NTNU
Det skapende universitet

Beregningsmetoder for skallkonstruksjoner

Thomas André Tøgersen

Bygg- og miljøteknikk
Innlevert: juni 2015
Hovedveileder: Svein Ivar Sørensen, KT

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for konstruksjonsteknikk

Institutt for konstruksjonsteknikk
FAKULTET FOR INGENIØRVITENSKAP OG TEKNOLOGI
NTNU – Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

MASTEROPPGAVE 2015

for

Thomas Andre Tøgersen

Beregningsmetoder for betongskall

Analysis methods for concrete shells

Oppgaven går i korte trekk ut på følgende:

- Studere klassisk teori for aksesymmetriske skall, dvs. sylinderskall, kuleskall og sirkulære plater.
- Beregningseksempler med sammensatte skall.
- Benytte FEM-programmet DIANA for analyse av de samme eksemplene som er beregnet med klassisk teori. Vurdering av krav til elementmodeller for å oppnå tilfredsstillende resultater for effekt av randforstyrrelser.
- Dimensjonering (nødvendig armering) av eksemplene beregnet lineært elastisk med de aktuelle metodene.
- Ikkelineær beregning av eksemplene med DIANA.

Besvarelsen organiseres i henhold til gjeldende retningslinjer.

Veileder: Professor Svein Ivar Sørensen

Besvarelsen skal leveres til Institutt for konstruksjonsteknikk innen 10. juni 2015.

NTNU, 26. januar , 2015

Svein Ivar Sørensen
Faglærer

Forord

Denne masteroppgaven er utarbeidet som en del av det 5-årige masterstudiet Bygg- og miljøteknikk ved Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet (NTNU). Masteroppgaven er skrevet ved Institutt for konstruksjonsteknikk, våren 2015. Arbeidet tilsvarer 30 studiepoeng og er utført over en periode på 20 uker.

Rapporten omhandler beregningsmetoder for betongskall og skrevet med tanke på at leseren har en bakgrunn innen konstruksjonsteknikk.

Jeg ønsker å takke professor Svein Ivar Sørensen ved Institutt for konstruksjonsteknikk for god veiledning gjennom semesteret.

Trondheim, 10. juni 2015

Thomas André Tøgersen

Sammendrag

Masteroppgaven omhandler klassisk skallteori for aksesymmetriske skal hvor fokuset har hvert rettet mot sylinderskall, kuleskall og sirkulære plater. Det er etablert to beregningseksempler med sammensatte skall. Det første eksempelet er en sylinder med et sirkulær platetak og det andre eksemplet er en sylinder med et kuletak. Disse eksemplene er vurdert opp mot en numerisk analyse i FEM-programmet DIANA og en analytisk analyse ut i fra klassisk skallteori.

Den numeriske analysen omfatter både en lineær analyse og en ikke-lineær analyse av beregningseksemplene. I den linære analysen er det gjennomført analyser med ulike elementtyper og -størrelser for å underesøke forskjeller i konvergens mot analytisk løsning. I den ikke-linære analysen er det satt inn armering etter linær elastiske beregninger etter Eurokode 2[1] og det er vurdert utnyttelsesgrad av material og ikke-linær oppførsel.

Det konkluderes med at de lineære analysene har et godt samsvar med de analytiske beregningene og CL9AX elementet er foretrukket ved grovere inndelinger. De ikke-lineær effektene ble verifisert igjennom vurdering av last mot deformasjon og rissutvikling. Mens armeringsmengden ble overvurdert og hadde lav utnyttelsesgrad ved flere steder.

Abstract

This thesis covers the basic shell theory for axisymmetric shells where cylindrical shell, spheres and circular plates where prioritized. It is compiled two calculation examples with a joint construction. The first example involves a cylinder with a circular plate roof and the second example involves a cylinder with a semi sphere roof. These example are evaluated against a numeric analysis in the FEM-program DIANA and an analytic analysis based upon the basic shell theory.

The numerical analysis includes both a linear and a nonlinear analysis of the mentioned examples. The linear analysis used different types of elements and different types of element sizes to investigate the difference of convergence compared with the analytic analysis. The nonlinear analysis has reinforcement according to Eurocode 2[1] and is evaluated based upon material efficiency and nonlinear response.

The conclusion tell us that the linear analysis compares well with the basic theory and the preferred element type in coarse divisions is CL9AX. The nonlinear responses confirms through evaluation of load versus deformation and crack development. While the reinforcement was overestimated in several places.

Innhold

Tabeller

Figurer

Kapittel 1

Innledning

Formålet med denne oppgaven er å få oversikt over de ulike løsningsmetodene til aksesymmetriske betongskall. Løsningsmetodene innbærer analytiske og numeriske analyser av typiske aksesymetriske eksempler.

Første del i oppgaven starter med en introduksjon i nødvendig teori. En presentasjon av klassisk skallteori innen tre ulike skall og en gjennomgang av FEM-programmet DIANA. Denne delen skal skape grunnlaget for de videre analysene hvor skallteorien danner basisen for de analytiske beregningene og gjennomgang av DIANA danner basisen for de numeriske analysene.

Andre del fortsetter med to ulike beregningseksempler, sylinder med platetak og sylinder med kuletak. Det utføres tre ulike analyser på begge eksemplene. En analytiskmetode koblet til skallteorien, en lineærmetode som skal verifiseres av den analytiske og en ikke-lineærmetode som skal sjekke den ikke-linæreoppførselen til eksempelet.

Siste del består av en konklusjon hvor resultatene oppsummeres.

Del I

Teori

Kapittel 2

Tynnskallteori

Skallelementer kan brukes i både plane eller buede konstruksjoner. De er definert som elementer utsatt for membran- og bøyekrefter. I et tynt buet skall er tykkelsen, h, liten i sammenlignet med andre dimensjoner og med kurvaturradiusen, R. Videre så bygger tynnskallteori på fire antagelser, Love-Kirchoff teori, [3]

- Skalltykkelsen er neglisjerbar i sammenligning med kurvaturen til det midtre planet i skallet
- Tøyninger og spenninger er små
- Rette linjer som er normale på det midtre planet før deformasjon forblir rette under deformasjon
- Spenninger normalt på det midtre planet er neglisjerbare

Typiske bruksområder for betongskall er beholdere og takkonstruksjoner. Betongskallet består da av betong og en type armering, slakk- eller spennarmering. I mine beregninger er det fokusert på beholdere og kapittelet vil derfor inneholde teori om sylinderskall (2.1), kuleskall (2.2)og sirkulære plater (2.3).

2.1 Sylinderskall

Sylinderskall er et aksesymmetriskskall som brukes i mange ulike typer beholdere. Skallet har tykkelsen h og sylinderkoordinatene x,r og ϕ. Denne delen består av lastvirkninger og likeveksligninger, sammenheng mellom tøyning og spenning, sammenheng mellom forskyvninger og tøyninger, sylinderens differensialligning og løsning av differensialligningen. Utledningen er hentet i fra [4].

2.1.1 Lastvirkninger og likevektsligninger

Lastvirkninger som opptrer i sylinderen kan deles inn i tre grupper:

- Skive- eller membrankrefter: N_x og N_φ
- Bøyemomenter: M_x og M_φ
- Skjærkraft: V_x

Aksesymmetri medfører at membranskjærskrafen $N_{\varphi x}$, torsjonsmoment$M_{\varphi x}$ og skjærkraft V_φ blir null. Kreftene i sylinderen er illustrert i figur 2.1.

Likevekt av elementet gir følgende ligninger:

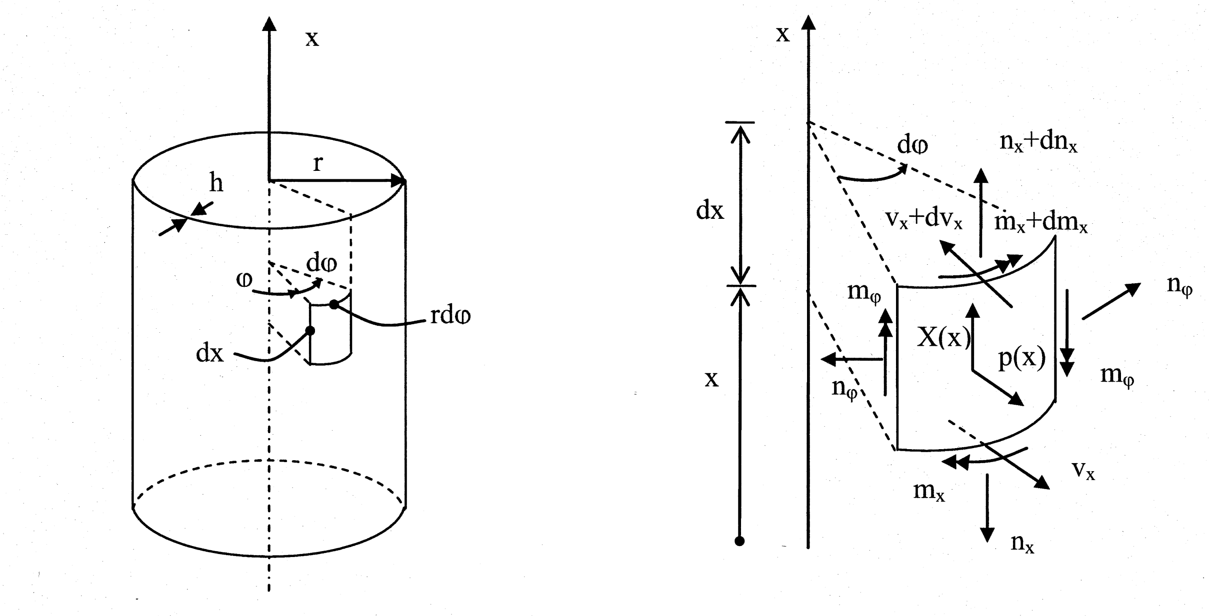
$$\sum K_{radiell} = 0: \qquad \frac{dV_x}{dx} + \frac{1}{r} \cdot N_\varphi = p(x) \tag{2.1}$$

$$\sum M_{tangentiell} = 0: \qquad \frac{dM_x}{dx} - V_x = 0 \tag{2.2}$$

$$\sum K_x = 0: \qquad \frac{dN_x}{dx} + X = 0 \tag{2.3}$$

(2.3) er ikke koblet med de to andre ligningene og dermed kan denne behandles for seg selv. Videre ved å sette inn (2.2) inn i (2.1) kan sylinderskallets likevektsligning utledes:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{r} \cdot N_\varphi = p(x) \tag{2.4}$$



Figur 2.1: Sylinderkrefter[3]

2.1.2 Sammenheng mellom tøyning og spenning

For å uttrykke sammenhengen mellom tøyning og spenning brukes Hook's lov. Pågrunn av antakelsen at (2.3) er ukoblet vil tøyningen i lengderetningen, ϵ_x, og ringretningen, ϵ_φ, kunne uttrykkes slik:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_\varphi) \tag{2.5}$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_x) \tag{2.6}$$

Hvor σ_x og σ_φ er membranspenningen i sylinderens lengde- og ringretning. Videre følger det under forutsetningen at $N_x = 0$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} = 0 \tag{2.7}$$

De endelige tøyningene, ϵ_x og ϵ_φ, kan utledes ved å forenkle (2.5) og (2.6) til ligningene i (2.8) og (2.9).

$$\epsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_\varphi = -\frac{\nu \cdot N_\varphi}{Eh} \tag{2.8}$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E}\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{Eh} \tag{2.9}$$

2.1.3 Sammenheng mellom forskyvninger og tøyninger

Ringtøyningen, ϵ_φ, kan utledes ut i fra en radiell forskyvning, w, se figur 2.2 og ligning (2.10).

$$\epsilon_\varphi = \frac{(r+w)d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{w}{r} \tag{2.10}$$

Krumning for sylinderskallet:

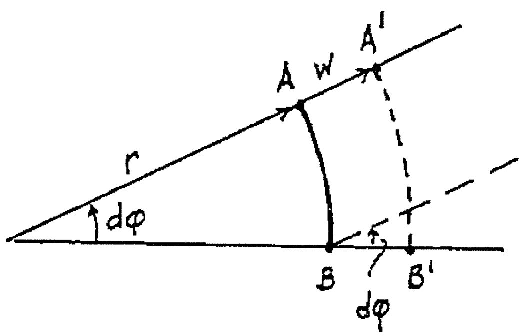
$$\kappa_x = \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.11}$$

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{r+w} - \frac{1}{r} = -\frac{w}{r(r+w)} \approx -\frac{w}{r^2} \approx 0 \tag{2.12}$$

2.1.4 Sylinderes differensialligning

Differensialligningen til sylinderen etableres i fra sylinderskallets likevektsligning (2.4) og uttrykkene for ringkraft (2.13) og moment (2.16) :

Ringkraften, N_φ, kan uttrykkes fra ligningene (2.9) og (2.10) til ligning (2.13). Bøyemoment



Figur 2.2: Radiell forskyvning[4]

M_x uttrykkes ved sammenhengen mellom moment og krumning i ligning (2.14) til (2.16).

$$N_\varphi = \frac{Eh}{r} \cdot w \tag{2.13}$$

Sammenhengen mellom moment og krumning defineres:

$$M_x = D(\kappa_x - \nu\kappa_\varphi) \tag{2.14}$$

Når h er konstant er platestivheten D lik:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.15}$$

Ved innsettelse av (2.11) og (2.12) i (2.14) blir uttrykket for moment:

$$M_x = D\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.16}$$

Den totale differensialligningen blir ved innsetting av ligningene (2.4), (2.13) og (2.16):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{Dr^2} \cdot w = \frac{p(x)}{D} \tag{2.17}$$

2.1.5 Løsning av differensialligningen

Den totale differensialligningen kan løses i to deler, partikulær- og homogenløsning. Partikulærløsningen representerer membranløsningen, som er en tilstand uten bøyeeffekter, og homogenløsningen representerer randforstyrrelsene fra rendene.

Løsningen av differensialligningen blir da:

1. Randforstyrrelser fra en gitt rand

2. Randforstyrrelser fra motsatt rand

3. Partikulærløsning

Partikulærløsning

Hvis lasten $p(x)$ er et polynom opp til 3.grad kan partikulærløsningen representeres ved ligning (2.18):

$$w_p = \frac{r^2}{Eh} \cdot p(x) \tag{2.18}$$

Homogenløsning

Den homogeneløsningen kan finnes ved å sette differensialligningen (2.17) lik 0. Løsningen representerer randforstyrrelsene fra randen. Hvor avstanden fra randen blir representert med den dimmensjonsløse koordinaten $\xi = \frac{x}{l_e}$ den elastiske lengden, l_e, uttrykkes ved ligning (2.19).

$$l_e = \sqrt[4]{\frac{4Dr^2}{Eh}} = \frac{\sqrt{rh}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2}} \tag{2.19}$$

Homogenløsningen representeres ved (2.20):

$$w = w_h = e^{-\xi}(C_1 cos\xi + C_2 sin\xi) + e^{\xi}(C_3 sin\xi + C_4 sin\xi) \tag{2.20}$$

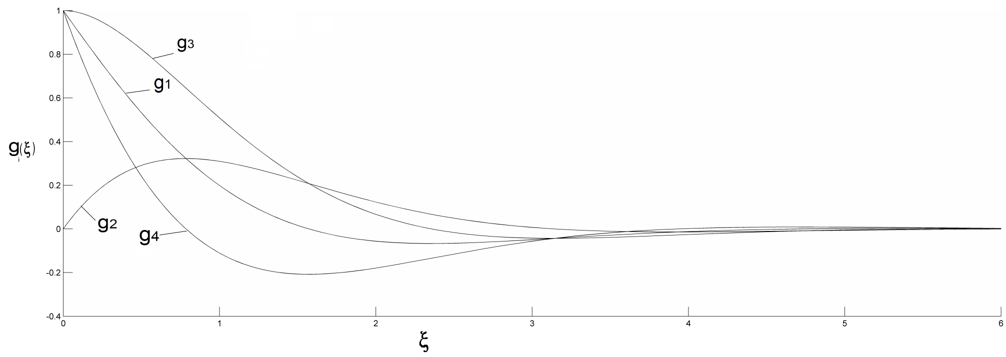
C_n representerer integrasjonskonstantene og bestemmes ut i fra randbetingelsene.

Den endelige løsningen for differensialligningen blir da:

$$w = w_p + w_h$$

Løsning med påvirkning fra en rand

Dette innebærer at den ene delen av homogenløsningen går mot null når ξ går mot uendelig. Det vil være urealistisk at randforstyrrelsene øker med avstanden fra randen og homogenløsningen skrives om (2.22). I den omskrevne løsningen er integrasjonskonstantene C_3 og C_4 lik null og det er innført noen nye funksjonsbetegnelser



Figur 2.3: Dempningsfunksjoner

kalt g-funksjoner, se (2.21) og figur 2.3.

$$
\begin{aligned}
g_1(\xi) &= e^{-\xi} \cdot cos\xi \\
g_2(\xi) &= e^{-\xi} \cdot sin\xi \\
g_3(\xi) &= g_1(\xi) + g_2(\xi) \\
g_4(\xi) &= g_1(\xi) - g_2(\xi)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Den forenklede homogenløsningen blir uttrykket som

$$
w = w_h = C_1 \cdot g_1(\xi) + C_2 \cdot g_2(\xi) \tag{2.22}
$$

Homogenløsningen kan forenkles videre til bruk i dimensjonering ved å finne en sammenheng mellom skallstørrelsene og randkreftene M_0 og V_0. Ut i fra denne sammenhengen kan integrasjonskonstantene erstattes og et enkelt matrisesystem (2.23) for kreftene kan dannes, [4].

$$
\begin{bmatrix} w \cdot \frac{2D}{l_e^2} \\ N_\varphi \cdot \frac{l_e^2}{2r} \\ \frac{dw}{dx} \cdot \frac{2D}{l_e} \\ M_x \\ V_x \cdot l_e \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} g_4(\xi) & g_1(\xi) \\ g_4(\xi) & g_1(\xi) \\ -2g_1(\xi) & -g_3(\xi) \\ g_3(\xi) & g_2(\xi) \\ -2g_2(\xi) & g_4(\xi) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M_0 \\ V_0 \cdot l_e \end{bmatrix}
\tag{2.23}
$$

Hvor randkreftene M_0 og V_0 blir når sette forskyvningen og rotasjonen er lik null ved innspenningen.

$$\frac{dw_{tot}(0)}{dx} = -(2M_0 + V_0 \cdot l_e) = 0 \tag{2.24}$$

$$w_{tot} = \frac{pr^2}{Eh} + \frac{l_e^2}{2D}(M_0 + V_0 \dot{l}_e) = 0 \tag{2.25}$$

Ved å kombinere (2.11) og (2.25) gis uttrykkene:

$$M_0 = \frac{pl_e^2}{2} \tag{2.26}$$

$$V_0 = -pl_e \tag{2.27}$$

Løsning med påvirkning fra to render

Løsningen av to render er det samme som for en rand, men det er en mulighet for at rendene påvirker hverandre. Hvis rendene er innenfor 2 ganger dempningslengden, L_C, vil de to rendene påvirke hverandre. Dette krever et nytt koordinatsystem, $\eta = \frac{L}{l_e} - \xi$, i tillegg til det gamle $\xi = \frac{x}{l_e}$ hvor L er lengden av sylinderen. Det krever også at randkreftene må defineres på nytt. M_{01} og V_{01} vil være kreftene fra betraktet rand og M_{02} og V_{02} fra motsatt rand.

Sammenhengen mellom skallstørrelsene og randkreftene blir et ligningsystem med 4 ligninger og 4 ukjente, se (2.28).

$$\begin{bmatrix} w \cdot \frac{2D}{l_e^2} \\ N_\varphi \cdot \frac{l_e^2}{2r} \\ \frac{dw}{dx} \cdot \frac{2D}{l_e} \\ M_x \\ V_x \cdot l_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4(\xi) & g_1(\xi) & g_4(\eta) & g_1(\eta) \\ g_4(\xi) & g_1(\xi) & g_4(\eta) & g_1(\eta) \\ -2g_1(\xi) & -g_3(\xi) & 2g_1(\eta) & g_3(\eta) \\ g_3(\xi) & g_2(\xi) & g_3(\eta) & g_2(\eta) \\ -2g_2(\xi) & g_4(\xi) & 2g_2(\eta) & -g_4(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{01} \\ V_{01} \cdot l_e \\ M_{02} \\ V_{02} \cdot l_e \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Dempningslengde

Hvis sylinderen ikke er uendelig lang er det viktig å sjekke dempningslengden, L_C. Dempningslengden forteller hvor langt fra randen randforstyrrelsene vil påvirke skallstørrelsene. Denne lengden er basert på dempningen av g-funksjonene (2.21) og figur 2.3. Figuren viser at funksjonene går mot null mellom $\xi = 3 - 4$ og dempningslengden kan derfor uttrykkes som ligningen gitt i (2.29).

$$L_c = \pi \cdot l_e \tag{2.29}$$

Hvor rendene er uavhengig av hverandre hvis følgende likhet oppfylles:

$$2L_C \leq L$$

2.2 Kuleskall

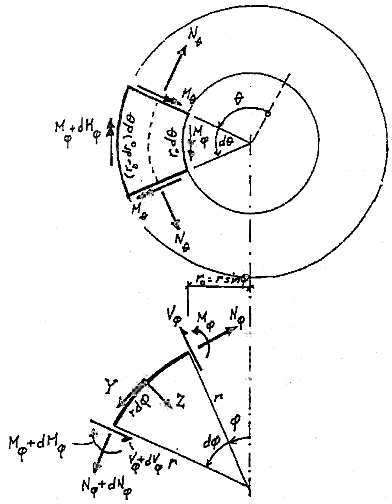
Kuleskall er en sterk og veldig effektiv form og brukes ofte i takformasjoner i blant annet tanker av ulike slag. Kreftene i et kuleskall kan beskrives ved å betrakte et element som er bestemt av skjæringspunktet mellom en parallellsirkel og en meridian, som vist i figur 2.4. Denne delen består av lastvirkninger og geometri, skallstørrelser og er utledet ved hjelp av [4] og [2].

2.2.1 Lastvirkninger og geometri

Geometrien til kuleskallet er definert igjennom to omdreiningsplan. En i meridianplanet og en i ringplanet se figur 2.4 for nærmere beskrivelse.

Krefter som opptrer i kuleskallet kan deles inn i tre grupper:

- Skive- eller membrankrefter: V_φ og V_ϑ
- Bøyekrefter: M_φ og M_ϑ
- Skjærkraft: V_φ



Figur 2.4: Lastvirkninger i kuleskall[4]

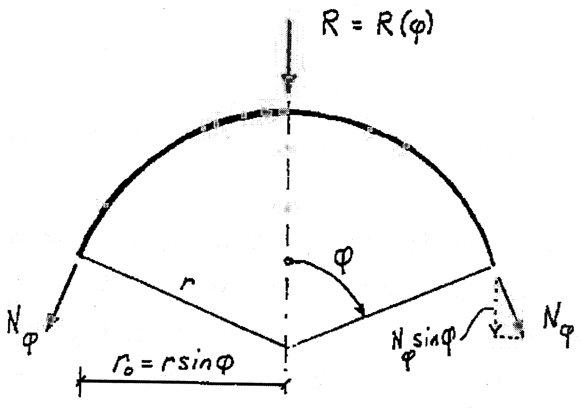
2.2.2 Skallstørrelser

For å finne skallstørrelsene til kuleskallet må en betrakte de ulike størrelsene hver for seg. Membrantilstanden tilsvarer den partikulæreløsningen og bøyetilstanden tilsvarer den homogeneløsningen.

Partikulærløsning

Membrankreftene finnes ved bruk av membranteori. Membrankraft i meridianretning, N_φ, utledes ved en vertikal likevekt av en kulekalott, se figur 2.5.

Vertikal likevekt gir ligning i (2.30) hvor R er den vertikale resultanten av ytre laster over



Figur 2.5: Kraftfordeling i kulekalott [4]

skallet.

$$N_\varphi sin\varphi \cdot 2\pi r sin\varphi + R = 0$$

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r sin^2\varphi} \tag{2.30}$$

Membrankraften i ringretning, N_ϑ, finnes ved en radiell likevekt av N_φ, N_ϑ og ytre krefter i elementet fra figur 2.4. Det gir ligningen i (2.31) hvor Z er ytre laster normalt på skallet og $r_0 = r sin\varphi$.

$$N_\varphi \cdot r sin\varphi d\vartheta d\varphi + N_\vartheta \cdot d\varphi d\vartheta sin\varphi + Z \cdot r sin\varphi d\vartheta r d\varphi = 0$$

$$N_\vartheta = -N_\varphi - Z \cdot r = \frac{R}{2\pi r sin^2\varphi} - Z \cdot r \tag{2.31}$$

Ved egenlast kan den vertikale resultaten, R, uttrykkes ved:

$$R = 2\pi r^2 \rho h(1 - cos\varphi_0)$$

Deformasjoner i henhold til membranteorien

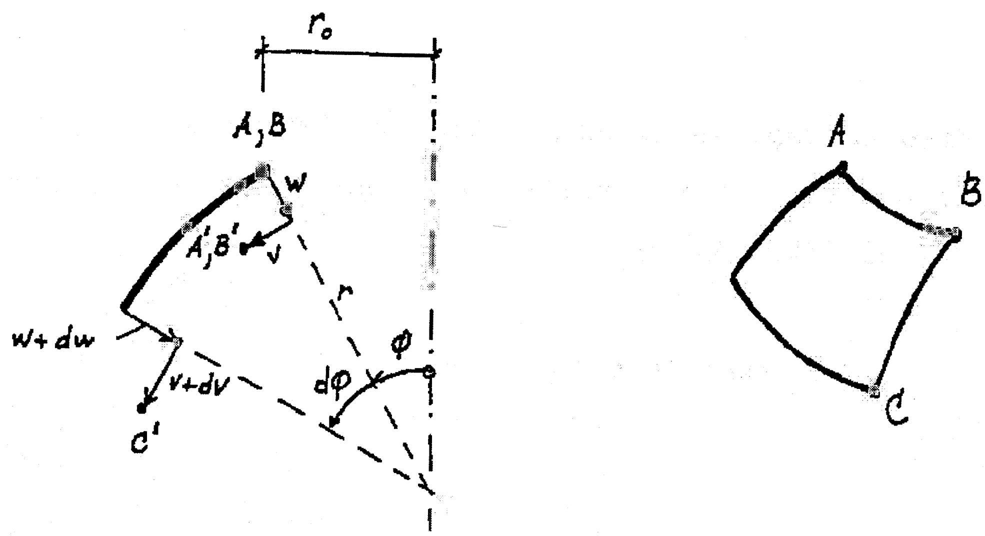
Tangentdreiningen, α_P, og horisontalforskyvningen, δ_P, er nødvendig i sammenkobling av kuleskall og en annen geometri.

Disse to verdiene kan bestemmes med membrantøyningene, ϵ_φ og ϵ_ϑ . Membrantøyningene bestemmes ved å betrakte et element i udeformert og deformert tilstand gitt i figur 2.6. Radien til et deformert element kan beskrives ved hjelp av den radielle forskyvning w, tangentielle forskyvning v og vinkelen φ.

$$r_{0deformert} = r_0 - w sin\varphi + v cos\varphi$$

Denne betraktningen fører til membrantøyningen i ligning (2.32) og ringtøyningen i ligning (2.33).

$$\epsilon_\varphi = \frac{(r - w)d\varphi + dv - r d\varphi}{r d\varphi}$$



Figur 2.6: Deformasjoner i membrantilstanden[4]

som gir

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{r} \tag{2.32}$$

$$\epsilon_{\vartheta} = \frac{r_0 - wsin\varphi + vcos\varphi}{r_0} - 1$$

som gir

$$\epsilon_{\vartheta} = \frac{v}{r} \cdot cotg\varphi - \frac{w}{r} \tag{2.33}$$

Videre kombineres uttrykkene (2.32) og (2.33) til sammenhengen i (2.34).

$$\frac{dv}{d\varphi} - vcotg\varphi = r(\epsilon_{\varphi} - \epsilon_{\vartheta}) \tag{2.34}$$

Fra skiveteorien er Hooke's lov definert som

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi} &= \frac{(N_{\varphi} - \nu N_{\vartheta})}{Eh} \\ \epsilon_{\varphi} &= \frac{(N_{\vartheta} - \nu N_{\varphi})}{Eh} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Setter (2.35) inn i (2.34) og danner differensialligningen

$$\frac{dv}{d\varphi} - v cotg\varphi = \frac{1+\nu}{Eh} \cdot r(N_\varphi - N_\vartheta) = f(\varphi) \tag{2.36}$$

Løsningen av differnsialligningen i (2.36) kan være:

$$v = sin\varphi \int_0^\varphi \frac{f(\varphi)}{sin\varphi} d\varphi \tag{2.37}$$

Og den radielle forskyvningen w kan bestemmes ved hjelp av ligning (2.33) som

$$w = v \cdot cotg\varphi - \epsilon_\vartheta \cdot r \tag{2.38}$$

Tangentdreiningen, α_p, uttrykkes som (2.39) og kombineres med (2.34) og (2.38) til (2.40) for å uttrykke den ved tøyningene i kuleskallet.

$$\alpha_p = \frac{dw}{rd\varphi} + \frac{v}{r} \tag{2.39}$$

$$\alpha_p = cotg\varphi \cdot (\epsilon_\varphi - \epsilon_\vartheta) - \frac{d\epsilon_\vartheta}{d\varphi} \tag{2.40}$$

Horisontalforskyvningen, δ_p, uttrykkes som (2.41) og kombineres med (2.32) til (2.42) for å uttrykke den ved tøyningene i kuleskallet.

$$\delta = v \cdot cos\varphi - w \cdot sin\varphi \tag{2.41}$$

$$\delta = \epsilon_\vartheta \cdot r \cdot sin\varphi \tag{2.42}$$

Homogenløsning

For å undersøke virkningen av randforstyrrelsene i kuleskallet må den homogeneløsningen betraktes. Den homogeneløsningen kan finnes ut i fra differensialligningen gitt i (2.43) med en kuleskallvinkel på $\varphi_0 \geq 20°$. En mindre kuleskallvinkel, φ_0 må det utnyttes en eksakt løsning som kan sees i [6].

