Master i matematikkdidaktikk

Masteroppgave

Nina Johansen

Grubletegninger som en arbeidsmetode i matematikk

En designbasert studie av to elevgrupper i 9. trinn sitt arbeid med algebraisk generalisering

Trondheim, mai 2013

HiST TRONDHEIM

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Nina Johansen

Grubletegninger som en arbeidsmetode i matematikk

En designbasert studie av to elevgrupper i 9. trinn sitt arbeid med algebraisk generalisering

Concept cartoons as a working method in mathematics

A design-based study of two groups of 9th grade students' engagement with algebraic generalization

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2013

Veileder:	Heidi Strømskag Måsøval

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Forord

På mange måter tror jeg det å skrive masteroppgave kan sammenlignes med det å være gravid. Gjennom ni lange og harde måneder, med både oppturer og nedturer, skal endelig masteroppgaven trykkes og komme ut i et endelig produkt. Dette prosjektet markerer også slutten på en spennende og lærerik epoke i livet mitt. Etter fem lange år ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, skal jeg nå ut i den store verden og bruke all den kunnskapen jeg har tilegnet meg.

For å lykkes med dette masterprosjektet har jeg mottatt stor hjelp. Først og fremst vil jeg rette en stor takk til min veileder Heidi Stømskag Måsøval for all hjelp, oppmuntring og for at du hadde troen på meg. Videre vil jeg takke min gode venninne Andrea, som har støttet meg i både oppturer og nedturer, tørket tårer og vært en gledesspreder gjennom dette året. Uten din støtte ville jeg ikke klart det. Jeg vil takke mine medstudenter for livlige diskusjoner og mange gode minner. Jeg vil også rette en stor takk til læreren og elevene ved skolen jeg gjennomførte datainnsamlingen, for at jeg fikk ta del i deres tanker, handlinger og skolehverdag. Uten dere hadde det ikke vært mulig å tilegne seg den kunnskapen jeg sitter igjen med etter arbeidet med dette prosjektet.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til familie og venner, for støtten og at dere hadde troen på meg, og en spesiell takk til Ingrid som leste korrektur for meg i sluttspurten.

Trondheim, mai 2013

Nina Johansen

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

I denne oppgaven skal jeg se på hvordan grubletegninger kan benyttes som en arbeidsmetode i matematikk. Med algebra som tema har jeg valgt å se på hvordan tre grubletegninger setter i gang elevers samtale om algebraisk generalisering. Utenfor Norge er det allerede gjort en del forskning på grubletegninger i matematikk (Dabell, 2008; Naylor & Keogh, 2012; Sexton, Gervasoni & Brandenburg, 2009; Sexton, 2010). Grubletegninger (se figur 6) synliggjør måter å betrakte gitte situasjoner på i arbeid med problemløsningsoppgaver, og skal stimulere elevene til å utvikle sine ideer og synspunkter. Situasjonen i grubletegninger er ment for å skape diskusjon og stimulere til tenkning (Naturfagssenteret, 2013).

Gjennom årene i praksis, har jeg selv sett hvor lite det legges opp til diskusjon i matematikk. Dette praktiseres hyppig i de fleste andre fag, mens matematikk ofte blir sett på som et regne og pugge fag, der hver enkelt elev sitter og jobber for seg selv. Som fremtidig lærer ønsker jeg å legge opp til mer diskusjon og samtale i matematikkundervisningen. Jeg ser på grubletegninger som en fin arbeidsmetode for å engasjere elevene, slik at de kan oppleve matematikk som et spennende og interessant fag. Under formål i matematikk står det at problemløsningsoppgaver innebærer å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere hvor gyldig svaret er. Dette har også språklige aspekt, som det å resonnere og kommunisere om hverandres ideer (Kunnskapsdepartementet, 2013, s. 2).

1.2 Forskningsspørsmål

Som nevnt innledningsvis har jeg i denne oppgaven valgt å se på hvordan grubletegninger kan brukes som en arbeidsmetode i matematikk, for å få i gang diskusjon mellom elever. Mitt aller første møte med grubletegninger var da jeg tok emnet Naturfag 1 ved Høgskolen i Sør-Trøndelag ALT. Praksisgruppa benyttet seg av de grubletegningene som ligger på naturfagssenterets nettsider til bruk i undervisning (Naturfagssenteret, 2013), som gir elevene mulighet til å diskutere rundt vitenskapelige situasjoner. I praksis det året skulle vi prøve å gjøre noe nytt og spennende for elevene, der de fikk diskutert seg i mellom og delt meninger. Det ble godt mottatt av elevene, og elevene kom med ulike synspunkt og gode argumentasjoner. Etter dette har jeg tenk: hvorfor finnes ikke grubletegninger i matematikk også? Grubletegninger er en fin måte å få gode diskusjoner om forskjellige temaer og situasjoner i faget, og det gir elevene muligheter til å dele synspunkter og meninger. Det er også med på å få frem eventuelle misoppfatninger som ofte oppstår. Diskusjon i matematikk er ikke bare nyttig for elevene, men også for læreren (Yackel & Cobb, 1996). Læreren får et innblikk i hvordan elevene tenker og hvilke begreper de benytter seg av når de diskuterer matematikk.

For å se hvordan grubletegninger kan være med på å sette i gang elevers diskusjon, ble det naturlig for meg å ha algebra som tema, og da se på hvordan elevene kommer frem til løsninger med oppgaver som omhandler algebraisk generalisering. Dette har gjort at jeg har valgt å formulere forskningsspørsmålet mitt slik:

Hvordan bidrar tre grubletegninger til å sette i gang to elevgruppers samtale om algebraisk generalisering?

For å kunne gi et godt nok svar på dette spørsmålet, er det nødvendig å se hvordan elevene tar i bruk argumentasjon, og på hvilken måte de bruker grubletegningene. Jeg har derfor valg å stille følgende underspørsmål:

- *Hvordan generere elevene argumentasjon og resonnement?*
- *På hvilken måte støtter elevene seg til grubletegninger i sine argumentasjoner?*

Jeg har ikke som mål å finne noen fasit på dette spørsmålet, men heller få en innsikt i hvordan denne arbeidsmetoden kan brukes i matematikk, og reflektere over de funnene jeg kommer frem til.

1.3 Presentasjon av teori

Det ble naturlig for meg å ha et sosiokulturelt perspektiv på kunnskap og læring, i og med at jeg ser på hvordan elevene benytter seg av språket og samhandler. I sosiokulturelt perspektiv legges det vekt på at kunnskap og læring konstrueres gjennom samhandling med andre og bruken av medierende redskaper er sentral for læring (Dyste, 2001). Mediering blir brukt om alle typer støtte og hjelp i læringsprosessen, og jeg har derfor sett spesielt på språket som medierende redskap (Säljö, 2001). Dette har preget hvordan jeg har valgt å gjennomføre undersøkelsene mine og hvordan jeg i etterkant har analysert datamaterialet mitt.

Videre i teorikapitlet mitt går jeg inn på matematisk språk og ser hvordan Pimm (1987, 1991) tar for seg skriftlig og muntlig matematisk språk, symbolbruk i matematikk og bruk av matematisk register. Det er også relevant for meg å se på Duval (2002, 2006) sin teori om matematiske representasjoner. Han sier at elever må arbeide med ulike representasjoner for å få tilgang til matematiske begrep. De ulike representasjonene kan være symboler, figurer, skisse, grafer og naturlig språk, og Duval (2006) mener at det er i overgangen mellom ulike representasjoner av læringen ligger.

De ulike representasjonene som elevene bruker, kan ses i sammenheng med det Steinbring (1997, 2005, 2006) kaller for epistemologiske trekant. Trekanten består av det han kaller for begrep, objekt/referansekontekst og tegn/symbol. Denne trekanten gir grunnlag for å si noe om hvordan elevene utvikler mening til nye tegn/symbol ved hjelp av en kjent referansekontekst og den kunnskapen de allerede har om begrepet som de arbeider med.

Jeg benytter meg også av teori om algebra og arbeid med figurfølger, med blant annet Kaput og Blanton (2001) som utgangspunkt. Videre ser jeg på algebraisk generalisering og forskere som har gjort undersøkelser rundt det (Becker & Riviera, 2006; English & Warren, 1998; Lee, 1996; Mason, 1996; Radford, 1996; Stacey, 1989). Jeg benytter meg spesielt av Lee (1996) sine tre nivåer som er knyttet til generalisering av figurfølger. Oppfattelsesnivå som handler om å gjennomskue mønster, verbaliseringsnivå som handler om å kunne uttrykke mønsteret verbalt og tydelig, og til slutt symboliseringsnivå som handler om å kunne bruke n for å representere den n'te plassen i følgen, for deretter å uttrykke antall komponenter i figuren på plass n som en funksjon av n.

Til slutt vil jeg presentere forskning som er knyttet til grubletegninger. Naylor og Keogh (2012) skriver at grubletegninger er ment for å fremkalle ideer, utfordre tankegangen og støtte elevene i deres utvikling av forståelse. Jeg trekker også inn forskere som har gjort undersøkelser av grubletegninger som en arbeidsmetode i matematikk (Dabell, 2008; Sexton et al., 2009; Sexton, 2010).

1.4 Presentasjon av metode

For å se om grubletegning i det hele tatt kunne benyttes som en arbeidsmetode i matematikk, startet jeg med å gjennomføre et pilotprosjekt på 6. trinn, der elevene jobbet med multiplikasjon med tosifrede tall. Dette var det tema som elevene jobbet med i forkant av mitt pilotprosjekt. I etterkant av pilotprosjektet vurderte jeg hvilke endringer jeg burde gjøre for å forbedre grubletegningen, og hva jeg måtte ta hensyn til.

Selve datainnsamlingen min ble gjennomført på en ungdomsskole på 9. trinn, med to forskjellige grupper. Jeg hadde tre uker til disposisjon, der jeg brukte de første to ukene til å observere og bli kjent med elevene. Siden det ikke lot seg gjøre å gjennomføre datainnsamlingen med hele klassen, valgte jeg å fokusere på to elevgrupper, med fire elever i hver gruppe. Den siste uken ble brukt til datainnsamling der elevene jobbet sammen for å løse tre forskjellige grubletegninger innenfor tema algebra. Grubletegningene var produsert og illustrert av meg, med fokus på det tema som var relevant for den undervisningen elevene hadde i den perioden jeg var der. Jeg valgte å la elevene jobbe med minst mulig innblanding fra meg, men de stilte meg noen spørsmål for å få avklaring på oppgaven og under den ene oppgaven (Froskeoppgaven, Oppgave 3) måtte jeg bryte inn på grunn av tidsmangel. Under gruppearbeidet hadde jeg altså rollen som delvis deltakende observatør. For å sikre god data benyttet jeg meg av videokamera for å kunne transkribere dialogen, og for å kunne studere nærmere det elevene sa og gjorde under gruppearbeidet. Analysen min baseres på observasjonene av disse to elevgruppene. De metodiske valgene jeg har gjort vil jeg komme nærmere inn på og drøfte i metodekapittelet.

1.5 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven er delt inn i fem hovedkapittel: teori, metode, analyse av oppgavene, analyse og diskusjon, og didaktisk refleksjon. I teorikapittelet vil jeg gå grundigere inn på sosiokulturell teori om læring, med fokus på språk og medierende redskaper. Videre vil jeg komme inn på forskning som omhandler algebraisk generalisering av figurmønster, og forskning som er gjort om grubletegninger som en arbeidsmetode i matematikk.

I metodekapittelet vil jeg gå nærmere inn på kvalitativ metode og spesielt designebasert studie. I dette kapittelet vil jeg også ha fokus på de metodiske valgene jeg har tatt og begrunne dem. Jeg vil også si noe om datainnsamlingen jeg har gjort og de utfordringene som har oppstått underveis, både av observasjonene og analyse av datamaterialet.

De neste to kapitlene omhandler analyse. Jeg vil først gjøre en matematisk- og didaktiskanalyse av de grubletegningene som elevene har arbeidet med, der jeg tar for meg hver enket oppgave for seg. Videre analyserer jeg sekvenser fra observasjonene jeg gjorde da elevene jobbet med grubletegningene. Sist i analysen gir jeg en sammenfatning og refleksjon av de funnene jeg har gjort.

Avslutningsvis har jeg en didaktisk refleksjon, der jeg oppsummerer resultatet mitt. I tillegg vil jeg drøfte hvordan mine funn har betydning for skolen og meg som fremtidig lærer.

2 Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere teorien som er grunnlaget for analysen min. Jeg starter med sosiokulturelt perspektiv på kunnskap og læring, som er den overordnede teori for forskingen min. Det ble naturlig for meg å ta dette perspektivet i og med at jeg i analysen ser på hvordan elevene benytter seg av språk, og samhandler for å samtale om algebraisk generalisering. Etter denne delen vil jeg gå inn på mer matematikkdidaktisk tema med fokus på matematiske representasjoner, språk og symboler. Videre vil jeg ta for meg teori om algebra, der jeg går nærmere inn på teori om læring og undervisning av figurmønster, og til slutt vil jeg se på annen forskning som er gjort i arbeid med grubletegninger.

2.1 Sosiokulturell teori

2.1.1 Introduksjon

Læring i et sosiokulturelt perspektiv er i følge Säljö (2001) et resultat av menneskelig virksomhet, og i følge Dysthe (2001) legger sosiokulturelle perspektiv "avgjerande vekt på at *kunnskap blir konstruert gjennom samhandling og i ein kontekst*" (s. 42, utheving i original). Interaksjon og samarbeid mellom mennesker blir dermed sett på som helt grunnleggende for læring, der deltakelse i sosiale praksiser hvor læring skjer er sentralt i det å lære. På bakgrunn av dette kan man si at læring handler om det vi som enkeltmenneske eller kollektivt tar med oss fra sosiale situasjoner og bruker i fremtiden (Säljö, 2001, s.13). Erfaringer fra en situasjon blir overført til fremtidige situasjoner, som igjen er med på en stadig utvikling og forandring av mennesket. Denne utviklingen og tilegnelsen av kunnskap skjer gjennom interaksjon med andre mennesker og er lagret i den kulturen vi lever i. Kunnskaper og ferdigheter er derfor utviklet, og utvikles, i takt med historiens løp gjennom samfunnet vi lever i. Læring, gjennom et sosiokulturelt perspektiv, handler derfor om å tilegne seg ressurser for å tenke og handle (Säljö, 2001), hvor kommunikasjon og interaksjon mellom mennesker har en avgjørende betydning for å tilegne seg disse ressursene. "Det er gjennom kommunikasjon at sosiokulturelle ressurser blir skapt, men det er også gjennom kommunikasjon de blir ført videre" (s. 22).

I sosiale aktiviteter samhandler vi med andre mennesker, men vi samhandler også ved hjelp av fysiske og intellektuelle redskaper, også kalt artefakter. Mennesket står altså ikke i direkte kontakt med omverdenen, men tolker og håndterer den ved hjelp av slike redskaper. Denne bruken av redskaper som støtte for, formidling og overføring av mentale funksjoner kalles *mediering* (Dysthe, 2001, s. 77).

2.1.2 Mediering

Mediering er et av de nye begrepene Vygotsky brakte inn i pedagogisk tenkning. Säljö (2001) skriver at begrepet mediering, fra tysk Vermittlung - formidle, er svært sentralt i et sosiokulturelt perspektiv (s. 83). Det antyder at mennesket ikke står i umiddelbar kontakt med omverden. Vi håndterer den ved hjelp av ulike fysiske og intellektuelle redskaper som utgjør integrerte deler av vår sosiale praksis (Säljö, 2001).

Mediering blir brukt om alle typer støtte eller hjelp i læringsprosessen, enten det er av personer eller redskaper i vid forstand. Kombinasjoner av personer og redskaper skaper helt nye og utvidete kognitive og praktiske potensial (Dyste, 2001). Dysthe omtaler ”reiskapar” eller ”verktøy” i et sosiokulturelt læringsperspektiv som ”dei intellektuelle og praktiske ressursane som vi har tilgang til, og som vi brukar for å forstå omverda og for å handle med” (s. 46). Disse redskapene utvider altså de forutsetningene naturen har gitt oss som enkeltindivider. Säljö (2001) skriver at mediering innebærer at vår tenking og våre forestillingsverdener er vokst frem av, og dermed farget av, vår kultur og dens intellektuelle og fysiske redskaper. Han påpeker at mediering ikke bare skjer ved hjelp av teknikk og artefakter: Mennesket aller viktigste medierende redskap er de ressursene som finnes i språket vårt.

2.1.3 Språk som medierende redskap

I *Læring i praksis* (2001) skriver Säljö at i mange sammenhenger oppfatter vi språklige uttrykk som abstrakte, og som i en viss forstand mindre konkret og virkelig enn fysiske objekter og handlinger. Bildeteorien om språkets natur, som omhandler relasjonen mellom begreper og virkelighet, og relasjonen mellom språk og omverden mer generelt, bidrar til den forestillingen om ordenes status som noe som står i stede for "the real thing" – det fysiske objektet. Videre skriver han at ord og språklige utsagn medierer omverdenen for oss og gjør at den fremstår som meningsfull. Ved hjelp av kommunikasjon med andre blir vi delaktige i måter å betegne og beskrive verden på som er funksjonelle, og som gjør at vi kan samspille med våre medmennesker i ulike aktiviteter (Säljö, 2001).

Språkets kraft som medierende redskap, og som ressurs for å skape kunnskap om verden, viser seg gjennom de fleksible og utviklingsbare relasjonene som finnes mellom språklige uttrykk og de fenomenene (Säljö, 2001). "Språket er *samtidig* et kollektivt, et interaktivt *og* et individuelt sosialt redskap. Det er derfor det kan fungere som et bindeledd mellom kultur, interaksjon og individets tenkning" (Säljö, 2001, s. 89, utheving i original).

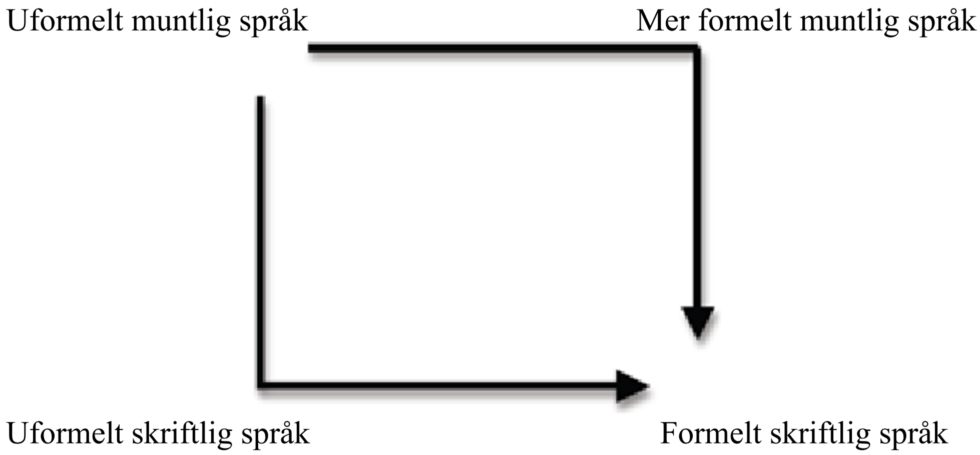
2.2 Språk og representasjoner i matematikk

2.2.1 Matematisk språk

I boken *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms* hevder David Pimm (1987) at i de fleste matematiske klasserom finnes noe som han kaller for "vanlig engelsk" og "matematisk engelsk". Dette kan skape forvirring i klasserommet når læreren benytter seg av det man kan kalle for "matematisk dialekt", men elevene tolker det de hører som "vanlig språk". Han sier at man derfor ikke kan se på matematikk som et språk eller en dialekt (Pimm, 1987, 1991). Pimm (1987) foreslår at man heller skal bruke "register", og skildrer det som "a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structures which express these meanings" (Halliday, 1975a, som sitert i Pimm, 1987, s.75). Det vi si at det matematiske registret består av matematiske begrep, men også naturlig språk blir brukt for å uttrykke matematikk. Videre skriver Pimm (1987) at en viktig del av det å lære matematikk er å få kontroll over det matematiske registret, og når det matematiske registret er skapt, vil visse meninger bli tilgjengelig i språket.

