhenger og de kan blir usikre på når det er hensiktsmessig å bruke de ulike tilnærmingene.

Gal (2005) skriver at det finnes to argumenter for å undervise sannsynlighet i skolen. Det første argumentet er at sannsynlighet er nyttig i seg selv. Det andre argumentet er at undervisning i sannsynlighet er en viktig del av det å forberede elevene på livet, siden tilfeldighet og sannsynlighet gjennomsyrer livene og omgivelsene våre. Jeg mener derfor at sannsynlighet er viktig i norsk skole, og at det er viktig å styrke elevers kompetanse i sannsynlighet. Sannsynlighet har også fått en økende plass i nyere læreplaner i matematikk. Det er heller ikke forsket så mye på sannsynlighet i skolen. Når i tillegg sannsynlighet er vanskelig for elevene, mener jeg det derfor er viktig å undersøke elevenes begrunnelser i sannsynlighet, slik at man forbedre undervisningen i sannsynlighet og dermed styrke forståelsen til elevene.

1.2 Problemstilling

Denne masteroppgaven har som mål å bidra til vår forståelse av elevers begrunnelser i sannsynlighet ved å svare på denne problemstillingen:

> *Hvilke begrunnelser bruker 1T- og 1P-elever i diagnostiske oppgaver i sannsynlighet?*

Begrepet begrunnelser vil jeg i denne oppgaven tolke som løsningsstrategier og resonnement elevene bruker når de skal komme fram til svaret på en oppgavene. Jeg har valgt å bruke begrepet diagnostiske oppgaver i problemstillingen siden oppgavene som ble brukt til å undersøke begrunnelsene kan kalles diagnostiske oppgaver. Brekke (2002) sier den ene grunnen til å bruke diagnostiske oppgaver er å identifisere og fremheve misoppfatninger som elevene har utviklet (s. 16). Det er denne definisjonen jeg vil bruke på diagnostiske oppgaver. Jeg definerer altså diagnostiske oppgaver som oppgaver som har som mål å avdekke misoppfatninger i et bestemt tema. Man kan ikke ta det som en selvfølge at begrunnelsene elevene bruker i diagnostiske oppgaver, vil være de samme begrunnelsene som elevene ville brukt i andre sannsynlighetsoppgaver. Det er derfor viktig å presisere at begrunnelsene som ble funnet i denne studien kanskje ikke brukes i andre typer oppgaver. Det er også viktig at jeg avgrenser hva jeg mener med sannsynlighet. Her vil jeg bruke samme definisjon som Utdanningsdirektoratet gir i læreplanen i matematikk: ”I sannsynsrekning talfester ein kor stor sjanse det er for at ei hending skal skje” (Utdanningsdirektoratet, 2013).

I tillegg til problemstillingen jeg har presentert ovenfor vil masteroppgave også søke svaret på dette underspørsmålet:

Er det forskjell i begrunnelsene 1T- og 1P-elevene bruker?

Jeg synes dette underspørsmålet er interessant for det kan si mye om de to elevgruppene som tar 1T og 1P. Elevene som har deltatt i studien har ikke fått opplæring i sannsynlighet på videregående, så man kan bare anta at de har den kompetansen som de skal ha etter 10. trinn på grunnskolen. Siden alle elevene fra grunnskolen skal ha samme kompetanse burde begrunnelsene elevene bruker være de samme, men siden man kan tenke seg at elevgruppene som velger 1T og 1P er ulike, kan det også hende at begrunnelsesmåtene elevene bruker er forskjellige.

1.3 Oppgavens oppbygging

I det neste kapittelet, kapittel 2 vil jeg presentere teori som er relevant for studien. Jeg vil først beskrive sosialkonstruktivismen, som er læringsperspektivet jeg baserer studien på. Etter dette vil jeg komme inn på hvorfor sannsynlighetsregning kan være vanskelig for elever, hvilke tenkemåter elever kan ta i bruk i sannsynlighetsregning, ulike tilnærminger til sannsynlighetsbegreper og noen misoppfatninger som har blitt beskrevet tidligere.

Oppgavene jeg har brukt i studien vil bli presentert og begrunnet i kapittel 3. Her vil jeg presentere alle de ulike oppgavene og hvilke løsningsstrategier man kan ta i bruk for å løse dem. Jeg vil også komme inn på hva tidligere studier har funnet ut om begrunnelsene elevene bruker i de forskjellige oppgavene.

I kapittel 4 vil jeg beskrive metodene som har blitt tatt i bruk. Jeg vil gi en fyldig beskrivelse av hvordan datainnsamlingen ble gjennomført. Jeg vil også presentere hvordan datamaterialet ble analysert. Til slutt vil jeg komme med mine etiske betrakninger og presentere kriterier for kvaliteten til studien.

De ulike kategoriene som ble funnet i datamaterialet vil bli lagt fram i kapittel 5. Jeg vil gå inn på de tre hovedkategoriene for elevbegrunnelser jeg fant, men hovedsakelig beskrive underkategoriene og komme med eksempler på elevbegrunnelser som jeg har plassert i de forskjellige kategoriene.

I kapittel 6 vil de tre hovedkategoriene bli diskutert. Jeg vil komme med forslag på hvorfor begrunnelsene blir brukt og hvordan man kan bidra til at elevene bruker bedre begrunnelser. Jeg vil også svare på problemstillingen og underspørsmålet. Til slutt i kapittelet vil jeg diskutere studiens kvalitet.

I det siste kapittelet, kapittel 7, vil jeg komme med en konklusjon og gi forslag på hva jeg mener kan være interessant og nyttig å forske på videre.

Kapittel 2

Teori

2.1 Sosialkonstruktivisme

Studien bygger på et sosialkonstruktivistisk læringssyn. Jeg mener dette læringssynet passer min studie godt siden jeg bruker diagnostiske oppgaver, som er lagd i den konstruktivistiske tradisjonen. Siden det sosiale samspillet til elevene under observasjonen var viktig, mener jeg at sosialkonstruktivisme er hensiktsmessig. Jeg vil nå gjennomgå noen viktige prinsipper i sosialkonstruktivsmen. Jeg vil først beskrive konstruktivisme generelt, før jeg mer spesifikt beskriver sosialkonstruktivismen.

Konstruktivisme er et filosofisk perspektiv på kunnskap og læring. Mye av dagens konstruktivisme har opphav i Jean Piagets arbeid om genetisk epistemologi og hans begreper som for eksempel kognitive skjema, assimilasjon og akkomodasjon. Ernst von Glasersfeld (som sitert i Jaworski, 1994, s. 16) kommer med disse to grunnprinsippene i konstruktivismen:

> 1. knowledge is not passively received but actively built up by the cognising subject;
>
> 2. the function of cognition is adaptive and serves the organisation of the experiential world, not the discovery of ontological reality.

Å kun akseptere det første prinsippet kaller von Glasersfeld for triviell konstruktivisme. Hvis man aksepterer begge prinsippene har man radikal konstruktivisme. Grunnprinsippet i konstruktivismen blir dermed at man ikke mottar kunnskap passivt, men at individet konstruerer kunnskapen. Det andre prinsippet, som gjelder i radikal konstruktivismen (men også i sosialkonstruktivismen som vi skal se senere), går ut på at man lærer ved hjelp av adaptasjon. Det vil si at ny kunnskap blir tilpasset tidligere erfaringer man har. Et viktig poeng som von Glasersfeld også beskriver i det andre prinsippet er at man ikke oppdager en objektiv sannhet, men at man konstruerer kunnskapen sin på bakgrunn av erfaringer man har fra omverdenen. Konstruktivisme skiller seg i så måte fra et positivistisk verdenssyn, hvor man mener at kunnskap er en objektiv sannhet, som man kan avdekke. Kunnskap er altså ikke noe som finnes i seg selv, men den ligger i hodet til individene. Det er dette som skiller konstruktivismen fra det sosiokulturelle læringssynet, hvor de mener at konteksten er selve bæreren av kunnskapen, og individet bare er en deltaker i kunnskapskulturen: "Consequently, whereas constructivists analyze thought in terms of conceptual processes located in the individual, sociocultural theorists take the individual-in-social-action as their unit of analysis." (Cobb, 1994, s. 14).

Siden kunnskapen ligger i individene skriver Jaworski (1994) at man må passe seg for at konstruktivisme ikke blir en solipsistisk teori, som er en teori hvor man mener at det eneste som eksisterer er jeg'et. Jaworski sier man sikrer seg dette ved at erfaringene som man bygger kunnskapen på kommer fra sosial interaksjon med andre. Konstruktivisme avviser heller ikke en objektiv virkelighet, men konstruktivister mener man ikke kan ha kunnskap om hva virkeligheten *egentlig* er, siden alt vi kan vite er det som vi selv har konstruert.

Den sosiale interaksjonen blir en viktigere del i sosialkonstruktivismen enn den er i den radikale konstruktivismen. Taylor og Campbell-Williams (som sitert i Jaworski, 1994, s. 24) legger til et tredje prinsipp til von Glaserfelds sine to prinsipper, og som dermed blir et prinsipp i sosialkonstruktivismen: "The third principle derives from the sociology of knowledge, and acknowledges that reality is constructed intersubjectively, that is it is socially negotiated between significant others who are able to share meanings and social perspectives of a common *lifeworld*." I sosialkonstruktivismen blir altså den sosiale konteksten og samhandling med andre viktig. Jaworski (1994, s.25) skriver at gjennom språket og sosial handling kan individets kunnskap bli utfordret og ny kunnskap bli konstruert.

Ernest (2011) skriver at sosialkonstruktivismen ser på individet og det sosiale miljøet som uløselig sammenvevd (s. 69). Subjektet blir formet gjennom samhandling med andre, men også gjennom individuelle prosesser. Videre sier Ernest at det er en generell syklus i hvordan matematikk skapes, overføres og reproduseres. Dette sier han:

> Public mathematical knowledge is transmitted in the form of (accepted)

> texts, which are transformed for educational purpose. Private mathematical knowledge consists in individuals' capacities which are themselves transformed through education. The negotiations through which both public and private mathematical knowledge are transformed are conversational (Ernest, 2011, s. 69-70)

Sosialkonstruktivister mener altså at språket og samtaler spiller en stor rolle i matematikken. De mener man at elever lærer matematikk, det vil si at de får en personlig kunnskap om matematikk, gjennom deltakelse i sosiale kontekster og samtaler. Ernest (2011, s.70-71) skriver at i konstruktivismen generelt blir det i undervisningen viktig å ta hensyn til elevenes tidligere erfaringer, bruke flere representasjoner av de matematiske begrepene og bruke diagnostisk undervisningen som har som mål å skape kognitive konflikter. I sosialkonstruktivismen blir alt dette tatt med, men i tilegg må man ha en undervisningen hvor dialog og bevissthet om sosiale kontekster og prosesser blir viktig.

2.2 Sannsynlighet i skolen

Sannsynlighet er et relativt nytt fagfelt i norsk skole. I læreplanen i matematikk fellesfag, som omhandler matematikkfaget i grunnskolen og VG1, er det et eget hovedområde som heter Statistikk, sannsyn og kombinatorikk. Her er sannsynlighetsregning definert som "I sannsynsrekning talfester ein kor stor sjanse der er for at ei hending skal skje" (Utdanningsdirektoratet, 2013). Kombinatorikk blir definert som systematiske måter å telle opp mulige utfall for å kunne beregne sannsynligheten. Elevene som har deltatt i denne studien var fra VG1, men siden de ikke vært gjennom sannsynlighetsdelen på VG1 enda da undersøkelsen ble gjennomført, kan man bare anta at elevene hadde kompetanse tilsvarende læreplanen i matematikk på 8.-10. trinn. Relevante kompetansemål i læreplanen etter 10. årstrinn er:

- Finne og diskutere sannsyn gjennom eksperimentering, simulering og berekning i daglegdagse samanhengar og spel
- Beskrive utfallsrom og uttrykkje sannsyn som brøk, prosent og desimaltal
- drøfte og løyse enkle kombinatoriske problem

(Utdanningsdirektoratet, 2013)

2.3 Stokastiske og deterministiske forsøk

I sannsynlighet snakker man om stokastiske forsøk. Et stokastisk forsøk er et forsøk man ikke kan forutsi resultatene fra. Et stokastisk forsøk er for eksempel et kast med en mynt, du vet på forhånd at du enten vil få mynt eller kron, men hva du får kan du ikke avgjøre før du har kastet mynten. Det eneste du på forhånd kan si er at sannsynligheten er 0,5 for at du får mynt og 0,5 for at du får kron.

Et deterministisk forsøk skiller seg på denne måten fra et stokastisk forsøk. I et deterministisk forsøk vet du resultatet på forhånd. Et deterministisk forsøk vil for eksempel være at du kaster en ball. Da kan du på forhånd regne ut hastigheten, akselerasjonen og hvor lenge ballen er i luften ved hjelp av lover i fysikk.

Dette skillet mellom stokastiske og deterministiske forsøk og modeller kan være vanskelig for elevene.

2.4 Tenkemåter

Som sagt så kan sannsynlighet kan være vanskelig og komplekst for elever. En grunn til at sannsynlighet kan være vanskelig er at det bygger på en ny tenkemåte for elevene. Borovcnik og Peard (1996) skiller mellom tre forskjellige tenkemåter; *logisk tenkning* (logical thinking), *sannsynlighetstenkning* (probabilistic reasoning) og *årsakstenkning* (causal thinking). Logisk tenkning dominerer måten vi tenker på i vitenskap. Logiske utsagn er enten sanne eller usanne, og for å sjekke om et utsagn er korrekt må man forenkle utsagnet ved hjelp av regler i logikken. ”Tenkemåten er ofte preget av *fordi* det og det, *derfor* det og det"(Birkeland, Breiteig & Venheim, 2012, s. 200).

Sannsynlighetstenkning er derimot basert på mer komplekse utsagn. Utsagnet "hendelsen E inntrefferer sant eller usant kun etter man har gjennomført forsøket. Før dette snakker man om sannsynligheten til E. Vi kan ikke begrunne utfallet, om hendelse E inntreffer er tilfeldig, og man leter ikke etter en årsak til om hendelsen inntreffer eller ikke. Sannsynlighetstenkning er tenkemåten som blir brukt i stokastiske forsøk.

Å lete etter en årsak karakteriserer årsakstenkning. I fysikk vil man lete etter flest mulige faktorer som påvirker farten til en kule som faller i et gravitasjonsfelt, og så lenge man har alle faktorene kan man kunne finne farten til kulen på et hvilket som helst tidspunkt.

Birkeland et al. (2012) og Borovcnik og Peard (1996) sier at det er et hierarki i hvilken tenkemåte som brukes. Når elever skal forklare et resultat som har med sannsynlighet og usikkerhet å gjøre vil de først bruke logisk tenkning. Etter dette er det vanlig å bruke årsakstenkning før man til slutt aksepterer "at det bare er slik"og har en sannsynlighetstenkning.

En annen grunn til at elever kan ha problemer med sannsynlighet er at ”prøve og feile”-metoden ikke kan brukes. Prøve og feile er en grunnleggende form for læring som vi bruker helt fra vi er små (Borovcnik & Peard, 1996, s. 244). Dersom man skal avgjøre sannsynligheten for å få et partall når man kaster en terning kan man på forhånd si at dette er 0,5 på grunn av symmetrien til terningen. Dersom man etterpå kaster et oddetall, kan man ikke avgjøre om estimatet ditt på 0,5 er korrekt ut fra dette ene kastet. Prøve og feile metoden kan altså ikke brukes i sannsynlighet.

En tredje grunn til at sannsynlighet kan være vanskelig er at det i sannsynlighetsregning er mange paradokser. Med paradokser menes her eksempler og resultater som ikke stemmer med intuisjonen vår. Borovcnik og Peard (1996, s. 245) skriver at, i for eksempel telling møter man ikke et paradoks før man er på et høyt nivå av abstraksjon. I sannsynlighet vil man derimot møte paradokser tidlig. Intuisjonen sier for eksempel at det ikke er lurt å kjøpe lodd nummer 1 i en loddbok, men sannsynlighet sier at det er like bra som å kjøpe lodd nummer 57.

2.5 Tilnærminger til sannsynlighetsbegrepet

Borovcnik et al. (1991) skriver at det moderne synet på sannsynlighet er at begrepet har en mangesidig karakter. De skriver at det finnes fire hovedtilnærminger til sannsynlighet, klassisk (classical), frekventistisk (frequentist), subjektivistisk (subjectivist) og strukturell (structural). Disse vil jeg presentere nå.

Det klassiske synet kommer fra Pierre Simon Laplace sin definisjon av sannsynlighet. I den klassiske tilnærmingen antar man at alle utfallene er like sannsynlige og at sannsynligheten for en hendelse er antall gunstige utfall delt på antall mulige utfall. Dette kan matematisk skrives slik: $P(A) = \frac{N_A}{N}$, hvor N er antall utfall som er gjensidig utelukkende og like sannsynlige, og N_A er antall utfall som resulterer i hendelsen A. Den klassiske tilnærmingen til sannsynlighet gjør at man kan beregne sannsynligheten før man har gjort forsøket. Det er to svakheter ved denne tilnærmingen. Den første er at utfallsrommet må være endelig. Den andre er at man på forhånd må finne ut om utfallene er like sannsynlige. Dette kan man for eksempel finne ut ved hjelp av symmetri, men som Borovcnik et al. (1991) skriver så er et filosofisk problem med dette at det samme fysiske eksperimentet, som brukes for å finne symmetriene, kan føre til mange forskjellige symmetrier.

I en frekventistisk tilnærming vil man finne sannsynlighet til en hendelse ut fra den observerte relative frekvensen av hendelsen i gjentatte forsøk. Matematisk kan sannsynlighet i den frekventistiske tilnærmingen skrives slik: $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$., hvor n_A er antall forekomster av A i n. I motsetning til den klassiske tilnærmingen vil man i den frekventistiske tilnærmingen finne sannsynligheten først etter at forsøket er gjennomført. Sannsynligheten vil ikke bli helt eksakt, men blir estimert. Store talls lov sier at sannsynligheten til et forsøk vil nærme seg den teoretiske sannsynligheten for jo flere forsøk man gjør. Jo flere forsøk man gjør, jo mer nøyaktig vil sannsynligheten bli. Batanero, Henry og Parzysz (2005) skriver at fra et praktisk ståsted vil ikke den frekventistiske tilnærmingen gi sannsynligheten for et utfall, siden det ikke er mulig å gjøre uendelig antall forsøk. Det blir derfor vanskelig å avgjøre hvor mange forsøk man må gjøre før man har et godt nok resultat for sannsynligheten. Man kan heller ikke avgjøre sannsynligheten til et utfall som bare skjer én gang, noe man ofte ønsker å gjøre. Den største kritikken til tilnærmingen skriver de likevel er at det er vanskelig å godta at man har et abstrakt matematisk objekt, som er sannsynligheten, men en frekvens som er funnet eksperimentelt.

Batanero et al. (2005) skriver at den subjektivistiske tilnærmingen handler om at man beskriver sannsynlighet ut fra grad av personlig tro, som er basert på personlig dømmekraft og informasjon fra lignende forsøk. I den subjektivistiske tilnærmingen trenger ikke noe som er tilfeldig for deg nødvendigvis være tilfeldig for meg. For en subjektivist er det to kategorier av informasjon, tidligere informasjon som er uavhengig av empiriske data, og empiriske data fra frekvenser fra gjentatte forsøk. Borovcnik et al. (1991) skriver at den største ulempen med den subjektivistiske tilnærmingen er at den ikke gir noen retningslinjer om hvordan man skal beregne sannsynlighet. En subjektivist vil se på sannsynlighet som en mental konstruksjon, som han kan endre senere dersom det blir ny informasjon tilgjengelig. Dette vil likevel ikke være et problem siden sannsynlighet ikke blir sett på som iboende i objektet, men i subjektet. Dette er forskjellig fra det klassiske og frekventistiske synet, disse tilnærmingene har et objektivistisk syn på sannsynlighet, og mener derfor at det er objektene som avgjør sannsynligheten. Borovcnik og Kapadia (2014) skriver at man kan kritisere den subjektivistiske tilnærmingen for å blande følelser og fakta. Likevel blir tilnærmingen brukt når man ikke har kunnskap om tidligere forsøk eller symmetrier i fordeling, og dermed ikke kan bruke den frekventistiske eller klassiske tilnærmingen. En fordel med den subjektivistisk tilnærmingen er altså at man kan finne sannsynligheten for en hendelse som bare skjer en gang. Et eksempel på dette er å finne sannsynligheten for at den sittende amerikanske presidenten blir gjenvalgt. Siden den sittende presidenten aldri har blitt gjenvalgt tidligere må man ta utgangspunkt i lignende problemer og komme fram til en sannsynligheten på den måten. Dette er løsningsstrategien som ofte blir brukt av media.

Den siste tilnærmingen som Borovcnik et al. (1991) beskriver er den strukturelle. I denne tilnærmingen mener man at formell sannsynlighet er definert ved hjelp av aksiomer og definisjoner, og teoremer som bygger på disse aksiomene. Sannsynligheter blir beregnet ved hjelp av formler og sannsynligheter man tidligere har funnet. Man er ikke interessert i å evaluere sannsynligheten empirisk. Den strukturelle tilnærmingen tar ikke standpunkt til hva som ligger i begrepet sannsynlighet, og blir dermed en teoretisk forståelse som kan brukes i alle de tre tilnærmingene.

2.6 Intuisjon

Fischbein (1975) skriver at undervisning i sannsynlighet burde ta hensyn til intuisjonene til elevene, og at undervisningen må konsentrere seg om å la elevene forbedre intuisjonene og finne metoder for å bygge nye intuisjoner som stemmer med de tidligere intuisjonene. Intuisjoner blir beskrevet som dette: ”They are cognitive acquisitions which intervene directly in practical or mental action, by virtue of their characteristic immediacy, globality, extrapolative capacity, structurality, and self-evidentness.” (Fischbein, 1975, s. 117). En intusjon er altså en ”kognisjon” som kommer direkte og at man føler at ikke noen annen begrunnelse er nødvendig. En typisk intuisjon i matematikk er at elever ser at den korteste avstanden mellom to punkter er en rett linje. Dette er et eksempel på en primær intuisjon. Fischbein skiller mellom primær intuisjon og sekundær intuisjon. Primær intuisjon kommer fra erfaringer og dem har man før undervisningen. Sekundære intuisjoner kommer fra undervisning. Et typisk eksempel på en sekundær intuisjon er at elever tenker at når man multipliserer to tall blir produktet større, men dette viser seg å være feil når man lærer seg å multiplisere med desimaltall. Intuisjoner kan altså føre til misoppfatninger.