Kuleskallets differensialligning:

$$\frac{d^4 V_\varphi}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 \cdot V_\varphi = 0 \tag{2.43}$$

hvor

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)\frac{r^2}{h^2}} \tag{2.44}$$

Den generelle løsningen av differensialligningen er:

$$V_\varphi = e^{\lambda\varphi}(A_1 cos(\lambda\varphi) + A_2 sin(\lambda\varphi)) + e^{-\lambda\varphi}(A_3 sin(\lambda\varphi) + A_4 sin(\lambda\varphi)) \tag{2.45}$$

hvor A_i er integrasjonskonstanter.

Det er kun interessant å ha en løsning som dempes i fra randen som ved sylinderskallet. Derfor må koordinaten, φ, erstattes med en ny koordinat som er definert fra randen, $\psi = \varphi_0 - \varphi$. I tillegg innføres en ny variabel, $t = \lambda\psi$, og disse endringene fører til en dempet løsning som kan sees i (2.46).

$$V_\varphi = e^{-t}(C_1 cos(t) + C_2 sin(t)) \tag{2.46}$$

Ved hjelp av den dempede løsningen så kan man finne de resterende skallstørrelsene og settes sammen i et ligningssystem vist i (2.28). Utledninge av sytemet kan finnes i [4] og [6].

$$\begin{bmatrix} V_\varphi \\ N_\varphi \cdot tg\varphi \\ V_\vartheta \cdot \frac{1}{\lambda} \\ M_\varphi \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \\ M_\vartheta \cdot \frac{Ehr}{2\nu\lambda^3 D} \\ \alpha \cdot \frac{Eh}{2\lambda^2} \\ \delta \cdot \frac{Eh}{\lambda r sin\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ -g_1(t) & -g_2(t) \\ -g_3(t) & g_4(t) \\ g_4(t) & g_3(t) \\ g_4(t) & g_3(t) \\ g_2(t) & -g_1(t) \\ -g_3(t) & g_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C1 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

2.3 Sirkulær plate

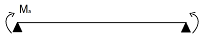
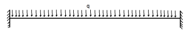
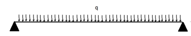
Et alternativ til kuleskallet er en fritt opplagt eller monolittisk forbundet sirkulær plate. Disse er enklere å lage og kalkulere med. Løsningen for symmetrisk bøying av sirkulære plater er hentet i fra [2]

Tabell 2.1 viser løsninger for tverrforskyvning w, vinkelendring $\frac{dw}{dr}$, krumning $\frac{d^2w}{dr^2}$, integrasjonskonstantene C_1, C_2, C_3, og platemomentene M_r og M_t. Det er gitt generelle formler den første kolonnen og fortsetter med moment på platerand, jevnt fordelt last på monolittisk forbundet og jevnt fordelt last på fritt opplagt plate.

Skjærkraften for en sirkulær plate med jevnt fordelt last utledes i [6] og er som følger:

$$2\pi r V = \pi r^2 q \tag{2.48}$$

$$V = \frac{qr}{2} \tag{2.49}$$

	Generelle formler			
ω	$\frac{qr^4}{64D} + C_1\frac{r^2}{4} + C_2\log\frac{r}{a} + C_3$	$\frac{M_a}{2D(1-\nu)}(a^2 - r^2)$	$\frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2$	$\frac{q}{64D}(a^2 - r^2)(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2)$
$\frac{d\omega}{dr}$	$\frac{qr^3}{16D} + C_1\frac{r}{2} + C_2\frac{1}{r}$	$-\frac{M_a r}{D(1+\nu)}$	$-\frac{qr}{16D}(a^2 - r^2)$	$-\frac{q}{16D}(\frac{3+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2)$
$\frac{d^2\omega}{dr^2}$	$\frac{3qr^2}{16D} + \frac{C_1}{2} - C_2\frac{1}{r^2}$	$-\frac{M_a}{D(1+\nu)}$	$-\frac{q}{16D}(a^2 - 3r^2)$	$-\frac{q}{16D}(\frac{3+\nu}{1+\nu}a^2 - 3r^2)$
C_1		$-\frac{2M_a}{D(1+\nu)}$	$-\frac{qa^2}{8D}$	$-\frac{qa^2}{8D}\frac{3+\nu}{1+\nu}$
C_2		0	0	0
C_3		$-\frac{M_a a^2}{2D(1+\nu)}$	$\frac{qa^4}{64D}$	$\frac{qa^4}{64D}\frac{5+\nu}{1+\nu}$
M_r	$-D(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\nu d\omega}{rdr})$	$+M_a$	$\frac{q}{16}[a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)]$	$\frac{q}{16}(3+\nu)(a^2 - r^2)$
M_t	$-D(\frac{d^2\omega}{rdr^2} + \frac{\nu d^2\omega}{dr^2})$	$+M_a$	$\frac{q}{16}[a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$	$\frac{q}{16}[a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)]$
M_a		$+M_a$	$-\frac{qa^2}{8}$	0
M_ξ		$+M_a$	$\frac{q}{16}(1+\nu)$	$\frac{qa^2}{16}(3+\nu)$

Tabell 2.1: Krefter i plate [2]

Kapittel 3

FEM- programmet Diana

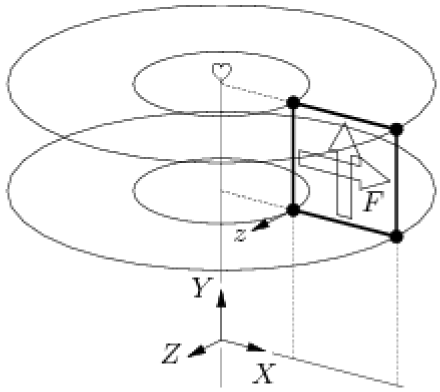
Under denne oppgaven benyttes Diana som er et FEM-program som egner seg godt til betonganalyser. Diana er utviklet av TNO og TU Delft og baserer seg på forskyvningsmetoden og kan brukes til analyser av enkle bjelker til avanserte ikke-lineære analyser av 3D modeller. Programmet egner seg godt til betonganalyser på grunn av de ulike mulighetene å modellere sprekker i betongen, som er viktig for å utnytte betongens potensiale. Diana Teacher er versjonen som er brukt i denne oppgaven og er en begrenset versjon med en øvre grense på 1000 elementer per modell og 100 partisjoner per linje.

Ved analyse av aksesymmetriske betongskall er det en rekke innstillinger som anvendes for å produsere en optimal FEM-modell. I denne delen skal de viktigste delene av modelleringsfasen beskrives. Disse involverer geometri, element og material. Randbetingelser og laster vil kommenteres senere i de aktuelle eksemplene. Mye av informasjonen er hentet i fra [5].

3.1 Geometri

Ved oppstart av Diana velges strukturell aksesymmertisk modellering. Denne type modellering roterer elementene i en ring rundt Y-aksen. Det gjør at geometrien kan modelleres i et 2D-plan, altså Z-koordinaten er alltid lik 0, se figur 3.1.

3.2 Element



Figur 3.1: Aksesymmetriske elementer [5]

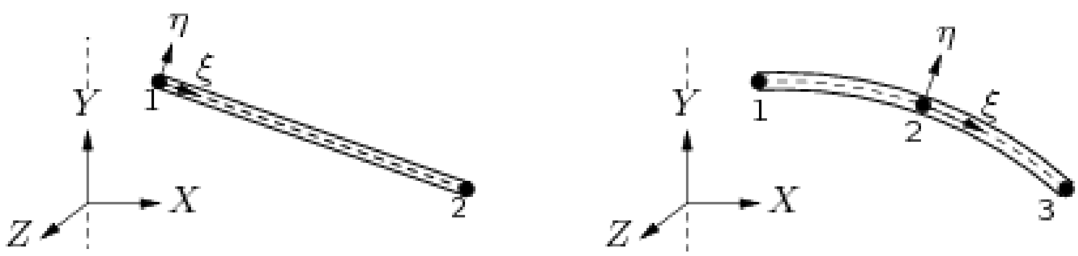
Det er to hovedklasser av aksesymmetriske elementer. Disse klassene avhenger av hvordan modellen settes opp.

Første klasse: Omhandler massive ringer med et tre- eller firkantet tverrsnitt. Klassen består av blant annet T6AXI og Q8AXI som er isoparametriske massive elementer.

Andre klasse: Omhandler skall som har liten tykkelse sammenlignet med lengden. Klassen består av blant annet L6AXI og CL9AX som er begge numerisk integrerte elementer.

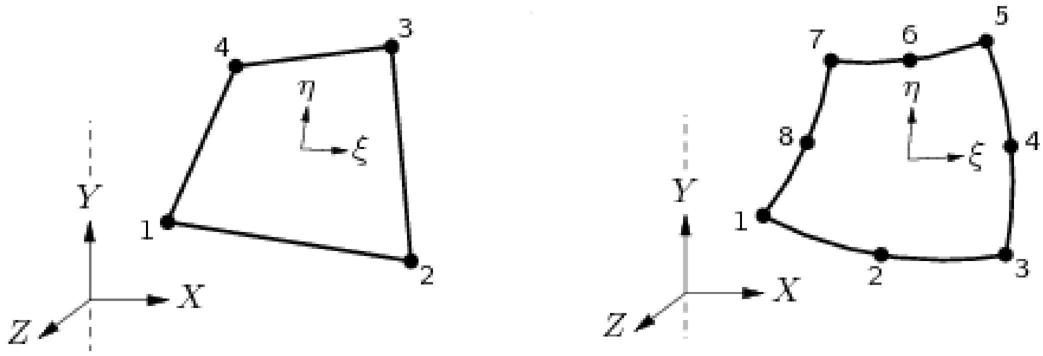
I en lineær FEM-analyse av regneeksemplene i Del II benyttes den andre klassen. Denne klassen beskriver elementene ved å anta to forskjellige kriterier. Den første antakelsen sier at normal tøyningskomponenten forholder seg rett, men trenger ikke å være vinkelrett på overflaten. Den andre antakelsen innebærer at normal tøyningskomponent i normalretning til det lokale koordinatsystemet er null. De to ulike elementene L6AXI og CL9AX etterkommer disse kravene og inneholder henholdsvis to noder og tre noder med tre frihetsgrader, se figur 3.2. Frihetsgradene representerer horisontal forskyvning u_x, vertikal forskyvning u_y og rotasjon φ_z.

I en ikke-lineær FEM-analyse er det nødvendig å legge inn armering og dette krever et massiv element for å kunne bruke funksjonen *Embedded reinforcement.* Den første klassen



(a) L6AXI-elementet (b) CL9AX-elementet

Figur 3.2: Elementtyper for numeriske skall [5]



(a) Q8AXI-elementet

(b) CQ16A-elementet

Figur 3.3: Elementtyper for massive skall [5]

beskriver todimensjonale tverrsnitt med to frihetsgrader. Det er er kun de firkantede elementene Q8AXI med 4 noder og CQ16A med 8 noder som vil bli brukt i disse analysene. Q8AXI med 2 punkter i begge retningene og er et stabilt element basert på Gauss integrasjon. Et problem som kan oppstå i Q8AXI er volumetrisk låsning eller parasittisk skjær som vil gi høyere stivhet og kvalitative feil [5].

3.3 Materialmodell

Materialmodellen for betong benyttet i DIANA er basert på *total strain rotating crack*. Det betyr at rissretningene kan endres etter at rissene har oppstått. Modellen deles inn i to forskjellige deler, en trykk del og en strekk del. De to ulike modellene kan sees i figur 3.4.

Strekkmodell

Strekkmodellen er basert på *tension softening*, bruddenergi, bruddtøyning, strekkapasitet og elementets karakteristiske størrelse. *Tension softening* er betongens oppførsel etter opprissing.

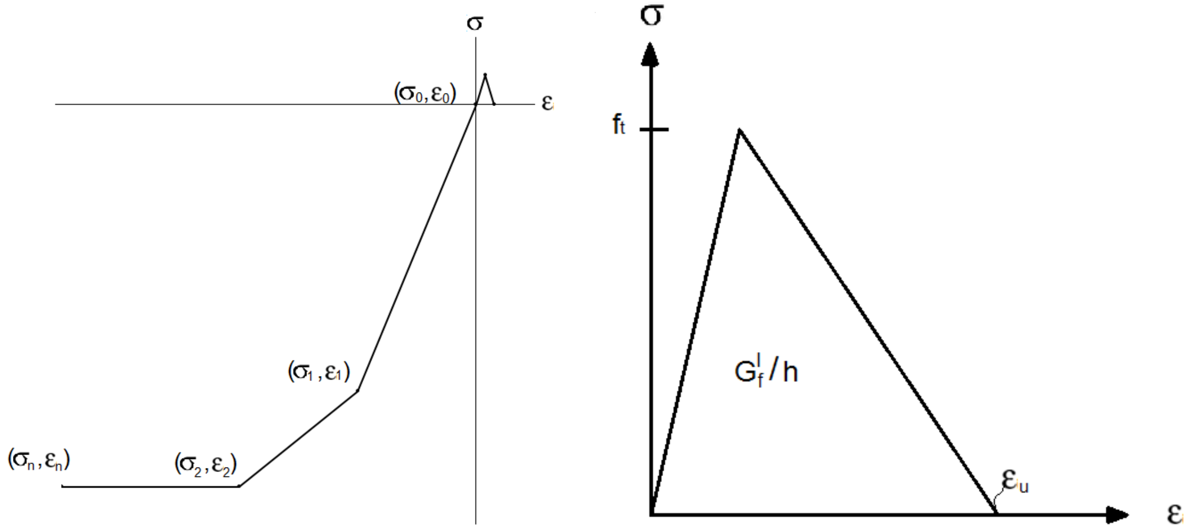
Betongens strekkapasitet bestemmes av: $f_{ctd} = \alpha_c \cdot \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c}$

Bruddtøyningen bestemmes av: $\epsilon_u = \frac{f_{ctd}}{E_c}$ uten skjærarmering

$\epsilon_u = \frac{f_{yd}}{E_c}$ med skjærarmering

Elementets karakteristiske størrelse bestemmes av: $h = \sqrt{A_{element}}$

Bruddenergien utledes fra disse verdiene: $G_f = \frac{1}{2} \cdot f_{ctd}\epsilon_u h$



(a) Trykkmodell (b) Strekkmodell

Figur 3.4: Materialmodell

Disse verdiene er viktig å justere i henhold til størrelsen på elementer og hvorvidt skjærarmering benyttes.

Trykkmodellen

Trykkmodellen er definert ved en multi-linear modell som vist i figur 3.4a.

Armering

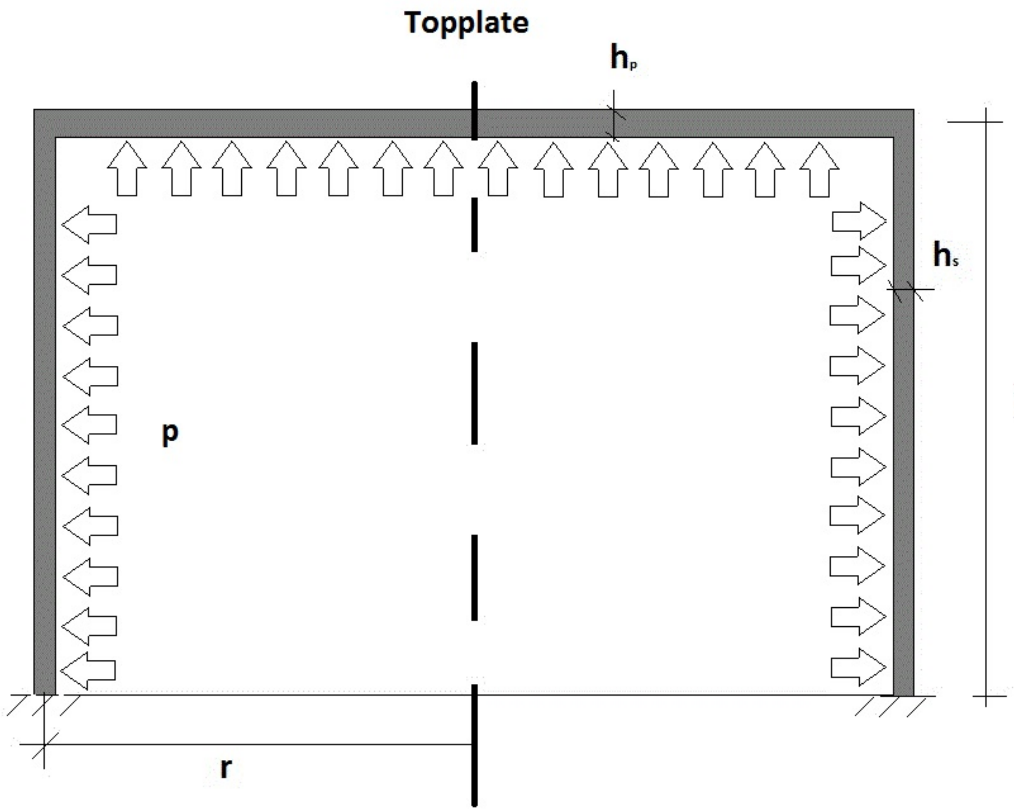
Modellen som brukes tar hensyn forskjellig armeringsmengde i ulike retninger og kan oppnå flytespenning ved forskjellig tidspunkter.

Del II

Beregningseksempler av aksesymmetriskeskall

Kapittel 4

Sylinder med platetak



Figur 4.1: Sammensatt sylinder og sirkulær plate

Geometri	L=4500mm	r=2750mm	
	h$_p$=200mm	h$_s$=150mm	
Materialdata	E=30000MPa	ν=0.2	$\rho_b = 2550\ \frac{kg}{m^3}$
Later	p=100$\frac{kN}{m^3}$		

Tabell 4.1: Geometri, materialdata og laster for sylinder med platetak

I dette eksempelet skal en sylinder med et monolittisk platetak og et indre overtrykk p vurderes opp i mot analytisk (4.1), lineær (4.2) og ikke-lineæranalyse (4.3). Geometrien og relevante data kan leses i figur 4.1 og tabell 4.1. Det er valgt å bruke generelle data i disse eksemplene. I alle figurene av resultatene er det lagt inn en svart linje for å indikere sylinderen og platen. For sylinderen er den positive siden, høyre siden av plotet, innsiden av sylinderen.

4.1 Analytisk løsning

Den analytiske løsningen deles i to deler hvor den første delen utleder ligningene som blir presentert i den andre delen.

4.1.1 Beregninger

Først vurderes dempningslengden, gitt i ligning (2.29), opp i mot lengden på sylinderen:

$$l_e = \frac{\sqrt{rh}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2}} = 493mm$$
$$L_c = \pi \cdot l_e = 1549mm$$

Dempningslengden er mindre enn halvparten av sylinderens lengde og kan derfor betraktes som uendelig lang.

$$2 \cdot L_c \leq L$$

Beholderen kan derfor deles inn i tre ulike deler for å gjøre utregningene lettere.

- Sylinderbunn
- Sylindertopp
- Plate

Sylinderbunn

Bruker matrisesystemet i ligning 2.33 til å finne moment-, skjær- og ringkraftfordelingen til den homogeneløsningen:

$$M_x(\xi) = M_0 \cdot g_3(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_2(\xi)$$
$$V_x(\xi) = \frac{-2M_0}{l_e} \cdot g_2(\xi) + V_0 \cdot g_4(\xi)$$
$$N_\varphi(\xi) = \frac{2r}{l_e^2}(M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_1(\xi))$$

M_o og V_0 finnes i fra uttrykkene (2.26) og (2.27) og fordelingen til $M_x(\xi)$ og $V_x(\xi)$ kan forenkles til:

$$M_x(\xi) = \frac{pl_e^2}{2} g_4(\xi)$$
$$V_x(\xi) = -pl_e \cdot g_1(\xi)$$

Mens ringkraften $N_\varphi(\xi)$ får et tillegg i fra partikulærløsningen:

$$N_{\varphi p} = \frac{Eh}{r} \cdot w_p = pr$$

hvor w_p kan leses i (2.29) og ringkraftfordelingen blir:

$$N_\varphi(\xi) = pr(1 - g_3(\xi))$$

Sammenkobling mellom sylinder og plate

Momentet og skjærkreftene vil overføres ved hjelp av koblingen mellom sylinderen og platen. For å finne den homogeneløsningen til platen og toppen av sylinderen må denne sammenkoblingen betraktes ved bruk av to ulike randbetingelser.

Platen antas i første omgang å være fritt dreibar hvor rotasjonen θ_q kan leses i fra tabell 2.1:

$$\theta_q = \frac{q_p r^3}{16D_p}(\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1) = 0.01rad$$

Videre ved sammenkoblingen vil det oppstå et randmoment, M_a som gir en dreining av plateranden, kan leses i fra tabell 2.1:

$$\theta_m = \frac{M_a r}{D_p(1+\nu)}$$

Den første randbetingelsen antar at rotasjonen mellom platen og sylinderen må være lik, $M_a = M_0$, og gir:

$$\frac{l_e}{2D_s}(-2M_0 - V_0 l_e) = \theta_q + \theta_m$$

Den andre betingelsen antar at platen er uendelig stiv i planet og gir:

$$\frac{pr^2}{Eh_s} + \frac{l_e^2}{2D_s}(M_0 + V_0) = 0$$

M_0 og V_0 løses ut i fra disse randbetingelsene. Utregning kan sees i vedlegg B.1:

$$M_0 = M_a = 74.03\frac{kNm}{m}$$
$$V_0 = -174.80\frac{kN}{m}$$

Sylindertopp

Kraftfordelingene fra toppranden kan utrykkes ved følgende ligninger:

$$M_x(\xi) = M_0 \cdot g_3(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_2(\xi)$$
$$V_x(\xi) = \frac{-2M_0}{l_e} \cdot g_2(\xi) + V_0 \cdot g_4(\xi)$$
$$N_\varphi(\xi) = pr + \frac{2r}{l_e^2}(M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_1(\xi))$$

Platen

Kraftfordelingen i platen hentes fra tabell 2.1

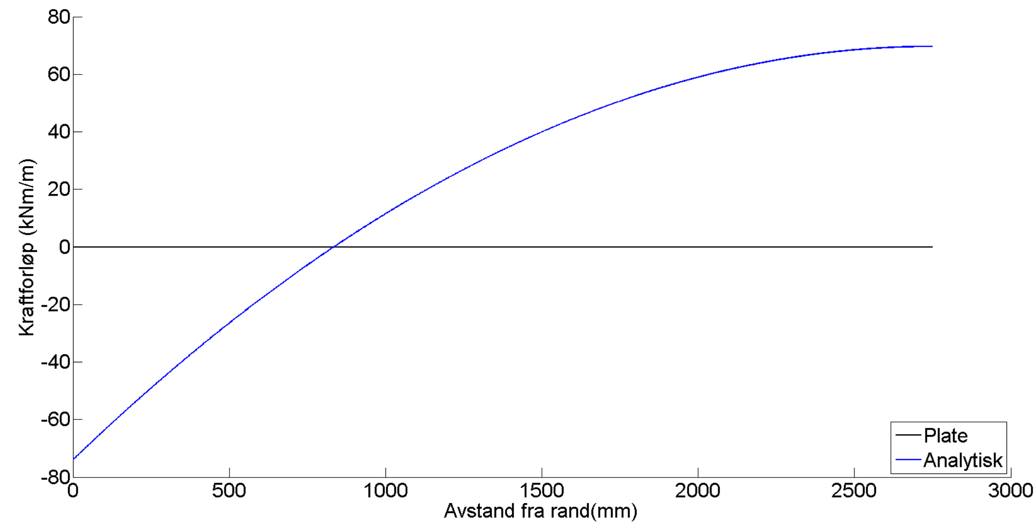
$$M_r(r) = M_a - \frac{q_p}{16} \cdot (3+\nu)(2.75^2 - r^2)$$
$$V_t(r) = M_a - \frac{q_p}{16} \cdot (2.75^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu))$$
$$V_x = -\frac{q_p r}{2}$$

4.1.2 Resultat av skallkreftene

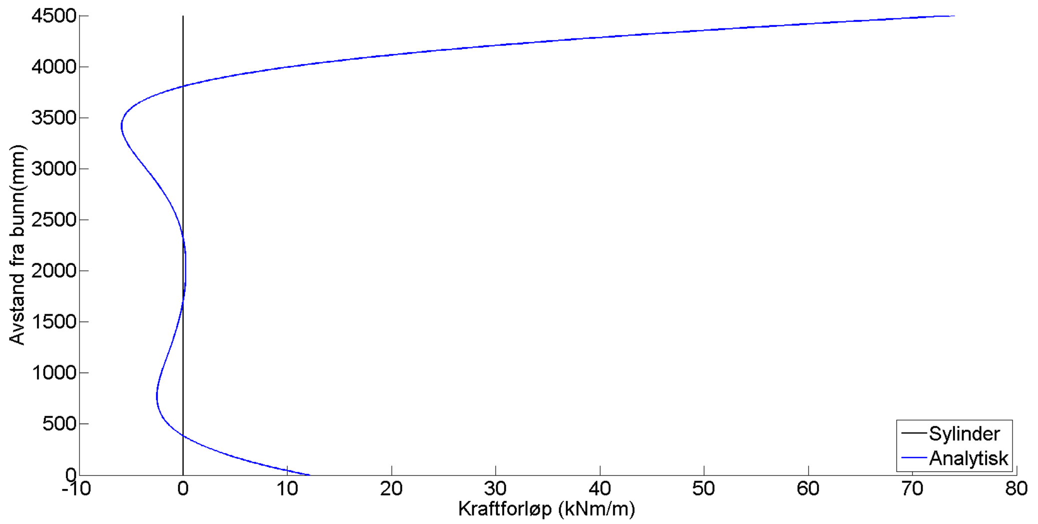
I figur 4.2 er M_r, momentet i merdianretning, ved randen i topplaten lik -74.1 $\frac{kNm}{m}$ og 69.7 $\frac{kNm}{m}$ ved senter av platen. Momentet krysser 800mm i fra randen. I sylinderen, figur 4.3, observeres det at momentet, M_x, er lik i toppen som ved randen til topplaten. Fra toppen går den i mot null rundt midten og øker til 12.1 $\frac{kNm}{m}$ ved bunn.

I figur 4.4 er skjærkraften ved randen lik 130.6 $\frac{kN}{m}$ og null ved senter av platen. I sylinderen, figur 4.5, observeres det at skjækraften ved toppen 174.8 $\frac{kN}{m}$. Kurven krysser null ved tre punkter før den mot bunnen vokser til - 49.3 $\frac{kN}{m}$.

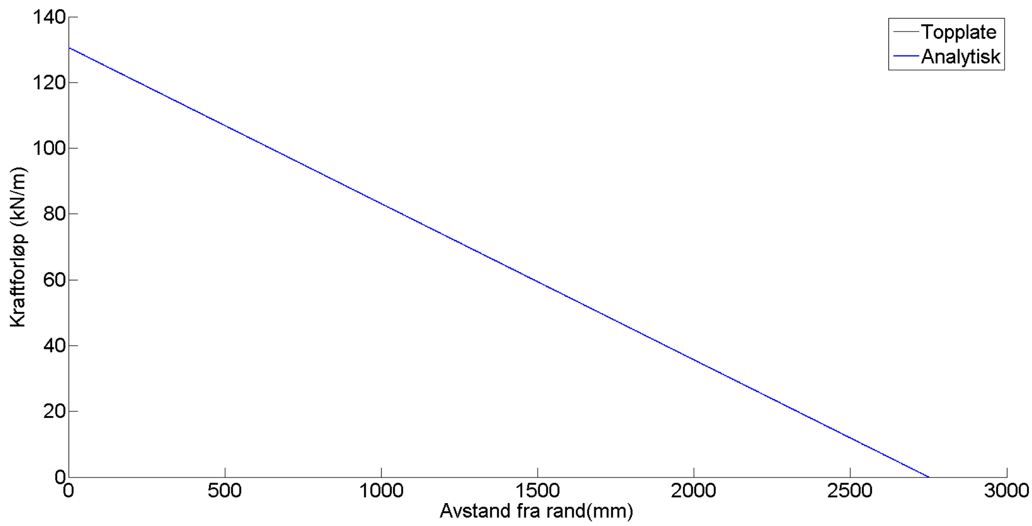
De to siste figurene, 4.6 og 4.7, kan ikke sammenkobles direkte. Figur 4.6 omhandler momentet i ringretning, M_t, og 4.7 omhandler ringkraften i sylinderen, N_φ. M_t er -2.2 $\frac{kNm}{m}$ ved randen og øker til den begynner å avta til 69.7$\frac{kNm}{m}$ i senter av platen. Ringkraften har to karakteristiske felter og starter i null ved topp og bunn. Feltet ved toppen er en bratt kurve med toppunkt ved 4200mm på - 369.0 $\frac{kN}{m}$. Feltene gå r mot null ved 3600mm og feltet ved bunnen er en flatere kurve. Dette feltet har toppunkt ved 2600mm på 303.1 $\frac{kN}{m}$.