Pimm (1991) skriver at alle lærere møter vanskeligheter ved å få elevene til å bevege seg fra uformelt muntlig språk til formelt skrift språk. Videre skriver han at dette kan gjøres på to måter. Den første er ved å oppfordre elevene til å skrive ned sine uformelle uttrykk for så å gjøre det skriftlige uttrykket mer selvstendig og generelt. Den andre måten er å arbeide med formaliteter og selvstendighet av muntlige uttrykk før det muntlige språket blir skrevet ned. Han viser disse to veiene fra muntlig språk til skriftlig språk med figur 1.

Pimm (1991) hevder at "Mathematics, when spoken, emerges in a natural language: when written, it makes varied use of a complex, rule-governed writing system mainly separate form that of the natural language into which it can be read" (s. 20). Dette vil si at overgangen fra uformelt muntlig språk til formelt skriftlig språk, kan være en utfordring for mange elever.



Figur 1: Alternative veier fra muntlig til skriftlig språk. Tilpasset fra Pimm (1991,s. 21)

Videre hevder Pimm at en lærer ikke kan få elever til å lære, men at læreren kan legge til rette for læring ved hjelp av situasjoner som gir elevene mulighet til å uttrykke matematiske ideer og språk. Ved å la elevene forklare sine tanker og metoder for andre elever, må de reflektere over hva de skal si og hvordan de skal utrykke seg for at andre skal forstå hva de tenker og mener. På denne måten får elevene bedre tilgang til egne og andres tanker, og dermed brukes språket til noe mer enn bare å kommunisere (Pimm, 1991).

Uformelt muntlig språk (Pimm, 1991) kan også beskrives som naturlig språk. Duval (2002) skriver at naturlig språk kan kategoriserer innenfor en av de fire grunnleggende typer av register av representasjoner. Jeg vil derfor i det neste delkapittelet ta for meg ulike representasjoner som benyttes i matematikk.

2.2.2 Matematiske representasjoner

Duval (2006) skriver at representasjoner er noe som står for noe annet, men at det på samme tid kan denne forestillingen være unnvikende eller for formel. Men hva står dette noe for? Man kan ha et bredt spekter av svar, avhengig av om man ser på representasjoner med hensyn til individet og hans eller hennes erfaringer og mentale strukturer, eller om man ser på objekter og deres spesifikke epistemologiske forandringer. Vi bruker en rekke representasjoner for å uttrykke matematiske ideer, noe som er vanlig i all slags tenkning, som naturlig språk, og noen som er spesifikke for matematikk, som algebraisk og formell notasjon. Duval (2006) kaller disse representasjonene for semiotiske representasjoner, og han skriver at "semiotic representations, including any language, appear as common tools for producing new knowledge and not only for communicating any particular mental representation" (s. 104). Dette vil si at vi bruker semiotiske representasjoner både til å utvikle kunnskap og til å uttrykke kunnskap (Duval, 2006). For å skille semiotiske representasjoner som brukes i matematikk fra andre semiotiske representasjoner, velger Duval (2002) å kalle det for register av representasjoner. Duval (2006) skriver at den rollen som tegn, eller mer nøyaktig register av representasjoner har, er ikke bare for å betegne matematiske objekt eller til å kommunisere, men også for å arbeide på matematiske objekt og med dem. Ingen form for matematisk behandling kan utføres uten å bruke et register av representasjon, fordi matematisk bearbeidelse innebærer alltid å erstatte et register av representasjon til en annen. Derfor kan det være vanskelig for elever å kjenne igjen det samme registret representert på en annen måte, noe som viser at evnen til å skifte fra et representasjonssystem til et annet er viktig i læring og arbeid med problemløsning i matematikk (Duval, 2006).

Duval (2002) skriver at det viktig å merke seg at det er fire veldig forskjellige grunnleggende typer av register: Naturlig språk, geometriske figurer, tegnsystem og kartesiske grafer. Disse er illustrert i figur 2.

	Diskursive Representasjoner	**Ikke-diskursive Representasjoner**
Multifunksjonelt register: Prosessene kan ikke lages til en algoritme	Naturlig språk: Verbale assosiasjoner Resonnement: - Argumenter fra egne observasjoner og egne holdninger - Gyldig slutning ut fra definisjoner eller teorem	Plan eller perspektiverte geometriske figurer (konfigurasjoner av 0, 1, 2, og 3 dimensjonale former): Tegning, skisse, mønstre Linjal og passer konstruksjoner
Monofunksjonelt register: De fleste prosessene er algoritmer	Tegnsystem: Numeriske (binære, desimaltall, brøk...) Algebraiske Symbolske (formelt språk)	Kartesiske grafer: Endringer av koordinatsystem interpolering, ekstrapolering

Figur 2: Klassifisering av ulike registre som kan sette i gang matematiske prosesser. Tilpasset fra Duval (2002, s. 3)

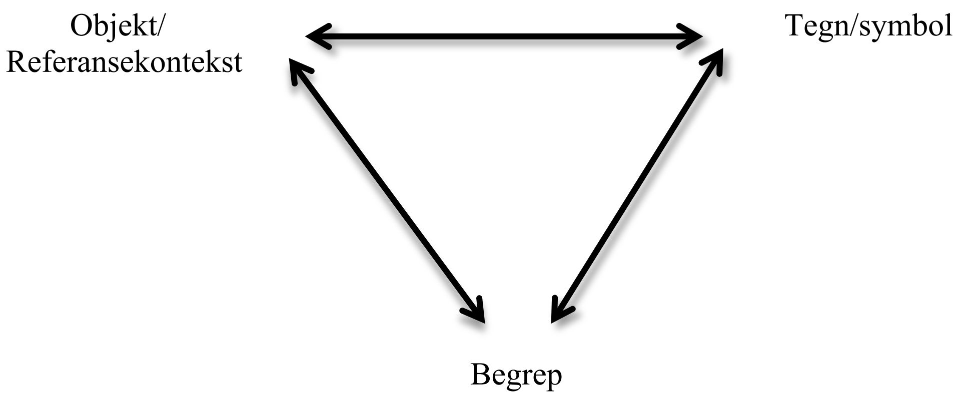
Duval (2002) skriver at vi har to typer transformasjoner av semiotiske representasjoner som er markant forskjellige: *behandlinger og omdannelser*. *Behandlinger* er transformasjoner av representasjoner som skjer innenfor samme register. Dette kan for eksempel være å gjøre utregninger med brøk, hvor man holder seg innenfor systemet brøk. *Omdannelser* er transformasjoner av representasjoner som består av å bytte register, men bevarer referanses til samme objekt. Dette kan for eksempel være å gå fra algebraisk notasjon for en ligning til dens grafiske representasjon, eller å gå fra å beskrive en sammenheng med naturlig språk til å representere den ved notasjon med bokstavsymboler (Duval, 2002). Duval (2006) skriver at den måten som matematiske bevis kommer frem i naturlig språk kan ikke bli formalisert, annet enn ved hjelp av symbolsystemer. Det vil si at bevis med naturlig språk er vanskelig å forstå for de fleste elever.

Denne inndelingen av register av representasjoner vil være relevant for meg når jeg skal se på elevers samtale om algebraisk generalisering. Videre i oppgaven min vil jeg benytte meg av tre av de grunnleggende typene register: naturlig språk, geometriske figurer og tegnsystem, for å beskrive de representasjonene som elevene benytter seg av under arbeidet med grubletegningene.

2.2.3. Matematiske symboler og elevers forståelse av dem

Pimm (1991) skriver at symboler dekker mange funksjoner i samfunnet og det kan hjelpe oss i å forstå strukturer, generalisere, og symbolene gjør enkelte refleksjoner mulig. På den andre siden kan det at matematikk oppleves som krevende for mange, og mangel på virkelige matematiske objekter som referanse, får mange elever til å tro at det er symbolene som er den virkelige matematikken (Pimm, 1991). Matematiske tegn og symboler har ikke noen mening i seg selv, men de har en sentral rolle i det å tolke, kommunisere og konstruere matematisk kunnskap (Steinbring, 2006).

Steinbring (2006) skriver at man kan se på rollen til matematiske tegn som to funksjoner. Den første er en semiotisk funksjon, der rollen til det matematiske tegnet er "noe som står for noe annet". Dette "noe annet" er det man kan kalle objektet til referansen, som gjør at man bare ser på rollen mellom objekt/referansekontekst og tegn/symbol. Den andre er en epistemologisk funksjon, der man ser på rollen til det matematiske tegnet i rammen av den epistemologiske konstitueringen av matematisk kunnskap. Epistemologi handler om forholdet mellom begrep, objekt og tegn, og kan illustreres ved den epistemologiske trekanten.



Figur 3: Den epistemologiske trekanten, hentet fra Steinbring (2006)

Denne trekanten viser koblingen mellom referansekontekst som bukes for å skape mening i kunnskap, og tegnene som brukes for å kode denne kunnskapen. Meningen i symbolene oppstår i samspillet mellom tegn eller symbolsystemer og en referansekontekst (Steinbring, 1997). Symbolene har dermed ikke noen mening i seg selv, men får mening gjennom referansekonteksten (Steinbring, 2005). Steinbring (2006) skriver at det er en semiotisk mediering mellom tegn/symbol og objekt/referansekontekst som dannes av et epistemologisk forhold av matematisk kunnskap. Videre skriver han at man må ta hensyn til det de epistemologiske begrensingene, at den matematiske kunnskapen ikke bare har innflytelse på medieringen mellom tegn/symbol og objekt/referansekontekst, men også på skapningen av ny, mer generell matematisk kunnskap ved hjelp av den samme medieringen. Han skriver også at de tre referansepunktene begrep, tegn/symbol og objekt/referansekontekst former et balansert, gjensidig system, som hverken har noe startpunkt eller sluttpunkt (Steinbring, 2006). Steinbring (1997) sier at den epistemologiske trekanten ikke er noen statisk trekant, men mer å betrakte som et dynamisk system der begrep, tegn/symbol og referansekontekst gjensidig påvirker hverandre. Videre understreker han at en referansekontekst ikke nødvendigvis er et konkret objekt, den kan like gjerne være en illustrasjon, diagram eller til og med tegn eller symboler i seg selv.

Steinbring (2006) skriver også at et viktig trekk ved denne semiotiske strukturen er at referansekontesten eller objektet ikke representerer et direkte, solid og definert forhåndsgitt produkt, men i løpet av utviklingen av matematisk kunnskap, vil den lærende gradvis endre meningen sin til en strukturell sammenheng. Matematisk mening er i samspill mellom en referansekontekst og et tegnsystem produsert gjennom å overføre mulige meninger fra et relativt kjent eller delvis kjent referanseområde, til et nytt og fortsatt meningsløst tegnsystem.

Konstruksjonen av egne referansekontekster og tegnsystemer gir en spesiell didaktisk utfordring for barns læring. Dette er viktig fordi allerede på barneskolen får man en oppfatning om hva matematikk er, hvordan matematikk kan læres og til hvilket formål matematikk er nyttig og genert hos barn. Innenfor rammen av et sterkt empirisk utgangspunkt for rettferdiggjøring av matematisk kunnskap kan det føre til falske forestillinger, som at elevene alltid ser tall som mengder av gjenstander og at de tenker på matematikk som et sett av regler som må læres utenat (Steinbring, 1997).

2.3 Algebra

Kaput og Blanton (2001) mener at vi trenger et bredere og dypere syn på algebra som kan skaffe skolematematikken den samme dybde og kraft som mange sider av algebra historisk har gitt matematikk. Dette skal støtte integreringen av algebraiske resonnement på tvers av alle klassetrinn og alle temaer i matematikken. Videre beskriver de algebra ut fra hva som kjennetegner en utvikling av algebraisk resonnering, noe som de beskriver som fem innbyrdes relaterte områder.

I min analyse er jeg innenfor den fjerde kordelen, som går på algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon. Å generalisere ut fra numeriske mønster eller figurfølger for å kunne gi funksjonsbeskrivelser. Begge disse er med på å bygge funksjonsbegrepet som er viktig i algebraisk tenkning i skolen. Beskrivelsene kan også være av gjentagende art, hvor man ser på hvordan den neste figuren eller det neste tallet kan beskrives med utgangspunkt i nåværende figur eller tall (Kaput &.Blanton, 2001)

Kaput og Blanton (2001) skriver de at de ser på generalisering gjennom overveid argumentasjon og å uttrykke generalisering som underliggende i alt arbeid vi gjør, og i tillegg som grunnleggende for å kunne bygge et referansesystem og mening for de symbolske objektene som manipuleres i algebra. De skriver også at et snevert syn på algebra som hovedsakelig syntaksstyrt symbolmanipulasjon, undervurderer de mange sidene av algebra og er et utilstrekkelig fundament for forbedring av algebra i skolen.

Mason (1996) vektlegger også at skolen trenger et bredt syn på algebra, og da generalisering som aktivitet. Han beskriver at tidligere har skolene innført algebra, ved å tilegne seg ferdigheter i symbol manipulasjon, som å lære noen å gå ved å flytte føttene for dem. Han skriver også at algebra er selve hjerteslagene i matematikk, og opptrer i mange former. Om lærere er uvitende om dens tilstedeværelse, og ikke har til vane å la elevene jobbe med å uttrykke deres egen generalisering, da vil ikke matematisk tenkning skje.

2.4 Algebraisk generalisering

2.4.1 Generaliseringsprosesser

Radford (1996) skriver at generalisering av geometrisk og numeriske mønster er en prosedyre hvor målet er å komme fram til et nytt resultat. Generaliseringen er ikke et begrep, men er en prosess der man skaper et nytt resultat ut fra et bestemt resultat. Målet i generalisering av figurfølger er å finne et uttrykk som representerer konklusjonen, en formel som baserer seg på strukturen, ikke de konkrete observasjonene vi har (Radford, 1996). Radford sier videre at vi i arbeid med figurfølger kan finne for eksempel antall prikker ved aritmetikk helt til vi går over til å benytte oss av de generelle strukturene i figuren. Når vi benytter oss av de generelle strukturene i figurene har vi gått over til algebra og generalisering (Radford, 1996). Mason (1996) oppsummerer denne prosessen ved å si at generalisering handler om "*seeing a generality through the particular* and *seeing the particular in the general*" (s. 65, uthevet i original)

Radford (1996) skriver at den generelle figuren forekommer kun i begrepsverdenen og skiller seg på denne måten fra de konkrete objektene ved at den kun kan oppfattes gjennom tegn og redskaper. Han skriver at denne overgangen fra spesielle tilfeller til generaliseringer skaper store utfordringer for elever fordi dette krever at de går over fra å utforske objekter som kan konstrueres fysisk til å behandle mentale objekter. Dette vil si at generalisering er en prosess hvor vi beveger oss over fra konkrete observasjoner til å finne den generelle figuren eller det generelle tallet.

Stacey og MacGregor (2001) skriver at innføring av algebra i skolen tradisjonelt sett har vært gjort ved å bruke bokstavsymboler som ukjente tall. Denne tilnærmingen til algebra gjør at elevene først lærer regler for å bruke bokstavsymboler og å løse ligninger, og for deretter å gå videre til generalitet, der man også ser på variabler og funksjonsuttrykk. De skriver videre at tilnærmingen som derimot er basert på figurfølger tar for seg generalitet først, med funksjonssammenhenger og algebraiske uttrykk, for så å bruke denne forståelsen til å formulere og løse ligninger (Stacey & MacGregor, 2001). English og Warren (1998) skriver i sin undersøkelse at variabler er et grunnleggende verktøy for å uttrykke generalisering. En forståelse av begrepet variabel er selve fundamentet for at elever skal oppleve mestring i algebra.

2.4.2 Arbeid med generalisering av figurer

Flere undersøkelser (Becker & Riviera, 2006; English & Waren, 1998; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Lee, 1996; Stacey, 1989; Stacey & MacGregor, 2000) dokumenterer elevers vanskeligheter med å se mønster i figurfølger og å kunne uttrykke dette som en funksjonssammenheng. Lannin et al. (2006) skriver at flere undersøkelser har vist at elever kan lykkes i å konstruere generalisering, men at elevene forsøker å generalisere situasjoner på forskjellige måter. De skriver at rekursiv metode involverer å gjenkjenne og bruke endringer fra figur til figur med grunnlag i den avhengige variabelen. De skriver videre at man i eksplisitt metode bruker indeks til figur, som vil si at man setter den uavhengige variabelen i sammenheng med den avhengige variabelen, som gjør det mulig å beregne en hvilken som helst verdi for variabelen. Videre fant de ut at elevene beholdt koblingen til de ikoniske representasjonene i utviklingen av rekursive regler, men at de ofte mister den koblingen i utviklingen av eksplisitte regler (Lannin et al. 2006). De skriver at å fremprovosere eksplisitte strategier hos elevene kan føre til at de forlater sien egen meningsskaping og går over til å gjette på strategier ut fra overflatiske oppdagelser i mønsteret.

I undersøkelsen til Becker og Riviera (2006) ser de på to ulike modeller for å uttrykke generaliteter. Den første er *numerisk tilnærming* (oversatt fra begrepet numerical), elever som benytter seg av numerisk tilnærming bygger sine formler fra det tilgjengelige numeriske mønstret. De som benytter seg av denne metoden virker ikke bestandig dyktig til å justere deres generalisering eller på noen andre gyldige måter. Formelen som blir skapt ut fra dette har en tendens til å virke begrenset på grunn av at kvaliteten på det mønstret eleven jobber ut fra ikke er visualisert. Den andre er *figurativ tilnærming* (oversatt fra begrepet figural), der elever benytter seg av figuren i følgen for å generalisere. Man ser på hvordan man klarer å bruke symboler og variabler for å forklare figurfølgen. Elever som benytter seg av en figurativ tilnærming virker ikke avhengig av å sette opp en tabell for verdiene. De har også en større mulighet for å generalisere til en eksplisitt formel (Becker & Riviera, 2006)

Stacey (1989) skriver at det å finne og bruke mønster er en viktig strategi for matematiske problemløsning. Hun undersøkte elever i arbeid med figurmønster og fant fire karakteristiske metoder som elevene benyttet seg av for å finne figur nummer 20 og 1000.

- *Tellemetoden* (oversatt fra begrepet Counting Method): elevene teller fra tegningen eller et konkret mønster.
- *Differansemetoden* (oversatt fra begrepet Difference Method): elevene ser på forskjellen mellom to påfølgende ledd i en følge.
- *Hel-objekt-metoden* (oversatt fra begrepet Whole-objekt Method): elevene benytter erfaringer med et lavere ledd for å finne mengden av et høyere ledd.
- *Lineær metode* (oversatt fra begrepet Linear Method): elevene benytter et mønster som vedkjenner at både multiplikasjon og addisjon er involvert og at rekkefølgen på operasjonene er avgjørende.

Videre trekker Stacey (1989) frem at hovedinntrykket fra hennes undersøkelse var at elevene ikke var motvillig til å generalisere, man at de konstruerte generaliseringen for fort og hadde heller fokus på enkelhet enn nøyaktighet. Hun benytter seg av begrepene nær- og fjerngeneralisering, der *nærgeneralisering* er generalisering som er situert og kan utledes gjennom steg for steg telling eller tegning. I *fjerngeneralisering* går generaliseringen ut over rimelig praktiske grenser, som eksempel å se på det 100. leddet uten å vite det 99. leddet (Stacey, 1989).

Lee (1996) skriver at hun ser på algebra som en mini-kultur innenfor den store kulturen matematikk. Hun mener at algebra, og matematikk generelt, handler om å generalisere mønster. I sin undersøkelse har hun kommet frem til at hindringen i arbeid med generalisering av figurmønster kan beskrives ved tre nivåer:

- *Oppfattelsesnivå* (oversatt fra begrepet the perceptual level): Gjennomskue mønsteret, se det tilsiktede mønsteret.
- *Verbaliseringsnivå* (oversatt fra begrepet the verbalizing level): Kunne uttrykke mønsteret verbalt og tydelig.

- *Symboliseringsnivå* (oversatt fra begrepet the symbolization level): Kunne bruke n for å representere den n'te plassen i følgen, for deretter å uttrykke antall komponenter i figuren på plass n som en funksjon av n.