2.7 Oppfatninger

Det har blitt skrevet mye om menneskers oppfatninger og misoppfatninger i sannsynlighet. I det videre vil jeg presentere noen av oppfatningene som er relevante for oppgavene som har blitt brukt i studien.

2.7.1 Representativitet

Amos Tversky og Daniel Kahneman har beskrevet mange heuristikker, eller løsningsstrategier som mennesker bruker i sannsynlighet. Løsningsstragiene kan føre til feil svar på oppgaver. Jeg vil i denne delen beskrive noen av disse heuristikkene. En av heuristikkene er *representativitet* (representativeness). Tversky og Kahneman (1974, s. 1124) sier at representativitet vil vises på spørsmål som, ”Hva er sannsynligheten for at A ligger i B?” De skriver at når mennesker svarer på slike spørsmål vil de typisk stole på heuristisk representativitet, det vil si at sannsynligheten blir vurdert ut fra hvor stor grad A er representert i B eller i hvor stor grad A ligner på B. Et eksempel som Tversky og Kahneman gir på et slik spørsmål er dette: ”Steve is very shy and withdrawn, invariably helpful, but with little interest in people, or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has need for order and structure, and a passion for detail” (Tversky & Kahneman, 1974, s.1124). Spørsmålet som man skal svare på er hvor sannsynlig det er at Steve har noen oppramsede yrker, for eksempel pilot, bonde, bibliotekar og selger. Tversky og Kahneman sier at mennesker i slike spørsmål vil avgjøre sannsynligheten ut fra hvor godt beskrivelsen av Steve passer inn med typiske stereotyper for de forskjellige yrkene, og ikke sannsynligheten for at en tilfeldig person har et av de gitte yrkene.

En underkategori til representativtitet er ufølsomhet til utvalgsstørrelse (insensitivity to sample size). Tversky og Kahneman (1974) skriver at forsøk har vist at personer ikke tar hensyn til utvalgsstørrelsen når de vurderer sannsynlighet. Mange vil for eksempel tro at det er like sannsynlig at seks av ti nyfødte barn er gutter som at 600 av 1000 nyfødte er gutter. Store talls lov sier derimot at dersom antall observasjoner øker vil sannsynligheten for å bevege seg mot den teoretiske sannsynligheten øke. Derfor vil sannsynligheten for at 600 av 1000 nyfødte er gutter være mindre enn seks av ti siden det er større antall observasjoner.

En annen kategori jeg vil gå inn på er misforståelse av begrepet tilfeldighet (misconceptions of chance). Tversky og Kahneman (1974, s. 1125) sier at mennesker forventer at de grunnleggende egenskapene til en prosess vil bli representert, ikke bare i det globale utvalget, men også lokalt. Dette er hva de kaller misforståelse av begrepet tilfeldighet. Elever som resonnerer ved hjelp av denne heuristikken vil tro at sannsynligheten for å kaste MKMKMK (mynt, krone, mynt, krone, mynt, krone) er større enn MMMMMM (seks mynt) siden det bedre representerer utfallene man kan få. En annen vanlig misoppfatning i denne kategorien er gamblerens mistak (gambler's fallacy). Her vil man tro at dersom man har fått veldig mange mynt på rad vil det være større sannsynlighet for at neste kast blir krone. Man tror altså at skjevheten i utvalget vil kompenseres for i neste runde. Dette er feil, for kast med en mynt er uavhengige hendelser.

En tredje kategori er tilgjengelighet (availability). Tilgjengelighet går ut på at personer vurderer frekvensen eller sannsynligheten til en hendelse ut fra hvor lett det er å komme på en slik hendelse (Tversky & Kahneman, 1974, s. 1127). En oppgave som vil avsløre tilgjenglighet er å spørre personer om det er mest sannsynlig at et engelsk ord på minst tre bokstaver begynner på r, eller har r som tredje bokstav. Det korrekte svaret på dette spørsmålet vil være at det er størst sannsynlighet for et ord med r som tredje bokstav, men siden det er lettere å komme på ord som begynner på r vil mange mennesker si at det er størst sannsynlighet for et ord som begynner på r.

2.7.2 Lik sannsynlighetsfeil

Lecoutre (1992) kom fram til at det er vanlig at elever sier at utfall er like sannsynlige, selv om de ikke er det. Denne oppfatningen kalte Lecoutre lik sannsynlighetsfeil (equiprobability bias). Det typiske svaret til noen som har oppfatningen lik sannsynlighetsfeil er at utfallene er like sannsynlige for det handler bare om sjanse og tilfeldighet. Watson (2005) skriver at det er funnet tendenser til at noen elever bruker begrepet "50-50" som i betydning av at alt kan skje i stedet for å identifisere to utfall som like sannsynlige. Noen elever kan for eksempel bruke "50-50" som en beskrivelse for å kaste seks med en vanlig terning.

2.7.3 Løsningstilnærming

Løsningstilnærming (outcome approach) er en oppfatning som Clifford Konold introduserte. Dette er en tenkemåte han mener noen elever bruker i stedet for representativitet. For elever som resonnerer ved hjelp av løsningstilnærming, vil de konsentrere seg om utfallet av en hendelse, og ikke se hele utfallsrommet under ett. Når de jobber med usikkerhet har de som mål å avgjøre hva det neste utfallet blir, i form av et ja-nei svar (Konold kaller dette yes-no decision). Svarene de gir kommer ofte fra en analyse av årsakene til utfallene, altså årsakstenkning (Konold, 1989). Løsningstilnærming får konsekvenser for hvordan elever svarer på oppgaver. En oppgave som kan fange opp løsningstilnærming er denne:

> Meteorologisk institutt vil anslå sikkerheten i værmeldingene sine. De så gjennom registeret og fant de dagene hvor de hadde meldt om 70 % sjanse for regn. De sammenlignet disse værmeldingene med om det virkelig regnet de dagene. Når mener du værmeldingene som meldte om 70 % for regn var nøyaktige?
>
> a) Når det regnet 95 % - 100 % av dagene.
>
> b) Når det regnet 85 % - 94 % av dagene.
>
> c) Når det regnet 75 % - 84 % av dagene.
>
> d) Når det regnet 65 % - 74 % av dagene.
>
> e) Når det regnet 55 % - 64 % av dagene.

(Konold, 1995, min oversettelse)

Dersom elevene har en løsningstilnærming vil de her svare alternativ a), de mener at en værmelding er korrekt dersom det regner når man har meldt regn. Korrekt svar vil i denne oppgaven derimot være alternativ d) siden dette alternativet inneholder 70 %.

2.7.4 Falkfenomenet

Falkfenomenet, som blir kalt The Falk Phenomenon eller fallacy of the time axis i forskningslitteraturen, er en oppfatning som Ruma Falk beskrev. Den typiske oppgaven som avdekker falkfenomenet er denne:

> En boks inneholder to hvite og to svarte kuler. Du trekker en kule til side uten å se på den. Du trekker så enda en kule og ser at det er hvit. Hva er sannsynligheten for at den første kulen også var hvit?

Falk (1986) sier at mange elever baserer svaret sitt på denne oppgaven kun på bakgrunn av sammensetningen av kuler i den første trekningen, og tar ikke hensyn til hva du trakk i trekning nummer to. Elevene kommer da frem til at sannsynligheten for at den første kulen var hvit er 0,5, i stedet for $\frac{1}{3}$ (oppgaven blir diskutert mer utfyllende i kapittel 3.1.7). Falk sier at grunnen til at elevene svarer feil har å gjøre med årsakstenkningen til elevene. De ser ikke at kunnskap om et senere utfall kan ha påvirkning på sannsynligheten til tidligere utfall.

Kapittel 3

Presentasjon og begrunnelse av oppgaver

I dette kapittelet vil jeg presentere oppgavene som ble brukt i studien. Det ble til sammen brukt 15 oppgaver. Det var ni skriftlige oppgaver som alle de 15 elevene svarte på individuelt, disse kaller jeg oppgave 1S, oppgave 2S osv. Det var seks muntlige oppgaver som elevene diskuterte under observasjonene, disse kaller jeg oppgave 1M, oppgave 2M osv. Da jeg skulle lage oppgaver var det viktig for meg å ta utgangspunkt i problemstillingen min. Det var også viktig at elevene hadde forutsetninger for å løse oppgavene, men det var i tillegg et poeng å se hvilke begrunnelser elevene tok i bruk i oppgaver som ligger utenfor det de hadde lært. Klassene hadde ikke fått undervisning i kompetansemålene fra hovedområdet sannsyn i læreplanen. Det ble derfor naturlig at jeg tok utgangspunkt i læreplanmålene fra grunnskolen. De fleste oppgavene kan løses ved hjelp av dette, men som sagt er det også noen oppgaver som ligger på grensen til hva man kan forvente at elevene har kompetanse i.

Alle oppgavene i studien er enten inspirert eller fullstendig kopiert fra tidligere studier. En grunn til at jeg valgte å bruke tidligere oppgaver var at disse er gjennomprøvde og dermed kvalitetssikret. Det var også flere av oppgavene hvor begrunnelsene til elevene ikke har blitt beskrevet tidligere. I tillegg er det interessant å se om svarene til elevene i Norge stemmer med tidligere internasjonale undersøkelser. På den måten kan man komme nærmere en generalisering av begrunnelsesmåter i sannsynlighet.

3.1 Skriftlige oppgaver

De skriftlige oppgavene ble lagd for å få et overblikk over begrunnelsene til elevene. På de fleste oppgavene trengte ikke elevene å bruke regning for å komme fram til svaret, for eksempel gjennom formler for sannsynlighet. Det er derimot viktig at elevene kjenner til utfallsrommene til forsøkene. Jeg har prøvd å ha stigende vanskelighetsgrad på oppgavene, slik at de jeg anslo som de enkleste kom først. Jeg har også prøvd å plassere de oppgavene jeg trodde gav mest interessante begrunnelser tidlig. Jeg gjorde disse valgene fordi jeg var usikker på hvor lang tid det tok å besvare oppgavene, og at det dermed var viktig at alle elevene svarte på de mest interessante oppgavene først. Grunnen til at jeg plasserte de enkleste oppgavene først var at jeg ville at elevene skulle føle mestring tidlig i undersøkelsen slik at de kanskje ble mer motiverte til å fullføre oppgavesettet. Det skal sies at jeg mener alle oppgavene har tilnærmet lik vanskelighetsgrad og at min vurdering av vanskelighetsgraden kanskje ikke stemmer med elevenes inntrykk.

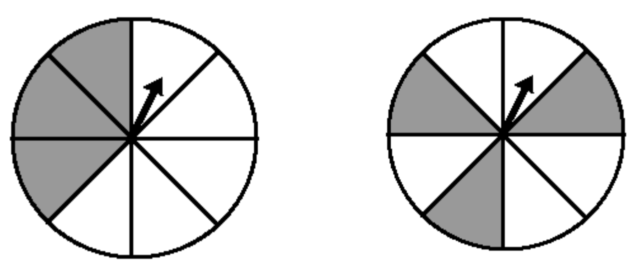
3.1.1 Oppgave 1S

Oppgave 1

På et tivoli er det to lykkehjul. Du vinner en premie dersom pilen havner på et grått felt.

a) Hva er sannsynligheten for å vinne på lykkehjul 1 og lykkehjul 2?

b) Hvilket lykkehjul ville du satset på?



(a) Lykkehjul 1 (b) Lykkehjul 2

Figur 3.1: Oppgave 1S er inspirert fra en oppgave fra Birkeland et al. (2012).

Oppgave 1S, som kan sees i figur 3.1, kan løses ved å bruke formelen man får fra den klassiske tilnærmingen til sannsynlighet, $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$. Dersom man bruker denne formelen finner man at sannsynligheten for å vinne på de to lykkehjulene er $\frac{3}{8}$, siden det er tre gråe felt og åtte felt til sammen. Svaret på oppgave b) vil være at det ikke er viktig hvilket lykkehjul man satser på, for sannsynligheten er lik.

Birkeland et al. (2012) skriver at noen elever valgte ett av lykkehjulene i oppgave b) selv om de tidligere hadde sagt at sannsynligheten var lik. Begrunnelsene for å velge lykkehjul 2 kunne for eksempel være at feltene var mer spredt. De mente dette hadde en sammenheng med at elevene hadde en årsakstenkning (som jeg beskrev i kapittel 2.4).

3.1.2 Oppgave 2S

Oppgave 2

Tenk du at du kaster en mynt fem ganger. Mulige sammensetninger av kron (K) og mynt (M) er blant annet:

- KKKMM
- MKKMK
- MKMMM
- KMKMK

a) Hvilken av disse sammensetningene av kron (K) og mynt (M) mener du er mest sannsynlig? Eller er de like sannsynlige?

b) Hvilken av sammensetningene av kron (K) og mynt (M) er mener du er minst sannsynlig? Eller er det lik sannsynlighet?

Figur 3.2: Oppgave 2S hentet fra Konold (1995).

Korrekt svar på oppgave 2S a) og b), som kan sees i figur 3.2, vil være at alle sammensetningene er like sannsynlige. Man kan finne dette ut ved å anta at sannsynligheten for å få kaste mynt er 0,5 og sannsynligheten for å kaste kron er 0,5. Siden kast med en mynt er uavhengige hendelser kan man finne sannsynligheten for hver av de fire sammensetningene ved produktformelen for uavhengige hendelser,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Formelen gir $P(KKKMM) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(K) \cdot P(M) \cdot P(M) = 0,5^5 = 0,03125$. Sannsynligheten for de andre sammensetningene blir også 0,03125 siden sannsynligheten for å få mynt og kron er den samme. Det vil også være et godkjent svar på oppgaven å si at alle de ulike sammensetningen er like sannsynlige siden et kast med en mynt er uavhengige hendelser.

Oppgave 2S ble valgt for å se hvilke begrunnelser elevene bruker i oppgaver der de må evaluere flere forskjellige utfall. Oppgaven er ment å avdekke om elevene har oppfatningen representativitet. Dersom elevene har oppfatningen representativitet ble det forventet at de velger en av sekvensene der kron og mynt er likt fordelt, fordi de sekvensene bedre representerer det globale utvalget. Konold (1995) gav oppgave 2 a) til elever, og han oppdaget at 70 % av elevene svarte korrekt, at sammensetningene var like sannsynlige. Han begrunnet dette litt overraskende resultatet med at elevene mente at sannsynligheten for å få én av de presenterte sammensetningene var så liten at de ikke skilte mellom dem. Han gav derfor oppgave 2 b) i neste undersøkelse og her så han at mange flere elever brukte representativitet. Jeg har derfor valgt å ta med begge formene på oppgaven i min studie.

3.1.3 Oppgave 3S

Oppgave 3

Tenk deg at du kaster to terninger samtidig. Hvilket av følgende utfall er det størst sannsynlighet for skal skje?

a) Få en femmer og en sekser

b) Få to seksere

c) Begge er like sannsynlige

Figur 3.3: Oppgaven er direkte oversatt fra en oppgave i Fischbein og Schnarch (1997).

En løsningsstrategi for å løse oppgave 3S er å se hvor mange permutasjoner som gir de forskjellige alternativene. Permutasjoner er kombinasjoner hvor man tar hensyn til rekkefølgen til objektene. Det vil si at (A,B) og (B,A) bare er én kombinasjon, men to forskjellige permutasjoner. Å kaste 5 og 6 er to permutasjoner, nemlig (6,5) og (5,6). Å få to seksere har derimot kun en permutasjon, (6,6). Svaret på oppgave 3S vil derfor være at det er mindre sannsynlig å kaste to seksere enn en femmer og en sekser, siden to seksere bare har ett gunstig utfall mens en femmer og en sekser er to gunstige utfall.

Oppgave 3S vil prøve å forstå begrunnelsene elevene gir når de får en oppgave som handler om utfallsrommet til to terninger. Å beskrive utfallsrom er en del av kompetansemålet i læreplanen. Det er likevel ikke sikkert at elevene har jobbet med utfallsrommet til to terninger, men dette er så hverdagslig at jeg tror konteksten vil være kjent for elevene. Fischbein og Schnarch (1997) brukte oppgave 3S og fant ut at 75 % av elevene på 11. trinn valgte alternativ c), noe som tilsier at mange elever ikke tar hensyn til at {5,6} og {6,5} er to ulike permutasjoner.

3.1.4 Oppgave 4S

Oppgave 4

I en boks er det 4 røde, 3 grønne og 2 hvite kuler. Hvor mange kuler må du trekke for å være sikker på at du får minst én kule fra hver farge?

Figur 3.4: Oppgaven er direkte oversatt fra en oppgave fra Fischbein og Gazit (1984).

En av løsningsstragiene man kan bruke i oppgave 4S er å se at du i de fire første trekningene kan trekke de fire røde kulene, de tre neste trekningene kan du trekke de tre grønne kulene og da må du trekke én til kule for å få en hvit. Du må altså trekke åtte kuler for å være sikker på å få én av hver farge.

Fischbein og Gazit (1984) hadde med denne oppgaven i sin undersøkelse. De skriver at oppgaven ikke direkte refererer til sannsynlighetsregning, men at den sjekker om elevene mentalt kan konstruere en bestemt hendelse, nemlig den som gjør at sannsynligheten er lik 1 for å trekke minst én kule av hver farge. De mener dette er ett av de grunnleggende prinsippene i sannsynlighet (s. 13). Omlag 50 % av elevene på 13 år svarte korrekt på oppgaven i Fischbein og Gazit sin studie. Andelen korrekte svar økte mye fra de 10 år gamle elevene til de på 13 år.

Analysen min av svarene elevene gav på oppgave 4S viste at de aller flest elevene svarte korrekt på oppgaven og at de brukte samme begrunnelse som ble beskrevet over. Jeg oppdaget at oppgaven ikke hadde så mye med begrunnelser i sannsynlighetsregning å gjøre, siden denne løsningsstrategien ikke kan brukes i sannsynlighetsregning generelt. Jeg valgte derfor å utelukke oppgaven i den videre analysen.

3.1.5 Oppgave 5S

Oppgave 5

Et spill går ut på å kaste to terninger og tippe summen av hva de to terningene viser. I første omgang kan du kun velge mellom summene 3 og 6. Hva ville du valgt i første omgang? I andre omgang kan du få velge mellom summene 7 og 10. Hva ville du valgt i andre omgang? Hvis du kunne velge mellom alle mulige summer fra 2-12, hva ville du valgt da?

Figur 3.5: De to første spørsmålene er tatt fra Fischbein et al. (1991). Det siste spørsmålet har jeg lagt ved oppgaven i tillegg.

Som i oppgave 3S vil det også i oppgave 5S være hensiktsmessig å se på antall permutasjoner når man skal avgjøre hvilke summer man ville satset på. For å svare på det første spørsmålet i oppgaven 5S må man se at permutasjonene for å få summen tre er (1,2) og (2,1), altså bare to gunstige utfall. Summen seks har fem ulike permutasjoner, (1,5), (5,1), (2,4), (4,2) og (3,3). Det er dermed større sannsynlighet å få summen seks og man ville derfor valgt seks. På den andre spørsmålet ser man at sju har seks permutasjoner, (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4) og (4,3). Ti har tre permutasjoner (5,5), (6,4) og (4,6). Man ville derfor valgt summen sju. På det siste spørsmålet blir svaret at man ville valgt sju siden det er summen som gir flest permutasjoner.

Fischbein et al. (1991, s. 542) delte begrunnelsene elevene brukte i oppgave 5S inn i fire forskjellige kategorier. Disse var at eleven valgte det høyeste tallet, eleven kommer med noen kombinasjoner (men dette fører til feil svar), elevene gir alle kombinasjonene, men ser ikke at man må ta hensyn til rekkefølgen og at eleven kjenner til alle permutasjonene og kommer fram til korrekt svar. Konklusjonen de kom med fra oppgaven var at de fleste elevene intuitivt forstår at det er en sammenheng mellom kombinasjonene og sannsynligheten for hendelsene, men at de ikke hadde noen intuisjon om at man må ta hensyn til rekkefølgen til utfallene.

3.1.6 Oppgave 6S

> **Oppgave 6**
>
> Therese har 100 hvite og 50 svarte kuler i en boks. Reidun har 200 hvite og 100 svarte kuler i sin boks. Uten å se trekker de hver sin kule fra boksene sine. Hvem har størst sjanse for å trekke en svart kule, eller har de like stor sjanse?

Figur 3.6: Oppgave 6S er hentet fra Fischbein og Gazit (1984).

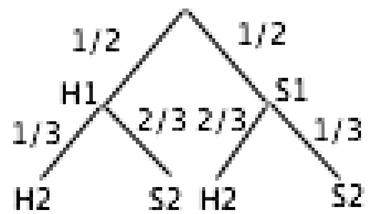
Korrekt svar på oppgave 6S vil være at Therese og Reidun har like stor sjanse for å trekke en svart kule siden forholdet mellom svarte og hvite kuler er likt i de to boksene.

Oppgave 6S ble valgt for å avdekke begrunnelsene elevene bruker i situasjoner hvor forholdet mellom antall gunstige utfall og antall mulige utfall er likt. Korrekt begrunnelse er som sagt at sjansene er like. En alternativ begrunnelse man kan anta at noen elever vil bruke kan være at Reidun har størst sjanse siden hun har flere svarte kuler. Fischbein og Gazit (1984) gav denne oppgaven til elever som var 10-13 år. De fant ut at rundt 80 % av elevene på 13 år svarte korrekt på oppgaven, men de gir ikke eksempler på begrunnelser elevene brukte.

3.1.7 Oppgave 7S

> **Oppgave 7**
>
> Petter og Martine har hver sin boks som inneholder to hvite og to svarte kuler.
>
> a) Petter trekker en kule fra boksen sin og finner ut at den er hvit. Uten å legge tilbake den første kula trekker han enda en kule. Hva er sannsynligheten for at den andre kulen er hvit?
>
> b) Martine trekker en kule fra boksen og legger den til side uten å se på den. Hun trekker så enda en kule, og ser at den er hvit. Hva er sannsynligheten for at den første kulen var hvit?

Figur 3.7: Oppgaven er inspirert fra en oppgave fra Falk (1986).



Figur 3.8: Trediagram som kan være til hjelp for å løse oppgave 7S. H1 står for første kule er hvit, S1 for første kule er svart osv.

