

Numerisk modellering av dam- spredning, varmeoverføring og brann i flytende naturgass (LNG)

Anders Welde Vikan

Master i energi og miljø

Oppgaven levert: Juni 2009

Hovedveileder: Ivar Ståle Ertesvåg, EPT

Biveileder(e): Rune N. Kleiveland, ComputIT AS

Oppgavetekst

Oppgaven bearbeides ut fra følgende punkter:

- Videre arbeid med modellering av spredning av LNG-dammer. Her bør viskøse krefter/skjærkrefter, varmeoverføring og fordamping være inkludert. Siktemålet er en modell som kan brukes som delmodell i et simuleringsprogram for turbulent strømning og forbrenning.
- Gjennomføre beregninger av varmeoverføring til LNG-dam og spredning av dammen, uten forbrenning. Om tiden tillater det, gjøre beregninger også med forbrenning. Diskuter resultatene.
- Diskuter eventuelle forbedringer av den matematiske modellen for håndtering av brann i LNG.

Oppgaven gitt: 30. januar 2009

Hovedveileder: Ivar Ståle Ertesvåg, EPT

Forord

Denne rapporten er resultatet av min masteroppgave ved NTNU, fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi, institutt for energi- og prosessteknikk, våren 2009.

Oppgaven har vært interessant og gitt meg mange faglige utfordringer underveis. Spesielt vil jeg nevne at det har vært interessant å anvende numerisk teori på en praktisk ingeniøroppgave. Jeg har programmert i Fortran og har vel fått erfart at dette kan være både frustrerende og tidkrevende til tider, men når en endelig lykkes og kommer fram til resultatet, oppleves det som veldig givende. Med denne oppgaven ender studietiden min ved NTNU og det er nesten rart å tenke på hvor fort disse årene har gått.

Jeg vil takke veilederen min Ivar Ståle Ertesvåg som har assistert meg med god veiledning. En takk går også til hele gjengen nede på ComputIT som jeg har trivdes å tilbringe tiden min med. Spesielt vil jeg få takke Rune N. Kleiveland som har vært svært imøtekommende med spørsmål underveis.

Trondheim, juni 2009

Anders Welde Vikan

Sammendrag

Denne oppgaven har sett på modellering av spredning og fordamping av dammer på faste underlag bestående av kryogene væsker. En modell basert på grunt vann-ligningene har blitt utledet. Grunt vann-ligningene består av: én kontinuitetsligning og to impulslikninger i henholdsvis x- og y-retning. Modellen tar høyde for varmeovergang, avdamping og todimensjonal spredning av dammen. I tillegg inkluderes viskøse krefter som påvirker spredningen.

Ligningene som oppstår fra modelleringen løses numerisk. For å gjøre dette har det blitt skrevet et numerisk program i Fortran 90. Programmet har blitt kalt CRYOSPREAD og de numeriske teknikkene dette programmet bygger på går gjennom i teksten. Det har også blitt gjennomført simuleringer med dette programmet. Simuleringene sammenlignes med henholdsvis forsøksdata og modeller i Kameleon FirEx (KFX).

Ved å sammenligne med forsøksdata fra spredning av vann, vises det at damspredningsmodellen i CRYOSPREAD er kapabel til å følge forsøksdataene rimelig bra. Dette er imidlertid svært avhengig av en turbulenskonstant som representerer mye av usikkerheten i modellen.

Sammenligning med spredningsmodellen av dammer i KFX viser tydelig forbedringen ved å løse impulslikninger. Et simuleringsforsøk med begge modellene har blitt gjennomført, der strømmingen i starten skal være dominerende i én retning. Resultatet viser at dammen i KFX-modellen med én gang sprer seg mer radielt og ikke har en dominerende retning for spredningen til forskjell fra den nye modellen i CRYOSPREAD.

Forsøksdata for avdampingsrater av metan og nitrogen uten spredning viser at avdampingsmodellen i CRYOSPREAD presterer rimelig bra for senere tider ($t > \sim 20s$), men har noe avvik i starten.

Sammenligning med avdamping i KFX uten spredning viser den kvalitative forskjellen i avdampingsratene som følger av forskjellige modeller for varmeoverføring. Total avdampemasse fra dammen i KFX er proporsjonal med tiden, mens den er proporsjonal med $t^{1/2}$ i CRYOSPREAD. Forskjellen består i at KFX ikke tar hensyn til kjøling av underlaget, mens modellen i CRYOSPREAD tar hensyn til dette gjennom en vertikal konduksjonsmodell i bakken.

Da det ikke lyktes å få tak i forsøksdata for spredning og avdamping av kryogener er ikke modellen tilstrekkelig validert, men vil kunne gi en god pekepinn for hva som skjer ved spredningsulykker av kryogener hvis antagelsene den bygger på er gode nok.

Innholdsfortegnelse

Forord.....	I
Sammendrag.....	III
Innholdsfortegnelse.....	V
Symbolliste.....	VII
1 Innledning	1
1.1 Motivasjon.....	1
1.2 Presisering av oppgavetekst og oppbygning.....	1
2 Spredning og avdamping av kryogener	3
2.1 Spredning av væsker.....	3
2.2 Avdamping.....	4
3 Matematisk modell	7
3.1 Grunt vann-ligningene.....	7
3.1.1 Massebevarelse.....	8
3.1.2 Impulsbevarelse.....	10
3.1.3 Modell-ligningene.....	12
3.2 Kildeledd i modelligningen.....	14
3.2.1 Viskøse ledd.....	14
3.2.2 Energibalanse.....	15
3.3 Varmeoverføring.....	18
3.3.1 Tilført varme fra luft.....	18
3.3.2 Strålingsvarme.....	18
3.3.3 Varme fra underlag.....	19
3.4 Noen egenskaper ved ligningene.....	22
3.4.1 Karakteristikker og egenverdier.....	22
3.4.2 Sprang.....	24
3.4.3 Ekspansjonsbølger.....	25
4 Numerisk implementering	27
4.1 Forbedring av numerisk metode.....	27
4.1.1 Problemer med eksisterende metode.....	29
4.1.2 Forbedring av beregning av fluksfunksjonen.....	31
4.1.3 Runge-Kutta-metode.....	35
4.2 Implementering av viskøse krefter.....	37
4.2.1 Semi-implisitt metode.....	37
4.3 Numerisk implementering i 2D.....	41
4.3.1 Nettverk.....	41
4.3.2 Diskretisering og utregning av fluksfunksjoner.....	41
4.3.3 Kildeledd.....	42
4.3.4 Valg av tidsskritt.....	43
4.3.5 Randbetingelser.....	44
4.3.5 CRYOSPREAD.....	44
4.3.6 Noen resultater ved dambrudd i 2D.....	47
5 Simuleringer og resultater	49
5.1 Sammenligning mellom spredningsmodell og forsøk.....	49
5.1.2 Forsøket.....	49
5.1.3 Beskrivelse.....	49

5.1.4	Oppsett av modell.....	51
5.1.5	Resultat.....	51
5.2	Sammenligning med avdampingsrater fra eksperiment.....	53
5.2.1	Forsøket.....	53
5.2.2	Sammenligning med CRYOSPREAD.....	53
5.3	Sammenligning med dam-spredningsmodell i Kameleon FirEx (KFX).....	55
5.3.1	Modell i KFX.....	55
5.3.2	Oppsett i KFX.....	56
5.3.3	Oppsett i CRYOSPREAD.....	57
5.3.4	Resultater.....	58
5.4	Sammenligning med avdampningsmodell i KFX.....	60
5.4.1	Modell i KFX.....	60
5.4.2	Simulering og resultat.....	61
5.5	Simulering av lekkasje fra tank.....	62
5.5.1	Scenario.....	62
5.5.2	Oppsett av modell.....	62
5.5.3	Resultater.....	63
6	Diskusjon	67
6.1	Dam-spredning.....	67
6.2	Avdamping.....	68
6.3	Numerisk implementering.....	68
6.4	Simuleringer og observasjoner.....	69
7	Konklusjon og forslag til videre arbeid	73
7.1	Konklusjon.....	73
7.2	Forslag til videre arbeid.....	74
	Referanseliste	75
	Vedlegg	77
A	Konstanter som brukes i modellen.....	77
B	Konvektiv varmeovergangstall fra luft.....	78
C	Diskretisering av ligningene.....	79
D	Hastighet for lekkasje.....	81

Symbolliste

Latinske bokstaver

x, y, z	Koordinater i rom - [m]
h_z	Damhøyde - [m]
g	Gravitasjonskonstanten - [m/s ²]
\mathbf{v}	Tredimensjonal hastighetsvektor - [m/s]
\mathbf{v}_h	Hastighetsvektor i horisontal retning - [m/s]
\mathbf{V}	Horisontal hastighetsvektor midlet i z-retning - [m/s]
u	Hastighetskomponent i x-retning - [m/s]
v	Hastighetskomponent i y-retning - [m/s]
\dot{m}''_{ford}	Massefluks per sekund - [kg/m ² s]
\dot{h}''_{ford}	Regresjonshastighet - [m/s]
K	Kraftvektor - [N]
p	Trykk - [Pa]
q	Bevart variabel ($h_z, h_z u, h_z v$)
F	Fluksfunksjon i x-retning
G	Fluksfunksjon i y-retning
S	Kildeledd
c_{lam}	Laminær friksjonskonstant
c_{turb}	Turbulent friksjonskonstant
u'	Hastighetsskala - [m/s]
l'	Lengdeskala - [m]
\dot{q}''	Varmefluks - [W/m ²]
u_e	Indre energi - [J/kg]
h_e	Entalpi - [J/kg]
h_{fg}	Fordampingsvarme - [J/kg]
h_u	Varmeovergangstall (underlag/dam) - [W/m ² K]
h_a	Varmeovergangstall (luft) - [W/m ² K]
T	Temperatur - [K]
r	Radius dam - [m]
k	Termisk konduktivitet - [W/mK]
Fr	Froudetall
Re	Reynolds-tall
Pr	Prandtl-tall

Greske bokstaver

α	Termisk diffusivitet [m ² /s]
ρ	Massetetthet [kg/m ³]
τ_f	Spenning [N/m ²]
τ	Total koketid [s]
ν	Kinematisk viskositet [m ² /s]
μ	Dynamisk viskositet [kg/ms]

Forkortesler

FVM

fra eng. : Finite Volume Method (endelig volum-metoden)

KFX

Kameleon FirEx

LNG

fra eng. : Liquefied Natural Gas

1 Innledning

1.1 Motivasjon

LNG har en stor økonomisk verdi og etterspørselen rundt om i verden øker stadig. I takt med etterspørselen øker risikoen for ulykker da stadig større volumer blir tatt hånd om på omlastningsterminaler omkring i verden. Et utslipp på en av disse omlastingsterminalene med påfølgende antenning, kan bli et fatalt scenario med tap av menneskeliv og store materielle og økonomiske tap. Derfor er det viktig å kunne forutsi konsekvensene av et LNG-utslipp. Eksperimenter i den skalaen som trengs er svært dyre, og derfor er det viktig å kunne simulere numerisk. God innsikt i de fysiske prosessene som inngår i en LNG-brann er nødvendig for å kunne modellere og simulere utslippsulykker.

LNG lagres ved svært lave temperaturer. Et utslipp vil derfor starte å koke med en gang det kommer i kontakt med omgivelsene. En eventuell LNG-brann er svært avhengig av masseraten som damper av. Denne er i sin tur svært avhengig av kontaktflaten mot underlaget. Derfor er det avgjørende å kunne modellere spredningen av dammen med god nøyaktighet. Mange modeller for dam-spredning som er tilgjengelige er basert på grunt vann-ligningene. Ofte antar disse modellene at dammen spres sirkulært. Dette vil antageligvis ikke være tilfelle i de fleste utslippsulykker. En lekkasje i siden av en tank vil for eksempel gi utslippet en bevegelsesmengde som er dominert av en retning i starten. Geometriske obstruksjoner på utslippsstedet forårsaker også at utslippet ikke blir symmetrisk. Det er derfor viktig å utvikle modeller som kan ta hånd om dette.

1.2 Presisering av oppgavetekst og oppbygning

Denne masteroppgaven bygger videre på det arbeidet som ble gjort i prosjektet høsten 2008. I dette prosjektet ble grunt vann-ligningene undersøkt og implementert numerisk i én dimensjon¹. Oppgaven bearbeides ut fra punktene satt opp i oppgaveteksten og fokuserer hovedsakelig på å utvikle en modell for spredning og fordamping av dammer bestående av kryogene væsker.

Det har ikke blitt foretatt beregninger med forbrenning. Selv om LNG består hovedsakelig av metan (~90 %) og etan (~10 %), har det kun blitt sett på dammer som består av én komponent. Dette er en naturlig innfalsvinkel da en ønsker å se mer inngående på spredning av dammer i kombinasjon med avdamping. En tokomponentmodell ble utviklet i Gåserud [21] og kan eventuelt inkluderes senere. Selve oppgaveteksten er inndelt slik at; kapittel 2 gir en oversikt over de viktigste fysiske mekanismene ved spredning og varmeoverføring, kapittel 3 tar for seg utviklingen av den matematiske modellen, kapittel 4 tar for seg de numeriske

¹ Når det refereres til dimensjoner i denne oppgaven, vil dette være dimensjoner i rom. Tiden er ikke regnet med.

metodene som benyttes, mens kapittel 5 presenterer resultater fra simuleringer. Resultatene diskuteres i et eget diskusjonskapittel, mens konklusjon og forslag til videre arbeid befinner seg i det siste kapitlet. Fortran-koden til CRYOSPREAD vil være elektronisk vedlagt denne rapporten.

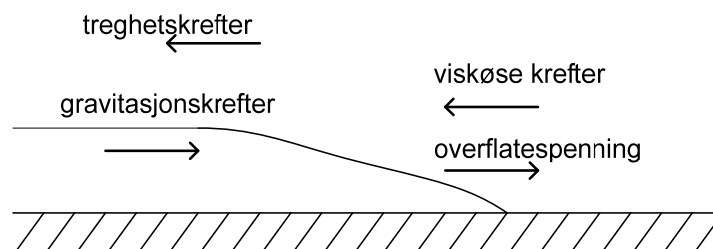
2 Spredning og avdamping av kryogener

For å klare å modellere spredning og avdamping av kryogene væsker er det viktig å skaffe til veie et overblikk over de viktigste fysiske fenomenene i prosessen. Dette kapitlet tar sikte på å beskrive disse.

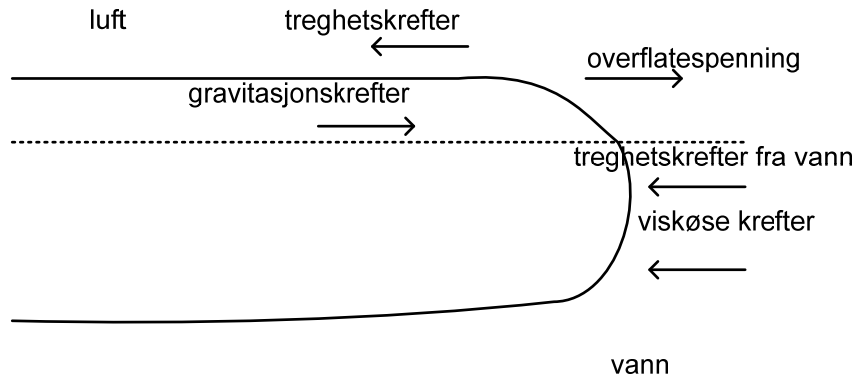
2.1 Spredning av væsker

Væskefasen kan ses på som inkompressibel slik at spredningen vil være styrt av de inkompressible bevarelseslovene for masse og impuls. Hoveddrivkraften for en spredning vil være gravitasjonskraften. I utgangspunktet virker denne kraften nedover, men pga forskjellig høyde på overflaten til dammen vil denne kraften være opphavet til en trykkgradient i horisontal retning. Denne kraften vil avta med tykkelsen på dammen. Altså er dette en svært dominant kraft i begynnelsen av en dam-spredning når høyden er relativt stor. En annen drivende kraft er ubalansen i overflatespenningen mellom væske/luft/underlag. *Briscoe og Shaw* [18] skriver at denne kraften vil som regel virke i spredningsretningen og være svært liten, men i motsetning til den gravitasjonsinduserte trykkgradienten vil ikke denne kraften avta med tykkelsen på dammen. Slik kan den komme til å ta over for gravitasjonskraften som den drivende kraften i et senere stadium for spredningen når dammen blir svært tynn.

De viskøse kreftene vil virke mot spredningen. Disse kreftene vil øke når dammen blir tynnere og vil i en senere fase bli viktig å ta høyde for. For spredning på vann vil dammen også oppleve å måtte skyve på det omkringliggende vannet fordi dammen synker litt ned i vannet, altså vil den være utsatt for treghetskrefter fra vannet. Figur 2.1 og figur 2.2 viser krefter som virker på dammen både for spredning på et fast underlag og på vann.



Figur 2.1: Skisse over krefter som virker på dammen på et fast underlag. Krefter fra vind er ikke tatt med.



Figur 2.2: Skisse over krefter som virker på dammen for utslipp på vann. Krefter fra vind og havstrømninger er ikke tatt med.

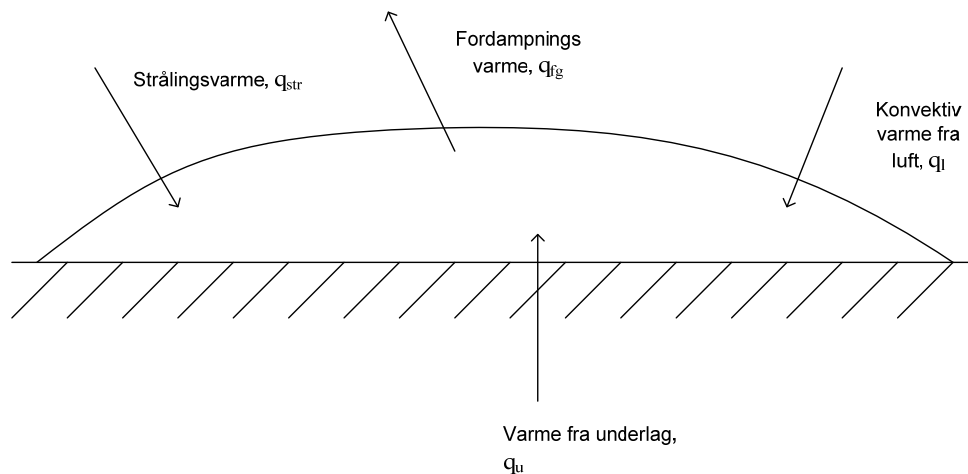
Det er vanlig å dele inn væskespredningen i regimer etter hvilke krefter som er viktige i de forskjellige stadiene. Dette gir opphav til tre forskjellige regimer:

- 1) Gravitasjon/impuls – regimet
- 2) Gravitasjon/friksjon – regimet
- 3) Overflatespenning/friksjon – regimet

Det er viktig å merke seg at alle kreftene virker i alle stadiene og at det derfor er glidende overganger mellom regimene. Regimene sier bare noe om hvilke krefter som er størst som virker i spredningsretningen og størst som virker mot spredningsretningen.

2.2 Avdamping

Avdampningen er bestemt av mengden av tilført energi til dammen. Den består av: strålingsvarme fra omgivelser, fordampningsvarme (entalpi som følger med avdampnet gass), konvektiv varme fra luft og varme fra underlaget. Strengt tatt består den også av konduktiv varmeovergang fra luften, men denne vil i de aller fleste tilfeller svært liten.



Figur 2.3: Figuren viser en energibalanse for en dam.

Ifølge *Briscoe og Shaw* [18], vil den dominerende varmekilden for utslipp på et fast underlag uten brann være varme lagret i bakken. En må huske på at ettersom bakken kjøles ned blir denne varmeovergangen mindre etter hvert som tiden går og til slutt kan andre varmekilder også bli viktige. For utslipp på land kan en argumentere for at varmeovergangen mellom dammen og bakken vil være bestemt av konduksjon nede i bakken. I starten vil avdampningen av den kryogene væsken være kontrollert av varmeovergang over en tynn gassfilm mellom bakken og væsken. Dette er fordi bakken og dammen har så forskjellig temperatur til å begynne med at væsken koker i filmkoke-regimet. Forsøk tyder imidlertid på at underlaget blir såpass raskt nedkjølt at kokeprosessen går tilbake til kimkoke-regimet i løpet av kort tid etter at det har blitt dekt av den kryogene væsken (~ 10 s [25]). Det vil si at temperaturdifferansen mellom dammen og underlaget blir såpass lav at gassfilmen bryter sammen og det blir svært god termisk kontakt mellom dammen og underlaget. Varmefluksen er dermed i all hovedsak bestemt av varmeledningen nede i bakken. Det gjøres oppmerksom på at et slikt forsøk har blitt gjennomført av *Reid og Wang* [20]. De konkluderer med at varmeoverføringen fra bakken er styrt av varmeledning i bakken og i mindre grad av konvektiv varmeovergang. Varmeovergangen er altså svært avhengig av de konduktive egenskapene til underlaget og derfor også avhengig av typen underlag. For sand som underlag er det f. eks. mulig at noe av den kryogene væsken trenger ned i bakken slik at den varmeledende kontaktflaten øker. I tilfeller der sanden/jorda også er fuktig kan isdannelse hindre inntrengning i bakken og varmeledningen blir ikke like stor. Er bakken imidlertid tilstrekkelig fuktig, kan faseovergangen fra vann til is ned i bakken forårsake økt varmeovergang. Dette er eksempler på fenomener som kan gjøre modelleringen ekstra komplisert.

Hvis den avdampede gassen starter å brenne, vil strålingen fra flammen være svært avgjørende for avdampningen.

For utslipp på vann er varmeovergangen noe annerledes. Her regner en med at det vil være nok bevegelse i vannet slik at en mer eller mindre konstant temperaturdifferanse mellom dammen og vannet kan opprettholdes. En mekanisme som opprettholder denne bevegelsen er at vann som gir fra seg varme til dammen vil avkjøles. Dermed vil dette vannet få en høyere massetetthet enn det omkringliggende vannet og synke nedover. Den konstante temperaturdifferansen opprettholdes ikke i like stor grad for utslipp av LNG eller andre

kryogene væsker som består av to eller flere komponenter. Ettersom dammen skifter sammensetning skifter den også kokepunkt og temperaturdifferansen mellom vannet og dammen kan variere. For LNG kan dette medføre at dammen veksler mellom å koke i filmkoke-regimet og regimet for overgangskoking, noe som gjør at varmekraften også varierer. Gåserud [21] skriver mer om dette i sin masteroppgave. Varmeovergangen kan også kompliseres ytterligere ved at det dannes et islag under dammen samt at det forekommer turbulent miksing mellom de to sjiktene.

3 Matematisk modell

For å regne på dam-spredning er det nødvendig med et sett av ligninger som gjengir fysikken ved dam-spredningen på en god måte. Ved å anvende fullskala Navier-Stokes ligninger kan en regne svært nøyaktig på dam-spredningen. Imidlertid hvis spredningsmodellen er en undermodell i et stort beregningsprogram, blir det uhensiktsmessig å bruke store regneressurser på å løse en avansert modell for spredningen. Særlig hvis en enklere og mindre ressurskrevende modell er god nok. Hva som er ”godt nok” er avhengig av hvor stor grad av nøyaktighet som kreves i det aktuelle problemet. Å avgjøre hvor god modellen er, kan bare avgjøres ved å sammenligne med eksperimenter eller andre verifiserte modeller. I denne oppgaven er det valgt å bruke modeller fra grunt vann-teorien.

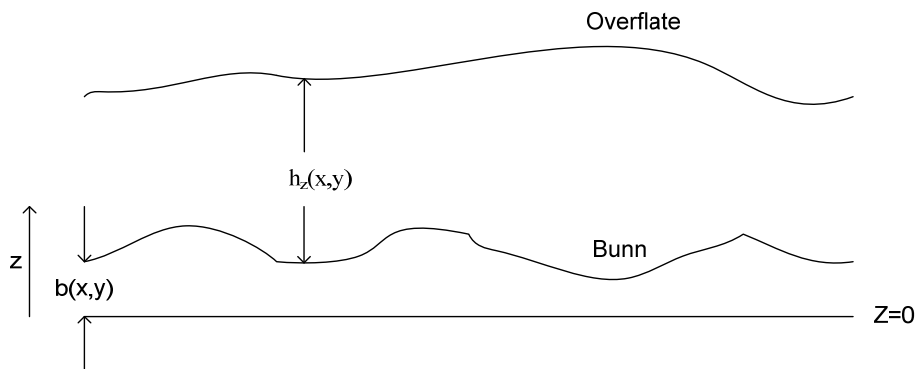
3.1 Grunt vann-ligningene

I mange situasjoner har det fysiske fenomenet en betrakter forskjellig skala i forskjellige retninger. For eksempel kan et fysisk fenomen ha en lengdeskala i z-retning, L_z , som er mye mindre enn lengdeskalaen i horisontal retning, L_H . Altså:

$$L_z \ll L_H \quad (3.1)$$

For slike ”tynne” fenomener er det mulig å forenkle modellene som i utgangspunktet er tredimensjonale ved å redusere dimensjonen i modelligningene. Slik kan en også komme fram til grunt vann-ligningene. Utledningen for grunt vann-ligningene i dette avsnittet følger utledningen i Krogstad [16]. Denne framgangsmåten har blitt valgt fordi den tar utgangspunkt i de grunnleggende bevarelseslovene for fluider og derfor gir en mer fysisk innfallsvinkel. Alle strømningsfenomener kan beskrives ut fra at masse, impuls (bevegelsesmengde) og energi er bevart. Mer matematiske utledninger som tar utgangspunkt i Navier-Stokes ligninger kan blant annet finnes i Toro [17].

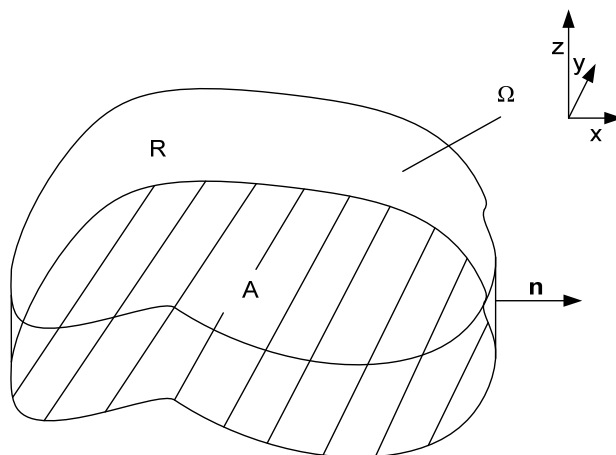
Figur 3.1 viser et utsnitt av en dam-spredning over et underlag, der h_z er posisjonen til overflaten og b er høyden til underlaget. Grunt vann-ligningene blir i de neste avsnittene utledet ut fra de grunnleggende bevarelseslovene. Dimensjonen blir redusert ved å introdusere midlede størrelser i z-retningen. Det vil si størrelser som er midlet fra $x = b$ til $z = h_z$.



Figur 3.1: Utsnitt av strømning over et variabelt underlag.

3.1.1 Massebevarelse

En massebevarelse kan settes opp for kontrollvolumet i figur 3.2. Denne må også ta høyde for at masse kan fordampe fra overflaten. Bunnflaten A regnes som tett.



Figur 3.2: Utsnitt av et volum Ω i en dam. A er bunnflaten, R er sideflaten mens \mathbf{n} er enhetsnormalen til sideflaten. ∂A og $\partial\Omega$ viser henholdsvis til randen til bunnflaten A og overflaten til volumet Ω .