Lee påpeker at problemet for deltakerne hun forsket på ikke var å se mønsteret, men å se et algebraisk brukbart mønster. Hun kom frem til at neste 100 % av de som deltok i undersøkelsen, så et mønster slik at de kunne tegne opp den neste figuren i følgen. Problemet for deltakerne var at de ikke kunne beskrive mønstret på en matematisk og presis måte. English og Warren (1998) fant i sin undersøkelse at elever syntes det var lettere å verbalisere sin generalisering enn å uttrykke dem ved symboler. Ettersom generaliseringen ble mer kompleks, støttet elevene seg til en rekursiv tilnærming for å verbalisere sin generalisering, og brukte aritmetisk realitet for å uttrykke denne generaliseringen formelt. Elevene syntes også at det var lettere å generalisere ut fra figurmønster enn og skulle generaliser ut fra en tabell.

En viktig del av det å se mønster i figurfølger og å kunne uttrykke mønstret som en funksjonssammenheng, er å kunne bevise at det man er kommet frem til er rett. Jeg vil derfor i neste avsnitt ta for meg ulike bevisnivåer.

2.5 Matematiske bevis

I artikkelen *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*, ser Balacheff (1988) på hvordan elever praktiserer bevis i skolematematikken. Han sier at den mest elementære formen for å uttrykke et bevis, er en ved en direkte visning. Balacheff (1988) skiller mellom to typer bevis i skolematematikken. Det første er pragmatisk bevis som tar utgangspunkt i konkrete figurer, aritmetisk uttrykk eller handlinger. Det andre er begrepsmessig bevis der man benytter strukturer og relasjoner mellom strukturene, her ser man ikke på konkrete figurer. Ut fra dette har han identifisert fire bevisnivåer ut fra elevers praksis av bevis i skolematematikken:

- *Naiv empirisme* (oversatt fra begrepet naive empiricism): Man sjekker for noen konkrete eksempler, ser på de første elementene i følgen og sjekker formelen opp mot dem.
- *Avgjørende eksperiment* (oversatt fra begrepet the crucial experiment): Tester en hypotese, som ivaretar det generelle tilfellet, ved å sjekke et eksempel. Man sjekker for en stor n, altså et element langt ut i følgen, for eks. figur nummer 100.

- *Generisk eksempel* (oversatt fra begrepet the generic example): Argumenterer for at noe er sant ved å se på egenskapene til et eksempel. Det innebærer å gjøre eksplisitt begrunnelsen for sannheten i en påstand ved hjelp av operasjoner eller transformasjoner på et objekt som ikke er der i seg selv, men som er en karakteristisk representant for klassen.
- *Tankeeksperiment* (oversatt fra begrepet the thought experiment): Fremkaller handling ved å internalisere beviset og løsne seg fra en bestemt representasjon. Beviset er fortsatt farget av en anekdotisk tidsmessig utvikling, men drift og grunnleggende relasjoner i det er angitt på en annen måte enn ved resultat av dens bruk, noe som er tilfelle for den generiske eksempel.

Mason (1996) skriver at generisk eksempel er en karakteristisk representant for en klasse objekter, og det skal gjelde som "en for alle". Det skal gi et eksempel på noe, og vise de spesielle egenskapene til eksemplet. Det viktige er strukturen, det og se relasjonen mellom størrelsene. Det som læreren presenterer som et generelt eksempel blir ikke alltid oppfattet som det av elevene. Elevene kan se det som et eksempel på en spesifikk oppgave, og forstår ikke at det samme eksempelet gjelder for flere.

Balacheff (1988) fremhever at bevis ved naiv empirisme eller avgjørende eksperiment ikke kan ses på som gyldig bevis. Han benytter seg bare av ordet bevis fordi at de som benytter seg av naiv empirisme og avgjørende eksperiment ser på dem som bevis. Generisk eksempel og tankeeksperiment er derimot gyldige bevis. "(…) for the generic example and the thought experiment, it is no longer a matter of 'showing' the result is true because 'it works'; rather it concerns establishing the necessary nature of its truth by giving reasons." (s. 218).

Garnier og Taylor (1996) tar for seg det som man kan kalle for et moteksempel. Om man tenker seg at man blir presentert for en proporsjonal funksjon $\forall x P(x)$, hvis man da kan finne et eneste element a, som viser at $P(a)$ er falsk, da kan ikke $\forall x P(x)$ være et teorem. Å bevise at noe ikke er sant ved å finne et eneste eksempel som viser at det er falsk, kalles for *bevis ved moteksempel*. Valget man tar ved å benytte seg av bevis ved moteksempel er ofte basert på erfaringer, intuisjon eller rent instinkt. Som regel starter man ved å se på noen eksempler, og i denne fasen kan man komme over bevis ved moteksempel.

I analyse er det relevant for meg å benytte meg av Balcheff's tre første nivåer, naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel. Til slutt i dette teorikapitlet vil jeg se på forskning som er gjort i arbeid med grubletegninger.

2.6 Relaterte studier

Naylor og Keogh (2012) startet sitt arbeid med grubletegninger (oversatt fra concept cartoons) for om lag 20 år siden, og det har siden da vært gjort en del forskning på denne arbeidsmetoden. De skriver videre at grubletegninger er ment for å fremkalle ideer, utfordre tankegangen og støtte elevene i deres utvikling av forståelse. Det er primært en arbeidsmetode som er brukt i naturfagundervisning, men man tror at det også har et godt potensiale i matematikkundervisning (Sexton et al., 2009).

Sexton et al. (2009) undersøkte 101 elever på 3. og 4. tinn der grubletegning ble introdusert som en måte å få innsikt i elevers strategier for å løse addisjons oppgaver i en situasjon som krever at elevene bruker mentale strategier for å løse oppgaven $24 + 99 = n$. De fant ut at nesten to-tredjedeler av de som deltok i undersøkelsen mente at problemet enten var for vanskelig å løse, eller at de ville løse oppgaven ved hjelp av en algoritme. Forfatterne antyder at man må gi elevene flere muligheter til å utvikle mentale strategier for resonering. Vider hevder de at et mål for matematikkundervisning er at elever skal lære en rekke strategier for å utføre mentale beregninger, og gjøre kloke valg om den beste strategien for å løse en gitt oppgave. Dette viser at grubletegninger kan gi innsikt i hvilke strategier elevene bruker når de jobber med problemløsningsoppgaver i matematikk, og gir en nyttig kontekst for å diskutere fordeler og ulemper av strategiene som brukes av de ulike karakterene i grubletegningen.

Naylor og Keogh (2012) skriver at i matematikken er det vel så viktig å se på hvordan elever løser problemer som det svaret de kommer med. Det er ofte slik at elever ikke artikulerer rundt de strategier som de bruker for å løse problemer. Yackel og Cobb (1996) skriver at det å gi forskjellige løsninger på problemer, gjør at man må endre innstillingen fra å løse problemer til å sammenligne løsninger. Dette gjør at innstillingen til elevene strekker seg ut over det å lytte til og prøve å gi mening til, til å prøve å identifisere likheter og forskjeller mellom ulike løsninger. En slik reflekterende aktivitet har potensiale til sterkt å bidra til elevers matematikklæring. Dabell (2008) skriver i sin artikkel at grubletegninger er mer effektiv når de diskuteres av nivåblande grupper. Dette resulterer i en større grad i meningsutveksling og tillater forskjellige ideer å komme til overflaten, som deretter kan diskuteres. Videre skriver han at grubletegninger også er et verdifullt verktøy å bruke med elever med særskilte behov og de som krever ekstra tillit i å vise frem sine synspunkter i matematiske sammenhenger.

Sexton (2010) tar i sin artikkel utgangspunkt i en undersøkelse basert på Naylor og Keogh (1999, som sitert i Sexton, 2010), der de har gjort en liten pilotstudie med 75 elever for å studere bruken av grubletegninger. Sexton (2010) skriver at målet med undersøkelsen var å få tilgang til elevers holdninger og mening om læringsmiljøet og hva de foretrekker i matematisk undervisning og læring. Det å inkludere en skriftlig forklaring viser seg å være viktig. Ytringene ga elevene tilgang til å utdype sine egne valg. Elevene var også i stand til å grunngi sine valg i grubletegningen, selv om artikuleringen av disse tankene varierte fra elev til elev. Han skriver videre at de kjente settingene og figurene i grubletegningen er relevant for de ideene som blir presentert. Det er viktig at alternative oppfatninger, uttalelser eller spørsmål knyttet til sentrale ideer som er presentert i grubletegningen. I de fleste tilfeller er alternative synspunkt presentert gjennom bruk av snakkebobler og skriftspråk. Dette gjør at elevene har frihet til å vurdere om de er enig eller uenig i de synspunktene som kommer frem, uten at de føler seg truet til å uttrykke sin egen mening offentlig (Kinchin, 2004 som henvist i Sexton, 2010). Funnene i undersøkelsen markerer viktige behov for å få tilgang til elever oppfatninger om deres tilnærming til å lære matematikk, fordi elever og lærere ikke alltid deler en felles forestilling om disse tilnærmingene (Sexton, 2010).

3 Metode

Forskningsspørsmålet mitt for dette prosjektet er: Hvordan bidrar tre grubletegninger til å sette i gang to elevgruppers samtale om algebraisk generalisering? For å få et godt nok svar på dette har jeg stilt underspørsmålene: Hvordan genererer elevene argumentasjon og resonnement? På hvilken måte støtter elevene seg til grubletegningen i sine argumentasjoner? For å kunne finne svar på forskningsspørsmålet var jeg avhengig å komme ut i skolen og forske på elever i samspill med hverandre. Jeg vil derfor i dette kapitlet gi en skildring av forskningen min, samt gjøre greie for og grunngi de valgene jeg har tatt underveis i arbeidet mitt.

3.1 Kvalitativ metode

I forskningsarbeidet mitt jobber jeg innenfor et kvalitativt paradigme med fortolkende teori som epistemologisk grunnlag. En kvalitativ metode tar for seg få forekomster, men studere hver forekomst nøye (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Hensikten med en slik forskning er å få tak i den felles opplevelsen eller erfaringen som menneskene har når det gjelder fenomenet (Cohen et al., 2011). Epistemologi innen kvalitativ forskning handler om forholdet mellom forskeren og forskningsdeltakerne, og det opprettes et nært samarbeidsforhold mellom forskeren og de personene og settingene som står i fokus for forskningen (Postholm, 2010). I et fortolkende paradigme vektlegges det at man forsøker å få en helhetlig forståelse av problemstillingen. Som forsker tar man utgangspunkt i individene for så å jobbe direkte med erfaringer og opplevelser for å bygge teori rundt dem, hvor perspektivet til deltakerne tas med i forskningen (Cohen et al., 2011). Forskeren avdekker ikke virkeligheten, men konstruerer den i stedet innenfor rammen av en sosial, historisk og kulturell kontekst (Postholm, 2010).

Med dette som utgangspunkt er jeg innenfor det subjektivistiske forskningsparadigme. I forskningsspørsmålet mitt har jeg fokus på hvordan grubletegninger kan være med på å sette i gang elevers samtale om algebraisk generalisering. I og med at elevene også jobber med figurmønster, er det naturlig for meg å se på hvilke metoder de tar i bruk for å løse problemet og hvilke forskjellige representasjoner de benytter seg av, da spesielt naturlig språk og symbolspråk.

Som forsker har man alltids med seg bagasje når man går i gang med forskning. Men dette mener jeg at man ikke kan sette i gang med en forskning å være helt objektiv og legge til side alle den kunnskapen man har fra tidligere. Det teorigrunnlaget som man har når man trer inn i rollen som forsker, påvirker det som skjer i klasserommet (Postholm, 2010). Jeg har valgt å gå inn i forskerrollen med et sosiokulturelt perspektiv på læring, og dette er med på å påvirke måten jeg har bygd opp grubletegningene jeg har gjennomført med elevene, men også måten jeg har analysert datamaterialet mitt i etterkant.

I og med at det jeg som har konstruert og laget grubletegningene som elevene jobber med, vil jeg si at jeg har trekk fra designbasert studie.

3.1.1 Designbasert studie

Innenfor kvalitativ forsking er det flere ulike typer studie man kan gjøre. I og med at det er jeg selv som har laget grubletegningene, og tester dem ut for å se hvordan de bidrar til å sette i gang to elevgruppers samtale om algebraisk generalisering, betrakter jeg min studie som en designbasert studie. The Design-Based Research Collective (2003) definerer i sin artikkel fem kriterier som en designbasertstudie bør inneholde. Den første omhandler at målet med det designet læringsmiljøet som er skapt, skal ha en sammenheng med utviklingen av teorier for læring hos elevene. Den andre omhandler utviklingen av undersøkelsen. Den skal finne sted gjennom kontinuerlige sykluser som inneholder design, utførelse, analyse og re-design. Med dette menes det at etter man har gjennomført analysen, starter man med å utvikle designet på grunnlag av dette før man går i gang med nye utforskninger. Videre innebærer den tredje at den forskningen som blir gjort med grunnlag i designet må føre til teorier som kan hjelpe en med å kommunisere implikasjoner til praktiserende og andre forskere. Den fjerde tar for seg det parallelle: forskningen må legge til rette for at designet kan utføres av andre og i andre settinger. En designbasert studie må gi mulighet til å utvikle den kunnskapen som man allerede har på området. Det femte og siste punktet er at studien skal hvile på metoder som kan dokumentere og vise sammenhenger mellom resultatene.

I min studie ser jeg som nevnt tidligere på hvordan tre grubletegninger bidrar til å sette i gang to elevgruppers samtale om algebraisk generalisering. Jeg startet med å gjennomføre en pilotstudie for å se om grubletegninger egnet seg som en arbeidsmetode i matematikk. Etter dette gjorde jeg om grubletegningene og tilføyde tilleggsoppgaver som supplement, her har jeg altså gått inn og re-designet grubletegningene før jeg startet selv datainnsamlingen.

Boblene i grubletegningen skal være med på å gi elevene støtte for å generalisere den oppgaven som er presentert. Ser man på det andre kriteriet lagde jeg først Bordoppgaven (Oppgave 1) og gjennomførte den med de to elevgruppene, og tok med de erfaringene jeg gjorde da med meg da jeg ordnet de andre grubletegningene. Elevene ga uttrykk for at de syntes den første grubletegningen var for lett og dermed var Pyramideoppgaven (Oppgave 2) og Froskeoppgaven (Oppgave 3) mer krevende enn den første. Jeg re-designet altså oppgavene etter at jeg hadde gjennomført Bordoppgaven (Oppgave 1). Jeg vil i slutten av dette prosjektet komme med forslag til hva som kunne vært gjort annerledes ut i fra de erfaringene jeg har hatt med grubletegningene. Dette for at andre som ser paralleller til sin egen undervisning skal kunne benytte seg av det jeg har gjort og teste ut dette på sin egen klasse eller gruppe. Gjennom analysen i dette masterprosjektet vil jeg bruke situasjoner fra observasjonene som jeg har gjort og elevarbeidet som jeg har samlet inn, slik at man kan se på sammenhenger mellom de metodene jeg har benyttet og det resultatet jeg ender opp med.

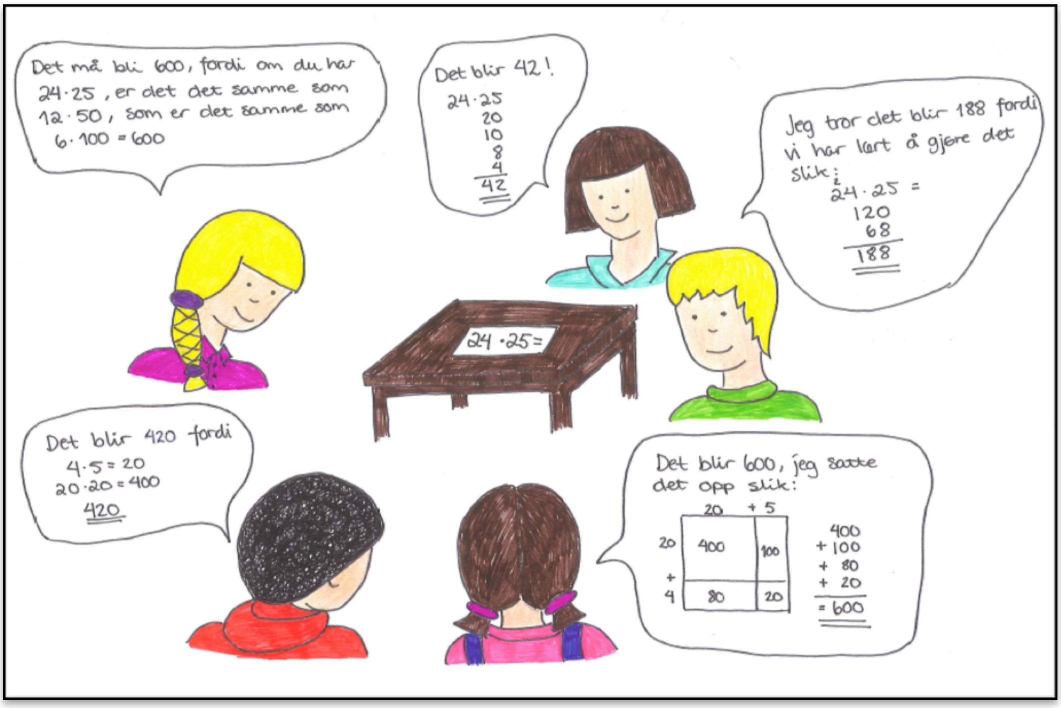
Ut fra dette vil jeg si at jeg har klare trekk fra designbasert studie og har ovenfor lagt frem oppgaven min ut fra den teorien jeg presenterte om designbasert studie. Selv om jeg har re-designet oppgaven mine underveis, har det ikke vært en jevn syklus der jeg hele tiden har gått tilbake og analysert, og endret på grubletegningene. På bakgrunn av dette kan jeg ikke kalle det for en ren designbasert studie, men jeg har mange fellestrekk med denne type studie.

3.2 Datainnsamling

Jeg vil i denne delen si noe om pilotprosjektet som jeg gjennomførte i forkant av datainnsamlingen, før jeg går inn på valg av skolen og trinnet der jeg gjennomførte selve datainnsamlingen. Her vil jeg også si noen om observasjonen jeg gjorde.

3.2.1 Pilotprosjekt

I og med at det var mye usikkerhet rundt hvor mye tid jeg kom til å få ved skolen i Tromsø valgte jeg å gjennomføre pilotprosjektet ved en skole i Trondheim. Jeg tok derfor kontakt med en av skolene jeg har hatt praksis, og spurte en lærer på 6. trinn om det var mulighet for å gjennomføre en pilotstudie i klassen hans. Jeg fikk gjennomføre piloten med hel klasse, og delte elevene opp i grupper på fire. Jeg observerte gruppene under arbeid med grubletegningen og evaluerte i etterkant. Grubletegningen (figur 4) som jeg ordnet til elevene omhandlet multiplikasjon med tosifrede tall, som var det tema elevene arbeidet med den dagen jeg var der.



Figur 4: Grubletegning til pilotprosjekt

På grunn av tidsbegrensning var det ikke mulig å innhente tillatelse til filming av økten, men jeg observerte alle gruppene underveis og hadde en oppsummering med elevene på slutten av økta. Her gjennomgikk vi i fellesskap påstandene i grubletegningen, og hadde en oppsummering om hvordan det var å jobbe på denne måten.

Hensikten med pilotprosjektet var å se om det var gjennomførbart å introdusere grubletegninger som en arbeidsmetode i matematikk. Etter økta på 6.trinn skrev jeg ned mine umiddelbare tanker og ideer, og hadde fokus på hva jeg måtte endre før selve datainnsamlingen. Elevene fra pilotprosjektet mente blant annet at det var veldig mye tekst på tegningen, og at det ble for mye å ta stilling til. Dette hadde jeg tenkt på i forkant, men fante ut at siden elevene ikke var kjent med denne typen oppgave kunne det være til hjelp for dem å ha litt mer tekst og fem personer. Jeg besluttet derfor at jeg skulle ha mindre tekst på grubletegningen til datainnsamlingen min og heller ha tilleggsoppgaver om elevene ble fort ferdig med den.

Jeg erfarte også at det var vanskelig å komme inne en enkel time å gjennomføre arbeid med grubletegninger. Klassen jeg gjennomførte piloten i var ikke vant til å samarbeide eller diskutere sammen i matematikkundervisningen. Jeg så det derfor som nødvendig å ha mer enn en grubletegning til elevene i forskningen min. Dette for at elevene både skulle bli vant til det å samarbeide, men også for at de skulle blir kjent med grubletegninger som arbeidsmetode.