Oppgave 7S kan løses på flere måter. En av de enkleste måtene er å tegne opp et tredigram som i figur 3.8. Fra trediagrammet ser man at sannsynligheten for å trekke H2 etter du har trukket H1 er $\frac{1}{3}$. Dersom du trekker H2 ser du fra trediagrammet at sannsynligheten for å trekke H1 også er $\frac{1}{3}$. Svaret på oppgave 7S a) kan man også finne ved å se at når du trekker enda en kule er det tre kuler igjen i boksen. Én av disse er hvit, dermed blir sannsynligheten $\frac{1}{3}$ for å trekke enda en hvit kule. Oppgave b) er litt vanskeligere. Her må man ta hensyn til at det er en hvit kule du ikke kan trekke i den første trekningen, siden den blir trukket i den andre trekningen. Det er derfor tre kuler du kan trekke i den første trekningen, én av disse er hvit og sannsynligheten for å trekke en hvit kule første gangen er $\frac{1}{3}$.

Oppgave 7S er tatt fra Falk (1986) og er lagd for å avdekke falkfenomenet. Falk (1986) skriver at mange elever ikke vil se at de to situasjonene er like. I oppgave a) vil de aller fleste svare $\frac{1}{3}$, som er korrekt. I oppgave b) vil derimot mange svare $\frac{1}{2}$, noe som er feil svar. Mange begrunner dette ut fra at når man trekker første gangen vil det være to hvite og to svarte kuler i boksen, og sier at hva som skjer senere ikke har noe å si. Elevene har altså ikke forståelse av at kunnskap om senere hendelser påvirker sannsynlighet til tidligere utfall.

3.1.8 Oppgave 8S

> **Oppgave 8**
>
> I en by er det to sykehus, et lite og et stort. Vi teller barn som blir født på en bestemt dag. Anta at sannsynligheten for å få en gutt er $\frac{1}{2}$ og sannsynligheten for å få jente er $\frac{1}{2}$. Følgende kan hende:
>
> a) På det lille sykehuset er 7 av de 10 barn som blir født jenter.
>
> b) På det store sykehuset er 70 av de 100 barn som blir født jenter.
>
> Av disse hendelsene er a) mest sannsynlig, b) mest sannsynlig eller a) og b) like sannsynlig?

Figur 3.9: Oppgave 8S har blitt brukt i forskjellige formuleringer i mange tidligere studier (se for eksempel Fischbein & Schnarch, 1997; Tversky & Kahneman, 1974).

Når man løser oppgave 8S er det viktig å tenke på store talls lov. Store talls lov sier at sannsynligheten for en hendelse, nærmer seg den teoretiske sannsynligheten for jo flere forsøk man gjør. Korrekt svar blir derfor at hendelse a) er mest sannsynlig siden det er færre forsøk.

Oppgave 8S var lagd for å avdekke begrunnelser elevene brukte i oppgaver hvor man må ta i bruk store talls lov. Tversky og Kahneman (1974) fant i sin studie at de fleste vil svare at de to tilfellene er like sannsynlige siden forholdet mellom gutter og jenter er likt i alternativ a) og b). Det kan derfor forventes at elevene i min studie også kommer til å begrunne at hendelsene er like sannsynlige siden forholdet er likt. Oppgave 8S kan bli vanskelig for en del av elevene, og det er ikke sikkert alle elevene har erfaringer med store talls lov. I læreplanen står det ingenting om store talls lov, men det står at elevene skal finne sannsynligheten gjennom eksperimentering og simulering. Jeg mener at det i dette kompetansemålet blir naturlig at elevene også får erfaring med store talls lov siden de skal bruke simulering til å finne sannsynligheten.

3.1.9 Oppgave 9S

Oppgave 9

I en 1T-klasse er det 10 elever. Klassen vil tilfeldig velge ut en gruppe på 2 elever. I en 1P-klasse er det også 10 elever. Her vil de tilfeldig velge ut en gruppe på 8 elever. I hvilken klasse er det flest mulige kombinasjoner av elevgrupper?

a) Flest kombinasjoner for å velge ut 2 elever i 1T-klassen

b) Flest kombinasjoner for å velge ut 8 elever i 1P-klassen.

c) Det er like mange kombinasjoner.

Figur 3.10: Oppgaven er inspirert fra en oppgave i Fischbein og Schnarch (1997).

Korrekt svar på oppgave 9S vil være at det er like mange kombinasjoner av elever i de to klassene. Den enkleste måten å finne ut dette på er å se at å velge åtte elever er det samme som å velge bort to elever. Man kan også finne svaret ved bruk av regning ved å bruke standardformelen for uordnet utvalg uten tilbakelegging;

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Dersom vi bruker standardformelen på oppgave 9S a) får vi $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$. I oppgave 9S b) får vi $\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = 45$. Vi ser altså at det er like mange kombinasjoner å velge ut to av ti elever som åtte av ti elever. Å finne binomialkoeffsientene kan man ikke forvente at elevene som deltok i min undersøkelse kan gjøre, siden det i læreplanene står at elevene skal kunne drøfte og løse *enkle* kombinatoriske problemer. Jeg anser ikke at bruk av standardformelen er et enkelt kombinatorisk problem. Men den første strategien som jeg beskrev kan man forvente at elevene forstår.

Tversky og Kahneman (1974) sier at i situasjoner som oppgave 9S genererer man vanligvis flere tilfeller og evaluerer frekvensen og sannsynligheten ut fra hvor enkelt de relevante tilfellene kan konstrueres. Dette kaller de tilgjengelighet. Oppgave 9S er tatt fra Fischbein og Schnarch (1997) for å teste nettopp denne løsningsstrategien. Dersom elevene har oppfatningen tilgjengelighet vil de anslå at det er flest kombinasjoner for å trekke to av ti elever, siden det er lettest å komme på kombinasjoner av to istedet for åtte. I studien til Fischbein og Schnarch (1997) viste det seg at 85 % av elevene på 11. trinn valgte alternativ a), og at misoppfatningen økte kraftig med alderen til elevene.

Da jeg analyserte svarene elevene gav på oppgave 9S fant jeg ikke noe mønster i hvilke begrunnelser som ble brukt, og det var tydelig at elevene ikke hadde forutsetningene for å løse oppgaven siden veldig mange ikke gav begrunnelse eller lot være å svare. Jeg tok opp igjen oppgaven i den muntlige observasjonen av elevene, men også her hadde elevene problemer med å finne en strategi for å løse oppgaven. Jeg har derfor valgt å se bort fra oppgave 9S i resten av analysen og diskusjonen.

3.2 Muntlige oppgaver

De muntlige oppgavene ble lagd etter den første analysen av svarene elevene gav på de skriftlige oppgavene (hvordan analysen ble gjennomført er beskrevet i kapittel 4). Oppgavene som ble valgt til den muntlige delen var oppgaver jeg mente egnet seg til diskusjon, for at jeg dermed kunne få fram ulike begrunnelser. Noen av oppgavene i den muntlige delen ble også valgt fordi jeg mente jeg ikke hadde fått godt nok dokumentert begrunnelsene elevene brukte på de skriftlige oppgavene.

3.2.1 Oppgave 1M

Oppgave 1

Tenk dere at dere har en terning med seks sider, der fem av sidene er malt svarte og én er malt hvit. Dere kaster terningen seks ganger. Hva har størst sannsynlighet, å få seks svarte sider eller å få fem svarte sider og én hvit side?

Figur 3.11: Oppgave 1M er inspirert fra en oppgave fra Konold (1989).

Oppgave 1M kan løses ved å bruke produktformelen for uavhengige hendelser siden kast med en terningen er uavhengige hendelser. Formelen gir at $P(6\, svarte\, sider) = (\frac{5}{6})^6 = 0,3349$ og $P(fem\, svarte\, sider) = (\frac{5}{6})^5 = 0,4019$.

Oppgave 1M tatt fra Konold (1989) og har som mål å avdekke om elevene har misoppfatningen løsningstilnærming. Konold (1989) skriver at dersom elevene har en løsningstilnærmet tenking vil de svare at det er større sannsynlighet å få seks svarte sider, siden det i hvert kast er større sannsynlighet for å få en svart side på terningen (s. 83). Oppgave 1M kan også være interessant å bruke for å se om elevene tar i bruk matematiske formler for å finne svarene eller om de bruker oppfatninger og følelser til å avgjøre sannsynligheten.

3.2.2 Oppgave 2M

Oppgave 2

Daniel og Anna fikk i oppgave å kaste en mynt 150 ganger. Det var kun én av dem som gjorde det skikkelig. Den andre fant på en rekkefølge. K står for kron og M for mynt. Var det Daniel eller Anna som jukset?

Daniel:
KMKMMKKMMKKMKMKMMKMMKMKKKMMMKKKMMKMMKMKM
KMMKKMKKKMKMKMKKMMMKKMMKMKMMKKMKMMKKMKMM
KKMKKMKMMMKMMKKMMKMMKMKMKKMKMMKKMKMKMMKK
KMKKMMKMKMMKKMMMKMMMKMKMMKKKMM

Anna:
MKKMMMKMMMMKMKKMMMKKMKKMMMKKMKKKMMMKMMM
MMMKMKMKMKMMMMKKKKKKMKKKMKMKKMKKKKKMKKKMM
KKKMKMKKKKKKKKKMMKKMKKKKKKKMMMMMKKKKMMKMKM
KKMKKMKKMMMMMMKMKKMMKKKMMKKK

Figur 3.12: Oppgave 2M er hentet fra Green (1982).

For å løse oppgave 2M brukte Green (1982) en rekke statistiske tester, blant annet på antall observerte og forventet antall mynt/kron på rad. Resultatene fra disse testene var at det var Daniel som jukset. Man kan ikke forvente at elevene i denne studien kan ta i bruk de samme testene som Green brukte, men de kan reflektere over hvor mange ganger man kan få et utfall på rad, om det er like mange av hver sort osv. og kan på denne måten komme fram til at Daniel har en for regelmessig rekkefølge på utfallene sine.

Green (1982) så at for alle aldersgruppene var det flest elever som feilaktig svarte at Anna jukset, det var heller ikke noe forbedring med alderen. Begrunnelser Green så at elevene brukte var at halvparten av kastene skal være mynt og halvparten kron. Andre begrunnelser var at rekkefølgen er for uregelmessig eller regelmessig, og at Anna hadde for mange like utfall på rad.

3.2.3 Oppgave 3M

Oppgave 3

Sannsynligheten for få mynt minst to ganger når man kaster en mynt tre ganger er

a) Mindre

b) Lik

c) Større

enn sannsynligheten for å få mynt minst 200 ganger når man kaster 300 ganger.

Figur 3.13: Oppgave 3M er direkte oversatt fra en oppgave i Fischbein og Schnarch (1997).

I oppgave 3M må man også ta hensyn til store talls lov. Dersom man bruker samme begrunnelse som i oppgave 8S får man at sannsynligheten for å få mynt minst to ganger når man kaster en mynt tre ganger er større enn minst 200 mynt når man kaster mynten 300 ganger.

Oppgave 3M tester altså det samme som oppgave 8S gjorde på den skriftlige testen. Jeg valgte å gjennomføre de to oppgavene siden man da kan undersøke om konteksten har noe å si. Det kan også hende at man får andre begrunnelser når elevene skal diskutere muntlig. Fischbein og Schnarch (1997) fant i sin studie at 75 % av elevene på 11. trinn svarte at sannsynligheten var lik. De mente at grunnen til at elevene svarte at sannsynligheten var lik var at forholdet mellom 2 og 3 og 200 og 300 er det samme.

3.2.4 Oppgave 4M

> **Oppgave 4**
>
> Dere skal tippe summen av to terninger. Hvilken sum ville dere satset på? Er det forskjell på om dere kaster to terninger samtidig eller én terning to ganger?

Figur 3.14: Det første spørsmålet på oppgave 4M er hentet fra oppgave 5S i denne studien. Det andre spørsmålet er inspirert fra Fischbein et al. (1991).

Oppgave 4M består av to ulike spørsmål. Det første spørsmålet kan man finne svaret på gjennom å finne den summen med flest permutasjoner, som beskrevet i løsningsstrategien til oppgave 5S. Svaret til det andre spørsmålet er at det ikke er noen forskjell på om man kaster to terninger samtidig eller én terning to ganger. Grunnen til at det ikke er forskjell er at det er lik matematisk struktur. Utfallet fra et kast med en terning er uavhengig av om du kaster en annen terning samtidig eller ikke.

Fischbein et al. (1991) fant at på det andre spørsmålet vil noen elever mene at man lettere kan kontrollere utfallene når man kaster terningene etter hverandre, og at det derfor er høyere sannsynlighet for å få det utfallet man vil om du kaster én og én terning. Dette mener jeg er typisk årsakstenkning. Oppgave 4M er derfor tatt med delvis fordi jeg ikke fikk gode nok svar fra oppgave 5S og fordi jeg vil avdekke om elevene begrunner ved hjelp av årsakstenkning.

3.2.5 Oppgave 5M

Oppgave 5

Tenk dere at dere kaster to terninger samtidig. Hvilket av følgende utfall er det størst sannsynlighet for skal skje?

a) Få en femmer og en sekser

b) Få to seksere

c) Begge er like sannsynlige

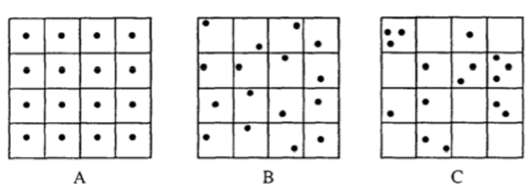
Figur 3.15: Oppgave 5M er identisk med oppgave 3S og er hentet fra Fischbein og Schnarch (1997).

Oppgave 5M er lik oppgave 3S. Grunnen til at jeg valgte å ha denne oppgaven med på begge delene var at jeg ikke følte jeg fikk gode nok resultater fra den skriftlige delen. Det var mange elever som svarte alternativ a) i den skriftlige delen, men det var få elever som hadde korrekt begrunnelse.

3.2.6 Oppgave 6M

Oppgave 6

Et flatt tak i en hage er inndelt i 16 kvadrater. Det begynner å regne litt. Etter en stund har 16 regndråper landet på taket. Her er tre bilder som viser regndråper på taket. Hvilket bilde viser best mønsteret dere forventer å se?



Figur 3.16: Oppgave 6M er hentet fra Green (1989).

Det korrekte svaret på oppgave 6M er at bilde C best viser mønsteret man forventer å se. Det er viktig å legge merke til at oppgaven spør hva du forventer å se. Sannsynligheten for hver av de tre kombinasjonene av regndråper er like stor, men bilde C viser en tilfeldig rekkefølge over tid. I bilde A er regndråpene plassert i midten av hvert kvadrat. I bilde B er det også en regndråpe i hvert kvadrat, men hvor regndråpen i hvert kvadrat er plassert er tilfeldig, dette kaller Green (1989) en semi-tilfeldig rekkefølge. I bilde C er regndråpene tilfeldig spredt over hele taket.

Green (1989, s. 34) kommer med noen kritiske bemerkninger til oppgave 6M. Blant annet stiller han spørsmål ved om elevene kjenner til at regndråpene faller tilfeldig. Dette er et viktig poeng, men siden jeg var til stede under diskusjonen kunne jeg poengtere for elevene at man antar at dråpene faller tilfeldig, derfor valgte jeg likevel å ha med oppgaven i min studie. I Greens studie valgte 37 % av 13-14 åringene alternativ B og 6 % valgte alternativ A.

Kapittel 4

Metode

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for metoden jeg har brukt i studien. Først vil jeg beskrive forskningsdesignet. Videre vil jeg beskrive deltakerne i studien. Deretter vil jeg beskrive metodene som ble brukt, nemlig skriftlige oppgaver og observasjon av elever som diskuterte oppgaver. Etter dette vil jeg presentere analysemetoden som ble tatt i bruk. Til slutt vil jeg komme med etiske betrakninger og diskutere hvordan man kan vurdere kvaliteten til studien.

4.1 Forskningsdesign

Studien har et kvalitativt forskningsdesign. Robson (2011, s.19) sier at typiske trekk ved kvalitativ forskning er at funnene blir presentert med ord, og at det er lite bruk av talldata og statistisk analyse. Videre sier han at i kvalitativ forskning er konteksten viktig, man forsker for å få forstå fenomenene i kontekst. Man er heller ikke ute etter å generalisere funnene sine. Objektivitet er ikke hensiktsmessig siden det distanserer forskeren fra deltakerne. Kvalitativ forskning bruker ofte et fleksibelt forskningsdesign. Det vil si at detaljer i forskningsdesignet ikke er planlagt på forhånd, i motsetning til hva det er i et fastsatt design (Robson, 2011) Jeg karakteriserer min studie som en kvalitativ studie med et fleksibelt design, siden jeg tar i bruk ord for å beskrive funnene, og fordi jeg prøver å forstå elevenes begrunnelse og resonnement i en kontekst. Jeg mener studien har et fleksibelt design siden oppgavene som elevene skulle diskutere ikke var bestemt før jeg hadde analysert en tidligere del av datamaterialet. Den skriftlige testen som ble gjennomført først har derimot preg av å være fastsatt design siden disse oppgavene ble bestemt på forhånd.

Jeg kan også si at forskningsdesignet mitt bærer preg av å være en kasusstudie. Thomas (2011) definerer en kasusstudie slik: ”A case study is about seeing something in its completeness, looking at it from many cases"(s. 23). Jeg mener at min studie kan være en kasusstudie siden jeg er interessert i å forstå elevene i de spesifikke klassene sine begrunnelser og at jeg prøver å forstå dette ved å se på problemet fra flere sider, både gjennom skriftlige og muntlige oppgaver. Jeg karakteriserer dermed min studie som en kvalitativ kasusstudie med et fleksibelt design.

Jeg valgte å bruke dette forskningsdesignet fordi jeg mener det er det som gir meg best svar på problemstillingen min. Jeg mener at en kvalitativ studie gir best innblikk i hvilke begrunnelser elevene bruker, for jeg forstå begrunnelsene i kontekst, og ikke bare lage statistikk over dem. Et fleksibelt design passer bra for da kunne jeg endre på oppgavene etterhvert som jeg så hvilke typer begrunnelser elevene gav, og kunne få et dypere innblikk i disse.

4.2 Beskrivelse av deltakerne

Studien min forsøker å avdekke begrunnelsesmåter i sannsynlighet. Det var derfor viktig for meg at elevene hadde forkunnskaper om sannsynlighet slik at de hadde forutsetninger for å svare på oppgavene. Tidlig i arbeidet ble det derfor bestemt at deltakerne i studien skulle være fra VG1, for da var jeg sikker på at elevene hadde fått grunnleggende opplæring i sannsynlighetsregning fra ungdomsskolen. Skolen ble valgt på bakgrunn av at jeg hadde kjennskap til lærerne på denne skolen. Først fikk jeg tilgang til 1T-klassen, men siden det var få elever i denne klassen ble det bestemt at jeg også skulle inkludere elevene fra 1P-klassen. Forskjellen på 1T og 1P er i følge Utdanningsdirektoratet (2013) at T-varianten mer teoretisk rettet, mens P-varianten er mer pratiskt orientert. Informantene i studien er dermed 15 elever fra to klasser på en videregående skole i Nordland. Elevene fordelte seg på åtte fra 1P og sju fra 1T. Jeg hadde ikke tidligere kjennskap til elevgruppene, kun til lærerne. Klassene hadde ikke begynt med hovedområdet sannsynlighet og statistikk fra læreplanen da jeg gjennomførte undersøkelsen, man kan derfor anta at de ikke har noen annen formel kompetanse enn den de hadde med seg fra utgangen av grunnskolen. De skriftlige oppgavene ble besvart av alle de 15 elevene, mens den muntlige delen ble gjennomført av seks elever, tre fra 1T og tre fra 1P. Alle elevene som deltok i studien skrev under på samtykkeskjema og samtykket til at svarene deres ble brukt i studien. Elevene til den muntlige delen av studien ble valgt på bakgrunn av hvem som sa seg villige til å delta og som samtykket til lydopptak. Det var sju elever som sa seg villige til dette, og siden kun seks av disse var tilstede på skolen under den muntlige gjennomføringen ble valget på deltakere lett. Både i 1T-gruppen og 1P-gruppen var det to gutter og en jente under observasjonene.

4.3 Beskrivelse av metodene som ble brukt

Det ble tatt i bruk to hovedmetoder i studien, skriftlige oppgaver og observasjon. Jeg vil nå beskrive og begrunne disse metodene. Datainnsamlingen ble gjennomført på to forskjellige dager. Den første dagen ble det delt ut skriftlige oppgaver som elevene skulle svare på. På dag to, som var elleve dager senere ble observasjonene gjennomført.

4.3.1 Skriftlige oppgaver

De skriftlige oppgavene ble lagd for å få et overblikk over begrunnelsene elevene brukte. En annen grunn til at jeg tok i bruk skriftlige oppgaver var at innsamlingen skulle gå raskt, og at jeg dermed fikk mulighet til å få innblikk i begrunnelser fra flere elever enn om jeg kun hadde observert.

Alle oppgavene i studien har blitt brukt i andre studier tidligere. Jeg valgte å bruke tidligere oppgaver for at disse er prøvd før, og på den måten blitt kvalitetssikret. Oppgavene jeg valgte er oppgaver som har som mål å avdekke misoppfatninger i sannsynlighetsregning. Jeg valgte slike oppgaver, som kan kalles diagnostiske oppgaver, siden jeg er interessert i å karakterisere begrunnelsene elevene bruker i slike oppgaver. Flere av de tidligere studiene har fokusert på hvor mange av studentene som har misoppfatninger, og gir dermed bare et tall for hvor mange av studentene som svarer korrekt og feil på oppgavene (se for eksempel (Fischbein & Schnarch, 1997)). Det kan derfor være nyttig å gjennomføre oppgavene én gang til og fokusere på hvilke begrunnelser elevene gir og ikke bare klassifisere elevsvarene etter misoppfatninger. Jeg mener dette er nyttig for da kan man få en bedre forståelse av resonnementet til elevene og ta hensyn til dette i undervisningen, og på den måten forbedre undervisningen i sannsynlighetsregning.

Svarene på de skriftlige oppgavene ble analysert for første gang rett etter besvarelsene ble levert inn, og de fungerte dermed som en rettesnor for hva jeg skulle observere under de muntlige oppgavene. Den første analysen bestod i å karakterisere svarene elevene gav som enten korrekte eller ikke korrekte. Jeg prøvde også å finne likhetstrekk mellom besvarelsene og begynte etter hvert å kode dem. De skriftlige oppgavene var lagt opp til at svarene kunne være kortfattet. Likevel ble det lagt vekt på at elevene måtte begrunne svarene sine. Dette ble sagt både i begynnelsen av timen og det var skrevet på alle oppgavene. På denne måten håpet jeg at jeg kunne få innblikk i begrunnelsene til elevene.