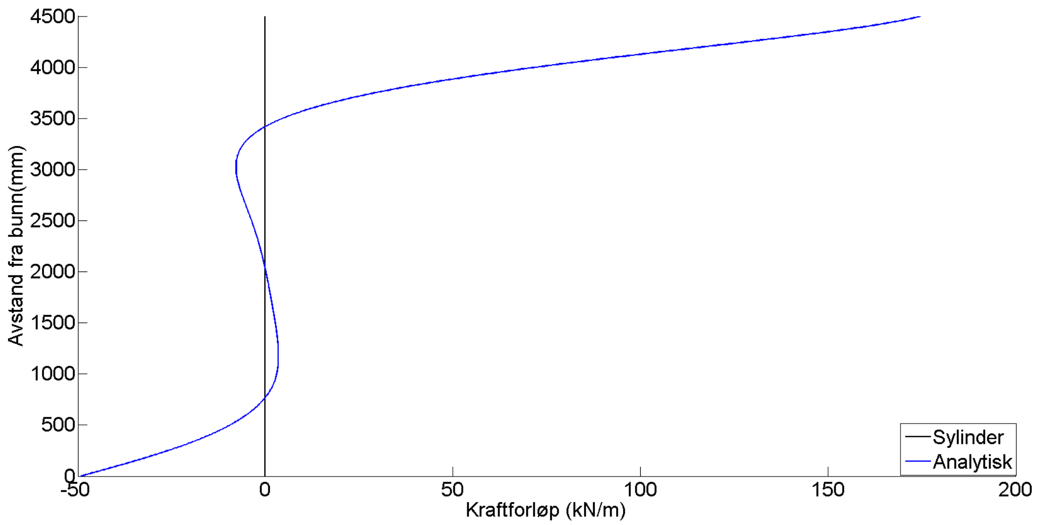
Figur 4.2: Moment i topplaten i merdianretning, M_r, i $\frac{kNm}{m}$



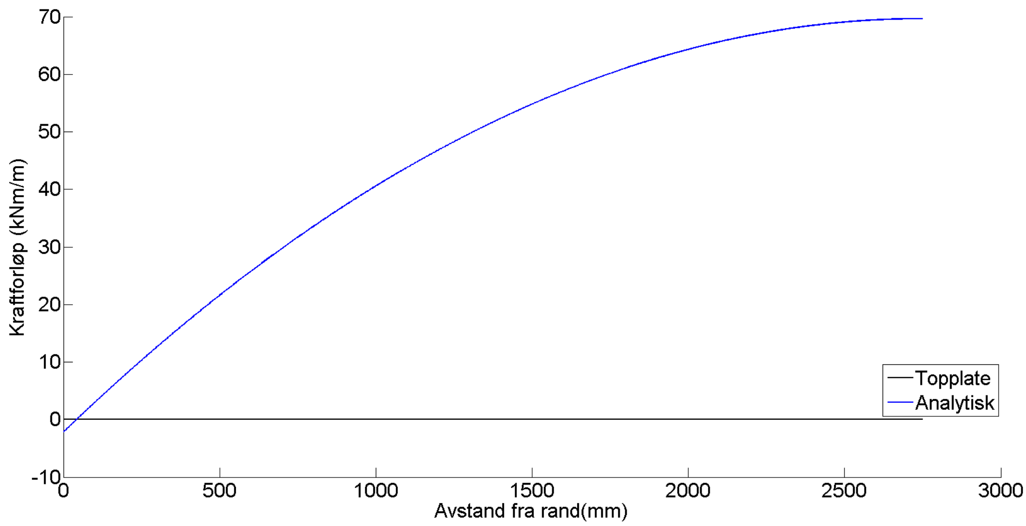
Figur 4.3: Moment i sylinder, M_x, i $\frac{kNm}{m}$



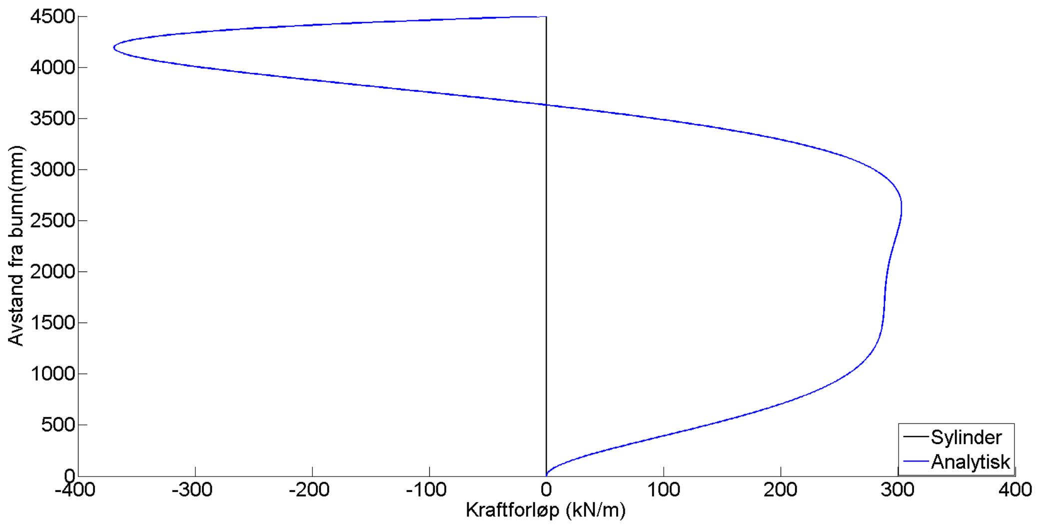
Figur 4.4: Skjærkraft i topplaten, V_x, i $\frac{kN}{m}$



Figur 4.5: Skjærkraft i sylinder, V_x, i $\frac{kN}{m}$



Figur 4.6: Moment i topplaten i ringretning, M_t, i $\frac{kNm}{m}$



Figur 4.7: Ringkraft i sylinder, N_φ, i $\frac{kN}{m}$

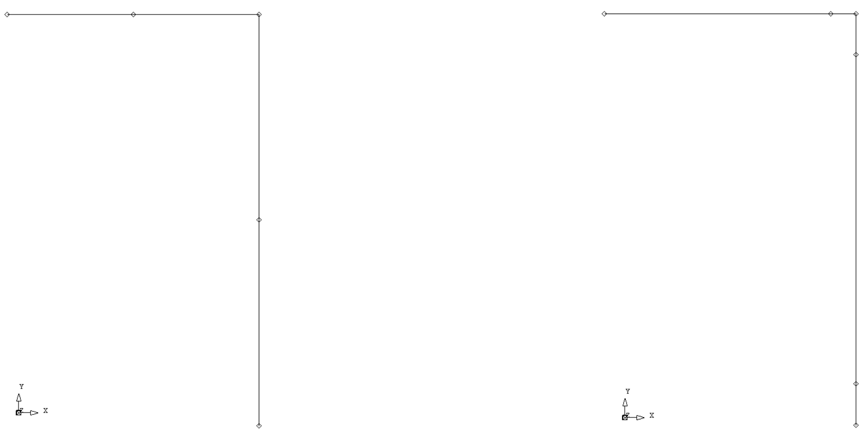
4.2 Lineær analyse

Modellen er lagd ved hjelp av to hovedlinjer i en aksesymmetrisk modell, se figur 4.8. Disse linjene er tilsatt en tykkelse og tilskrevet et koordinatnett. Dette nettet består av to hovedegenskaper oppdeling og elementtype. I den lineære analysen er det valgt å fokusere på to ulike elementer, se kapittel 3, L6AXI og CL9AX, og fire ulike oppdelinger. Oppdelingene er som følger:

Mesh 50: Linjene er delt inn i 50 noder
Mesh 100: Linjene er delt inn i 99 noder, største partisjon av en enkelt linje, se kapittel 3
Mesh 200: Linjene er delt inn i 198 noder, da det er for mange partisjoner deles linjene i 2. Se figur 4.8a
Mesh Hjørner: Linjene er delt inn i 297 noder i sylinder og 198 noder i platetak , her er det det forsøkt å forfine i hjørnene og ved innspenningen. Se figur 4.8b

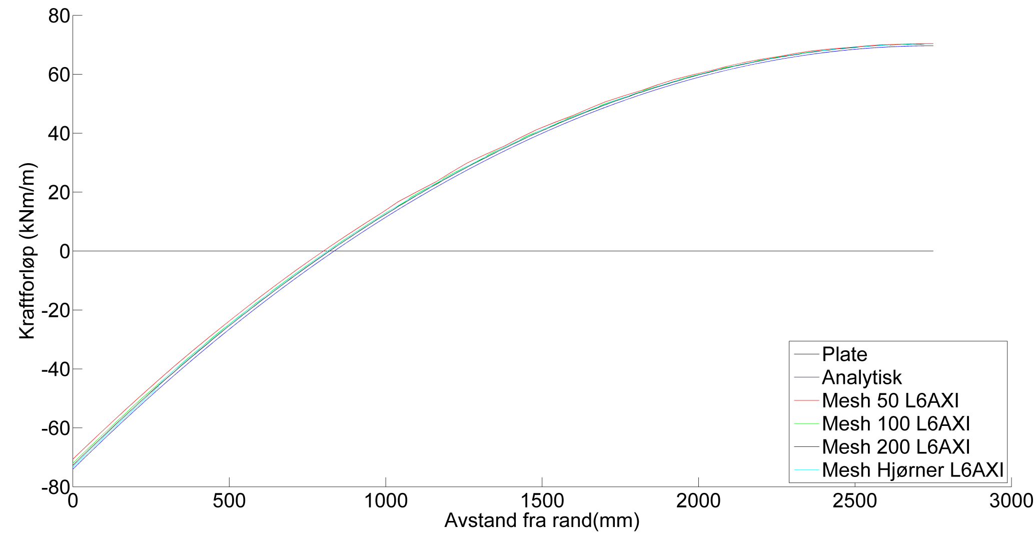
Elementtypene består av forskjellig antall noder noe som leder til et forskjellig antall elementer. L6AXI har 2 noder mens CL9AX har 3 noder i hvert element. CL9AX krever at antall noder er et partall og vil derfor føre til at partisjonene er 98 noder i stedet for 99 noder som for L6AXI.

Resultatene av undersøkelsene er presentert i ulike figurer hvor de er sammenlignet med de analytiske resultatene. De første figurene 4.9, 4.10,4.11, 4.12, 4.13, 4.14 viser resultatene til elementtypen L6AXI. De neste figurene 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 viser resultatene til elementtypen CL9AX.

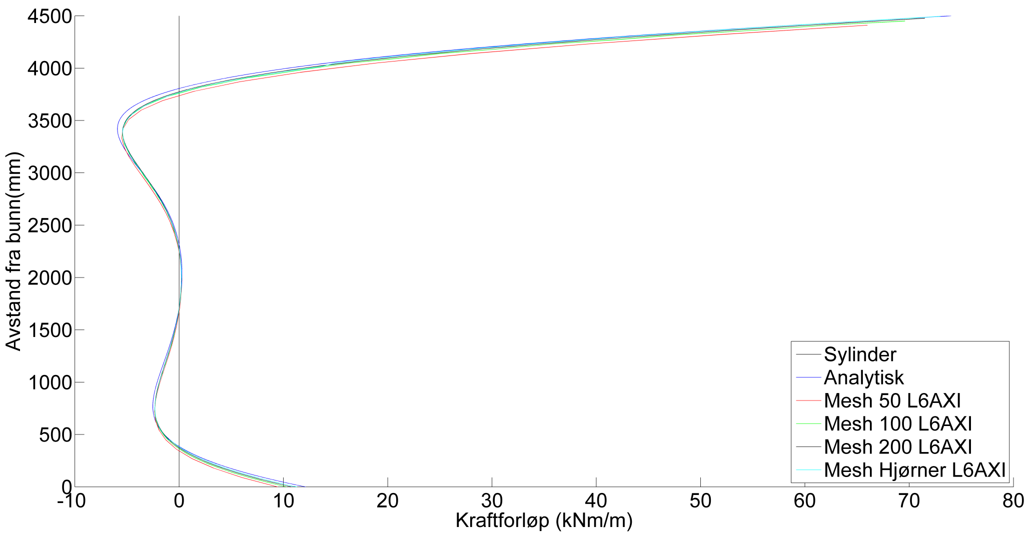


(a) Geometri ved 50,100 og 200 nett i FEM-modell (b) Geomeri ved hjørne nett i FEM-modell

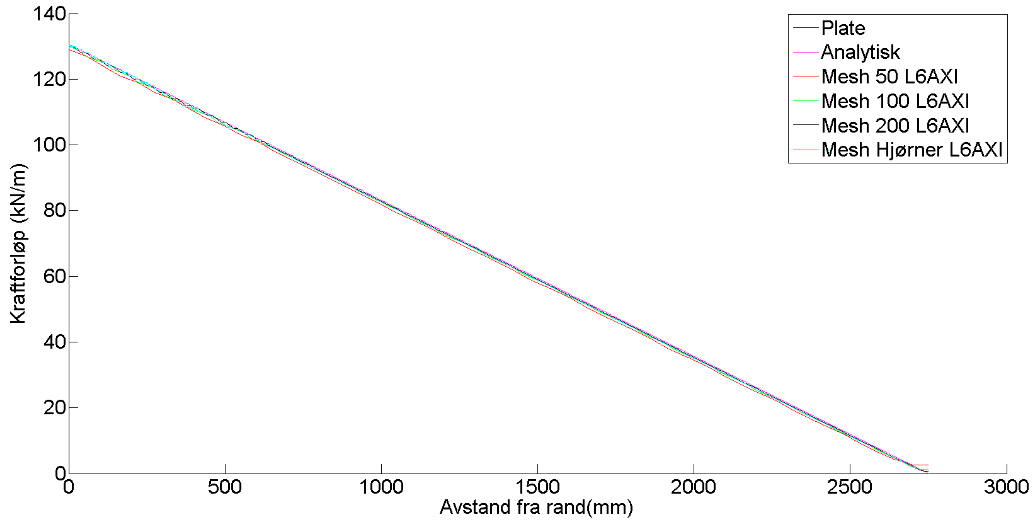
Figur 4.8: Geometri i FEM-modell



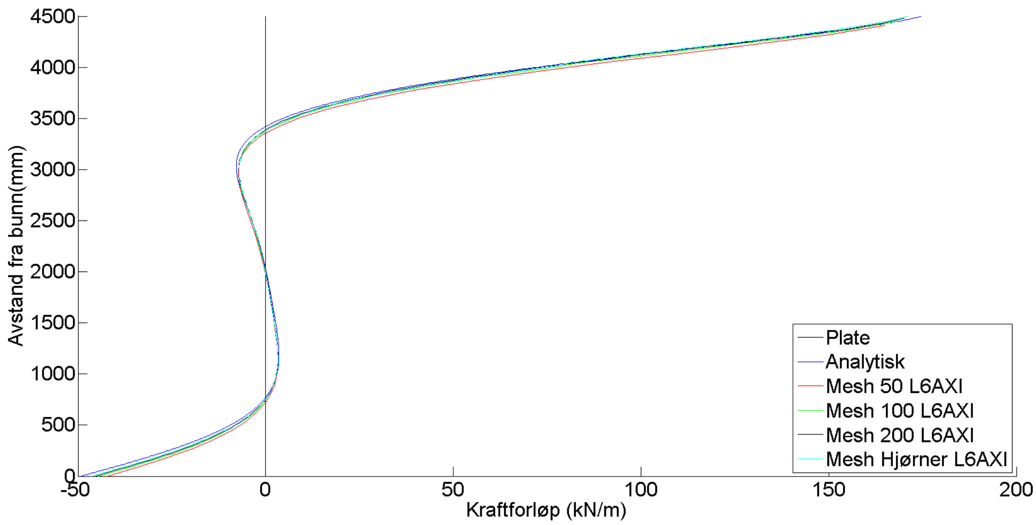
Figur 4.9: Moment i topplaten i merdianretning med ulike L6AXI elementer



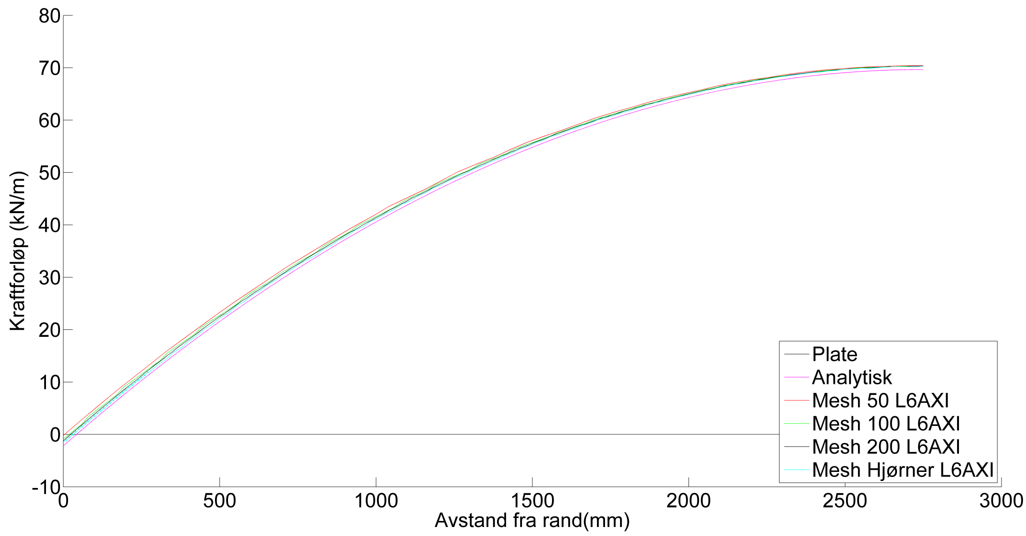
Figur 4.10: Moment i sylinder med ulike L6AXI elementer



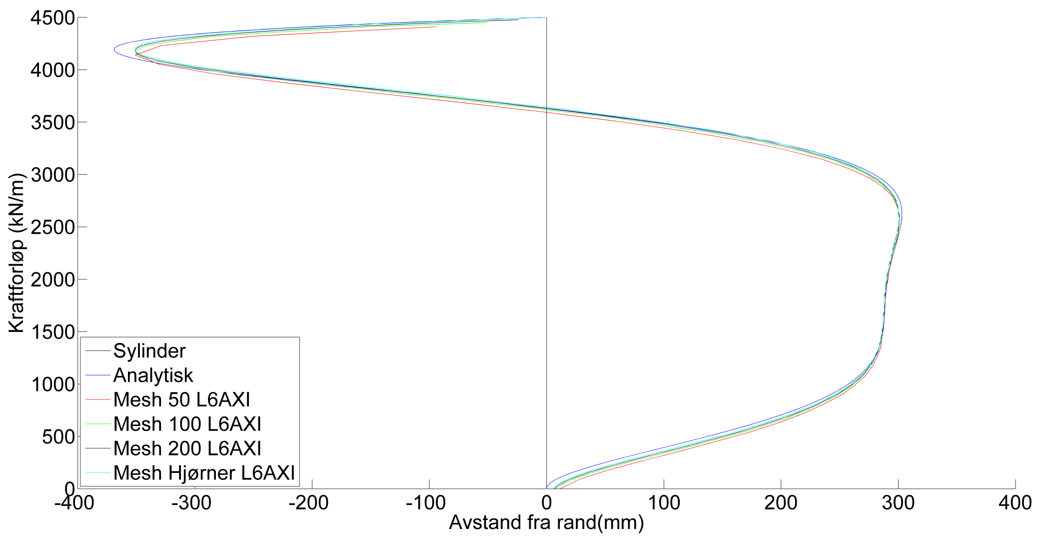
Figur 4.11: Skjærkraft i topplaten med ulike L6AXI elementer



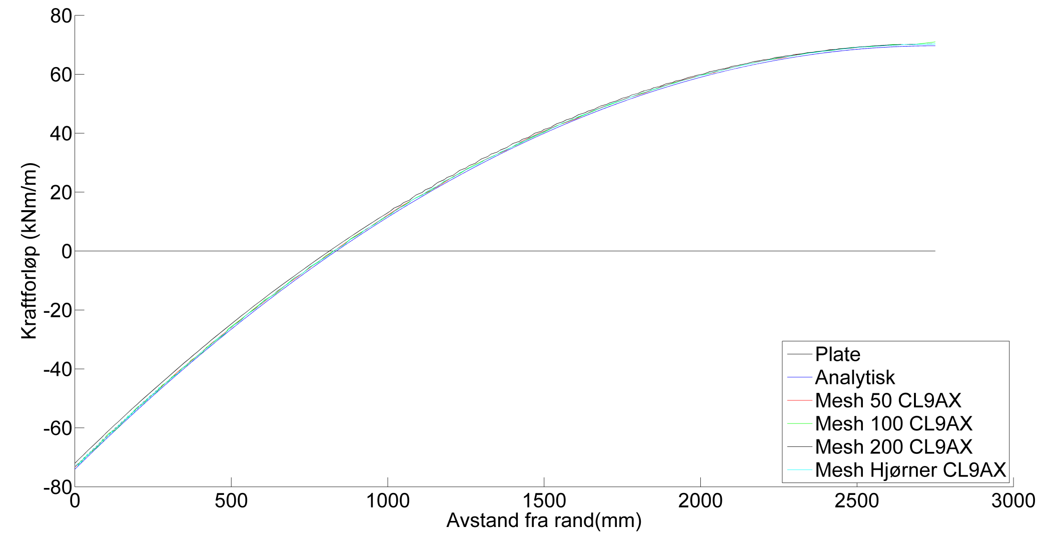
Figur 4.12: Skjærkraft i sylinderen med ulike L6AXI elementer



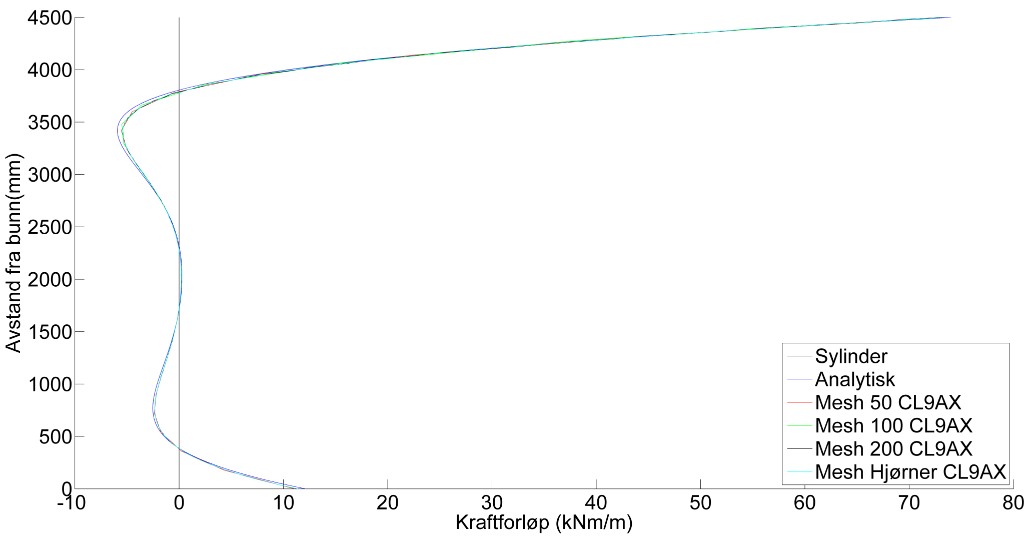
Figur 4.13: Moment i topplaten i ringretning med ulike L6AXI elementer



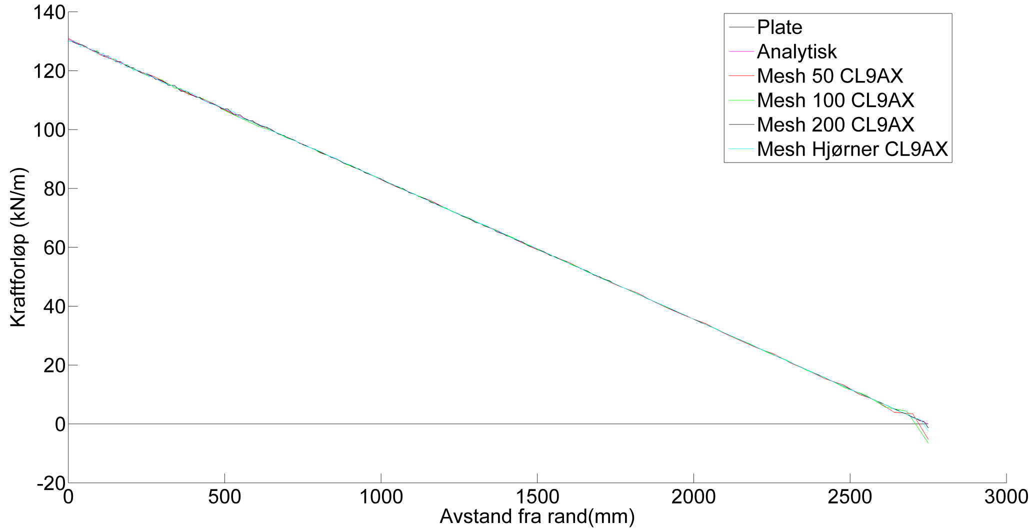
Figur 4.14: Ringkraft i sylinder med ulike L6AXI elementer



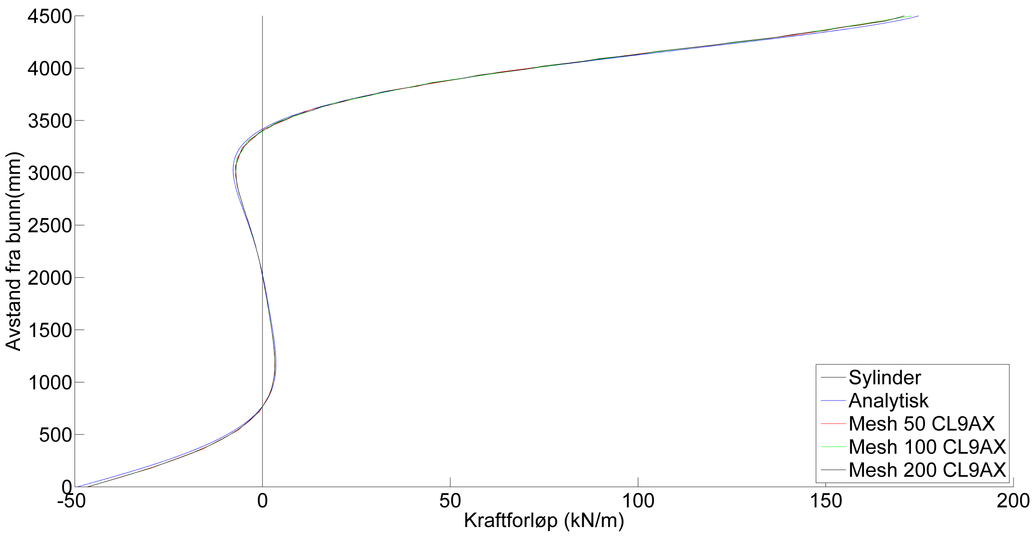
Figur 4.15: Moment i topplaten i merdianretning med ulike CL9AX elementer



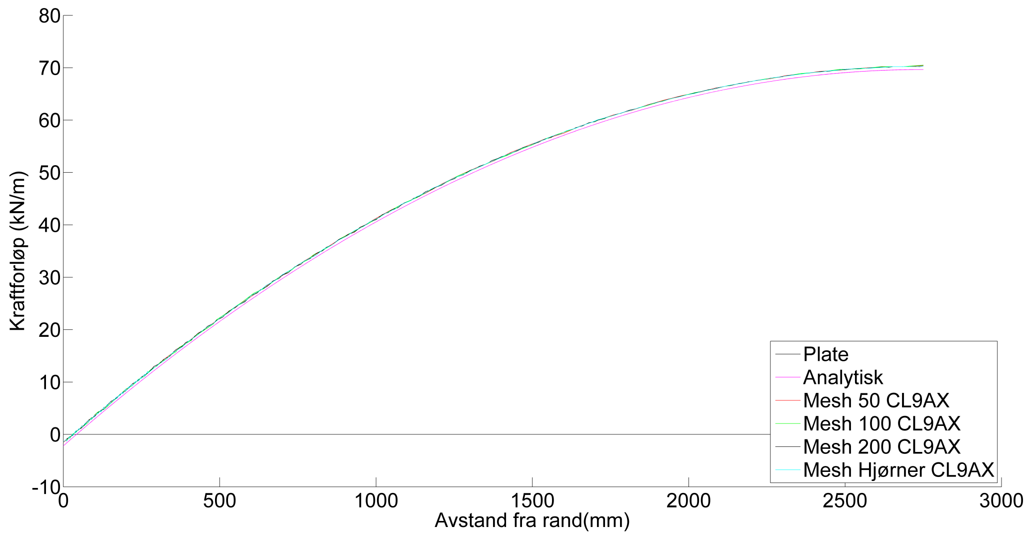
Figur 4.16: Moment i sylinder med ulike CL9AX elementer



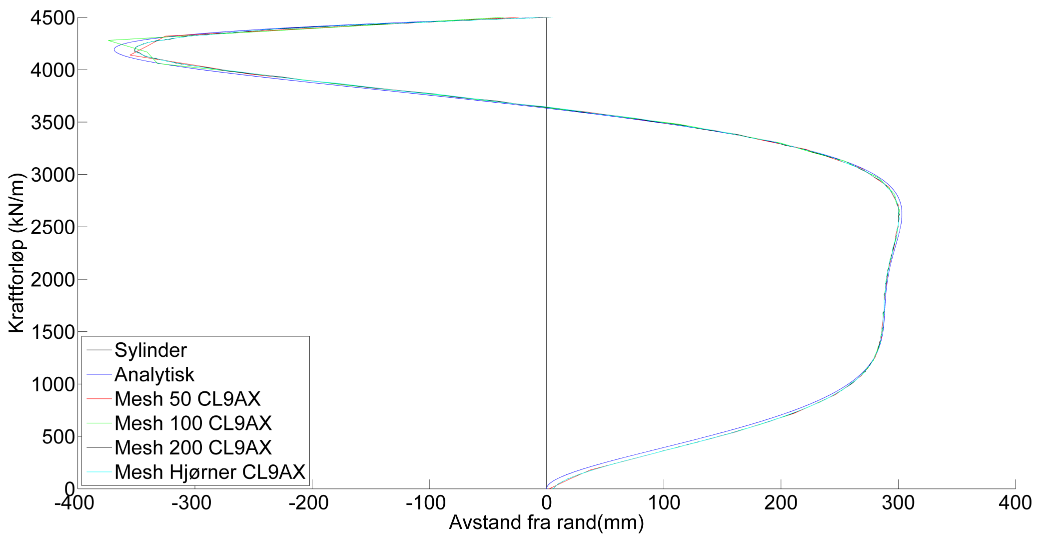
Figur 4.17: Skjærkraft i topplaten med ulike CL9AX elementer



Figur 4.18: Skjærkraft i sylinderen med ulike CL9AX elementer



Figur 4.19: Moment i topplaten i ringretning med ulike CL9AX elementer



Figur 4.20: Ringkraft i sylinder med ulike CL9AX elementer

4.3 Ikke-lineær analyse

Modellen for ikke-lineær analyse er lagd ved å bruke massive elementer, CQ8AX og CQ16A, se kapittel 3. Den betår av tre overflater og er innsatt med armeringen, vist i 4.21b. De tre overflatene er delt inn i til sammen 825 elementer og danner et koordinatnett, se figur 4.21a, som er tilnærmet lik over de tre overflatene. Materialdataene til betongen er kalkulert ut i fra formlene gitt i kaptittel 3 og gitt i tabell 4.2. Dimensjonering av armering kommer under delkapittel 5.3.1.