3.2.2 Valg av skole og trinn

Etter å ha vært i kontakt med flere skoler i Tromsø fikk jeg til slutt kontakt med en av byens ungdomsskoler. Jeg hadde ingen andre kriterier for valg av skole enn at de måtte være positiv til å la meg gjennomføre datainnsamlingen. Etter å ha kommet i kontakt med rektoren ved skolen, satte hun meg i kontakt med en av matematikklærerne på 9.trinn. Jeg var der i tilsammen tre uker i september, og jeg fikk følge henne i alle matematikktimene gjennom hele perioden jeg var der. Læreren hadde ansvaret for matematikkundervisningen i to grupper, som vil si 10 matematikkøkter i uken. Jeg hadde ingen kjennskap til elevgruppene i forkant av datainnsamlingen, og brukte derfor de to første ukene til å observere undervisningen og bli kjent med elevene. I den siste uken gjennomførte jeg datainnsamlingen.

Jeg valgte en gruppe fra hver elevgruppe som læreren hadde matematikkundervisning i, og jeg har valgt å kalle disse gruppene for A og B. Gruppe A besto av to jenter og to gutter som jeg har valgt å kalle for Anna, Aina, Alex og Adrian. Gruppe B besto også av to jenter og to gutter som jeg har valgt å kalle Beate, Britt, Brage og Bjørn. I sistnevnte gruppe var de bare tre elever til stede under undersøkelsen, der Britt var med under Bordoppgaven (Oppgave 1) og Froskeoppgaven (Oppgave 3), mens Bjørn bare var med under Pyramideoppgaven (Oppgave 2). Grunnen til at det bare ble to grupper, var fordi at det var et fåtall av elevene som hadde med seg tillatelse for filming. Dette var også grunnen for at både gruppe A og gruppe B besto av 4 elever. Men jeg hadde i forkant tenkt at jeg ville ha grupper på fire elever, for å sikre at det ble diskusjon og at jeg dermed kunne få et rikt datamateriale.

Jeg bestemte meg tidlig for å gjennomføre datainnsamlingen ved en ungdomsskole. Som kompetansemål etter 7. trinn skal elevene kunne utforske og beskrive strukturer, og forandringer i enkle geometriske mønster og tallmønster (Kunnskapsdepartementet, 2010, s. 7). Det vil si at elevene på 9. trinn, som jeg valgte å forske på, hadde arbeidet med dette i forkant og hadde dermed også kunnskap om algebraiske notasjon. På bakgrunn av dette så jeg det dermed ikke som nødvendig å gjennomføre noen undervisning i forkant av undersøkelsen. At elevene allerede hadde kunnskap om algebraisk notasjon, var også avgjørende for at elevene skulle jobbe som en gruppe med grubletegningene, og for at jeg skulle ha minst mulig innflytelse på det som skjedde under datainnsamlingen.

3.2.3. Observasjon

Etter samtale med læreren ytret jeg ønske om at de elevene jeg valgte til datainnsamlingen måtte være muntlig aktiv og selv ønske å delta. I samarbeid med læreren plukket jeg ut 12 elever som fikk brev om tillatelse om filming med seg hjem, dette for å sikre at jeg hadde nok elever til å gjennomføre undersøkelsen. Jeg hadde i forkant bestemt at jeg skulle ha 3-4 elever i hver gruppe, fordi jeg ønsket diskusjon og at elevene skulle få frem ulike synspunkter. I starten av den siste uken, da jeg startet datainnsamlingen, var det fire elever i gruppe A som hadde med tillatelse og fire elever i gruppe B. Det var dermed ingen annen grunn til at jeg valgte disse elevene enn at de selv ønsket å være med og at tillatelse om filming var i orden. Denne typen utvalg kalles et ikke-sannsynligutvalg. Her gjennomfører forskeren undersøkelsen sin med en bestemt gruppe med full viten om at den ikke representerer befolkningen, men kun seg selv (Cohen et al., 2011). Læreren kategoriserte elevene fra middels til sterk i matematikk, på bakgrunn av karakteren de hadde i matematikk.

Jag hadde i alt tre økter til rådighet med hver elevgruppe, to 70 minutters økter og en 35 minutters. I og med at elevene hadde den lengste økt på forskjellige tidspunkt i uka, jobbet de ikke med grubletegningene i samme rekkefølge. Dette vil jeg si mer om i analysen av grubletegningene. Elevene fikk beskjed om å ha med seg noe å skrive med, men ikke viskelær. Om de skrev noe feil skulle de sette kryss over det, men ikke viske det ut. Når de jobbet med grubletegningene fikk de utdelt hvert sitt blanke ark. Til Forskeoppgaven (Oppgave 3) fikk de også "frosker" som de kunne benytte seg av. Ellers hadde de ingen andre hjelpemidler.

For å samle inn datamateriale til forskningen min benyttet jeg meg av observasjon som metode (Cohen et al., 2011). Jeg observerte to utvalgte elevgrupper mens de samarbeidet med å løse grubletegningene og tilleggsoppgavene. Jeg benyttet meg av grupperommet som var i arealet, som var et lite rom der elevene satt i en halvsirkel rundet enden av bordet, videokameraet var plassert mot elevene og lydopptakeren lå midt på bordet for å sikre god lydkvalitet. I en liten gruppe der det er mye spontane og lite styrt dialog kan det være vanskelig å få med seg alt som skjer ved bare å være en observatør. Med et videokamera får man med seg en del av de samhandlingene som skjer ved peking og gestikulering som en ikke får med bare bruk av lydopptaker. Videokamera er nyttig for å kunne observere både samtaler og den samhandlingen som pågår (Postholm, 2010). Ved å benytte meg av videokamera fikk jeg frihet til å kunne være en mer deltakende observatør, fordi jeg ikke trengte å notere alt elevene sa og gjorde. Transkripsjonene fra disse videoene skulle være hoveddataene mine og elevenes skriftlige arbeid som supplement i en triangulering av datamaterialet i analysen (Cohen et al., 2011).

Under observasjonene satt jeg ved enden av rommet, og var dermed ikke synlig i videokameraet. Jeg ga beskjed til elevene at de kunne spørre meg om det var noe de lurte på, men at jeg ville bryte minst mulig inn i deres samtale. Jeg hadde på forhånd bestemt meg for å ta tollen som en ikke-deltakende observatør, men omstendighetene rundt Froskeoppgaven (Oppgave 3) gjorde at jeg måtte endre rollen min til delvis deltakende observatør (Cohen et al., 2011). Postholm (2010) skriver at den kvalitative forskeren er opptatt av å observere aktiviteter i sin naturlige gang, men har samtidig et fokus for observasjonene basert på teori. Jeg var opptatt av å se hvilke metoder elevene benyttet seg av for å komme frem til en løsning på oppgavene. Jeg gjorde altså det Cohen et al. (2011) kaller for en semistrukturell observasjon. Jeg hadde forhåndsbestemt tema som jeg ville samle inn data for å belyse og beskrive.

3.3 Analysemetode

I denne delen vil jeg ta for meg hvordan jeg har valgt å handtere datamaterialet mitt og hvordan jeg har gått frem for å analysere materialet.

3.3.1 Data

Datamaterialet mitt er altså i utgangspunkt de observasjonene jeg samlet inn av elevene ved bruk av videokamera og lydopptaker. Jeg har også tatt brukt det elevene skrev ned på arkene sine underveis i oppgaven for å belyse situasjoner i transkripsjonen. I transkripsjonene har jeg brukt disse kodene:

[	A og B snakker samtidig
..	Nøling
...	Pause opptil 3 sekunder
[pause n s]	Pause n sekunder
(tekst i parentes)	Ikke-verbale handling

3.3.2 Den konstant komparative analysemetoden

Etter datainnsamlingen så jeg gjennom videofilmene og delte filmene inn i tre deler. Dette for at jeg skulle få en oversikt over hva hver film omhandlet. Jeg transkriberte så alle videofilmene. Jeg skrev ut hver transkripsjon og leste gjennom dem flere ganger for å bli god kjent med datamaterialet mitt. Ved å ha dialog som tekst kunne jeg notere underveis og identifisere situasjoner i transkripsjonene som jeg fant interessant.

Videre bestemte jeg meg for å sortere materialet mitt slik at jeg kunne få en bedre oversikt over innholdet, og jeg begynte dermed å kode og dele opp materialet mitt i situasjoner. Denne måten å arbeide med analyse på er det Postholm (2010) kaller for den konstant komparative analysemetode (oversatt fra grounded theory), som bruket innenfor kvalitative studier hvor koding og kategorisering er viktig i analysearbeidet.

Jeg startet med å dele inn materialet mitt ut fra begrepene til Lee (1996): Oppfattelsesnivå: gjennomskuer mønstret, verbaliseringsnivå: uttrykke mønstret verbalt, og symboliseringsnivå: bruke n for å representere den n'te plassen i følgen, for deretter å uttrykke antall elementer i figuren på plass n av en funksjon av n. Etter å ha gjort dette følte jeg at jeg manglet noe, at jeg ikke fikk det jeg hadde forventet ut av materialet, og at det ikke var godt nok å bare dele materiale mitt etter disse kategoriene. Jeg bestemte meg derfor for å gå gjennom datamaterialet mitt på nytt, og da prøve å legge til side det jeg hadde sett tidligere. På denne måten kunne datamaterialet tale for seg selv og ikke bli plassert innfor rammen av Lee (1996) sine nivåer. Jeg startet med å lese gjennom alle transkripsjonene enda en gang. Denne gangen benyttet jeg meg av forskjellige fargekoder og skrev ned stikkord som beskrev situasjonene, i tillegg til tanker og refleksjoner jeg fikk underveis. Dette gjorde at jeg fikk større klarhet i hva datamaterialet mitt inneholdt, og fikk satt ord på det jeg så i materialet og mine tanker rundt det. Ut fra dette så jeg at jeg kunne kode datamaterialet mitt inn i Balacheff's (1988) bevisnivåer og noen egne koder. Denne fasen kaller Postholm (2010) for *åpen koding*. I denne fasen kategoriserer forskeren fenomener og setter navn på situasjoner etter nøye gjennomgang av datamaterialet. Det beskrives også som en prosess der man ser etter og oppdager mønster i datamaterialet. Navnet på noen av disse kategoriene vil sannsynligvis komme fra forskerens teoribakgrunn, mens andre vil formes med utgangspunkt i ord og uttrykk som forskningsdeltakerne selv anvender og dermed kan forskeren selv skape kategorier (Postholm, 2010).

En rendyrket konstant komparative analysemetode er fullstendig induktiv, som innebærer at forskeren prøver å legge fra seg egne subjektive, individuelle teorier, for så å la datamaterialet tale for seg uten at forskerens egne perspektiver påvirker teorien som utvikles på grunnlag av materialet (Postholm, 2010). Postholm skriver videre at forståelsen settes til side, og fenomenet blir betraktet med et mest mulig åpent sinn. Det er i praksis helt umulig å sette til side sine subjektive, individuelle teorier, men en slik fremgangsmåte kan hjelpe forskeren til å bli bevisst sine egne fordommer, synspunkter og antagelser angående fenomenet det forskes på slik at han eller hun kan møte det med et så åpent sinn som mulig (Postholm, 2010).

Etter å ha kodet datamaterialet mitt endte jeg opp med disse ti kodene:

- *Økning*. Elevene ser og snakker om økningen mellom figurene eller tallene i følgen, ser på sammenhengene i figuren.
- *Dekomponering*. Elevene deler opp hvert element og ser på antall komponenter i figuren, men også forskjellen på antall komponenter fra et element til det neste.
- *Naturlig språk*. Benytter seg av naturlig språk for å uttrykke formelen eller for å skrive ned metoden de har kommet frem til
- *Rekursiv formel*. Ser den rekursive sammenhengen i følgen og kan dermed benytte seg av den til beregning av påfølgende figurer. For eksempel, hvor mange det er i figur 51, hvis det er 202 i den forgående figuren
- *Bevis ved moteksempel*. Tar i bruker eksempler for å motbevise om en hypotese er rett eller gal.
- *Naiv empirisme* (fra Balacheff (1988) naiv empiricism). Sjekker hypotesen for noen konkrete eksempler, for eksempel sjekker elevene formelen for de første elementene i følgen.
- *Avgjørende eksperiment* (fra Balacheff (1988) the crucial experiment). Tar et element langt ut i følgen og tester hypotesen, som ivaretar det generelle tilfelle, ved å sjekke dette eksemplet.
- *Generisk eksempel* (fra Balacheff (1988) the generic example). Argumenterer for at noe er sant ved å se på egenskapene til elementet. Eksemplet elevene benytter er en karakteristisk representant for følgen.

- *Eksplisitt formel*. Elevene setter den uavhengige variabelen i sammenheng med den avhengige variabelen, som gjør det mulig å beregne en hvilken som helt verdi for variabelen.
- *Representert ved n*. Uttrykker formelen representer ved notasjonen *n*.

Postholm (2010) skriver at etter man har delt inn materialet i koder, må de grupperes slik at materialet er håndterlig. Forskeren grupperer begrepene som kodene er klassifisert under, slik at antall enheter å jobbe videre med reduseres. Etter at jeg hadde delt inn materialet mitt inn i koder begynte jeg å studere situasjonene innenfor de forskjellige kodene, for å se om jeg kunne finne noe generelle kjennetegn. Jeg oppdaget etter hvert at disse kodene kunne plasseres inn under Lee (1996) sine tre nivåer: oppfattelsesnivå, verbaliseringsnivå og symboliseringsnivå, som jeg hadde startet hele prosessen med. Postholm (2010) kaller denne prosessen som består i å samle grupper va begreper som ser ut til å dekke de sammen fenomenene for *kategorisering*.

Gjennom dette kategoriseringsarbeidet samlet jeg kodene i tre kategorier, og så at disse var forenlige med Lee (1996) sine tre nivåer. Dette gjorde at jeg endte opp med tre typiske trekk for elevene jeg observerte i arbeid med grubletegninger som jeg har valgt å kalle:

1. Ser sammenhenger
2. Uttrykker mønsteret verbalt
3. Uttrykker seg ved algebraisk notasjon.

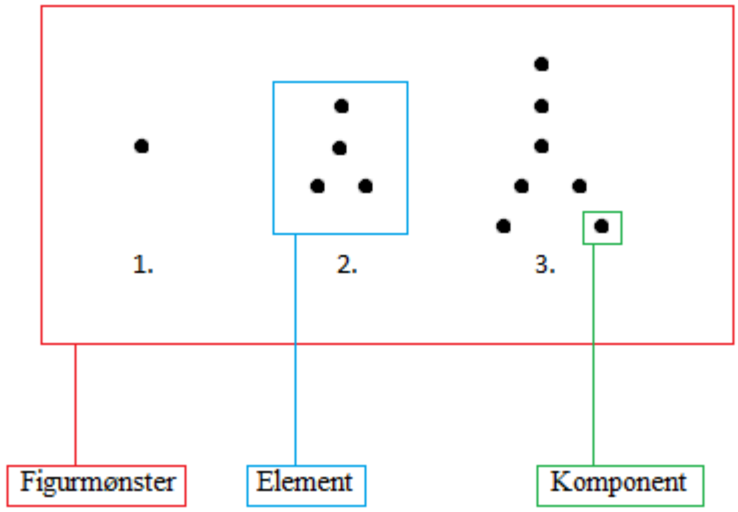
Jeg valgte å forholde meg til kodene mine, men endret litt på dem da jeg organiserte dem inn under de tre kategoriene jeg var kommet frem til. Disse tre kategoriene ble altså mine kjernekategorier, og som Postholm (2010) skriver er det kjernekategoriene som representerer forskningens hovedtema.

Ser sammenhenger	**Uttrykker mønsteret verbalt**	**Uttrykker seg ved algebraisk notasjon**
1. Økning 2. Dekomponering	1. Naturlig språk 2. Uttrykker rekursiv formel 3. Undersøker om formelen stemmer - Bevis ved moteksempel - Naiv empirisme - Avgjørende eksperiment - Generisk eksempel	1. Uttrykker eksplisitt formel 2. Uttrykker formelen representert ved n

Etter at forskeren har delt inn datamaterialet ut fra koder og kategorier, blir den neste oppgaven å finne ut hvilke eksempler fra materialet som skal velges for å belyse de ulike kategoriene (Postholm, 2010). Jeg fant flere situasjoner i datamaterialet mitt som belyste de forskjellige kategoriene, og det jeg ønsket å drøfte i analysen min. I neste omgang blir disse situasjonene analysert for å oppnå en enda mer dyptgripende forståelse av settingene eller fenomenene som studeres (Postholm, 2010). Gjennom denne tidkrevende forsknings-prosessen, fra observasjon og transkripsjon, til koding og kategorisering har jeg gjort en hel del analyse og tolkninger for å hjelpe meg med å forstå og tolke de observerte situasjonene enda bedre.

Postholm (2010) skriver at forskeren til slutt skriver en helhetlig tekst eller fortelling som representerer forskningsfeltet med utgangspunkt i kategoriene og underkategoriene. Jeg har benyttet kategoriene som delkapittel i analyse- og drøftingskapitlet mitt, og underkategoriene som underoverskrifter innenfor delkapitlene.

I analysen bruker jeg begrepene *figurmønster*, *element* og *komponent* for å forklare hvordan jeg tolker elevenes utsagn. Som vist i figuren under (figur 5), ser jeg på figurmønster som hele figurfølgen. Når jeg benytter meg av element, er det en av figurene i følgen, og komponent vil si en av prikkene i figuren.



Figur 5: De tre første elementene av et figurmønster. Tilpasset fra Måsøval (2011)

3.4 Etikk

Deltakerne i forskningsarbeidet har rett til privatliv, noe som vil si at deres identitet blir beskyttet. Informasjonen som forskeren oppfatter som privat, eller muligens kan være til skade for deltakerne, bør fjernes fra forskningsteksten på en slik måte at deltakeren ikke røpes (Postholm, 2010). Men tanke på etiske hensyn skriver Cohen et al. (2011) om det de kaller for informert samtykke (oversatt fra informed consent). De refererer til Diener og Crandall (1978), som definerer dette som prosedyren der individene tar stilling til om de vil delta eller ikke ut fra den informasjonen de har fått, som trolig vil ha innvirkning på avgjørelsen deres (Cohen et al., 2011). Når det gjelder barn påpeker Cohen et al. (2011) at man både må ha tillatelse fra barnas foresatt og fra barnet selv.

Jeg visste fra starten at jeg kom til å benytte meg av videoopptak i datainnsamlingen, og at jeg dermed var pliktig å melde fra om prosjektet mitt. Prosjektet ble meldt inn til Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD, prosjektnummer 31248), der jeg også beskrev hvilke planer jeg hadde for å behandle personopplysningene, tilfredsstillende til kravene i personopplysningsloven. Sammen med innmeldingen sendte jeg også inn informasjonsskrivet (se vedlegg A) jeg planla å sende ut til foresatte og foreldre til elevene i klassen.

Etter at jeg hadde fått godkjenning fra Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste tok jeg kontakt med rektoren ved skolen, og spurte om tillatelse fra henne for å gjennomføre datainnsamling hos ved skolen. Hun godkjente dette, og som nevnt tidligere ble jeg satt i kontakt med en matematikklærer ved skolen. I forkant av datainnsamlingen delte jeg ut informasjonsskrivet (se vedlegg A) til de elevene jeg og læreren hadde plukket, der jeg fortalte litt om meg selv og hva masteroppgaven min gikk ut på. I dette skrivet informerte jeg om at jeg ønsket å benytte video- og lydopptak, men presiserte hvem som skulle se det og at det materialet som jeg benyttet meg av i oppgaven kom til å bli anonymisert. Jeg skrev også i dette skrivet om når jeg planla å avslutte prosjektet og at all data ville bli slettet da, og kontaktinformasjonen til veilederen min. Ved dette informasjonsskrivet la jeg ved en svarslipp der foreldrene ga elevene tillatelse eller ikke til å delta i prosjektet. Samtykke fra forelder og foresatte er vanligvis nødvendig når barn er under 16 år skal delta aktivt i forskningen (Postholm, 2010). Det var viktig for meg å presisere for elevene at det var helt frivillig å delta og at de kun trekke seg når som helst, uten å måtte oppgi noen grunn for det. I tillegg har jeg med hensyn til elevene fiktive navn på alle i transkripsjonene, med unntak av mitt eget.