De skriftlige oppgavene ble gjennomført i en studietime (time avsatt til selvstendig jobbing med skolearbeid) hvor både 1T- og 1P-elevene var samlet i samme klasserom. Elevene satt ved hver sin pult og de svarte på de skriflige oppgavene individuelt. Jeg var til stede i klasserommet, slik at elevene kunne stille spørsmål underveis dersom det var noe uklart med oppgavene. Jeg hadde 80 minutter til rådighet til å gjennomføre undersøkelsen, men alle elevene hadde besvart oppgavene i løpet av 50 minutter.

4.3.2 Observasjon

Del to av undersøkelsen var at jeg observerte én gruppe fra hver klasse, på tre elever som diskuterte oppgaver. Robson (2011) sier at fordelen med observasjon som teknikk er direkteheten. Du spør ikke om synet, følelsene eller oppførsel, du observerer det (s. 316). Jeg var ute etter å tolke begrunnelsene til elevene, derfor valgte jeg observasjon som metode for her kunne jeg observere det elevene sa. Det er vanlig å skille mellom deltakende og ikke-deltakende observasjon. Gold (1958) skiller derimot mellom fire forskjellige grader av deltakelse. Disse er fullstendig deltaker (complete participant), deltaker-som-observatør (participant-as-observer), observatør-som-deltaker (observer-as-participant) og fullstendig observatør (complete observer). En fullstendig deltaker vil prøve å gå i ett med miljøet, forskeren skal bli en del av gruppen hun observerer. En fullstendig observatør vil derimot observere mennesker på en måte som gjør at det er unødvendig at informantene må ta hensyn til observatøren, dette kan for eksempel gjøres gjennom et enveisspeil. De to siste rollene ligger mellom disse ytterkantene. Min rolle under observasjonen vil jeg karakterisere som observatør-som-deltaker. Jeg velger å gjøre dette siden jeg under observasjonene først prøvde å holde en passiv rolle da elevene diskuterte oppgavene, men etterhvert stilte jeg spørsmål og prøvde å utfordre elevene på utsagn de hadde sagt. Jeg gjorde dette for å forsikre meg om at jeg hadde forstått elevene korrekt. Gold (1958) skriver at observatør-som-deltaker rollen ofte er brukt i studier som involverer kun én observasjon av hver gruppe. Han sier også at observasjonen vil være mye mer formell enn de andre typene (s. 221). Dette stemmer godt med min observasjon. Jeg observerte gruppene kun én gang, og hadde ikke tid til å bli kjent med og få en relasjon til elevene. Det kan være et problem at jeg ikke hadde en relasjon til elevene under observasjonen. Dette kan ha ført til at elevene ikke stolte på meg, og ikke kom med sin virkelige forståelse. Gold (1958) skriver også at et problem med dette kan være at forskeren misforstår informantene, siden han ikke kjenner informantene godt nok (s. 221). Dette prøvde jeg å unngå ved å stille spørsmål til elevene der jeg spurte om jeg hadde oppfattet dem rett.

Jeg vil karakterisere observasjonen min som formell siden jeg på forhånd hadde bestemt meg for hva jeg skulle observere. En ulempe med en formell observasjon vil være at jeg på forhånd har bestemt meg for hva jeg vil observere, og dermed være lite åpen for det nye og uventede. Det var derfor viktig for meg at jeg hadde en passiv rolle under den første delen av observasjonen slik at elevene fikk diskutere uten innblanding fra meg, slik at jeg kunne være åpen for noe nytt. Robson (2011, s. 316-317) sier at en ulempe med observasjon som teknikk er at observatøren kan påvirke situasjonen, noe som blir kalt reaktivitet. Taktikker for å unngå dette er på den ene ekstreme siden å sikre at forskningsdeltakerne ikke vet at de blir observert og på den andre siden at forskningsdeltakerne er blitt så vant til forskeren at de ikke tenker over at de blir observert. En annen ulempe Robson (2011, s. 317) kommer med er at observasjon kan være svært tidkrevende. Formelle observasjoner som ser etter forhåndsgitte tendenser kan ofte være mindre tidkrevende enn helt åpne og uformelle observasjoner. Ved at jeg i tillegg til observasjonene gjennomførte skriftlige oppgaver ble datamaterialet mitt håndterlig og jeg fikk flere inngangsporter til problemstillingen.

De muntlige oppgavene bestod av seks forskjellige oppgaver. Observasjonene foregikk på et grupperom på skolen, hvor jeg og elevene satt rundt et bord. Elevene ble bedt om å tenke høyt (tenke-høyt-protokoll) og begrunne svarene sine. Elevene som deltok i observasjonene ble tatt ut av de ordinære matematikktimene. Først på dagen observerte jeg 1P-gruppen, mens jeg observerte 1T-gruppen på slutten av samme dag. Jeg hadde 60 minutter til rådighet til hver observasjon. Elevene kom raskt gjennom oppgavematerialet så jeg fikk derfor elevene til å diskutere oppgave 1S og 9S i tillegg siden dette var oppgaver jeg følte jeg ikke hadde fått gode nok svar på fra de skriftlige besvarelsene. For å lette behandlingen og dokumentasjonen av datamaterialet ble det tatt lydopptak av diskusjonene til elevene. Lydopptaket ble gjort av mobiltelefonen min som lå midt på bordet. Det ble vurdert å filme observasjonene ved hjelp av et videokamera. Cohen, Manion og Morrison (2007) skriver at videofilming kan være nyttig for at man kan se på filmen flere ganger og for at man kan få et bedre innblikk i datamaterialet (s. 470). Dersom jeg hadde filmet observasjonene hadde jeg bedre fått dokumentert hva elevene gjorde, og ikke bare hva dem sa. Jeg kunne også fått dokumentert samhandlingen i gruppen bedre. Grunnen til at videofilming likevel ikke ble valgt var en bekymring for at filmingen ville påvirke forskningsdeltakerne i for stor grad. Lydopptak ble derfor valgt i stedet siden det kunne virke mindre skremmende på elevene.

Etter observasjonene var gjort ble lydopptakene transkribert ved hjelp av transkripsjonskoder (se tillegg C) for å lette analysen.

4.4 Analysemetode

Robson (2011) skriver at analyse er å bryte opp noe komplekst i mindre deler og forklare helheten gjennom egenskaper og sammenhenger mellom disse delene. Analysemetoden jeg brukte kalles for den konstant komparative analysemetoden. Postholm (2005) skriver at analysemetoden kommer fra grounded theory, men at analysemåten kan brukes innenfor alle kvalitative studier hvor koding og kategorisering av datamaterialet blir vesentlig i analysearbeidet (s. 87-88). Grounded theory er en metodisk tilnærming som ble utviklet av Barney Glaser og Anselm Strauss. Hensikten med grounded theory er å utvikle teori på bakgrunn av det innsamlede datamaterialet. Man skal dermed legge fra seg tidligere teorier, og kun bli påvirket av hva datamaterialet viser (Postholm, 2005, s. 87). Jeg har ikke tatt i bruk grounded theory i min studie, siden jeg tok hensyn til tidligere forskning da jeg analyserte datamaterialet. Likevel tok jeg i bruk den konstant komparative analysemetoden.

Den konstant komparative analysemetoden innebærer tre kodingsfaser. Kodingsfasene er åpen koding, aksial koding og selektiv koding. Åpen koding er den delen hvor forskeren kategoriserer og setter navn på fenomener i datamaterialet gjennom intens og nøye gjennomgang av materialet (Postholm, 2005, s. 88). Jeg gjennomførte denne delen av analysen gjennom å lese transkripsjonene og de skriftlige besvarelsene flere ganger og etterhvert begynne å sette navn på de forskjellige typene begrunnelser jeg så. Navnet til kodene kom fra noe elevene sa eller fra teorien jeg hadde lest. Prosessen med å kode materialet førte til at jeg fikk mange koder, og flere av disse ble forkastet og byttet ut i den senere analysen. Neste steg i analysen var at jeg klipte ut alle begrunnelsene og sorterte dem i forskjellige kategorier. Dette sier Postholm (2005) kalles aksial koding. I aksial koding blir kategoriene relatert til sine underkategorier slik at forklaringene til fenomenet blir mer presise og fullstendige. Neste steg i analysen er selektiv koding. Her prøver man å finne kjernekategoriene og systematisk relatere dem til de andre kategoriene (Postholm, 2005, s. 90). I denne delen av analysen kom jeg fram til de tre hovedkategoriene av elevbesvarelser, matematiske begrunnelser, følelsesmessige begrunnelser og begrunnelser som refererer til konkreter. Relasjonene mellom disse og underkategoriene kan sees i figur 4.1.

4.5 Etiske betrakninger

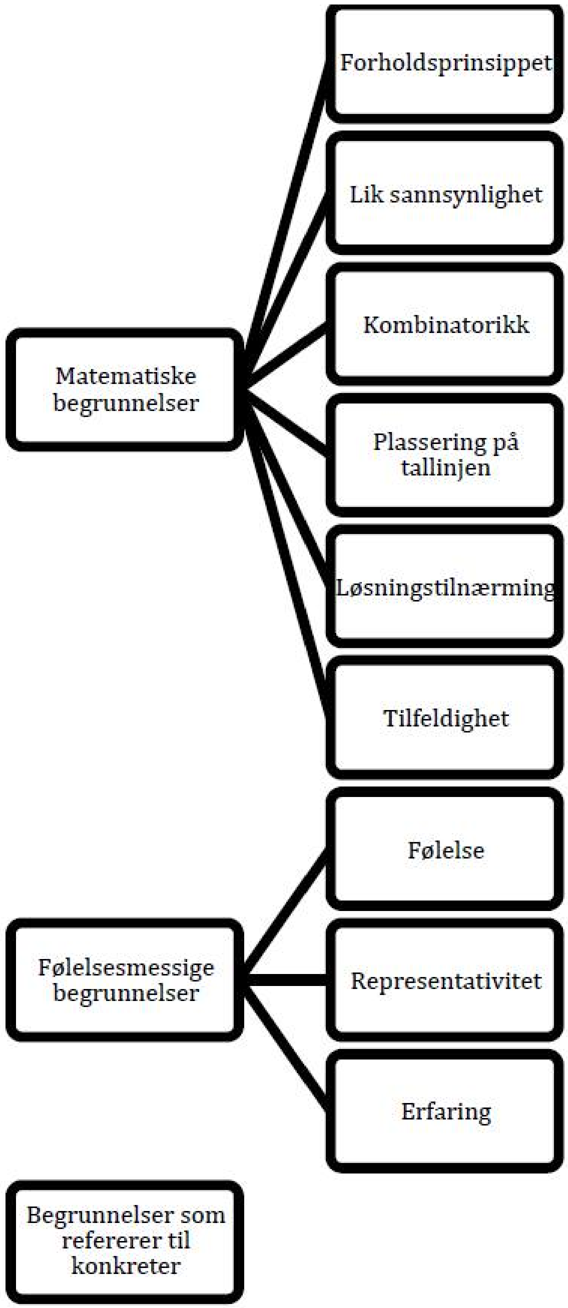
Når man forsker på mennesker er det viktig å vurdere om det er etisk forsvarlig å gjennomføre prosjektet. De etiske vurderingene må gjøres fra start til slutt i prosjektet. Det finnes flere forskjellige etiske prinsipper i forskning på mennesker, men de tre vanligste er informert samtykke, unngå skader i feltarbeidet og konfidensialitet i rapporteringen. Jeg vil gå gjennom disse tre prinsippene og argumentere for at mitt prosjekt er etisk forsvarlig.

Cohen et al. (2007) skriver at informert samtykke kommer fra individets rett til frihet og selvbestemmelse (s. 77). Informert samtykke vil si at forskningsdeltakerne får nok informasjon og tid til å bestemme seg for om de vil delta i forskningsprosjektet. Jeg gjorde dette ved at lærerne på forhånd fortalte til elevene at jeg skulle komme. Før elevene svarte på oppgavene måtte de skrive under på at de samtykket til å delta i studien. Samtykkeskjemaet (se tillegg D) fortalte om hva forskningen gikk ut på, presiserte at det var frivillig og at de kunne trekke seg når som helst, at svarene ble anonymisert og at datamaterialet skulle slettes 1. september 2015.

Unngå skader i feltarbeidet vil si at man ikke påfører forskningsdeltakerne skader som for eksempel unødvendig stress, tap av selvkontroll, tap av verdighet, eller at man skaper konflikter i gruppen, osv. Jeg mener at min studie ikke påførte forskningsdeltakerne noen av disse skadene siden oppgavene ikke stilte intime spørsmål og at elevene fikk bruke så lang tid de ville på oppgavene.

Konfidensialitet vil si at informasjonen man samler inn bare kan nås av den eller de som forsker. Dette ble oppnådd gjennom at elevene og skolen ble anonymisert i den endelige masteroppgaven og at det kun er jeg som har tilgang de skriftlige besvarelsene og til lydfilene som ble tatt under observasjonen. Elevene fra 1P ble gitt navnene Ingrid, Andreas og Martin, mens 1T-elevene ble gitt navnene Sander, Malin og Kristoffer. I tillegg til dette søkte jeg også godkjennelse fra Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), og prosjektet mitt fikk prosjektnummer 41590.

Cohen et al. (2007, s. 75) skriver at en annen måte som er vanlig å gjøre etiske betrakninger på er å se på kost/nytte-forholdet (the cost/benefits ratio), det vil si at



Figur 4.1: Flytskjema over hovedkategoriene og underkategoriene av begrunnelser som ble funnet.

man vurderer de samfunnsmessige fordelene med forskningen mot individets kostnader for å delta. Nytten ved mitt prosjekt er at ved å få innblikk i begrunnelser elever gir kan man forbedre undervisningen i sannsynlighetsregning. Elevene som deltok i observasjonen mistet 60 minutter fra matematikktimene, og gikk i så måte kanskje glipp av viktig kunnskap. På den andre siden fikk elevene som deltok i undersøkelsen frisket opp kunnskapene sine om sannsynlighet og de fikk kanskje ny innsikt i fagfeltet da de diskuterte med hverandre.

4.6 Kvaliteten til studien

Kvaliteten til forskning har tradisjonelt blitt begrunnet ut fra validitet og reliabilitet. I kvalitativ forskning er det derimot vanlig å argumentere ut fra troverdigheten eller påliteligheten (trustworthiness) til studien. Det er denne tilnærmingen til kvaliteten til en studie jeg vil bruke. Guba (1981) introduserte begrepene kredibilitet (credibility), overførbarhet (transferability), avhengighet (dependability) og bekreftbarhet (confirmability) som fire aspekter å ta hensyn til for å gjøre studien troverdig. Jeg vil i dette delkapittelet gå gjennom disse fire begrepene. I kapittel 6.5 vil jeg diskutere hvordan min studie forholder seg til begrepene, hvorfor jeg mener studien er troverdig, og hva som eventuelt kunne vært gjort annerledes for å sikre enda mer kvalitet.

Kredibilitet handler om at den rapporterte forskningen framstår som sannsynlig eller tillitsvekkende. Guba (1981) skriver at for å stryke kredibiliteten kan man mens man gjennomfører datainnsaminnsamlingen ha et langvarig engasjement i feltet, gjennomføre fagfellevurdering, ta i bruk metodologisk triangulering, hente inn referansemateriale og bruke member-checking. Etter datainnsamlingen kan man sikre at det er en sammenheng i datamaterialet, teste analysene og tolkningene mot nytt datamateriale (referansemateriale) og ta i bruk member-checking, som vil si at forskningsdeltakerne får si sin mening om analysene du har gjennomført.

Guba (1981) sier *overførbarhet* handler om at funnene fra forskningen kan anvendes i andre kontekster og med andre deltakere. I kvalitativ forskning er man ikke interessert i å generalisere funnene sine. Likevel kan overførbarheten styrkes gjennom å gjøre en teoretisk/målrettet prøvetaking og gi en tydelig beskrivelse av konteksten slik at man kan sammenligne med andre kontekster.

Avhengighet blir beskrevet som at man kan være sikker på at funnene hadde blitt de samme om forskningen hadde blitt gjentatt med de samme (eller tilnærmet like) forskningsdeltakerne og i samme (eller tilnærmet lik) kontekst (Guba, 1981, s. 80). Avhengigheten kan styrkes gjennom å bruke overlappende metoder, det vil si metoder hvor svakheten til den ene metoden er styrken til den andre. Andre måter å styrke avhengigheten på kan være at forskningsteamet deler seg i to og analyserer hver sin analysedel (Guba kaller dette for stepwise replication) eller å la eksterne undersøke hvordan datainnsamlingen ble gjennomført og analysert.

Bekreftbarhet handler om at man kan være sikker på at funnene fra forskningen kommer fra deltakerne og konteksten, og ikke fra motivasjon, interesse osv. fra forskeren. For å sikre dette kan man bruke triangulering og gjøre det klart hvilke antakelser man baserer forskningen på (Guba, 1981).

Kapittel 5

Analyse

I analysekapittelet vil jeg presentere de ulike kategoriene for begrunnelser som ble funnet og komme med eksempler fra elevbesvarelsene og observasjonene. Jeg vil også se begrunnelsene i sammenheng med begrunnelser som er beskrevet tidligere. Det ble funnet tre hovedkategorier for begrunnelser, disse var *matematiske begrunnelser*, *følelsesmessige begrunnelser* og *begrunnelser som refererer til konkreter*. De tre underkategoriene har til sammen ni underkategorier (se flytskjema i figur 4.1). Jeg vil starte med å beskrive de matematiske begrunnelsene.

5.1 Matematiske begrunnelser

Matematiske begrunnelser inneholder seks underkategorier:

- Forholdsprinsippet
- Lik sannsynlighet
- Kombinatorikk
- Plassering på tallinjen
- Løsningstilnærming
- Tilfeldighet.

Disse seks underkategoriene ble valgt til å tilhøre hovedkategorien matematiske begrunnelser på bakgrunn av at elevene tok i bruk regning eller matematiske begreper og strategier i begrunnelsene.

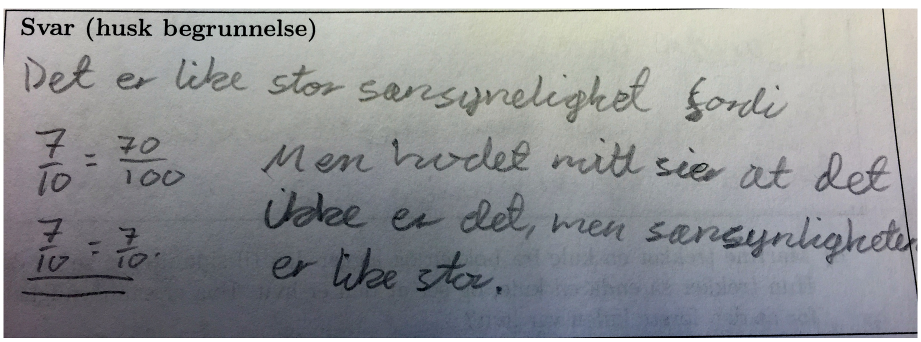
5.1.1 Forholdsprinsippet

I mange av begrunnelsene tok elevene utgangspunkt i formelen $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$ når de skulle avgjøre sannsynligheten. Det var også mange elever som begrunnet svaret sitt med å si at forholdet var likt. Denne begrunnelsesmåten har jeg valgt å kalle forholdsprinsippet. Et eksempel på forholdsprinsippet er dette svaret som en elev gir på oppgave 1S: "$\frac{3}{8}$ fordi det er 3 grå felter og til sammen det er 8 felt" Her tolker jeg at eleven finner sannsynligheten ut fra hvor mange gråe felt det er i forhold til antall felt til sammen. Å havne på ett av de gråe feltene vil være de gunstige utfallene, siden de gråe feltene gir gevinst. Det er åtte felt til sammen, og dermed åtte mulige utfall. Eleven har så funnet sannsynligheten for å vinne ved å sette opp brøken $\frac{3}{8}$. Selv om eleven ikke eksplisitt refererer til formelen $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$ mener jeg at det er denne formelen eleven har tatt i bruk siden svaret hun gir er oppgitt som en brøk og for at hun sier "3 grå felter og til sammen det er 8 felter". Formelen $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$ blir brukt i den klassiske tilnærmingen til sannsynlighet. Jeg mener derfor at eleven tar utgangspunkt i den klassiske definisjonen av sannsynlighet når hun skal finne sansynligheten for å vinne på lykkehjulene.

I materialet mitt var det enkelte situasjoner hvor elevene brukte forholdsprinsippet når det egentlig ikke kunne brukes. Dette førte til feil svar på oppgavene. Et eksempel på en oppgave hvor forholdsprinsippet ikke kan brukes er oppgave 8S. Dette svarte en elev på oppgaven: "a og b er like sannsynlige siden både $\frac{7}{10}$ er det samme som $\frac{70}{100}$ ". Her tolker jeg at eleven mener at siden forholdet mellom jenter og gutter er likt i de to tilfellene vil også sannsynligheten være lik. Eleven setter altså de to tilfellene opp som en brøk, og sier at $\frac{7}{10}$ er det samme som $\frac{70}{100}$. Svaret til eleven er på formen $\frac{del}{hele}$, der *del* er antall jenter som blir født og *hele* er antall barn til sammen. Dette mener jeg vitner om at eleven knytter sannsynligheten til et forhold eller en brøk. Et annet elevsvar på oppgave 8S som underbygger at noen elever tenker at når forholdet mellom en del og det hele er likt, så er sannsynligheten også lik er dette: "Like sannsynlige fordi $\frac{70:10}{100:10} = \frac{7}{10}$" I dette svaret forkorter eleven brøken $\frac{70}{100}$ og finner at den er lik brøken $\frac{7}{10}$. Eleven gir ikke noen begrunnelse for hvor han får tallene fra, men jeg mener han henter tallene fra antall jenter og antall barn til sammen på de to sykehusene. Jeg mener at disse to elevene tar i bruk den klassiske tilnærmingen til sannsynlighet på oppgave 8S. Den klassiske tilnærmingen kan ikke brukes på denne oppgaven, for her må man ta i bruk store talls lov som kom med den frekventistiske tilnærmingen. Ved å bruke prinsippet til store talls lov på oppgave

8S kommer man fram til korrekt svar, at det er høyest sannsynlighet for at sju av ti barn er jenter. Oppgave 8S avdekker løsningsstragien at man ikke tar hensyn til utvalgsstørrelsen som Tversky og Kahneman (1974) har beskrevet. Fischbein et al. (1991) fant at omfanget av denne løsningsstrategien eller misoppfatningen økte jo eldre elevene ble. De mener at en grunn til dette er at jo eldre elevene blir jo mer bruker de forholdstall som et mål på sannsynlighet. Denne overgeneraliseringen av sannsynlighet som forholdstall, og at man ikke tar hensyn til utvalgsstørrelsen støtter min studie.