For å kartlegge ikke-lineæroppførsel vil det betraktes en last-deformasjonskurve, se figur 4.22. Videre vil armeringspenningen og rissutviklingen i toppunktet av deformasjonskurven undersøkes, se figurene 4.23a og 4.25.

Betong lineær	E= 17000MPa	ν= 0.2	
Betong ikke-linær	f_{ctd} =1.13MPa	G_f = 0.061 $\frac{N}{mm}$	f_{cd} = 17MPa
Armering lineær	E= 200000MPa	ν= 0.0	
Armering ikke-lineær	f_{yd}=434MPa		

Tabell 4.2: Materialdata for lineær og ikke-lineær analyse

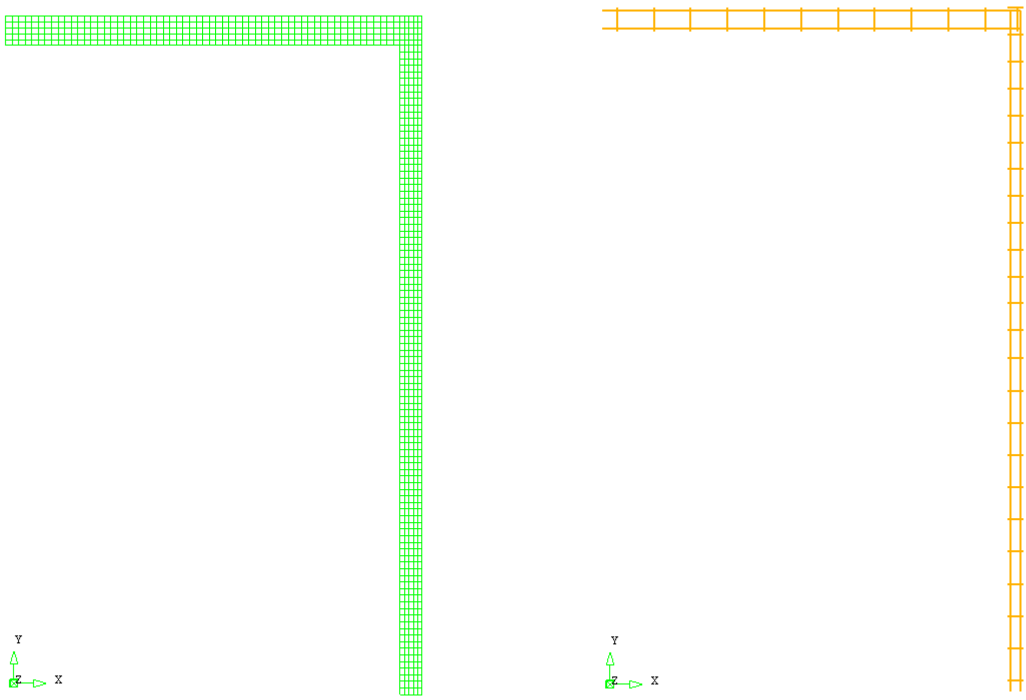
4.3.1 Dimensjonering av armering

Beregning av nødvendig armeringsmengde i beholderen gjøres ved bruk av lineær elastisk teori og i henhold til Eurokode 2 [1]. De utførte beregningene kan finnes i vedlegg A.1 og resultatene kan leses i tabell 4.3. Det er ikke tatt hensyn til minimumsarmeringen i tabell 4.3 for å gjøre sammenligningene bedre. Beregningene er konservative og det er lagt til grunn for ekstremalverdiene innen hver av konstruksjonsdelene gitt under den analysike delen. Betongkonstruksjoner av Sørensen[7] har hvert viktig i utførelsen av armeringsberegningene.

		Topplate	Sylindertopp	Sylinderbunn
Moment R	Ytre	$1111\frac{mm^2}{m}$	$700\frac{mm^2}{m}$	$53\ \frac{mm^2}{m}$
	Indre	$1189\frac{mm^2}{m}$	$2427\frac{mm^2}{m}$	$304\frac{mm^2}{m}$
Moment T	Ytre	$1111\frac{mm^2}{m}$		
	Indre	$31\frac{mm^2}{m}$		
Skjærarmering		$154mm^2$ s$280mm$	$154mm^2$ s$190mm$	$50mm^2$ s$220mm$
Ringarmering	Ytre		$424\frac{mm^2}{m}$	$340.5\ \frac{mm^2}{m}$
	Indre		$424\frac{mm^2}{m}$	$340.5\ \frac{mm^2}{m}$

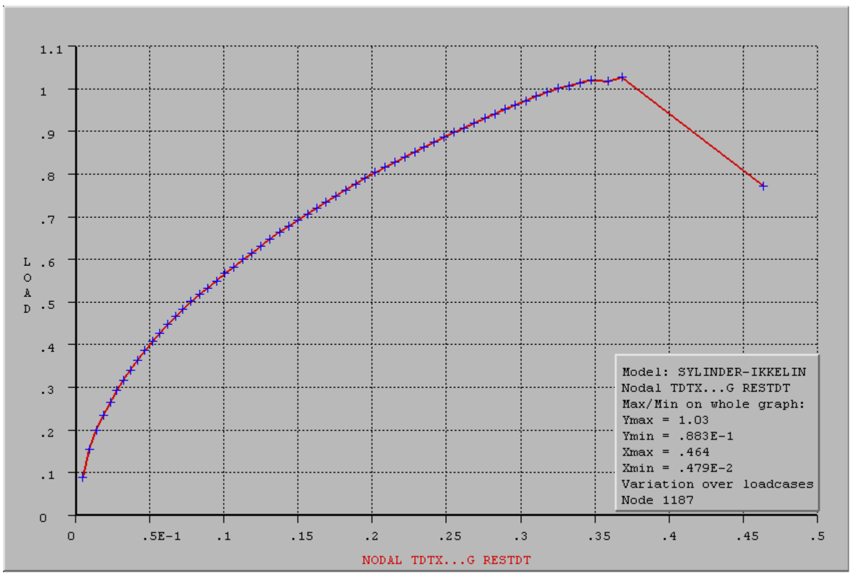
Tabell 4.3: Armering for sylinder med platetak

4.3.2 Resultater

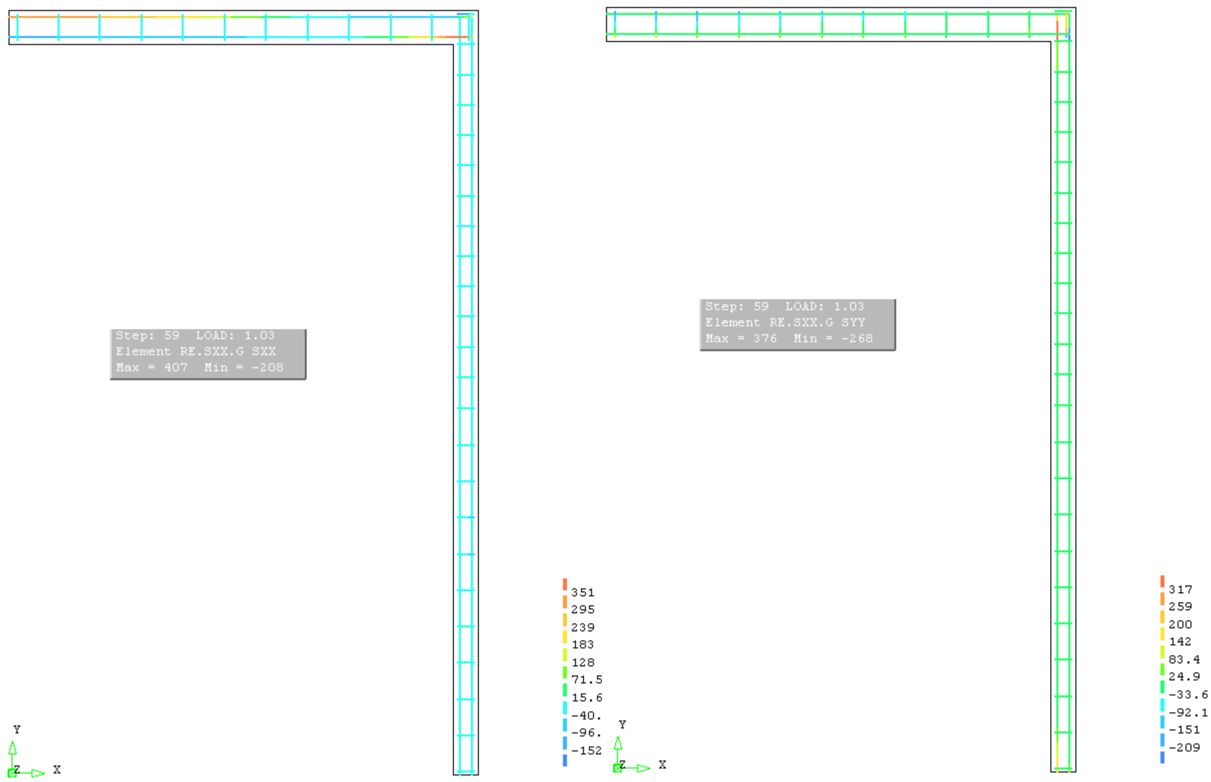


(a) KoordinatnettQ8AXI (b) Armering i tverrsnittet

Figur 4.21: Koordinatnett og armering i ikke-linærmodell



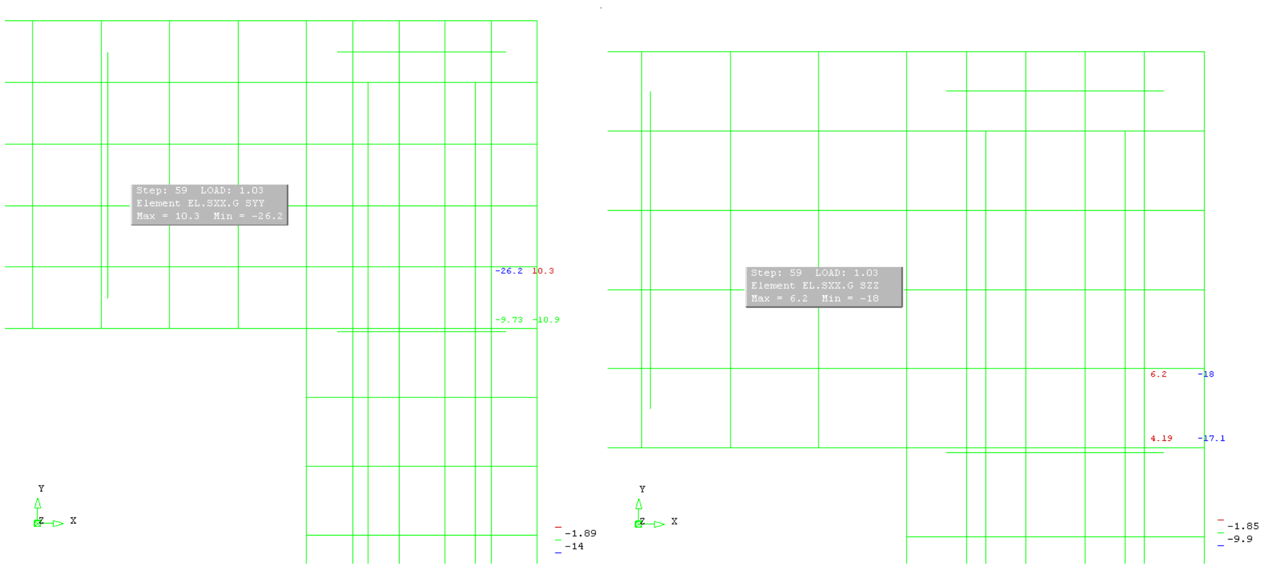
Figur 4.22: Deformasjon i gitt node over 60 laststeg



(a) Armeringsspenning i x-retning

(b) Armeringsspenning i y-retning

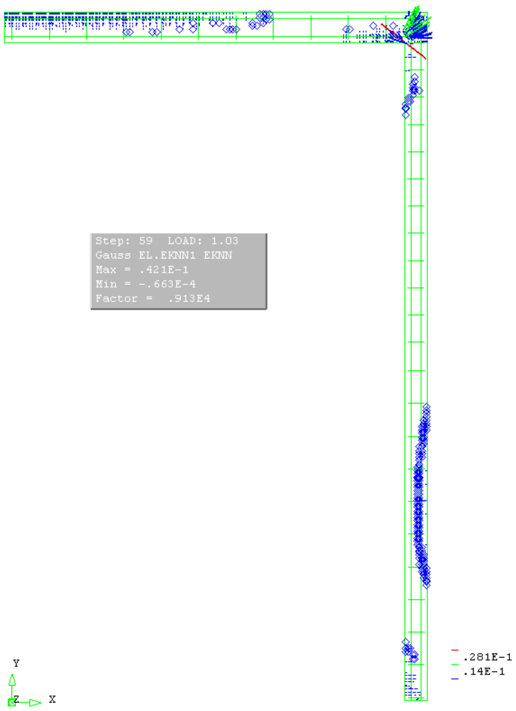
Figur 4.23: Armeringspenninger i laststeg 59



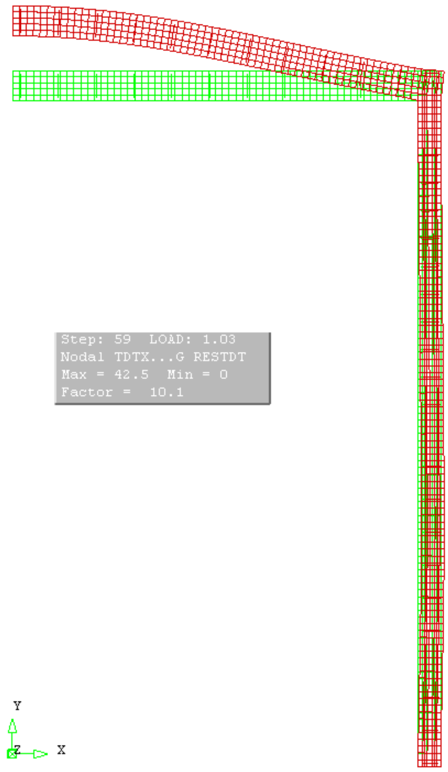
(a) Betongtrykk i y-retning i betongen

(b) Betongtrykk i z-retning

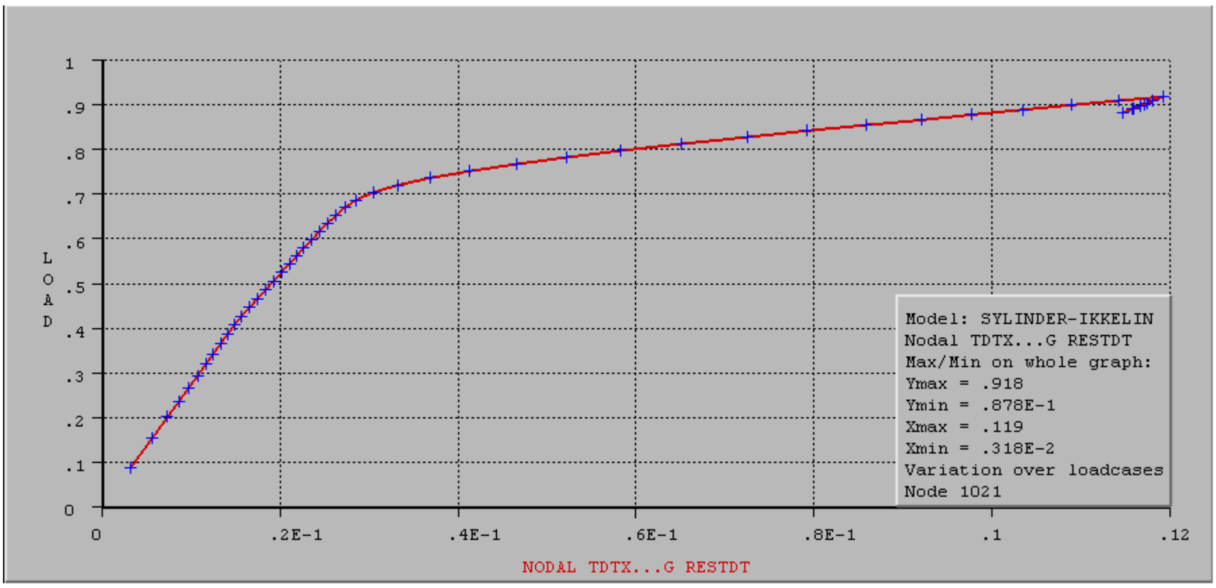
Figur 4.24: Betongtrykk i laststeg 59



Figur 4.25: Risstøyningene i laststeg 59



Figur 4.26: Forstørret deformasjon



Figur 4.27: Deformasjon i gitt node over 50 laststeg for CQ16A

4.4 Diskusjon

4.4.1 Lineær analyse

Den lineære analysene av modellen gav generelt et godt samsvar med den analytiske delen. De største feilene kommer ved innspenningene, i bunnen av sylinderen og i overgangen mellom plate og sylinder, og ved raske endringer i kreftene. Disse feilene kan observeres i figurene 4.13 og 4.12.

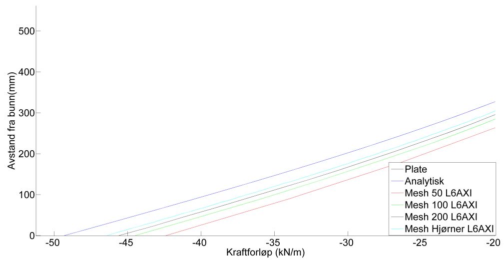
Det var en klar tendens til at et finere nett gav et bedre resultat for L6AXI-elementet. Figur 4.28a, fra skjærkraft i sylinderen, viser forskjellen mellom de ulike nettene. Det groveste nettet har en feilmargin på 13% i forhold til analytisk løsning og det fineste nettet en feilmarigin på 5%. Disse tallene følger ikke igjennom hele modellen. På steder hvor det er tilnærmet lineære lastfordelinger er forskjellene mindre, se figur 4.11. Dette betyr at nettet kan tilpasses ut i fra hvilken lastsituasjon som opptrer i konstruksjonen. Det fordelmessige er å velge et nett som gir et tilfredstillende resultat, men samtidig har få elementer.

Den samme tendensen skjer mye hurtigere i analyse av CL9AX-elementet. De groveste nettene gir omtrent de samme resultatene som de finere nettene. Det viser seg at oppdelingen er for stor til at konvergering kan observeres i mange av tilfellene, se figur 4.28b. Konvergeringen kan best observeres ved raske endringer. På grunn av elementets oppbygning, se kapittel 3, er det mer sårbart for disse endringene. Og dette kan betraktes ved 4100mm fra bunn i figur 4.20. Et CL9AX-element er delt inn i 3 noder noe som fører til et større element enn ved bruk av L6AXI-elementet. Det kan også sees ut i fra figuren at lasten konvergerer raskt ved økning av antall noder.

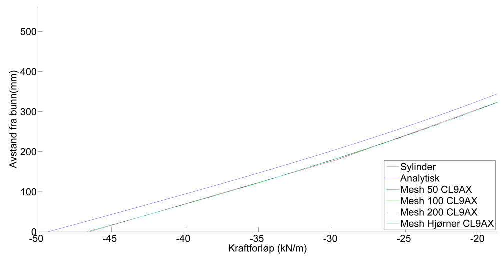
Sammenligning av de to elementene gir ulike svar. L6AXI-elementet gir høye feilmarginer ved grove koordinatnett, men følger formen på lastkurven godt. CL9AX gir gode verdier ved grove nett, men gir dårlige resultat i raske endringer ved grove koordinatnett. Hovedsaklig er CL9AX-elementet å foretrekke. Det gir bedre resultat ved lavere nodeantall og gir en god tilpasning ved myke kurver. Unntaket er ved lastkurver som er kantete hvor et L6AXI-elementet kan foretrekkes.

4.4.2 Ikke-lineær analyse

I den ikke-lineære analysen er sylinderen med platetaket tilsatt armering og ekstra materialdata. For å studere den ikke-lineære effekten til modellen er det betraktet deformasjon over last som ble påført i inkrementer på 10% . Kurven i figur 4.22 viser at deformasjonen er ikke-lineær og går til brudd ved 1.03 ganger lasten mellom lasttilfelle 59



(a) Konvergeringsrate for L6AXI



(b) Konvergeringsrate for CL9AX

Figur 4.28: Konvergeringsrate for ulike elementtyper for skjærkraften i sylinderbunn

og 60. Armeringsspenningene i x-og y- retningen, henholdsvis SXX og SYY , viser en høy spenning i x- retning for laststeg 59, se figur 4.23a. Armeringen i x-retningen har en maskverdi på 407MPa på undersiden av platen i hjørne. Flytning i armeringen oppstår ved 434MPa og derfor er det ikke armeringspenningen som fører til brudd. De andre retningene, hvor y-retningen er mest kritisk gitt i 4.23b, er også under flytespenningen før brudd oppnås.

Bruddet ser ut til å oppstå i betongen i ringretningen ytters på sylinderen ved skjøten. I figur 4.24b ser man at det har oppstått et trykkbrudd i det ene elementet. To av nodeverdiene i dette elementet overstiger den satte trykkspenningen på 17MPa. Det er også verdt å nevne at det viser en skyhøy trykk-last, -26.2MPa, i figur 4.24a, men denne oppstår bare i den ene noden og det påvirker derfor ikke hele elementet.

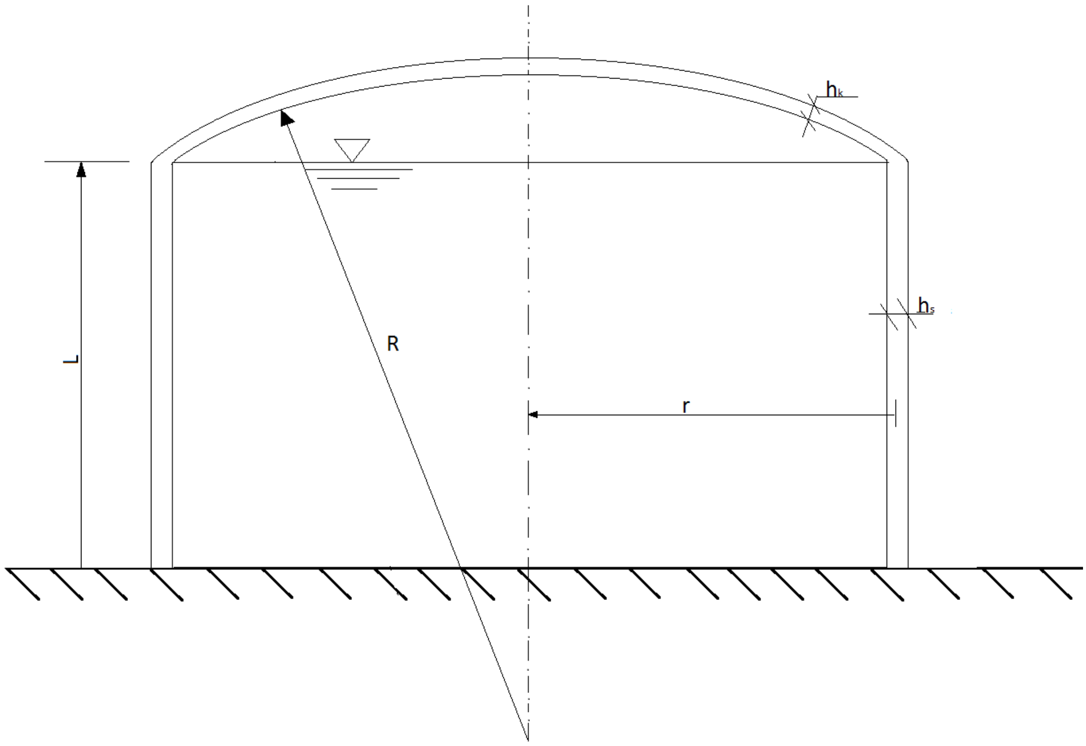
Trykkbruddet kan forstås lettere ved å se på den forstørrede deformasjonen i figur 4.26. Midten av platen beveger seg oppover og det blir en rotasjon om opplageren. I tillegg til rotasjonen trekker platen med seg opplageren innover. Siden den er låst i x-,y- og z-retning vil det resultere i en trykkraft rett over opplageren.

Risstøyningene i figur 4.25 viser at tøyningene er normalt på rissretningen. Tøyningen er representert ved en vektor med størrelse og lengde. Det kan antas at rissutviklingen er godt representert i FEM-analysen.

Sammenligningen av CQ16A og Q8AXI gav to forskjellige last-deformasjon diagram. CQ16A i figur 5.34 fikk brudd ved en lavere last enn med Q8AXI. Ved første blikk kan det virke som Q8AXI er noe stivere enn CQ16A. På grunn av begrensninger i antall elementer i Diana Teachers edition er det vanskelig å trekke noen konsklusjon ut i fra resultatene. For samme antall noder gir Q8AXI- elementet 952 elementer mens CQ16Q gir bare 232 elementer. For å få en bedre sammenligning ville det hvert bedre ved sammenligning av et høyere antall noder. Det kan også nevnes at CQ16A gav brudd i armeringen noe som kan komme av at det kreves tre nodeverdier over trykkapasiteten.

Kapittel 5

Sylinder med kuletak



Figur 5.1: Sammensatt sylinder og kule

Geometri	L=8000mm	r=8000mm	R=8000mm
	h$_k$=150mm	h$_s$=200mm	φ_0=30^0
Materialdata	E=30000MPa	ν=0.2	$\rho_b = 2550\ \frac{kg}{m^3}$
Later	γ_w=10$\frac{kN}{m^3}$		

Tabell 5.1: Geometri, materialdata og later for sylinder med kuletak

I dette eksempelet skal en vanntank med kuletak vurderes opp i mot analytisk (5.1), lineær (5.2) og ikke-lineæranalyse (5.3). Geometrien og relevante data kan leses i figur 5.1 og tabell 5.1. Det er valgt å bruke generelle data i disse eksemplene. I alle figurene av resultatene er det lagt inn en svart linje for å indikere sylinderen og kulen. For sylinderen er den positive siden, høyre siden av plotet, innsiden av tanken.

5.1 Analytiske beregninger

Den analytiske løsningen deles i to deler hvor den første delen utleder ligningene som blir presentert i den andre delen.

5.1.1 Beregninger

Først vurderes dempningslengden, gitt i ligning (2.29), opp i mot lengden på sylinderen:

$$l_e = \frac{\sqrt{rh}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2}} = 971mm$$
$$L_c = \pi \cdot l_e = 3049mm$$

Dempningslengden er mindre enn halvparten av sylinderens lengde og kan derfor betraktes som uendelig lang.

$$2 \cdot L_c \leq L$$

Beholderen kan derfor deles inn i tre ulike deler for å gjøre utregningene lettere.

- Sylinderbunn
- Sylindertopp
- Kule

Sylinderbunn

Bruker samme ligninger som i eksempel 1, se 4.1.1.

Sammenkobling mellom sylinder og kule

Sammenkoblingen mellom kulen og sylinderen utledes ved å anta tre randbetingelser. For å kunne bruke disse betingelsene må forskyvningen og vinkelen i sylindertoppen og kulen utledes:

Sylinderen bruker de samme ligningene som ved eksempelet for platetak. Forskyvningen og vinkelen består begge av en partikulær- og en homogeneløsning.

Partikulærløsning:

Radiell forskyvning og vinkelendring finnes av ligning (2.29)

$$w_p(x) = \frac{\gamma x r^2}{E h_s}$$
$$\theta_p = \frac{w_p(x)}{dx} = \frac{\gamma r^2}{E h_s}$$

Homogenløsning:

Radiell forskyvning og vinkelendring finnes av ligning (2.33)

$$w_h(\xi) = \frac{l_e^2}{2D_s}(M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 l_e \cdot g_1(\xi))$$
$$\theta_p(\xi) = \frac{l_e}{2D_s}(-2M_0 \cdot g_1(\xi) - V_0 l_e \cdot g_3(\xi))$$

Kuletaket benytter ligningene fra delkapittel 2.2, men disse må omformuleres for praktisk bruk. Forskyvningen og vinkelen består begge av en partikulær- og en homogeneløsning.