Massebevarelsen på integralform tar formen:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \iint_A \dot{m}''_{ford} \, dx dy \quad (3.2)$$

Her er \mathbf{v} hastighetsvektoren og $\dot{m}''_{ford} = \rho \dot{h}_{ford}$ massefluksen som forlater volumet som følger av avdamping. Massefluksen kan også uttrykkes ved hjelp av massetettheten og regresjonshastigheten \dot{h}_{ford} . Videre antas det at massetettheten er konstant. Da kan (3.2) skrives:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \iint_A \dot{h}_{ford} dx dy \quad (3.3)$$

Første leddet i (3.3) gir:

$$\iiint_{\Omega} d\Omega = \iint_A \int_{z=b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} dz dx dy = \iint_A h_z dx dy \quad (3.4)$$

Pga det strømmer kun gjennom veggen R og ikke gjennom toppen og bunnen av Ω tar det andre leddet i (3.3) formen ($d\sigma = dz ds$):

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_R \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial A} \int_{z=b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dz ds \quad (3.5)$$

Det antas at \mathbf{v} kun har horisontale komponenter slik at all strømmingen foregår i x- og y-retning. Selv om det i virkeligheten ikke er slik, er det naturlig å anta at den vertikale hastighetskomponenten er svært liten i forhold til de horisontale komponentene for et tynt lag. Om dette settes inn i ledd (3.5), kan (3.3) skrives:

$$\iint_A h_z dx dy + \int_{\partial A} \int_{z=b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} dz ds = - \iint_A \dot{h}_{ford} dx dy \quad (3.6)$$

Senket skrift h viser til *horisontalkomponenten*. Det andre leddet på venstre side av (3.6) er et integral over den horisontale hastighetskomponenten. Denne kan regnes ut hvis en definerer den horisontale middelhastigheten gitt ved:

$$\mathbf{V}(x, y, t) = \frac{1}{h_z(x, y, t)} \int_{z=b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} \mathbf{v}_h(x, y, z, t) dz \quad (3.7)$$

Videre settes (3.7) inn i (3.6):

$$\frac{d}{dt} \iint_A h_z dx dy + \int_{\partial A} h_z \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = - \iint_A \dot{h}_{ford} dx dy \quad (3.8)$$

Ved hjelp av divergensteoremet kan det andre leddet også omformes til et integral over bunnflaten A:

$$\frac{d}{dt} \iint_A h_z \, dx dy + \iint_A \nabla(h_z \mathbf{V}) \, dx dy = - \iint_A \dot{h}_{ford} \, dx dy \quad (3.9)$$

slik at en kommer over på differensialformen:

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} + \nabla(h_z \mathbf{V}) = -\dot{h}_{ford} \quad \text{der} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

3.1.2 Impulsbevarelse

Ved hjelp av impulsbevarelse for et stasjonært kontrollvolum, kan følgende ligning settes opp for volumet Ω i figur 3.2. Dette er egentlig ikke noe annet en Newtons 2. lov for et kontrollvolum og kan settes opp ved bruk av Reynoldsteoremet for et stasjonært kontrollvolum [12].

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = \sum \mathbf{K} \quad (3.11)$$

Det første leddet svarer til lagring av impuls i kontrollvolumet, mens det andre leddet er impuls som tilføres med strømmingen over kontrollvolumgrensen. Høyre side består av ytre krefter som virker på kontrollvolumet. Eksempel på slike krefter er: gravitasjonskrefter, viskøse krefter og trykkrefter.

Fordi massetettheten er konstant kan (3.11) også skrives:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \mathbf{v}_h \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v}_h (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = \frac{1}{\rho} \sum \mathbf{K} \quad (3.12)$$

Her antas det som tidligere at strømmingen er horisontal. Det første leddet kan enkelt omskrives ved hjelp av uttrykket for den horisontale middelhastigheten (3.7):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \mathbf{v} \, d\Omega = \frac{d}{dt} \iint_A \int_{b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} \mathbf{v}_h \, dz \, dx dy = \frac{d}{dt} \iint_A h_z \mathbf{V} \, dx dy \quad (3.13)$$

Leddene $\mathbf{v}_h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ vil her skape litt mer problemer etter som en ikke kan erstatte middelverdien av et produkt med et produkt av de enkelte middelverdiene. Det er ingen enkel vei ut av dette, men ifølge Krogstad [16] kan en skrive horisontalkomponenten som en sum av middelhastigheten og et avvik fra denne:

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{avvik} \quad (3.14)$$

der ifølge definisjonene på \mathbf{V} :

$$\int_{z=b(x,y)}^{h_z(x,y,t)+b(x,y)} \mathbf{v}_{avvik} dz = 0 \quad (3.15)$$

Med (3.15) kan det andre leddet i impulsbevarelsen (3.12) dermed uttrykkes:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v}_h (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \iint_R \mathbf{v}_h (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial A} \int_{z=b(x,y)}^{h_z(x,y,t)+b(x,y)} \mathbf{v}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) dz ds \\ &= \int_{\partial A} ds \int_{z=b(x,y)}^{h_z(x,y,t)+b(x,y)} (\mathbf{V} + \mathbf{v}_{avvik}) ((\mathbf{V} + \mathbf{v}_{avvik}) \cdot \mathbf{n}) dz \\ &= \int_{\partial A} h_z \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\partial A} \left(\int_{z=b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} \mathbf{v}_{avvik} (\mathbf{v}_{avvik} \cdot \mathbf{n}) dz \right) ds \end{aligned} \quad (3.16)$$

To ledd forsvinner i den siste overgangen ved hjelp av (3.15). Det siste leddet i (3.16) flyttes over på høyre side av (3.12) og modelleres med en turbulensviskositet. Dette blir gjennomgått i avsnitt 3.2.1.

Kreftene som virker på kontrollvolumet er: gravitasjonskrefter, trykkrefter og viskøse friksjonskrefter. Impulsutbytte med et eventuelt vindfelt over dammen blir ikke tatt hensyn til i den oppgaven, men modellen kan enkelt modifiseres i ettertid for inkludere dette.

Det horisontale bidraget fra trykkreftene virker normalt på flaten R i figur 3.2, altså i motsatt retning av enhetsnormalen \mathbf{n} . En antar at trykket i z -retningen er hydrostatisk fordelt. Dermed kan det horisontale bidraget fra trykkraften uttrykkes:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p &= \iint_R p \cdot (-\mathbf{n}) d\sigma = - \iint_R (p_a - \rho g (h_z + b - z)) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_{\partial A} \int_{z=b(x,y)}^{b(x,y)+h_z(x,y,t)} (\rho g (h_z + b - z)) \cdot \mathbf{n} dz ds = \rho g \int_{\partial A} \frac{1}{2} h_z^2 \cdot \mathbf{n} ds = \rho g \iint_A \nabla \left(\frac{1}{2} h_z^2 \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dette leddet blir ofte omtalt som gravitasjonsleddet selv om det egentlig er et trykkledd. I den siste overgangen har divergensteoremet blitt brukt.

Gravitasjonskreftene (som massekraft) vil kun gi bidrag i horisontal retning hvis underlaget dammen strømmer på har helning, dvs. $\nabla b(x,y) \neq 0$. Ved å dekomponere gravitasjonen kan det vises at denne kraften kan uttrykkes:

$$\mathbf{K}_g = \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{S}_g d\Omega = \iint_A \rho h_z \mathbf{S}_g dx dy, \quad \mathbf{S}_g = \begin{pmatrix} -gb_x \\ -gb_y \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Der b_x og b_y er henholdsvis den partiellderiverte i x- og y-retning av profilen til underlaget.

De viskøse friksjonskreftene som virker på Ω kan uttrykkes:

$$-\mathbf{K}_f = \iint_A \boldsymbol{\tau}_f \, dx dy = \iint_A \begin{pmatrix} \tau_{f,x} \\ \tau_{f,y} \end{pmatrix} dx dy \quad (3.20)$$

Dette er viskøse krefter som er et resultat av en midling i z-retningen. Det siste leddet fra (3.16) blir også bakt inn her. Disse vil bli gjennomgått mer i detalj senere

Alle disse resultatene innsatt ledd for ledd i (3.12) med hjelp av divergensteoremet resulterer i:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_A h_z \mathbf{V} \, dx dy + \iint_A \mathbf{V} (\nabla (h_z \mathbf{V})) \, dx dy \\ = \iint_A \nabla \left(\frac{1}{2} g h_z^2 \right) \, dx dy + \iint_A h_z \mathbf{S}_g \, dx dy - \iint_A \frac{\boldsymbol{\tau}_f}{\rho} \, dx dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

Derfor blir differensialformen av impulslikningen:

$$\frac{\partial (h_z \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla (h_z (\mathbf{V}) \mathbf{V}) + \nabla \left(\frac{1}{2} g h_z^2 \right) = h_z \mathbf{S}_g - \frac{\boldsymbol{\tau}_f}{\rho} \quad (3.22)$$

3.1.3 Modell-ligningene

Impulslikningen (3.22) dekomponert i x- og y-retning sammen med kontinuitetslikningen utgjør til sammen følgende sett av partielle differensiallikninger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_z u) + \frac{\partial}{\partial y} (h_z v) &= -\dot{h}_{ford} \\ \frac{\partial}{\partial t} (h_z u) + \frac{\partial}{\partial x} (h_z u^2 + \frac{1}{2} g h_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (h_z v u) &= -F_{f,x} - g h_z b_x \\ \frac{\partial}{\partial t} (h_z v) + \frac{\partial}{\partial x} (h_z u v) + \frac{\partial}{\partial y} (h_z v^2 + \frac{1}{2} g h_z^2) &= -F_{f,y} - g h_z b_y \end{aligned} \quad (3.23)$$

der

$$\mathbf{F}_f = \frac{\boldsymbol{\tau}_f}{\rho} = \begin{pmatrix} F_{f,x} \\ F_{f,y} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Eller på kompakt form:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(\mathbf{q})\} + \frac{\partial}{\partial y} \{\mathbf{G}(\mathbf{q})\} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \quad (3.25)$$

der

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_z \\ h_z u \\ h_z v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_z u \\ h_z u^2 + \frac{1}{2} g h_z^2 \\ h_z u v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_z v \\ h_z v u \\ h_z v^2 + \frac{1}{2} g h_z^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{og } \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{h}_{ford} \\ -F_{f,x} - g h_z b_x \\ -F_{f,y} - g h_z b_y \end{pmatrix}.$$

Her er \mathbf{q} den konserverte variabelen, \mathbf{F} og \mathbf{G} er *fluksfunksjoner*, mens \mathbf{S} inneholder kildeleddene.

Settet (3.23) vil utgjøre modell-ligningene for dam-spredning i denne oppgaven og vil bli løst numerisk. Den første ligningen er kontinuitetsligningen, mens de to andre ligningene er impulslikningene i henholdsvis x- og y-retning. Impulslikningene uttrykker en balanse mellom impuls krefter, trykkrefter, gravitasjonskrefter og viskøse krefter. Ligningene er mindre ressurskrevende å løse enn Navier-Stokes ligninger og vil forhåpentligvis utgjøre en god modell for spredning av væsker. Modellen har også potensial for å beskrive spredning av tunge gasser.

Forutsetninger for modellen er:

- Dammens diameter er mye større enn høyden til dammen
- Strømningen forekommer i all hovedsak i horisontal retning, dvs. at den vertikale hastighetskomponenten er mye mindre enn de horisontale hastighetskomponentene (Stemmer bra for grunne dammer).
- Trykkfordelingen i vertikal retning er tilnærmet hydrostatisk

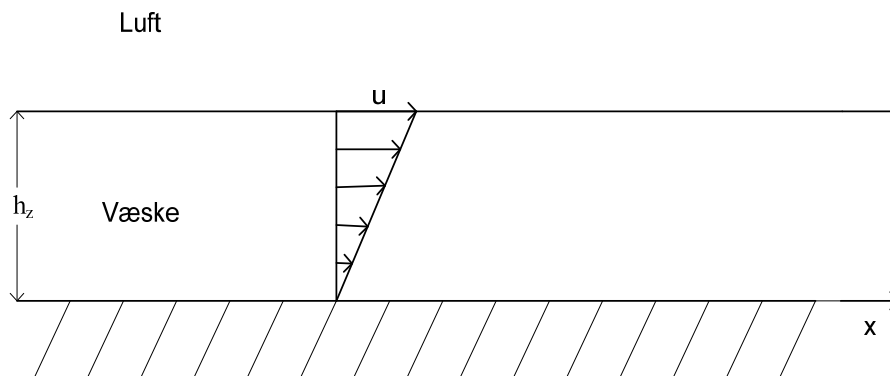
3.2 Kildeledd i modelligningen

3.2.1 Viskøse ledd

Uttrykket for den viskøse motstanden (3.20) vil være avhengig av om strømmingen lokalt er laminær eller turbulent. *Webber og Jones* [8] gir uttrykk for \mathbf{F} både i laminær og turbulent strømning gitt av kinematisk viskositet, en laminær friksjonskonstant c_{lam} og en turbulent friksjonskoeffisient c_{turb} .

$$\mathbf{F}_{lam} = c_{lam} \nu \frac{\mathbf{V}}{h_z} \qquad \mathbf{F}_{turb} = c_{turb} |\mathbf{V}| \mathbf{V} \qquad (3.26)$$

I grunt vann – ligningene har en ingen informasjon om hastighetsgradienten i z-retning. Dette følger av utledningen der en antar 2-D strømning. For å komme fram til (3.26) har *Webber og Jones* derfor antatt et lineært hastighetsprofil i z-retning som vist i figur 3.3.



Figur 3.3: Antatt hastighetsprofil for spredning over et fast underlag. Her fremstilt i x-retning.

For laminær strømning antas det at de viskøse skjærspenningene er proporsjonale med hastighetsgradienten i z-retning. De viskøse skjærspenningene er også avhengig av gradienter i andre retninger, men en regner med at bidraget fra slike gradienter vil være mindre enn feilen i å linearisere z-gradienten. En kunne eventuelt sett på andre hastighetsprofiler i z-retning, men en har tro på at dette vil være godt nok. Den laminære skjærspenningen uttrykkes:

$$\boldsymbol{\tau}_{lam} = \begin{pmatrix} \tau_{lam,x} \\ \tau_{lam,y} \end{pmatrix} \sim \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \mu \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \mu \frac{\mathbf{V}}{h_z} \qquad (3.27)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{lam} \sim \frac{\mu \mathbf{V}}{\rho h_z} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F}_{lam} = c_{lam} \frac{\nu \mathbf{V}}{h_z} \qquad (3.28)$$

For turbulent strømning blir utledningen noe annerledes. De turbulente spenningene kan uttrykkes analogt til (3.27) ved hjelp av en turbulensviskositet. En slik modell kan være Prandtls blandingsvegsmodell og kan finnes nærmere forklart i f. eks Ertesvåg [9]. Her er hastighets- og lengde- skalaene valgt noe annerledes og kan ses på som en analog til en blandingsvegsmodell.

$$\boldsymbol{\tau}_{turb} = \begin{pmatrix} \tau_{turb,x} \\ \tau_{turb,y} \end{pmatrix} \sim \mu_{turb} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \mu_{turb} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \mu_{turb} \frac{\mathbf{V}}{h_z} \quad (3.29)$$

På samme måte som den molekylære viskositeten kan uttrykkes som et produkt mellom en lengdeskala og en hastighetsskala, kan den turbulente viskositeten uttrykkes som produktet mellom en lengdeskala l' og en hastighetsskala u' [9]. Disse skalaene er karakteristiske for turbulensen. Med $u' \sim |\mathbf{V}|$ og $l' \sim h_z$ kan turbulensviskositeten skrives:

$$\mu_{turb} \sim \rho l' u' \sim \rho h_z |\mathbf{V}| \quad (3.30)$$

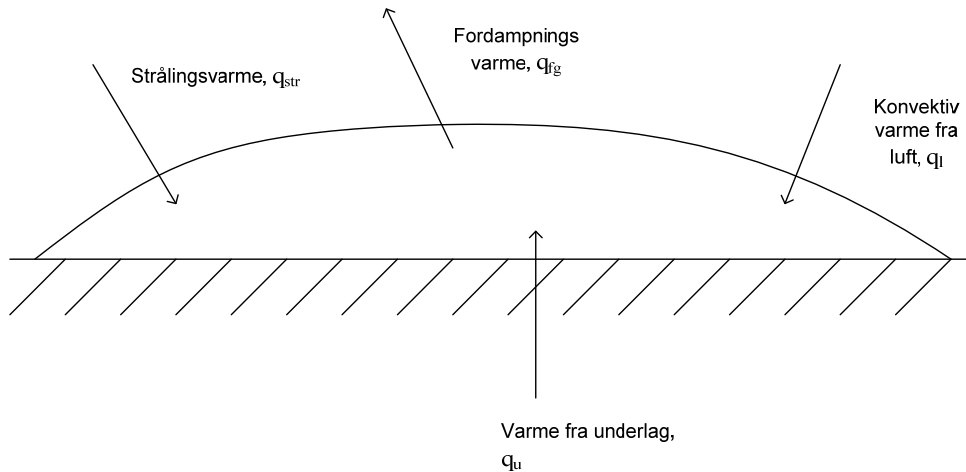
$$\Rightarrow \mathbf{F}_{turb} \sim |\mathbf{V}| \mathbf{V}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{turb} = \nu_{turb} \frac{\mathbf{V}}{h_z} \quad \text{der} \quad \nu_{turb} = c_{turb} h_z |\mathbf{V}| \quad (3.31)$$

Fastsetting av størrelsen på friksjonskonstantene ser ut til å være noe usikker. Flere kilder, deriblant *Brandeis and Ermak* [10], erkjenner at disse må bestemmes fra empiriske data. Imidlertid skriver *Webber mfl* [7] at den laminære friksjonskonstanten er av størrelsesorden 1 og at det ser ut til at for $c_{lam} = 3.0$ klarer spredningsmodellen deres å produsere resultater svært lik resultater fra smøreteorien for et glatt underlag. Videre skriver de at den turbulente friksjonskonstanten, c_{turb} , er av størrelsesorden 10^{-3} , men det er vanskelig å fastsette noen bestemt verdi etter som denne er avhengig av svært mange faktorer. De nevner spesielt ruhetshøyden på underlaget.

3.2.2 Energibalanse

For å bestemme avdampningsraten er det nødvendig å sette opp en form for energibalanse for væskedammen. Hissong [11] benytter en enkel energibalanse for dammen som helhet som vist i figur 3.4. En tilsvarende energibalanse for hvert enkelt kontrollvolum har blitt valgt i dette arbeidet fremfor f. eks å løse en komplett energiligning for væskefasen. Dette er blitt valgt for å få en enkel avdampningsmodell som er enkel å implementere med spredningsmodellen. En regner også med at en slik metode vil være god nok for utslipp i stor skala.



Figur 3.4: Varmebalanse for dammen.

Når et uttrykk for fordampningsraten er kjent, vil kontinuitetsligningen få et sluk som vist tidligere (3.10):

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_z u) + \frac{\partial}{\partial y}(h_z v) = -\dot{h}_{ford}$$

Sluket er altså hvor mye høyden synker per sekund som følge av avdampningen, også kalt regresjonshastigheten. For å finne et uttrykk for dette kan det settes opp en varmebalanse for Ω (se figur 3.2). Varmebalansen tar hensyn til entalpiflukser som følger med masse over flaten R , entalpiflukt som forlater Ω pga massetransport (avdampning) og tilført energi. Tilført energi består igjen av strålingsvarme, varme fra underlag og varme fra luft. Bevaringen settes opp ut fra Reynolds transportteorem.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho u_e d\Omega = \iint_R \dot{\mathbf{q}}'' \cdot (-\mathbf{n}) dS + \iint_A (\dot{q}''_{tilført} - \dot{q}''_{ford}) dA \quad (3.32)$$

Her er u_e er indre energi, $\dot{\mathbf{q}}''$ er varmekraft over sideflaten R , $\dot{q}''_{tilført}$ er varmekraft tilført fra omgivelsene og \dot{q}''_{ford} er energitap som følger med massen som damper av. Kilder som følge av f. eks. dissipasjon og kjemiske reaksjoner er ikke tatt hensyn til.

I denne oppgaven antas det at hele dammen har uniform temperatur. Dette er selvfølgelig en forenkling, men kan forsvares når en ser på LNG eller kryogener som lagres svært nært opptil kokepunktet. Da modellerer en det slik at dammen ligger på kokepunktet under hele utslippet. Dette vil medføre at temperaturen ikke har noen romlig temperaturgradient og ifølge Fouriers lov vil det ikke være konduksjon i dammen pga ingen drivende temperaturgradient. Dermed blir varmekraften over grenseflaten bare bestående av entalpi som kommer med middelhastigheten over R .

$$\dot{\mathbf{q}}'' = \rho h_e \mathbf{V} \quad [\dot{\mathbf{q}}''] = \frac{W}{m^2} \quad (3.33)$$

På samme måte som den horisontale middelhastigheten ble definert, kan indre energien og entalpien også midles i z-retning:

$$\bar{u}_e = \frac{1}{h_z(x, y, t)} \int_{z=b(x, y)}^{b(x, y)+h_z(x, y, t)} u_e dz \quad (3.34)$$

$$\bar{h}_e = \frac{1}{h_z(x, y, t)} \int_{z=b(x, y)}^{b(x, y)+h_z(x, y, t)} h_e dz \quad (3.35)$$

To av leddene i (3.32) kan skrives om ved hjelp av divergensteoremet samt (3.34) og (3.35) til:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho u_e d\Omega = \rho \iint_A \int_{z=b(x, y)}^{h_z(x, y, t)+b(x, y)} u_e dz dA = \rho \iint_A \frac{\partial}{\partial t} (h_z \bar{u}_e) dA \\ \bullet \quad & \iint_R \dot{\mathbf{q}}'' \cdot (-\mathbf{n}) dS = \rho \iint_R h_e \mathbf{V} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \rho \int_{\partial A} ds \int_{z=b(x, y)}^{b(x, y)+h_z(x, y, t)} \mathbf{V} h_e dz \stackrel{\text{Gauss}}{=} \rho \iint_A \nabla \cdot (\bar{h}_e h_z \mathbf{V}) dA \end{aligned}$$

Dermed blir hvert ledd i ligning (3.32) et integral over det samme flateelementet dA:

$$\rho \iint_A \frac{\partial}{\partial t} (h_z \bar{u}_e) dA = \rho \iint_A \nabla \cdot (\bar{h}_e h_z \mathbf{V}) dA + \iint_A (\dot{q}_{\text{tilført}}'' - \dot{q}_{\text{ford}}'') dA \quad (3.36)$$

og kan skrives opp på differensialform:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (h_z \bar{u}_e) = -\rho \nabla \cdot (\bar{h}_e h_z \mathbf{V}) + \dot{q}_{\text{tilført}}'' - \dot{q}_{\text{ford}}'' \quad (3.37)$$

Ifølge *Moran og Shapiro* [13] kan indre energi og entalpi i væsker tilnærmes som metningsverdier som er funksjoner av kun temperatur². Siden en har forenklet og antatt at temperaturen i dammen ikke endrer seg i tid eller rom kan indre energi og entalpi flyttes utenfor deriverte i både tid og rom. Videre dersom væsken også er inkompressibel er indre energi og entalpi tilnærmet like store, $u_e = h_z$. Med

$$\dot{q}_{\text{ford}}'' = \dot{m}_{\text{ford}}'' (h_{fg} + \bar{h}_e) = \rho \dot{h}_{\text{ford}}'' (h_{fg} + \underbrace{\bar{h}_e}_{= \bar{u}_e}) \quad (3.38)$$

kan derfor (3.37) skrives:

² For å gjøre denne forenklingen for entalpi må trykket være tilnærmet lik metningstrykket.

$$\rho \bar{u}_e \left\{ \frac{\partial h_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_z u) + \frac{\partial}{\partial y}(h_z v) \right\} = \dot{q}_{\text{tilført}}'' - \rho \dot{h}_{\text{ford}}(h_{fg} + \bar{u}_e) \quad (3.39)$$

En kan se at i parentesen på venstre side står kontinuitetsligningen og hvis en bruker (3.10) og ordner om på ligningen, kommer en fram til et uttrykk for fordampningsraten.

$$\dot{h}_{\text{ford}} = \frac{\dot{q}_{\text{tilført}}''}{\rho h_{fg}} \quad (3.40)$$

Ved å anta uniform temperatur i dammen ser en at en kommer fram til et relativt enkelt uttrykk for avdampningsraten (her: regresjonshastigheten). Denne vil være lik over hele dammen hvis ρ , h_{fg} og $\dot{q}_{\text{tilført}}''$ er lik overalt.

3.3 Varmeoverføring

Å modellere varmeoverføring så nøyaktig som mulig er viktig med tanke på å estimere en avdampningsrate som ligger nært virkeligheten. Dette har igjen stor innvirkning for konsentrasjoner av avdampede gasser i området rundt dammen. Gassene fra LNG (hovedsakelig metan) kan utsette folk og materiell for fare, da med tanke på kvelning og brannfare.

3.3.1 Tilført varme fra luft

Varmeovergang fra luften til dammen modelleres med Newtons kjølelov.

$$\dot{q}_a'' = h_a (T_a - T_{\text{dam}}) \quad (3.41)$$

Dette er en standard måte å modellere konvektiv varmeovergang på. Utfordringen ligger i å bestemme det konvekktive varmeovergangstallet h_a (se vedlegg B).

3.3.2 Strålingsvarme

Strålingsvarmen dammen tar opp er en balanse mellom emittert stråling fra dammen og innkommende stråling fra omgivelsene. Ved en brann vil den dominerende innkommende strålingen komme fra flammen. Hvis derimot den avdampede gassen ikke brenner, vil solinnstråling og stråling fra omgivelsene være de dominerende strålingskildene og den innkommende strålingsfluksen kan skrives [19]:

$$\dot{q}_{\text{str}}'' = \alpha_{\text{sol}} G_{\text{sol}} + \alpha_{\text{atm}} G_{\text{atm}} - \varepsilon_{\text{dam}} \sigma T_{\text{dam}}^4 \quad (3.42)$$

Der α_{sol} og α_{atm} er henholdsvis absorpsjonsevnen til dammen av solinnstrålingen og stråling fra atmosfæren. ϵ_{dam} er emissiviteten for den kryogene væsken. G_{sol} og G_{atm} er innstrålingsfluksen fra sol og atmosfære. Generelt vil solinnstrålingen være avhengig av solhøyden, men også andre faktorer som f. eks. skydekket. Innstrålingsfluksen fra atmosfæren vil være avhengig av en effektiv atmosfæreteperatur. Stefan-Boltzmanns konstant σ har verdien $5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.

3.3.3 Varme fra underlag

Varme tilført dammen fra underlaget er en svært avgjørende faktor for avdampingen i en tidlig fase. Til forskjell fra utslipp på vann vil ikke et fast underlag holde en konstant temperatur på overflaten. Derimot vil underlaget kjøles ned av den svært kalde kryogene væsken. I kapittel 2.2 ble det argumentert for at denne varmeovergangen vil være styrt av varmeledningen i bakken. Det vil si at dammen er i så god kontakt med underlaget at den termiske motstanden mellom bakken og dammen er svært liten i forhold til den konduktive motstanden i bakken. Derfor blir denne varmeovergangen modellert med en konduksjonsmodell.