Forholdsprinsippet står sterkt hos elevene jeg har undersøkt. Likevel er det utsagn i datamaterialet som taler for at elevene er usikre på svarene sine. Svaret som er avbildet i figur 5.1 mener jeg er en blanding av begrunnelsesmåtene forholdsprinsippet og følelse (som jeg beskriver i kapittel 5.2). Her mener jeg at eleven opplever at det er en konflikt mellom intuisjonen og følelsen, og kunnskapen om sannsynlighet som forholdstall.



Figur 5.1: Elevsvar på oppgave 8S.

Det virker altså som eleven har en slags overgeneralisering av den klassiske tilnærmingen til sannsynlighet. Det virker som denne eleven knytter sannsynlighet sterkt til forholdstall, og bruker dette også i situasjoner hvor eleven har en følelse av at forholdsprinsippet ikke stemmer.

Noen elever tok også i bruk den klassiske tilnærmingen på oppgave 7S a) og b). Dette svarte en elev på oppgave 7S a): "Sannsynligheten for å trekke den andre hvite kula $= \frac{1}{3}$ fordi det gjenstår 3 kuler og 1 av dem er hvit". Den samme eleven svarte dette på oppgave 7S b): "Sannsynligheten for at den første var hvit $= \frac{2}{4}$ fordi det var 4 kuler til sammen og 2 av dem var hvit". Min tolkning er at eleven her bruker formelen $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$, altså den klassiske tilnærmingen til sannsynlighet. Jeg mener dette fordi eleven i begge oppgavene refererer til hvor mange kuler det er til sammen og hvor mange av dem som er hvite. Jeg mener besvarelsen er et godt eksempel på det som blir kalt falkfenomenet. Dette mener jeg siden elevene ikke tar hensyn til at kunnskap om at den andre kulen var hvit påvirker sannsynligheten for at den første kulen var hvit i oppgave 7S b).

Jeg har nå gitt flere eksempler på hva jeg mener er begrunnelser som tar utgangspunkt i forholdstall som et mål på sannsynlighet. Det som er felles for begrunnelse er at elevene tar utgangspunkt i formelen $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$ eller brøken $\frac{del}{hele}$, eller at de sier at forholdet er likt. Begrunnelsesmåten forholdsprinsippet går altså ut på at elevene knytter sannsynligheten sterkt til et forholdstall og en brøk. Jeg har i denne delen bare trukket fram eksempler fra de skriftlige oppgavene, men begge de to elevgruppene tok i bruk forholdsprinsippet også på oppgave 3M.

5.1.2 Lik sannsynlighet

Kategorien lik sannsynlighet går ut på at elevene begrunner svarene sine ved å si at utfallene er like sannsynlige. For å bruke forholdsprinsippet må sannsynlighetsmodellen være uniform, det vil si at alle utfallene er like sannsynlige. Lik sannsynlighet er altså en av egenskapene elevene bruker i forholdsprinsippet. Det som skiller forholdsprinsippet og lik sannsynlighet er at i begrunnelser som havner i underkategorien forholdsprinsippet vil elevene i stor grad definere sannsynligheten som et forholdstall. I kategorien lik sannsynlighet vil elevene derimot se på to enkeltutfall og si at de er like sannsynlige, uten å begrunne dette ved hjelp av forholdstall.

Den typiske begrunnelsen som havner i kategorien lik sannsynlighet er dette svaret på oppgave 3S: ”C) begge er like sannsynlige. Det er det samme å få en femmer og en sekser”. I oppgave 3S skulle elevene svare på hva som var mest sannsynlig av å få en femmer og en sekser eller to seksere, på et kast med to terninger. Jeg har tolket at eleven her mener at sannsynligheten er like stor siden det er like stor sannsynlighet for å få en femmer og sekser når man kaster en terning. Dette er korrekt når man ser på enkelthendelsene å kaste en femmer eller sekser, men når man skal se på den sammensatte hendelsen å få to seksere eller en femmer og en sekser må man ta hensyn til antall permutasjoner. Derfor blir svaret til eleven feil.

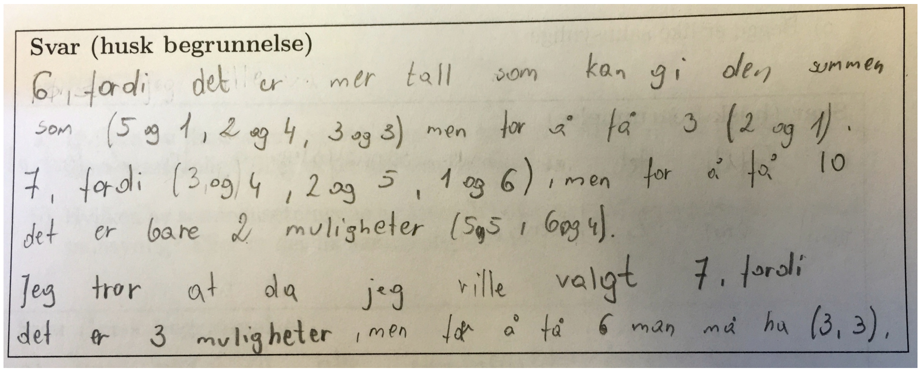
Som Lecoutre (1992) skriver er det noen elever som har oppfatningen lik sannsynlighetsfeil. Jeg mener at jeg så denne oppfatningen i de fleste av begrunnelsene som ligger i kategorien lik sannsynlighet. Blant annet i dette svaret på oppgave 3S: ”Begge er like sannsynlige fordi det er helt tilfeldig hva det blir” Her tolker jeg at eleven mener at en femmer og en sekser er like sannsynlig som to seksere, siden det er tilfeldig hva du får. Dette mener jeg er et typisk eksempel på et ”alt kan skje”-svar, som Lecoutre (1992) beskriver.

Et annet svar som jeg har plassert i kategorien lik sannsynlighet er dette svaret på oppgave 2S a): ”Sannsynligheten for alle sammensetningene er like stor fordi etter hvert kast er det 50/50 for å få K eller M.” Eleven sier her at sannsynligheten for alle de fire sammensetningene er lik siden det etter hvert kast er 50/50 for å få mynt eller kron. Jeg tolker at med 50/50 mener eleven at det er like stor sannsynlighet å få mynt eller kron. Eleven begrunner altså svaret sitt med at to utfall er like, og jeg har derfor plassert svaret i kategorien lik sannsynlighet. Det kan diskuteres om eleven har oppfatningen lik sannsynlighetsfeil eller ikke. Som Watson (2005) skrev kan 50/50 brukes av noen elever som at ”alt kan skje”, men jeg mener ikke eleven bruker 50/50 i denne betydningen. Eleven har faktisk rett i at det er 50/50 om man kaster mynt eller kron. Jeg mener at i stedet for at eleven har oppfatningen ”alt kan skje” har han beskrevet uavhengige hendelser. Jeg mener dette siden han sier ”etter hvert kast er det 50/50 for å få K eller M”. Dette vil være en korrekt matematisk begrunnelse, og en akseptert løsningsstrategi for å komme fram til svaret på oppgave 2S a). Begrunnelsesmåten eleven bruker er altså lik sannsynlighet, men han har ikke oppfatningen lik sannsynlighetsfeil.

Begrunnelsesmåten lik sannsynlighet går altså ut på at elevene begrunner svaret sitt med å si at to enkelthendelser er like sannsynlige. I mange av svarene som havner i denne underkategorien har jeg tolket at elevene har misoppfatningen lik sannsynlighetsfeil, som beskrevet av Lecoutre. Begrunnelsesmåten lik sannsynlighet ble brukt av elevene på oppgave 2S og 3S. I tillegg ble begrunnelsesmåten brukt i den muntlige delen på oppgave 2M og 5M.

5.1.3 Kombinatorikk

Begrunnelsesmåten kombinatorikk vil si at elevene tar i bruk kombinatoriske betraktninger i begrunnelsene. Et eksempel på begrunnelsesmåten kombinatorikk er elevsvaret på oppgave 5S som kan sees i figur 5.2. Jeg tolker at eleven i dette svaret har telt opp antall kombinasjoner og velger den summen som har flest kombinasjoner. Som jeg tidligere har skrevet i kapittel 3.1.5 brukte Fischbein et al. (1991) to oppgaver som var identisk med de to første spørsmålene i oppgave 5S. De delte inn begrunnelsene elevene gav i fire kategorier. Elevsvaret jeg har vist til kan havne i både den tredje og den fjerde kategorien. Disse kategoriene gikk ut på at eleven kommer


Svar (husk begrunnelse)

6, fordi det er mer tall som kan gi den summen som (5 og 1, 2 og 4, 3 og 3) men for å få 3 (2 og 1).
7, fordi (3 og 4, 2 og 5, 1 og 6), men for å få 10 det er bare 2 muligheter (5 og 5, 6 og 4).
Jeg tror at da jeg ville valgt 7, fordi det er 3 muligheter, men for å få 6 man må ha (3, 3).

Figur 5.2: Elevsvar på oppgave 5S.

med alle kombinasjonene, men vet ikke at man må ta hensyn til rekkefølgen og at eleven kjenner til alle permutasjonene. Det er tydelig at eleven vet alle kombinasjonene man kan få, men hun skriver ikke opp alle permutasjonene. Likevel kan det tyde på at hun har kunnskap om at rekkefølgen har noe å si siden hun velger summen sju i stedet for seks siden man må ha (3,3) for å få seks. Grunnen til at eleven refererer til (3,3) kan være at hun vet at denne kombinasjonene bare gir én permutasjon. Siden alle kombinasjonene til sju gir opphav til to permutasjoner, velger hun summen sju. Jeg velger derfor å karakterisere begrunnelsen i figur 5.2 som en begrunnelse som havner i den fjerde kategorien til Fischbein et al. (1991) siden det virker som eleven har en forståelse av at seks og sju har ulikt antall permutasjoner.

En annen elev kommer med dette svaret på oppgave 5S: ”1. omgang = 6 fordi det er flest muligheter til sammen, f.eks. 4+2/3+3/5+1. 2. omgang = 7 eller 8, sjansen er like stor og det er flest muligheter for å få 7 eller 8. 3. omgang: 6, 7 eller 8”. Det første jeg vil argumentere for er at eleven har misforstått oppgaven, likevel mener jeg at svaret er så interessant at det er verdt å diskutere. Grunnen til at jeg mener at eleven har misforstått oppgaven er at han i spørsmål to svarer sju eller åtte. Jeg mener at eleven tolket spørsmålet til å spørre om hvilke summer mellom sju og ti han ville velge, og ikke om han ville velge sju eller ti. Uansett begrunner eleven svaret sitt ut fra antall kombinasjoner. Han kommer opp med kombinasjonene som gir seks, men han gir inntrykk av at han ikke vet at han kommer med alle, siden han sier ”f.eks”. Videre kommer han fram til sju eller åtte, dette er summer som har like mange kombinasjoner, men sju har flere forskjellige permutasjoner. Det samme skjer i det siste spørsmålet, her klarer ikke eleven å se forskjellen på seks, sju og åtte, siden disse har like mange kombinasjoner. Det virker altså som at eleven har en forståelse av at du må telle opp antall kombinasjoner, og ikke antall permutasjoner når du skal avgjøre hvilken som er mest sannsynlig.

Et annet eksempel på at elevene tar i bruk kombinatorikk er det 1T-elevene diskuterte på oppgave 4M. Før sekvensen jeg vil vise til, har jeg spurt elevene om hva som er forskjellen på summene seks, sju og åtte. Dette svarer elevene:

282. Sander:	Nei, okei. Det som er med åtte er at åtte har tre kombinasjoner som sju, bare at sju har tre kombinasjoner med to ulike hver gang. Den har ikke to like.
283. Susanne:	Mhm.
284. Sander:	Åtte den har fire pluss fire, det er to like tall og på grunn av det så synker da sjansen for å få det. Fordi at_
285. Kristoffer:	Når det er et partall og da må du få to like. Det er ikke sånn at de kan hoppe om, de kan ikke bytte plass som treerens.

Jeg tolker her at Sander og Kristoffer mener det er større sannsynlighet for å få sju siden den har tre ulike kombinasjoner med to ulike tall hver gang. Grunnen til dette er at to like tall ikke kan bytte plass, eller ”hoppe om” som Kristoffer sier. Det virker altså som disse elevene har en forståelse av at det er permutasjonene du må se på og ikke bare kombinasjonene, i motsetningen til hva eleven over svarte på oppgave 5S. Jeg har valgt å plassere sekvensen i kategorien kombinatorikk siden elevene tar utgangspunkt i hvor mange kombinasjoner og permutasjoner de ulike summene har, og bruker dette til å avgjøre hvilken sum de ville tippet på.

Begrunnelsesmåten kombinatorikk ble brukt på oppgave 3S, 5S og 4M. Alle disse oppgavene handler om kast med en terning, og det er derfor naturlig å ta i bruk kombinatoriske betrakninger Det er mange elever i min studie som har en forståelse av at du må se på antall kombinasjoner når du skal avgjøre sannsynligheten for en hendelse og bruker dette til å begrunne svarene sine. Men det er mange elever som bare tar i bruk kombinasjonene, og som ikke ser at de forskjellige hendelsene kan ha ulikt antall permutasjoner og dermed ulik sannsynlighet. Dette stemmer godt med det Fischbein et al. (1991) fant i sin studie, om at elevene intuitivt forstår at det er en sammenheng mellom kombinasjonene og sannsynligheten til hendelsene, men at de ikke har en forståelse av at man også må se på permutasjonene.

5.1.4 Plassering på tallinjen

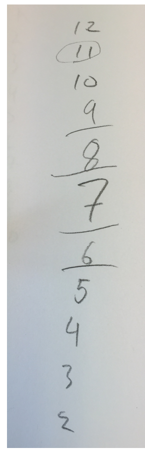
Begrunnelsesmåten plassering på tallinjen går ut på at elevene begrunner svaret sitt på bakgrunn av hvor utfallene er plassert på tallinjen. Det første eksempelet jeg vil ta utgangspunkt i når jeg beskriver begrunnelsesmåten plassering på tallinjen er en del av diskusjonen til 1P-gruppen på oppgave 4M. På forhånd hadde Martin påstått at han ville satset på summen sju og dette er forklaringen han gir til medelevene:

280. Martin:	Også er det størst, nest størst, tredje største også 4, 10, 11, 12, 3, 2. Her. (skriver opp tallene i stigende rekkefølge på et ark og peker på arket). Og det her er den største. (peker på sju).
281. Andreas:	Åja, for den er i midten?
282. Martin:	Ja.
283. Andreas:	Åja, åja, så det blir liksom gjennomsnittet, er det det du mener?... Nei, jeg vet ikke. Altså, hva det kalles når du har det miderste tallet?.. Det heter. Også bruker du det som gjennomsnittet. Det heter..
284. Susanne:	Median er det det?
285. Andreas:	Så det blir en median.

Jeg tolker at begrunnelsen Martin gir går ut på å tegne opp en tallinje med tallene 2 - 12 som representerer summene man kan få med et kast med to terninger. Tallinjen han tegnet opp kan sees i figur 5.3. Han mener videre at sju må være summen med høyest sannsynlighet siden sju er i midten på tallinjen. Videre tolker jeg at Andreas godtar begrunnelsen til Martin og han bruker, men hjelp fra meg, begrepet median om sju. Det virker altså som elevene har en forståelse av at sannsynligheten er avhengig av hvor på tallinjen summen er plassert. Måten de begrunner dette på skiller seg fra de tidligere begrunnelsene jeg har beskrevet. Tidligere har elevene brukt formler og ord, men i sekvensen over tar elevene i bruk en tegning og begrunner ut fra tegningen og tallinjen hvorfor de ville satset på sju.

Senere i sekvensen ber jeg elevene om å finne de forskjellige kombinasjonene som gir summene seks, sju og åtte. Elevene oppdager da at det er tre forskjellige kombinasjoner på alle de tre summene, og de diskuterer videre hvordan de skal skille mellom disse summene. Dette er et eksempel på begrunnelsesmåten kombinatorikk. Selv om elevene kom inn på at ulike terninger kan bytte rekkefølge, stod begrunnelsen at tallet var i midten sterkt hos elevene, som Andreas viser her:

351. Andreas: Åtte og seks.. Begge har to terninger som er like.. Ehm.. Jeg vet ikke hva vi kunne gjort... Heh (puster ut tungt). Ja, jeg har ikke peiling. Jeg ville gått for 7 for at det er i midten da.



Figur 5.3: Tallinjen som Martin tegnet opp.

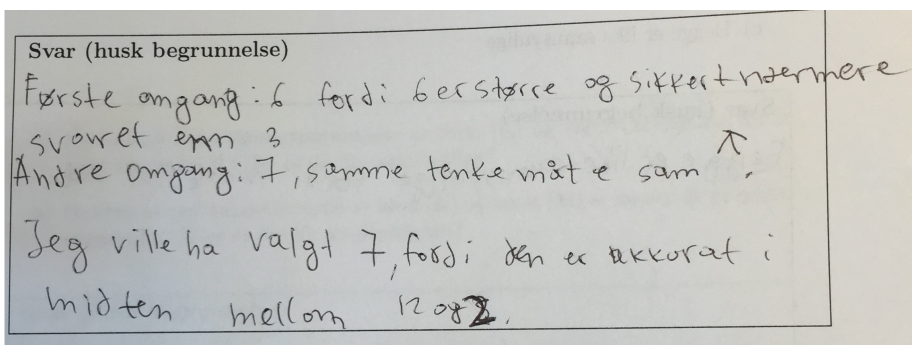
Det var ikke bare i diskujonen på oppgave 4M at 1P-elevene tok i bruk tallinjen de hadde tegnet opp. Også på oppgave 5M tok de den i bruk:

456. Martin: Siden 5 og 6 er kanskje 11, også er 11 lengre inn enn 12.
457. Andreas: Ja, det er det. Ja.
458. Martin: Jeg vet ikke.
459. Andreas: Det er liksom som du ser 2 og 3 på andre siden av skalaen.
460. Martin: Ja.
461. Andreas: For det finnes bare en.. måte å få 12 på.. og å få det høyeste. Det finnes to måter å få 11 på.. Tror jeg. Så sånn sett må det jo nesten være større sjanse å få 5 og 6.

Her tolker jeg at elevene bruker tallinjen til å avgjøre om det er størst sannsynlighet for å få en femmer og en sekser eller to seksere. Elevene ser at en femmer og en sekser er det samme som elleve, og to seksere det samme som tolv. Siden elleve er lengre inn på tallinjen enn tolv, mener de det er større sannsynlighet for å få en femmer og en sekser. I det siste utsagnet i sekvensen begrunner Andreas ved hjelp av hvor mange måter det er å få de forskjellige summene, altså en kombinatorisk begrunnelse. Elevene tar altså i bruk to forskjellige begrunnelser, men selv om de kommer fram til en korrekt kombinatorisk begrunnelse støtter de seg mye til tallinjen i starten.

Også i det skriftlige materialet begrunnet noen elever svaret sitt fra at tallet var i midten på tallinjen. Et eksempel er hva denne eleven svarte på oppgave 5S: ”Jeg ville valgt 7, fordi den er akkurat i midten mellom 12 og 2.”. Her ser vi at eleven velger sju siden det er *akkurat* i midten. En annen elev svarte dette på den samme oppgaven: ”8, fordi det er et tall som er ganske i midten. Og da er det kanskje større sannsynlighet at det blir det.”. I dette svaret ser vi at eleven velger 8 siden dette er ”ganske i midten”. Det virker altså som denne elevene mener det er større sannsynlighet å få en sum som er nært den miderste summen på tallinjen, og velger åtte i stedet for sju.

Det var ikke bare de miderste summene på tallinjen som ble valgt av elevene. Figur 5.4 viser et elevsvar på oppgave 5S. I figuren ser vi at eleven velger å satse på summen seks siden seks er størst av tre og seks. Dette er en av begrunnelsene som Fischbein et al. (1991) fant i sin studie. På det neste spørsmålet velger eleven å satse på sju, og påstår at begrunnelsen er den samme som på det første spørsmålet. Her er jeg uenig med eleven. Dersom begrunnelsen hadde vært den samme hadde eleven valgt ti siden det er høyest. Det eleven mener kan være at sju er nærmere svaret enn ti.


Svar (husk begrunnelse)
Første omgang: 6 fordi 6 er større og sikkert nærmere svaret enn 3
Andre omgang: 7, samme tenke måte som ↑.
Jeg ville ha valgt 7, fordi den er akkurat i midten mellom 12 og 2.

Figur 5.4: Elevsvar på oppgave 5S.

Begrunnelsesmåten plassering på tallinjen betyr at elevene begrunner svaret sitt ut fra hvor summene er plassert på en tallinjen over de mulige summene man kan få på to terningkast, eller at elevene velger det høyeste tallet. Det vanligste begrunnelsen er å velge tallet som er i midten, men det er også eksempler på at elever velger det høyeste tallet, slik som Fischbein et al. (1991) rapporterte. Elevene brukte plassering på tallinjen som begrunnelse på svarene sine på oppgave 5S, 4M og 5M.

5.1.5 Løsningstilnærming

Begrunnelsesmåten løsningstilnærming er en kategori som ble observert i diskusjonene elevgruppene hadde på oppgave 1M og 4M. Løsningstilnærming en kategori som er inspirert fra Konold sine studier (se for eksempel Konold (1989)). I begrunnelsesmåten løsningstilnærming vil elevene avgjøre sannsynligheten ut fra sannsynligheten for enkelthendelser. Et eksempel på dette er hva elevene sa under diskusjonen av oppgave 1M:

28. Kristoffer:	Ja, for på hvert terningkast så_
29. Sander:	Har du $\frac{5}{6}$.
30. Kristoffer:	Ja. Og det er ganske høy sannsynlighet.
31. Sander:	Du skal ha $\frac{5}{6}$ fem ganger og på den siste gangen skal du få $\frac{1}{6}$ eller $\frac{5}{6}$.
32. Kristoffer:	Mhm.
33. Sander:	Da høres svart mest logisk ut. Jeg tror det er størst sannsynlighet for å få svart.