3.5 Metodekritikk

I følge Cohen et al. (2011) er mitt forskningsprosjekts grad av validitet avhengig av flere faktorer. Det kan for eksempel adresseres gjennom ærlighet, dybde, rikdommen og omfanget til det opparbeidede datamaterialet, gjennom deltakerne man har nærmet seg, grad av triangulering og forskerens grad av objektivitet. De poengterer imidlertid at det er umulig for forskeren å være hundre prosent valid, men at man kan bekjempe noen av truslene mot validiteten.

Selv om jeg observerte elevene i kjente omgivelser, på skolen, var situasjonen ukjent for dem. I tillegg hadde ikke jeg noen relasjon til elevene fra før, jeg tok dem ut av klasserommet og ga dem oppgaver som ikke er naturlig i skolehverdagen deres. Jeg kan derfor ikke se bort fra at denne nye situasjonen påvirket elevene og dermed datamaterialet mitt. Jeg prøvde likevel å legge forholdene mest mulig til rette for at elevene skulle føle seg trygg i situasjonene ved å tilbringe tid i klasserommet i forkant av undersøkelsen og gi elevene flere grubletegninger enn bare en.

Selv om jeg tok rollen som delvis deltakende observatør i undersøkelsen, kan jeg ikke se bort fra at det jeg sa og gjorde underveis i observasjonen har påvirket elevene. Mine observasjoner er også farget av meg, og vil dermed være påvirket av hva og hvordan jeg ser og tolker situasjonene fra undersøkelsen. Jeg kan dermed ikke være sikker på at en annen forsker ikke ville sett ting annerledes enn det jeg gjorde. Jeg har også fått andre til å lese kritisk gjennom analysen min, og fått tilbakemeldinger og veiledning i dette arbeidet.

I og med at jeg har gjennomført undersøkelsen min med en liten gruppe elever, er ikke de representative for en større gruppe i befolkningen. Jeg kan derfor ikke se på dataene mine som representative eller trekke generelle slutninger ut fra mine funn. Likevel ligger mine beskrivelser til rette for at andre skal kunne sammenligne mine funn med lignende prosjekter og på den måten dra nytte av mine funn og tolkninger.

4 Analyse av grubletegningene

Før jeg går i gang med analysen av datamaterialet vil jeg gjøre en analyse av de tre grubletegningene som elevene arbeidet med under datainnsamlingen. Dette er oppgaver som jeg selv har laget, men utgangspunkt i tema algebra, som var det tema elevene jobbet med de ukene jeg gjennomførte undersøkelsen min. Etter å ha sett igjennom læreverket Tetra 9 (Hagen, 2006), som brukes ved skolen, bestemte jeg meg for å ha fokus på figurfølger. En av figurfølgene har lineær vekst, mens to har kvadratisk vekst.

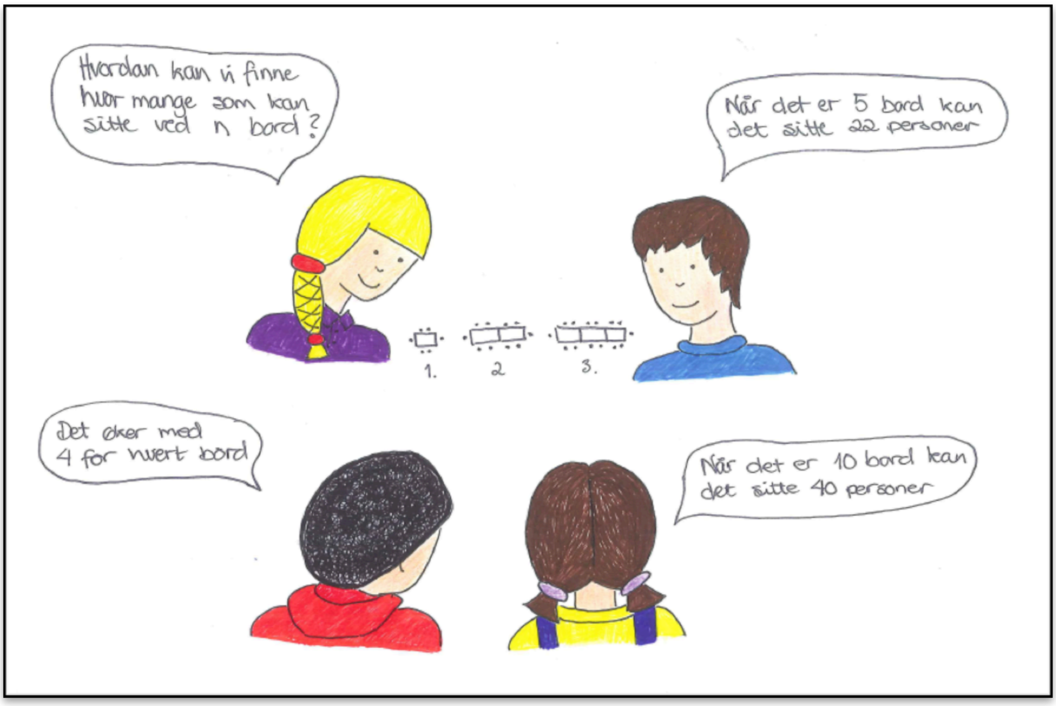
Som nevnt tidligere har jeg hentet ideen om grubletegninger fra naturfag (Naturfagssenteret, 2013), og siden det ikke er noen grubletegninger som er laget på norsk i matematikk var det jeg selv som måtte konstruere dem, og tenke ut hvordan jeg ville representere dem for elevene. Etter samtale med læreren ble det klart at elevene ikke hadde jobbet med en slik arbeidsmetode tidligere, heller ikke i naturfag, så dette var helt nytt for elevene. Før elevene startet arbeidet med grubletegningene sa jeg til elevene at jeg forventet at de skulle diskutere og argumentere seg frem til om påstandene til elevene i tegningen var rett eller feil. Det var ikke en god nok begrunnelse at "det bare er slik".

I analysen av grubletegningene vil jeg se på den rekursive og eksplisitte formelen for følgene. Rekursiv formel vil si at man gjenkjenner og bruker endringer fra figur til figur med grunnlag i den avhengige variabelen. Eksplisitt formel vil si at man setter den uavhengige variabelen i sammenheng med den avhengige variabelen, som gjør det mulig å beregne en hvilken som helt verdi for variabelen.

Siden jeg ikke gjennomførte noen undervisning i forkant av oppgavene, måtte elevene benytte seg av den kunnskapen som de allerede hadde for å finne løsning på oppgavene. Fokuset i grubletegningene ligger på snakkeboblene rundt, men figurfølgen i midten spiller en sentral rolle (se Bordoppgaven i figur 6). Til hver grubletegning hadde jeg også laget noen tilleggsoppgaver for å få et større grunnlag for kunne sin noe om elevenes samtale rundt algebraiske generalisering. I dette kapittelet vil jeg derfor se på hvilke kunnskaper som kreves av elevene for å løse oppgavene, og hvilket didaktisk potensiale som ligger i dem.

4.1 Bordoppgaven (Oppgave 1)

Bordoppgaven var den første oppgaven og elevenes første møte med grubletegninger for begge elevgruppene. Utgangspunktet mitt var at dette skulle være en forholdsvis enkel oppgave i og med at jeg ikke visste hva og hvor mye elevene kunne fra før.



Figur 6: Grubletegning Bordoppgaven

I tillegg til grubletegningen fikk elevene utdelt noen tilleggsoppgaver på et eget ark etter at de hadde diskutert alle påstandene i grubletegningen.

- Argumenter for hvordan du/dere kan være helt sikker på at dere har rett.
- Hvor mange personer kan sitte ved 100 bord?
  - Hvordan kan du være helt sikker på at du har rett?
- Hvor mange personer kan sitte vet det *n*'te bordet?
  - Kan du/dere finne en formel?
- Hvilke sammenhenger ser du/dere?
- Hvordan vil du/dere forklare hva som skjer?
  - Skriv ned
- Hvordan ville det blitt om det var et trekantet bord?
  - Enn ett som var lengre?

Den eksplisitte formelen til figurfølgen er $f_n = 4n + 2$, mens den rekursive formelen er $f_n = f_{n-1} + 4$. Figurfølgen i denne oppgaven har lineær vekst, som vi si at figurfølgen øker jevnt.

Jeg forutså at dette kunne bli en lett oppgave for elevene, men denne oppgaven var på en måte en test både for elevene og meg. Elevene visste ikke hva grubletegninger gikk ut på og jeg visste ikke noen om hvilken kunnskap elevene hadde fra før. Jeg ønsket også å gjøre oppgaven såpass enkel at de kunne jobbe med oppgaven selvstendig, uten at jeg behøvde å bryte inn og styre diskusjonen.

Elevene hadde en figurativ tilnærming (Becker & Riviera, 2006) til oppgaven. Det er mulig at dette kommer av at grubletegningen har illustrasjon av de tre første elementene av figurmønstret, som viser sammenhengen mellom antall bord og personer som kan sitte rundt dem. Elevene kunne enkelt beregne antall komponenter i den påfølgende figuren, noe som gjorde at elevene benytte seg av rekursiv metode i starten av oppgaven.

Siden jeg ikke var sikker på hvor mye elevene kunne fra før valgt jeg å ha med boblen "Det øker med 4 for hvert bord". Denne var med på å gi elevene en lett start på oppgaven, og det var lett for elevene å se at det faktisk øker med fire komponenter for hvert bord. Dette var en lett måte å få elevene i gang med samtalen i og med at de ikke var vant til å jobbe med samarbeidsoppgaver i matematikk.

Boblene "Når det er 5 bord kan det sitte 22 personer" og "Når det er 10 bord kan det sitte 40 personer" valgte jeg å ha med for å få elevene til å se lengre ut i følgen og ikke bare på de første tre elementene. Som man kan se har jeg valgt at utsagnet for den tiende figuren er feil, da den vil gi 42 personer og ikke 40 personer. Dette valgte jeg for å se hvordan elevene begrunner svaret sitt for hvorfor den er feil.

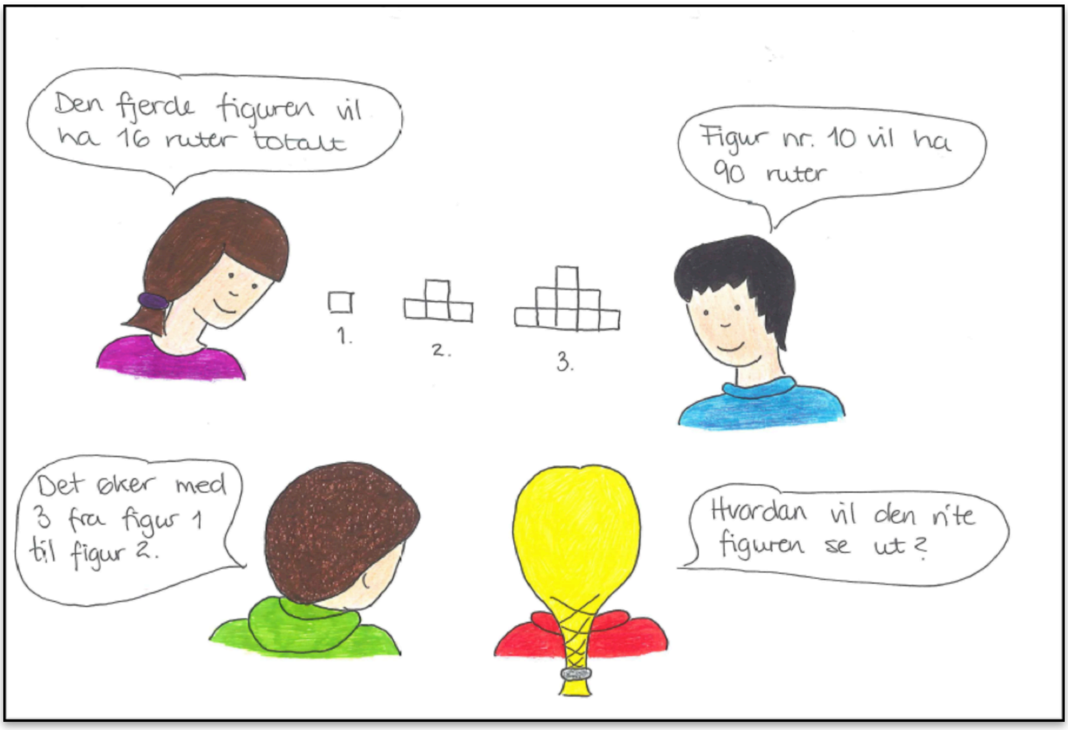
Jeg hadde bevisst valgt å ha med boblen "Hvordan kan vi finne hvor mange som kan sitte ved *n* bord?". Dette gjorde jeg for å se hva elevene la i det matematiske begrepet *n* og for å se hvordan elevene valgte å uttrykke den generelle notasjonen for følgen. Jeg snakket ikke med elevene på forhånd om *n*, men visste at de hadde jobbet med det tidligere. Denne boblen er også med på å føre elevene over til eksplisitt metode, der elevene skal uttrykke en formel som representerer den *n*'te plassen i figurfølgen. Den oppfordrer elevene til å uttrykke generaliseringen sin ved hjelp av variabelen *n*, altså symbolspråket (Duval, 2002).

Som nevnt ønsket jeg også å ha med tilleggsoppgaver for å få et større grunnlag for å si noen om elevenes samtale om algebraisk generalisering. Disse oppgavene var en forlengelse av det elevene allerede hadde jobbet med. De var med på å få elevene til å tenke gjennom hvorfor de hadde svart som de hadde og for å få elevene til å dokumentere påstandene de kom med både gjennom naturlig språk og uformelt skriftspråk (Duval, 2002; Pimm, 1991). Som avslutning på oppgaven valgte jeg å ta med spørsmålene "Hvordan ville det blitt om det var et trekantet bord? Enn et lengre?" På denne måten kunne elevene forske seg frem til svaret og selv bestemme hvor mange personer som skulle sitte rundt det første bordet, og på den måten bestemme hvordan følgen vil se ut. Til denne oppgaven ba jeg ikke elevene om å uttrykke den generelle formelen og dermed var det bare gruppe B som gjorde det. Jeg tenkte kanskje at det kom til å bli naturlig for elevene å uttrykke den generelle notasjonen, siden de allerede hadde gjort det i grubletegningen..

Bordoppgaven legger vekt på at elevene skal kunne uttrykke både den rekursive og eksplisitte formelen for figurfølgen. Det vil si at elevene må han en formening om hva som legges i variabelbegrepet, altså hva konstantledd og variabel vil si og hvordan de skal uttrykke en formel.

4.2 Pyramideoppgaven (Oppgave 2)

Dette var den andre oppgaven til gruppe A, og tredje oppgave for gruppe B. Til denne oppgaven hadde jeg 30 minutter til rådighet, og anså at det kom til å bli nok tid til at elevene skulle få løse både grubletegningen og tilleggsoppgavene. I og med at jeg anså at elevene kom til å bruke mer enn 30 minutter på Froskeoppgaven (Oppgave 3) valgte jeg å gi oppgavene i forskjellig rekkefølge til de to elevgruppene. Den matematiske relasjonen som elevene skal skape i denne oppgaven er likheten mellom kvadrattallet og summen av oddetall.



Figur 7: Grubletegning, Pyramideoppgaven.

Også til denne grubletegningen fikk elevene et egent ark med tilleggsoppgaver som de fikk utdelt når de hadde diskutert alle påstandene i grubletegningen.

- Hvilke sammenhenger ser dere mellom figurene?
- Skriv ned med ord hva som skjer?
- Hvordan vil figur nr. 50 se ut? Enn figur nr. 100?
- Kan dere finne en formel?

Denne figurfølgen har ekvivalens relasjon $1 + 3 + 5 + \ldots + 2(n-1) \; = \; n^2$. Den rekursive formelen er $g_n \; = \; g_{n-1} + (2n-1)$. Figurfølgen for denne oppgaven har kvadratisk vekst.

Dette var som sagt den andre oppgaven til den ene elevgruppa og den tredje til den andre elevgruppa. Begge elevgruppene hadde gitt uttrykk for at de syntes at Bordoppgaven (Oppgave 1) var for lett, og etter den første oppgaven hadde jeg fått et innblikk i hvilken kunnskap elevene hadde. Jeg valgte derfor å gi elevene en mer komplisert oppgave og så på denne oppgaven som utfordrende for elevene. Også i denne oppgaven hadde elevene en figurativ tilnærming (Becker & Riviera, 2006) til figurfølgen, noe som kan komme av at elevene ble presentert de tre første elementene av figurfølgen. Denne oppgaven kan derfor ses på som lik Bordoppgaven (Oppgave 1), siden begge oppgavene legger opp til at elevene skal ha en figurativ tilnærming.

Som nevnt var den matematiske relasjonen at elevene skulle se likheten mellom kvadrattallet og summen av oddetall, derfor valgte jeg å ha med boblen "Det øker med 3 fra figur 1 til figur 2", for at elevene skulle se på økningen og kanskje dermed oppdage at figurfølgen øker med oddetall. Denne boblen var også med på å bringe elevene mot algebraisk generalisering. I tillegg hadde jeg tatt med boblen "Figur nr.10 vil ha 90 ruter" for å få elevene til å se lengre ut i følgen og ikke bare diskutere de tre første elementene som var avbildet på grubletegningen.

Boblen "Den fjerde figuren vil ha totalt 16 ruter" valgte jeg å ha med for å se hvordan elevene uttrykte og illustrerte den fjerde figuren i følgen. Siden elevene bare har illustrasjon av de tre første elementene, var det interessant for meg å se hvordan elevene la på økningen fra den tredje figuren til den fjerde figuren. Dette var også en del av dekomponeringen for å kunne forklare for seg selv og for hverandre hvordan de med sikkerhet kunne si at de har rett.

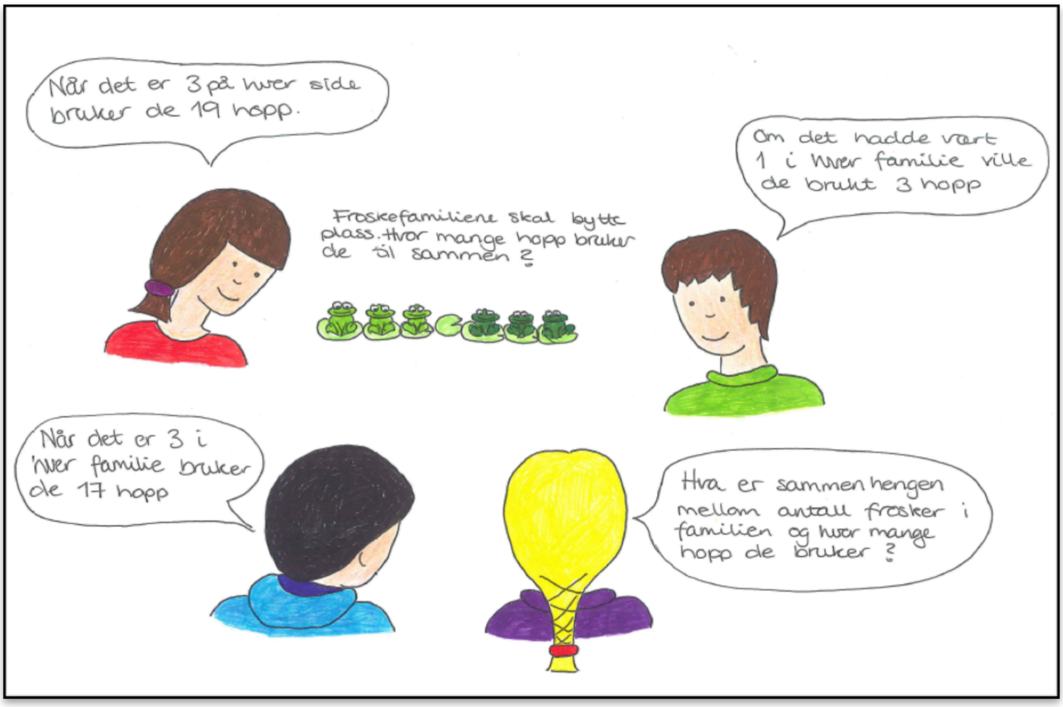
Også i denne grubletegningen valgt jeg bevisst å ha med boblen "Hvordan vil den *n*'te figuren se ut?". Denne boblen var med på å føre elevene over til eksplisitt metode, der elevene skulle uttrykke ekvivalens relasjonen som representerer den *n*'te plassen i figurfølgen. Boblen oppfordrer elevene til å uttrykke generaliseringen sin ved hjelp av variabelen *n*, altså symbolspråket. Her var jeg spent på om elevene kom til å se sammenhengen mellom summen av oddetall og kvadrattallet eller om elevene bare ville uttrykke seg ved kvadrattallet.