I utgangspunktet er varmeledningen nede i bakken tredimensjonal. Imidlertid vil den matematiske modellen bli betydelig enklere hvis en kan si at den er vertikal. Webber [22] betrakter den tredimensjonale konduksjonsligningen i bakken,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \nabla \cdot (\nabla T) \quad \text{der} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

under betingelse om at dammen er i perfekt termisk kontakt med underlaget. Han setter så opp en form på løsningen³ som blant annet inneholder ledd som bidrar til den horisontale konduksjonen. Ut fra dette kommer han fram til en tidsskala for den horisontale varmeledningen:

$$t_H = \frac{r^2}{4\alpha} \quad (3.44)$$

Der r er radius til dammen, mens α er den termiske diffusiviteten til underlaget. Det vil si at de leddene som bidrar til horisontal varmeledning blir svært små for $t \ll t_H$. Tidsskalaen øker med kvadratet av radius på dammen. For å gjøre et overslag på denne tidsskalaen kan en ta for seg betong som er et vanlig underlag på industrielle anlegg. Betong har en typisk termisk diffusivitet på ca. $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ [23]. Dette tilsier at en dam med en radius på 1,0m, noe som er relativt lite ved industrielle ulykker, har en tidsskala på rundt regnet 170 timer. For et annet materiale som f. eks. aluminium vil tidsskalaen for den samme dammen være omtrent 40

³ Merk at han ikke løser ligningen fullstendig, men klarer å sette opp en form på løsningen som blant annet består av de leddene som bidrar til horisontal varmeledning.

minutter. Dette viser at den tredimensjonale varmeledningen likevel kan bli viktig for materialer med høy termisk diffusivitet. Dette bekreftes ytterligere av forsøk [20]. Altså er dammen stor, vil kun den vertikale varmeledningen være viktig. Hva som er "stort" avhenger av hvilken type underlag utslippet skjer på.

Med bakgrunn i det som er nevnt ovenfor samt at det antas at varmeledningen kan tilnærmes vertikal, blir (3.43) forenklet til:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.45)$$

I likhet med *Briscoe og Shaw* [18] antas det videre at overflaten kjøles svært raskt ned. Slik at de tilhørende randbetingelsene og startbetingelsen blir:

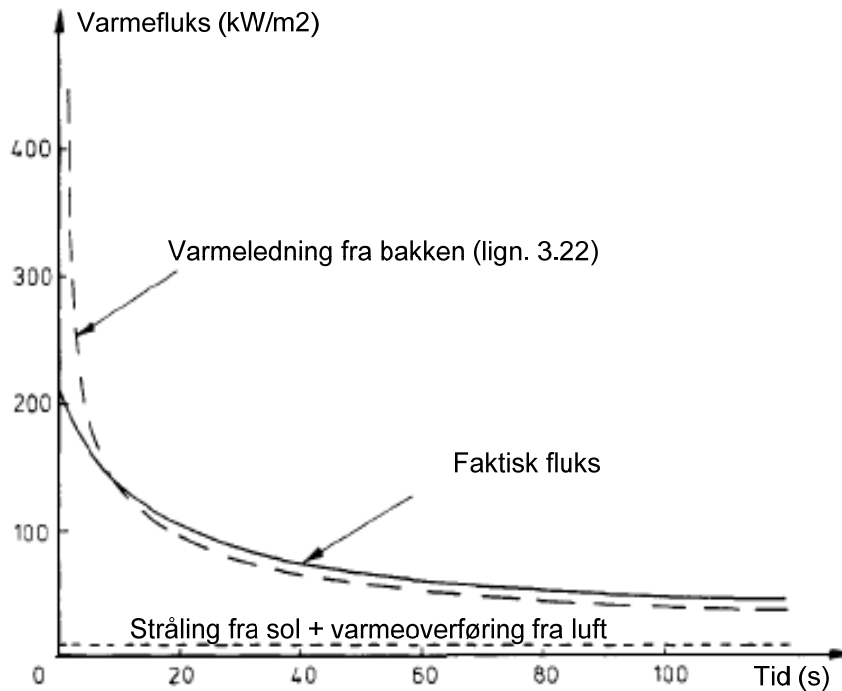
$$\begin{aligned} T(z, 0) &= T_{jord} = \text{initiell temperatur i bakken} \\ T(0, t) &= T_{dam} = \text{koketemperaturen til dammen} \\ T(\infty, t) &= T_{jord} = \text{temperatur "langt" ned i jorda (uforandret)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

For disse betingelsene er eksaktløsningen av (3.20) godt kjent og kan blant annet finnes i *Bejan og Kraus* [24]:

$$T(z, t) = T_{jord} - (T_{jord} - T_{dam}) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (3.47)$$

Dermed kan varmekraften fra bakken uttrykkes:

$$q_u'' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{k}{(\pi\alpha)^{1/2}} (T_{jord} - T_{dam}) \cdot t^{-1/2} \quad (3.48)$$



Figur 3.5: Transient utvikling for varmekraft i en kokende væske på land. Figuren er hentet fra *Briscoe og Shaw* [18]. Verdiene vist her gjelder omtrentlig for LNG.

Figur 3.5 viser en kvalitativ framstilling av den transiente utviklingen for varmekraften for en kokende væske på land. Av figuren kan det ses at varmekraften gitt av (3.48) overestimerer varmekraften i starten. *Briscoe og Shaw* [18] argumenterer likevel for at (3.48) vil gi et godt nok estimat for varmekraften ettersom overestimeringen varer såpass kort. Med bakgrunn i forsøk gjort av *Burgess og Zabetakis* [25] viser [18] til at denne perioden er i størrelsesorden 10 sekunder. Perioden med overestimeringen svarer til den tidlige fasen der det ikke er god termisk kontakt mellom dammen og underlaget. Dette er beskrevet i kapittel 2.2.

Et problem oppstår fordi varmekraften (3.48) går mot uendelig når tiden går mot null. Dette har blitt unngått ved å forskyve funksjonen 0,1 sekund mot venstre. Siden ligningen likevel overestimerer varmekraften den første perioden antas det at dette ikke vil introdusere ytterligere feil. En annen utfordring er å koble (3.48) opp mot spredningsmodellen. Dammen vil rekke fram til hver celle i nettverket ved forskjellige tider t' . Derfor må (3.48) modifiseres for å ta høyde for dette:

$$q_u'' = \frac{k}{(\pi\alpha)^{1/2}} (T_{jord} - T_{dam}) \cdot (t - t' + 0,1)^{-1/2} \quad (3.49)$$

3.4 Noen egenskaper ved ligningene

Med regresjonshastigheten $\dot{h}_{ford} = 0$ kalles (3.23) de klassiske grunt vann-ligningene eller *Saint Venant-ligningene*. Eksempler på anvendelsesområder er: strømming i kanaler og elver, forenklete beregninger av atmosfæriske strømninger og havstrømninger. Innenfor havstrømming blir de blant annet benyttet til å forutsi konsekvenser av tsunamier.

3.4.1 Karakteristikk og egenverdier

Teorien fra dette avsnittet har bakgrunn fra *Leveque* [2]. Der vises det at noen viktige aspekter ved ligningene kan demonstreres ved å se på den endimensjonale versjonen av (3.23) der kildeleddet \mathbf{S} er lik null:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}) \} = 0 \quad (3.50)$$

Eller uttrykt ved hjelp av de fysiske variablene:

$$\begin{pmatrix} h_z \\ h_z u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} h_z u \\ h_z u^2 + \frac{1}{2} g h_z^2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + \frac{1}{2} g q_1^2 \end{pmatrix}_x = 0 \quad (3.51)$$

Ligning (3.50) er uttrykt på *konservativ måte* og ved å anvende kjerneregelen på det andre leddet kan den uttrykkes på en *ikke-konservativ måte*:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0 \quad (3.52)$$

Der \mathbf{A} kalles jakobimatrisen til systemet. Uttrykket for \mathbf{A} blir:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(q_2/q_1) + g q_1 & 2q_2/q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + g h_z & 2u \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Egenverdiene til jakobimatrisen er:

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{g h_z} \quad (3.54)$$

Begge egenverdiene er reelle og distinkte. Dette medfører at ligningen klassifiseres som *hyperbolsk*.

De korresponderende egenvektorene er:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh_z} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh_z} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Dermed kan \mathbf{A} lineariseres og (3.52) kan skrives på formen:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{R} \Lambda \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0 \quad (3.56)$$

Der $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ er egenvektormatrisen og $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Ved så å multiplisere på venstre side av hvert ledd i (3.56) med \mathbf{R}^{-1} og gjøre variabelbyttet $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q}$ oppnår en:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \quad i=1,2 \quad (3.57)$$

Ved å bruke definisjonen på den totalderiverte;

$$\frac{dW_i}{dt} = \frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial W_i}{\partial x} \quad (3.58)$$

vil det være klart at (3.57) vil reduseres til den ordinære differensialligningen

$$\frac{dW_i}{dt} = 0 \quad (3.59)$$

langs karakteristikker gitt av

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i. \quad (3.60)$$

Derfor vil egenverdiene gitt ved $\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh_z}$ representere informasjonshastigheter i strømmingen. Altså vil $\sqrt{gh_z}$ være hvor raskt fluidet klarer å bre om seg med informasjon i forhold til fluidhastigheten u . Denne hastigheten er analogt til lydshastigheten (akustisk bølgehastighet) i kompressible fluider og er hastigheten til en liten bølge, eller også kalt en *gravitasjonsbølge*, på overflaten av dammen. I likhet med det dimensjonsløse *machtallet* i kompressible strømninger vil *froudetallet* kunne uttrykkes:

$$Fr = \frac{|u|}{\sqrt{gh_z}}, \quad (3.61)$$

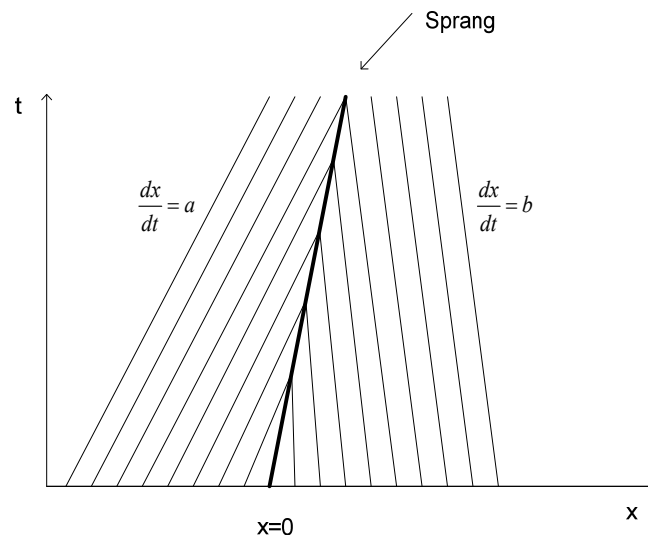
Dette tallet angir strømningsregimet. For en subkritisk strømning ($Fr < 1$) vil strømningshastigheten være mindre enn informasjonshastigheten. Informasjon⁴ fra en eventuell hindring nedstrøms vil da forplante seg oppover slik at strømmingen vil "merke"

⁴ Informasjon om kontinuitet og impuls.

hindringen og endre hastigheter og høyde et stykke oppstrøms. Dette vil ikke være tilfelle for en superkritisk strømning ($Fr > 1$).

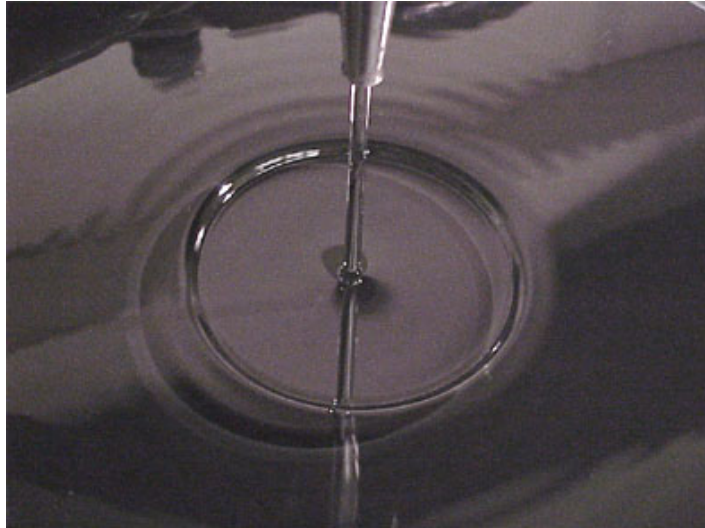
3.4.2 Sprang

En ser også at informasjonshastigheten endrer seg med høyden h_z på dammen. Det vil si informasjonen vil gå fortere i dype områder enn i grunnere områder av dammen. Hvis for eksempel et område har en større informasjonshastighet enn et annet, kan disse informasjonshastighetene "krasje". Disse informasjonshastighetene danner grunnlaget for *karaktistikker* i x - t -planet gitt av (3.60). Hver av disse bærer med seg informasjon om løsningen (her; høyde og impuls), men i ett og samme punkt kan ikke løsningen ha flere verdier. Derfor bryter løsningen sammen og danner et sprang.



Figur 3.6: Den tykke linjen viser et sprang i x - t -planet. Helningen angir hvor fort dette spranget brer seg.

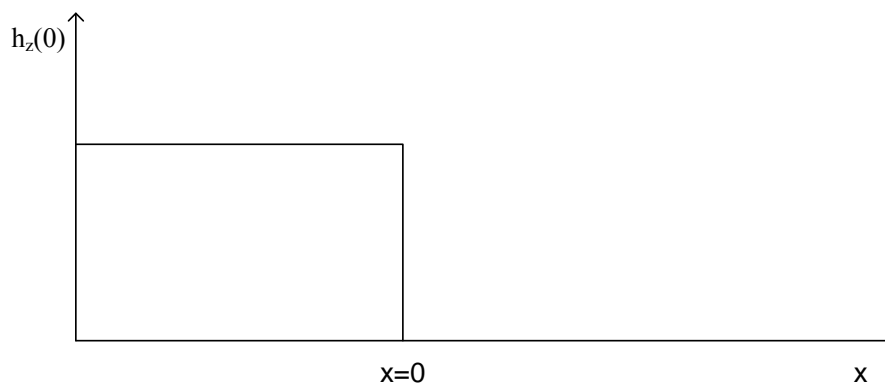
Et hverdagslig eksempel på et slikt fenomen er fra kjøkkenvasken hjemme. Der kan en observere at vannet strømmer svært raskt og med lav høyde i et visst omegn av der vannstrålen treffer bunnen av vasken. For en avstand r fra strålen vil vannet umiddelbart strømme mye saktere og ha en betraktelig større høyde. Fenomenet kalles et *hydraulisk støt*. Bildet nedenfor viser et eksempel på et hydraulisk støt.



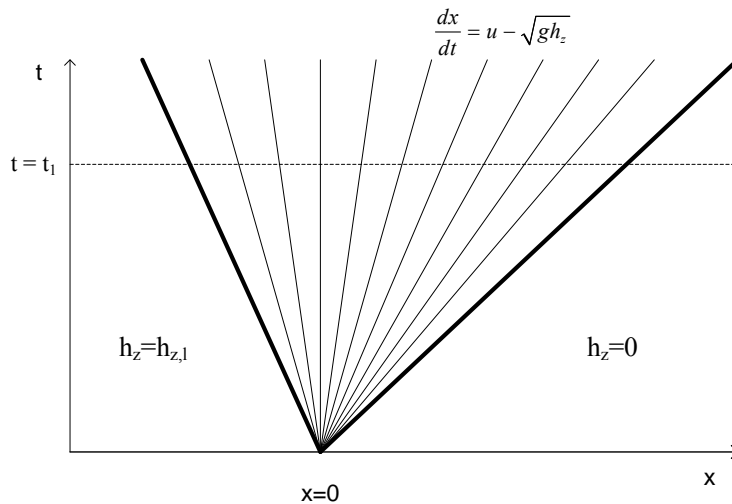
Figur 3.7: Bildet viser en vannstråle som treffer en flat plate. Et sirkulært hydraulisk sprang kan tydelig ses i en viss avstand fra strålen. (Kilde: <http://web.mit.edu/jeffa/www/jump.htm>)

3.4.3 Ekspansjonsbølger

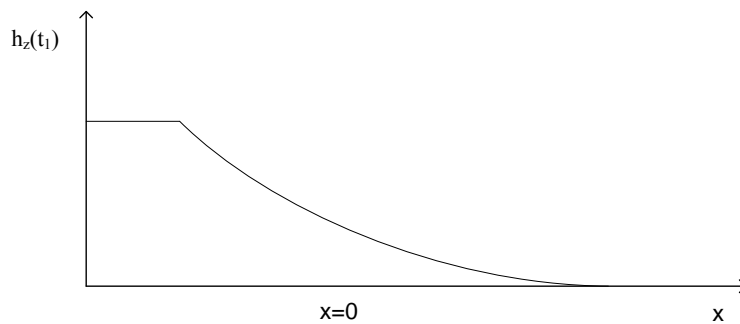
I et annet tilfelle der informasjonshastigheten oppstrøms er lavere enn nedstrøms eller går i to motsatte retninger, vil det utvikles såkalte *ekspansjonsbølger*. Dette er typisk for et dambruddsproblem der veggen som holder fluidet på plass tas bort ved tid lik null. Da vil fluidet starte og strømme mot den lavere vannstanden, men samtidig "sende et signal" bakover om at veggen er borte slik at også disse delene av fluidet begynner å strømme også. En sier at det går en ekspansjonsbølge bakover i fluidet. Hastigheten på denne bølgen er: $\sqrt{gh_z}$. Figurene nedenfor viser hvordan dette vil arte seg for høyden under et dambrudd. Væskeshøyden til venstre ($h_{z,1}$) er større enn null mens det ikke er noe væske til høyre, noe som er typisk for spredning av en dam.



Figur 3.8: Startbetingelse for høyde.



Figur 3.9: Figuren viser løsningen i x - t -planet. I mellom de to løsningene vil karakteristikkene danne en vifteform i x - t -planet. Dette er ekspansjonsbølgen som sprer seg i tid og rom.



Figur 3.10: Figuren viser løsningen for høyden ved tidspunktet $t=t_1$ som er markert med stiplet linje i figuren ovenfor.

Slike bølger kan også observeres for eksempel i bilkryss. Hvis en tenker på en bilkø som har stoppet for rødt lys kan en observere at tettheten av biler i køen er svært høy, mens foran bilkøen er det ingen biler. Når så bilkøen får grønt lys, vil en ekspansjonsbølge bre seg bakover i køen. Denne observeres ved at en ser en bølge der tettheten av biler avtar, bre seg bakover i køen. Altså vil tettheten av biler ha samme form på løsningen som figur 3.10.

Disse egenskapene til modell-ligningene er viktig å ta hensyn til når en skal velge numerisk løsningsmetode. En rekke numeriske teknikker er utviklet for slike *hyperbolske problemer*.

4 Numerisk implementering

Dette kapitlet vil ta for seg de numeriske metodene som har blitt implementert i denne oppgaven. Kapitlet er delt inn i to hoveddeler; ett som angår det endimensjonale settet og ett for det fulle todimensjonale settet av ligninger. De to endimensjonale delene gjør greie for henholdsvis forbedring av numerisk metode brukt i prosjektet og numerisk implementering av viskøse krefter. Begge disse emnene egner seg best å forstå først i én dimensjon for deretter å utvide i to dimensjoner. Den siste delen tar for seg den todimensjonale delen samt inkludering av avdamping.

4.1 Forbedring av numerisk metode

I prosjektet ble det endimensjonale settet av grunt vann-ligningene løst numerisk med tanke på å senere anvende teorien til spredning av LNG.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_z u) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_z u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_z u^2 + \frac{1}{2} g h_z^2\right) &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

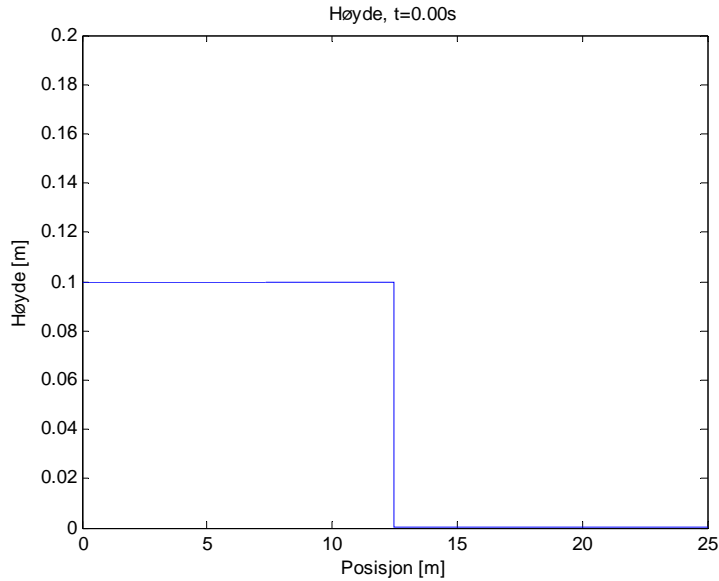
Eller skrevet på kompakt form:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{\mathbf{F}(\mathbf{q})\} = 0\tag{4.2}$$

der

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} h_z \\ h_z u \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h_z u \\ h_z u^2 + \frac{1}{2} g h_z^2 \end{pmatrix}$$

Ligningene ble anvendt på et såkalt dambrudd der venstre side av bergningsdomenet hadde en viss væskehøyde og høyre side var tom. Startbetingelsen er vist i figur 4.1 for en vannhøyde på 0,1 m og et beregningsområde på 25 m.



Figur 4.1: Startbetingelse for et dambrudd-problem.

Ligning (4.2) ble diskretisert ved hjelp av endelig volummetode (FVM) som resulterer i følgende diskretiserte ligning (se vedlegg C):

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^n = \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{F}_{j-1/2}^n - \mathbf{F}_{j+1/2}^n) \quad (4.3)$$

For diskretiseringen i tid ble Eulers metode brukt, noe som resulterer i følgende skjema:

$$\mathbf{q}_j^{n+1} = \mathbf{q}_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}_{j-1/2}^n - \mathbf{F}_{j+1/2}^n) \quad (4.4)$$

For utregning av fluktsfunksjonene på kontrollvolumgrensene trengs det en funksjon på formen,

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^n = f(\mathbf{q}_j^n, \mathbf{q}_{j+1}^n) \quad (4.5)$$

siden en ikke kjenner verdier av \mathbf{q} på grensen mellom kontrollvolumene. Tidligere i prosjektet ble Lax-Friedrichs metode brukt [2]:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{lf} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{q}_{j-1}^n) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_{j+1}^n)] - \frac{\Delta x}{\Delta t}(\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_{j-1}^n) \quad (4.6)$$

Slik at den numeriske metoden (4.4 og 4.6) nå er fullstendig eksplisitt. Det vil si at de konserverte variablene i \mathbf{q} for tidskrittet $n+1$, regnes ut fra forrige tidskritt n . Dermed trengs det ikke å løses et ligningssystem for hver tidsiterasjon som er tilfelle ved implisitte metoder. En bakdel med den eksplisitte metoden er at den kan ha forholdsvis store begrensninger på valg av tidskritt for å opprettholde stabiliteten i skjemaet. Imidlertid er (4.2), og også det

todimensjonale grunt vann-systemet, ulineære systemer av partielle differensialligninger. Dette medfører at en for hvert tidsskritt må løse et sett av ikke-lineære ligninger ved en eventuell implisitt metode. Derfor må en linearisere disse ligningssettene og gevinsten med å ha et robust implisitt skjema kan forsvinne ved at en likevel må ta små tidsskritt for å bevare nøyaktigheten. I tillegg er eksplisitte metoder enklere å programmere.

4.1.1 Problemer med eksisterende metode

Skjemaet (4.4) takler egentlig ikke at høydevariabelen er null. Derfor blir de tørre regionene i beregningsområdet kunstig vætet med en svært lav høyde ε . I teorien skal skjemaet kunne gi gode svar for tørre fronter når ε går mot 0. Imidlertid ble det i prosjektoppgaven [1] observert avvik fra eksaktløsningen i hastigheter og høyder. Dette ble i prosjektet forklart med oppdateringen av hastigheten som blir gjort for hver tidsiterasjon:

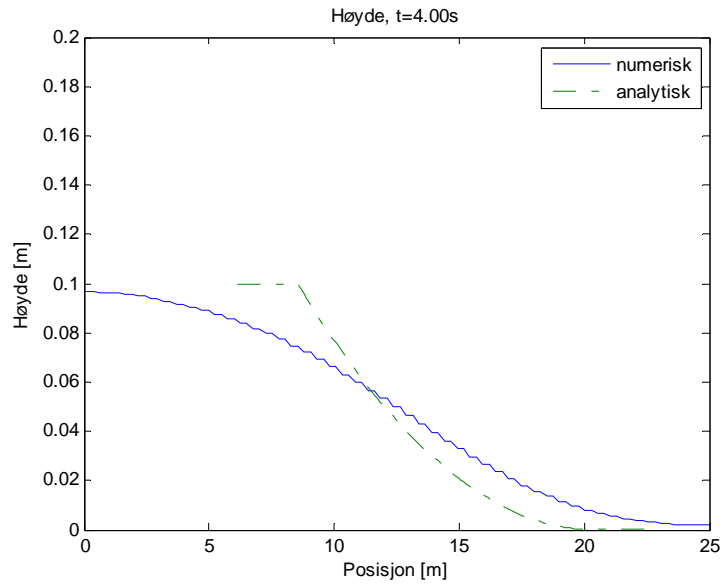
$$u_j^{n+1} = \frac{(hu)_j^{n+1}}{h_j^{n+1}} \quad (4.7)$$

Nær fronten er både teller og nevner i (4.7) svært liten. Regneprogrammet som benyttes har en endelig lagringskapasitet og vil derfor runde av teller og nevner. Dette kan nok introdusere noen unøyaktigheter, men det viste seg etter å ha justert tidsskritt og steglengde i de numeriske beregningene at denne feilen var liten i forhold til den *numeriske diffusjonen*⁵. Det eksisterende skjemaet ”smurte” ut løsningene for høyder og hastigheter for grovmaskede nettverk.

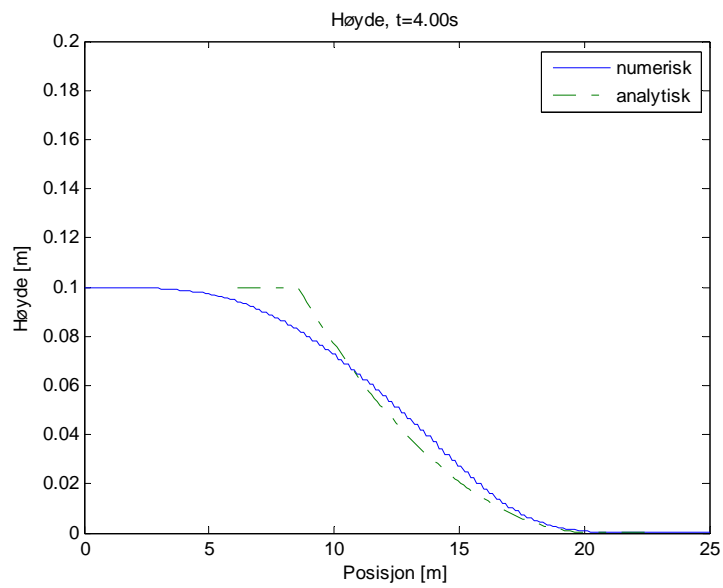
Den eksisterende metoden bruker altså (4.6) for evaluering av fluksfunksjonen på grensen. Det kan ifølge Leveque [2] vises at den numeriske diffusjonen for et slikt skjema er avhengig av $a = \Delta x / \Delta t$. Hvis a settes lik null ser en at (4.6) reduseres til en ren sentralføring. En slik metode kan bare brukes i problemer der diffusjon dominerer over adveksjon. Dette problemet er et adveksjonsproblem og det vil derfor være helt nødvendig å innføre en diffusjonskoeffisient a for å bevare stabiliteten.

Bakdelen med (4.6) er at a er svært avhengig av hvilke tidssteg en tar samt hvor finmasket nettverket er (se figur 4.2-4.4). Alle løsningene har samme tidssteg, Δt . Plottene viser høyden etter 4 sekunder ved dambruddet vist i figur 4.1.