Her tolker jeg at elevene mener at det er høyest sannsynlighet for å få seks svarte sider når man kaster terningen siden det på hvert kast er høyest sannsynlighet for å få en svart side. Elevene antar at man har kastet fem svarte sider, og ser kun på det siste kastet. Siden det er høyest sannsynlighet for å få seks på det siste kastet, sier de at det er høyest sannsynlighet for å få seks svarte sider. Dette mener jeg er et typisk tegn på løsningstilnærming. Konold (1989) gjennomførte i sin studie intervjuer med studenter, der én av oppgavene som studentene måtte løse var identisk med oppgave 1M. Han skriver at elever som resonnerer ved hjelp av løsningstilnærming vil løse oppgaven ved å se for seg ett kast med terningen og siden sannsynligheten for å få svart på det kastet er så høy, vil man videreføre at sannsynligheten er høy for å få svart på alle kastene. Dette er samme resonnement som mine elever gjennomførte, derfor har jeg karakterisert sekvensen som løsningstilnærming. Oppgave 1M var lagd for å avdekke løsningstilnærming, og det var derfor ikke så overraskende at elevene tok i bruk denne strategien. Det som var mer overraskende var at løsningstilnærming også ble brukt i oppgave 4M hvor elevene skulle bestemme hvilken sum de ville satset på:

266. Malin:	Ja, jeg ville gjettet på sju. Du har fem også da.
267. Kristoffer:	Nei, for hvis du får en sekser eller en femmer på den ene terningen så blir du til å få høyere enn fem uansett.
268. Sander:	Hæ? Ja, fem ja.
269. Kristoffer:	Fem eller seks på den ene terningen, så kommer du til å få høyere enn fem uansett.
270. Sander:	Det var derfor sju var så fint tall.

I denne sekvensen oppfatter jeg at Kristoffer sier at fem ikke kan være summen med høyest sannsynlighet for dersom du kaster fem eller seks får du en sum som er høyere enn fem uansett hva du kaster på det neste kastet. Jeg mener at Kristoffer her ser på hva du får på den ene terningen, han konsentrerer seg om en enkelthendelse i stedet for å se på sammensetningene av kombinasjonene, og den globale sammenhengen. Derfor har jeg valgt å karakterisere dette som løsningstilnærming.

Løsningstilnærmingen er altså en begrunnelsesmåte som går ut på at elevene baserer sannsynligheten på enkelthendelser. Denne begrunnelsesmåten er den samme som Konold har beskrevet. Løsningstilnærming ble brukt av elevene på oppgave 1M og 4M.

5.1.6 Tilfeldighet

Underkategorien tilfeldighet er en samlekategori som inneholder begrunnelser som tar utgangspunkt i egenskaper elevene tillegger begrepet tilfeldighet. De to egenskapene elevene bruker er at det ikke er mønster i rekkefølgen og det er for få av samme utfall på rad. En oppgave der elevene brukte egenskapen mønster var oppgave 2M. I denne oppgaven skulle elevene avgjøre hvilken rekkefølge av mynter som var tilfeldig. Dette sa 1P-elevene:

81. Andreas:	Skal vi bare gå for Daniel?
82. Ingrid:	Mhm.
83. Andreas:	For han har et slags mønster på_
84. Martin:	Ja.
85. Andreas:	På kron og mynt i starten i hvert fall.
86. Martin:	Ja.

Jeg tolker her at elevene kommer fram til at det var Daniel som jukset siden han har et mønster på rekkefølgen til mynt og kron. De mener altså at en tilfeldig rekkefølge ikke skal ha et mønster. Denne begrunnelsesmåten mener jeg ligner på begrunnelsesmåten som Green (1982) beskriver som "Clare too regular pattern" (s. 278). I Green sin studie var Clare den som hadde jukset, men som jeg valgte å kalle Daniel.

Grunnen til at jeg har plassert sekvensen i kategorien tilfeldighet er at elevene tok utgangspunkt i én av egenskapene til begrepet tilfeldighet og brukte denne egenskapen til å avgjøre svaret sitt. Jeg mener sekvensen er en matematisk begrunnelse siden elevene tydelig reflekterte over hvorfor et mønster i rekkefølgen førte til at de mente at personen jukset. Den neste sekvensen jeg vil vise mener jeg er et godt eksempel på at elevene har en god forståelse av sammenhengen mellom mønster og tilfeldighet. Dette diskuterte 1T-elevene på oppgave 2M:

170. Susanne:	Aldri mer enn tre, nei. Mhm. Så dere mener at når man kaster en mynt, og det skal være helt tilfeldig så skal det ikke være noe mønster?
171. Kristoffer:	Mhm (bekreftende).
172. Sander:	Det skal ikke det, det kan jo bli et mønster, men sjansen for at det blir et mønster er liten sannsynlighet.
173. Susanne:	Mhm.
174. Kristoffer:	I hvert fall hvis det skal være et mønster som skal følge gjennom hele her.
175. Kristoffer:	Ja.
176. Sander:	Men ikke gjennom hele, da har du hatt flaks.

Her tolker jeg at Sander mener at det er mulig å få et mønster på et kast med en mynt, men at det er liten sannsynlighet for at det skal skje. Dette resonnementet mener jeg vitner om at elevene har en god forståelse for sammenhengen mellom mønster i rekkefølgen og tilfeldighet.

En annen egenskap som elevene brukte for å avgjøre hvem som hadde jukset med myntkastene var at Daniel hadde for få av et utfall på rad:

165. Susanne:	Men dere mener at det er han Daniel som har jukset for dere ser at det er et mønster i hans rekkefølge?
166. Kristoffer:	Ja, det ser jo ut som det er han som har jukset.
167. Susanne:	Ja.
168. Kristoffer:	Sånn på en logisk måte.
169. Malin:	Også er det aldri mer enn tre.

Det som gjør at jeg karakteriserer dette som en ny egenskap som elevene tillegger tilfeldighet er at Malin sier at Daniel aldri har mer enn tre. Jeg tolker her at Malin mener at i en tilfeldig rekkefølge vil det være steder hvor det kommer flere enn tre av samme utfall på rad. Dette mener jeg er samme type begrunnelse som Green (1982) beskrev som "Clare too short run". I Greens studie var det 3 % av elevene som brukte denne begrunnelsen. Han skriver at dette var en av to begrunnelser som var gyldige, hvor den andre gyldige var at Clare hadde for regelmessig mønster.

Det kan diskuteres om begrunnelsesmåten tilfeldighet skal plasseres i hovedkategorien matematiske begrunnelser eller følelsesmessige begrunnelser. Et argument for at tilfeldighet burde vært plassert i følelsesmessige begrunnelser er at det ikke er noe regning bak begrunnelsene, og at elevene derfor resonnerer ved hjelp av en følelse de har om hva som er tilfeldig. Dette stemmer, elevene har ikke brukt regning for å komme fram til svarene sine, men begrunnelsene elevene bruker mener jeg viser at elevene vet hva som ligger i det matematiske begrepet tilfeldighet. Egenskapene elevene brukte var at tilfeldige rekkefølger ikke skulle ha mønster og at det var for korte sekvenser med likt antall utfall. Begge disse begrunnelse er gyldige, som Green (1982) skriver. Jeg har derfor valgt å plassere underkategorien tilfeldighet i hovedkategorien matematiske begrunnelser.

Det var flere eksempler på at elevene begrunner svaret sitt med at det er tilfeldig hva du får. Jeg har ikke valgt å plassere disse begrunnelsene i hovedkategorien tilfeldighet siden begrepet tilfeldighet her blir brukt på en måte som ikke vitner om at elevene har en matematisk forståelse av begrepet og siden elevene ikke begrunner på bakgrunn av egenskaper til tilfeldighet. Et typisk svar er dette sitatet fra oppgave 2S a): "Jeg synes alle sammensetningene er like sannsynlige, det er jo tilfeldig hva du får". Selv om eleven her tar i bruk begrepet tilfeldighet har jeg tolket dette til å ligge i kategorien lik sannsynlighet siden jeg mener dette er et "alt kan skje"-svar.

Tilfeldighet er altså en begrunnelsesmåte som elevene bruker i oppgaver hvor de skal avgjøre hvilken sammensetning som er tilfeldig, det vil si på oppgave 2M og 6M. Tilfeldighet er en samlekategori på de korrekte egenskapene elevene tillegger tilfeldighet. Egenskapene jeg har beskrevet er at det ikke skal være noe mønster i rekkefølgen og ikke for få utfall på rad. Underkategorien tilfeldighet blir i så måte en litt annerledes underkategori sammenlignet med de andre kategoriene, siden det ligger flere forskjellige typer begrunnelser i underkategorien.

5.2 Følelsesmessige begrunnelser

Hovedkategorien følelsesmessige begrunnelser inneholder tre underkategorier:

- Følelse
- Representativitet
- Erfaring

Jeg vil i dette delkapittel beskrive disse tre underkategoriene.

5.2.1 Følelse

Begrunnelsesmåten følelse vil si at elevene begrunner svaret sitt på bakgrunn av en følelse de har om hva som er riktig svar. Elevene kan enten si at ”jeg har en følelse om at det er riktig”, eller så har jeg tolket at elevene bruker følelsen. Begrunnelsesmåten følelse er den underkategorien som ble brukt på flest oppgaver. Jeg fant begrunnelsen følelse i alle oppgavene utenom oppgave 3S, 7S og 5M.

Et eksempel jeg vil trekke fram i underkategorien følelse er det 1T-elevene sa på oppgave 1M. Tidligere har elevene kommet fram til at seks svarte sider var mest sannsynlig på bakgrunn av en forklaring basert på løsningstilnærming. Etter dette har Sander oppdaget at du bare må ha hvit én gang på de seks kastene, men at du må ha svart på alle kastene dersom seks svarte skal ha størst sannsynlighet. Videre sier han dette:

84. Sander:	Derfor har jeg lyst til å holde med hvit. For den kan du få en gang, men det her er mer veddefølelsen min. Hvis jeg skulle veddet på noe. Ikke logisk tenkning. Så logisk tenkning kunne ikke sagt sånn.

Her ser man at Sander sier at han har lyst til å holde med hvit, for han har en følelse om at det er korrekt. Jeg har tolket at han har en personlig følelse om hva som er korrekt svar, men han begrunner ikke hvorfor han har denne følelsen. Dette er karakteristisk for begrunnelser som ligger i kategorien følelser. I sekvensen ser man at Sander referer til veddefølelsen sin, det er interessant at han mener at denne følelsen er ulik logisk tenkning. Jeg tolker her at Sander har en forståelse av at i matematikk må man bruke logisk tenkning, og at dette gjelder i sannsynlighetsregning også. Det kan være fristende å si at Sander har brukt intuisjonen sin i svaret han gir, men en senere sekvens mener jeg viser at det er en annen følelse enn intuisjonen Sander bruker. Sekvensen jeg vil vise til er denne:

95. Sander:	Men måtte vi ha en logisk forklaring på hva vi mente?
96. Susanne:	Jo mer dere forklarer jo bedre er det. Men.. dersom dere ikke har noen forklaring så har dere ikke noen forklaring.
97. Sander:	Nei, vi har ikke kommet til sannsynlighetsregning enda. Jeg husker bare brøkdeler av den.

Min tolkning av denne sekvensen er at Sander har en oppfatning om at en følelse han har ikke er en god nok begrunnelse. Fischbein (1975) skriver at en intuisjon er en kognisjon som kommer direkte og at man ikke har behov for noen annen begrunnelse. Sander spør her om han må ha en logisk forklaring, det virker altså ikke som han ser på svaret som selvforklarende. Derfor kan man ikke karakterisere følelsen Sander har som en intuisjon. Det må derfor være en annen form for følelse som gjør at Sander kommer frem til svaret sitt.

Jeg har også valgt å legge begrunnelser som ikke eksplisitt refererer til en følelse til å ligge i denne kategorien siden jeg mener det er tydelig at elevene også i disse har brukt en følelse de har. Dette svarte en elev på oppgave 5S: ”6 det virker mest sannsynlig for meg. 10 det virker mest sannsynlig for meg. 8 ville jeg valgt”. Her begrunner eleven ut fra hva som virker mest sannsynlig for seg selv, og jeg har derfor valgt å tolke at eleven her tar i bruk en følelse. Det virker som eleven har en subjektiv forståelse av sannsynlighet. I den subjektivistiske tilnærmingen til sannsynlighet trenger ikke noe som er tilfeldig for meg, nødvendigvis være det for noen andre. Et annet eksempel på et svar hvor jeg mener eleven bruker følelsen sin, uten å referere til denne er dette svaret på oppgave 8S: ”a) og b) er like sannsynlige fordi der er egentlig samme prosent, men kanskje a) høres mer sannsynlig ut.”

Dette er også et eksempel hvor elevene bruker en følelse de har til å avgjøre svaret sitt:

134. Sander:	Som sagt, hadde jeg vært en av disse to så hadde sikkert jeg vært Daniel dersom jeg jukset. Av den grunnen at jeg hadde bare trykket MKMMKMKMMKMMKK-MMKKMMK. For jeg ville ikke hatt KKKKK, for det er usannsynlig. Og jeg vet det er usannsynlig og derfor ville jeg ikke gjort det.

Denne sekvensen er tatt fra diskusjonen til 1T-gruppen på oppgave 2M. Her ser vi at Sander sier at Daniel har jukset siden han har en sekvens som han ville skrevet opp selv. Dette er en følelse Sander har, derfor har jeg lagt denne begrunnelsen i kategorien følelser.

Begrunnelsesmåten følelse er den begrunnelsesmåten som ble funnet på flest oppgaver. Det virker altså som dette er en svært anvendelig begrunnelsesmåte. Begrunnelsemåten går ut på at elevene bruker følelsen sin til å avgjøre svaret sitt på oppgavene.

5.2.2 Representativitet

Det var flere av oppgavene som skulle avdekke oppfatningen som Tversky og Kahneman (1974) kaller representativitet. Det viste seg at flere av elevene tok i bruk denne løsningsstrategien. Jeg velger å dele kategorien representativitet inn i to underkategorier, *spredning* og *likt antall*. Det ble kun funnet ett eksempel på en elev som brukte begge underkategoriene samtidig. Denne eleven svarte dette på oppgave 2S a): "MKKMK og KMMMK er mest sannsynlig fordi der er det omtrent likt antall og resultat M/K er spredt". Som vi ser svarte denne elev at MKKMK og KMMMK er mest sannsynlig og begrunner dette ut fra at disse sekvensene er både blandet og det er omtrent likt antall av hver sort. Dette mener jeg er et tegn på at eleven tillegger egenskaper til et globalt utvalgt også til det lokale utvalget med bare fem kast med terningen. Dette skriver Tversky og Kahneman (1974) er et tegn på heuristisk representativitet.

Andre elever begrunner svaret sitt i oppgave 2S a) og b) kun ved hjelp av én av underkategoriene. Denne eleven mener jeg begrunner kun på bakgrunn av spredning: "Jeg tror det er minst sannsynlig og få KKKMM. Det virker mest sannsynlig å få litt blandet". Denne eleven mener at det er mest sannsynlig å ha spredning i sekvensene. En annen elev svarte derimot dette på den samme oppgaven: "KMKMK er minst sannsynlig fordi den er så variabel". Her tolker jeg at eleven mener at det er lite sannsynlig å få en sekvens med stor spredning. Elev nummer to bruker altså den samme begrunnelsesmåten, men har en annen oppfatning av hva som er minst sannsynlig. Begrunnelsesmåten spredning kan i så måte bety at elevene mener at det er størst sannsynlighet for at kron og mynt er blandet eller størst sannsynlighet for en sekvens som ikke er blandet.

Også under den muntlige diskusjonen diskuterte elevene om utfallene skulle være spredt. Et eksempel på dette er det Andreas sa under diskusjonen til 1P-elevene på oppgave 6M:

509. Andreas:	Det kan være greit kanskje. Ehm, regndråpene på B er mer spredt utover taket og i tilfeldig, sånn her, skulle til å si rekkefølge, men sånn tilfeldig utover de forskjellige kvadratene. Så derfor mener vi B. Var det greit?

Her tolker jeg at Andreas mener at figur B viser regndråper som er tilfeldig plassert. Han mener at regndråpene er tilfeldig siden de er spredt utover taket, og siden de er spredt tilfeldig utover alle de forskjellige kvadratene. Andreas mener altså at alle kvadratene må inneholde en regndråpe, og han har dermed valgt den semi-tilfeldige figuren. 1P-gruppen skiller seg på denne måten fra 1T-elevene. Mens 1P-elevene mente det skulle falle en regndråpe i alle kvadratene, var dette en egenskap som gjorde at 1T-gruppen avviste figur B:

389. Malin:	Tror dere det er en kule som treffer i hver rute?
	...
390. Kristoffer:	Nei.
391. Malin:	Nei? Da er det c.

I denne sekvensen mener jeg at Malin avgjør at svaret ikke kan være figur B siden den figuren har en regndråpe i hvert kvadrat, og derfor må det være figur C som er riktig.

Den andre underkategorien, likt antall, går ut på at elevene mener det er mest sannsynlig med likt antall av hvert utfall. Et eksempel er det denne eleven svarte på oppgave 2S b): ”MKMMM er mest usannsynlig fordi det er 4 mynt.”. Et annet eksempel på at elevene mente at mange av én sort var usannsynlig er denne sekvensen fra da 1T-gruppen jobbet med oppgave 2M:

124. Sander:	Sjansen for at du flipper det, også etterpå får du mynt, mynt, kron, mynt, kron også masse kroner igjen. Og hun har veldig mange M’er på rad og veldig mange kroner på rad.
125. Kristoffer:	Mhm.
126. Sander:	Så jeg ville gjettet at hun jukset.

Her ser vi at Sander mener at Anna var hun som jukset siden hun har for mange kron og mynt på rad.

Kategorien representativitet kan altså bety at elevene mener at det skal være likt antall av hvert utfall eller at utfallene er for lite/mye spredt. Det som er felles for disse er at elevene begrunnet ut fra oppfatningen Tversky og Kahneman kaller representativitet. Elevene mener at de lille utvalget skal ligne på det globale utvalget. I et globalt utvalgt skal kron og mynt over tid være spredt og det vil være ca. like mange kron og mynt til sammen. Kategorien representativitet er plassert i hovedkategorien følelse siden dette er en oppfatning eller følelse elevene har om utvalget. Begrunnelsesmåten representativitet ble funnet på oppgave 2S, 1M og 2M. Alle disse oppgavene hadde som mål å avdekke misoppfatningen representativitet, det er derfor ikke så rart at jeg fant denne begrunnelsesmåten. Representativitet kan ligne på begrunnelsesmåten tilfeldighet som jeg beskrev i kapittel 5.1.6. Begge disse begrunnelsesmåtene tar på hver sin måte utgangspunkt i egenskapene elevene tillegger begrepet tilfeldighet. Det som skiller de to kategoriene er at i representativitet tillegger elevene de globale egenskapene til et tilfeldig utvalg også i det lille utvalget, dette er ikke korrekt. I begrunnelsesmåten tilfeldighet vil elevene derimot ta utgangspunkt i korrekte egenskaper til et tilfeldig utvalg.

5.2.3 Erfaring

I noen oppgaver har jeg tolket at elevene har brukt erfaringene sine i begrunnelsene. Det er denne begrunnelsesmåten jeg har kalt erfaring. Det første eksempelet jeg vil vise til er noe Kristoffer sa under diskusjonen som 1T-gruppen hadde da de gjennomgikk oppgave 1S på nytt:

480. Kristoffer:	Jeg var på tivoli i Kristiansand og da vant jeg tre ganger på rad på et sånt lykkehjul. Og der satset jeg på det der det var spredt og ikke samlet.

Videre sier han dette:

499. Kristoffer:	Men på b) *hvilken ville du satset på?*. Jeg ville satset på b).
500. Sander:	Ja, det ville jeg også, det er bare for moro skyld.
501. Kristoffer:	Ja. (humrer litt). Og for at jeg har god erfaring med det.

Her mener jeg at Kristoffer bruker erfaringen fra da han var på tivoli til å avgjøre hvilket lykkehjul han ville satset på. Siden feltene på lykkehjulet han vant på var spredt, ville han satset på lykkehjulet med spredte felt nå også.

Et annet eksempel på bruk av erfaring er tatt fra diskusjonen til 1P-gruppen på oppgave 5M:

419.	Andreas:	Selv om vi, alle vil jo ha to seksere i stedet for en femmer og en sekser_
420.	Ingrid:	Mhm.
421.	Andreas:	Men, sånn sett høres det vanskeligere ut å få to seksere, men å få, hvis vi sier, å jeg vil ha en femmer og en sekser.
422.	Ingrid:	Mhm.
423.	Andreas:	Også kaster du og får to seksere, å shit. (litt humring). Så vil det, det er fortsatt like stor sannsynlighet. Ehm.. tror jeg.
424.	Ingrid:	Jeg tror også det.

Jeg tolker her at elevene bruker erfaringen de har fra kast med to terninger, for eksempel spill som yatzy, til å avgjøre sannsynligheten. Før denne sekvensen har elevene diskutert hva de svarte på den skriftlige oppgaven som var nesten identisk (oppgave 3S). Elevene sa at på denne oppgaven svarte alle tre at begge hendelsene var like sannsynlige. Jeg tolker at erfaringene elevene har med seg gjør at de blir usikre på om det de tidligere har svart er korrekt. De mener at i spill er det bedre å få to seksere, og at det derfor burde være vanskeligere å få det. Selv om elevene diskuterer tidligere erfaringer fører ikke det til at de forandrer svaret sitt. Det virker altså ikke som elevene stoler på erfaringene de har, og de bruker i stedet en matematisk begrunnelse.

Erfaringer fra spill kan jeg ane at elevene drar nytte av også i de skriftlige besvarelsene på oppgave 3S. Dette svarte en elev: "a) det er større sjanse for å få to forskjellige tall". Vi ser her at eleven svarer korrekt, at det er størst sannsynlighet for å få en femmer og en sekser, men måten hun begrunner dette på har jeg tolket til å være en følelse hun har og ikke en matematisk begrunnelse. Jeg mener at denne følelsen er mye av det samme som 1P-elevene uttrykte ovenfor. Elevene har erfaringer med at det er bedre og vanskeligere å få to like tall på en terning og bruker dette til å avgjøre sannsynligheten. Grunnen til at jeg velger å karakterisere det skriftlige svaret som en følelse basert på erfaring er at eleven ikke gir noen matematisk begrunnelse for hvorfor hun mener at det er lettere å få to ulike tall.

Begrunnelsesmåten erfaring vil altså si at elevene bruker erfaringer de har fra hverdagslivet til å begrunne svarene sine. Erfaringene kommer ofte fra spill, noe som også vises ved at begrunnelsesmåten ble funnet på oppgave 3S, 4M, 5M og da elevene diskutere oppgave 1S i den muntlige delen. Alle disse er oppgaver som handler om terninger eller lykkehjul. I et sosialkonstruktivisitisk læringssyn er det viktig at man bygger på elevenes tidligere kunnskaper og erfaringer. Det kan derfor være nyttig at elevene har med seg disse erfaringene i undervisningen, men man må passe på at erfaringene blir brukt riktig i begrunnelsene.