Partikulærløsning:

Membrankreftene i membranretning, N_φ, og i ringretning, N_ϑ, brukes i formuleringen av partikulærløsningen. Disse kan uttrykkes ved:

$$N_\varphi(\varphi) = \frac{-\rho_b R h_k}{1 + cos(\varphi)} \tag{5.1}$$
$$N_\vartheta(\vartheta) = \rho R h_k (\frac{1}{1 + cos(\varphi)} - cos(\varphi)) \tag{5.2}$$

Ved å kombinere ligningene (5.1) og (5.2) med (2.40) og (2.42) kan horisontalforskyvningen δ_m og tangentdreiningen α_m utledes. Forskyvningen og dreiningen er under forutsetning at kuleskallet kan bevege seg fritt.

$$\delta_m = \frac{\rho_b R^2}{E}(\frac{1+\nu}{1+cos(\varphi)} - cos(\varphi)sin(\varphi) \tag{5.3}$$

$$\alpha_m = -\frac{\rho_b R}{E} sin(\varphi)(2+\nu) \tag{5.4}$$

Homogenløsning:

Ligning 2.47 viser sammenhengen mellom skallkreftene og randkreftene i from av integrasjonskonstanter C_n. Anvendelse av ligningene gjøres mer praktisk ved å kombinere skjækraften V_φ og meridiankraften N_φ til en horisontalkraft R_φ, se [4] for utledning. De omformulerte ligningene kan sees i (5.5).

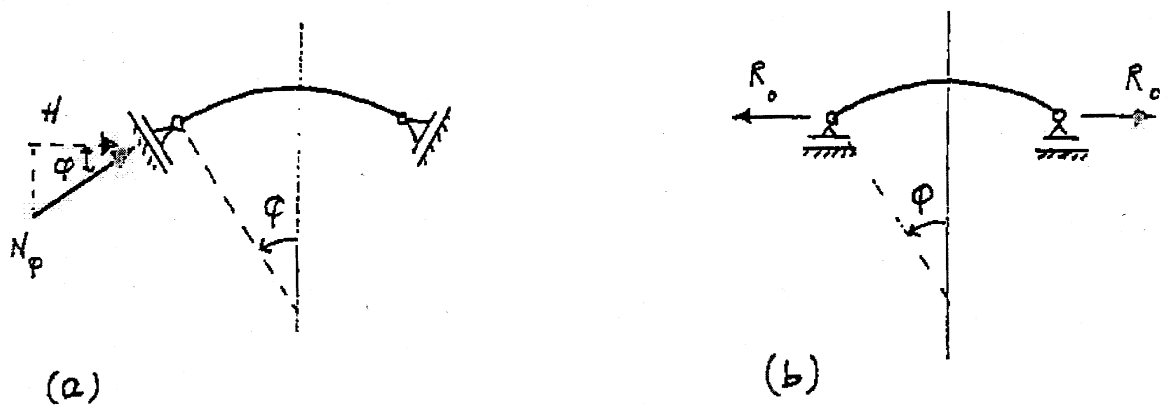
$$\begin{bmatrix} R_\varphi \cdot sin(\varphi) \\ M_\varphi \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \\ V_\varphi \\ N_\varphi \cdot tan(\varphi) \\ N_\vartheta \cdot \frac{1}{\lambda} \\ M_\vartheta \cdot \frac{Ehr}{2\nu\lambda^3 D} \\ \alpha \cdot \frac{Eh}{2\lambda^2} \\ \delta \cdot \frac{Eh}{\lambda r sin\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4(t) & -g_2(t) \\ 2g_1(t) & g_3(t) \\ -g_4(t) & g_2(t) \\ g_4(t) & -g_2(t) \\ 2g_1(t) & g_4(t) \\ 2g_2(t) & g_3(t) \\ -g_3(t) & -g_1(t) \\ 2g_1(t) & g_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \cdot sin(\varphi) \\ M_0 \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Fra (5.5) kan den homogeneløsningen til horisontalforskyvningen og tangentdreiningen hentes ut:

$$\delta_h(t,\varphi) = \frac{\lambda R sin\varphi}{Eh} \cdot (R_0 \cdot sin(\varphi) \cdot 2g_1(t) + M_0 \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \cdot g_4(t)) \tag{5.6}$$

$$\alpha_h(t,\varphi) = \frac{2\lambda^2}{Eh}(R_0 \cdot sin(\varphi) \cdot -g_3(t) - M_0 \cdot \frac{Ehr}{2\lambda^3 D} \cdot g_1(t) \tag{5.7}$$

Korrigert partikulærløsning:



Figur 5.2: Opplagerbetingelser for partikulærløsning [4]

Partikulærløsningen fra membranteorien gitt i (5.3) og (5.4) beskriver en situasjon med M_φ og V_φ ved kuleranden lik null. For å gjøre det lettere så innføres en ny horisontalkraft R_0 som ved homogenløsningen. For at denne faktoren skal være gyldig må partikulærløsningen for $R_0 = 0$ defineres. Forklaringen på disse to ulike situasjonene kan sees i figur 5.2.

For å oppnå $R_0 = 0$ må det være likevekt mellom den horisontale komponenten H og integrasjonskonstanten R og $M_0 = 0$ hvor H er:

$$H = N_\varphi \cdot cos(\varphi)$$

Dette gir korreksjonene av partikulærløsningene ved å sette inn i de homogeneløsningene (5.6) og (5.7)

$$\delta'(\varphi) = \frac{\lambda R sin\varphi}{Eh} \cdot 2R_0 \cdot sin(\varphi) \tag{5.8}$$

$$\alpha'(\varphi) = \frac{2\lambda^2}{Eh}(-R_0 \cdot sin(\varphi)) \tag{5.9}$$

Ved å kombinere korreksjonene med partikulærløsningene i (5.3) og (5.4) blir summen den totale partikulæreløsningen.

$$\delta_p(\varphi) = \delta_m(\varphi) + \delta'(\varphi)$$

$$\alpha_p(\varphi) = \alpha_m(\varphi) + \alpha'(\varphi)$$

Sammenkoblingen av kulen og sylinderen har tre randbetingelser:

Randbetingelse 1, ingen endring i forskyvninger:

$$w_h + w_p = \delta_h + \delta_p$$

Randbetingelse 2, ingen endring i vinkel:

$$\theta_h + \theta_p = \alpha_h + \alpha_p$$

Randbetingelse 3, skjærkraft V_0 er lik $-R_0$.

Og til slutt $M_0 s = M_0 k$

Ved å løse disse ligningene ble M_0, V_0 og R_0 følgende:

$$M_0 = -4.46 \frac{kNm}{m}$$
$$V_0 = 12.28 \frac{kN}{m}$$
$$R_0 = -12.28 \frac{kN}{m}$$

Utregning kan sees i vedlegg B.2.

Sylindertopp

Bruker samme ligninger som i eksempel 1, se 4.1.1.

Kuletak

Utledning for kraftforløpene for kuletaket finnes i vedlegg B.2:

$$M_\varphi(t) = \frac{4\lambda^3 D_k}{Eh_k R}(g_2(t)\cdot(R_0 - H)\cdot sin(\varphi)) + g_3(t)\cdot M_0$$
$$M_\theta(t) = \nu \cdot M_\varphi(t)$$
$$V_\varphi(t) = g_4(t)\cdot(H - R_0)\cdot sin[\varphi] + g_2(t)\cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2lambda^3 D_k}$$
$$N_\varphi(t) = \frac{1}{tan(\varphi)}(g_4(t)\cdot(R_0 - H)\cdot sin(\varphi) - g_2(t)\cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2\lambda^3 D_k}) + N_{\varphi m}(\varphi)$$
$$N_\theta(t) = \lambda(2g_1(t)\cdot(R_0 - H)\cdot sin(\varphi) + g_4(t)\cdot M_0 \cdot \frac{Eh_k R}{2\lambda^3 D_k}) + N_{\theta m}(\varphi)$$

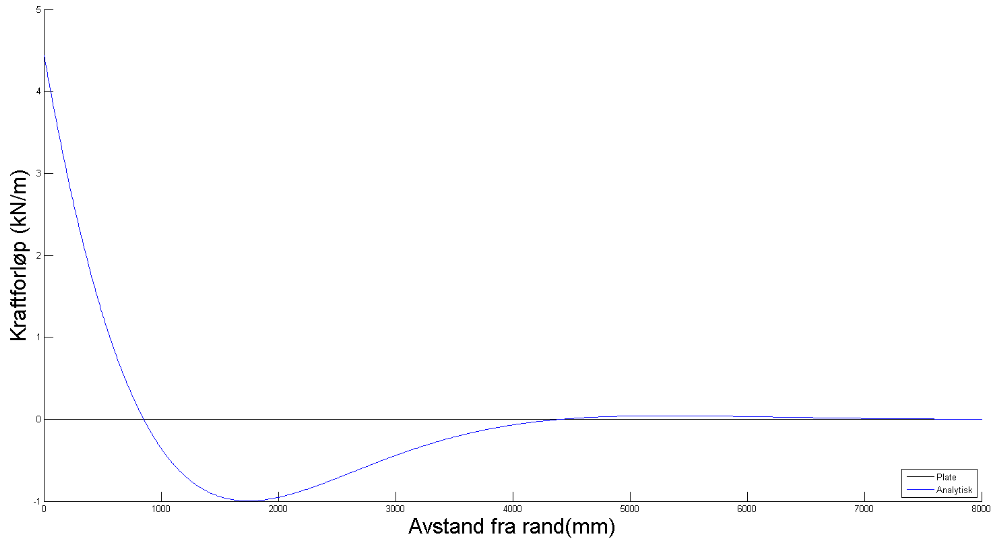
5.1.2 Resultat av skallkreftene

I figur 5.3 er M_φ, momentet i merdianretning, ved randen i kuletaket lik 4.4 $\frac{kNm}{m}$ og momentet krysser 900mm i fra randen. I sylinderen, i figur 5.4, observeres det at momentet, M_x, er lik i toppen som ved randen til topplaten. Fra toppen går den i mot null rundt midten og øker til 12.1 $\frac{kNm}{m}$ ved bunn.

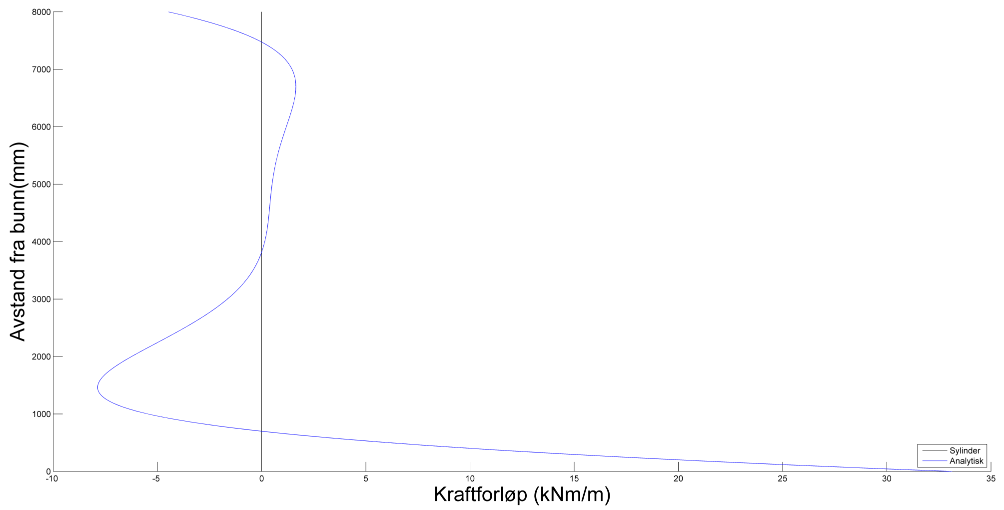
I figur 5.5 er skjærkraften ved randen lik 130.6 $\frac{kN}{m}$ og null ved senter av platen. I sylinderen, 5.6, observeres det at skjækraften ved toppen 174.8 $\frac{kN}{m}$. Kurven krysser null ved tre punkter før den mot bunnen vokser til - 49.3 $\frac{kN}{m}$.

I figur 5.7 og 5.8 er ringkraft i ringretning presentert. Kraften i kulen starter i -88$\frac{kN}{m}$ ved randen og øker til den krysser ved 1800mm og er stabil inn til toppen av kulen på 20$\frac{kN}{m}$. I sylinderen er den en stor kraft i nedre del hvor vanntrykket er størst med en maksverdi på 470$\frac{kN}{m}$.

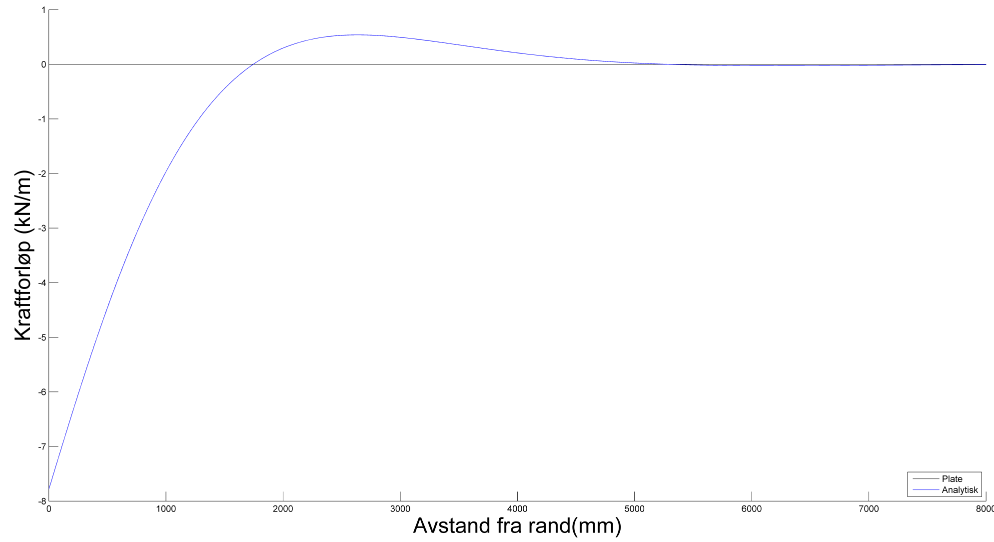
De to siste figurene 5.9 og 5.10 representerer moment i ringretning og ringkraft i merdianretning. Disse kurvene må etableres for å kunne bestemme armeringen til de ikke-linære analysene.



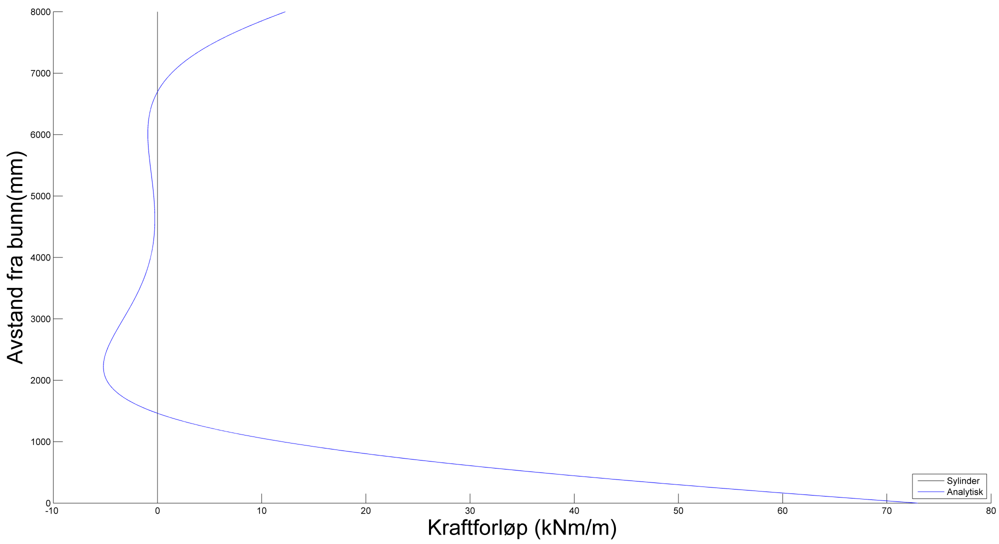
Figur 5.3: Moment i meridianretning i kuletaket, M_{φ} , i $\frac{kNm}{m}$



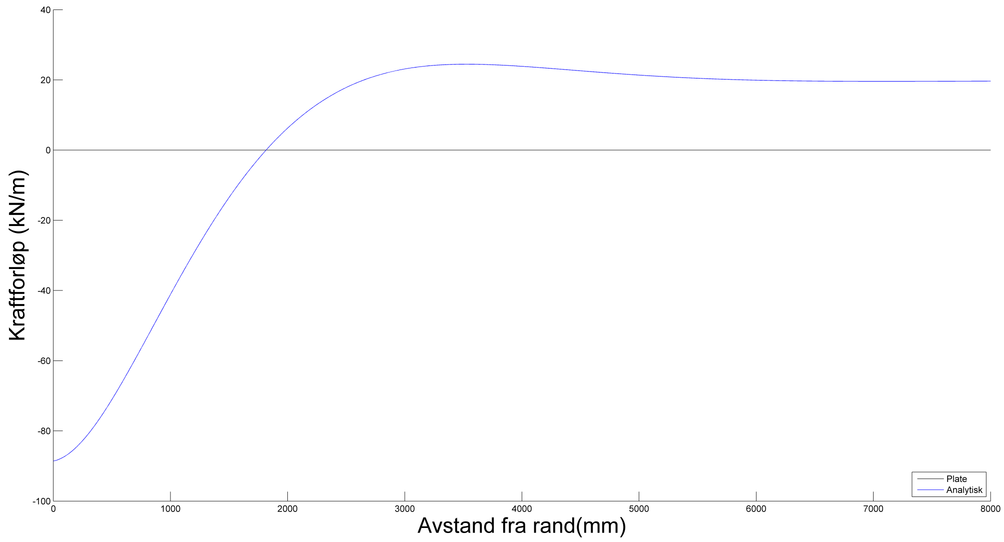
Figur 5.4: Moment i sylinder, M_x, i $\frac{kNm}{m}$



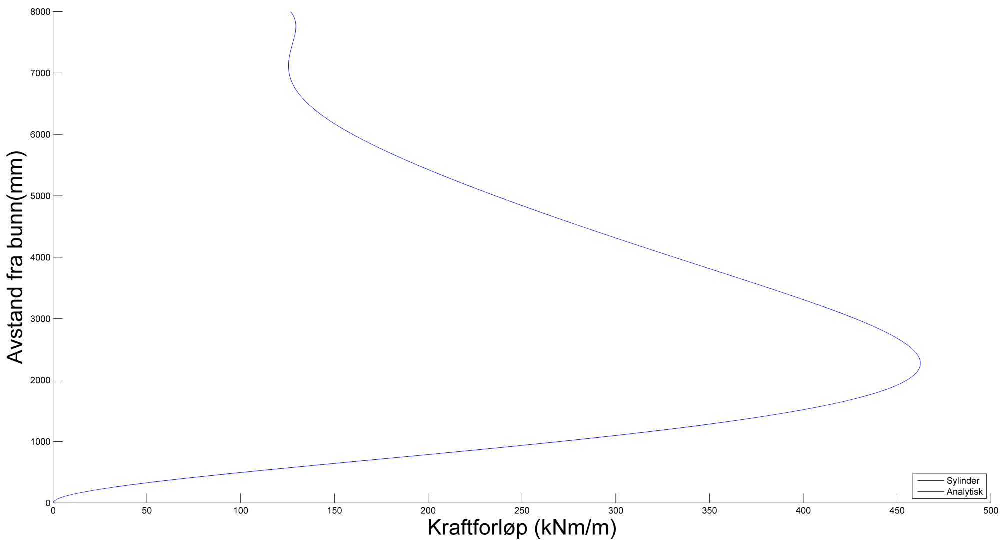
Figur 5.5: Skjærkraft i kuletaket, V_{φ}, i $\frac{kN}{m}$



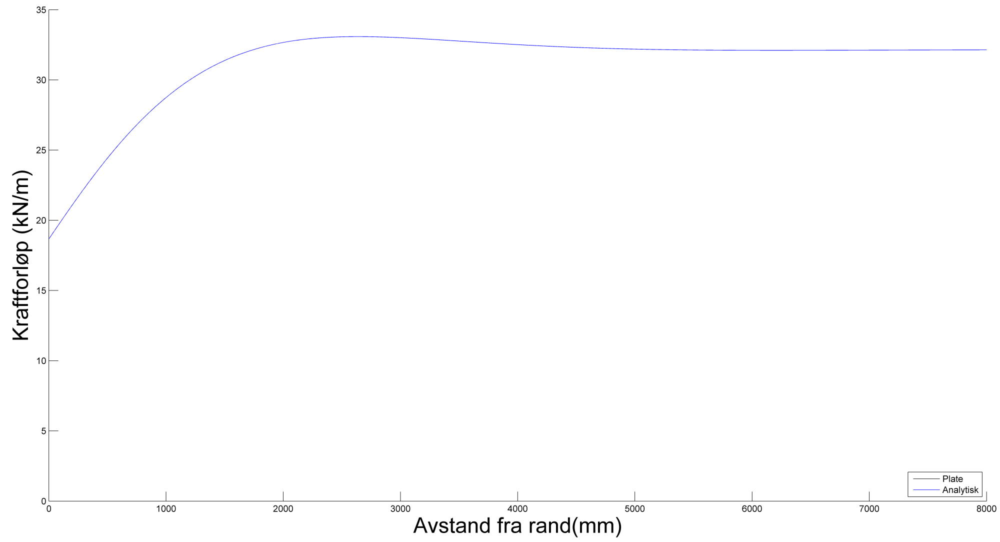
Figur 5.6: Skjærkraft i sylinder, V_x, i $\frac{kN}{m}$



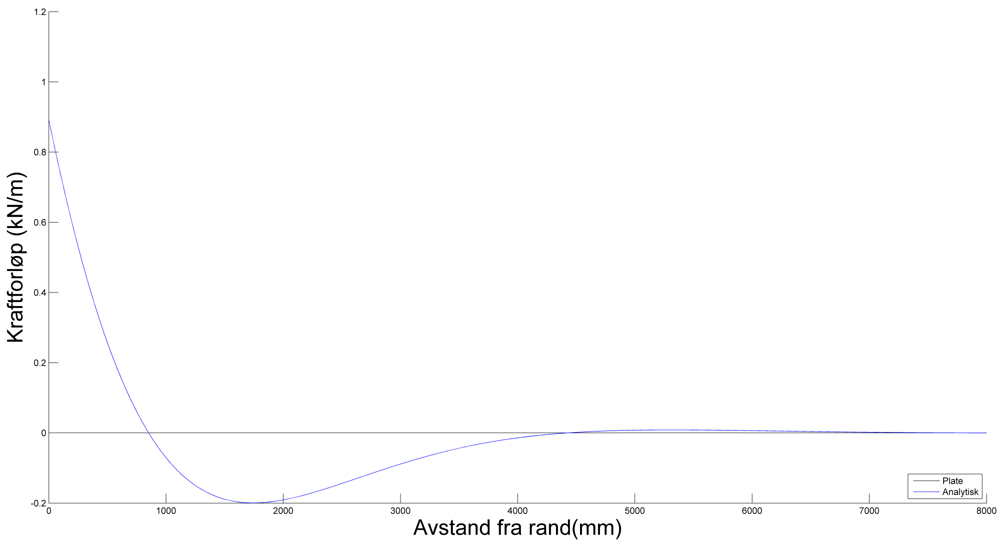
Figur 5.7: Ringkraft i ringretning i kule, N_θ, i $\frac{kN}{m}$



Figur 5.8: Ringkraft i sylinder,N_x, i $\frac{kN}{m}$



Figur 5.9: Ringkraft i merdianretning i kulen,N_φ, i $\frac{kN}{m}$



Figur 5.10: Moment i kulen i ringretning,M_θ, i $\frac{kN}{m}$

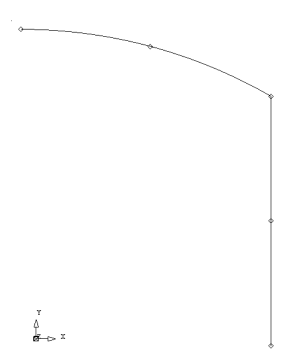
5.2 Lineær analyse

Modellen er lagd ved hjelp av to hovedlinjer i en aksesymmetrisk modell, se figur 5.11. Disse linjene er tilsatt en tykkelse og tilskrevet et koordinatnett. Dette nettet består av to hovedegenskaper oppdeling og elementtype. I den lineære analysen av sylinder med kuletak er det valgt å fokusere på to ulike elementer, L6AXI og CL9AX, og fire ulike oppdelinger. Oppdelingene er som følger:

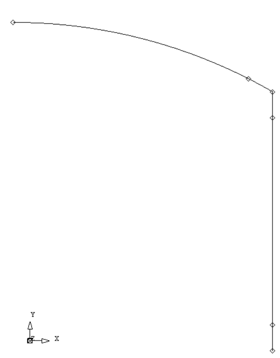
Mesh 50: Linjene er delt inn i 50 noder
Mesh 100: Linjene er delt inn i 99 noder, største partisjon av en enkelt linje
Mesh 200: Linjene er delt inn i 198 noder, da det er for mange partisjoner deles linjene i 2. Se figur 5.11a
Mesh Hjørner: Linjene er delt inn i 297 noder i sylinder og 198 noder i platetak ,her er det det førsøkt å forfine i hjørnene og ved innspenningen. Se figur 5.11b

Elementtypene består av forskjellig antall noder noe som leder til forskjellig antall elementer. L6AXI har 2 noder mens CL9AX har 3 noder i hvert element. CL9AX krever at antall noder er et partall og vil derfor føre til at partisjonene er 98 noder i stedet for 99 noder som for L6AXI.

Resultatene av undersøkelsene er presentert i ulike figurer hvor de er sammenlignet med de analytiske resultatene. De første figurene er 5.12, 5.13,5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18 og 5.19 viser resultatene til elementtypen L6AXI. De neste figurene 5.20, 5.21,5.22, 5.23, 5.24, 5.25,5.26 og 5.27 viser resultatene til elementtypen CL9AX.