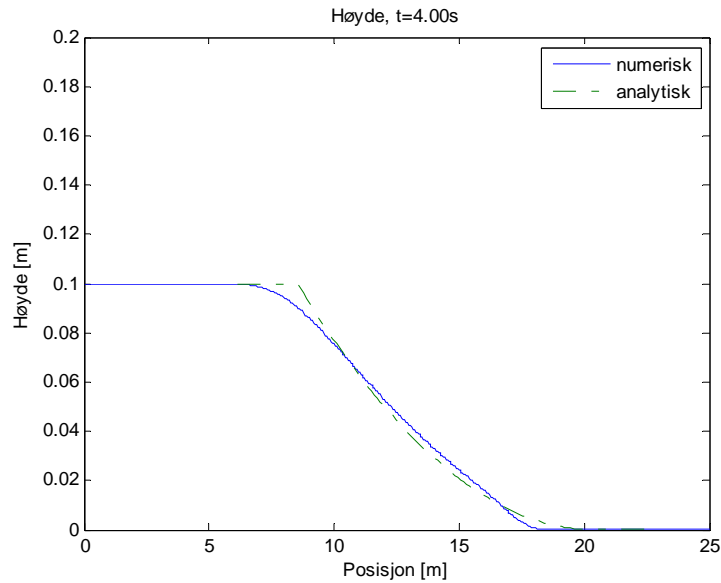
⁵ Også kalt *falsk diffusjon*. I fluidmekanikken blir den gjerne referert til som *numerisk viskositet*. Navnet kommer av at det numeriske skjemaet gir svar som tyder på at viskøse eller diffusive effekter er til stede selv om dette ikke er tilfelle.



Figur 4.2: Høyde ved $n=100$ kontrollvolumer ($\Delta x=0,25$ m).



Figur 4.3: Høyde ved $n = 200$ kontrollvolumer ($\Delta x=0,125$ m).



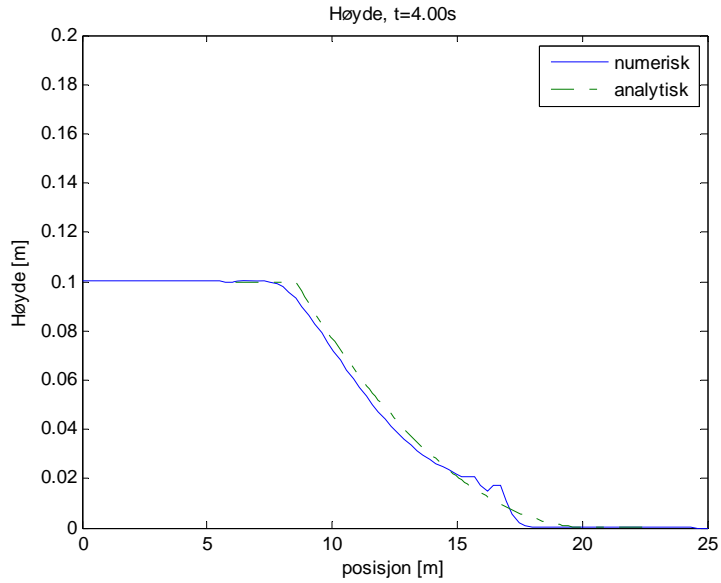
Figur 4.4: Høyde ved $n = 500$ kontrollvolumer ($\Delta x = 0,05$ m).

Av figurene ovenfor ser en at en må dele inn beregningsområdet ganske så fint for å bedre nøyaktigheten. Regnetida er proporsjonal med antall kontrollvolumer og utregningen vil ta unødvendig lang tid hvis en må forfine nettverket så drastisk. Spesielt vil dette ha konsekvenser for et todimensjonalt beregningsområde. En annen metode bør derfor benyttes for å komme unna dette.

4.1.2 Forbedring av beregning av fluksfunksjonen

To andre metoder for å regne ut fluksfunksjonen ble vurdert; *Roes tilnærmede riemann-løser* og *Rusanovs metode*⁶ [2]. Roes metode er i prinsippet en oppstrømsmetode for systemer av ligninger og er derfor optimal for adveksjonsproblemer. Dette fordi informasjonen alltid er mer dominant fra én retning, altså oppstrøms for adveksjonsproblemer. Da denne viste seg å være vanskelig å tilpasse problemer der spredningen skjer over tørr grunn, ble *Rusanovs metode* valgt. Den ble også funnet til å føre til mindre regnetid samt enklere å implementere i dette problemet. I figur 4.5 vises problemet med Roes tilnærmede riemann-løser. En oscilering brer seg fra fronten og bakover. Det ble ikke klart hva dette skyldes.

⁶ Ofte kalt lokal Lax Friedrich. Særlig i USA.



Figur 4.5: Løsning for høyden etter 4s med Roes tilnærmede riemann-løser, $n=100$ kontrollvolumer ($\Delta x=0,25$ m). En ser at den numeriske diffusjonen har gått betydelig ned i forhold til plottet i figur 4.2, men at den har en oscillering ved fronten.

Ifølge Leveque [2] består *Rusanovs metode* av å bestemme verdien av diffusjonskoeffisienten a lokalt i nettverket mellom to naboceller. Slik at (4.5) nå uttrykkes:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^R = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) - a_{j+1/2} (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)] \quad (4.8)$$

Prinsippet bak denne metoden er ikke ulik Roes tilnærmede riemann-løser [2]:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{Roe} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) - \mathbf{R} |\Lambda_{j+1/2}| \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)] \quad (4.9)$$

der $|\Lambda_{j+1/2}| = \mathbf{R} |\Lambda_{j+1/2}| \mathbf{R}^{-1}$

og

$$\Lambda_{j+1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$\Lambda_{j+1/2}$ er egenverdimatrisen til $\mathbf{A}_{j+1/2}$.

Edwards [3] viser hvordan skjemaet kan gjøres enklere med *Rusanovs metode*. Hovedsakelig gjør han dette for å unngå en kostbar matrisemultiplikasjon i hver iterasjon.

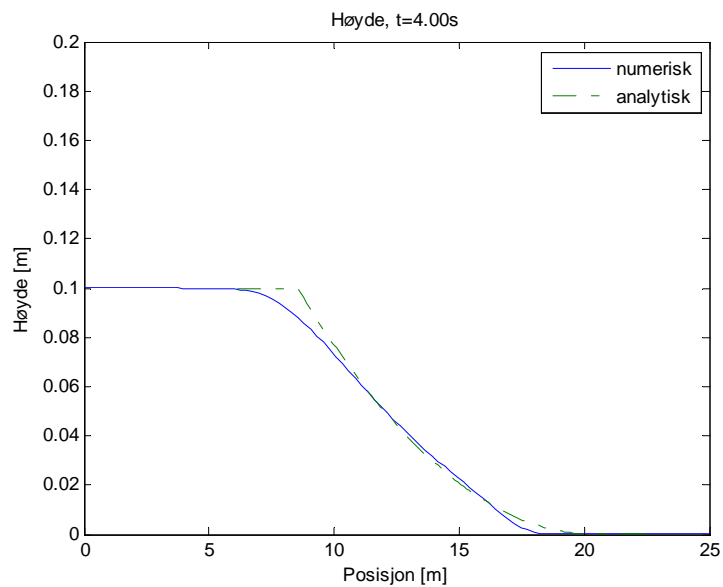
Ved å skifte ut egenverdimatrisen i (4.9) med $|\lambda_{R,j+1/2}| \cdot \mathbf{I}$ der \mathbf{I} er enhetsmatrisen, kan (4.9) forenkles. Dette forutsetter at en velger:

$$|\Lambda_R| = \max_{x_L, x_R} \left(\max_i |\lambda^i| \right) = \max_{x_L, x_R} (\Gamma_j) \quad (4.11)$$

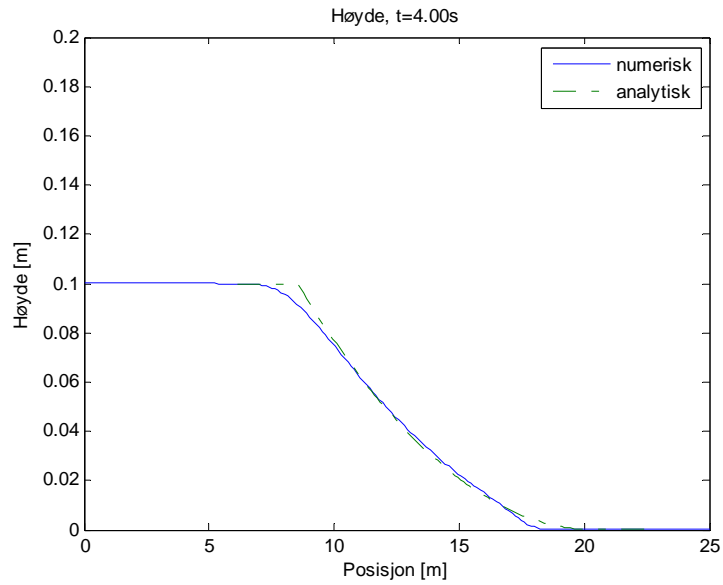
der i viser til egenverdi-nummeret. Dette vil si at en velger den største egenverdien til systemet lokalt i nettverket i intervallet $[x_j, x_{j+1}]$ til å representere diffusjonskoeffisienten $a_{j+1/2}$. Verdien Γ_j kalles spektralverdien til \mathbf{A} . Metoden tar derfor den enklere formen:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^R = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) - |\Lambda_R| (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)] \quad (4.12)$$

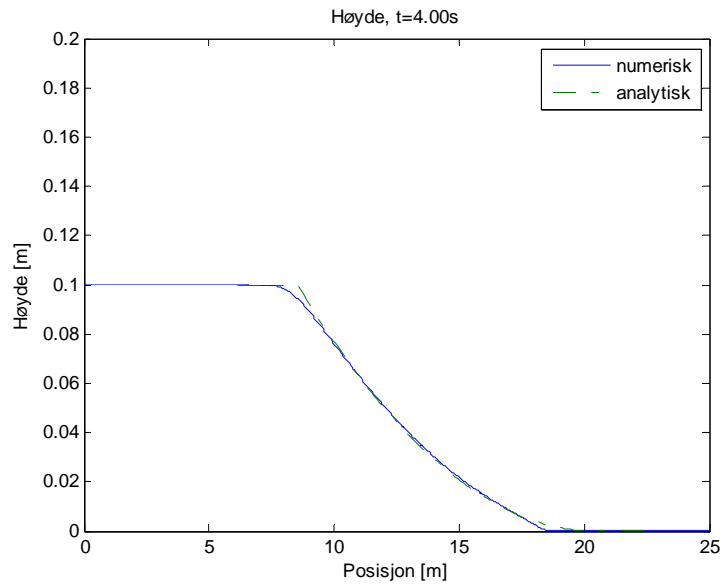
Der $|\Lambda_R|$ er definert av (4.11). Tilsvarende simuleringer som i figur 4.1-4.4 med denne metoden viser at den numeriske diffusjonen går betydelig ned.



Figur 1.6: Høyde ved $n = 100$ kontrollvolumer ($\Delta x = 0,25$ m).



Figur 4.7: Høyde ved $n = 200$ kontrollvolumer ($\Delta x = 0,125$ m).



Figur 4.8: Høyde ved $n = 500$ kontrollvolumer ($\Delta x = 0,05$ m)

Figur 4.6-4.8 sammenlignet med figur 4.1-4.4 viser at den numeriske diffusjonen har minket. Dette medfører større nøyaktighet og avkasting i regnetid ved at en ikke trenger like fint nettverk for å oppnå en akseptabel nøyaktighet.

4.1.3 Runge-Kutta-metode

I løsningsmetoden for de partielle differensialligningene oppstår ordinære differensialligninger i hver celle på formen:

$$\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^n = \mathbf{R}(\mathbf{q}^n) \quad (4.13)$$

Disse ligningene løser tidsavhengigheten.

I prosjektoppgaven [1] ble *Eulers metode* benyttet for å løse (4.13):

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \Delta t \cdot \mathbf{R}(\mathbf{q}^n) \quad (4.14)$$

I stedet for den klassiske enkle *Eulers metode* som ble brukt i [1], anvendes nå en Runge-Kutta-metode presentert av Gottlieb, Shu og Tadmor [5]. Runge-Kutta-metoder er attraktive innenfor numeriske beregninger pga god numerisk nøyaktighet og enkel implementering ved programmering. Metodene tar også lite lagringsplass.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(1)} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \cdot \mathbf{R}(\mathbf{q}^n), \\ \mathbf{q}^{(2)} &= \frac{3}{4}\mathbf{q}^n + \frac{1}{4}\mathbf{q}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \cdot \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(1)}), \\ \mathbf{q}^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathbf{q}^n + \frac{2}{3}\mathbf{q}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(2)}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.15) er en 3. ordens metode og skal dermed være mer nøyaktig enn *Eulers metode* som er av 1. orden⁷. Denne metoden er klassifisert som en SSP⁸-metode som betyr at den også har et større stabilitetsområde enn vanlige Runge-Kutta-metoder. Figur 4.6-4.8 er resultater ved bruk av metoden (4.15) for å løse (4.13) i hver celle j .

For kunne si noe om hvor god (4.14) er, har den blitt sammenlignet med *Eulers metode* for initialverdiproblemet:

$$\frac{dy}{dt} = y, \quad y(0) = 1. \quad (4.16)$$

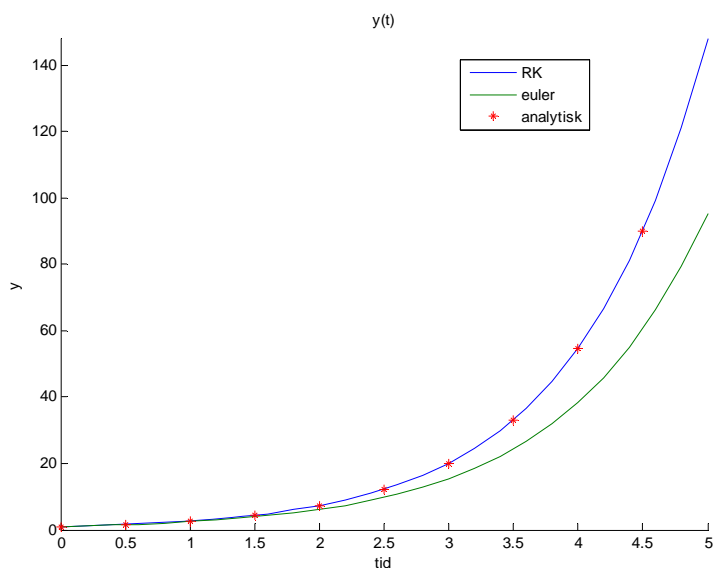
Initialverdiproblemet har eksakt løsning:

$$y(t) = e^t \quad (4.17)$$

⁷ Trunkeringsfeilen er av første orden.

⁸ Fra eng. Strong Stability-Preserving.

Tidsskrittet som benyttes er 0,2 sekunder. Noe som er forholdsvis grovt, men viser tydelig forskjell i de to metodene for $t \in [0,5]$.



Figur 2.9: Runge-Kutta, Euler og analytisk løsning. $\Delta t = 0,2$.

Legg merke til at residualene \mathbf{R} i (4.3) generelt ikke er en funksjon av tiden, men bare \mathbf{q} . I en klassisk Runge-Kutta-metode tas det også hensyn til at residualene er tidsavhengige [4]. Bruken av (4.14) ville derfor medført et dårligere resultat hvis høyre side av (4.13) også var en funksjon av tiden og ikke bare y . I de diskretiserte ligningene vil residualene være uavhengig av tiden, men unntaket kan være hvis en f. eks har tidsavhengige randbetingelser.

Tabell 4.1 sammenligner eksaktløsningen (4.17) med de to metodene. Eulers metode medfører en feil som akkumulerer ganske dramatisk med tiden grunnet den eksponentielle veksten av funksjonen.

Euler				RK			
n	y	Eksakt	Feil	n	y	Eksakt	Feil
0	1,000	1,000	0	0	1,0000	1,0000	0,0000
1	1,200	1,221	0,021	1	1,2213	1,2214	0,0001
2	1,440	1,492	0,052	2	1,4917	1,4918	0,0002
3	1,728	1,822	0,094	3	1,8218	1,8221	0,0003
4	2,074	2,226	0,152	4	2,2250	2,2255	0,0005
5	2,488	2,718	0,230	5	2,7175	2,7183	0,0008
.
.
24	79,497	121,510	42,014	24	121,3450	121,5104	0,1654
25	95,396	148,413	53,017	25	148,2030	148,4132	0,2102

Tabell 4.1: Avvik fra eksakt løsning for de to metodene.

4.2 Implementering av viskøse krefter

I prosessen for å inkludere de viskøse kreftene har det blitt jobbet med den endimensjonale impulslikningen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_z u) + \frac{\partial}{\partial x}(h_z u^2 + \frac{1}{2} g h_z^2) = -F_{f,x} \quad (4.18)$$

Eller skrevet på kompakt form:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (4.19)$$

Dette har blitt gjort fordi det da er lettere å inkludere fysikken og tolke resultatet uten samtidig risikere å bli rammet av store numeriske problemer eller programmeringsfeil.

Ligningen ble diskretisert med eksplisitt FVM på vanlig måte:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_j^n = \frac{1}{\Delta x_j} (F_{j-1/2}^n - F_{j+1/2}^n) + S_j^n \quad (4.20)$$

Der:

$$S_j^n = \begin{cases} -F_{lam} = -c_{lam} \frac{v u_j^n}{h_{z,j}^n} & \text{for laminært tilfelle} \\ -F_{turb} = -c_{turb} u_j^n |u_j^n| & \text{for turbulent tilfelle} \end{cases} \quad (4.21)$$

Se avsnitt 3.2 for utgreiing rundt teorien for de viskøse kreftene. Fluksene ble regnet ut ved hjelp av (4.12) og (4.15) ble brukt for å løse de ordinære differensiallikningene i tid.

Etter at (4.18) ble løst sammen med kontinuitetslikningen viste det seg raskt at en slik rett fram implementering ikke holder mål. Kildeleddet forårsaket problemer med stabilitet og en måtte ned i uhensiktsmessige små tidssteg for å kjøre koden.

4.2.1 Semi-implisitt metode

Denne metoden er populær for ligninger der kildeleddet er stivt og skaper problemer for stabilitet. Metoden kan finnes nærmere forklart i blant annet *Leveque* [2] og brukes av *Delestre med flere* [15] for å løse stabilitetsproblemer med friksjonsleddet for grunt vannlikningene. Prinsippet bak metoden er å splitte likning (4.19) opp i to del-ligninger:

$$\text{Ligning A: } \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.22)$$

$$\text{Ligning B: } \frac{\partial q}{\partial t} = S \quad (4.23)$$

Slik kan en standard numerisk metode benyttes for å løse det homogene problemet A, mens en annen numerisk metode kan benyttes på ligning B som inneholder kildeleddet. Nedenfor følger et eksempel på hvordan dette kan implementeres for (4.19).

For den tidsderiverte benyttes en framlengs Euler-metode slik at:

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x_j} (F_{j-1/2}^n - F_{j+1/2}^n) + S_j \quad (4.24)$$

Ordner (4.24):

$$q_j^{n+1} - S_j \Delta t = q_j^n + \underbrace{\frac{1}{\Delta x_j} (F_{j-1/2}^n - F_{j+1/2}^n)}_{(q^*)_j^{n+1}} \quad (4.25)$$

Ser at høyre side av (4.25) er den numeriske løsningen på den homogene ligningen (4.23) og kaller denne $(q^*)_j^{n+1}$. Setter så inn uttrykket for S_j for turbulent tilfelle.

$$q_j^{n+1} + \Delta t \cdot c_t |u_j^n| u_j^{n+1} = (q^*)_j^{n+1} \quad (4.26)$$

Kildeleddet evalueres nå implisitt ved tid $n+1$. I det turbulente tilfellet lineariseres kildeleddet slik at $|u_j^{n+1}| u_j^{n+1} = |u_j^n| u_j^{n+1}$. Hvis en nå husker på at den bevarte variabelen q består av hastighet og høyde,

$$q_j = (h_z u)_j, \quad (4.27)$$

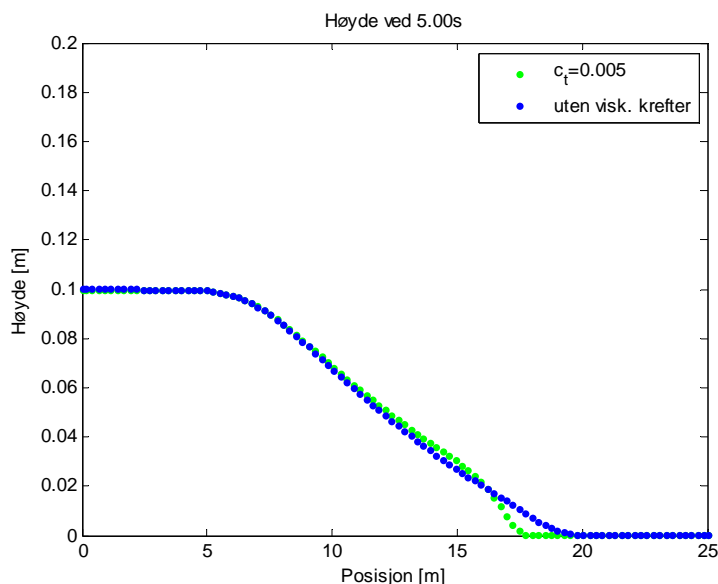
kan nå den numeriske løsningen med friksjonsledd skrives:

$$q_j^{n+1} = \frac{(q^*)_j^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t \cdot c_{turb} |q_j^n|}{h_{z,j}^{n+1}}} \quad (4.28)$$

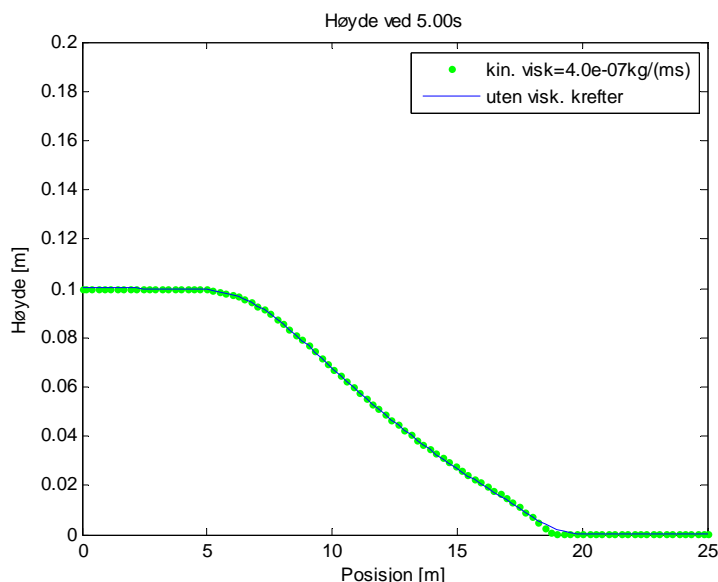
Framgangsmåten for det laminære tilfellet er helt analogt og resulterer i:

$$q_j^{n+1} = \frac{(q^*)_j^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t \cdot c_{lam} \nu}{(h_{z,j}^{n+1})^2}} \quad (4.29)$$

Metoden er tilsvarende i koden, men der har Runge-Kutta-metoden blitt brukt på den første ligningen (4.22). Nå er ikke friksjonsleddet lenger til bry for stabiliteten og tidsskrittet kan økes. Figur 4.10-4.12 viser effekten av friksjonsleddet.



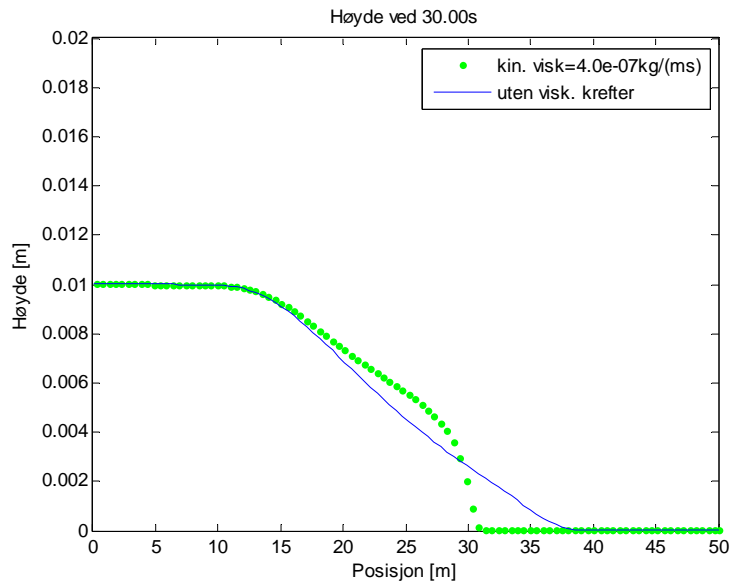
Figur 4.10: Figuren viser dambruddet etter 5 sekunder. Henholdsvis med $c_t=0.005$ og uten viskøse krefter.



Figur 3: Figuren viser dambrudd etter 5 sekunder med laminær viskøs motstand. Kinematisk kinematisk viskositet er valgt omtrent lik for flytende metan for 1 atm. trykk. ($c_{lam}=3,0$)

Den laminære motstanden ser ikke ut til å gjøre noen stor forskjell i simuleringen ovenfor. Dette er nok fordi flytende metan har svært lav kinematisk viskositet. Denne kraften vil gjøre seg mer gjeldende når dammen blir tynnere for senere tider (se kap. 1). Derfor har det også blitt gjennomført en simulering av et dambrudd med en svært lav starthøyde for å se hvilken

effekt den laminære motstanden har for senere tider når høyden på dammen blir lavere. I starten står vannet på 25 m. Simuleringen må ses på som en illustrasjon av de viskøse kreftene da også overflatespenningen vil være viktig for en så tynn dam.



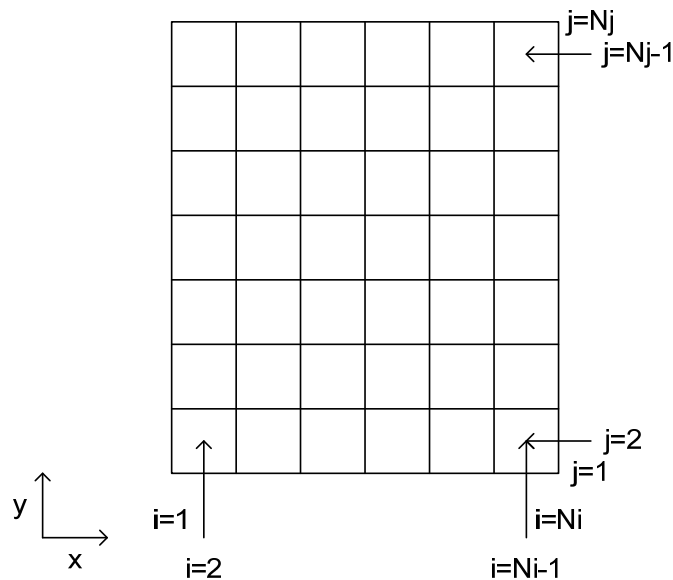
Figur 4.12: Dambrudd med en starthøyde på 1cm. Beregningsområdet er her 50 m. Denne simuleringen illustrerer at de laminære viskøse kreftene har større innvirkning når dammen blir tynn.

4.3 Numerisk implementering i 2D

Dette avsnittet presenterer hvordan de numeriske metodene er utvidet til 2D i programmet CRYOSPREAD.

4.3.1 Nettverk

For å gjøre implementeringen enkel har det blitt valgt å bruke et regulært og ekvidistant nettverk. Slike nettverk kan ha vanskeligheter med å tilpasse seg vanskelige geometrier, men passer godt for beregningene gjort i denne oppgaven.



Figur 4.13: Skjematisk oversikt over nettverket som blir brukt.