5.3 Begrunnelser som refererer til konkreter

Begrunnelser som refererer til konkreter har ingen underkategorier. I dette delkapittelet vil jeg beskrive kategorien begrunnelser som refererer til konkreter.

Begrunnelser som refererer til konkreter vil si at elevene begrunner sannsynligheten til et utfall ut fra egenskapene til objektene eller konkretene som blir brukt i oppgavene. Denne begrunnelsesmåten ble brukt av elevene i oppgave 1S, 2S og av 1T-gruppen på oppgave 4M og 5M. Det typiske svaret som kom i de skriftlige oppgavene var dette svaret på oppgave 1S: "Jeg ville satset på lykkehjul 2 på grunn av at de gråe feltene er mer sprett enn hva de er på lykkehjul nummer 1". Tidligere har denne eleven sagt at sannsynligheten på de to lykkehjulene var like, men hun velger likevel å satse på lykkehjul 2. Dette kan ha noe med ordbruken i oppgaven å gjøre. Oppgaven spør om hva *du* ville satset på, og da blir det kanskje naturlig for elevene å ta et valg. Jeg prøvde å gå nærmere inn på dette i den muntlige delen og fikk elevene til å diskutere oppgave 1S en gang til. Da sa 1P-elevene dette:

572. Susanne:	Men teoretisk sett så vil det være lik sannsynlighet, [men ikke i praksis.
573. Andreas:	[Det er bare sånn magefølelse.
574. Ingrid:	Mhm.
575. Susanne:	Er det stor forskjell da?
576. Martin:	Nei. Eller jo_
577. Susanne:	Hvor mange ganger tror du at du hadde kommet til å vinne på lykkehjul 2 mot Martin på lykkehjul 1?
578. Martin:	Jeg ville vunnet hele tiden sikkert.
579. Ingrid:	Jeg tror vi hadde vunnet mer.

Her ser vi at selv om Ingrid er enig i at det teoretisk sett er lik sannsynlighet mener hun at ville vunnet mer på lykkehjul 2. Noen elever har altså en forståelse av at hvordan lykkehjulet er sammensatt har konsekvenser for hvordan sannsynligheten blir i praksis, selv om de har kommet fram til at begge lykkehjulene har lik sannsynlighet. Da jeg diskuterte dette med 1T-elevene mente de at sannsynligheten i praksis også ville være lik, men at de velger et lykkehjul ut fra et personlig valg, for eksempel spenning. Det virker altså som 1T-gruppen ikke har en oppfatning om at hvordan lykkehjulet er sammensatt har noe å si. Jeg mener at i begrunnelsesmåten konkreter har elevene en årsakstenkning. De velger lykkehjul 2 siden feltene her er mer spredt, de mener altså at en *årsak* til at man vinner på det lykkehjulet er at vinnerfeltene er mer spredt.

Et annet eksempel på en begrunnelse som refererer til konkreter er dette svaret på oppgave 2S a): "Jeg tror alle er like sannsynlige, en krone har en sjanse for å lande på begge sidene". Jeg tolker at elevene eleven mener at alle rekkefølgene er like sannsynlige siden en mynt har like stor sjanse for å lande på en av sidene. Elevene tar utgangspunkt i mynten, som er objektet i oppgaven, når han skal begrunne svaret sitt. Svaret står dermed i motsetning til tidligere elevsvar som også innebar at det var like stor sannsynlighet for å få mynt eller kron, men disse svarene refererte ikke til selve mynten. Elevsvaret over derimot tar utgangspunkt i en egenskap til selve mynten, og sier at den har like stor sjanse for å lande på begge sidene. Jeg har derfor plassert dette svaret i begrunnelser som refererer til konkreter.

Begrunnelser som refererer til konkreter vil altså si at elevene tar utgangspunkt i objektene eller konkrete i oppgaven. Elevene mener at sannsynligheten til et utfall er avhengig av egenskaper til objektene som er med i oppgavene, som mynter og lykkehjul. Jeg mener begrunnelsesmåten er en konsekvens av elevenes årsakstenkning.

Kapittel 6

Diskusjon

I diskusjonskapittelet vil jeg oppsummere og diskutere resultatene fra analysen. Jeg vil gå gjennom hver hovedkategori og diskutere grunner til at elevene bruker de ulike begrunnelse og hva man kan gjøre for å øke kvaliteten på begrunnelsene. Jeg vil også karakterisere de ulike begrunnelsene som korrekte og ikke korrekte. Jeg vil også svare på problemstillingen min diskutere om det var forskjeller i begrunnelsesmåtene som 1P- og 1T-elevene brukte. Helt til slutt vil jeg diskutere kvaliteten til studien.

6.1 Matematiske begrunnelser

Det ble funnet seks matematiske begrunnelser. Disse var forholdsprinsippet, lik sannsynlighet, kombinatorikk, plassering på tallinjen, løsningstilnærming og tilfeldighet. Av disse begrunnelsene er lik sannsynlighet og løsningstilnærming hentet direkte fra tidligere studier, fra henholdsvis Lecoutre (1992) og Konold (1989). Forholdsprinsippet, kombinatorikk og tilfeldighet har også blitt beskrevet tidligere, men de studiene jeg har lest har ikke beskrevet disse som egne begrunnelsesmåter, men mer som misoppfatninger elevene har. Plassering på tallinjen har ikke blitt beskrevet i stor grad tidligere, men Fischbein et al. (1991) fant at noen elever vil velge de høyeste tallet når de skal avgjøre hvilken sum som har høyest sannsynlighet fra et kast med to terninger.

Siden mange av begrunnelsesmåtene har blitt beskrevet tidligere vil jeg ikke diskutere disse noe videre utover det jeg har skrevet i analysekapittelet. Jeg vil derimot diskutere forholdsprinsippet, siden dette var en av begrunnelsene elevene brukte flest ganger. Jeg vil også diskutere plassering på tallinjen, siden jeg ikke har funnet mange eksempler på denne begrunnelsesmåten tidligere.

I begrunnelsesmåten forholdsprinsippet tolket jeg at det var svært mange elever som brukte forholdstall som et mål på sannsynlighet, og brukte dette når de skulle begrunne svarene. Det virket altså som at sannsynlighet i stor grad var knyttet til den klassiske tilnærmingen og forholdet mellom antall gunstige og antall mulige, eller forholdet mellom en del og det hele. Jeg mener dette er et tegn på at den klassiske tilnærmingen blir brukt i stor grad i norsk skole. I læreplanen står det at elevene skal "Finne og diskutere sannsyn gjennom eksperimentering, simulering og berekning i dagelegdagse samanhengar og spel" (Utdanningsdirektoratet, 2013). Jeg har ikke tatt med noen oppgaver i min studie hvor elevene måtte bruke simulering og eksperimentering, så jeg har ikke fått undersøkt hvilke begrunnelser elevene tar i bruk i slike situasjoner. Det er likevel tydelig at ingen elever tar i bruk store talls lov og statistiske betrakninger når de skal avgjøre sannsynlighetene i oppgave 8S og 3M. På begge disse oppgavene tok et flertall av elevene i bruk forholdsprinsippet. Jeg har tidligere sagt at det ikke er sikkert elevene har fått opplæring i store talls lov, men likevel kunne elevene ha hatt en intuisjon eller følelse om at det er større sannsynlighet å få 2 av 3 mynt enn 200 av 300 myn, og dermed svart korrekt. Fischbein og Schnarch (1997) fant at å ikke ta hensyn til utvalgsstørrelsen var en misoppfatning som økte med alder. En grunn til dette kan være at elevene opp gjennom skolegangen får vite at sannsynligheten uttrykkes med antall mulige utfall delt på antall gunstige utfall. Denne brøkformen for sannsynlighet tar de derfor med seg i oppgaver hvor den ikke kan brukes. Blant de yngste elevene i studien til Fischbein og Schnarch (1997) svarte kun 10% at sannsynligheten var like stor for å få 60% gutter på et lite og et stort sykehus. Dette kan ha å gjøre med at de yngste elevene i studien ikke hadde fått formel opplæring i sannsynlighet, og at de derfor ikke vet om forholdsprinsippet. De yngste elevene ikke har lært seg løsningsstrategien forholdsprinsippet, og bruker dermed ikke den begrunnelsesmåten. Det virker som elevene i min studie har fått en sekundærintuisjon (som Fischbein (1975) har beskrevet) om at når forholdet mellom en del og det hele er likt, vil også sannsynligheten være lik. For å unngå dette må elevene få grundig opplæring i når man kan bruke formelen $\frac{antall\, gunstige\, utfall}{antall\, mulige\, utfall}$, og når man må bruke andre strategier, som for eksempel store talls lov. Jeg mener lærere derfor må gjøre en poeng ut av at det finnes ulike tilnærminger til sannsynlighetsbegrepet og gi en innføring i når man bruker de forskjellige tilnærmingene, for på den måten kan man unngå at elevene bruker begrunnelser og løsningsstrategier som ikke er korrekte.

Den andre underkategorien jeg gå nærmere inn på er *plassering på tallinjen.* At elevene velger det høyeste tallet når de skal si hvilken sum som er mest sannsynlig når man kaster to terninger har blitt hevdet av Fischbein et al. (1991) tidligere. Jeg har derimot ikke sett eksempler i litteraturen på at elevene bruker en tallinje og begrunner at sju er mest sannsynlig siden sju er i midten. Denne begrunnelsen vil være matematisk korrekt, men jeg mener ikke elevene har den matematiske forståelsen for hvorfor begrunnelsen er korrekt er korrekt. Jeg vil nå argumentere for at ved et kast med to terninger, med n sider, er n+1 den summen som opptrer flest ganger. Altså i oppgave 5S og 4M har terningene seks sider, summen som det er høyest sannsynlighet for å få er derfor $n + 1 = 6 + 1 = 7$. Jeg har lagd en tabell som underbygger påstanden min:

Sum	Permutasjoner	Antall permutasjoner
2	1+1	1
3	1+2, 2+1	2
4	1+3, 3+1, 2+2,	3
...	...	...
n	1+n-1, n-1+1, 2+n-2, n-2+2,,...	n-1
n+1	1+n, n+1, 2+n-1, n-1+2, 3+n-2, n-2+3,...	n
n+2	2+n, n+2, 3+n-1, n-1 +3,...	n-1
...	...	...
n+n-2 =2n-2	n+n-2, n-2+n, n-1 + n-1	3
n+n-1 = 2n-1	n+n-1, n-1+n	2
n+n =2n	n+n	1

Tabellen viser alle summene man kan få med et kast med to terninger med n sider, permutasjonene som gir det ulike summene og antall permutasjoner. Som vi ser i tabellen øker antall permutasjoner fram til n+1, og minsker etterpå. Antall permutasjoner er symmetrisk om n+1.

Begrunnelsesmåten om at det miderste tallet er den summen som har flest permutasjoner er derfor korrekt, men jeg mener elevene ikke har denne matematiske forståelsen for hvorfor begrunnelsen deres er riktig. De kaller blant annet summen sju for median, dette mener jeg vitner om feil forståelse. Det er korrekt at sju vil være medianen av tallene 2, 3, ..., 11, 12. Median brukes som et mål for den verdien som ligger i midten av et statistiske materiale. Summene man kan få etter et kast med to terninger er ikke observerte verdier, summene er noe elevene har funnet ut på andre måter. Jeg mener derfor at elevene ikke kan bruke begerpet median om sju i denne sammenhengen.

6.2 Følelsesmessige begrunnelser

Følelsesmessige begrunnelser ble delt inn i tre underkategorier, følelse, representativitet og erfaring. Følelse vil si at elevene refererer til en følelse de har, og bruker denne til å begrunne svarene sine. Representativitet er oppkalt etter heuristikken som Tversky og Kahneman (1974) beskriver. Erfaring vil si at at elevene har en følelse basert på tidligere erfaringer, og bruker denne til å avgjøre sannsynligheten til utfallene.

Det kan være ulike grunner til at elevene tar i bruk følelsesmessige begrunnelser. Det som er sikkert er at følelsesmessige begrunnelser er rimelig unikt for sannsynlighetsregning. I for eksempel algebra vil ikke elevene kunne bruke en følelse de har til å avgjøre svaret på en ligning. I stedet for å bruke følelsen vil mange elever i algebra gi opp. Elevene jeg studerte brukte derimot følelsen sin. Selv om elevene kanskje ikke hadde den matematiske kompetansen til å løse oppgaven stoppet det dem ikke, men de gikk over til subjektive løsningsstrategier.

Jeg så i ettertid at flere av oppgavene var i vanskeligste laget for elevene. Jeg mener likevel studien er verdifull, for den viser at i sannsynlighetsregning vil elevene svare på spørsmålene uansett som de har forutsetningene for å løse oppgavene. Dersom elevene ikke har løsningsstrategier for å løse oppgavene matematiske, vil de ta i bruk følelsesmessige begrunnelser, som for eksempel kan komme fra noe de har opplevd tidligere. Dette kan sees i sammenheng med den subjektive tilnærmingen til sannsynlighet hvor sannsynligheten er et mål på hvor sannsynlig utfallet er for deg (Batanero et al., 2005). En grunnene til at jeg tror elever tar i bruk følelsesmessige begrunnelser er at oppgaver i sannsynlighet ofte er hverdagslige, og elevene kan gjerne ha opplevd det selv. De tar dermed med sine subjektive oppfatninger av hva som er rett og galt når de skal avgjøre sannsynligheten. Et eksempel på dette er Kristoffer fra 1T-gruppen som har vært på tivoli og vunnet tre ganger på rad på et lykkehjul med spredte vinnerfelt. Kristoffer har god erfaring med et slikt lykkehjul og det er kanskje ikke så rart at han vil satse på lykkehjul b) en gang til.

En annen grunn til at elever tar i bruk følelsesmessige begrunnelser kan være at elevene tok i bruk en subjektivistisk tilnærming til sannsynlighet. Sannsynlighet opptrer i stor grad i hverdagen til folk flest. Du ser værmeldingen på TV, ser valgmålinger og andre undersøkelser i media, for eksempel hvor stor sannsynlighet det er for at klimaendringene er menneskeskapte. Bruk av sannsynlighet i media kan være ulik den matematiske definisjonen av sannsynlighet. Hverdagsbegrepet sannsynlighet kan også være ulik det matematiske begrepet. Man kan for eksempel si ”Jeg er 99,99 %

sikker på at jeg har rett". Slike utsagn kommer sjeldent fra matematiske beregninger, men brukes som et mål eller uttrykk for hvor sikker man er. Begrepet sannsynlighet kan derfor være vanskelig for elevene å forstå, og de kan bli usikre på hvilken tilnærming de skal bruke. Siden den subjektive tilnærmingen kan virke mest kjent for elevene fra hverdagen, kan denne være enklest for elevene å ta i bruk i møte med oppgavene.

6.3 Begrunnelser som refererer til konkreter

Begrunnelser som refererer til konkreter vil si at elevene finner sannsynligheten ut fra egenskapene til objektene i oppgaven. Jeg påstår at de fleste begrunnelsene som refererte til konkreter kom fra at elevene hadde en årsakstenkning. Spesielt så man dette da elevene diskuterte om det var en sammenheng mellom hvor de grå feltene på lykkehjulet var plassert og vinnersjansene for å vinne på de to lykkehjulene.

Som Borovcnik og Peard (1996) påstår er det et hierarki i tenkningen, hvor årsakstenkning ligger i midten mellom logisk tenkning og sannsynlighetstenkning. Fra hverdagen er man vant til å tenke årsaker, man vil finne grunner til at hendelser skjer. I sannsynlighetsregning er ikke dette vesentlig, man vil bare tallfeste en sjanse for at noe skjer. Denne tenkemåten kan være en uvanlig måte for elevene å resonnere på. Jeg mener derfor det er viktig at lærere i undervisningen legger vekt på forskjellen i det forskjellige tenkemåtene. Det er også viktig å poengtere for elevene at stokastiske og deterministiske forsøk har ulike egenskaper. På denne måten kan man kanskje minske årsakstenkningen til elevene, slik at begrunnelsene elevene bruker blir matematisk korrekte.

6.4 Korrekte og ikke korrekte begrunnelser

Som jeg har skrevet tidligere var det flere av begrunnelse som førte til at elevene ikke fikk korrekt svar på oppgavene. Begrunnelsene som havner i kategoriene følelsesmessige begrunnelser og begrunnelser som refererer til konkreter vil matematisk sett ikke være korrekte, selv om løsningsstragiene og begrunnelsene kan føre til at elevene får korrekte svar på oppgavene. Det blir derfor vanskelig for lærere å avgjøre om elevene har en god forståelse i sannsynlighet bare ved å se på svaret elevene gir. Det blir derfor viktig at man som lærer studerer begrunnelsene, og finner de begrunnelsene som ikke er korrekte og prøver å få elevene til å endre disse. Jeg vil nå gå gjennom de forskjellige underkategoriene av matematiske begrunnelser og se på hvilke oppgaver de forskjellige kategoriene ble brukt og diskutere når begrunnelsene fører til korrekte og ikke korrekte svar på oppgavene.

Forholdsprinsippet er en begrunnelse som i mange tilfeller vil føre til korrekt svar, for eksempel når elevene skal avgjøre sannsynligheten for å vinne på lykkehjulene i oppgave 1S og om det var Therese eller Reidun som hadde størst sannsynlighet for å trekke en svart kule i oppgave 6S. Det var flere elever som brukte forholdsprinsippet i oppgave 8S og 3M. På disse oppgavene vil forholdsprinsippet ikke føre fram til korrekt svar. I oppgave 7S kan elevene bruke forholdsprinsippet for å komme frem til svarene, men dersom elevene ikke tar hensyn til at kunnskap om hendelser som skjer senere kan påvirke sannsynligheten for utfallet som har skjedd, kommer elevene fram til feil svar på oppgave 7S b). Dette så jeg eksempler på i de besvarelsene jeg har analysert, og det er dette som kalles falkfenomenet. Som sagt tidligere så er det viktig at lærere i undervisningen legger vekt på når man kan bruke forholdsprinsippet og når man må bruke andre løsningsstrategier.

Lik sannsynlighet vil i mange tilfeller føre til korrekt svar. Elevene brukte for eksempel begrunnelsen lik sannsynlighet når de sa at alle rekkefølgene i oppgave 2S var like sannsynlige fordi det er like stor sannsynlighet for å få mynt og kron. Denne måten å begrunne på førte også til korrekt svar på oppgave 2M. Begrunnelsesmåten førte til feil svar på oppgave 3S og 5M der elevene svarte at det er like sannsynlig å få en femmer og sekser som to seksere, siden det er like stor sannsynlighet å få fem og seks når man kaster en terning. Som vi har sett var det også noen av elevene min som hadde oppfatningen som Lecoutre (1992) kaller lik sannsynlighetsfeil. Dersom elevene har oppfatningen lik sannsynlighetsfeil vil det føre til en begrunnelse hvor de sier at utfall har like stor sannsynlighet, selv om de ikke er det. Som lærer blir det derfor viktig at man presiserer for elevene hva det vil si at to utfall er like sannsynlige, slik at elevene får en bedre forståelse av uniforme sannsynlighetsmodeller og når de kan brukes.

Kombinatorikk vil i utgangspunktet være en korrekt matematisk begrunnelse, men det som var problemet for mange av elevene i denne studien var at de ikke så på *alle* permutasjonene, eller at de glemte å telle permutasjonene og bare så på kombinasjonene. Dersom elevene ikke fant alle permutasjonen førte det til at de fikk feil svar på oppgave 3S, 5S og 4M. De elevene som begrunnet ved hjelp av alle permutasjonene fikk korrekt svar på disse oppgavene. Når elevene skal gjøre kombinatoriske betrakninger blir det derfor viktig at de forsikrer seg om at de har funnet alle permutasjonene.

Begrunnelsesmåten plassering på tallinjen førte til at 1P-elevene fikk korrekt svar på oppgave 4M og 5M. Det var også noen elever som fikk korrekt svar på oppgave 5S ved hjelp av begrunnelsesmåten. Jeg har likevel påstått at elevene ikke skjønner den matematiske grunnen til at det midterste tallet er summen med høyest sannsynlighet. Det var noen elever som valgte det høyeste tallet på oppgave 5S, denne begrunnelesesmåten er ikke korrekt.

Løsningstilnærming ble brukt på oppgave 1M av begge elevgruppene og av 1T-gruppen på oppgave 4M. På oppgave 1M førte løsningstilnærming til feil svar på oppgaven. På oppgave 4M førte løsningstilnærming til korrekt svar. Som Konold (1989) skriver så er løsningstilnærming en oppfatning elevene har, hvor de ser på enkeltutfall og avgjøre sannsynligheten ut fra dette. Denne begrunnelsesmåten kan ikke brukes i sannsynlighetsregning, for selv om det på oppgave 1M er størst sannsynlighet for å få en svart side på terningen vil det likevel være størst sannsynlighet å få fem svarte sider og én hvit side.

Begrunnelsesmåten tilfeldighet ble brukt på oppgave 2M av begge elevgruppene. Begge elevgruppene svarte korrekt på oppgave 2M ved hjelp av begrunnelsesmåten tilfeldighet. Jeg har tidligere argumentert for at elevene hadde en god matematisk forståelse av tilfeldighet. På grunn av dette påstår jeg at begrunnelsesmåten tilfeldighet vil være en korrekt matematisk begrunnelse. Dette i motsetningen til noen av begrunnelsene som jeg plasserte i kategorien representativitet. Disse begrunnelsene tok også utgangspunkt i egenskaper elevene tillegger begrepet tilfeldig, men disse egenskapene (spredning og likt antall) er ikke korrekte.

Begrunnelsene som havner i hovedkategorien følelsesmessige begrunnelser og begrunnelser som refererer til konkreter vil ikke være korrekte matematiske begrunnelser, selv om elevene i mange tilfeller faktisk fikk korrekt svar på oppgavene. Det motsatte var også tilfelle, elevene kunne bruke korrekte matematiske begrunnelser, men fikk feil svar. Konklusjonen må derfor bli at mange elever brukte korrekte matematiske begrunnelser, men dersom elevene bruker begrunnelsene i en uheldig kontekst fører det til at man får feil svar. I sannsynlighet må man derfor legge vekt på i hvilke tilfeller man kan bruke de forskjellige løsningsstrategiene, for selv om oppgavene ser like ut kan man ikke alltid bruke samme begrunnelsesmåte. Fischbein og Schnarch (1997, s. 104) hevder at sannsynlighet ikke består av teknisk informasjon og prosedyrer som leder fram til korrekt svar. Dette er jeg enig, elevene kan ikke lære seg en prosedyre for så å bruke denne prosedyren på alle lignende oppgaver. Videre sier Fischbein og Schnarch (1997, s. 104) at i stedet for at elevene må lære seg prosedyrer må elevene lære seg en helt ny måte å tenke på. Dette stemmer godt med det Borovcnik og Peard (1996) sier om at det finnes en egen måte å tenke på i sannsynlighet, som de kaller sannsynlighetstenkning. En undervisning i sannsynlighetsregning som legger opp til at elevene utvikler en ny tenkemåte må derfor legge vekt på at elevene skaper nye intuisjoner og at elevene selv får analysere årsakene til de kognitive konfliktene de opplever (Fischbein & Schnarch, 1997, s. 104).