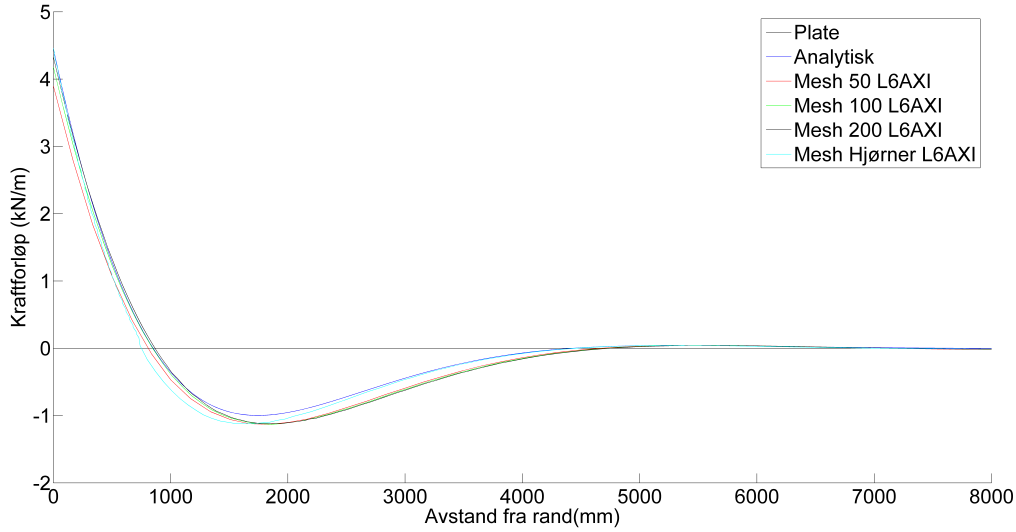


(a) Geometri ved 50,100 og 200 nett i FEM-modell

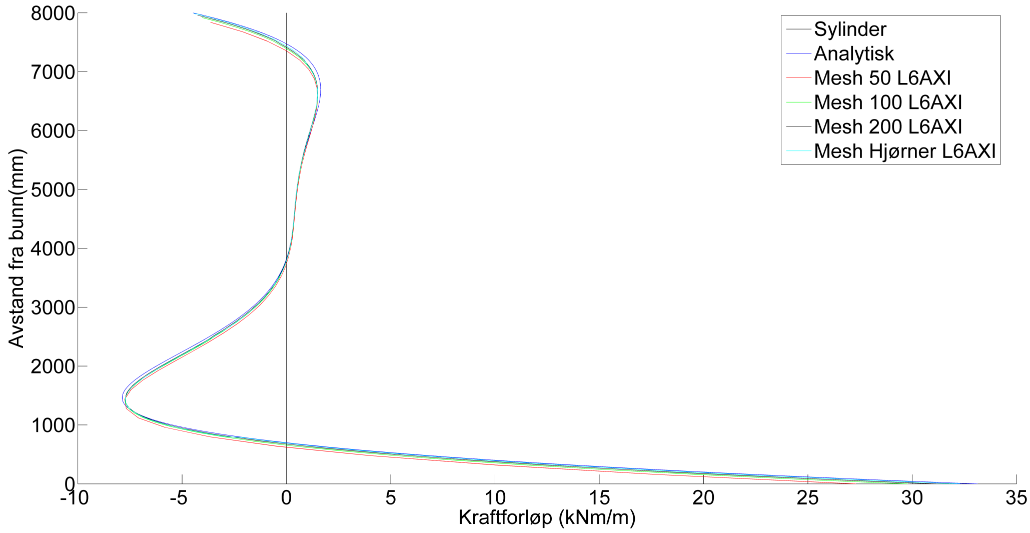


(b) Geomeri ved hjørne-nett i FEM-modell

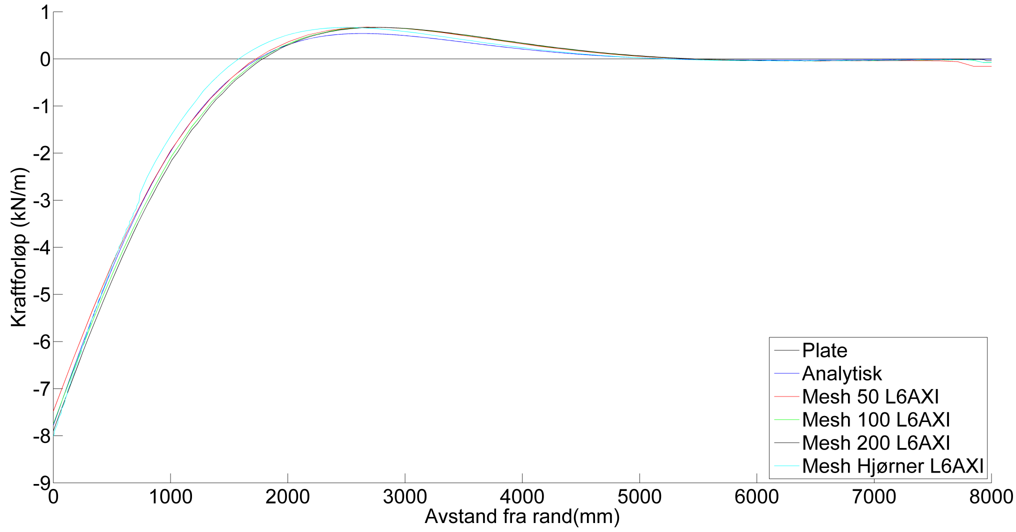
Figur 5.11: Geometri i FEM-modell



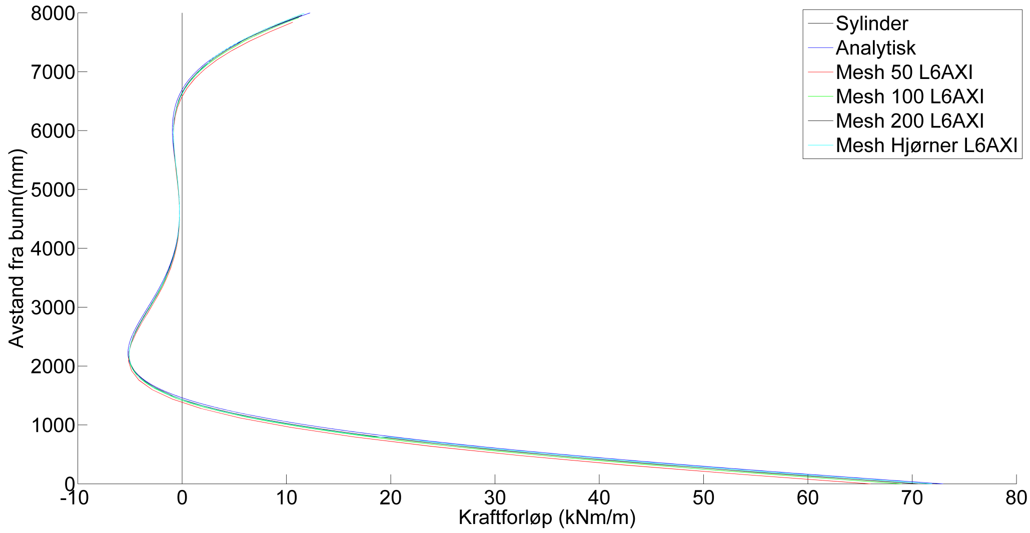
Figur 5.12: Moment i meridianretning i kuletaket med ulike L6AXI elementer



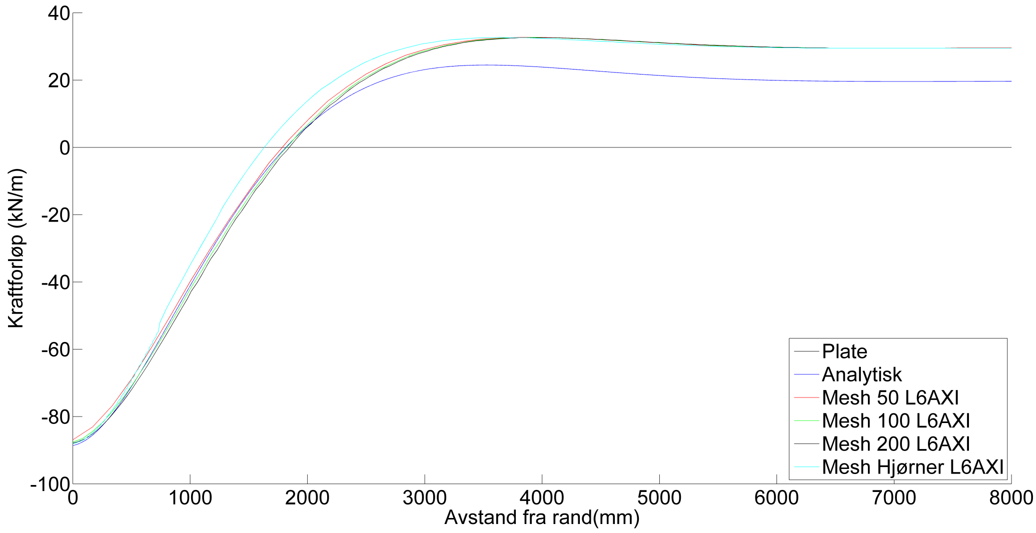
Figur 5.13: Moment i sylinder med ulike L6AXI elementer



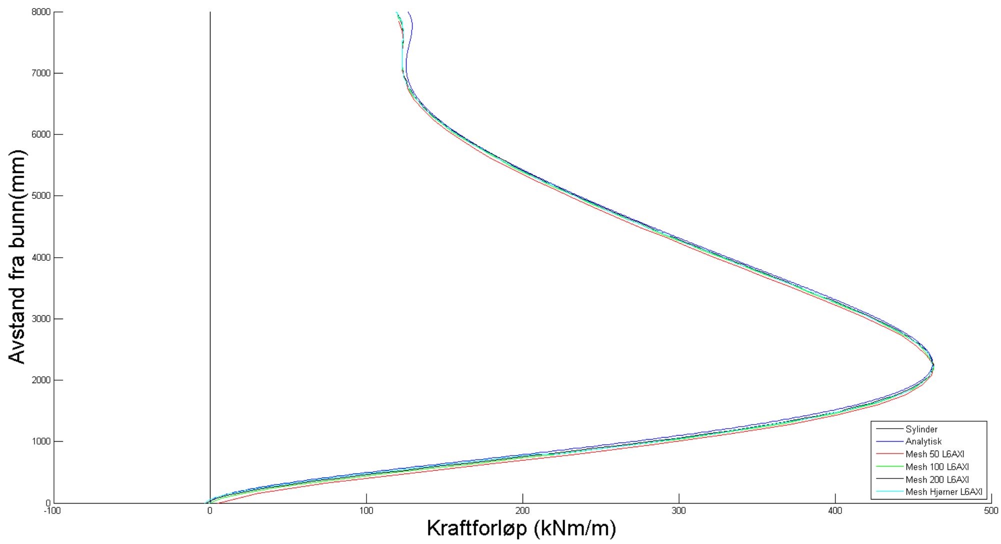
Figur 5.14: Skjærkraft i kuletaket med ulike L6AXI elementer



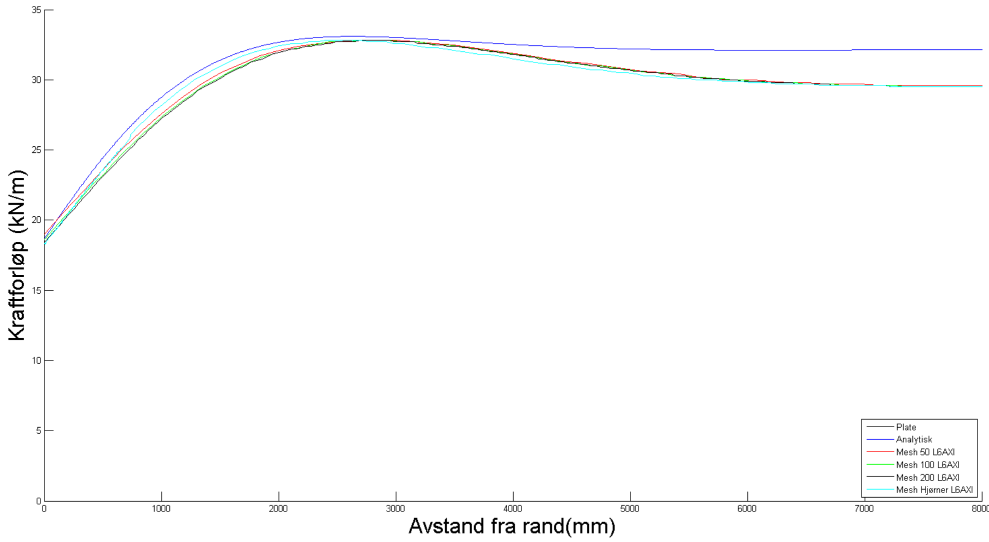
Figur 5.15: Skjærkraft i sylinderen med ulike L6AXI elementer



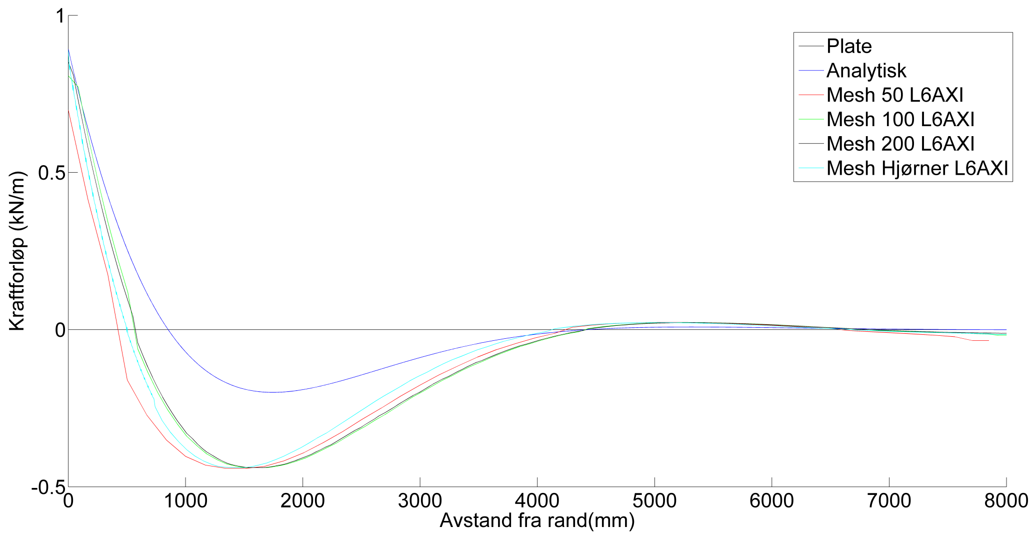
Figur 5.16: Ringkraft i ringretning i kuletaket med ulike L6AXI elementer



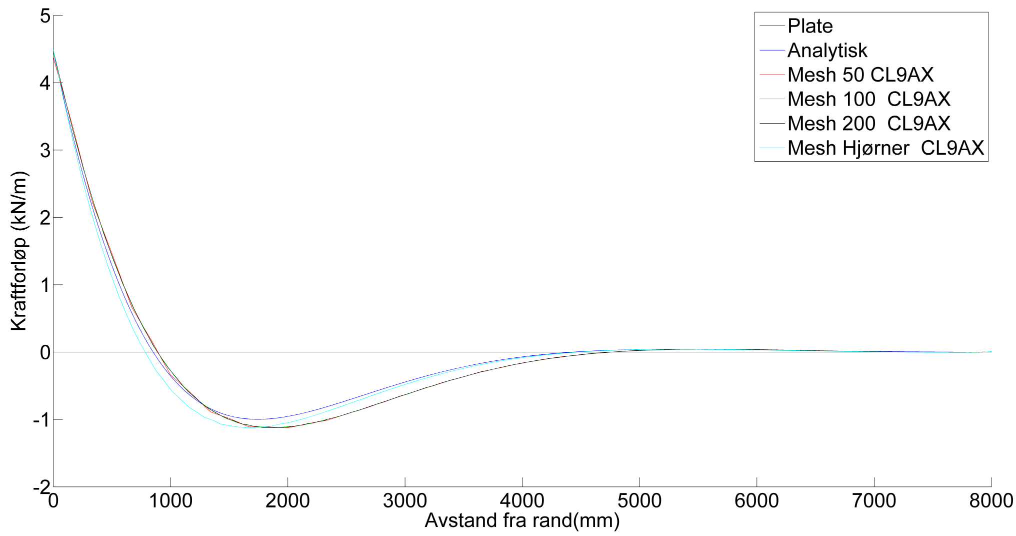
Figur 5.17: Ringkraft i sylinder med ulike L6AXI elementer



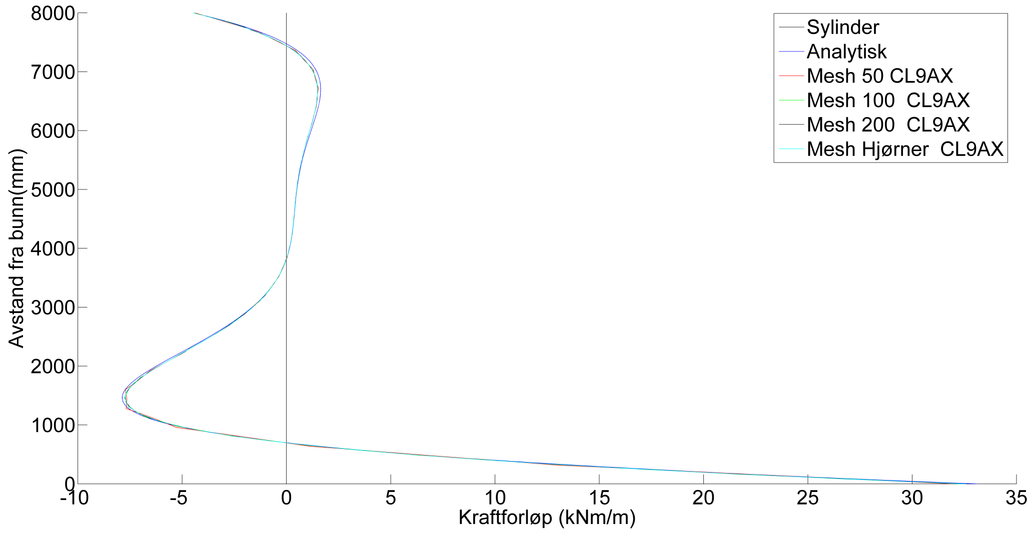
Figur 5.18: Ringkraft i meridianretning i kuletaket med ulike L6AXI elementer



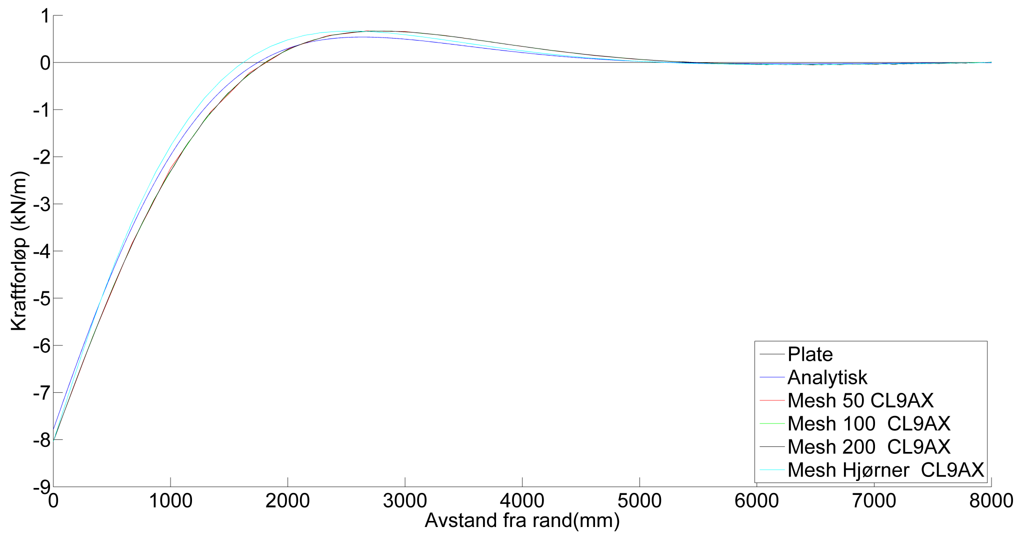
Figur 5.19: Moment i kulen i ringretning med ulike L6AXI elementer



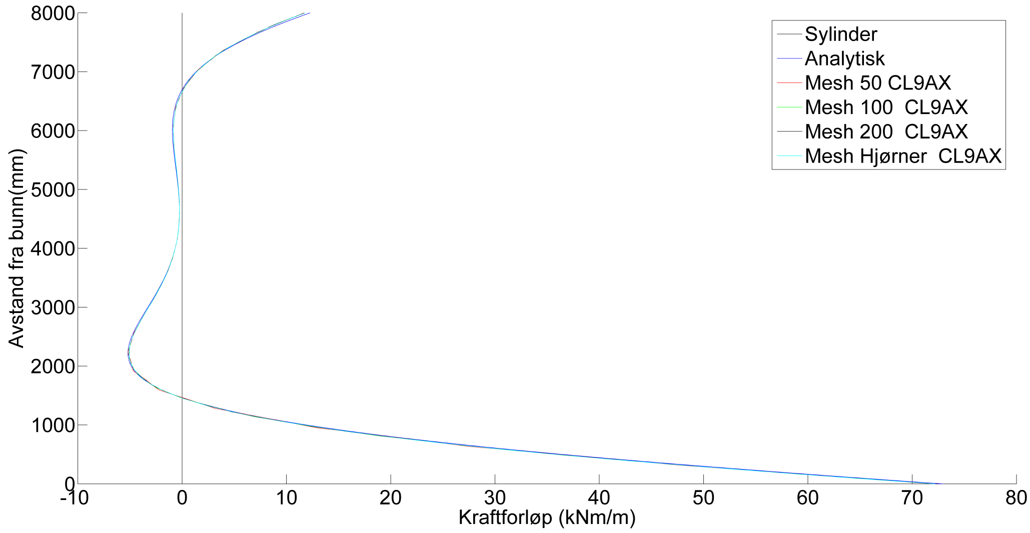
Figur 5.20: Moment i meridianretning i kuletaket med ulike CL9AX elementer



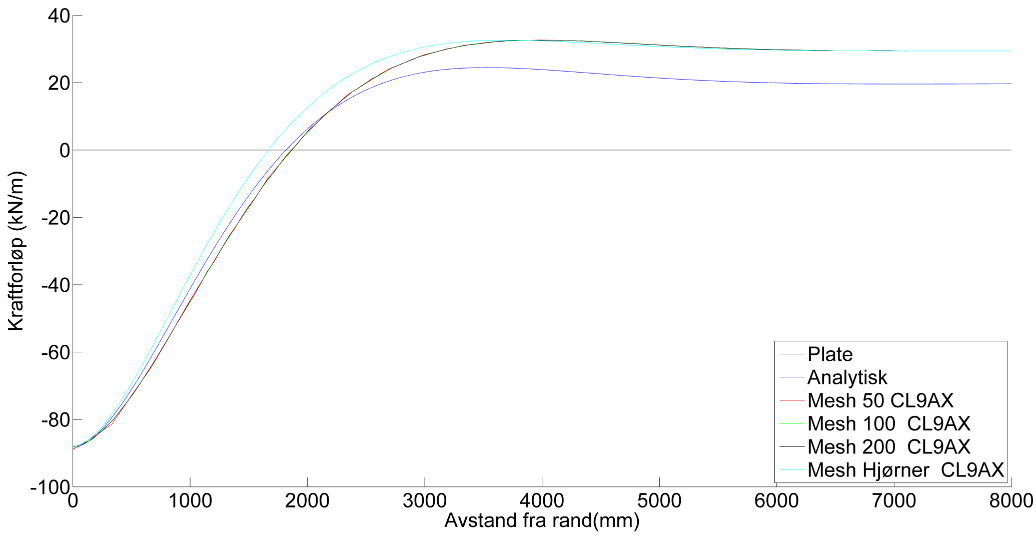
Figur 5.21: Moment i sylinder med ulike CL9AX elementer



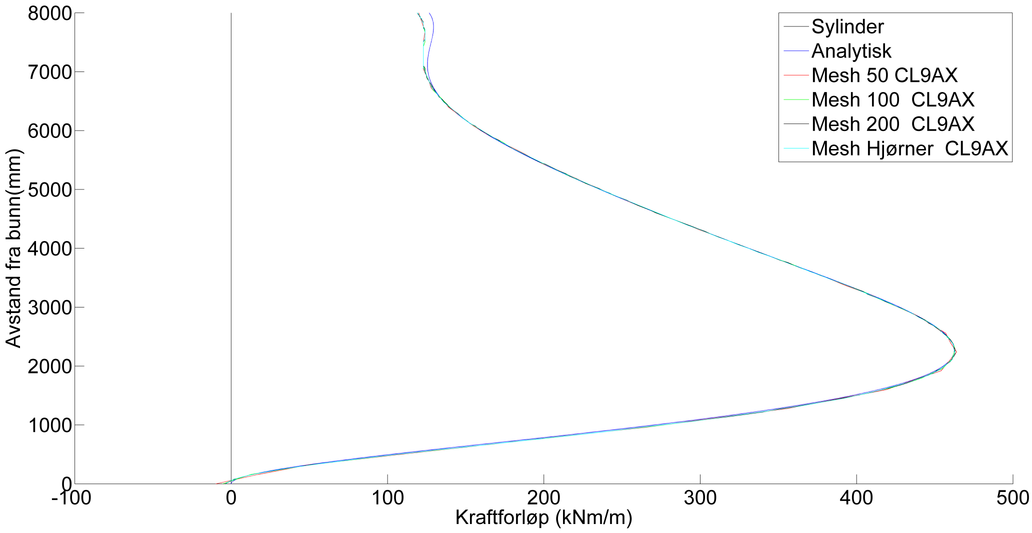
Figur 5.22: Skjærkraft i kuletaket med ulike CL9AX elementer



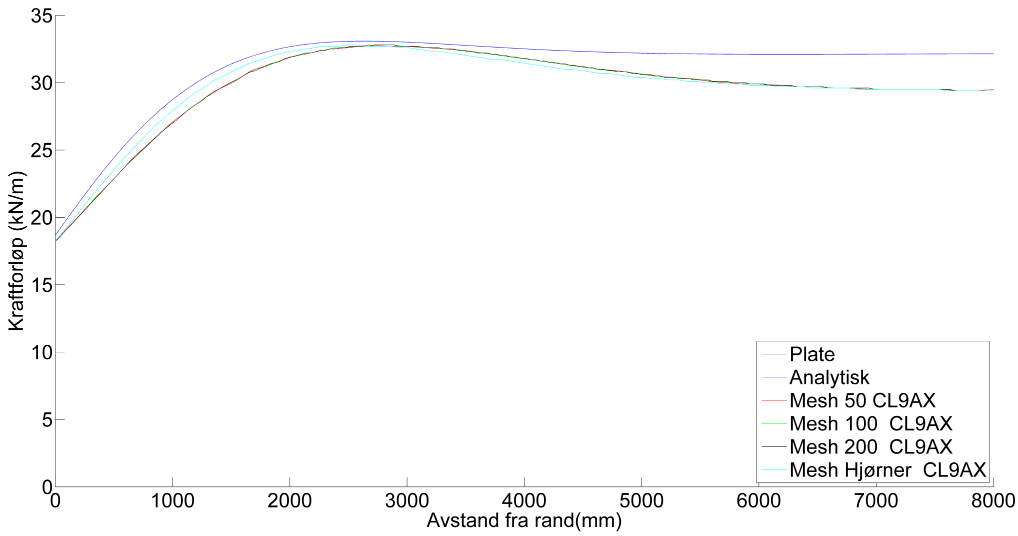
Figur 5.23: Skjærkraft i sylinderen med ulike CL9AX elementer



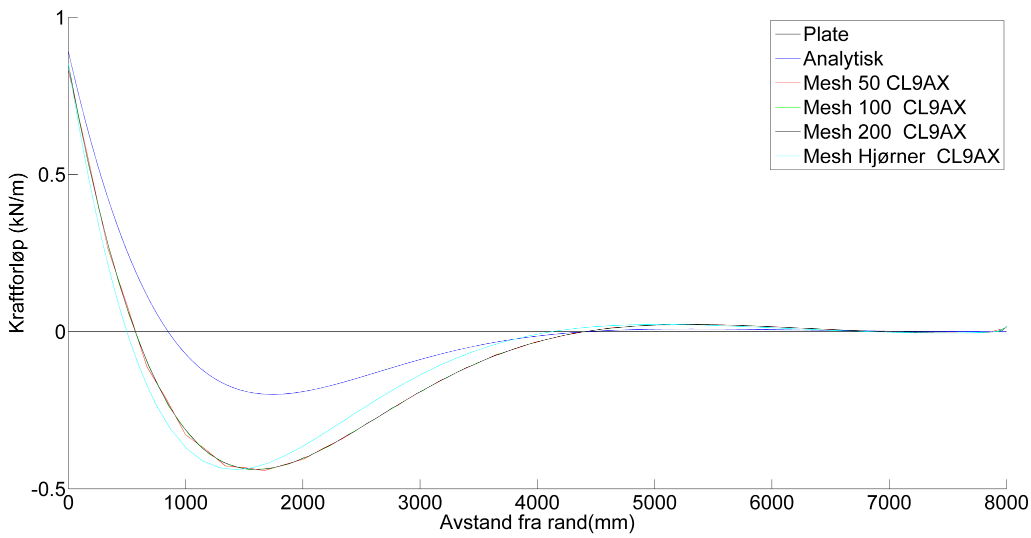
Figur 5.24: Ringkraft i ringretning i kuletaket med ulike CL9AX elementer



Figur 5.25: Ringkraft i sylinder med ulike CL9AX elementer



Figur 5.26: Ringkraft i meridianretning i kuletaket med ulike CL9AX elementer



Figur 5.27: Moment i kulen i ringretning med ulike CL9AX elementer

5.3 Ikke-lineær analyse

Modellen for ikke-lineær analyse er lagd ved å bruke massive elementer, CQ8AX og CQ16A, se kapittel 3. Den betår av tre overflater og er innsatt med armeringen, vist i 5.28b. De tre overflatene er delt inn i til sammen 1000 elementer og danner et koordinatnett, se figur 5.28a, som er tilnærmet lik over de tre overflatene. Materialdataene til betongen er kalkulert ut i fra formlene gitt i kaptittel 3 og gitt i tabell 5.2. Dimensjonering av armering kommer under delkapittel **??**.

For å kartlegge ikke-lineæroppførsel vil det betraktes en last-deformasjonskurve, se figur 5.29. Videre vil armeringspenningen og rissutviklingen i toppunktet av deformasjonskurven kartlegges.

Betong lineær	E= 17000MPa	ν= 0.2	
Betong ikke-linær	f_{ctd} =1.13MPa	G_f = 0.061 $\frac{N}{mm}$	f_{cd} = 17MPa
Armering lineær	E= 200000MPa	ν= 0.0	
Armering ikke-lineær	f_{yd}=434MPa		

Tabell 5.2: Materialdata for lineær og ikke-lineær analyse

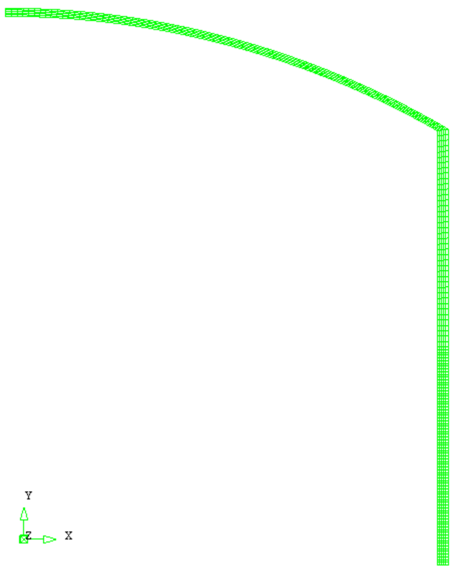
5.3.1 Dimensjonering av armering

Beregning av nødvendig armeringsmengde i beholderen gjøres ved bruk av lineær elastisk teori og i henhold til Eurokode 2 [1]. De utførte beregningene kan finnes i vedlegg A.2 og resultatene kan leses i tabell 5.3. Det er ikke tatt hensyn til minimumsarmeringen i tabell 5.3 for å kunne gjøre sammenligningene bedre. Beregningene er konservative og det er lagt til grunn for ekstremalverdiene innen hver av konstruksjonsdelene gitt under den analysike delen. Betongkonstruksjoner av Sørensen[7] har hvert viktig i utførelsen av armeringsberegningene.