4.3.2 Diskretisering og utregning av fluksfunksjoner

I vedlegg C er det vist hvordan modelligningen (3.23);

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ \mathbf{G}(\mathbf{q}) \} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \quad (4.30)$$

diskretiseres ved hjelp av FVM. Denne metoden resulterer i følgende diskrete ligning for et regulært og ekvidistant nettverk:

$$\frac{d\mathbf{q}_p}{dt} = \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{F}_w - \mathbf{F}_e) + \frac{1}{\Delta y}(\mathbf{G}_s - \mathbf{G}_n) + \mathbf{S}(\mathbf{q}_p) \quad (4.31)$$

Her står w, e, s og n henholdsvis for vestlig, østlig, sørlig og nordlig kontrollvolumgrense i forhold til sentercellen p⁹. Den konserverte variabelen \mathbf{q} og fluksfunksjonene \mathbf{F} og \mathbf{G} er gitt i avsnitt 3.1.3.

Fluksfunksjonene \mathbf{F} og \mathbf{G} blir regnet ut ved hjelp av (4.12) slik at:

$$\mathbf{F}_w^R = \frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{q}_w) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_p) - |\Lambda_{R,w}|(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_w)] \quad (4.32)$$

$$\mathbf{G}_s^R = \frac{1}{2}[\mathbf{G}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{G}(\mathbf{q}_p) - |\Lambda_{R,s}|(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_s)] \quad (4.33)$$

Tilsvarende uttrykk blir brukt for fluksfunksjonene på grensene e og n.

Koeffisientene $|\Lambda_{R,w}|$ og $|\Lambda_{R,s}|$ regnes ut på følgende vis (jmfør (4.11)):

$$|\Lambda_{R,w}| = \max_{x_w, x_p} \left(\max(|\lambda_1^1|, |\lambda_2^1|) \right) \quad (4.34)$$

$$|\Lambda_{R,s}| = \max_{x_s, x_p} \left(\max(|\lambda_1^2|, |\lambda_2^2|) \right) \quad (4.35)$$

der egenverdiene¹⁰ er gitt av [2]:

$$\lambda_{1,2}^1 = u \pm \sqrt{gh_z} \quad \text{og} \quad \lambda_{1,2}^2 = v \pm \sqrt{gh_z} \quad (4.36)$$

Tilsvarende blir regnet ut for grensene e og n.

For å løse tidsavhengigheten i (4.31) blir den eksplisitte metoden (4.15) benyttet. Det vil si at høyre side av (4.31), blir evaluert ved forrige tidsskritt der alle verdier er kjente.

4.3.3 Kildeledd

Modellen har kildeleddet (se avsnitt 3.1.3):

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{h}_{ford} \\ -F_{f,x} \\ -F_{f,y} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

⁹ Se vedlegg C for en nærmere utredning.

¹⁰ Egenverdiene u og v er ikke tatt med fordi disse er mindre enn de som er gitt i (4.36).

Kildeledd pga helning på underlaget er ikke tatt med her. Regresjonshastigheten som er sluket i kontinuitetsligningen blir regnet ut fra (3.40) og overført varme til dammen. I koden regnes denne ut for hver celle ved:

$$s_1 = -\min\left(\text{abs}\left(\frac{h_z - \varepsilon}{\Delta t}\right), \dot{h}_{ford}\right) \quad (4.38)$$

der ε er den kunstige høyden beskrevet i avsnitt 4.1.1. Dermed vil den utregnede avdampningsraten bli valgt hvis cellen ikke blir uttørket i løpet av neste tidsskritt. Hvis denne er for stor sånn at høyden blir negativ for neste tidsskritt, vil avdampningsraten få en verdi slik at hele høyden damper av.

Kildeleddene i impulslikningene regnes ut som:

$$s_2 = -\max(F_{x,lam}, F_{x,turb}) \quad (4.39)$$

$$s_3 = -\max(F_{y,lam}, F_{y,turb}) \quad (4.40)$$

I mangel på et overgangskriterium mellom laminær og turbulent strømning basert på et Reynoldstall, vil friksjonskoeffisientene regnes ut som ovenfor. Dette er en forenkling som forårsaker en plutselig overgang mellom strømningsregimene. Faktisk vil overgangen skje ved:

$$\text{Re} = \frac{h_z |\mathbf{V}|}{\nu} = \frac{c_{lam}}{c_{turb}} \quad (4.41)$$

hvis en sammenligner de viskøse spenningene gitt av (3.28) og (3.31). Ifølge *Webber og Jones* [8] vil denne tilnærmingen være grei nok for spredning av dammer ved ulykker gitt at modellen for den viskøse friksjonen i utgangspunktet er en svært forenklet modell. Den semi-implisitte metoden beskrevet i avsnitt 4.2.1 blir brukt på disse leddene for å unngå problemer med stabiliteten.

4.3.4 Valg av tidsskritt

Et nødvendig kriterium for stabilitet er at informasjonen ikke skal rekke å passere en cellebredde i løpet av et tidsskritt. Dette gir opphavet til det som kalles CFL-kriteriet [2]:

$$\Delta t \leq \frac{C_{max}}{\frac{|u| + \sqrt{gh_z}}{\Delta x} + \frac{|v| + \sqrt{gh_z}}{\Delta y}} \quad (4.42)$$

der C_{max} er maksimalt Courant-tall. Med den eksplisitte metoden (4.15) anbefales $C_{max}=1$ basert på erfaring.

4.3.5 Randbetingelser

Branner og spredningsulykker befinner seg som regel ut i fri atmosfære. Da er det helt nødvendig å begrense beregningsområdet, siden en ikke kan regne på hele jorda. Noen ganger kan det hende at beregningsområdet ikke er stort nok slik at dammen renner over randen til beregningsområdet. Derfor er det viktig med randbetingelser som gir oss omtrent samme svar som om en gjorde beregningen på et mye større område.

I denne oppgaven blir såkalte *absorberende randbetingelser* brukt [2]. Det vil si at en regner med at beregningsområdet er tilstrekkelig stort, slik at det ikke skjer store forandringer ved randen. Dette medfører følgende randbetingelser for den konserverte variabelen \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{i=0} &= \mathbf{q}_{i=1} \\ \mathbf{q}_{j=0} &= \mathbf{q}_{j=1} \\ \mathbf{q}_{Ni} &= \mathbf{q}_{Ni-1} \\ \mathbf{q}_{Nj} &= \mathbf{q}_{Nj-1} \end{aligned} \tag{4.43}$$

En kan si at en påtvinger en null-gradient på de ytre rendene.

4.3.5 CRYOSPREAD

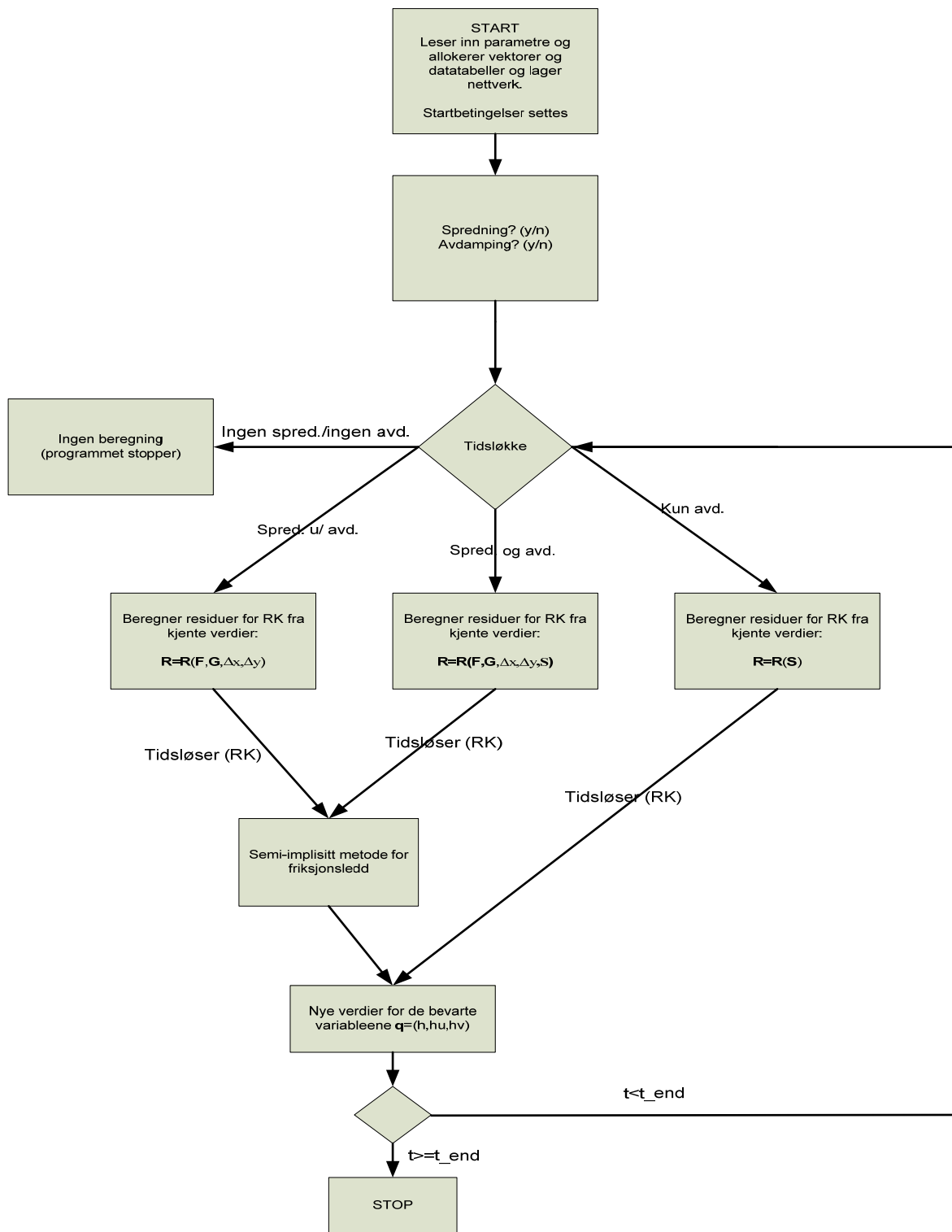
Den todimensjonale numeriske modellen er programmert i Fortran 90. Programmet har blitt kalt CRYOSPREAD. Et flytskjema er tegnet for programmet for å få en liten innsikt i hvordan programmet fungerer (se figur 4.14).

Programmet starter med å lese inn parametre, allokere vektorer og datatabeller og setter beregningsnettverket. Startbetingelsene for variablene blir også satt. Deretter spør programmet i tur om spredning skal inkluderes og om avdamping også skal inkluderes. Dette gir fire valg:

1. Ingen spredning og ingen avdamping
2. Kun spredning
3. Spredning og avdamping
4. Avdamping uten spredning

Det første valget er uinteressant og programmet avsluttes. For de tre andre valgene starter tidsløkken. Disse tre valgene er forskjellige i hvordan residualen for tidsløseren regnes ut. For valg 2, med kun spredning, regnes residualene ut kun på grunnlag av fluksfunksjonene, dvs. som i ligning (4.31). Kildeleddet som skyldes avdampingen regnes ikke ut da det ikke behøves. For spredning med fordamping blir i tillegg kildeleddet fra avdampingen regnet ut. Begge disse valgene med spredning bruker, i tillegg til RK-tidsløseren, den semi-implisitte metoden for å regne ut ny verdi. Dette er for å ta hånd om friksjonsleddene. Valg nummer 4¹¹, der kun avdamping er inkludert, trenger kun å regne ut residualene fra avdampingsraten. Dette valget trenger derfor ikke å regne ut fluksfunksjonene på rendene i nettverket og har derfor betraktelig kortere beregningstid. Tidsløkken fortsetter helt til programmet har simulert så langt fram i tid som en ønskelig.

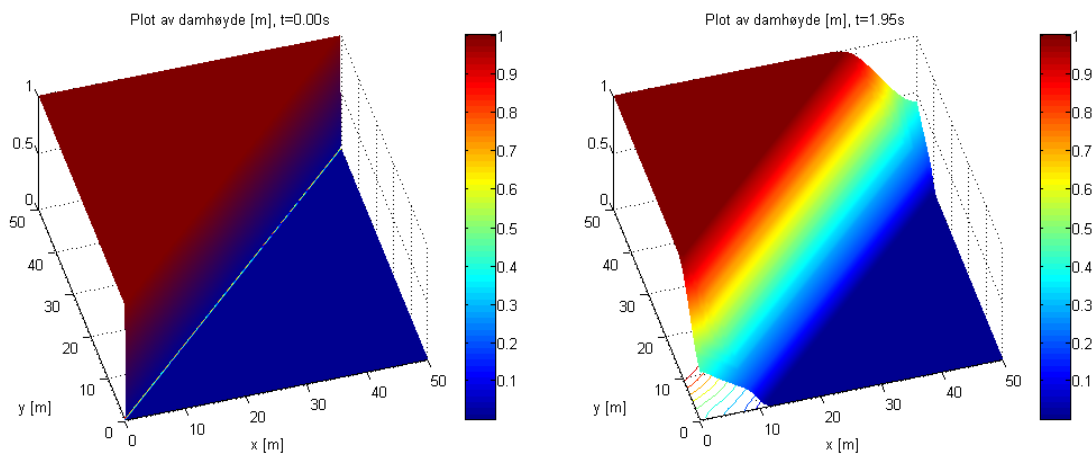
¹¹ Når spredningen er slått av reduseres systemet til én ordinær differensialligning i tid der høyden på dammen kun er avhengig av regresjonshastigheten og tiden.



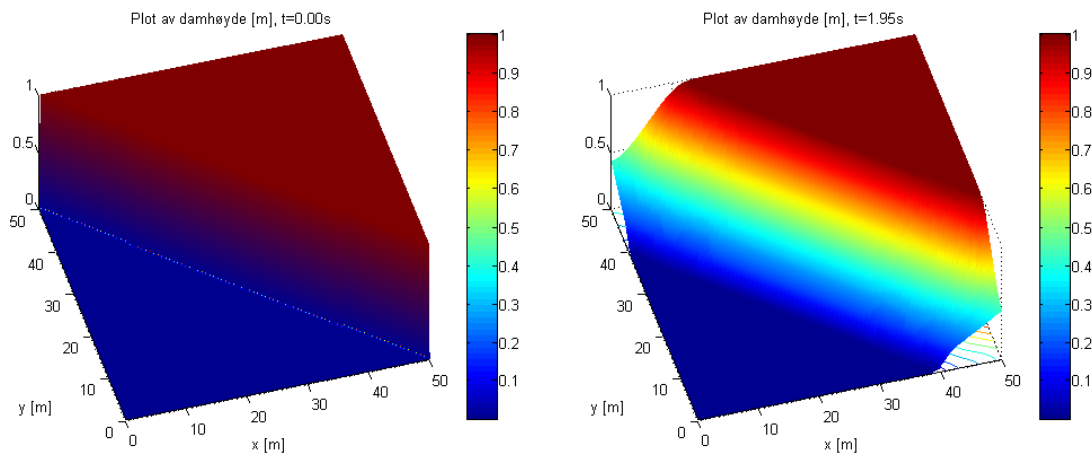
Figur 4.14: Flytskjema for CRYOSPREAD.

4.3.6 Noen resultater ved dambrudd i 2D

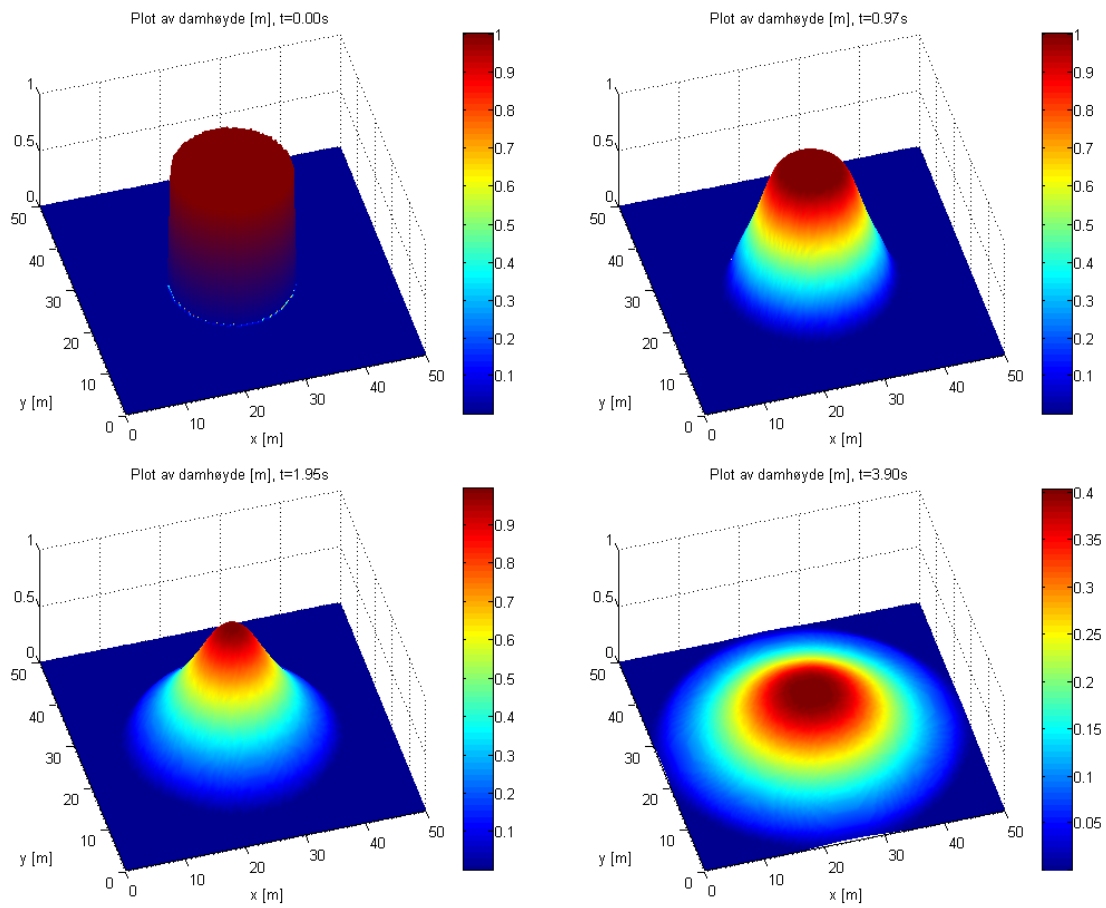
For å teste hvordan spredningsbiten av koden presterer har det blitt gjennomført to skråe dambrudd og et sirkulært dambrudd. De skråe dambruddene har blitt gjennomført fordi de kan avsløre uregelmessigheter som ubalanse mellom flukser i x- og y-retning. Beregningsdomenet er på $50\text{m} \times 50\text{m}$. Friksjon og avdamping er ikke inkludert.



Figur 4.15: Skrått dambrudd 1. Starbetingelsen (venstre) er $h_z=1\text{m}$ for $y>x$ og $h_z=\epsilon=1\text{E}-07\text{m}$ for $y<x$. ($\Delta t=8,14\text{E}-02$, $\Delta x=\Delta y=0,5\text{m}$)



Figur 4.16: Skrått dambrudd 2. Starbetingelsen (venstre) er $h_z=1\text{m}$ for $y>50-x$ og $h_z=\epsilon=1\text{E}-07\text{m}$ for $y<50-x$. ($\Delta t=8,14\text{E}-02$, $\Delta x=\Delta y=0,5\text{m}$)



Figur 4.17: Sirkulært dambrudd. Starbetingelsen (øverst venstre) er en vannsøyle med høyde $h_z=1\text{m}$ og diameter på 20m. ($\Delta t=8,14\text{E}-02$, $\Delta x= \Delta y =0,5\text{m}$)

5 Simuleringer og resultater

5.1 Sammenligning mellom spredningsmodell og forsøk

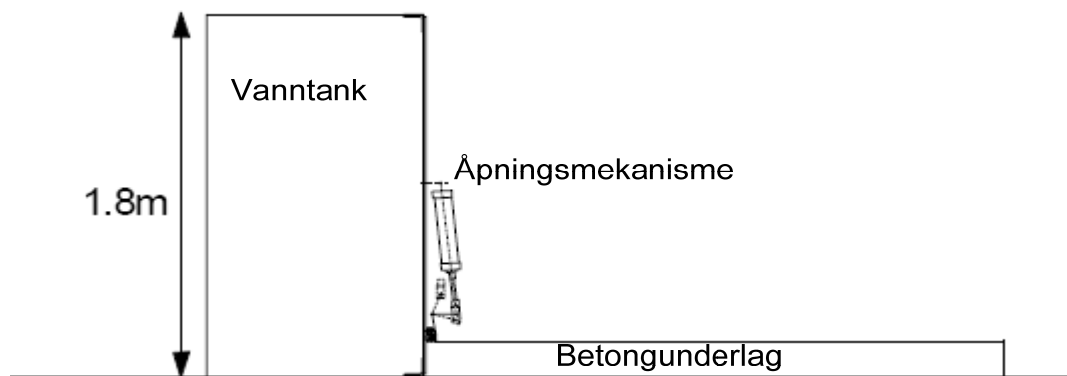
I denne oppgaven har spredningskoden blitt sjekket opp mot et spredningsforsøk. Dette er svært viktig for å vurdere hvordan spredningsmodellen i CRYOSPREAD presterer.

5.1.2 Forsøket

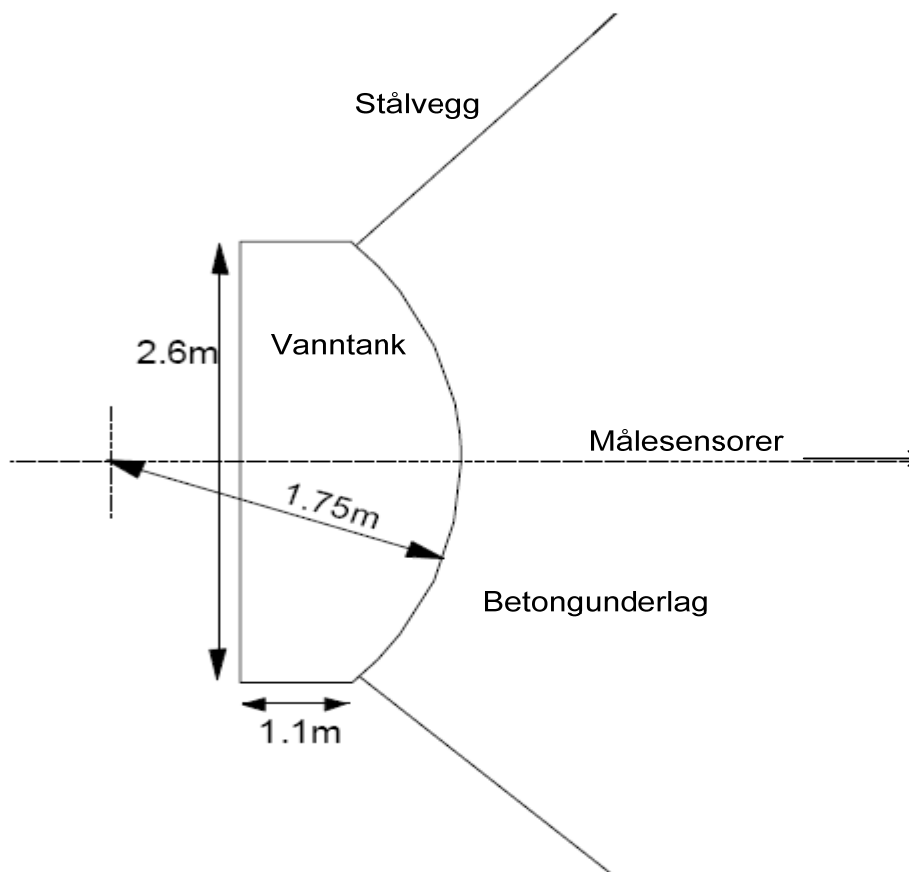
Flere modeller på spredning av dammer har blitt utviklet for å prøve å fastsette konsekvensene av utslipp av brennbare/giftige væsker. Et stort problem har vært mangelen på forsøk for å teste disse modellene. De forsøkene som har blitt gjennomført har ofte vært i for liten skala. Derfor leide *Health and Safety Executive* i Storbritannia inn *Advantica Technologies Limited* til å gjøre en rekke forsøk med spredning av væsker på land. Artikkelen som det lyktes å få tak i går på spredning av vann på betongunderlag. En mer inngående beskrivelse av forsøket enn det som er gjengitt her, kan finnes i [14].

5.1.3 Beskrivelse

Den sylinderformede tanken vannet ble lagret i var 3,5 m i diameter. Nederst ble det skåret en åpning som var 25 cm høy og fulgte periferien i 90°. Vegger gikk ut på begge sidene av åpningen og omsluttet en kvadrant. De ansvarlige for forsøket antok dermed at disse veggene virket som symmetrivegger for utslippet. En hydraulisk port ble så påmontert som åpningsmekanisme. Denne var koblet til en datamaskin som automatisk startet tidtakingen for målesensorene langs bakken. Målesensorer ble lagt langs senterlinjen for utslippet. Disse målte tiden det tok etter porten var åpnet til de ble våte. Se figur 5.1 og 5.2 for skisser av oppsettet.



Figur 5.1: Skisse av oppsett vist fra siden. Figuren er hentet fra [14].



Figur 5.2: Skisse av oppsett sett ovenfra. Figuren er hentet fra [14].

Tanken ble fylt opp til 1,449 meters høyde i forsøket som benyttes her.

5.1.4 Oppsett av modell

For å etterligne forsøket ble spredningsmodellen uten fordampning brukt. Utslippceller ble satt slik at de representerte den delen av veggen på tanken der vannet fosset ut. Dette ble gjort slik at hastigheter og høyde ble satt i utslippcellene. Høyden ble satt til høyden på åpningen, mens utslippshastigheten i disse cellene ble beregnet ut fra uttrykket (se vedlegg D for utledning):

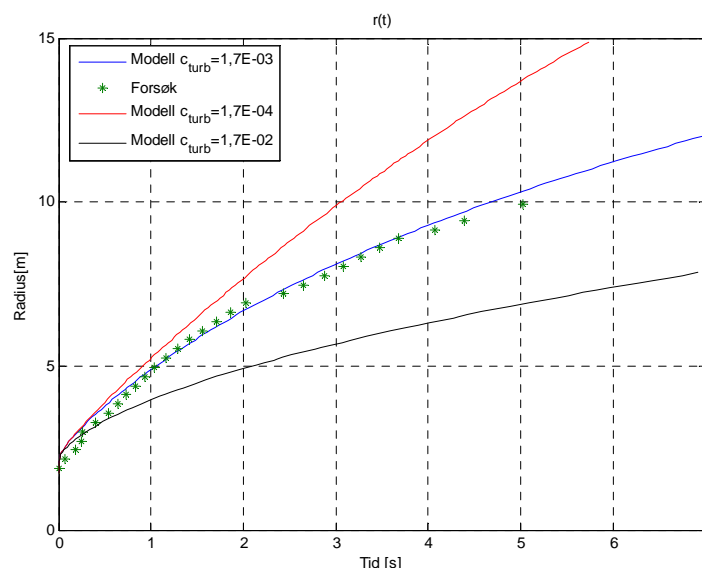
$$u(t) = c_d \left(\sqrt{2gH_0} - \frac{A_{\text{åpning}}}{A_{\text{tank}}} gt \right) \quad (5.1)$$

Her er c_d en tapskoeffisient som tar høyde for strømingstap ut åpningen. Denne ble satt til 0,64 etter anbefaling fra [14].

Hastigheten ble satt slik at den hadde retning radielt ut fra veggen. Data for væskefronten ble hentet ut langs symmetriaksen i x-retning. Beregningen ble gjennomført med et 200 x 200 nettverk på et område som målte 15m x 15m slik at hver celle ble 7,5cm x 7,5cm. Dette var for å øke regnenøyaktigheten. En laminær friksjonskonstant på 3,0 og en turbulent friksjonskonstant på $1,7 \cdot 10^{-3}$ ble benyttet.