Tilleggsoppgavene til denne grubletegningen var også her en forlengelse av grubletegningen. Oppgavene går ut på å få elevene til å se på elementer lenger ut i følgen og for å dokumentere med skriftlig representasjon på de påstandene elevene kom med.

Denne oppgaven legger i større grad opp til at elevene skal bruke den rekursive metoden for å få elevene til å se økningen av oddetall. Selv om elevene skulle uttrykke ekvivalens relasjonen, som har fokus på likheten mellom summen av oddetallene og kvadrattallet, hadde ikke elevene i min undersøkelse fokus på dette. Elevene så bare på kvadrattallet når de fikk i oppgave å uttrykke den *n*'te figuren i følgen.

4.3 Froskeoppgaven (Oppgave 3)

Denne oppgaven var den tredje oppgaven til gruppe A og den andre oppgaven til gruppe B. Grunnen til at gruppe B fikk dette som sin andre oppgave var fordi elevene hadde dobbel time, altså ei 70 minutters økt. Jeg forutså at elevene kom til å bruke lang tid på denne oppgaven og valgte derfor å gi dem denne som andre oppgave. Gruppe A hadde derimot dobbeltimen sin sist i uka og det ble naturlig at dette var deres siste oppgave. I etterkant av undersøkelsen har jeg sett at dette er en helt annen type oppgave enn de to forgående oppgavene, som vil si at Froskeoppgaven (Oppgave 3) har en annen forutsetning og kunnskap i seg.



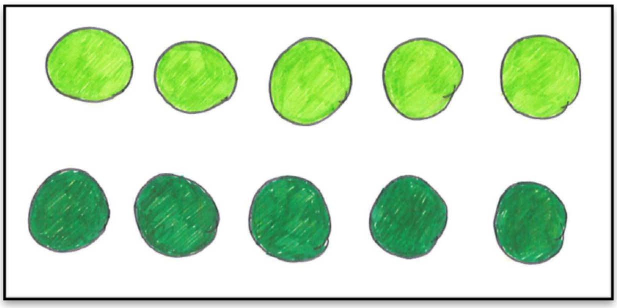
Figur 8: Grubletegning, Froskeoppgaven

Også her fikk elevene noen tilleggsoppgaver på et eget ark etter at de hadde diskutert alle påstandene i grubletegningen.

- Hvor mange hopp må til med 1 frosk på hver side? Enn 2?
- Lag en tabell der dere fører opp antall frosker i en familie og antall hopp de bruker totalt på å bytte plass
- Gjett hvor mange hopp det trengs når det er fire frosker på hver side. Sjekk om det stemmer.
- Gjett hvor mange hopp som trengs når det er 50 eller 100 frosker på hver side.
- Kan dere finne en formel?

Gruppe B brukte lang tid på grubletegningen og det var dermed bare gruppe A som fikk tid til å arbeide med tilleggsoppgavene.

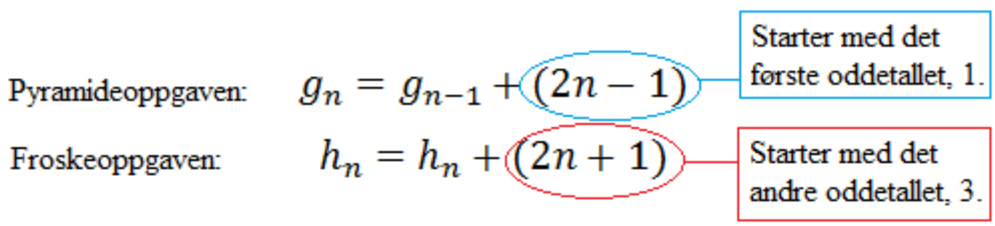
For at det skulle være enklere for elevene å løse oppgaven som elevene i grubletegningen jobbet med, hadde jeg ordnet "frosker" til elevene. Disse kunne elevene benytte seg av om de ønsket.



Figur 9: "Frosker" til Froskeoppgaven

Den eksplisitte formelen til denne følgen er $h_n = n\,(n+2)$. Den rekursive formelen er $h_n = h_{n-1} + (2n+1)$. Denne følgen har i likhet med Pyramideoppgaven (Oppgave 2) kvadratisk vekst.

Dette var en av oppgavene som var foreslått som samarbeidsoppgave i Tetra 9 (Hagen, 2006). I første omgang tenkte jeg at dette kom til å være en passende oppgave for elevene i og med at den omhandlet det elevene hadde jobbet med tidligere og at det var en oppgave som var foreslått i læreverket. I etterkant har jeg sett at dette var en praktisk oppgave, og at elevene brukte lang tid bare på å løse selve oppgaven som er illustrert (se figur 7). En annen grunn til at jeg valgte denne oppgaven var fordi den, i likhet med Pyramideoppgaven (Oppgave 2), øker med oddetall.



Figur 10: Likhet mellom Pyramideoppgaven (Oppgave 2) og Froskeoppgaven (Oppgave 3)

Som vist i figur 10, kan man ut fra den rekursive formelen til begge grubletegningene se at Pyramideoppgaven (Oppgave 2) sitt siste ledd starter med det første oddetallet, mens Froskeoppgaven (Oppgave 3) sitt siste ledd starter med det tredje oddetallet. Jeg ønsket å se om noen av gruppene så sammenhengen mellom disse to oppgavene og brukte deler av den kunnskapen de hadde fått om oddetall i forgående oppgaven for å finne løsning på oppgaven.

Froskeoppgaven (Oppgave 3) skiller seg ikke bare ut med at den har en følge av kvadratisk vekst, elevene hadde en numerisk tilnærming (Becker & Riviera, 2006) til oppgaven. Grubletegningen viser bare det tredje elementet i følgen noe som gjorde at elevene ikke fikk noen innblikk i hva som er hverken før eller etter dette elementet. Jeg tolker det slik at en mulighet for at elevene hadde numerisk tilnærming til oppgaven, kom av at elevene ikke hadde noen illustrasjon av følgen å forholde seg til.

Boblen "Om det er 1 i hver familie bruker de 3 hopp" valgte jeg å ha med for å få elevene til å se på det aller første elementet i følgen. Denne boblen var også med på å hjelpe elevene med å prøve å finne antall komponenter i det andre elementet. På den måten kan elevene se sammenhengen mellom de tre første elementene i følgen.

Boblene "Når det er 3 på hver side bruker de 19 hopp" og "Når det er 3 i hver familie bruker de 17 hopp", valgte jeg å ta med for å gi elevene et forslag til hvor mange hopp de ville bruke med 3 i hver familie, men også for å se hvordan elevene ville argumentere for hvorfor boblene var feil. For å svare på denne måtte elevene enten komme fem til riktig antall hopp ved å utføre oppgaven selv eller så kunne elevene finne den generelle formelen for følgen for så å sjekke deres svar opp mot resultatet de fikk.

Også i denne oppgaven valgte jeg å ha med en boble hvor elevene skulle representere den *n*'te plassen i følgen. Boblen "Hva er sammenhengen mellom antall frosker i familien og hvor mange hopp de bruker?" ber ikke elevene spesifikt om å finne den *n*'te plassen, men den legger opp til at det er det elevene skal gjøre. Ved å se på sammenhengene i følgen, hadde elevene mulighet til å uttrykke den generelle notasjonen for følgen og dermed også mulighet til å uttrykke den generelle formelen for følgen.

Til alle grubletegningene valgte jeg å ta med spørsmål om hvordan figurnummer 50 og 100 ville se ut. Dette var med på å få elevene til å benytte seg av Balacheff (1988) sitt bevisnivå: avgjørende eksperiment, som går på at elevene sjekker formelen for et element langt ut i følgen.

5 Analyse og diskusjon

Forskningsspørsmålet mitt er: Hvordan bidrar tre grubletegninger til å sette i gang to elevgruppers samtale om algebraisk generalisering? For å få et godt nok svar på dette har jeg også stilt underspørsmålene: Hvordan genererer elevene argumentasjon og resonnement? På hvilken måte støtter elevene seg til grubletegningen i sine argumentasjoner? For å finne svar på dette har jeg analysert transkripsjonene og sett etter situasjoner som kan hjelpe meg å finne svar på dette. I dette analysekapitlet vil jeg derfor presentere resultatet fra analysearbeidet og trekke inn episoder fra datamaterialet for å belyse de analytiske påstandene jeg kommer med. Som nevnt i metodekapitlet startet jeg analysearbeidet med å dele datamaterialet inn i åpne koder. Etter at jeg hadde gjort dette så jeg etter sammenhenger og hva som var felles for kodene mine. Jeg samlet mine koder inn i tre typiske trekk som jeg så passet med Lee (1996) sine tre nivåer: oppfattelsesnivå, verbaliseringsnivå og symboliseringsnivå. Jeg har valgt å kalle dem for

1. Ser sammenhenger i mønsteret
2. Uttrykker mønsteret verbalt
3. Uttrykker seg ved algebraisk notasjon

Jeg tar utgangspunkt i disse tre trekkene når jeg analyserer datamaterialet mitt. Jeg vil ta for meg episoder under hvert delkapittel, for deretter å diskutere mine funn. I kapittel 5.1 vil jeg se på hvordan elevene ser på økningen og hvordan elevene dekomponerer følgene de jobber med. I kapittel 5.2 ser jeg på hvordan elevene uttrykker seg i naturlig språk, hvordan elevene uttrykker seg ved hjelp av rekursiv metode og hvordan elevene undersøker om formelen stemmer. Når jeg ser på hvordan elevene undersøker om formelen stemmer har jeg valgt å dele denne opp i fire deloverskrifter: bevis ved moteksempel, naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel. I kapittel 5.3 går jeg inn på hvordan elevene uttrykker den eksplisitter formelen og hvordan elevene uttrykker formelen representert ved *n*. Til slutt i kapittel 5.4 vil jeg komme med en sammenfatning og refleksjon over resultatene fra analysen min.

5.1 Ser sammenhenger i mønstret

Under observasjonen av elever i arbeid med algebraisk generalisering virket det som om elevene ønsket å finne sammenhenger og dekomponere for å kunne svare på grubletegningen, og for å komme videre i argumentasjonen og resonnementet sitt. Jeg vil her presentere episoder der elevene ser på økning og dekomponering for å komme seg videre i arbeidet med grubletegningene.

5.1.1 Økning

For at elevene skulle klare å løse oppgaven de var gitt, ble det naturlig for dem å snakke om økningen i figurmønsteret. I tilleggsoppgaven til Bordoppgaven (Oppgave 1) er det et spørsmål om hvordan det ville blitt om det var et trekantet bord. Her måtte elevene forholde seg til et helt nytt figurmønster, og dermed også se etter sammenhenger på en annen måte enn tidligere.

201.	Adrian:	På et bord har du plass til tre, to bord har du plass til fire. Nei det, bare glem det, bare glem det.

[Bordoppgaven, gruppe A]

Adrian tar utgangspunkt i det første bordet og ser på hva økningen av komponenter mellom de to bordene. Selv om han sier dette, kan det tyde på at han er usikker på om det han sier faktisk stemmer. Det kan tolkes som om Adrian er på det Stacey (1989) kaller for differansemetode, i og med at han ser på differansen mellom det første og det andre elementet av figurfølgen. I samme oppgave, bare litt senere, har Anna fokusert på økningen mellom flere enn bare de to første figurene i følgen.

218.	Anna:	Men hvis at for eksempel det bare er to bord, så blir det jo plass til en, to, tre, fire ikke sant?
[...]		
220.	Anna:	Også nå blir det jo bare pluss en til. Det er bare plass til en til for hvert bord vi setter på. Ja.
221.	Alex:	Ja, egentlig. Eller på den aller, for eksempel [hvert bord pluss to
222.	Anna:	[Men på den første, ikke sant på den første er det en trekant, da er det plass til tre
223.	Alex:	Mhm
224.	Anna:	Også om du setter på et bord til så er det jo plass til fire
225.	Alex:	Ja
226.	Anna:	Og om du setter på et bord til så er det plass til fem

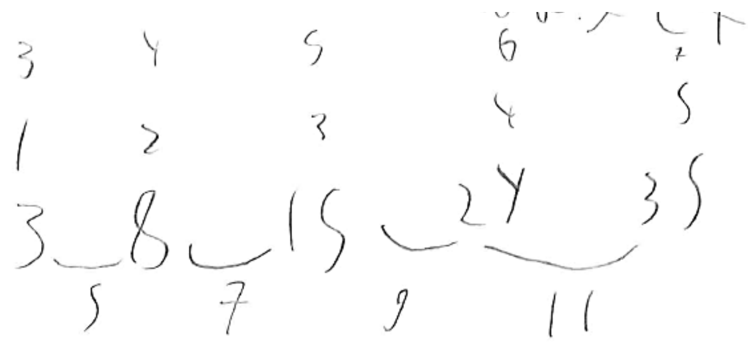
[Bordoppgaven, gruppe A]

I første del av denne situasjonen kan vi se at Anna tar i bruk det Stacey (1989) kaller for tellemetoden, siden hun teller antall komponenter ved figurnummer to. Videre ser hun hva økningen blir når man setter flere bord sammen. Anna sier "nå blir det jo bare pluss en til", for å vise de andre elevene at det hun sier stemmer, kommenterer hun økningen mellom de tre første elementene i følgen, som kan tolkes som om Anna da går fra tellemetoden til differansemetoden (Stacey, 1989). I og med at Anna ser på hvert enkelt element i følgen kan det tolkes som om at hun har en figurativ tilnærming (Becker & Riviera, 2006) til denne følgen, der hun benytter seg av figurene som elevene selv har tegnet for å bygge opp under sin egen hypotese.

5.1.2 Dekomponering

I dette avsnittet vil jeg belyse hvordan elevene tok i bruk dekomponering for å forklare sine hypoteser og funn for hverandre, og hvilke strategier de brukte for å dekomponere.

Da elevene jobbet med Froskeoppgaven (Oppgave 3) oppdaget jeg at elevene benyttet seg av de tallene som de selv var kommet frem til. Som nevnt i analyse av oppgavene hadde ikke elevene noen figurfølge å forholde seg til i denne oppgaven, noe som kanskje var en faktor for at elevene hadde en numerisk tilnærming (Becker & Riviera, 2006) til denne oppgaven. Elevene hadde problemer med å løse selve oppgaven med hvor mange hopp man bruker når det er tre forsker i hver familie, noe som førte til at jeg måtte bryte inn og hjelpe dem på vei ved å oppfordre elevene til og først prøve med en i hver familie og etterpå med to i hver familie. Som man kan se under resulterte dette i at elevene selv kom frem til tallene 3, 8, 15.



Figur 11: Elevbesvarelse Brage, Froskeoppgaven (Oppgave 3).

248.	Brage:	Hmm [pause 19 s] det, det der kan kanskje bli brukt litt, bare tenker litt, tre ganger en er lik tre, fire gange to er lik åtte, fem, seks, syv, tallene (Britt bøyer seg mot Brage for å se hva han gjør) ... Ser du her...
249.	Britt:	Er det der bord
250.	Brage:	Hm? Det der er flytt, det der er frosker på hver side og det der hvor, på, det er et tall man må gange, det tallet man må gange det for å få det. [pause 11 s] Leter bare etter mønsteret [pause 5 s]

[Froskeoppgaven, gruppe B]

Her har Brage forklart til de andre elevene hvordan han har tenkt da han dekomponerte ut fra tallfølgen han har kommet frem til. Som vi kan se ut fra elevarbeidet til Brage har han på den andre linjen skrevet opp figurnummeret eller som han sier "det der er frosker på hver side". Under har Brage skrevet opp antall hopp som brukes for at familiene skal bytte plass, noe som elevene selv kom frem til. Videre har Brage skrevet økningen, som i dette tilfellet er snakk om førstedifferansen, mellom figurene og det er mulig at dette gjør at han ser at det øker med oddetall. Ut fra tegningen til Brage, kan det tyde på at han har benyttet seg av differansemetoden (Stacey, 1989) for å komme frem til det neste elementet i følgen. Elevene er ute etter å kunne uttrykke formelen representert ved *n*, og det kan tolkes som at Brage har tatt utgangspunkt i figurnummeret for å se hva man må multiplisere med for å komme frem til antall hopp. Det er mulig at Brage har sett at han må multiplisere med et tall som er to mer enn figurnummeret, som her vil være snakk om andredifferansen. Selv om Brage sier dette, tolker jeg det slik at han ikke klarer å uttrykke den generelle formelen ut fra det han har kommet frem til.

I observasjonen av Pyramideoppgaven (Oppgave 2) benyttet Adrian seg også av dekomponering, ved å se på egenskapene i den fjerde figuren. Når Adrian skulle forklare de andre elevene hvordan han tenkte, forklarte han seg ved å tegne opp den fjerde figuren.

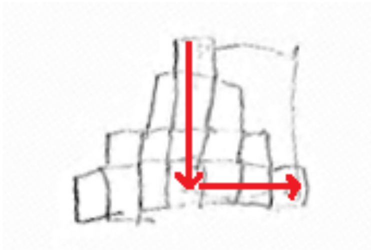
Figur 12: Elevbesvarelse Adrian, Pyramideoppgaven (Oppgave 2).

Adrian har tegnet opp den fjerde figuren helt rett, men om man ser på det han sier når han tegner figuren, forklarer han det ut fra den tredje figuren og ikke den fjerde figuren som han har tegnet opp.

62.	Adrian:	Ja (Alex puster tung ut, Anna nynner) Jo kanskje, for at på den tredje figuren er det fire oppover og fire, åtte bortover, også må vi ta hvert fall oppover gange med bortover del på to.
63.	Alex:	Hva sa du, oppover?
64.	Adrian:	Den der, den den veien gange den den veien (tegner på arket) og gange to delt på to, nei. Den gange den del på to fordi at når vi gange får vi det, det, så får vi, vi trenger bare halvparten men så må vi gange med to igjen så da slipper vi å dele.

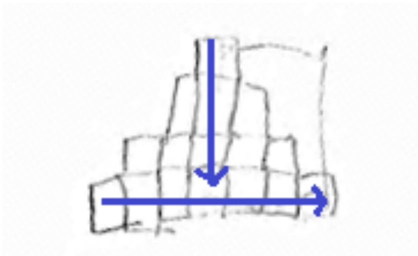
[Pyramideoppgave, gruppe A]

Adrian sier her at på den tredje figuren vil det være fire oppover og åtte bortover. Om man ser på tegningen har han tegnet opp, vil den fjerde figuren ha fire komponenter oppover, altså kolonnen i midten, og syv komponenter på den nederste linjen. Han sier altså feil, men har tegnet opp riktig, noe som kan tolkes som om han kanskje har tenkt rett før han begynte å forklare seg til de andre elevene. Når Adrian da sier "den gange den" tegner han opp streker over kolonnen i midten (som vist i figur 13) og de fire nederste komponentene mot høyre som da vil danner et kvadrat.



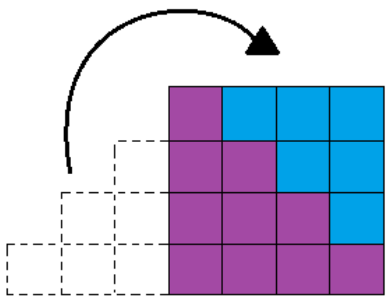
Figur 13: Adrians tenkemåte

Videre sier Adrian at man må dele på to, men trenger bare halvparten og da må man gange med to igjen, så da slipper man å dele. Det kan også tolkes som om Adrian ser på det som en trekant, der man regner ut arealet ved å ta grunnlinje multiplisert med høyden og dividerer på to (som vist i figur 14).



Figur 14: Adrians tenkemåte.