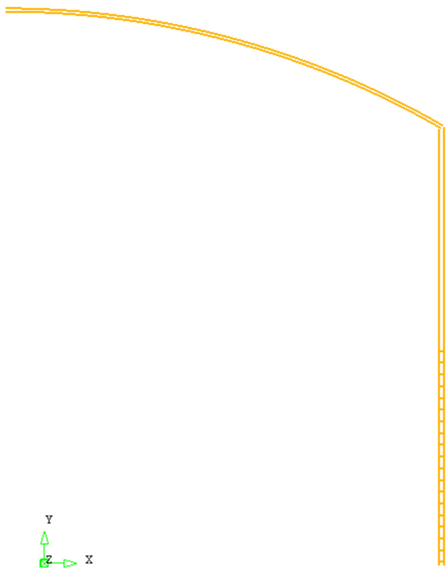
		Kuletak	Sylindertopp	Sylinderbunn
Moment meridanretning	Ytre	$21\frac{mm^2}{m}$	$24\frac{mm^2}{m}$	$499\ \frac{mm^2}{m}$
	Indre	$93\frac{mm^2}{m}$	$65\ \frac{mm^2}{m}$	$114.5\frac{mm^2}{m}$
Moment ringretning	Ytre	$4\frac{mm^2}{m}$		
	Indre	$18\frac{mm^2}{m}$		
Skjærarmering				$50mm^2$ s215mm
Ringarmering meridianretning	Ytre	$38\frac{mm^2}{m}$		
	Indre	$38\frac{mm^2}{m}$		
Ringarmering ringretning	Ytre	$102\frac{mm^2}{m}$	$380.5\frac{mm^2}{m}$	$531.5\ \frac{mm^2}{m}$
	Indre	$102\frac{mm^2}{m}$	$380.5\frac{mm^2}{m}$	$531.5\ \frac{mm^2}{m}$

Tabell 5.3: Armering for sylinder med platetak

5.3.2 Resultater

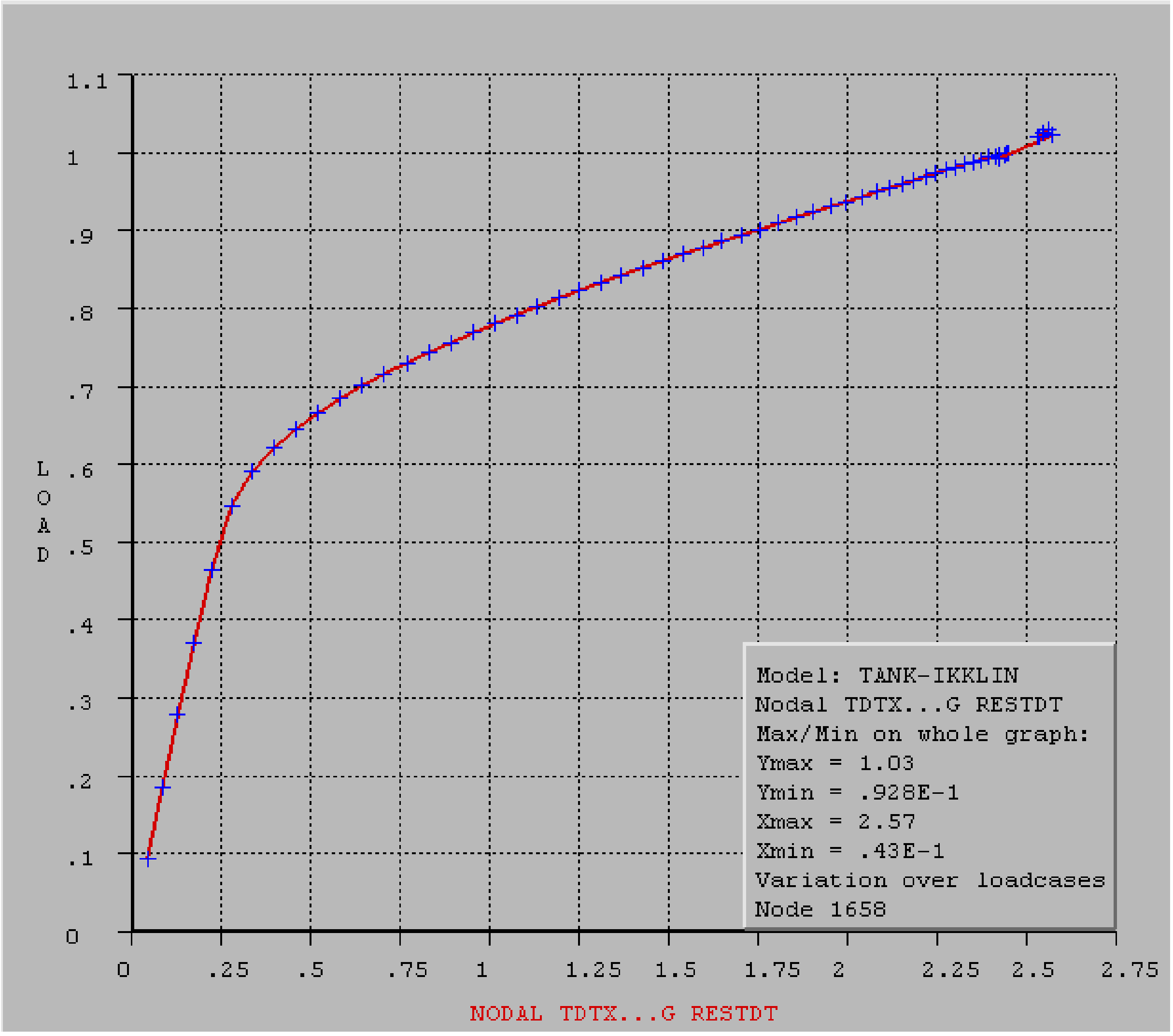


(a) Koordinatnett Q8AXI

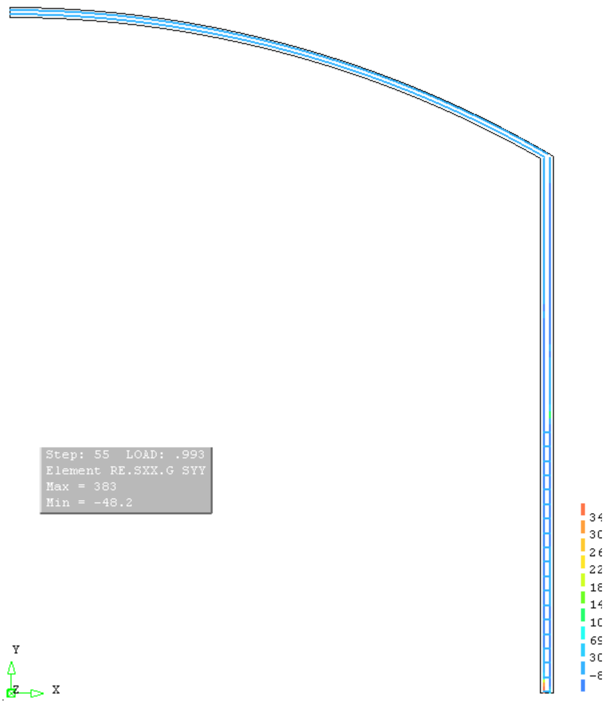


(b) Armering i tverrsnittet

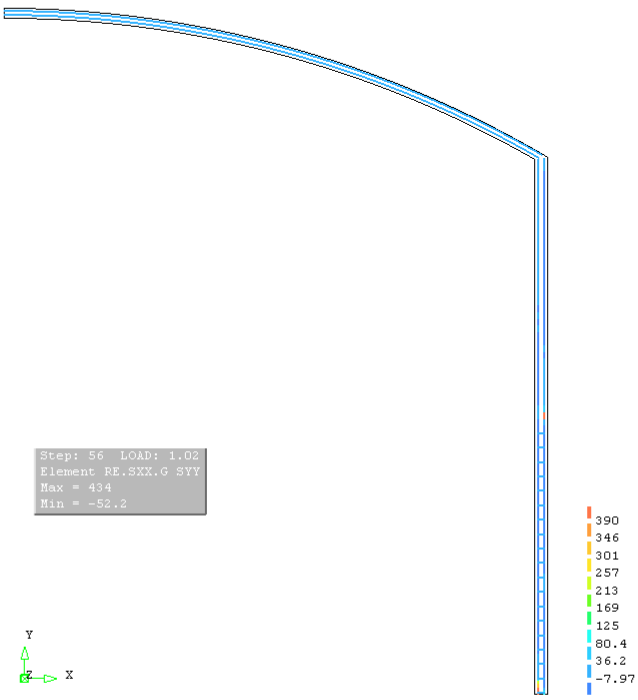
Figur 5.28: Koordinatnett og armering i ikke-linærmodell



Figur 5.29: Deformasjon i gitt node over 60 laststeg

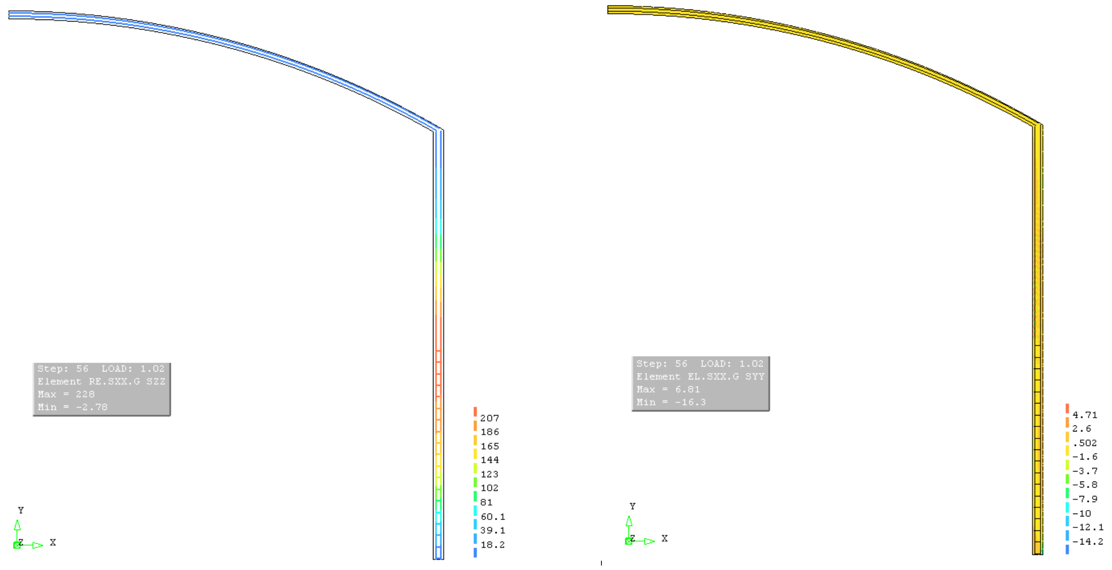


(a) Armeringsspenning i y-retning ved lasttilfelle 55



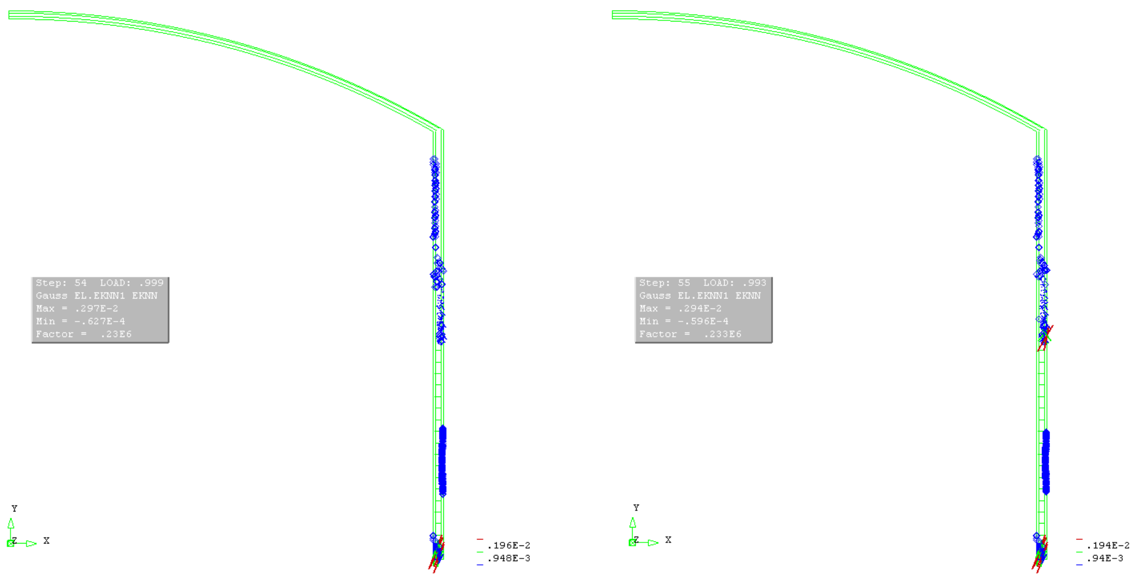
(b) Armeringsspenning i y-retning ved lasttilfelle 56

Figur 5.30: Armeringspenninger i y-retning ved brudd



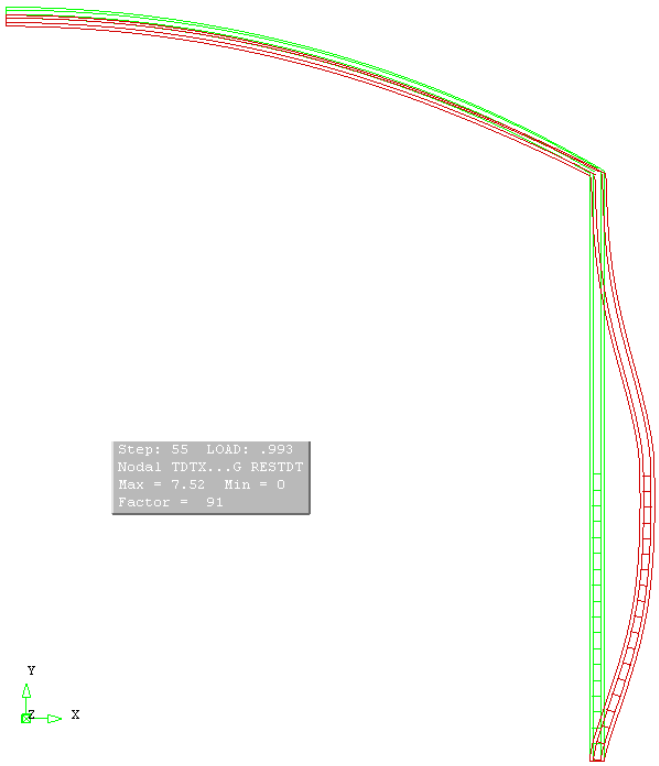
(a) Armeringspenning i z-retning ved brudd (b) Betongtrykk i y-retning ved brudd

Figur 5.31: Andre store spenninger ved brudd

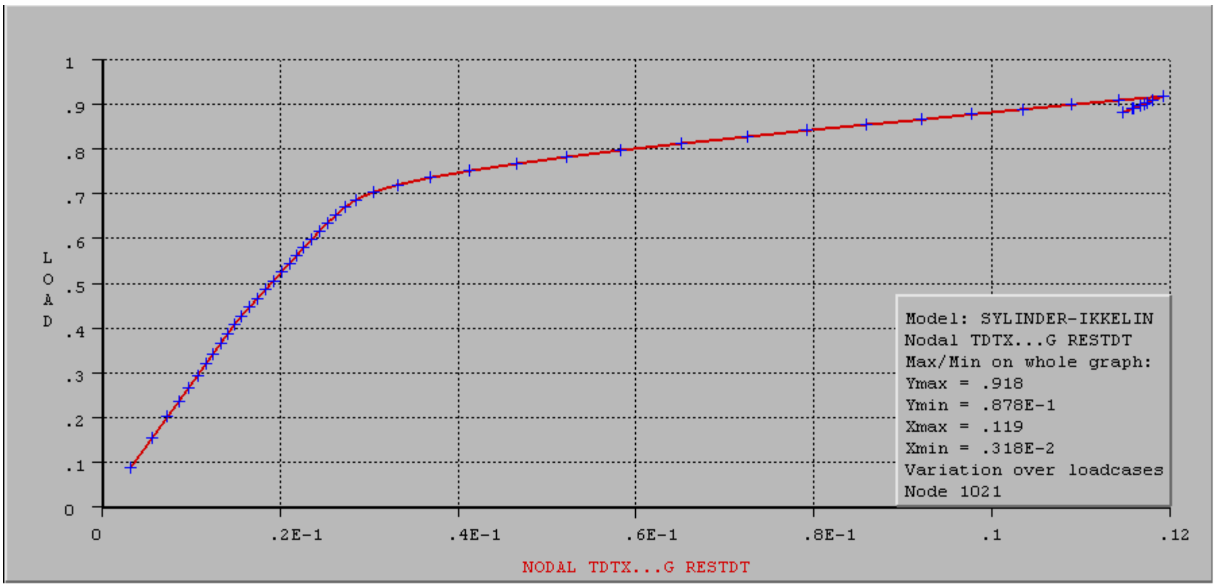


(a) Risstøyninger ved lasttilfelle 54 (b) Risstøyninger ved lasttilfelle 55

Figur 5.32: Risstøninger før brudd



Figur 5.33: Deformasjon i lasttilfelle 55



Figur 5.34: Deformasjon i gitt node over 50 laststeg for CQ16A

5.4 Diskusjon

5.4.1 Linær analyse

I dette eksempelet er det valgt å fokusere på resultatene i kuleskallet. Informasjon om sylinderskallet kan leses i det første eksempelet i kapittel 4 hvor de samme analysene ble utført. Resultatene fra analysen gav et godt samsvar mot den analytiske løsningen med begge elementer, CL9AX og L6AXI, med noen unntak. Ringkreftene i ring-og merdianretning var godt representert ved randen, men mot toppen av kulen ble kreftene overvurdert og undervurdert i forhold til analytisk løsning. Dette kan observeres i begge elementer ved figur 5.24 og 5.16, 5.26 og 5.18. Det kan komme av at ringkraften, N_{φ}, og N_{θ} ikke fordeler seg som teorien tilsier og at den totale ringkraften for begge retninger tilsammen er lik.

Momentkreftene i ringretning har samme tendens hvor randkreftene stemmmer og kreftene blir overvurdert før den går mot null mot toppen, se 5.27 og 5.19.

For begge elementene L6AXI og CL9AX er det samme konvergeringrate som oppstår i sylinderen. L6AXI er godt representert ved grove koordinatnett og konvergerer sakte mot løsningen, mens CL9AXI er enda bedre i starten og konvergerer enda raskere.

5.4.2 Ikke-lineær analyse

I den ikke-lineær analysen av sylinderen med kuletaket viser den brudd i armeringen ved lasttilfelle 56, hvor den påførte lasten er 1.02 av opprinnelig last. Derformasjonskurven i figur 5.29 viser en ikke-lineæroppførsel og at det er en uregelmessighet ved laststeg 54-55.

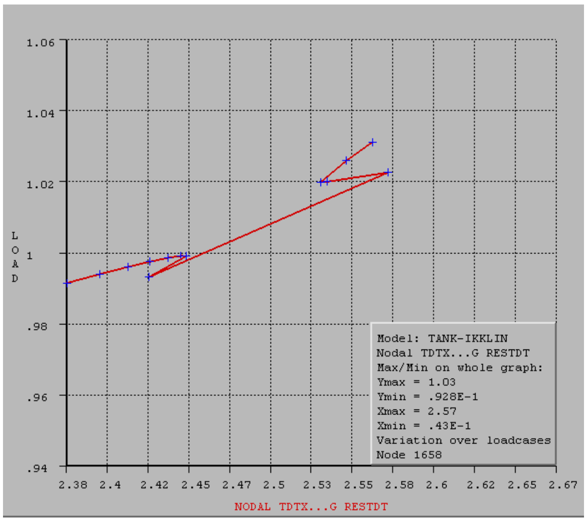
Ved å se litt nærmere på dette området, sett i figur 5.35, så avlastes geometrien i lasttilfelle 55. Fra lasttilfelle 54 til 55 skjer det også en endring i risstøyningene, se figur 5.32. Tøyningene går fra å være konsentrert vinkelrett på rissretningen ved hjørne til å få to kritiske punkter et i innspenningen og et i midten av sylinderen.

Deformasjonen i lasttilfelle 55 viser en knekk på midten av sylinderen, se figur 5.33. Denne knekken er trolig årsaken til de nye tøyningene i midten. I lasttifelle 56 fotsetter pålastingen til 1.02 hvor armeringen i y-retningen begynner å flyte med en spenning 434MPa, se figur 5.30, i det samme kritiske punktet i midten.

De andre kritiske spenningene viser 228MPa i armeringen i ringretning ved midten, 403MPa i den indre armeringen ved basen og 16.3MPa i trykk ved basen av sylinderen. Utnyttelsesgraden av armeringen i kulen er liten. Dette skyldes den effektive formen på kulen som skaper trykk-krefter og motvirker strekk i armeringen.

I en lavere beholdere er det sannsynelig at bruddet hadde skjedd ved basen hvor tøyningene var størst før knekken i midten. Bruddet hadde enten kommet som en form av armeringsflytning i den indre armeringen i y-retning eller i form av et trykkbrudd på den ytre delen av sylinderen.

Sammenligningen av CQ16A og Q8AXI gav to forskjellige derformasjon-last diagram som i det første eksempelet. CQ16A fikk et brudd i armeringen ved basen og deformasjonen utartet seg anderledes. Det er helt klart at de to ulike elementene gir ulike resultater, men det er vanskelig å si hvilke som er mest korrekt i denne versjonen av Diana. Dette kan undersøkes videre.



Figur 5.35: Lasttilfeller 48-60

Del III

Konklusjon

Kapittel 6

Konklusjon

Analytiske beregninger av aksesymmetriske skall har det vist seg å være utfordrende og komplisert. Metodene har mange steg og ved sammensatte konstruksjoner er det kompliserte utregninger spesielt ved rendene og koblingene. Ved bruk av automatiserte prosedyrer i programvarer som MathCad og Matlab har det blitt lettere å behandle datamengden og redusere menneskelige feil i utregning. Men det er fortsatt store muligheter for feil hvis en ikke er nøyaktig.

De lineær numeriske resultatene gitt av FEM-programmet DIANA gav et godt samsvar med de analytiske beregningene. Når elementstørrelsen er liten er feilmarginene små rundt 5% mellom numeriske og analytiske løsningsmetoder. De største feilene kunne observeres ved rendene og raske omveltninger i kraften. De tre ulike skalltypene har små forskjeller i konvergenshastighet og nøyaktighet. Det er kun ved ringkraften i kulen hvor kreftene er feilrepresent. Kreftene ved randen er nøyaktige, men det utvikler seg et avvik mot senter av kulen. Disse avvikene er motsatt av hverandre og det kan virke som fordelingen av kreftene er ubalansert.

I undersøkelsen av elementer er det konkludert med at CL9AX-elementet er det beste elementet for grove elementer. CL9AX konvergerer fort og representerer kreftene bedre enn L6AXI ved grovere nett. En ulempe med grove CL9AX-element er ved raske omveltninger i kreftene hvor de tre nodene kan gjøre at elementet er for stort til å registrere endringene. Det skal også nevnes at L6AXI-elementet er en brukbar løsning hvis antall elementer er mange nok.

Resultatene av den ikke-lineære analysen verifiserer at modellen tar hensyn til ikke-lineæroppførsel. Risstøyningene er vinkelrett på risssretningene og armeringen i tversnittet har en høy utnyttelses grad. De to eksemplene gav to ulike resultater et med brudd i betongen og et med brudd i armeringen, noe som forteller at alle materialer bli vurdert i modellen. I en ikke-lineær analyse er det viktig at alle materialdataene er korrekt og resultatene verifiseres mot en last-deformasjonskurve og rissutvikling. Det kan også nevnes at armeringsmengdene i begge eksemplene var konservative og de ikke-lineære analysene viser at armeringen kan optimaliseres og omfordeles til de kritiske punktene.

Undersøkelse av de to massive elementtypene Q8AXI og CQ16A gav ingen verifiserbare resultater på grunn av for lite elementer. Den forutsatte antakelsen at Q8AXI elementet var litt stivere enn CQ16A ble verifisert i begge tilfeller hvor CQ16A gav en lavere lastkapasitet. Siden Diana Teachers edition kun har 1000 elementer var det vanskelig å sammenligne ulike elementegenskaper.

Bibliografi

[1] Standard Norge. *Eurokode 2 .Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 1-1, Allmenne regler og regler for bygninger . Rettelsesblad AC.* Standard Norge, Lysaker, 2010.

[2] David P. Billington. *Thin shell concrete structures.* Number 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1982.

[3] Svein Ivar Sørensen og Jan Arve Øverli. Tkt4222 concrete structures 3 autumn 2013 compendium, 2013.

[4] Svein Ivar Sørensen. Beregningsgrunnlaget for betongkonstruksjoner, del ii, aksesymmetriske skall, 1999.

[5] TNO DIANA BV. *DIANA Finite Element Analysis User's Manual Release Notes Release 9.4.4*, 2011.

[6] Stephen Timoshenko and S Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells.* Number 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1959.

[7] Svein I. 1947 Sørensen. *Betongkonstruksjoner: beregning og dimensjonering etter Eurocode 2.* Tapir akademisk forl., Trondheim, 2010.

Vedlegg

Vedlegg

Vedlegg A

Dimensjonering av armering

A.1 Armering platetak

Størrelser:

$h_p := 200\ mm$ $b := 1000\ mm$

$h_s := 150\ mm$

Egenskaper for betong:

$E_b := 30000\ \frac{N}{mm^2}$

$f_{ck} := 30\ \frac{N}{mm^2}$

$\gamma_c := 1.5$

$\alpha_{cc} := 0.85$

$f_{cd} := \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = 17\ \frac{N}{mm^2}$

$f_{ctm} := 2.9\ \frac{N}{mm^2}$

Egenskaper for armering:

$E_s := 200000\ \frac{N}{mm^2}$

$f_{yk} := 500\ \frac{N}{mm^2}$

$\gamma_s := 1.15$

$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 434.783\ \frac{N}{mm^2}$

Overdekning:

$C_{min} := 25\ mm + 5\ mm = 30\ mm$

$\Delta C_{dev} := 10\ mm$ (NA.4.4.1.3)

$C_{nom} := C_{min} + \Delta C_{dev} = 40\ mm$

Sylinderbunn:

Ringarmering som fordeles på indre og ytre armering:

$$N_{Edringb} := 295.84\ \frac{kN}{m}$$

$$A_{ringb} := \frac{N_{Edringb}}{f_{yd}} = 680.432\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i indre lag:

$$M_{Edindreb} := 12.14 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_s - C_{nom} = 110\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$M_{Edindreb} > M_{Rd} = 0$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edindreb}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 105.987\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sindreb} := \frac{M_{Edindreb}}{f_{yd} \cdot z} = 303.996\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sindreb} := max\left(A_{sindreb}, A_{smin}\right) = 303.996\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{Edytreb} := 2.52 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - C_{nom} = 110\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edytreb} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edytreb}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 109.167\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sytreb} := \frac{M_{Edytreb}}{f_{yd} \cdot z} = 53.093\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sytreb} := max\left(A_{sytreb}, A_{smin}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

Skjærarmering:

$$V_{Edb} := 49.31\ \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := min\left(1 + \left(\sqrt[1]{\frac{200}{d \cdot \frac{1}{mm}}}\right), 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := min\left(\frac{A_{sindreb}}{b \cdot d} \cdot m, 0.02\right) = 0.003$$

$$v_{min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 542.218\ \frac{kg^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

$$V_{Rd.c} = max\left(C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d, v_{min} \cdot b \cdot d\right)$$

$$V_{Rd.c} = 48.699\ \frac{kN}{m}$$

$$V_{Edb} > V_{Rd.c} = 1$$

Beregningsmessig behov for skjærarmering

$$z := 0.9\ d = 99\ mm \qquad cot(\theta) := 2.5$$

$$A_{swbs} := \frac{V_{Edb} \cdot 10^3}{f_{yd} \cdot z \cdot 2.5} = 0.458$$

Nødvendig skjærarmering per mm

$$\phi_{sb} := 8\ mm$$

$$A_{swb} := \frac{\phi_{sb}^{2} \cdot \pi}{4} = 50.265\ mm^2$$

$$s_{wb} := \frac{2 \cdot A_{swb}}{A_{swbs}} \cdot \frac{1}{mm} = 219.388\ mm$$

Sylindertopp:

Ringarmering som fordeles på indre og ytre armering:

$$N_{Edringt} := 368.96 \ \frac{kN}{m}$$

$$A_{ringt} := \frac{N_{Edringt}}{f_{yd}} = 848.608 \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i indre lag:

$$M_{Edindret} := 74.02 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_s - C_{nom} = 110 \ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edindret} > M_{Rd} = 1$$ Fullt utnyttet sone

$$\Delta M := M_{Edindret} - M_{Rd} = 17.453 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$z := 0.835 \cdot d = 91.85 \ mm$$

$$h := h_s - 2 \cdot C_{nom} = 70 \ mm$$

Strekkarmering

$$A_{s1} := \frac{M_{Edindret}}{f_{yd} \cdot z} = \left(1.854 \cdot 10^3\right) \ \frac{mm^2}{m}$$

Trykkarmering

$$A_{s2} := \frac{\Delta M}{f_{yd} \cdot h} = 573.439 \ \frac{mm^2}{m}$$

Total strekkarmering indre lag:

$$A_{sindret} := A_{s1} + A_{s2} = \left(2.427 \cdot 10^3\right) \ \frac{mm^2}{m}$$

Nødvendig trykkarmering ytre lag:

$$A_{tyrtret} := A_{s2} = 573.439 \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{Edytret} := 5.91 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - C_{nom} = 110\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edytret} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edytret}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 108.046\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sytret} := \frac{M_{Edytret}}{f_{yd} \cdot z} = 125.807\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sytret} := max\left(A_{sytret}, A_{smin}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