6.5 Forskjell i begrunnelsene til 1T- og 1P-elevene

Som sagt kan man kan ikke forvente at elevene hadde annen kompetanse i sannsynlighet enn den kompetansen som blir beskrevet i læreplanen etter 10. årstrinn. Siden både 1P- og 1T-elevene skal ha fått den samme opplæringen i disse kompetansemålene, kan man ikke forvente at det skal være en forskjell på begrunnelsene elevene bruker i sannsynlighetsregning. Det kan likevel være interessant å finne ut om de er noen forskjell, for det kan gi implikasjoner på hvilke elever som velger 1P og hvilke som velger 1T.

Da jeg gikk gjennom de skriftlige besvarelsene og sorterte dem ut fra hvilken klasse elevene tilhørte fant jeg ikke noen stor forskjell i besvarelsene elevene i de to klassene brukte. Det var ingen oppgaver som skilte seg ut med at elevene brukte ulike begrunnelser. Da jeg la sammen alle begrunnelsene, var det likevel to begrunnelsesmåter som utmerket seg. Den ene var at det var flere elever fra 1T som brukte begrunnelsesmåten følelse. Den andre var at det var flere elever fra 1P som brukte begrunnelsesmåten lik sannsynlighet. Resten av begrunnelsesmåtene var likt fordelt mellom 1T og 1P. En annen forskjell i den skriftlige oppgavene var at det var flere elever fra 1P som enten ikke svarte på spørsmålene eller ikke begrunnet svarene sine på de skriftlige oppgavene. En grunn til dette kan kanskje være at oppgavene var for vanskelige for 1P-elevene, og at de ikke hadde en løsningsstrategi. En annen grunn kan være at de ikke forstod oppgaven eller ikke var interesserte i å svare.

I de muntlige oppgavene var det spesielt på oppgave 4M og 5M de to elevgruppene gav forskjellige typer begrunnelser. 1T-gruppen brukte i stor grad begrunnelsesmåten kombinatorikk, og så på hvor mange kombinasjoner de forskjellige summene kunne gi. 1P-elevene brukte derimot tallinjen, og så hvor summene var plassert på tallinjen. Begge disse er korrekte matematiske begrunnelser, men som sagt mener jeg ikke at 1P-elevene forstod hvorfor begrunnelsesmåten var korrekt. På de andre muntlige oppgavene gav de to elevgruppene for det meste like typer begrunnelser.

Alt i alt var det altså ikke store forskjeller i begrunnelsene som 1P- og 1T-elevene brukte. Jeg kan heller ikke si om disse forskjelligene beror på at elevene tok fagene

1P og 1T, eller om det var naturlige svingninger i de to elevgruppene. Det kan for eksempel godt hende jeg hadde sett de samme forskjellene dersom jeg bare hadde observert to grupper fra 1P eller bare to grupper fra 1T.

6.6 Vurdering av kvaliteten til studien

Jeg vil i dette delkapittelet vurdere kvaliteten til studien ved hjelp av begrepene Guba (1981) innførte. Disse er kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet.

Under datainnsamlingen tok jeg i bruk to forskjellige metoder, som var skriftlige oppgaver og observasjon. På denne måten fikk jeg belyst problemstillingen på to forskjellige måter. Å bruke både skriftlige oppgaver og observasjon er en form for triangulering. Som Guba (1981) skriver kan triangulering være med å styrke kredibiliteten og bekreftbarheten til studien. Avhengigheten kan styrkes gjennom å bruke overlappende metoder. Skriftlige oppgaver og observasjon kan sees på som overlappende metoder, siden litt svakhetene til skriftlige oppgaver er styrken til observasjon. Avhengigheten til studien min styrkes dermed på denne måten. Jeg mener overførbarheten i studien min ble styrket gjennom å bruke oppgaver som tidligere har vært brukt, dette kan man sammenligne med det Guba kaller teoretisk prøvetaking. Det kan også være en fare ved å kun bruke oppgaver som har vært brukt før. Det kan hende at jeg på den måten var lite åpen for det nye og uventede. Jeg mener likevel ikke det var et stort problem siden jeg brukte den konstant komparative analysemetoden og lot kategoriene komme fra datamaterialet.

For å sikre overførbarheten har jeg i metodekapittelet prøvd å gi en fyldig beskrivelse av metodene og konteksten datainnsamlingen ble gjennomført i, på denne måten kan andre lettere etterprøve resultatene. Jeg har også vært åpen om hvordan datamaterialet ble analysert.

Det kan kritiseres at jeg ikke har gjennomført member-checking. Guba (1981) skriver at blant annet member-checking burde være et minimumskrav for å sikre troverdigheten til forskningsstudier. Member-checking vil si at du lar forskningsdeltakerne uttale seg om de kjenner seg igjen i tolkningene og analysen forskeren har gjort (Postholm & Jacobsen, 2011). Siden jeg ikke har gjennomført member-checking kan det være rom for at jeg har misforstått hva elevene har ment. Under observasjonen prøvde jeg å stille spørsmål ved det elevene hadde sagt, slik at jeg kunne være mer sikker på at jeg hadde forstått dem rett. Dette kan være en form for member-checking, men for å sikre bedre kredibilitet kunne jeg gjennomført dette i større grad.

Elevene skulle besvare de skriftlige oppgavene på den første dagen av datainnsamlingen. Jeg og elevene hadde derfor ikke fått en relasjon da de svarte på oppgavene. Guba (1981, s. 84) skriver at dersom man tilbringer lengre tid på stedet hvor man forsker så får deltakerne tid til å venne seg til forskeren og forsikre seg selv om at forskeren ikke utgjør en trussel. At jeg og elevene ikke hadde en relasjon kan ha ført til at elevene ikke stolte på meg, og at de ikke svarte ærlig på oppgavene. Jeg mener likevel ikke at dette var et stort problem siden elevene besvarte oppgavene anonymt og at de på den måten kunne være sikker på at svarene ikke kunne spores tilbake til dem. Det var heller ikke noen følsomme og intime spørsmål i undersøkelsen. Det kan være mer problematisk at jeg ikke hadde en relasjon til elevene som jeg observerte. Under observasjonen kan det hende noen elever unnlot å delta i diskusjonen, for at de ikke følte seg trygge på meg og situasjonen. Dette kan ha ført til reaktivitet, det vil si at min tilstedeværelse påvirket observasjonen. Det kan hende at elevene hadde brukt andre begrunnelser og oppført seg annerledes om jeg ikke hadde vært til stede under diskusjonene. Elevene ble valgt på bakgrunn av hvem som sa seg villige til å delta i undersøkelsen. Gruppesammensetningene kan derfor ikke sees på som optimale. Jeg vet ikke hvordan de tre elevene på hver gruppe samarbeidet til vanlig, og om de var trygge på hverandre. En uheldig gruppesammensetningen kan ha ført til at enkelte elever var dominerende og at ikke alle uttrykte det de egentlig mente under diskusjonen. Dersom jeg skulle gjennomført undersøkelsene på nytt hadde jeg styrket innsamlingen dersom jeg tok meg tid til at jeg og elevene skulle bli kjent, og vant med min tilstedeværelse.

Kapittel 7

Avslutning og perspektivering

Hensikten med denne masteroppgaven har vært å belyse hvilke begrunnelsesmåter elever bruker i sannsynlighetsregning, og spesielt diagnostiske oppgaver. Problemstillingen ble valgt til å være: *Hvilke begrunnelser bruker 1T- og 1P-elever i diagnostiske oppgaver i sannsynlighet?*

Studien har belyst denne problemstillingen på to ulike måter, gjennom skriftlige oppgaver og observasjon av en elevgruppe fra hver klasse. Begrunnelsesmåtene som ble funnet ble delt inn i tre hovedkategorier. Disse var matematiske begrunnelser, følelsesmessige begrunnelser og begrunnelser som refererer til konkreter. Jeg har argumentert for at flere av begrunnelsene elevene tok i bruk ikke er matematisk korrekte, spesielt begrunnelsene som havnet i kategoriene følelsesmessige begrunnelser og begrunnelser som refererer til konkreter. Besvarelsene til elevene viste også at elevene har problemer med å se i hvilke sammenhenger de kan bruke de ulike begrunnelsene og løsningsstragiene, ofte ble samme begrunnelse brukt i oppgaver hvor begrunnelsen bare førte til korrekt svar på den ene oppgaven. Det ble funnet noen få forskjeller i begrunnelsene 1P- og 1T-elevene brukte, men man kan ikke si om disse forskjellene beror på at det var forskjellige elever som ble observert eller om grunnen er at elevene kom fra forskjellige klasser.

Arbeidet med denne oppgaven har gitt meg god innsikt i hvilke begrunnelsesmåter elever kan ta i bruk i sannsynlighetsregning. Jeg har også fått god erfaring med å gjennomføre en studie, funnet fram til relevant teori og skrevet en vitenskapelig avhandling. Tidligere har mange misoppfatninger i sannsynlighetsregning blitt beskrevet, men når jeg nå har fordypet meg i begrunnelsene elevene bruker, gir det meg en enda bedre forutsetning for å forstå resonnementene til elever i sannsynlighetsregning, og på denne måten har jeg gode forutsetninger for å arbeide med å øke forståelsen til elever i sannsynlighetsregning. Jeg mener derfor studien har økt min matematikkdidaktiske kompetanse.

Studien tar utgangspunkt i 15 skriftlige elevbesvarelser og observasjon av to elevgrupper med tre elever. For å utvide studien kunne det vært interessant å analysere enda flere elevbesvarelser og observere flere grupper med elever. Det kunne også vært aktuelt å intervjue elevene om svarene de gav på de skriftlige oppgavene, for på den måten kunne man bedre forstått de skriftlige begrunnelsene. Oppgavene elevene skulle løse var såkalte diagnostiske oppgaver. Disse oppgavene har som mål å avsløre misoppfatningene til elevene, og de skiller seg dermed fra ordinære oppgaver i sannsynlighetsregning. Med ordinære oppgaver mener jeg oppgaver i lærebøker, eksamensoppgaver osv. For å utvide studien kunne man derfor endret oppgaver, og sett om kategoriene som ble funnet i dette datamaterialet også kan dekke begrunnelsesmåtene i andre typer oppgaver.

Jeg mener studien er en viktig brikke i arbeidet med å øke elevers forståelse og resonnement i sannsynlighetsregning. Det er viktig at lærere er bevisste på elevers begrunnelsesmåter i sannsynlighetsregning, for de kan være en viktig kilde til å kartlegge elevers forståelse i sannsynlighetsregning.

Referanser

Batanero, C., Henry, M. & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. I G.A. Jones (red.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (s. 15-37). Springer US.

Birkeland, P.A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2012). *Matematikk for lærere 2* (5. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. I R. Kapadia & M. Borovcnik (red.), *Chanche encounters: Probability in education* (s. 27-71). Springer Netherlands.

Borovcnik, M. & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective of probability. I E.J. Chernoff & B. Sriraman (red.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (s. 7-34). Dordrecht: Springer Science + Business Media.

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (red.), *International handbook of mathematics education* (vol. 4, s. 239-287). Kluwer Academic Publishers.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, *23*(7), 13-20.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (7. utg.). New York: Routledge.

Ernest, P. (2011). *The psychology of learning mathematics: The cognitive, affective and contextual domains of mathematics education.* Saarbrücken: Lampert Academic Publishing.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. I R. Davidson & J. Swift (red.), *Proceedings of the second international conference on teaching statistics* (s. 292-297). Victoria.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: D. Reidel publishing company.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?: An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24.

Fischbein, E., Nello, M.S. & Marino, M.S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 523-549.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Gal, I. (2005). Towards "probability" literacy for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. I G.A. Jones (red.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.* (s. 39-63). Springer US.

Gold, R.L. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces*, *36*(3), 217-223.

Green, D.R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16* (Upublisert akademisk avhandling). Loughborough University of Technology.

Green, D.R. (1989). School pupils' understanding of randomness. I R. Morris (red.), *Studies in mathematics education: The teaching of statistics* (s. 27-40). Paris: Unesco.

Guba, E.G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29*(2), 75-91.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry.* London: The Falmer Press.

Jones, G.A. & Thornton, C.A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. I G.A. Jones (red.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (s. 65-92). Springer US.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 59-98.

Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding. *Journal of Statistics Education*, *3*(1), Hentet fra http://www.amstat.org/publications/jse/.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 557-568.

Postholm, M.B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M.B. & Jacobsen, D.I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Kristiansand: Høyskoleforlaget AS - Norwegian Academic Press.

Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied settings* (3. utg.). Chichester: Wiley.

Rubel, L.H. (2007). Middle school and high school students' probabilistic reasoning on coin tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 531-556.

Thomas, G. (2011). *How to do your case study: A guide for students and researchers.* Los Angeles: Sage.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *185*(4157), 1124-1131.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet 06. februar 2015 fra `http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/`

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. I G.A. Jones (red.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.* (s. 145-170). Springer US.

Tillegg A

Skriftlige oppgaver

Klasse(1P eller 1T): **Kjønn:**

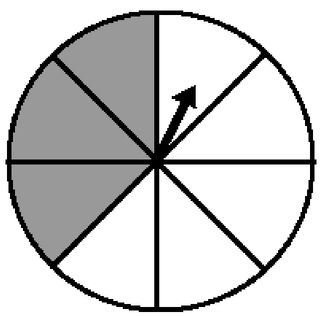
Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

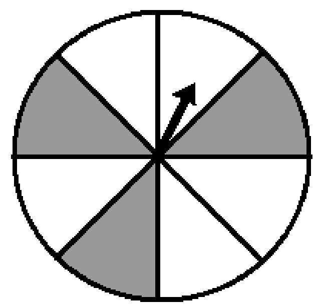
På et tivoli er det to lykkehjul. Du vinner en premie dersom pilen havner på et grått felt.

a) Hva er sannsynligheten for å vinne på lykkehjul 1 og lykkehjul 2?

b) Hvilket lykkehjul ville du satset på?



(a) Lykkehjul 1



(b) Lykkehjul 2

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 2

Tenk du at du kaster en mynt fem ganger. Mulige sammensetninger av kron (K) og mynt (M) er blant annet:

- KKKMM
- MKKMK
- MKMMM
- KMKMK

a) Hvilken av disse sammensetningene av kron (K) og mynt (M) mener du er mest sannsynlig? Eller er de like sannsynlige?

b) Hvilken av sammensetningene av kron (K) og mynt (M) er mener du er minst sannsynlig? Eller er det lik sannsynlighet?

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 3

Tenk deg at du kaster to terninger samtidig. Hvilket av følgende utfall er det størst sannsynlighet for skal skje?

a) Få en femmer og en sekser

b) Få to seksere

c) Begge er like sannsynlige

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 4

I en boks er det 4 røde, 3 grønne og 2 hvite kuler. Hvor mange kuler må du trekke for å være sikker på at du får minst én kule fra hver farge?

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 5

Et spill går ut på å kaste to terninger og tippe summen av hva de to terningene viser. I første omgang kan du kun velge mellom summene 3 og 6. Hva ville du valgt i første omgang? I andre omgang kan du få velge mellom summene 7 og 10. Hva ville du valgt i andre omgang? Hvis du kunne velge mellom alle mulige summer fra 2-12, hva ville du valgt da?

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 6

Therese har 100 hvite og 50 svarte kuler i en boks. Reidun har 200 hvite og 100 svarte kuler i sin boks. Uten å se trekker de hver sin kule fra boksene sine. Hvem har størst sjanse for å trekke en svart kule, eller har de like stor sjanse?

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 7

Petter og Martine har hver sin boks som inneholder to hvite og to svarte kuler.

a) Petter trekker en kule fra boksen sin og finner ut at den er hvit. Uten å legge tilbake den første kula trekker han enda en kule. Hva er sannsynligheten for at den andre kulen er hvit?

Svar (husk begrunnelse)

b) Martine trekker en kule fra boksen og legger den til side uten å se på den. Hun trekker så enda en kule, og ser at den er hvit. Hva er sannsynligheten for at den første kulen var hvit?

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 8

I en by er det to sykehus, et lite og et stort. Vi teller barn som blir født på en bestemt dag. Anta at sannsynligheten for å få en gutt er $\frac{1}{2}$ og sannsynligheten for å få jente er $\frac{1}{2}$. Følgende kan hende:

a) På det lille sykehuset er 7 av de 10 barn som blir født jenter.

b) På det store sykehuset er 70 av de 100 barn som blir født jenter.

Av disse hendelsene er a) mest sannsynlig, b) mest sannsynlig eller a) og b) like sannsynlig?

Svar (husk begrunnelse)

Oppgave 9

I en 1T-klasse er det 10 elever. Klassen vil tilfeldig velge ut en gruppe på 2 elever. I en 1P-klasse er det også 10 elever. Her vil de tilfeldig velge ut en gruppe på 8 elever. I hvilken klasse er det flest mulige kombinasjoner av elevgrupper?

a) Flest kombinasjoner for å velge ut 2 elever i 1T-klassen

b) Flest kombinasjoner for å velge ut 8 elever i 1P-klassen.

c) Det er like mange kombinasjoner.

Svar (husk begrunnelse)

Tillegg B

Muntlige oppgaver

Oppgave 1

Tenk dere at dere har en terning med seks sider, der fem av sidene er malt svarte og én er malt hvit. Dere kaster terningen seks ganger. Hva har størst sannsynlighet, å få seks svarte sider eller å få fem svarte sider og én hvit side?

Oppgave 2

Daniel og Anna fikk i oppgave å kaste en mynt 150 ganger. Det var kun én av dem som gjorde det skikkelig. Den andre fant på en rekkefølge. K står for kron og M for mynt. Var det Daniel eller Anna som jukset?

Daniel:
KMKMMKKMMKKMKMKMMKMMKMKKKMMMKKKMMKMMKMKM
KMMKKMKKKMKMKMKKMMMKKMMKMKMMKKMKMMKKMKMM
KKMKKMKMMMKMMKKMMKMMKMKMKKMKMMKKMKMKMMKK
KMKKMMKMKMMKKMMMKMMMKMKMMKKKMM

Anna:
MKKMMMKMMMMKMKKMMMKKMKKMMMKKMKKKMMMKMMM
MMMKMKMKMKMMMMKKKKKKMKKKMKMKKMKKKKKMKKKMM
KKKMKMKKKKKKKKKMMKKMKKKKKKKMMMMMKKKKMMKMKM
KKMKKMKKMMMMMMKMKKMMKKKMMKKK

Oppgave 3

Sannsynligheten for få mynt minst to ganger når man kaster en mynt tre ganger er

a) Mindre

b) Lik

c) Større

enn sannsynligheten for å få mynt minst 200 ganger når man kaster 300 ganger.

Oppgave 4

Dere skal tippe summen av to terninger. Hvilken sum ville dere satset på? Er det forskjell på om dere kaster to terninger samtidig eller én terning to ganger?

Oppgave 5

Tenk dere at dere kaster to terninger samtidig. Hvilket av følgende utfall er det størst sannsynlighet for skal skje?

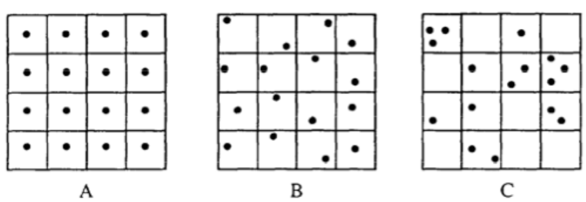
a) Få en femmer og en sekser

b) Få to seksere

c) Begge er like sannsynlige

Oppgave 6

Et flatt tak i en hage er inndelt i 16 kvadrater. Det begynner å regne litt. Etter en stund har 16 regndråper landet på taket. Her er tre bilder som viser regndråper på taket. Hvilket bilde viser best mønsteret dere forventer å se?



Tillegg C

Transkripsjonskoder

Transkripsjonskoder:

_	Avbrutt ord/setning
Kursiv	Tekst fra oppgavearket
…	Pause lenger enn 3 sekunder
..	liten nøling
[	B snakker samtidig med A: A: og så er det en pluss to [pluss tre pluss fire B: [Ser du her? At det øker her med to, så
( )	Forklaring på atferd.

Tillegg D

Samtykkeskjema

Susanne Mehus
Åsvangvegen 39, 7048 Trondheim
909 97 256, susanme@stud.ntnu.no

Trondheim, 16. februar 2015

Til elever på

Anmodning om tillatelse til lydopptak og innhenting av elevtekster

Jeg er student på lektorutdanning i realfag ved NTNU. Jeg skal i vår skrive masteroppgave i matematikkdidaktikk. Masteroppgaven handler om elevers forståelse og oppfatninger i sannsynlighetsregning.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, er det ønskelig å dele ut oppgaver som dere skal svare skriftlig på. I etterkant vil jeg observere og samtale med noen elever som jobber med oppgaver sammen. For å få dokumentert dataene så godt som mulig er det ønskelig å gjøre lydopptak av observasjonene. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å hente inn skriftlig informasjon fra de skriftlige oppgavene og lydopptak fra gruppeoppgaven. Det er snakk om oppgaveregning som tar ca. 30 minutter og observasjonen vil ta ca. 60 minutter. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Opptakene vil kun bli hørt av meg og min veileder. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1. september 2015.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å være med på prosjektet. Jeg ber dere derfor å fylle ut svarslippen på neste side om dere gir deres tillatelse til å være med.

På forhånd tusen takk!

Vennlig hilsen

Susanne Mehus

Tillatelse

Som del av min masteroppgaven ber jeg om tillatelse til å dele ut oppgaver, observere og samtale med deg og gjøre lydopptak der du er med.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster, lydopptak og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

☐ Jeg gir tillatelse til å hente informasjon fra den skriftlige prøven og være med på lydopptak under gruppeoppgaven.

☐ Jeg gir tillatelse til å hente informasjon fra den skriftlige prøven.

Dato: ………………………

Fornavn og etternavn: …………………..……………………. …………………..

Underskrift: …………………………………………………………..