I løpet av denne sekvensen kan det tolkes som om Adrian tenker at de seks komponentene som er igjen på venstre side, passer inn i det området der det ikke er noe i kvadratet som vil gi arealet av figuren (som vist i figur 15).



Figur 15: Adrians tenkemåte

Dermed trenger man bare å ta "den gange den" for å regne ut hvor mange komponenter det er til sammen i figuren. På den måten trenger ikke Adrian å dele på to, og vil dermed få antall komponenter i hele figuren. Selv om Adrian sier feil når han skal forklare det han har kommet frem til ovenfor de andre elevene, kan man ut fra tegningen tolke det slik at han tenker riktig.

At Adrian ser på egenskapene til den fjerde figuren, kan også tolkes som om han bruker figuren som et generisk eksempel (Balacheff, 1988; Mason, 1996). Adrian ser på hvordan komponentene kan flyttes for å argumentere for sin hypotese om at man kan ta "den gange den", som i dette tilfellet vil danne et kvadrat med fire gange fire ruter og gir antall komponenter i den fjerde figuren. Dette blir da et karakteristisk eksempel for figurfølgen som elevene jobber med.

Det kan virke som om at når elevene jobber med figurfølger kan de finne antall prikker ved aritmetikk helt til man går over til å benytte seg av de generelle strukturene i figuren. Når elevene har gått over til de generelle strukturene i figurene har de gått over til algebra og generalisering (Radford, 1996). Dette vil si at elevene i denne undersøkelsen går over til algebra og generalisering ved å dekomponere, og ser på økningen før de kan uttrykke en generell formel.

Det er også interessant å se hvordan Adrian forklarer sine tanker og metode for de andre elevene. Dette gjør at han må reflektere over hva han skal si og hvordan han skal uttrykke seg for at de andre skal forså hva han tenker og mener (Pimm, 1991). Selv om Adrian forklarer feil, kan det tolkes som om han i utgangspunktet har tenkt riktig.

Det kan tenkes at Adrian benytter seg av påstanden "Den fjerde figuren vil ha 16 ruter totalt" i grubletegningen, som er relevant for den hypotesen han presenterer for de andre elevene. Det vi si at Adrian støtter seg på den påstanden som er i grubletegningen, som dermed støtte opp under hans argumentasjon og resonnement (Sexton, 2010).

5.1.3 Hvordan elevene ser sammenhenger

Ut fra det jeg har presentert i analysen, kan det virke som om elevene måtte oppdage og snakke om funksjonssammenhengene i følgen før de kunne uttrykke seg generelt om den. Når elevene ser på økningen mellom elementene i følgen, ser de bare på de første elementene. Det virker ikke som om elevene i det hele tatt tenker på at de også kan se på økningen lengre ut i følgen. Det kan tolkes slik at dette kan ha en sammenheng med at elevene bare har illustrasjon av de tre førte elementene i grubletegningen, og dermed tar utgangspunkt i det sammen når de skal se på hvordan det ville blitt med en følge om bordene var trekantet.

Når eleven dekomponerer ut fra en numerisk tilnærming (Becker & Riviera, 2006), benytter elevene seg av de tallene som de har kommet frem til og prøver å se hvordan dette kan brukes for å uttrykke den generelle notasjonen for følgen. I min analyse så jeg at elevene benyttet seg av differansemetoden (Stacey, 1989), for å se på differansen mellom figurene når de dekomponerte. De benyttet seg av differansen fra et element til det neste for å komme frem til tallfølgen. Ut fra tallfølgen som de kommer frem til, kan elevene se hvilken funksjon hvert tall har, for så å kunne finne sammenhenger mellom tallene og igjen sette dem sammen for å kunne skape mening av dem. Det kan tyde på at elevene i min undersøkelse har problemer med å kunne generalisere ut fra de sammenhengene de kommer frem til, for at det skal kunne gjelde for et hvilket som helst element i følgen.

Når elevene dekomponerer ut fra en figurativ tilnærming (Becker & Riviera, 2006) benytter de seg bare av et element i figuren. Dette gjør at elevene ser på egenskapene til det elementet, og kan ut fra dette generalisere det til å gjelde for hele følgen. Det kan tolkes som at det er lettere for elevene å benytte seg av generisk eksempel (Balacheff, 1988; Mason, 1996) når de har en figurativ tilnærming, og da også kunne ut fra dette generalisere det de kommer frem til, for så å kunne uttrykke den generelle notasjonen for følgen.

Når elevene ser etter sammenhengene i følgen, tar elevene i bruk tellemetoden og differansemetoden (Stacey, 1989). Det kan tenkes at elevene er på det som Stacey (1989) kaller for nærgeneralisering, der generaliseringen er situert og kan utledes gjennom steg for steg telling eller tegning. Jeg vil si at elevene i min undersøkelse på oppfattelsesnivå (Lee, 1996) ser på følgen gjennom steg for steg, men det kan tyde på at dette ikke er nok for elevene for at de skal kunne komme videre i generaliseringen sin. Når elevene er på oppfattelsesnivå (Lee, 1996), kan de ikke uttrykke den generelle formelen og det kan virke som om de må komme seg videre i prosessen for å kunne uttrykke seg generelt. På dette nivået uttrykker elevene bare de sammenhengene de ser der og da, og kan dermed ikke uttrykke den generelle notasjonen for følgen. Ut fra dette vil jeg si at mye tyder på at dette er den rette veien å gå for elevene i min undersøkelse. Når elevene snakker om sammenhengene som de ser i mønstret, er dette med på å sette i gang deres samtale om algebraisk generalisering, som fører dem over til verbaliseringsnivå (Lee, 1996).

Kaput og Blanton (2001) skriver at man kan se på generalisering som overveid argumentasjon og å uttrykke generalisering som underliggende i alt arbeid vi gjør, og i tillegg som grunnleggende for å kunne bygge et referansesystem og mening for de symbolske objektene som manipuleres i algebra. Det virker som om elevene i min undersøkelse generaliserer ved å se på sammenhengene, og det kan dermed ses på som deres vei for å bygge et referansesystem og dermed gi mening til symbolene som de manipulerer i arbeidet med grubletegningene.

5.2 Uttrykker mønsteret verbalt

Som nevnt tidligere ble elevene satt i den sammenhengen at de skulle løse oppgaven sammen og diskutere seg i mellom. Av den grunnen måtte elevene ta språket i bruk som medierende redskap for å gjøre seg forstått ovenfor hverandre og for å løse oppgaven (Dyste, 2001). Jeg skal nå presentere episoder der elevene uttrykker mønsteret verbalt, som også er det nivået som Lee (1996) har valgt å kalle for verbaliseringsnivå.

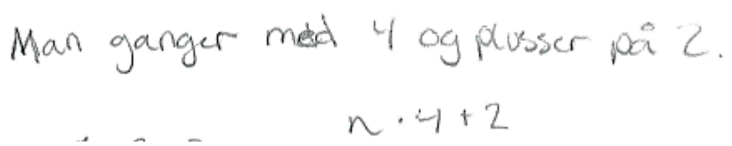
5.2.1 Naturlig språk

Elevene jeg observerte brukte i hovedsak muntlig naturlig språk for å uttrykke seg, men brukte også skriftlig representasjoner for å gjøre utregninger og skrive ned noen av svarene (Duval, 2002; Pimm, 1991). I og med at elevene var satt i den situasjonen at de skulle diskutere og jobbe sammen var det naturlig for dem å bruke muntlig naturlig språk når de løste oppgavene. Under Bordoppgaven (Oppgave 1) kom Anna tidlig med et forslag til hva formelen måtte bli.

20.	Anna:	Kan man ikke bare ta, sånn ehm at man ganger den så så mange gang med fire også tar man pluss to fordi det er en der og en der (peker på sidene av bordet på arket).

[Bordoppgaven, gruppe A]

Her uttrykker Anna formelen for figurfølgen med et naturlig språk (Duval, 2002). Hun sier at man må multiplisere med fire og addere med to for å få med de komponentene som er ved hver ende. Når elevene får i oppgave å skrive ned sammenhengen, uttrykker hun seg på en annen måte.



Figur 16: Elevbesvarelse Anna, Bordoppgaven (Oppgave 1).

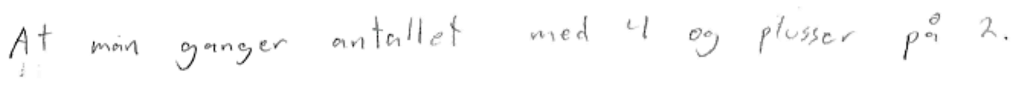
Når Anna uttrykker seg med uformelt skriftlig språk er hun mer konkret enn med naturlig språk. Når hun sier at "man kan gange den så så mange ganger" kan det tolkes som om hun ser på "så så mange" som variabelen for formelen hun uttrykker. Variabelen kommer ikke frem når hun uttrykker seg med uformelt skriftlig språk, hun skriver bare "man ganger med 4". Som man kan se skriver Anna også den eksplisitte formelen for figurfølgen, $n \cdot 4 + 2$, for å underbygge det hun har skrevet med uformelt skriftspråk. Når hun skriver den eksplisitte formelen for følgen, tar hun i bruk variabelen *n* for å uttrykke det hun har skrevet i uformelt skriftlig språk.

Som nevnt tidligere hadde jeg med vilje tatt med *n* og spurt etter den generelle formelen for følgen i grubletegningene som jeg ga elevene. Elevene var allerede kjent med dette begrepet og det var dermed ikke noe nytt for dem. I tillegg var en av oppgavene i tilleggsoppgavene å skrive med ord hvilke sammenhenger elevene så i figurfølgen. På denne måten kunne jeg se hvordan elevene uttrykte seg når de skulle finne den generelle formelen for følgen og om det var sammenheng mellom deres naturlig språk og uformelle skriftlig språk (Duval, 2002; Pimm, 1991).

147.	Aina:	Det er fire som kan sitter ved hvert bord [ved side
148.	Alex:	[Ja men
149.	Anna:	Bortsett fra de siste bordene.
150.	Aina:	Ja
151.	Anna:	Det første og det siste bordet
152.	Alex:	Vi tenker bare på fire-gangen, så legger man på to på slutten

[Bordoppgaven, gruppe A]

Når Alex utrykker seg ved uformelt muntlig språk sier han at "vi bare tenker på fire-gangen, så legger man på to på slutten". Altså at man skal multiplisere figurnummeret med fire og plusse på to for å få svaret. Som vi kan se i figuren under ordlegger Alex seg annerledes når han uttrykker seg ved uformelt skriftlig språk.



Figur 17: Elevbesvarelse Alex, Bordoppgaven (Oppgave 1)

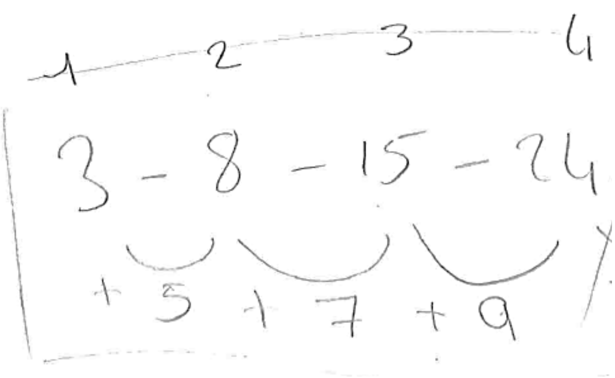
Alex går fra å si at man "tenker på fire-gangen" til å skrive "at man ganger antallet med 4". I dette tilfellet vil "antall" være snakk om variabelen n. Slik Alex uttrykker formelen, uttrykker han den eksplisitte formelen for figurfølgen, $f_n = 4n + 2$. Det kan altså tolkes slik at Alex har endret sitt naturlige språk når han skal uttrykke seg ved uformelt skriftlig språk.

Det kan tolkes som om elevene endrer sitt naturlige språk når de får i oppgave å skrive ned sammenhengen mellom figurene. Det kan tyde på at språket som et medierende redskap er en viktig faktor for at elevene skal klare å løse grubletegningen (Säljö, 2001).

5.2.2 Uttrykker rekursiv formel

Jeg har valgt å ta med rekursiv formel under kategorien "uttrykker mønstret verbalt". Dette har jeg valgt å gjøre siden elevene i undersøkelsen min bare uttrykte den rekursive formelen verbalt og ikke i symbolspråk eller skriftlig språk. Elevene ga også uttrykk for at de ikke så på rekursiv formel som et gyldig svar, på det å skulle uttrykke formelen generelt. Jeg oppdaget at selv om elevene kom frem til rett rekursiv formel, gikk de ikke videre og uttrykker den generelt. Jeg tolket det som at det kan komme av at man i rekursiv formel er avhengig av det forgående leddet i følgen, og at elevene dermed ikke så på det som en gyldig formel.

Som jeg belyste i analysen av oppgavene, hadde Froskeoppgaven (Oppgave 3) annet potensiale enn de andre oppgavene. Siden grubletegningen bare viser det tredje elementet i følgen, kan det tolkes som om at dette kan være en av grunnene til at elevene hadde en numerisk tilnærming (Becker & Riviera, 2006) til oppgaven. Dette kan igjen ha ført til at elevene benyttet seg av en rekursiv tilnærming når de skulle finne den generelle notasjonen for følgen. I forkant av denne situasjonen har jeg spurt elevene om det er noe spesielt med de tallene som de har kommet frem til.



Figur 18: Elevbesvarelse Britt, Froskeoppgaven (Oppgave 3).

212. Britt: At det blir pluss fem mellom tre og åtte, pluss syv mellom åtte og femten, og pluss ni mellom femten og tjuefire, også valgte jeg ni fordi det var fra fem til syv så var det to, og fra syv til ni var det to også, pluss to.

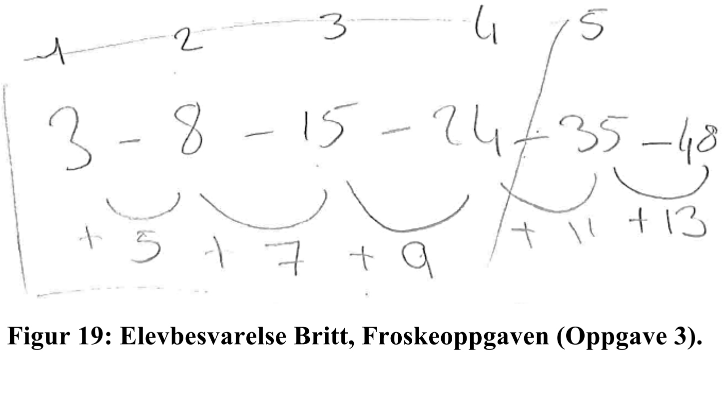
[Froskeoppgaven, gruppe B]

Britt har skrevet opp figurnummeret øverst og antall komponenter i hvert element under. Britt sier at hun kom frem til at det økte med 5, 7, og ut fra dette så at for å komme fra 5 til 7 må man øke med to. Hun kom dermed frem til at det fra figurnummer 3 til figurnummer 4 må det øke med 9 som er to mer enn 7. Ut fra dette kan det tenkes at hun ser på økningen mellom hver enkelt figur, og dermed benytter seg av differansemetoden (Stacey, 1989). Siden elevene bare hadde kommet frem til antall komponenter i de tre første figurene, har hun sett på økningen mellom disse figurene for å kunne si hvor mange komponenter den neste figuren ville ha. Det kan tolkes som om Britt ser på tallene 5, 7 og 9 som første differanse, og at hun ut fra dette har kommet frem til at økningen på 2 er andre differanse. Det virker som om Britt har en rekursiv tilnærming når hun forklarer seg, hun ser på antall komponenter i den foregående figuren for å komme til neste figur, men hun bygger ikke videre på dette når hun skal finne en formel.

Jeg vil også trekke fram en episode litt lenger ut i arbeidet med den samme oppgaven, der Britt skal forklare hvorfor de kunne være helt sikre på at de har kommet frem til rett generell formel.

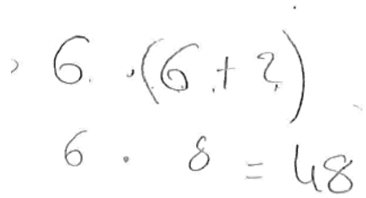
275. Britt: Fordi det der sa at jeg hadde rett, tretten var neste oddetall, det ble førtiåtte, også med *n* ble det førtiåtte. Så det er rett. *N* gange *n* pluss to.

[Froskeoppgaven, gruppe B]



Figur 19: Elevbesvarelse Britt, Froskeoppgaven (Oppgave 3).

Her forklarer Britt seg i naturlig språk ved bruk av den rekursive formelen, der det neste oddetallet er tretten. Som man kan se i figuren har Britt kommet frem til at det foregående tallet i følgen ble trettifem, og det neste bli $h_6 = h_5 + (2 \cdot 6 + 1)$ som gir $h_6 = 35 + 13 = 48$. I figuren kan man se at hun har skrevet at det sjette elementet vil ha 48 komponenter. Hun sjekker så dette opp mot svaret i den eksplisitte formelen for å se om det gir samme svare. Som vi ser har Britt fortsatt på tallfølgen hun har laget. På denne måten kan hun ut fra tallfølgen se om hun har fått samme svaret med eksplisitt formel.



Figur 20: Elevbesvarelse Britt, Froskeoppgaven (Oppgave 3)

Britt går altså tilbake til rekursiv tilnærming når hun skal forklare hvordan hun med sikkerhet kunne si at hun har rett eksplisitt formel. Britt tar altså i bruk symbolspråket (Duval, 2002) når hun skal sjekke om formelen stemmer både ved rekursiv metode og eksplisitt metode (Lannin et al., 2006). Elevene i min undersøkelse går helt bort fra tallfølgefølgen, som kan tolkes som deres ikoniske representasjon, når de har utviklet den eksplisitte formelen. Like vel benytter elevene seg av en rekursiv tilnærming når de skal sjekke om den eksplisitte formelen som de har kommet frem til stemmer (Lannin et al., 2006).

I tillegg vil jeg ta med en situasjon fra Pyramideoppgaven (Oppgave 2) der elevene ser på den syvende figuren. Adrian har kommet med et forslag om at det må bli $7 \cdot 7 = 49$, og for å sjekke om Adrian har rett eksplisitt formel, bruker Alex den rekursive formelen for å regne ut svaret på den syvende figuren.

100.	Alex:	Seksten pluss en, fire, ni, pluss syv er neste, ni pluss... seksten, pluss elleve, tjuesyv, da er vi på femten, pluss tretten er ikke det førti, pluss femten, femtifem. Så ehh... jeg tror ikke det blir helt rett.

[Pyramideoppgaven, gruppe A]

Alex starter med den tredje figuren, og adderer dette med syv som er økningen mellom g_3 og g_4. Jeg tolker det slik at grunnen til at Alex velger å starte med den tredje figuren er fordi at denne er på grubletegningen og at han dermed kan benytte seg av tellemetoden (Stacey, 1989), for å se om formelen stemmer. Videre adderer Alex økningen for hver figur med den tredje figuren, og han får $g_7 = g_3 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 \neq 55$. Det kan tolkes som om Alex regner feil når han legger sammen økningen fra figur fire til figur fem, som skal gi 25 og ikke 27 som han sier. Dette gjør at han regner feil på hele og dermed forkaster hele ideen til Adrian. Om Alex hadde regnet riktig ville han sett at $g_7 = g_3 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$, men i og med at han regner feil og får 40 i stede for 49, tar han med det neste oddetallet også. Dette gjør at han kommer over 49 og konkludere dermed med at Adrians hypotese er feil. Det kan videre tolkes som om at det er ingen av de andre elevene som oppdager at Alex har regnet feil eller sier Alex i mot, noe som gjør at hypotesen til Adrian dermed blir forkastet.

5.2.3 Undersøker om formelen stemmer

I arbeidet med alle tre grubletegningene oppdaget jeg at begge elevgruppene var opptatt av å komme frem til en formel representert ved generell notasjon. For å gjøre dette måtte de også teste ut en del av de forslagene de kom med for å finne ut om de stemte eller ikke. I analysen min ble det derfor naturlig for meg å dele denne kategorien "Undersøker om formelen stemmer" i fire underkategorier: moteksempel, naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel, og jeg vil i dette delkapittelet trekke frem episoder som belyser hver av disse kategoriene.