Skjærarmering:

$$V_{Edt} := 174.80 \ \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := min\left(1 + \left(\sqrt[1]{\frac{200}{d \cdot \frac{1}{mm}}}\right), 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := min\left(\frac{A_{sindret}}{b \cdot d} \cdot m, 0.02\right) = 0.02$$

$$v_{min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 542.218 \ \frac{kg^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

$$V_{Rd.c} = max\left(C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d, v_{min} \cdot b \cdot d\right)$$

$$V_{Rd.c} = 90.287 \ \frac{kN}{m}$$

$V_{Edt} > V_{Rd.c} = 1$ Beregningsmessig behov for skjærarmering

$z := 0.9 \ d = 99 \ mm$ $\qquad cot(\theta) := 2.5$

$$A_{swbs} := \frac{V_{Edt} \cdot 10^3}{f_{yd} \cdot z \cdot 2.5} = 1.624$$

Nødvendig skjærarmering per mm

$$\phi_{st} := 14 \ mm$$

$$A_{swt} := \frac{\phi_{st}^{\ 2} \cdot \pi}{4} = 153.938 \ mm^2$$

$$s_{wt} := \frac{2 \cdot A_{swt}}{A_{swbs}} \cdot \frac{1}{mm} = 189.532 \ mm$$

Takplate:

Bøyearmering for Mr i topplag:

$$M_{Edtoppp} := 69.66 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_p - C_{nom} = 160\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edtoppp} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edtoppp}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 144.168\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{stoppp} := \frac{M_{Edtoppp}}{f_{yd} \cdot z} = \left(1.111 \cdot 10^3\right)\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{stoppp} := max\left(A_{stoppp}, A_{smin}\right) = \left(1.111 \cdot 10^3\right)\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for Mr i bunnlag:

$$M_{Edbunnp} := 74.03 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_p - C_{nom} = 160 \ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edbunnp} > M_{Rd} = 0$$

Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edbunnp}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 143.175 \ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sbunnp} := \frac{M_{Edbunnp}}{f_{yd} \cdot z} = \left(1.189 \cdot 10^3\right) \ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28 \ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sbunnp} := max\left(A_{sbunnp}, A_{smin}\right) = \left(1.189 \cdot 10^3\right) \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for Mt i topplag:

$$M_{Edtopptp} := 69.66\ kN \cdot \frac{m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_p - C_{nom} = 160\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edtopptp} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edtopptp}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 144.168\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{stopptp} := \frac{M_{Edtopptp}}{f_{yd} \cdot z} = \left(1.111 \cdot 10^3\right)\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{stopptp} := max\left(A_{stopptp}, A_{smin}\right) = \left(1.111 \cdot 10^3\right)\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for Mt i bunnlag:

$$M_{Edbunntp} := 2.18\ kN \cdot \frac{m}{m}$$

$$d := h_p - C_{nom} = 160\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edbunntp} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edbunntp}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 159.505\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sbunntp} := \frac{M_{Edbunntp}}{f_{yd} \cdot z} = 31.435\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sbunntp} := max\left(A_{sbunntp}, A_{smin}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

Skjærarmering:

$$V_{Edp} := 130.62 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := min\left(1 + \left(\sqrt[1]{\frac{200}{d \cdot \frac{1}{mm}}}\right), 2.0\right) = 2$$

$$A_{sl} := max\left(A_{sbunnp}, A_{stoppp}\right) = \left(1.189 \cdot 10^{3}\right)\ \frac{mm^{2}}{m}$$

$$\rho_L := min\left(\frac{A_{sl}}{b \cdot d} \cdot m, 0.02\right) = 0.007$$

$$v_{min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 542.218\ \frac{kg^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

$$V_{Rd.c} = max\left(C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d, v_{min} \cdot b \cdot d\right)$$

$$V_{Rd.c} = 94.419\ \frac{kN}{m}$$

$V_{Edt} > V_{Rd.c} = 1$ Beregningsmessig behov for skjærarmering

$z := 0.9\ d = 144\ mm$ $\qquad cot(\theta) := 2.5$

$$A_{swbs} := \frac{V_{Edt} \cdot 10^{3}}{f_{yd} \cdot z \cdot 2.5} = 1.117$$ Nødvendig skjærarmering per mm

$$\phi_{st} := 14\ mm$$

$$A_{swt} := \frac{\phi_{st}^{2} \cdot \pi}{4} = 153.938\ mm^{2}$$

$$s_{wt} := \frac{2 \cdot A_{swt}}{A_{swbs}} \cdot \frac{1}{mm} = 275.682\ mm$$

A.2 Armering kuletak

Størrelser

$h_k := 150\ mm$ $b := 1000\ mm$

$h_s := 200\ mm$

Egenskaper for betong:

$E_b := 30000\ \frac{N}{mm^2}$

$f_{ck} := 30\ \frac{N}{mm^2}$

$\gamma_c := 1.5$

$\alpha_{cc} := 0.85$

$f_{cd} := \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = 17\ \frac{N}{mm^2}$

$f_{ctm} := 2.9\ \frac{N}{mm^2}$

Egenskaper for armering:

$E_s := 200000\ \frac{N}{mm^2}$

$f_{yk} := 500\ \frac{N}{mm^2}$

$\gamma_s := 1.15$

$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 434.783\ \frac{N}{mm^2}$

Overdekning:

$C_{min} := 25\ mm + 5\ mm = 30\ mm$

$\Delta C_{dev} := 10\ mm$

$C_{nom} := C_{min} + \Delta C_{dev} = 40\ mm$ (NA.4.4.1.3)

Sylinderbunn:

Ringarmering som fordeles på indre og ytre armering:

$$N_{Edringb} := 462.34\ \frac{kN}{m}$$

$$A_{ringb} := \frac{N_{Edringb}}{f_{yd}} = \left(1.063 \cdot 10^{3}\right)\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i indre lag:

$$M_{Edindreb} := 33.1\ kN \cdot \frac{m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_s - C_{nom} = 160\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$M_{Edindreb} > M_{Rd} = 0$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edindreb}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 152.477\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sindreb} := \frac{M_{Edindreb}}{f_{yd} \cdot z} = 499.288\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sindreb} := max\left(A_{sindreb}, A_{smin}\right) = 499.288\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i ytre lag

$$M_{Edytreb} := 7.87 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - C_{nom} = 160 \ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edytreb} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edytreb}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 158.211 \ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sytreb} := \frac{M_{Edytreb}}{f_{yd} \cdot z} = 114.41 \ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28 \ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sytreb} := max\left(A_{sytreb}, A_{smin}\right) = 241.28 \ \frac{mm^2}{m}$$

Skjærarmering:

$$V_{Edb} := 72.96\ \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := min\left(1 + \left(\sqrt[1]{\frac{200}{d \cdot \frac{1}{mm}}}\right), 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := min\left(\frac{A_{sindreb}}{b \cdot d} \cdot m, 0.02\right) = 0.003$$

$$v_{min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 542.218\ \frac{kg^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

$$V_{Rd.c} = max\left(C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d, v_{min} \cdot b \cdot d\right)$$

$$V_{Rd.c} = 70.835\ \frac{kN}{m}$$

$V_{Edb} > V_{Rd.c} = 1$ Beregningsmessig behov for skjærarmering

Nødvendig armering:

$z := 0.9\ d = 144\ mm$ $\qquad cot(\theta) := 2.5$

$A_{swbs} := \dfrac{V_{Edb} \cdot 10^3}{f_{yd} \cdot z \cdot 2.5} = 0.466$ $\qquad \phi_{sb} := 8\ mm$ $\qquad$ Nødvendig skjærarmering per mm

$A_{swb} := \dfrac{\phi_{sb}^{\ 2} \cdot \pi}{4} = 50.265\ mm^2$ $\qquad s_{wb} := \dfrac{2 \cdot A_{swb}}{A_{swbs}} \cdot \dfrac{1}{mm} = 215.67\ mm$

Sylindertopp:

Ringarmering som fordeles på indre og ytre armering:

$$N_{Edringt} := 331.22 \ \frac{kN}{m}$$

$$A_{ringt} := \frac{N_{Edringt}}{f_{yd}} = 761.806 \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i indre lag:

$$M_{Edindret} := 1.64 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_s - C_{nom} = 160 \ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edindret} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edindret}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 159.627 \ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sindret} := \frac{M_{Edindret}}{f_{yd} \cdot z} = 23.63 \ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28 \ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sindret} := max\left(A_{sindret}, A_{smin}\right) = 241.28 \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering i ytre lag:

$$M_{Edytret} := 4.48 \cdot \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$d := h_s - C_{nom} = 160\ mm$$

$$M_{Rd} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 119.68\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Edytret} > M_{Rd} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Edytret}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 158.982\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{sytret} := \frac{M_{Edytret}}{f_{yd} \cdot z} = 64.812\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{sytret} := max\left(A_{sytret}, A_{smin}\right) = 241.28\ \frac{mm^2}{m}$$

Skjærarmering:

$$V_{Edt} := 12.28\ \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := min\left(1 + \left(\sqrt[1]{\frac{200}{d \cdot \frac{1}{mm}}}\right), 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := min\left(\frac{A_{sindret}}{b \cdot d} \cdot m, 0.02\right) = 0.002$$

$$v_{min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 542.218\ \frac{kg^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

$$V_{Rd.c} = max\left(C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d, v_{min} \cdot b \cdot d\right)$$

$$V_{Rd.c} = 70.835\ \frac{kN}{m}$$

$V_{Edt} > V_{Rd.c} = 0$ Ingen behov for skjærarmering

Kuletak:

Ringarmering fordeles på indre og ytre armering:

I ringretning:

$$N_{Ed\theta} := 88.52 \cdot \frac{kN}{m}$$

$$A_{s\theta N} := \frac{N_{Ed\theta}}{f_{yd}} = 203.596 \ \frac{mm^2}{m}$$

I merdianretning:

$$N_{Ed\varphi} := 33.09 \ \frac{kN}{m}$$

$$A_{s\varphi N} := \frac{N_{Ed\varphi}}{f_{yd}} = 76.107 \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for moment i merdianretning i ytre lag:

$$M_{Ed\varphi y} := 1.00 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_k - C_{nom} = 110 \ mm$$

$$M_{Rd.} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Ed\varphi y} > M_{Rd.} = 0$$

Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed\varphi y}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 109.844 \ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{s\varphi My} := \frac{M_{Ed\varphi y}}{f_{yd} \cdot z} = 20.939 \ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88 \ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s\varphi My} := max\left(A_{s\varphi My}, A_{smin}\right) = 165.88 \ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for moment i merdianretning indre lag:

$$M_{Ed\varphi i} := 4.46\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_k - C_{nom} = 110\ mm$$

$$M_{Rd.} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Ed\varphi i} > M_{Rd.} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed\varphi i}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 109.303\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{s\varphi Mi} := \frac{M_{Ed\varphi i}}{f_{yd} \cdot z} = 93.849\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s\varphi Mi} := max\left(A_{s\varphi Mi}, A_{smin}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for moment i ringretning i ytre lag:

$$M_{Ed\theta y} := 0.20\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_k - C_{nom} = 110\ mm$$

$$M_{Rd.} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Ed\theta y} > M_{Rd.} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed\theta y}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 109.969\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{s\theta My} := \frac{M_{Ed\theta y}}{f_{yd} \cdot z} = 4.183\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s\theta My} := max\left(A_{s\theta My}, A_{smin}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

Bøyearmering for moment i ringretning i indre lag:

$$M_{Ed\theta i} := 0.89\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$K := 0.275$$

$$d := h_k - C_{nom} = 110\ mm$$

$$M_{Rd.} := K \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{m} = 56.568\ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$M_{Ed\theta i} > M_{Rd.} = 0$$ Delvis utnyttet sone

$$z := \left(1 - 0.17 \cdot \frac{M_{Ed\theta i}}{M_{Rd}}\right) \cdot d = 109.861\ mm$$

Nødvendig armering:

$$A_{s\theta Mi} := \frac{M_{Ed\theta i}}{f_{yd} \cdot z} = 18.633\ \frac{mm^2}{m}$$

Sjekker mot minimumsarmering:

$$A_{smin} := max\left(0.26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}, 0.0013 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{m}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

$$A_{s\theta Mi} := max\left(A_{s\theta Mi}, A_{smin}\right) = 165.88\ \frac{mm^2}{m}$$

Skjærarmering:

$$V_{Ed} := 7.78\ \frac{kN}{m}$$

$$C_{Rd.c} := 0.12$$

$$k := min\left(1 + \left(\sqrt[1]{\frac{200}{d \cdot \frac{1}{mm}}}\right), 2.0\right) = 2$$

$$\rho_L := min\left(\frac{A_{s\varphi Mi}}{b \cdot d} \cdot m, 0.02\right) = 0.002$$

$$v_{min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 542.218\ \frac{kg^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

$$V_{Rd.c} = max\left(C_{Rd.c} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_L \cdot f_{ck}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b \cdot d, v_{min} \cdot b \cdot d\right)$$

$$V_{Rd.c} = 70.835\ \frac{kN}{m}$$

$V_{Edt} > V_{Rd.c} = 0$ Ingen behov for skjærarmering

Vedlegg B

Beregninger

B.1 Beregning av sylinder med platetak

Geometri:

$L := 4500\ mm$ $\qquad h_s := 150\ mm$

$r := 2750\ mm$ $\qquad h_p := 200\ mm$

Materialdata:

$E := 30000\ \dfrac{N}{mm^2}$ $\qquad \nu := 0.2$ $\qquad \rho_b := 2550\ \dfrac{kg}{m^3}$

Laster:

$p := 100\ \dfrac{kN}{m^2}$ $\qquad g_{tp} := g \cdot \rho_b \cdot h_p = 5.001\ \dfrac{kN}{m^2}$ $\qquad q := p - g_{tp} = 94.999\ \dfrac{kN}{m^2}$

Egenskaper:

$D_p := \dfrac{E \cdot {h_p}^3}{12 \cdot \left(1-\nu^2\right)} = \left(2.083 \cdot 10^4\right)\ kN \cdot m$ $\qquad D_s := \dfrac{E \cdot {h_s}^3}{12 \cdot \left(1-\nu^2\right)} = \left(8.789 \cdot 10^3\right)\ kN \cdot m$

Karakteristiske størrelser:

$l_e := \dfrac{\sqrt{r \cdot h_s}}{\sqrt[4]{3 \cdot \left(1-\nu^2\right)}} = 493.019\ mm$ $\qquad$ Elastisk lengde

$L_C := \pi \cdot l_e = \left(1.549 \cdot 10^3\right)\ mm$ $\qquad$ Dempningslengde

$$2 \cdot L_C \le L = 1$$

Sylinderen betraktes uendelig lang ved 1, ingen innvirkning fra rand nummer 2.

Sylinderbunn

Den nedre randen er ikke påvirket av topplaten på grunn av dempningslengden.
Moment- , skjær- og ringkraftutviklingen er derfor følgende:

$$M_{xn}(\xi) := \frac{p \cdot l_e^{\,2}}{2} \cdot g_4(\xi)$$

$$V_{xn}(\xi) := -p \cdot l_e \cdot g_1(\xi)$$

$$N_{\varphi n}(\xi) := p \cdot r \cdot \left(1 - g_3(\xi)\right)$$

Partikulærløsningen:

$$w_p := \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s}$$

Radiell forskyvning

$$N_{\varphi p} := p \cdot r$$

Ringkraft

Sylindertopp

Ved hjelp av koblingen mellom topplaten og sylinderen vil momentene og skjærkreftene overføres. For å finne den homogene løsningen må denne overføringen betraktes.

Først antas platen å være fritt dreibar, partikulær løsning og ingen moment ved randen

$$\theta_q := \frac{q \cdot r^3 \cdot \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right)}{16 \cdot D_p} = 0.01\ m \cdot \frac{1}{m}$$

Ved sammenkoblingen vil det oppstå et randmoment, Ma, som gir en dreining av plateranden.

$$\theta_M = \frac{M_a \cdot r}{D_p \cdot (1+\nu)}$$

Randbetingelse 1, samme dreining.:

$$M_a = M_0$$

$$\frac{l_e}{2 \cdot D_s} \cdot \left(-2 \cdot M_0 - V_0 \cdot l_e\right) = \theta_q + \theta_M$$

Sylinder Plate

Randbetingelse 2, uendelig stiv plate i planet:

$$\frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s} + \frac{{l_e}^2}{2 \cdot D_s} \cdot \left(M_0 + V_0 \cdot l_e\right) = 0$$

Forenkling og matriseform av randbetingelsene:

$$a_1 := \frac{l_e}{2 \cdot D_s} \qquad a_2 := \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h_s}$$

$$b_1 := 2 + \frac{\frac{r}{D_p \cdot (1+\nu)}}{a_1}$$

Randbetingelse 1:

$$M_0 \cdot b_1 + V_0 \cdot l_e = \frac{\theta_q}{a_1}$$

Randbetingelse 2:

$$M_0 + V_0 \cdot l_e = \frac{-a_2}{a_1 \cdot l_e}$$

Matriseform:

$$A := \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} M_0 \\ V_0 \cdot l_e \end{bmatrix} \qquad C := \begin{bmatrix} \frac{\theta_q}{a_1} \\ \frac{-a_2}{a_1 \cdot l_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.522 \cdot 10^5 \\ -1.215 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N$$

Løser ut for B-matrisen for å finne M0 og V0:

$$B := A^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} 7.403 \cdot 10^4 \\ -8.618 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N$$

De ukjente blir da følgende:

$$M_0 := B_0 = 74.027 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

$$V_0 := \frac{B_1}{l_e} = -174.801 \ \frac{kN}{m}$$

$$M_a := M_0$$

Kraftutvikling fra toppranden blir som følger:

$$M_{xt}(\xi) := M_0 \cdot g_3(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_2(\xi)$$

$$V_{xt}(\xi) := -\frac{2 \cdot M_0 \cdot g_2(\xi)}{l_e} + V_0 \cdot g_4(\xi)$$

$$N_{\varphi t}(\xi) := p \cdot r + \frac{2 \cdot r}{{l_e}^2} \cdot \left(M_0 \cdot g_4(\xi) + V_0 \cdot l_e \cdot g_1(\xi)\right)$$

Platetaket

Kraftutvikling i platen blir som følger:

$$M_r(r.) := M_a - \frac{q}{16} \cdot (3 + \nu) \cdot \left((3\ m)^2 - r.^2\right)$$

$$M_t(r.) := M_a - \frac{q}{16} \cdot \left((3\ m)^2 \cdot (3 + \nu) - r.^2 \cdot (1 + 3 \cdot \nu)\right)$$

B.2 Beregning av sylinder med kuletak

Geometri:

Sylinder:

$L_s := 8000\ \boldsymbol{mm}$ $\qquad r_s := 8000\ \boldsymbol{mm}$ $\qquad h_s := 200\ \boldsymbol{mm}$

Kuleskall:

$\varphi_0 := 30\ \boldsymbol{deg}$ $\qquad r_k := \dfrac{r_s}{sin\left(\varphi_0\right)} = 30\ \boldsymbol{m}$ $\qquad h_k := 150\ \boldsymbol{mm}$

Materialdata:

$E := 30000\ \boldsymbol{MPa}$ $\qquad \rho := 25\ \dfrac{\boldsymbol{kN}}{\boldsymbol{m}^3}$ $\qquad \nu := 0.2$

Laster

$\gamma := 10\ \dfrac{\boldsymbol{kN}}{\boldsymbol{m}^3}$ Vanntrykk

Stivheter

$D_k := \dfrac{E \cdot {h_k}^3}{12 \cdot \left(1-\nu^2\right)} = \left(2.083 \cdot 10^4\right)\ \boldsymbol{kN} \cdot \boldsymbol{m}$ $\qquad D_s := \dfrac{E \cdot {h_s}^3}{12 \cdot \left(1-\nu^2\right)} = \left(4.069 \cdot 10^4\right)\ \boldsymbol{kN} \cdot \boldsymbol{m}$

Karakterisktiske størrelser:

$l_e := \dfrac{\sqrt{r_s \cdot h_s}}{\sqrt[4]{3 \cdot \left(1-\nu^2\right)}} = 1.487\ \boldsymbol{m}$ Elastisk lengde

$L_C := \pi \cdot l_e = \left(4.67 \cdot 10^3\right)\ \boldsymbol{mm}$ Dempningslengde

$$2 \cdot L_C < L_s = 1$$

Sylinderen betraktes uendelig lang ved 1, ingen innvirkning fra rand nummer 2.

Sylinder

Utarbeidelse av formler til sylinderen er gitt i eksempelet med platetak. I denne delen oppgis verdier som trengs til løsningen av kuletakligningene.

Partikulærløsning:

$$w_p(x) := \frac{\gamma \cdot x \cdot {r_s}^2}{E \cdot h_s}$$ Radiell forskyvning

$$\theta_p := \frac{\gamma \cdot {r_s}^2}{E \cdot h_s}$$ Vinkelendring

Homogenløsning:

$$w_h(\xi) = \frac{{l_e}^2}{2 \cdot D_s} \cdot \left(g_4(\xi) \cdot M_0 + g_1(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e\right)$$

$$\theta_h(\xi) = \frac{l_e}{2 \cdot D_s} \cdot \left(-2 \cdot g_1(\xi) \cdot M_0 - g_3(\xi) \cdot V_0 \cdot l_e\right)$$

Total løsning ved sammenkobling til kuletak

$$w_{tot} = w_p(0) + w_h(0)$$

$$w_{tot} = \frac{{l_e}^2}{2 \cdot D_s} \cdot \left(M_0 + V_0 \cdot l_e\right)$$

$$\theta_{tot} = \theta_p(0) + \theta_h(0)$$

$$\theta_{tot} = \frac{\gamma \cdot {r_s}^2}{E \cdot h_s} + \frac{l_e}{2 \cdot D_s} \cdot \left(-2 \cdot M_0 - V_0 \cdot l_e\right)$$

Kuletak

Lambda-verdien som brukes i utregningene hentes i fra en diffensialligning som gir god nøyaktighet

$$\lambda := \left(\sqrt[4]{3 \cdot \left(1-\nu^2\right) \cdot \frac{{r_k}^2}{{h_k}^2}}\right) = 15.955$$

Partikulærløsning

$$\delta_{p1}(\varphi) := \frac{\rho \cdot {r_k}^2}{E} \cdot \left(\frac{1+\nu}{1+\cos(\varphi)} - \cos(\varphi)\right) \cdot \sin(\varphi)$$

Radiell forskyvning

$$\alpha_{p1}(\varphi) := \frac{-\rho \cdot r_k}{E} \cdot \sin(\varphi) \cdot (2+\nu)$$

Tangentiell forskyvning

$$N_\varphi(\varphi) := \frac{-\rho \cdot r_k \cdot h_k}{1+\cos(\varphi)}$$

Skivekraft

Korreksjon av partikulærløsning i henhold til randbetingelser

$$H(\varphi) := N_\varphi(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

$$R_0 := -H\left(\varphi_0\right)$$

$$\delta'(\varphi) := \frac{\lambda \cdot r_k \cdot \sin(\varphi)}{E \cdot h_k} \cdot 2 \cdot R_0 \cdot \sin(\varphi)$$

$$\alpha'(\varphi) := \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot h_k} \cdot \left(-R_0 \cdot \sin(\varphi)\right)$$

Endelig partikulær løsning

$$\delta_p := \delta_{p1}\left(\varphi_0\right) + \delta'\left(\varphi_0\right) = 0.003\ \boldsymbol{m}$$

$$\alpha_p := \alpha_{p1}\left(\varphi_0\right) + \alpha'\left(\varphi_0\right) = -0.003\ \boldsymbol{rad}$$

Homogenløsning

$$\delta_h(t) = \frac{\lambda \cdot r_k \cdot sin(\varphi)}{E \cdot h_k} \cdot \left(2 \cdot g_1(t) \cdot R_0 \cdot sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r_k}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k}\right)$$

$$\alpha_h(t) = \frac{2 \cdot \lambda^2}{E \cdot h_k} \cdot \left(-g_3(t) \cdot R_0 \cdot sin(\varphi) - g_1(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r_k}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k}\right)$$

Randbetingelser i koblingen

$$\delta_{tot} = w_{tot} \qquad \theta_{tot} = -\alpha_{tot}$$

$$V_0 = -R_0$$

Utarbeidelse av randkrefter:

$$b_1 := \left(\frac{l_e^{\,2}}{2 \cdot D_s} - \frac{r_k^{\,2} \cdot \sin\left(\varphi_0\right)}{2 \cdot \lambda^2 \cdot D_k} \right) = -1.527 \cdot 10^{-8} \ \frac{s^2}{kg}$$

$$b_2 := \left(\frac{l_e^{\,3}}{2 \cdot D_s} + \frac{2 \cdot \lambda \cdot r_k \cdot \sin\left(\varphi_0\right)^2}{E \cdot h_k} \right) = \left(8.025 \cdot 10^{-8}\right) \ \frac{1}{Pa}$$

$$b_3 := \left(\frac{l_e}{D_s} + \frac{r_k}{\lambda \cdot D_k} \right) = \left(1.268 \cdot 10^{-7}\right) \ \frac{1}{N}$$

$$b_4 := \left(\frac{l_e^{\,2}}{2 \cdot D_s} - \frac{2 \cdot \lambda^2 \cdot \sin\left(\varphi_0\right)}{E \cdot h_k} \right) = -1.527 \cdot 10^{-8} \ \frac{s^2}{kg}$$

$$B := \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.527 \cdot 10^{-8} \ \frac{s^2}{kg} & \left(8.025 \cdot 10^{-8}\right) \ \frac{1}{Pa} \\ \left(1.268 \cdot 10^{-7}\right) \ \frac{1}{N} & -1.527 \cdot 10^{-8} \ \frac{s^2}{kg} \end{bmatrix}$$

$$Y := \begin{bmatrix} \delta_p \\ \theta_p + \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003 \ m \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

$$S := B^{-1} \cdot Y = \begin{bmatrix} -1.75 \cdot 10^4 \ N \\ \left(3.023 \cdot 10^4\right) \ \frac{kg}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$R_0 := -S_1 = -12.284 \ \frac{kN}{m} \qquad V_0 := -R_0 = 12.284 \ \frac{kN}{m}$$

$$M_0 := S_0 = -4.463 \ \frac{kN \cdot m}{m}$$

Kraftforløp i kuleskallet:

Moment i meridianretning:

$$M_{\varphi h}(t)=\frac{2\ \lambda^3\ D_k}{E\cdot h_k\cdot r}\left(2\cdot g_2(t)\cdot R_0\cdot sin(\varphi)+g_3(t)\cdot M_0\cdot\frac{E\cdot h_k\cdot r}{2\cdot\lambda^3\cdot D_k}\right)$$

$$M'_\varphi=\frac{2\ \lambda^3\ D_k}{E\cdot h_k\cdot r}\left(-2\cdot g_2(t)\cdot H\cdot sin(\varphi)\right)$$

$$M_\varphi(t)=M_{\varphi h}(t)+M'_\varphi(t)$$

$$M_\varphi(t)=\frac{4\ \lambda^3\ D_k}{E\cdot h_k\cdot r}\left(g_2(t)\cdot\left(R_0-H\right)\cdot sin(\varphi)\right)+g_3(t)\cdot M_0$$

Moment i ringretning:

$$M_\theta=\nu\cdot M_\varphi(t)$$

Skjærkraft:

$$V_{\varphi h}(t)=-g_4(t)\cdot R_0\cdot sin(\varphi)+g_2(t)\cdot M_0\cdot\frac{E\cdot h_k\cdot r}{2\ \lambda^3\ D_k}$$

$$V'_\varphi=g_4(t)\cdot H\cdot sin(\varphi)$$

$$V_\varphi(t)=V_{\varphi h}(t)+V'_\varphi(t)$$

$$V_\varphi(t)=g_4(t)\cdot\left(H-R_0\right)\cdot sin(\varphi)+g_2(t)\cdot M_0\cdot\frac{E\cdot h_k\cdot r}{2\ \lambda^3\ D_k}$$

Ringkraft i meridianretning:

$$N_{\varphi h}(t) = \frac{1}{tan(\varphi)} \left(g_4(t) \cdot R_0 \cdot sin(\varphi) - g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2\ \lambda^3\ D_k}\right)$$

$$N'_{\varphi}(t) = \frac{1}{tan(\varphi)} \left(-g_4(t) \cdot H \cdot sin(\varphi)\right)$$

$$N_{\varphi m}(\varphi) = -\frac{\rho_c \cdot r \cdot h_k}{1 + cos(\varphi)}$$

$$N_{\varphi}(t) = N_{\varphi h}(t) + N'_{\varphi}(t) + N_{\varphi m}(\varphi)$$

$$N_{\varphi}(t) = \frac{1}{tan(\varphi)} \left(g_4(t) \cdot (R_0 - H) \cdot sin(\varphi) - g_2(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2\ \lambda^3\ D_k}\right) + N_{\varphi m}(\varphi)$$

Ringkraft i ringretning:

$$N_{\theta h}(t) = \lambda \left(2 \cdot g_1(t) \cdot R_0 \cdot sin(\varphi) + g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r}{2\ \lambda^3\ D_k}\right)$$

$$N'_{\theta}(t) = \lambda \left(-2 \cdot g_1(t) \cdot H \cdot sin(\varphi)\right)$$

$$N_{\theta m}(\varphi) = \rho \cdot h_k \cdot r_k \cdot \left(\frac{1}{1 + cos(\varphi)} - cos(\varphi)\right)$$

$$N_{\theta}(t) = N_{\theta h}(t) + N'_{\theta}(t) + N_{\theta m}(\varphi)$$

$$N_{\theta}(t) = \lambda \cdot \left(\left(2 \cdot g_1(t) \cdot (R_0 - H) \cdot \sin(\varphi)\right) + \left(g_4(t) \cdot M_0 \cdot \frac{E \cdot h_k \cdot r_k}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D_k}\right)\right) + N_{\theta m}(\varphi)$$