5.1.5 Resultat

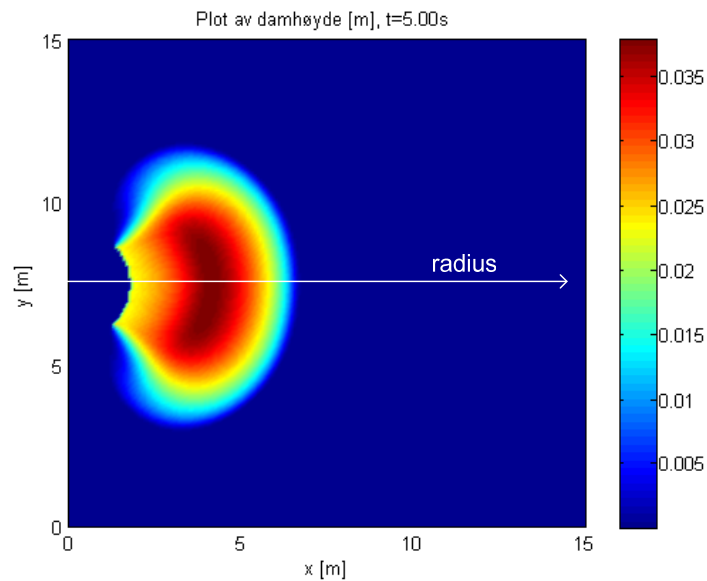
Etter at simuleringen ble gjennomført ble avstand til væskefronten for både eksperiment og simulering plottet mot tid i samme graf. Dette resulterte i figuren nedenfor.



Figur 5.3: Radius for væske-dam plottet mot tid. Forsøksdataene er hentet fra [14]. Plottet viser også hvor avhengig resultatet er av den turbulente friksjonskoeffisienten.

Ifølge målingene ser det ut som det skjer noe etter ca 2 sekunder. Hastigheten på fronten går noe ned. Hvorvidt dette skyldes målefeil eller andre fenomener vites ikke¹². Alt i alt viser resultatet at modellen følger forsøksdataene rimelig godt. Dermed kan en ha stor tro på at modellen tar høyde for den viktigste fysikken i problemet. Resultatet er imidlertid svært avhengig av den turbulente friksjonskonstanten. Simuleringen viste at resultatet var mye mindre avhengig av den laminære friksjonskonstanten.

Plottet på neste side viser dammen i det todimensjonale området. Høyden på dammen er plottet mot posisjon.



Figur 5.4: 2D-plot av dam-høyde med $c_{\text{turb}} = 1,7\text{E-}02$. Informasjon om fronten ble hentet inn langs den hvite linjen.

¹² Ifølge beregningene skjer det ingen dramatisk endring i høyden ved dette tidspunktet, noe som antyder at det ikke vil være noe omslag fra laminær til turbulent strømning. Fronthastigheten endres heller ikke dramatisk ifølge måledataene ved dette tidspunktet (basert på gradienten).

5.2 Sammenligning med avdampingsrater fra eksperiment

I dette avsnittet presenteres avdampingsrater hentet fra eksperimentelle data fra *Drake og Reid* [27]. Disse sammenlignes med CRYOSPREAD der modellen for massetransporten som følge av avdampingen er gitt av (3.39) og:

$$\dot{m}''_{ford} = \frac{\dot{q}''_u}{h_{fg}} \quad (5.2)$$

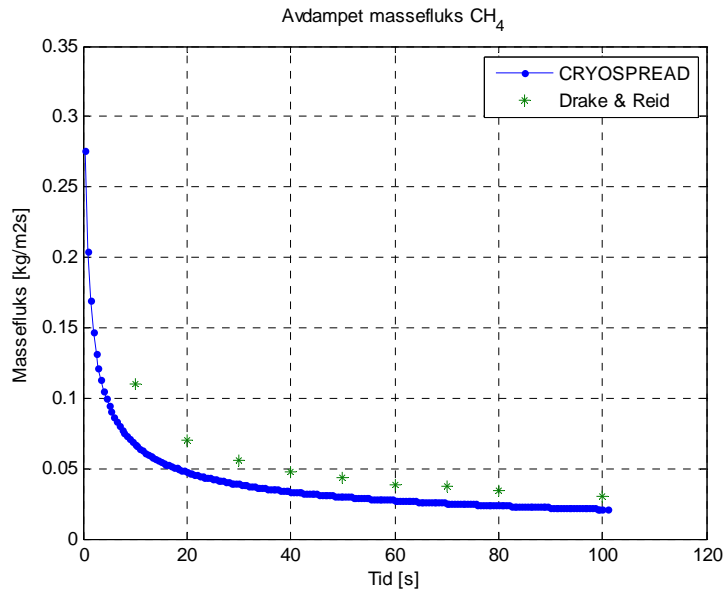
5.2.1 Forsøket

En serie eksperimenter ble gjennomført ved M.I.T for å kartlegge avdampingsrater for nitrogen i væskeform, metan i væskeform og LNG. Et sylindrisk område (18 cm i diameter og 22cm i dybde) ble kuttet ut i en kube av polystyren. Deretter ble bunnen pakket med sand. Kuben ble så lagt på en vekt som var koblet opp mot en datamaskin som registrerte reduksjonen i masse for systemet mot tiden. Den kryogene væsken ble så helt svært raskt over det sylindriske området til en høyde på ca. 5 cm før målingene startet. Forsøket var kontrollert slik at varmeoverføring fra underlaget var den dominerende varmeoverføringsmekanismen.

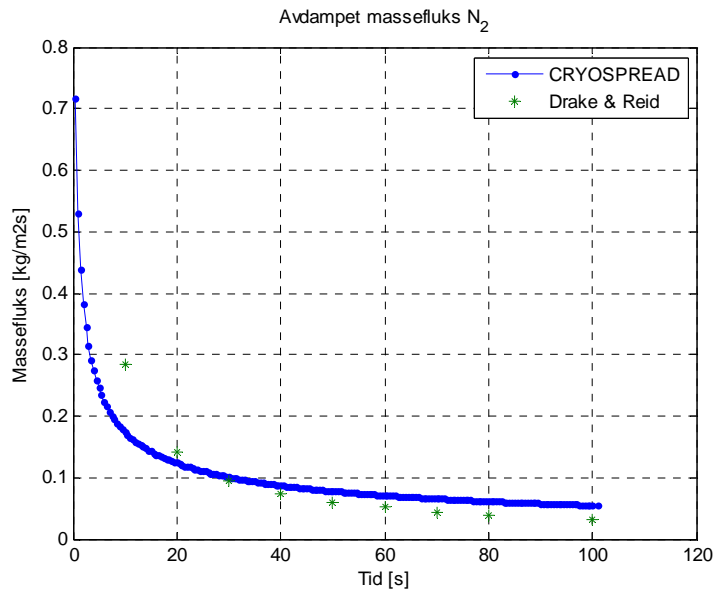
5.2.2 Sammenligning med CRYOSPREAD

Fordi avdampingsmodellen foreløpig bare tar høyde for én komponent har det blitt valgt å bruke dataene fra eksperimenter med flytende metan og nitrogen. Det ene forsøket med metan ble gjennomført på sand med 7,5 % fuktighet. I forsøket med flytende nitrogen ble bakken i tillegg dekket til med et tynt lag plast. Dette var for å hindre væsken i å trenge inn i underlaget.

Sammenligning mellom forsøkene og modell ses i figur 5.5-5.6. Drake og Reid gir de termiske dataene for underlaget med 8 % fuktighet (vedlegg A). De termiske dataene for underlaget, dvs. konduktivitet, massetetthet og varmekapasitet, er like i de to simuleringene.



Figur 5.5: Avdampet massefluks metan mot tid. Underlaget er sand.



Figur 5.6: Avdampet massefluks nitrogen mot tid. Underlaget er sand tildekt med et tynt plastlag.

Det er helt sikkert at konduksjonsmodellen i CRYOSPREAD overestimerer massefluksen i begge tilfellene for et lite tidsintervall i starten. Av figur 5.5 er det tydelig at massefluksen metan underestimeres for senere tider, mens for forsøket med flytende nitrogen (figur 5.6) overestimeres massefluksen noe for senere tider ($t > \sim 20$ s). Det kan også ses av figur 5.6 at modellen ikke passer særlig godt med forsøksdataene den første tiden (~ 20 s). Modellen underestimerer f. eks. massefluksen etter 10 sekunder med ca. $0,1 \text{ kg/m}^2\text{s}$. Det samme er tilfellet for metan.

5.3 Sammenligning med dam-spredningsmodell i Kameleon FirEx (KFX)

Dette avsnittet presenterer resultater av dam-spredning gjort med KFX og ny modell. Hensikten er å vise forskjellen på de to modellene gjennom simulering av spredning av metanvæske fra en firkantet tank. Først presenteres modellen for dam-spredning i KFX. Deretter vises hvordan sprednings-scenariotet settes opp i KFX og ny modell. Så presenteres resultatene.

5.3.1 Modell i KFX

Den eksisterende modellen i KFX er beregnet på viskøse fluider som f. eks olje. Modellen antar følgende [27]:

1. Oljefilmen er så tynn at en antar at treghetskreftene er neglisjerbare i forhold til gravitasjon og viskøs motstand
2. Hastighetskomponentene i dammen er alltid horisontale
3. Underlaget er horisontalt
4. Strømningen er laminær
5. Hastighetsprofilen er parabolisk
6. Ingen skjærspenning på toppen av væskefilmen
7. Strømningen er drevet av hydrostatisk trykk forårsaket av forskjeller i dam-høyden

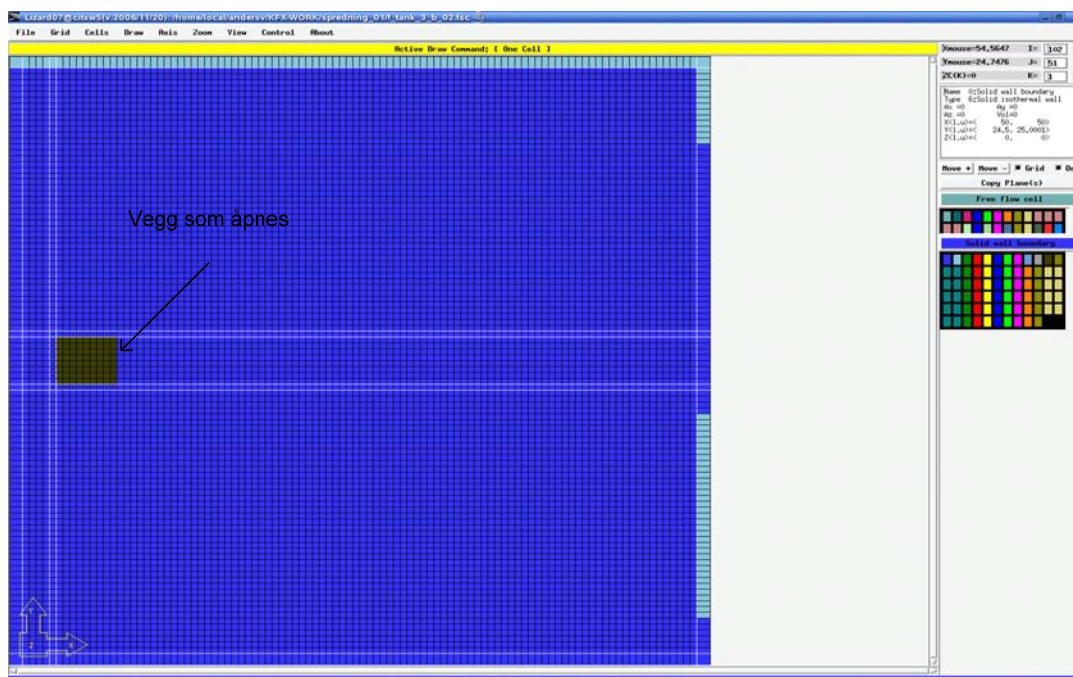
Disse antagelsene resulterer i følgende ligning for høyden på dammen:

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_f g h_z^3}{3\mu_f} \right) \frac{\partial h_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_f g h_z^3}{3\mu_f} \right) \frac{\partial h_z}{\partial y} + S \quad (5.3)$$

der S er et kildeledd som følger av avdamping eller lekkasje. Denne modellen løser kun en ligning for damhøyden som funksjon av tid og posisjon. Hastighetsfeltet blir ikke løst.

5.3.2 Oppsett i KFX

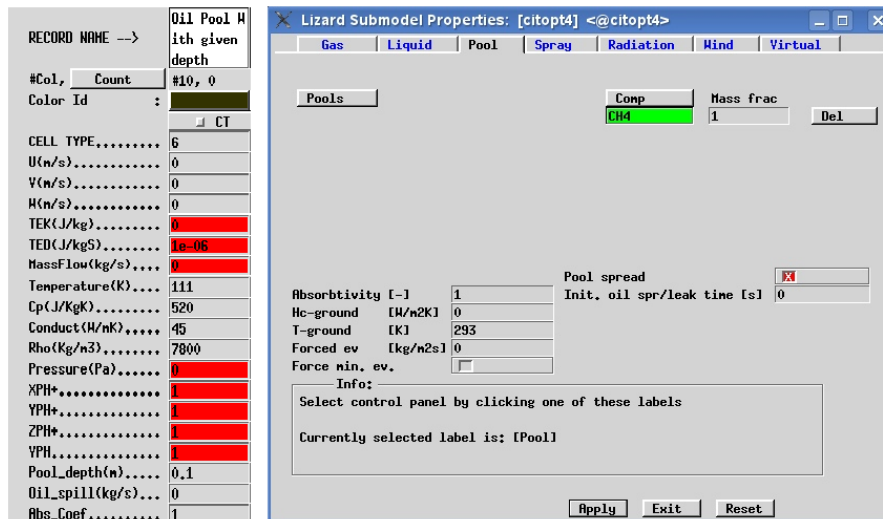
For å sammenligne den nye spredningsmodellen med KFX-modellen ble det satt opp et scenario der flytende metan ble lagret i en tank. Ved tid null ble den ene sideveggen tatt bort slik at væsken begynte å strømme ut. Scenarioet ble satt opp både med KFX og den nye modellen. Avdamping ble skrudd ved at all varmetransport til dammen ble slått av. KFX opererer med forskjellige typer celler for å sette randbetingelser og startbetingelser. For startbetingelsen for metandammen ble celletypen ”dam med gitt dybde” valgt. Figur 5.7 viser beregningsdomenet i den grafiske forprosessoren Lizard. De mørke cellene angir startbetingelsen for dammen.



Figur 5.7: De mørke cellene viser startbetingelsen for høyden på det flytende metanet ($h_{z,0}=0.1\text{m}$) i tanken. Veggens lengst mot høyre åpnes ved tid lik null.

De indre dimensjonene på tanken er $4\text{m} \times 4,5\text{m}$ der starthøyden, $h_{z,0}$, er satt til $0,1\text{m}$. En såpass lav starthøyde er valgt fordi KFX ikke takler en stor diskontinuitet i startbetingelsen for damhøyden. Beregningsdomenet var $50\text{m} \times 50\text{m}$ og delt inn i 100×100 celler slik at $\Delta x = \Delta y = 0,5\text{m}$. Temperaturen i de mørke cellene ble satt til 111K slik at metandammen befant seg under kokepunktet. Trykket i tanken var det samme som atmosfæretrykket utenfor.

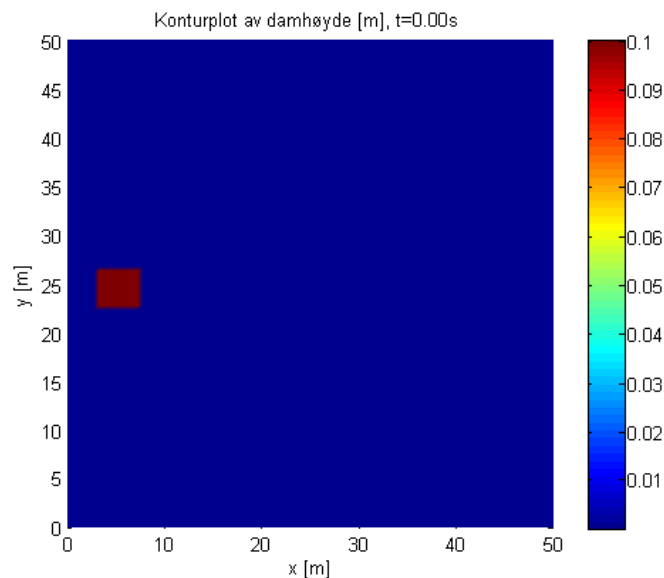
Figur 5.8 viser hvordan startbetingelsen settes for cellene av type ”dam med gitt dybde”. Damspredning er skrudd på.



Figur 5.8: Venstre; Randbetingelser i dam-celle. Temperatur er satt til 111 K, mens damhøyde er satt til 0,1m. NB! Varmekapasiteten, konduktiviteten og massetetheten i kolonnen til venstre er satt for underlaget og ikke for metan i væskeform. Disse dataene blir hentet fra egen datafil for metan.

5.3.3 Oppsett i CRYOSPREAD

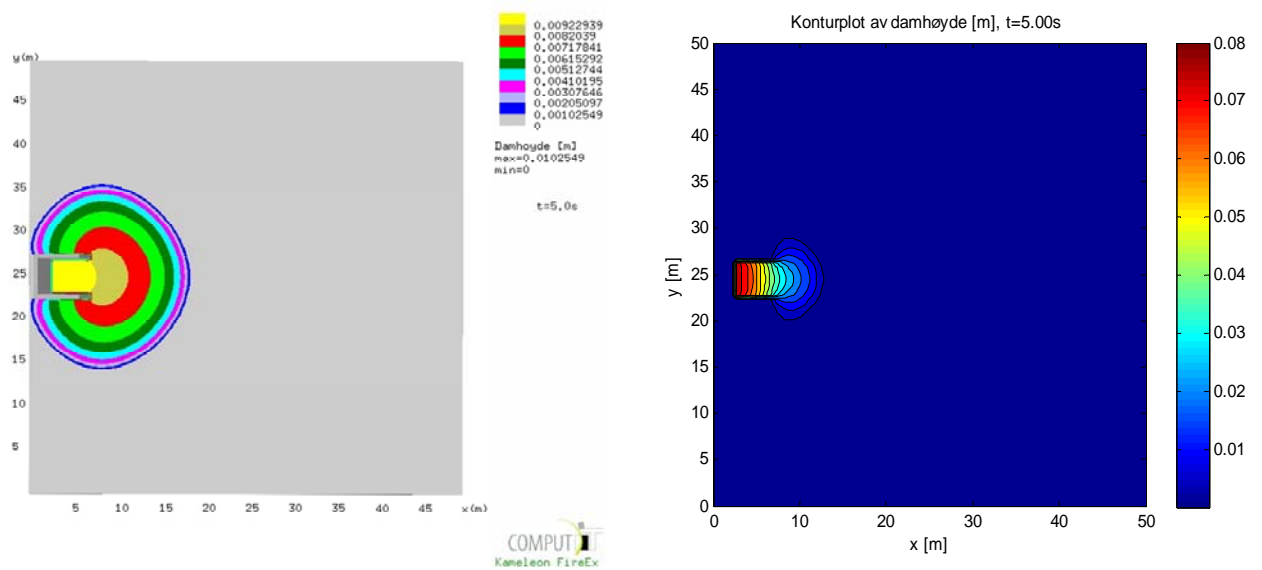
Oppsettet for den nye modellen uten avdamping ble satt på samme måte. Hastigheter normalt inn mot tankveggen ble satt til 0 slik at veggene ble utblokkerte. Startbetingelsen ses i figur 5.9. Nettverket er satt opp på samme måte som i KFX med $\Delta x = \Delta y = 0,5m$.



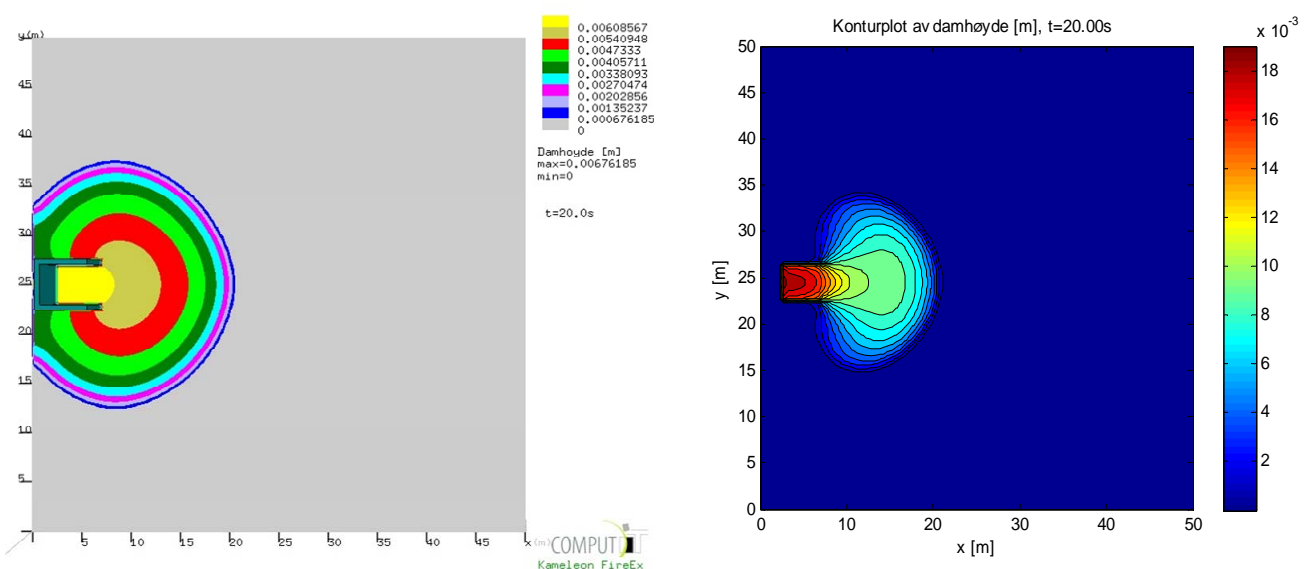
Figur 5.9: Startbetingelse for ny modell.

5.3.4 Resultater

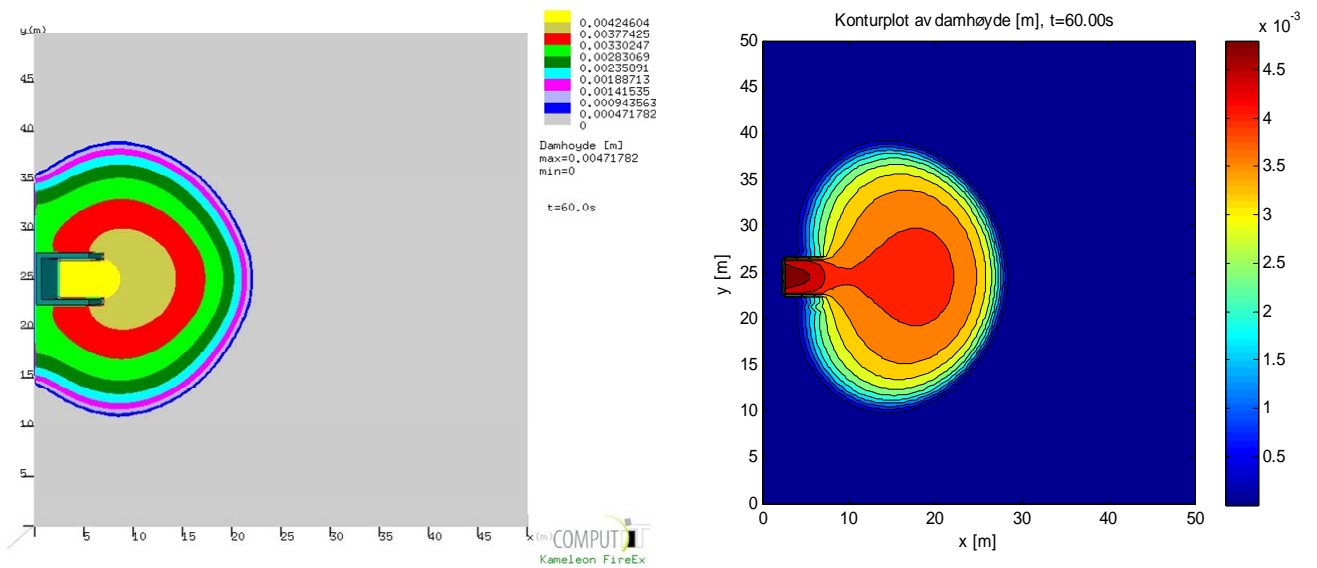
Simuleringer med begge modellene ble så satt i gang. Total simuleringstid var 60 sekunder. Resultatene kan ses i figurene nedenfor. Damhøyden er plottet som konturplot i 2D for forskjellige tider. Resultater fra KFX befinner seg til venstre og resultater fra CRYOSPREAD til høyre.



Figur 5.10: Konturplot av høyden på dammen etter 5 sekunder. Venstre; KFX, høyre; CRYOSPREAD

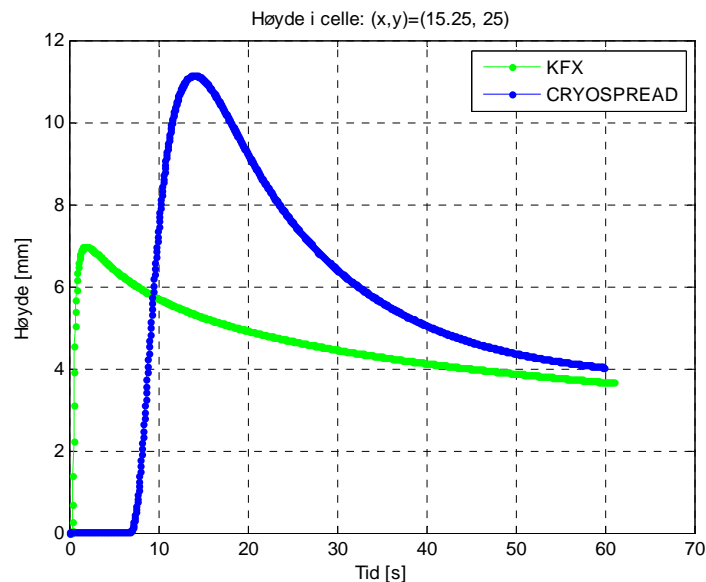


Figur 5.11: Konturplot av høyden på dammen etter 20 sekunder. Venstre; KFX, høyre; CRYOSPREAD



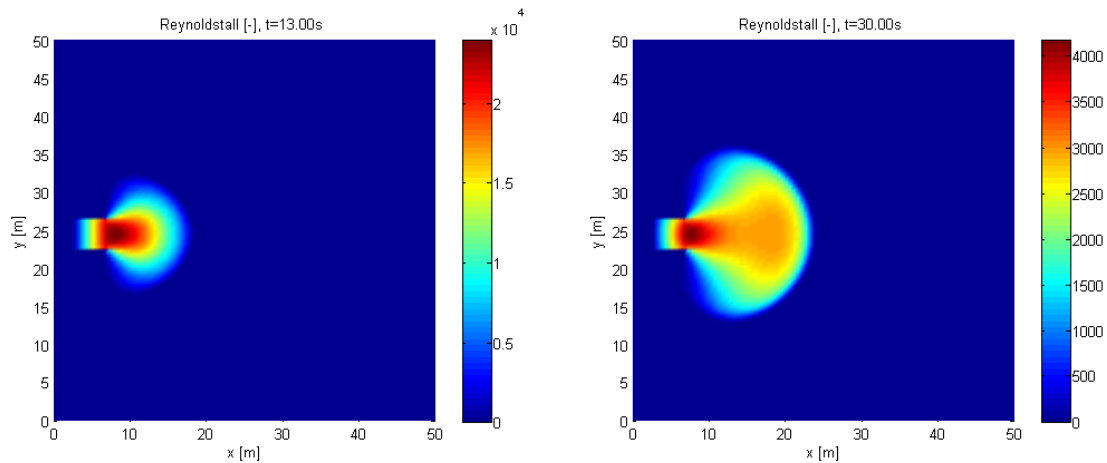
Figur 5.12: Konturplot av høyden på dammen etter 60 sekunder. Venstre; KFX, høyre; CRYOSPREAD

KFX har muligheten til å sette ut overvåkningsceller der variable kan hentes ut som funksjoner av tiden. Dette har blitt gjort for cellen som er plassert 8,25 m i front av utslippsveggen. Figur 5.13 viser resultatet for de to spredningsmodellene.



Figur 5.13: Høyde på dammen plottet mot tid i overvåkningscelle.

Av figur 5.10-5.12 er det tydelig at dammen sprer seg mye hurtigere med KFX-modellen enn med CRYOSPREAD. Dette bekreftes også av figur 5.13 som viser at fronten ankommer overvåkningscellen 7 til 8 sekunder senere med modellen i CRYOSPREAD sammenlignet med KFX-modellen.



Figur 5.14: Reynoldstall for strømmingen etter henholdsvis 13 og 30 sekunder.

Figur 5.14 viser reynoldstallet for strømmingen basert på (4.41). Plottet viser at impulskreftene er mye større enn de viskøse kreftene, i alle fall i starten.

5.4 Sammenligning med avdampningsmodell i KFX

Det har også blitt gjennomført simuleringer for å sammenligne med eksisterende avdampningsmodellen i KFX. Dette er gjort kun for å understreke den kvalitative forskjellen på de to modellene.

5.4.1 Modell i KFX

Kildeleddet for avdampningsraten i KFX er formulert på samme måte som (5.2). Forskjellen er at varmeoverføringen fra bakken i KFX er modellert med en konstant varmeovergangskoeffisient og en temperaturdifferanse mellom bakken og væsken [28]:

$$\dot{q}_u'' = h_u (T_{jord} - T_{dam}) \quad (5.4)$$

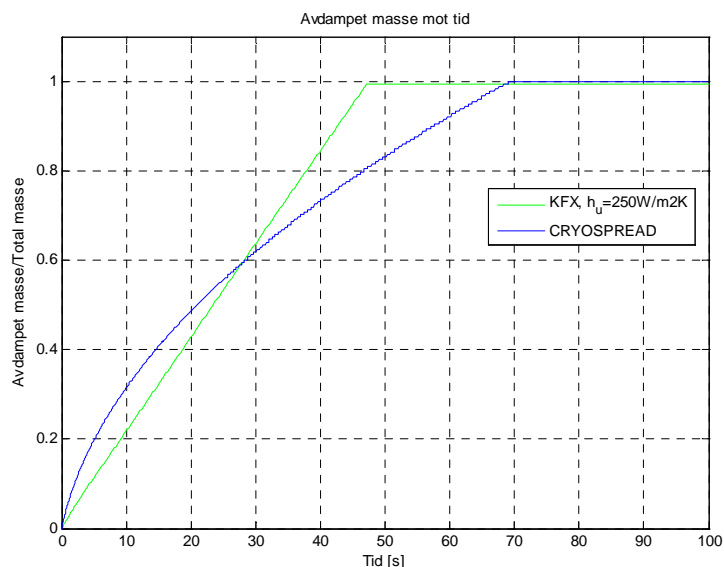
Dette resulterer i en konstant avdampingsrate fordi kjølingen av underlaget ikke tas hensyn til.

5.4.2 Simulering og resultat

Dammen bestående av metan ved 111 K på 20,5m x 20,5m var 1 cm dyp. Temperaturen på bakken ble satt til 293 K. Termiske data for underlaget ble satt til verdier representative for betong (se vedlegg A). Varmeovergangskoeffisienten h_u kan regnes ut ved å skrive:

$$q_u'' = \frac{k}{(\pi\alpha)^{1/2}} \cdot t^{-1/2} (T_{jord} - T_{dam}) = h_u (T_{jord} - T_{dam}) \quad \text{der} \quad h_u = \frac{k}{(\pi\alpha)^{1/2}} \cdot t^{-1/2} \quad (5.5)$$

Varmeovergangskoeffisienten i KFX ble dermed satt til $h_u=250\text{W/m}^2\text{K}$, noe som svarer til h_u gitt av (5.5) etter 10 sekunder. Dette ble gjort for å ha et kvalitativt sammenligningsgrunnlag. Dam-spredningen ble slått av både i KFX og CRYOSPREAD. Deretter ble simuleringene satt i gang. Total masse metan i dammen ved start var ca.1780 kg. Figur 5.15 viser avdampet masse plottet mot tiden.



Figur 5.15: Figuren viser den kvalitative forskjellen i avdampet masse for henholdsvis modell med konstant h_u og konduksjonsmodell.

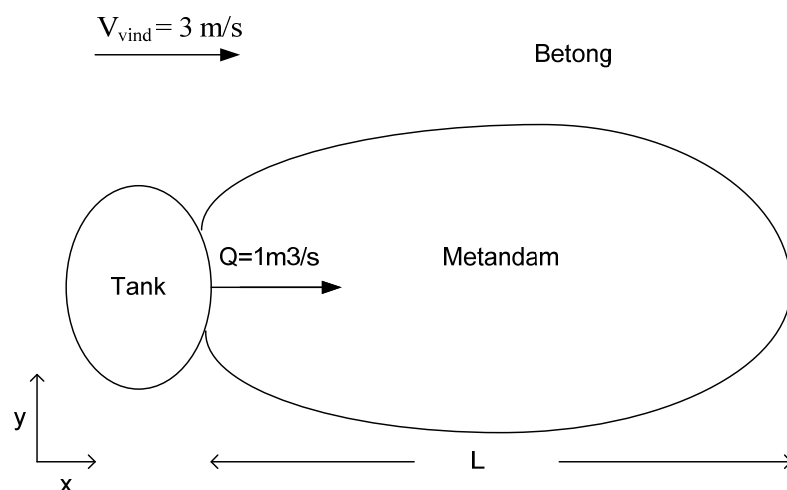
Fordi massefluksen er proporsjonal med $t^{-1/2}$ i simuleringen med CRYOSPREAD, vil avdampet masse være proporsjonal med $t^{1/2}$ (massefluks integrert over tid). I KFX-simuleringen er massefluksen konstant og følgelig blir avdampet masse proporsjonal med t .

5.5 Simulering av lekkasje fra tank

Det har også blitt gjennomført en simulering av en lekkasjeulykke med CRYOSPREAD. Dette har blitt gjort for å få et innblikk i hvordan koden takler å simulere komplekse situasjoner med spredning og avdampning. Spredning av dammen samt

5.5.1 Scenario

En tank som lagrer metan i væskeform står på land. Plutselig skjer en ulykke som forårsaker et 1 m^2 stort hull på tanken med en volumstrøm på $Q = dV/dt = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ ut i x-retning. Denne varer i 10 sekunder før lekkasjen stoppes. Underlaget på stedet er flatt og består av betong. Vindretningen på ulykkesstedet er parallell med utslippet og vindhastigheten er på 3 m/s . Lufttemperaturen og temperaturen på bakken er $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Se figur 5.16 for skisse av utslippet.



Figur 5.16: Skisse av utslippet.

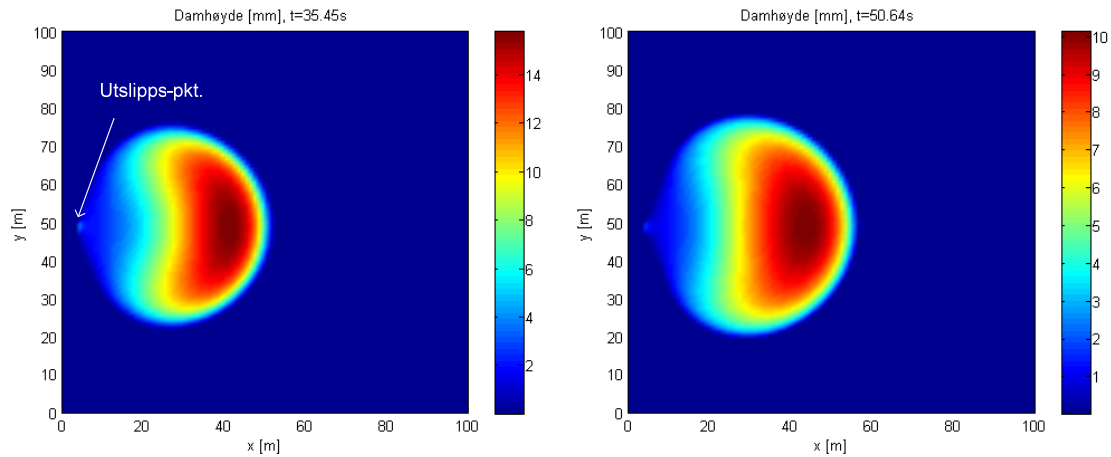
5.5.2 Oppsett av modell

For å simulere selve lekkasjen ble det satt to utslippsceller i punktene $(x,y)_1 = (5, 24,5)$ og $(x,y)_2 = (5, 25,5)$. Damhøyden i disse to cellene ble satt slik at tverrsnittsarealet ($h_z \cdot 2\Delta y$) tilsvarte 1 m^2 og hastighetskomponenten i x-retning i disse to cellene ble så regnet ut fra lekkasjekilden. Hastigheten i skifter til null når 10 sekunder har gått. De termiske dataene for betong ble brukt for underlaget.

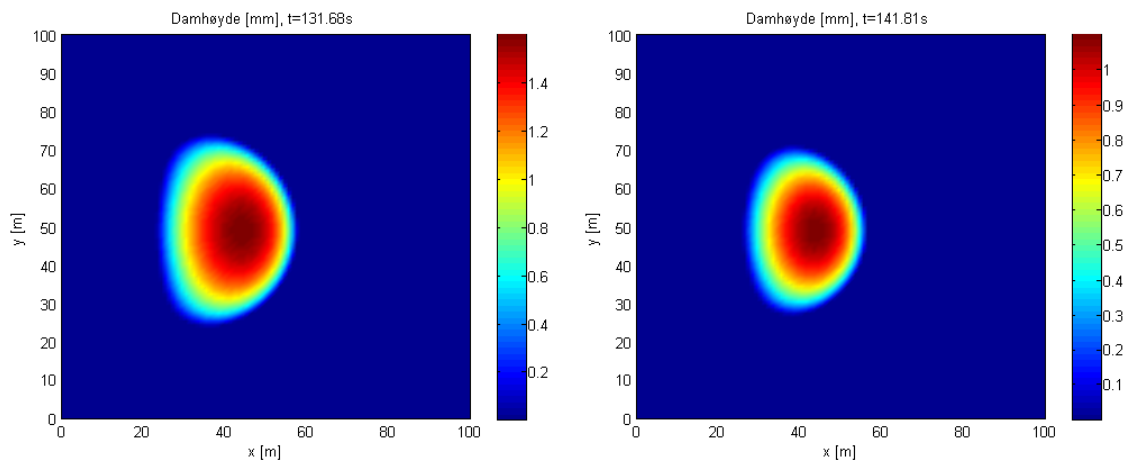
I tillegg til varmeoverføring fra bakken ble det også tatt høyde for konvektiv varmeoverføring fra lufta. Programmet estimerer et midlere konvektivt varmeovergangstall ved hjelp av flat plateteori (se vedlegg B) for hvert tidsskritt basert på lengden L vist i figur 5.16. Det ble antatt at strømmingen over dammen var i det turbulente området.

5.5.3 Resultater

Total simuleringstid var 200 sekunder. Figur 5.17-5.18 viser hvordan dammen utvikler seg i løpet av simuleringen. Lekkasjen har stoppet før disse tidspunktene.

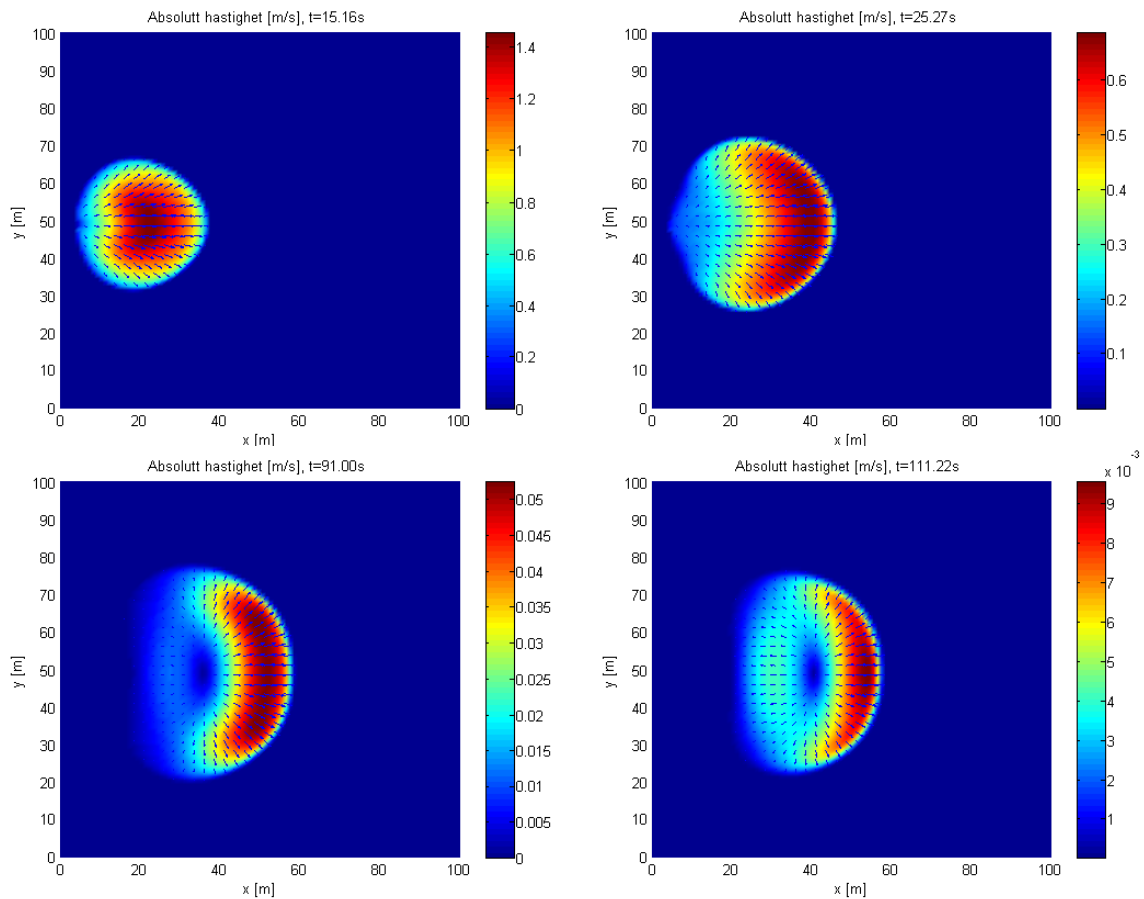


Figur 5.17: Utvikling av dammen over tid. Venstre; $t=35$ s. Høyre; $t=50$ s. ($\Delta x = \Delta y = 1$ m, $\Delta t = 9,2E-2$ s).



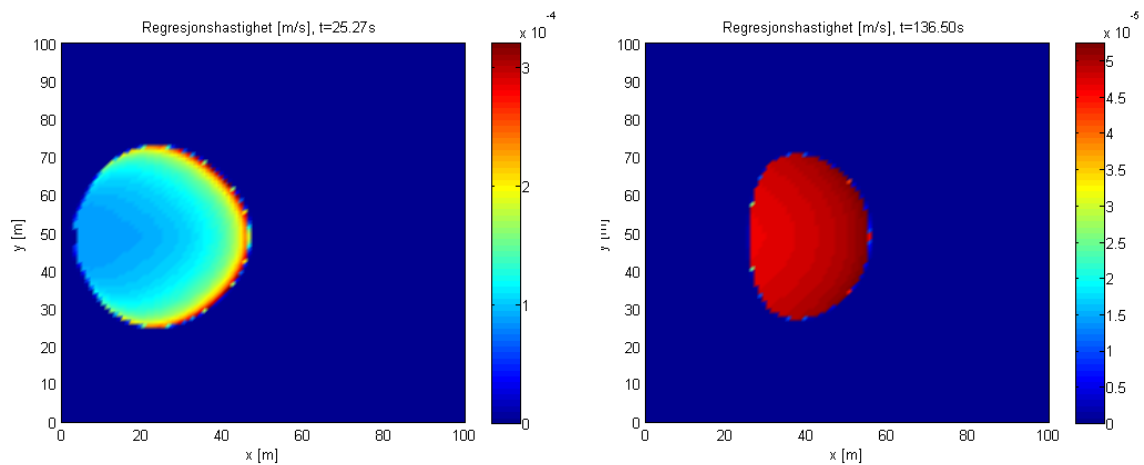
Figur 5.18: Utvikling av dammen over tid. Venstre; $t=132$ s. Høyre; $t=142$ s. ($\Delta x = \Delta y = 1$ m, $\Delta t = 9,2E-2$ s).

Av figur 5.17-5.18 kan det ses ifølge simuleringen at den dypeste delen av dammen legger seg ca. 40 m nedstrøms i forhold til utslippspunktet, før den damper av. Strømningshastigheten er da så lav at dammen har i prinsippet stoppet opp. Det vil si at dammen har mistet impulsen den fikk fra utslippskilden samt at den drivende høydeforskjellen er for lav til å spre dammen nevneverdig. Legg merke til at absolutt hastighet er i størrelsesorden 10^{-3} m/s etter ca. 110 sekunder i følge simuleringen (figur 5.19).



Figur 5.19: Plot av absolutt hastighet samt vektorer som angir strømningsretningen.

Figur 5.20 viser regresjonshastigheten som funksjon av sted etter henholdsvis ca. 35 sekunder og 136 sekunder. Plottene viser kvalitativt hvordan regresjonshastigheten endrer seg med tiden. Til å begynne med, mens dammen fremdeles sprer seg, er regresjonshastigheten høy i fronten av dammen ($\sim 3 \cdot 10^{-4}$ m/s) mens den avtar hurtig bak fronten. På slutten av spredningen legger ikke dammen under seg nytt land og regresjonshastigheten for dammen blir mer uniform og lav ($\sim 5 \cdot 10^{-5}$ m/s).

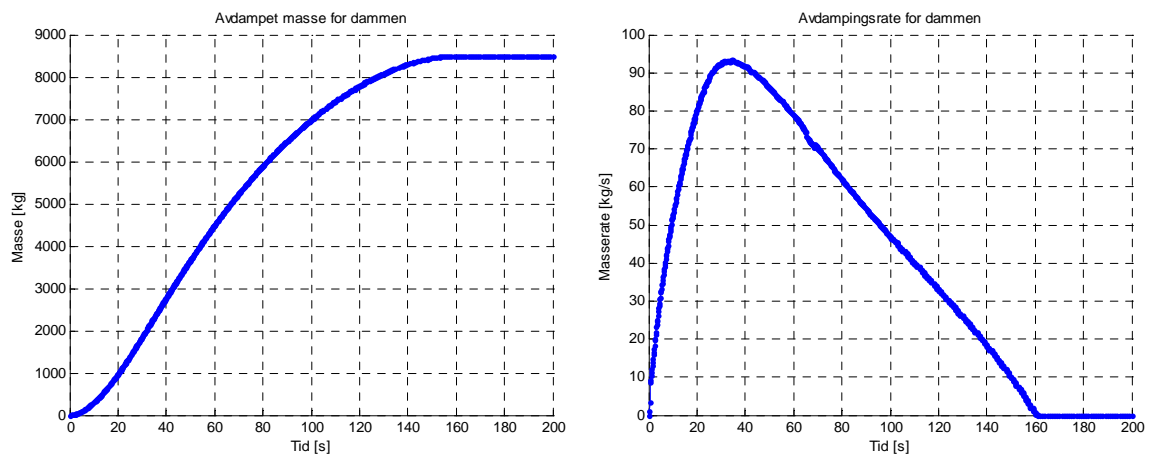


Figur 5.20: Regresjonshastighet etter henholdsvis ca. 25 sekunder og 136 sekunder.

Figur 5.2 viser forløpet for total masse i dammen. Lekkasjen på $Q = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ tar slutt etter $\Delta t = 10 \text{ s}$. Massen av metan som akkumulerer i dammen i løpet av denne tiden er:

$$m_{\text{tot}} = \rho_{\text{liq,CH}_4} \cdot Q \cdot \Delta t = 423,4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 8468 \text{ kg} \quad (5.6)$$

Total koketid fra utslippet starter til all masse i dammen er avdampet τ , er ca. 160 s i følge simuleringen. Rett etter at lekkasjen har startet øker avdampingsraten med tiden. Så kommer det til et vendepunkt ved $t \sim 35\text{s}$, dvs. total avdampingsrate avtar med tiden. Deretter avtar fordampingsraten tilnærmet lineært med tiden inntil all massen i dammen har fordampet.



Figur 5.21: Venstre; Plot av total avdampet masse mot tiden. Høyre; Avdampingsrate som funksjon av tiden.

6 Diskusjon

Kryogener lagres ved svært lave temperaturer for å holdes flytende. LNG, der hovedbestanddelen er metan, lagres for eksempel ved ca. 111 K. Det spesielle med en eventuell utslippsulykke for slike væsker er den store temperaturredifferansen mellom kokepunktet og omgivelsene. Dette medfører at varmeovergangen til utslippet blir svært stor, noe som i sin tur fører til store avdampingsrater som utgjør en potensiell branntrusel for omgivelsene. Dam-spredningen skiller seg også ut fra for eksempel spredning av oljer ved at de viskøse kreftene er svært små. Dette gjør at dammer som består av kryogene væsker sprer seg hurtigere enn hva som er typisk for olje.

6.1 Dam-spredning

Denne oppgaven har fokusert på utslipp på land. Figur 1.1 viser hvilke krefter som virker under spredningen: treghetskrefter, gravitasjonskrefter¹³, viskøse krefter samt overflatespenningen. I starten av spredningen vil gravitasjonskreftene dominere og strømmingen kan beskrives ved en balanse mellom gravitasjonskreftene og treghetskreftene. Dette regime avløses av et regime der treghetskreftene blir små sammenlignet med de viskøse kreftene. I slutten av spredningen kan dammen bli så tynn at overflatespenningskrefter¹⁴ tar over som den drivende kraften. Selv om spredningen av dammen er delt inn i forskjellige regimer er det viktig å huske på at det er en glidende grense mellom dem og at alle kreftene virker på en og samme gang. Det er bare forholdet mellom dem som endrer seg slik at enkelte krefter blir viktigere å ta hensyn til enn andre.

For å modellere spredningen brukes de todimensjonale grunt vann-ligningene (3.23). Dette settet av partielle differensialligninger består av én kontinuitetsligning og to impulslikninger i de respektive horisontale retningene. En tilnærmer da strømmingen som kun horisontal. Dette blir en bedre tilnærming når den horisontale skalaen er mye større enn den vertikale skalaen for dammen. Det er imidlertid viktig å merke seg at det alltid vil være et grensesjikt til stede i vertikal retning, men at en håper å si noe om horisontalhastigheten midlet i z-retning (vertikalretningen) ved å gjøre denne tilnærmingen. Modellen tar også høyde for viskøse krefter. Dette er blitt gjort ved å anta at den dominerende hastighetsgradienten befinner seg i z-retning. Ved å anta at strømmingen kun foregår horisontalt har en mistet informasjonen om denne gradienten, men det har blitt antatt et lineært profil i z-retningen. Dette fører til uttrykkene for den viskøse motstanden (3.26) gitt av *Webber og Jones* [8] slik den inngår i impulslikningen. Det påpekes at dette er en svært enkel modell, men en antar at dette er en tilnærming som fungerer for de aller fleste praktiske formål. Krefter som skyldes overflatespenning er neglisjert i modellen. For kryogener som har et mye lavere kokepunkt enn omgivelsene, vil dam-spredningen sjeldent nå dette regimet [18]. Om spredningen likevel skulle nå dette regimet, antas det på grunn av avdampingen at væsken ikke forblir lenge nok i dette regimet til å gjøre noen markant forskjell.

¹³ Gravitasjonskreftene er egentlig forskjellen i hydrostatisk trykk pga forskjeller i høyde på dammen.

¹⁴ Med overflatespenningskrefter menes her ubalansen mellom overflatespenning mellom væske/luft og væske/underlag.

Modellen kan også ta hensyn til spredning over ujevne underlag¹⁵. Dette kommer inn i impulslikningene som kildeledd avhengig av helningen på underlaget og gravitasjonskonstanten (3.19).

6.2 Avdamping

Å bestemme avdampingsraten er avgjørende for å regne på hvordan gassen dispergerer i atmosfæren. Dette vil bestemme konsentrasjoner av den brennbare gassen som i sin tur avgjør risikoen for brann i området.

Det antas at dammen ligger på kokepunktet under hele spredningsforløpet. Dette er naturlig etter som de fleste kryogener lagres tett opptil kokepunktet. Fordi det i denne oppgaven kun har blitt sett på dammer som består av én komponent, vil ikke sammensetningen variere og følgelig forandrer kokepunktet seg heller ikke. Avdampingsraten bestemmes ut fra forholdet mellom tilført varme og fordampingsvarme (3.39). Det vil si at all tilført varme går med til fordamping.

Den tilførte varmen består av varme fra underlaget, strålingsvarme og varme fra luften. Den største varmeovergangen for spredning uten brann skjer mellom dammen og underlaget [18]. Forsøk [20,27] tyder på at varmeovergangen er styrt av konduksjonen nede i bakken. Det vil si at det oppstår etter kort tid såpass god termisk kontakt mellom bakken og dammen at den konduktive motstanden er mye større enn den konvektive motstanden mellom dammen og underlaget. I modelleringen antar en derfor at overflaten blir øyeblikkelig kjølt ned til temperaturen til dammen.

Webber [22] setter opp en tidsskala for den horisontale varmeledningen i bakken. Han finner ut fra dette at varmeledningen bør kunne beskrives som kun vertikal. Dette gjelder imidlertid for store dammer. For industrielle ulykker kan en se for seg dammer med radius mye større en 1 m. En dam med radius 1 m fører til en horisontal tidsskala på ca. 170 timer for et underlag som betong (se avsnitt 3.3.3). Det er rimelig å tro at de aller fleste typer utslipp av kryogene væsker har fordampet helt lenge før dette.

6.3 Numerisk implementering

For å kunne løse settet av modelligninger (3.23) ble Fortran-programmet CRYOSPREAD skrevet. For diskretiseringen ble en endelig volum metode (FVM) benyttet. Fluksfunksjonene på grensene til kontrollvolumene ble regnet ut ved hjelp av *Rusanovs metode* (4.12) som er en relativ enkel metode for hyperbolske ligninger. Denne metoden viste seg å redusere den numeriske diffusjonen i forhold til metoden som ble brukt i prosjektet [1]. Avhengigheten av tiden blir så løst ved hjelp av en Runge-Kutta-metode (4.15). Det resulterende skjemaet blir derfor 1. ordens i rom og 3. ordens i tid. En må imidlertid huske på at friksjonsleddene blir løst ved en semi-implisitt metode på grunn av at de skapte trøbbel med stabiliteten. Denne metoden er 1. ordens i tid slik at den totale nøyaktigheten i tid for skjemaet som helhet går ned.

¹⁵ Når underlaget er horisontalt har ikke gravitasjonskraften noen komponent i horisontal retning annet gjennom forskjellen i hydrostatisk trykk i dammen. Om underlaget har en helning har den derimot det. Dette er den ”egentlige” gravitasjonskraften, men omtales ofte som krefter fra underlaget i litteraturen.

Om en ønsker høyere ordens skjema i rommet er det mulig å utvide det allerede eksisterende skjemaet. Dette kan gjøres ved *cellerekonstruksjon* [4]. I stedet for å anta at variablene er konstante innenfor hver celle er det mulig å anta at variabelen er fordelt etter lineære, annen ordens eller høyer ordens profiler innenfor cellen. Slik kan en regne seg fram til celleranden og finne mer nøyaktige uttrykk for fluksfunksjonene på rendene.

6.4 Simuleringer og observasjoner

Simuleringer har blitt gjennomført med CRYOSPREAD. Disse deles inn i simuleringer satt opp for å sammenligne den nye modellen med forsøksdata og for å sammenligne med modeller i KFX. Det har i tillegg blitt gjennomført en simulering for en tenkt spredningsulykke. Dette er gjort for å se hvordan modellen takler å simulere spredning med fordamping med de antagelsene som ligger til grunn for modellen.

I avsnitt 5.1 ble spredningsmodellen i CRYOSPREAD sammenlignet med forsøksdata hentet fra [14]. Forsøket består i å måle radius av en vanddam mot tiden for en lekkasje nederst på en tank. Underlaget for spredningen er betong. Av figur (5.3) kan det ses at simuleringsresultatet følger forsøksdataene rimelig bra for en turbulent friksjonskonstant c_{turb} på $1,7 \cdot 10^{-3}$. Figuren viser også hvordan spredningen varierer med c_{turb} . Det viser seg at utviklingen av radius på dammen er svært avhengig av den turbulente friksjonskonstanten. Av figur 5.3 kan det observeres at om en endrer den turbulente friksjonskonstanten med en faktor på 10 så utgjør dette en forskjell på dam-radiusen etter 5 sekunder på ca. 3 meter. Dette er en stor usikkerhetskilde i modellen og flere kilder, deriblant Brandeis og Ermak [10], anerkjenner at konstanten må bestemmes fra forsøk. Imidlertid viser flere sammenligninger mellom forsøk og simuleringer at c_{turb} vil være i størrelsesorden 10^{-3} [8]. Variasjon av den laminære konstanten viser ingen markant forskjell i simuleringen av spredningsforsøket. De laminære viskøse spenningene spiller en større rolle for slutten av spredningsforløpet når dammen blir svært tynn. Det vil si at omslaget skjer ifølge modellen ved høyden:

$$h_z = \frac{c_{\text{lam}}}{c_{\text{turb}}} \cdot \frac{v}{|\mathbf{V}|} \quad (6.1)$$

Uttrykket kommer fram ved hjelp av (4.41). Den laminære konstanten er som oftest i størrelsesorden 1 [7].

I avsnitt 5.2 sammenlignes avdampingsrater målt fra forsøk mot avdampingsratene beregnet med CRYOSPREAD. Spredningen er skrudd av. Figur 5.5-5.6 viser avdampingsfluksen ($\text{kg/m}^2\text{s}$) som funksjon av tiden for henholdsvis flytende metan og nitrogen. Underlaget i begge forsøkene er pakket jord med termiske egenskaper gitt av [27]. Forskjellen er at i forsøket med nitrogen har underlaget blitt dekket til med et tynt plastlag for å hindre inntrengning i underlaget. Begge modellene overestimerer nok avdampingsraten i begge tilfellene for et lite tidsintervall i starten. Dette blir etterfulgt av et tidsintervall ($t \sim 20\text{s}$) der avdampingsraten underestimeres for forsøket med metan og overestimeres litt for forsøket med nitrogen. Etter hvert som væsken sprer seg, legger den tørre områder under seg. En kan tenke seg at hvis modellen for avdampingsfluksen gjør en feil de første 20 sekundene etter at nytt tørt land har blitt oversvømt, vil denne feilen i avdampert masse akkumulere proporsjonalt

med arealet dammen sprer seg over. Dette kan dermed gi utslag i forskjeller mellom beregnet og observert koketid for dammen.

En interessant observasjon er at modellen passer bedre med forsøksdataene for nitrogen der bakken er tildekt med plast enn med forsøksdataene for metan der bakken ikke er tildekt. Dette kan forklares med at modellen i CRYOSPREAD ikke tar høyde for den økte varmeoverføringen på grunn av økt varmeoverførende areal når væsken trenger inn i jorda under.

I avsnitt 5.3 settes det opp et spredningsscenario der hensikten er å sammenligne den eksisterende modellen for spredning av dammer med modellen i CRYOSPREAD. Avdampingen blir skrudd av. Startbetingelsen er flytende metan lagret i en container med indre dimensjon $4\text{ m} \times 4,5\text{ m}$. Høyden ved starten er $0,1\text{ m}$. Ved tid lik null blir den høyre veggen borte og metanvæsken strømmer fritt ut på bakken utenfor containeren. Figur 5.10-5.12 viser hvordan dammen utvikler seg med tiden for KFX (venstre) og CRYOSPREAD (høyre). Plottene viser tydelig forskjell på de to modellene.

For det første viser KFX-modellen at væsken sprer seg mye raskere enn det væsken gjør i CRYOSPREAD. Figur 5.13 viser faktisk at væskefronten med KFX passerer overvåkningscellen ca. hele 8 sekunder før væskefronten med CRYOSPREAD. Denne trenden vises også tydelig på konturplottene. Dette skyldes nok forskjellen i antagelsene som ligger til grunn for modellene. KFX-modellen antar at dam-spredningen hele tiden befinner seg i gravitasjons-/viskøse regimet. Ifølge bergningene av reynoldstallet i strømmingen er dette ikke tilfelle i starten av spredningen (se figur 5.14). Det vil si at beregningene i KFX tufter på en balanse mellom gravitasjonskreftene som er forholdsvis store i starten og de viskøse kreftene som er svært små i starten. Dermed får denne modellen ikke med tregheten i væsken i starten. Derfor spres væsken mye raskere med denne modellen.

For det andre blir væsken spredd ut i radiell retning med én gang den kommer ut av containeren med modellen i KFX. I CRYOSPREAD har væsken en bevegelsesmengde i x-retningen når den kommer ut av containeren og væsken sprer seg derfor mer i x-retningen figur 5.10-5.12. Dette skyldes rett og slett at modellen i KFX ikke løser noen impulslikning.

Avsnitt 5.4 viser hvordan forskjellen i modelleringen av varmeovergangen fra bakken påvirker avdampingen. Den kvalitative forskjellen er at KFX antar et konstant varmeovergangstall mellom bakken og dammen, mens CRYOSPREAD baserer seg på løsningen av konduksjonslikningen i vertikal retning nede i bakken. Som ventet fører dette til at total avdampet masse fra dammen er en lineær funksjon av tiden i KFX, mens den er proporsjonal med $t^{1/2}$ med konduksjonsmodellen (figur 5.15). Eventuelt hvis en ønsker å forandre på modellen i KFX er det enkelt å erstatte varmeovergangstallet med:

$$h_u = \frac{k}{(\pi\alpha)^{1/2}} \cdot t^{-1/2} \quad (6.2)$$

slik at varmeovergangstallet blir avhengig av de termiske egenskapene til bakken og en funksjon av tiden.

Avsnitt 5.5 tar for seg en tenkt lekkasje av metan i væskeform. Lekkasjen på $2 \text{ m}^3/\text{s}$ står på i 10 sekunder før den stoppes. Hullet lekkasjen skjer gjennom er 1 m^2 slik at hastigheten i utslippspunktet er 2 m/s . Underlaget er betong. Simuleringen blir gjort med CRYOSPREAD med både spredning og fordamping inkludert. Den turbulente friksjonskonstanten velges i likhet med forsøket med vann til $1,7 \cdot 10^{-3}$, mens den laminære konstanten settes til 3,0. En kan imidlertid tenke seg at den kraftige boblingen i væsken påvirker strømmingen gjennom den ekstra turbulensen den forårsaker. Dette er det også knyttet usikkerhet til. Fordi det ikke har lyktes å få tak i forsøksdata for spredning av kryogene væsker settes konstantene som de gjør.

Figur 5.17-5.18 viser hvordan dammen utvikler seg med tiden. En kan se at ifølge simuleringen legger dammen seg rundt ca. $x = 45\text{m}$ før dammen fordamper bort. Figur 5.19 viser plot av regresjonshastigheten. Disse viser at mens dammen fremdeles er i bevegelse og legger tørre områder under seg, er regresjonshastigheten svært høy i kanten av dammen. Regresjonshastigheten avtar så hurtig bakover i dammen ettersom underlaget har blitt kjølt ned av fronten av dammen som allerede har passert disse områdene. Plottet til høyre i (figur 5.20) viser at ved senere tider når dammen har stoppet opp, ligger den på stedet og kjøler underlaget. Derfor går regresjonshastigheten ned og den blir mer uniform i dammen, noe som virker fornuftig.

Figur 5.21 viser total avdampert masse for dammen (til venstre) og total avdampingsrate (kg/s). En ser at total koketid for dammen er ca. 160 sekunder i følge modellen. På kurven for avdampingsraten ser en at denne øker fram til ca. 35 sekunder. Dette svarer til det tidspunktet da økningen på avdampingsraten som følger av at dammen legger under seg nye tørre områder, veies opp av tapet i avdampingsraten som følger av kjølingen av underlaget. Deretter følger et tidsintervall der den totale avdampingsraten avtar tilnærmet lineært ifølge simuleringen. Dette kan virke litt rart i første omgang fordi en kanskje hadde ventet at avdampingsraten skulle være proporsjonal med varmeoverføringen som igjen er proporsjonal med $t^{-1/2}$. En må imidlertid huske at overflaten til dammen har en krumning¹⁶ som gjør at avdampingen får "tatt av" en mindre masse ettersom tiden går. Dette på grunn av at dammen får mindre og mindre kontaktflate med underlaget fordi væsken ikke rekker å spre seg før den fordamper. Ovenfra vil det se ut som om dammen blir "spist opp" fra sidene helt til det kun er en liten flekk igjen på midten.

¹⁶ Modellen tar ikke hensyn til overflatespenning som antageligvis endrer denne effekten mot slutten. (Dammen kan f. eks. bryte opp i dråper på underlaget.)

7 Konklusjon og forslag til videre arbeid

7.1 Konklusjon

Denne oppgaven har tatt for seg modellering av spredning og avdamping av kryogene væsker. En todimensjonal modell som baserer seg på grunt vann-ligningene har blitt utviklet for spredning av væsker på land. Det har blitt antatt at denne væsken kun består av én komponent. Modellen tar hensyn til viskøse krefter, varmeoverføring og avdamping.

Programmet CRYOSPREAD har blitt utviklet for å løse modelligningene numerisk. Dette programmet er skrevet i FORTRAN 90. Koden innehar muligheten til å velge om en kun skal simulere dam-spredning, kun simulere avdamping eller begge deler. Startbetingelser og randbetingelser kan endres etter eget ønske slik at en for eksempel kan se på dambrudd eller lekkasjer. Noe kunnskap om programmet er en fordel hvis en skal gjøre dette.

Modellen for dam-spredning har blitt testet opp mot forsøksdata. Resultatene viser at modellen klarer å følge forsøksdataene rimelig godt. Dette er imidlertid svært avhengig av at en velger en riktig turbulenskonstant. Denne konstanten representerer mye av usikkerheten i modellen for dam-spredningen.

Avdampingsmodellen har også blitt testet mot forsøksdata. Disse viser at varmeledningsmodellen ser ut til å prestere bra for senere tider ($t > \sim 20s$), mens den har noe problemer i starten. I tillegg viser sammenligningen at avdampingsraten underestimeres hvis underlaget er porøst. Dette skyldes den økte varmeovergangen på grunn av større varmeoverføringsflate mellom væsken og underlaget. Dette tar ikke modellen hensyn til.

Sammenligning med damspredningen i KFX viser at KFX-modellen mislykkes i å beskrive spredningen når strømmingen befinner seg i gravitasjons-/impuls regimet. Plot av Reynoldstallet i den aktuelle simuleringen viser at impulskreftene er store sammenlignet med de viskøse kreftene i starten. Resultatet med KFX-modellen blir at dammen sprer seg mye hurtigere i starten enn det den gjør i CRYOSPREAD. Dette er fordi KFX-modellen ikke får med tregheten i væsken.

Sammenligningen av avdampingsratene mellom KFX og CRYOSPREAD viser den prinsipielle forskjellen på å anta at underlaget har konstant temperatur og at underlaget kjøles. Varmeovergangen i KFX antar et varmeovergangstall og konstant temperaturredifferanse mellom bakken og dammen, mens konduksjonsmodellen tar hensyn til at bakken kjøles svært raskt ned. Dette fører til at avdampert masse i KFX blir proporsjonal med tiden og avdampert masse i CRYOSPREAD blir proporsjonal med $t^{1/2}$. Dette fører til forskjeller i simulert koketid.

En simulering av en tenkt lekkasjeulykke har blitt gjennomført med CRYOSPREAD. Det påpekes at dette ikke er ment som noe fasitsvar for hva som kommer til å skje ved en ulykke, men heller en demonstrasjon av koden i en mer kompleks setting.

Det er ikke foretatt noen sammenligninger med forsøksdata fra dam-spredning av kryogene væsker. Slike data lyktes det ikke å få tak i. Koden og modellen bør derfor gjennomgå en mer omfattende forbedrings-/validerings -prosess før den eventuelt kan brukes i et numerisk forbrenningsprogram. Likevel vil simuleringen kunne gi gode svar hvis modellene/antagelsene den bygger på er gode nok.

7.2 Forslag til videre arbeid

- Utforske varmeovergangen mellom den kryogene væsken og underlaget i mer detalj. Kanskje kan en utvikle en startmodell for varmeovergangen der konduksjonsmodellen feiler?
- Koble modellen sammen med en modell som tar hensyn til kryogene væsker som består av mer enn én komponent. (Gåserud [21] har utviklet en modell for dette.)
- Videreutvikle modellen til også å kunne håndtere utslipp på vann. Her må en ta hensyn til at dammen synker noe ned i vannet og har derfor en strømningsmotstand ved fronten. Effekten av bølger kan kanskje simuleres ved å la underlagsprofilen $b(x,y)$ i 3.23 også variere med tiden?
- Foreta spredningsberegninger med forbrenning.

Referanseliste

- [1] Anders Vikan, *Numerisk modellering av varmeoverføring og brann i flytende naturgass (LNG)*, Prosjektoppgave høsten, 2008.
- [2] Randall J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University press, 2007.
- [3] Michael G. Edwards, *The Dominant Wave-capturing Finite Volume Scheme for Systems of Hyperbolic Conservation Laws*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 2004.
- [4] Bernhard Müller, *Introduction to Computational Fluid Dynamics (kompendium i faget TEP4165; Numerisk varme- og strømningssteknikk)*
- [5] Sigal Gottlieb, Chi-Wang Shu and Eitan Tadmor, *Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods*, 2000.
- [6] Eleuterio F. Toro, *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Flows*, John Wiley & Sons, LTD
- [7] Dr D.M. Webber, Dr S.E. Gant, Dr M.J. Ivings and S.F. Jagger, *LNG Source Term Models for Hazard Analysis: a Review of the State-of-the-Art and an Approach to Model Assessment*, 2009
- [8] D.M. Webber and S.J. Jones, *A model of spreading vaporising pools*, in Woodward, J. (ed.), *Int. Conf. on Vapour Cloud Modelling*, AIChE, Boston, Massachusetts, USA, 1987.
- [9] Ivar S. Ertesvåg, *Turbulent strøymning og forberening*, Tapir akademisk forlag, 2000.
- [10] Julius Brandeis and Donald L. Ermak, *Numerical Simulation of Liquefied Fuel Spills: II. Instantaneous and continuous LNG Spills on an Unconfined Water Surface*, Lawrence Livermore National Laboratory, 1983.
- [11] D.W. Hissong, *Keys to modelling LNG spills on water*, ExxonMobil Upstream Research Company, Houston, TX, USA, 2006.
- [12] Frank M. White, *Fluid Mechanics 5th Edition*, McGraw-hill, 2003.
- [13] Michael J. Moran og Howard N. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics 5th Edition*, John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [14] R.P. Cleaver, P.S. Cronin, J.A. Evans, I.L. Hirst, *A series of experiments to study the spreading of liquid pools with different bund arrangements*, HSE Contract Research Report CRR 405/2002

- [15] O. Delestre, S. Cordier, F. James, and F. Darboux, *Simulation of Rain-Water Overland-Flow*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 2008.
- [16] Harald E. Krogstad, *Kompendium i Matematisk modellering TMA 4195*, (2008)
- [17] Eleuterio F. Toro, *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Flows*, John Wiley & Sons, LTD
- [18] F. Briscoe, P. Shaw, *Spread and evaporation of liquid*, Prog. Energy Comb. Sci. Vol: 6, 1980
- [19] H.K. Veersted, W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, second edition, Pearson Education Limited, 2007.
- [20] R.C. Reid and R. Wang, *The boiling rates of LNG on typical dike floor materials*, Cryogenics s. 401–404, 1978.
- [21] Espen Stødle Gåserud, *Masteroppgave (tittel)*, 2008.
- [22] D.M. Webber, *Heat Conduction Under a Spreading Pool*, SRD R421, 1987.
- [23] Incropera, DeWitt, Bergman, Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, utg. 6., John Wiley & Sons, 2007.
- [24] Adrian Bejan, Allan D. Kraus, *Heat Transfer Handbook*, John Wiley & Sons, 2003.
- [25] Burgess, D.S. og Zabetakis, M.G., *Fire and explosion hazards associated with liquefied natural gas*, U.S. Bureau of Mines Report of Investigations No. 6099, 1962.
- [26] Committee for Prevention of Disasters, *Methods for calculating physical effects*, Yellow Book del 1, CPR 14E, utg. 3, 1997.
- [27] E. M. Drake and R.C. Reid, *How LNG Boils on Soils*, Hydrocarbon Processing, 54 (5), 191-194, Mai. 1975.
- [28] B.E. Vembe, K.E. Rian, J.K. Holen, N.I. Lilleheie, B. Grimsmo, T. Myhrvold, *Kameleon FireEx 2000 Theory Manual*, Teknisk rapport.

Vedlegg

A *Konstanter som brukes i modellen*

Konstanter hentet fra [23] og bibliotek i KFX:

Latent varme metan; h_{fgm} (111K)	512050.00	[J/kg]
Latent varme nitrogen; h_{fgN} (111K)	193000.	[J/kg]
Massetetthet metan (væskeform); ρ_m	423.4	[kg/m ³]
Massetetthet nitrogen (væskeform); ρ_{N2}	807	[kg/m ³]
Massetetthet betong; ρ_g	230	[kg/m ³]
Varmekapasitet betong; C_{p_g}	961.4	[J/(kgK)]
Termisk konduktivitet betong; γ	0.92	[W/(mK)]
Prandtl's tall luft (293 K)	0.709	
Kin. visk luft (293 K)	15.3E-6	[m ² /s]
Konduktivitet luft (293 K)	25.7E-3	[W/mK]

Termiske egenskaper for jord ifølge [27]:

Massetetthet underlag; ρ_g	1762.	[kg/m ³]
Varmekapasitet underlag; C_{p_g}	1005	[J/(kgK)]
Termisk konduktivitet underlag; γ	0.60	[W/(mK)]

B Konvektiv varmeovergangstall fra luft

For turbulent parallell strømning over en flat plate kan det lokale Nusselt-tallet uttrykkes [23]:

$$Nu_x = \frac{h_{a,x}}{k_a} = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{1/3} \quad \text{for} \quad \begin{cases} 0,6 \leq Pr \leq 60 \\ 5 \cdot 10^5 \leq Re_x \leq 10^7 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Der x er avstanden fra fronten av platen. Det gjennomsnittlige Nu-tallet kan finnes ved å integrere Nu_x over platelengde og dele på platelengde L . Resultatet blir:

$$Nu = 0,037 Re_L^{0,8} Pr^{1/3} \quad (\text{B.2})$$

Det gjennomsnittlige konvektive varmeovergangstallet fra luft blir derfor:

$$h_a = \frac{k_a Nu}{L} \quad (\text{B.3})$$

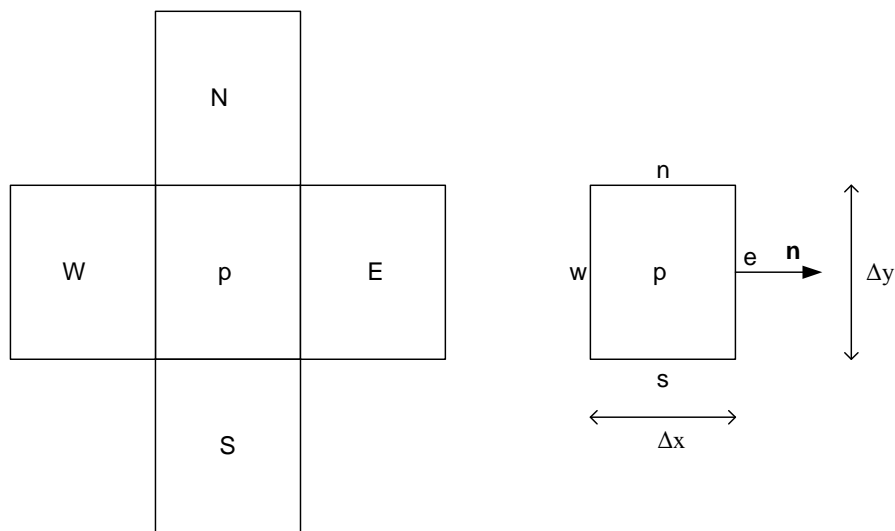
C Diskretisering av ligningene

Her vises det hvordan modelligningen,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ \mathbf{G}(\mathbf{q}) \} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \quad (\text{C.1})$$

diskretiseres.

Det er valgt å bruke FVM for å diskretisere ligningen. I denne oppgaven deles beregningsområdet inn i $n \times n$ celler. Nettverket er ekvidistant og regulært. Strukturen cellene ligger i, samt en celle er vist i figuren nedenfor.



Figur C.1: Oppbygning av nettverket. Nabo-celler er gitt store bokstaver etter hvordan de er posisjonert i forhold til sentercellen. Rendere er gitt små bokstaver.

I FVM integreres bevarelseslovene på differensialform over celle p:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta V} \mathbf{q} \, dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{F}(\mathbf{q}) \} \, dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \{ \mathbf{G}(\mathbf{q}) \} \, dV = \iiint_{\Delta V} \mathbf{S}(\mathbf{q}) \, dV \quad (\text{C.2})$$

\mathbf{q}_p defineres som den romlige gjennomsnittsverdien i celle p:

$$\mathbf{q}_p = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \mathbf{q} \, dV \quad (\text{C.3})$$

Kildeleddet \mathbf{S} regnes som konstant over hele cellen. I tillegg benyttes divergensteoremet på ledd nummer 2 og 3 på venstre side av (C.2). Dette medfører:

$$\Delta V \frac{d\mathbf{q}_p}{dt} + \int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA + \int_R \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dA = \mathbf{S}_p \Delta V \quad (\text{C.4})$$

der R er randen til cella. Fluksfunksjonene \mathbf{F} og \mathbf{G} regnes som konstant over rendene. Dermed kan (C.4) skrives:

$$\Delta x \Delta y \frac{d\mathbf{q}_p}{dt} + (\mathbf{F}_e - \mathbf{F}_w) \Delta y + (\mathbf{G}_n - \mathbf{G}_s) \Delta x = \mathbf{S}_p \Delta x \Delta y \quad (\text{C.5})$$

Slik at den ordinære differensialligningen som må løses i hver celle er:

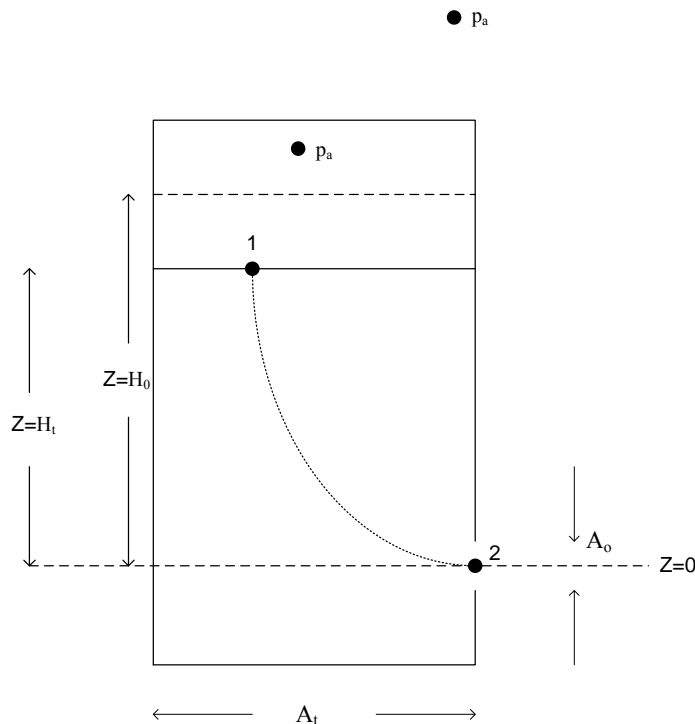
$$\frac{d\mathbf{q}_p}{dt} = \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}_e) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{G}_s - \mathbf{G}_n) + \mathbf{S}(\mathbf{q}_p) \quad (\text{C.6})$$

D Hastighet for lekkasje

For å finne utslippshastigheten som funksjon av tiden ved lekkasje ut av en åpning i en tank blir *Bernoullies ligning* benyttet. En utledning kan finnes i *White* [12] for denne teorien. Ligningen uttrykker at summen av potensiell og kinetisk energi langs en strømlinje er konstant. Dette forutsetter friksjonsfri strømning. Ligningen har flere former, men for inkompressibel strømning tar den formen:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + p = C \quad (\text{D.1})$$

Nedenfor viser en skisse av en tank. Det er antatt at trykket inne i tanken er lik atmosfæretrykket.



Figur D.1: Skisse av typisk tank. Trykket inne i tanken er lik trykket utenfor.

Bernoullies ligning anvendt på strømlinjen fra punkt 1 til 2:

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g H_t + p_a = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_a \quad (\text{D.2})$$

Forutsatt at $A_0 \ll A_t$ gir (D.2) at:

$$u_2 = \sqrt{2gH_t} \quad (\text{D.3})$$

For å kompensere for strømmingstap ut åpningen blir ofte en tapskoeffisient c_d inkludert i (D.3) s.a.:

$$u_2 = c_d \sqrt{2gH_t} \quad (\text{D.4})$$

Tapskoeffisienten er svært avhengig av geometrien på åpningen.

Da hastigheten ut åpningen er kjent, kan volumstrømmen ut tanken uttrykkes:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}(H_t A_t) = -c_d A_o \sqrt{2gH_t} \quad (\text{D.5})$$

Hvis en ordner (D.5), får en differensialligningen:

$$\frac{dH_t}{dt} = -c_d \frac{A_o}{A_t} \sqrt{2gH_t} \quad (\text{D.6})$$

Denne ligningen er separabel og løses denne i samband med initialverdien; $H_t(0) = H_0$, oppnår en et uttrykk for høyden i tanken:

$$H_t(t) = \left(\sqrt{H_0} - c_d \frac{A_o}{A_t} \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t \right)^2 \quad (\text{D.7})$$

Settes dette uttrykket inn i uttrykket for hastigheten ut av åpningen (D.4), får en sammenhengen mellom hastigheten ut av åpningen og tiden.

$$u_2(t) = c_d \left(\sqrt{2gH_0} - \frac{A_o}{A_t} gt \right) \quad (\text{D.8})$$

Altså avtar hastigheten ut åpningen proporsjonalt med tiden. Dette blir brukt i utslippsceller for tanker i spredningskoden.