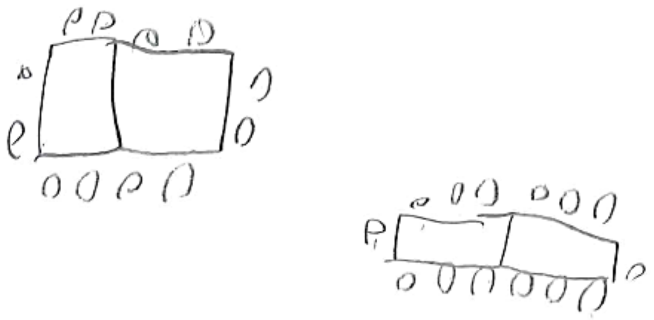
Bevis ved moteksempel

Under observasjonene med Bordoppgaven (Oppgave 1) ble det diskusjon mellom elevene i gruppe B da de fikk spørsmål om hvordan det ville blitt om det var et lengre bord. Det eneste som ble sagt var at bordet skulle være firkantet og ha åtte personer rundt det første bordet. Beate og Britt tenkte at bordet var kvadratisk med to personer på hver side, mens Brage tenkte at det var et rektangulært bord, med tre stykker på langsidene og en på hver ende. Elevene var uenige om det var likt antall personer og lik formel på begge bordene eller ikke. Britt mente at det ble likt antall personer og lik formel, Beate mente at det ble likt antall personer og ulik formel, mens Brage mente at det ble ulikt antall personer og ulik formel. I utdraget under ser jeg på hvordan Brage motbeviser de andres hypotese og viser de andre at hans hypotese stemmer (Garnier & Taylor, 2006).

252. Brage: Ehh, for at her så ser det to perso, fire personer (forklarer til Britt) som ikke får plass, her er det bare to stykker.
253. Beate: Hæ?
254. Brage: Så dermed blir det litt flere på dette bordet

[Bordoppgaven, gruppe B]

Brage påstår ovenfor Beate og Britt at det er forskjell på antall personer som får plass rundt bordet. For å bevise sin hypotese har Brage tegnet opp den andre figuren for begge figurmønstrene (figur 21). Brage kan dermed forklare hva han mener og de andre to elevene kan sjekke svaret hans.



Figur 21: Besvarelse fra Brage, Bordoppgaven (Oppgave 1).

Dette førte til, som man skal se under, at Britt teller antall personer rundt begge bordene for å sjekke om hypotesen til Brage stemmer.

255. Britt: (Lav stemme) En, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni, ti, elleve, tolv, tretten (teller på tegningen til Brage, teller stille personene rundt det andre bordet). Det blir jo det samme. Eller telte jeg feil?
256. Beate: Det blir det samme, akkurat det samme bare at måten man plasserer stolene eller folkene på er forskjellig sider.

[Bordoppgaven, gruppe B]

Her kan det tolkes som om Britt tar i bruk det som Stacey (1989) kaller for tellemetodene. Britt teller hver komponent rundt bordet for å sjekke svaret. Hun bruker tegningen til Brage for å bevise at hennes hypotese fortsatt stemmer, men det kan tolkes som om Britt har brukt tellemetoden feil, og dermed fått for mange komponenter når hun telte rundt bordet som er kvadratisk, og dermed sier at "det blir jo det samme". Beate støtter opp Britts forklaring selv om hun ikke har sjekket det selv. For Beate er det et godt nok bevis at Britt har sjekket det.

257.	Brage:	Ehh, nei. Fjorten, her blir det fjorten og her blir det tolv
258.	Britt:	Blir det?
259.	Brage:	Ja
260.	Beate:	Hva er det dere snakker om?
261.	Brage:	En, to, tre, fire, [fem, seks, syv, åtte, ni,
262.	Britt:	[Ja, ok
263.	Brage:	[Ti, elleve, tolv,
264.	Beate:	[Ja, for om det er to på siden, da tar man jo bort to, i stede for her tar de jo bare bort en

[Bordoppgaven, gruppe B]

Her tar også Brage i bruk tellemetoden (Stacey, 1989) for å bevise ovenfor Britt og Beate at det han påstår stemmer, og at Britt har telt feil når hun sjekket det. Også han teller hver enkelt komponent for seg og beviser for seg selv og de andre at for den andre figuren blir det fjorten personer rundt bordet når det er et rektangulært bord og tolv personer når det er et kvadratisk bord. Selv om både Britt og Brage tar i bruk tellemetoden, kan det tolkes som om Britt bruker den feil, ved at hun teller en komponent flere ganger, og dermed ender opp med galt svar. Det kan tolkes som om Britt går for fort frem og er dermed ikke like nøyaktig som Brage (Stacey, 1989). Beate oppsummerer på slutten med å gjenta det Brage sa i starten av denne episoden "Ja, for om det er to på siden, da tar man jo bort to, i stede for her tar de jo bare bort en". Det hele kan tolkes som om Brage måtte komme med et moteksempel (Garnier & Taylor, 2006) for å bevise overfor Britt og Beate at hans påstand var rett, og at de andre to dermed hadde feil.

Naiv empirisme

Det første av Ballacheffs (1988) fire bevisnivåer kaller han for naiv empirisme. Det vil si at elevene sjekker formelen opp mot noen konkrete eksempler og på grunnlag av dette konkluderer at formelen stemmer. Et eksempel på dette er Beate som kom fort frem til den eksplisitte formelen da elevene jobbet med Pyramideoppgaven (Oppgave 2).

24.	Beate:	Ja, men jeg vet hva formelen er tror jeg, eller det er hvert fall en gange en er en rute, to gange to er fire, tre gange tre er ni, også blir det fire gange fire er.. da blir det jo bare n i andre, n gange n som er formelen.

[Pyramideoppgaven, gruppe B]

I starten av Pyramideoppgaven (Oppgave 2) kommer Beate med en hypotese, om at formelen blir n i andre eller n gange n som hun også sier. Hun begrunner funnet sitt ved å se på de fire første figurene og tester hypotesen opp mot disse. På bakgrunn av dette konkluderer Beate med at formelen må bli *n* i andre eller *n* gange *n* siden den stemmer på de fire første figurene i følgen. I dette tilfellet kan det altså tolkes at Beate en naiv empirist, fordi hun bare tester hypotesen sin for de fire første elementene i følgen.

Et annet eksempel som belyser Balacheffs (1988) første bevisnivå har jeg også hentet fra gruppe B. Under Bordoppgaven (Oppgave 1) skulle elevene også her komme frem til en formel for figurfølgen.

61.	Britt:	Så det blir jo, la oss si at antall bord det er jo to der (peker på arket), så det blir to gange fire som blir, en, to..
62.	Brage:	To gange fire pluss to
[...]		
74.	Beate:	*N* gange fire pluss to (sier det stille mens hun skriver det ned) [For det her er
75.	Britt:	[to gange fire blir åtte, ja det blir, det er rett.
76.	Brage:	[uhørbart]
77.	Britt:	Så vi må sjekke om han der (peker på arket med bobla 5 bord) har rett så
78.	Brage:	Ehh, fem [bord
79.	Britt:	[Det blir fem gange fire blir 20 pluss to, ja han har rett

[Bordoppgaven, gruppe B]

Her kan man se at elevene har kommet med hypotesen at formelen må bli *n* gange 4 pluss to. De tester den først på den andre figuren, der de både kan sjekke svaret opp mot figurfølgen i grubletegningen og ved formelen. Videre tester elevene formelen for den fjerde figuren, som ikke er nevnt i grubletegningen, men er det neste leddet i følgen. Jeg tolker det slik at elevene velger å gjøre dette for å sjekke om hypotesen deres stemmer. I tillegg tester elevene formelen opp mot påstanden i grubletegningen "Når det er 5 bord kan det sitte 22 personer", for å sjekke om formelen er rett. Britt sjekker svaret og ser at det stemmer, og hun konkluderer dermed med at formelen deres stemmer. Elevene tester formelen opp mot enkelte element i figurfølgen og de kan derfor tolkes som naive empirister (Balacheff, 1988).

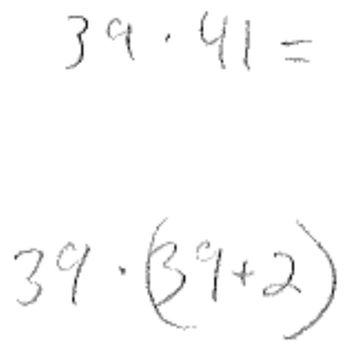
Avgjørende eksperiment

Under en episode i datainnsamlingen opplevde jeg at elevene tok i bruk det Balacheff (1988) kaller for avgjørende eksperiment. Det vil si at man tester hypotesen for et eksempel som ivaretar det generelle tilfellet og som representerer en plass langt ut i følgen. Da gruppe A jobbet med Froskeoppgaven (Oppgave 3) tok de i bruk dette.

351. Adrian: Jo, jo, nå har jeg det, se her, det er *n* gange *n*, *n* pluss, nei du ganger liksom, du ganger, for eksempel om *n* er, om *n* er trettini (skriver ned på arket)
352. Alex: Ja
353. Adrian: Så ganger du den med førtien, for det er liksom trettini pluss to

[Froskeoppgaven, gruppe A]

Her kan vi se at Adrian har kommet med en hypotese om at den eksplisitte formelen er *n* gange *n* pluss to. For å vise de andre elevene at denne hypotesen stemmer bruker Adrian 39 som en representant langt ut i følgen. Selv om dette ikke er så langt ut i følgen som plass nummer 100, tolker jeg det slik at elevene ser på 39 som et mye større tall enn de tallene som de har testet hypotesen sin på tidligere. Det kan derfor tolkes som om Adrian bruker 39 som et avgjørende eksperiment for å kunne påstå at formelen han foreslår stemmer. Det kan også tolkes som om Adrian er det på som Stacey (1989) kaller for fjerngeneralisering. Han går ut over rimelig praktiske grenser, ved å se på det trettiniende elementet, ute å vite det trettiåttende elementet.



Figur 22: Elevbesvarelse Adrian, Froskeoppgaven (Oppgave 3)

Om man ser på det som Adrian har skrevet (figur 22) kan det virke som om hans naturlige språk ikke er tilstrekkelig når han benytter seg av avgjørende eksperiment. Adrian tar også i bruk tegnsystemet i form av numeriske tegn (Duval, 2002). Det kan derfor tolkes som om figurnummeret som han benytter seg av er for stort til at han klare å regne det i hodet, og må dermed ta i bruk tegnsystemet for å klare utregningen.

Generisk eksempel

Under observasjonen av Pyramideoppgaven (Oppgave 2) kom Adrian med det jeg vil kategorisere som et generisk eksempel (Balacheff, 1988; Mason, 1996). Adrian hadde i forkant dekomponert ut fra den fjerde figuren i følgen (se figur 12), og benyttet seg av det som et generisk eksempel, men de andre elevene forsto ikke helt hva han mente. Som vi kan se under, tok Adrian figurnummer åtte (se figur 23) og argumenterer for at det han sier er sant ved å se på egenskapene i akkurat denne figuren.

72.	Adrian:	Jo, men det er jo altså. Nummer syv da har du liksom den første, nei den er en, og derfor blir det syv oppover på nummer syv, figur nummer to, figur nummer tre, figur nummer fire, figur nummer fem, figur nummer seks, figur nummer syv, figur nummer åtte (tegner firkanter oppå hverandre).
73.	Adrian:	Ja, la oss si figur nummer åtte

[Pyramideoppgaven, gruppe A]

Etter hvert som Adrian sier dette, tegner han en rute oppover for hver figur han har lagt på. Det kan tolkes at han ser på lagene oppover som alle de forgående elementene i følgen, og at disse er lagt oppå hverandre. På denne måten ser han at figurnummer åtte vil ha åtte ruter i kolonnen i midten eller høyden slik som han har tegnet det.

Figur 23: Elevbesvarelse Adrian, Pyramideoppgaven (Oppgave 2).

Hver komponent i figuren representerer de forgående figurene i følgen ved at Adrian starter med den første figuren nederst, siden han tegner komponentene opp på hverandre. Her kan det tolkes som at Adrian tenker rekursivt (Lannin et al., 2006), siden han legger på ruter for hver nye figur, han ser ikke bare på den åttende figuren. Han tar med de forgående figurene også. Videre ser man hvordan Adrian forklarer til medelevene hva han mener.

74.	Alex:	Ja, ok
75.	Adrian:	Også må du ha, så må du ha, ja
76.	Alex:	Så blir det også åtte bortover der, så blir det [åtte på andre siden
77.	Adrian:	[Åtte der, åtte det og ja åtte opp
78.	Alex:	Ja, pluss alle de som er på skrå (drar fingeren på skrå over arket)
79.	Adrian:	Hva mener du?

80. Alex: Hvis vi skulle
81. Adrian: Altså de (tegner opp to streker nederst på figuren og en strek på skrå nedover for å markere de elementene som er på høyre side)

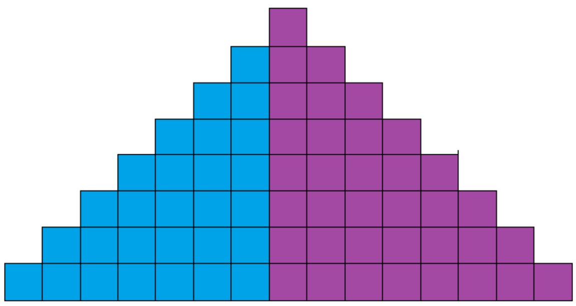
[Pyramideoppgaven, gruppe A]

Som man kan se i figur 23 tegner ikke Adrian hele figuren, men slik som han sier det, kan det tolkes som om han ser på denne figuren som arealet for å få alle komponentene i figur nummer åtte. Han har tegnet åtte komponenter oppover og laget en strek bortover for å markere at det går også åtte komponenter mot høyre. Adrian tegner bare halve figuren, det kan tolkes som om han gjør det fordi det er det eneste han trenger for å forklare eksemplet med figur nummer åtte og at den resterende delen av figuren vil danne et kvadrat. Jeg tolker det slik at han ser på denne figuren som arealet av antall komponenter og dermed trenger han bare halve figuren for å forklare sin hypotese. Dette benyttet Adrian seg også av da han forklarte den fjerde figuren (se figur 12). Litt senere forklarer Adrian akkurat dette:

85. Adrian: Dem som er inni der. Jo men da ganger du det gange det
86. Alex: Og deler på to
87. Adrian: Nei, du trenger ikke dele på to for du har på den siden også (henviser til den siden han ikke har tegnet omrisse av de skrå)
88. Alex: Ja
89. Adrian: Da har du arealet av hele figuren

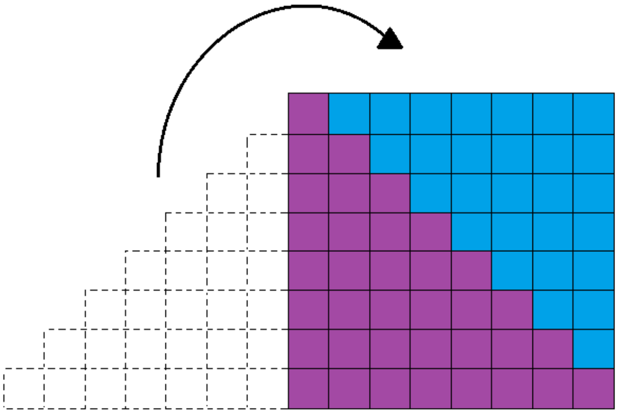
[Pyramideoppgaven, gruppe A]

Når Adrian sier "du trenger ikke dele på to for du har på den siden også" tolker jeg det slik at han har flyttet de komponentene som er på venstresiden av figuren, som jeg har markert med blått i figur 24 og ser at det passer inn med det området på høyresiden som ikke er i bruk, som da vil danne et kvadrat.



Figur 24: Adrians tenkemåte

Den resterende halve figuren kan han da plasser slik at figuren danner et kvadrat, med i dette tilfellet åtte gange åtte komponenter.



Figur 25: Adrians tenkemåte

På den måten kan Adrian konkludere med at når du multipliserer høyden av figuren med halve lengden eller med seg selv, vil man få antall komponenter som er i figuren. Adrian bruker altså figur nummer åtte som et generisk eksempel for å prøve å forklare den generelle notasjonen for figurfølgen. Han bruker figuren som han har tegnet opp for å argumentere for hypotesen sin, og dette blir et karakteristisk eksempel for figurfølgen som elevene jobber med (Balacheff, 1988; Mason, 1996).

I tillegg vil jeg trekke frem en episode fra gruppe B under Pyramideoppgaven (Oppgave 2). Bjørn var opptatt av å uttrykke den rekursive formelen og ikke den eksplisitte formelen som Beate var kommet frem til allerede i ytring 24, cirka fem minutter inn i oppgaven. Bjørn har derimot kommet frem til en formel for å uttrykke hvor mange komponenter man må legger på for å komme til neste figur.

57.	Bjørn:	Men du kan jo ta nummeret på den du er på, pluss nummeret på den forrige, så får du antall ruter du la på... Der for eksempel, tre ruter, altså nummer tre der pluss nummer to, det blir fem ruter, og der er det fem ruter mer enn på den. På neste blir det syv ruter mer, og da blir det nummer fire pluss nummer tre, altså syv.

[Pyramideoppgaven, gruppe B]

Bjørn ser altså på hvor mange ruter det er lagt på for å komme til neste figur. Han sier at man må ta nummeret på den figuren man er på pluss nummeret på den forrige figuren. Når Bjørn ser på den tredje figuren, vil det gi $3 + 2 = 5$, altså vil figur nummer tre ha fem ruter på den nederste linjen. Bjørn ser altså på egenskapene til den tredje og fjerde figuren for å forklare til de andre elevene hva han mener. Bjørn kommer med et generisk eksempel (Mason, 1996; Balacheff, 1988) for å forklare både for seg selv og de andre elevene hvordan han ser på økningen mellom figurene.

5.2.4 Hvordan mønsteret uttrykkes verbalt

For å kunne finne svaret på grubletegningene måtte elevene ta i bruk språket som et medierende redskap (Säljö, 2001), og det kan virke som om elevene i min undersøkelse løser mye av generaliseringene ved å uttrykke seg verbalt. Ut fra analysen kan jeg se at elevene i min undersøkelse bare benytter seg av uformelt muntlig språk og uformelt skriftlig språk (Pimm, 1991). Elevene benytter seg hverken av formelt muntlig språk eller formelt skriftlig språk, noen som tyder på at grubletegningen ikke legger opp til det. Elevene jobber ikke godt nok med sitt muntlige språk før de skriver det ned, som gjør at jeg tolker det som om de bare uttrykker seg ved uformelt språk. Når elevene skriver ned det de sier i naturlig språk (Duval, 2002), endrer de sitt naturlige språk og går over til uformelt skriftlig språk. De uformelle uttrykkene til elevene er ikke selvstendige og generelle nok for at de kan regnes som formelle uttrykk (Pimm, 1991). Fokuset i arbeid med grubletegninger er kanskje ikke på at elevene skal uttrykke seg på annet enn uformelt plan, i og med at grubletegningene er ment for å fremkalle ideer, utfordre tankegangen og støtte elevene i deres utvikling av forståelse (Naylor & Keogh, 2012).

Videre ser ikke elevene i min undersøkelse ut til å uttrykke den rekursive formelen (Lannin et al., 2006) annet enn ved naturlig språk (Duval, 2002). Som jeg belyser i analysen benytter elevene seg av flere metoder for å utrykke den rekursive formelen, men det virker ikke som om de klarer å dra noe generelt ut av det de sammenhengene som de oppdager ved rekursiv tilnærming, slik at de kunne skrive ned den rekursive formelen.

Når elevene i min undersøkelse skal sjekke om den formelen som de er kommet frem til stemmer, benytter elevene seg av fire forskjellige bevisnivåer. Når elevene benytter seg av bevis ved moteksempel (Garnier & Taylor, 2006) ser det ut til at elevene tar i bruk to register av representasjoner (Duval, 2002). Elevene tar både i bruk sitt naturlige språk, men også geometrisk representasjon i form av tegning. Det kan virke som om eleven er like avhengige av å benytte seg av begge representasjonene. Når elevenes naturlige språk ikke er tilstrekkelig, må elevene også ta i bruk tegning som en representasjon for å underbygge sine påstander og hypoteser. Elevene omdanner representasjonssystemet sitt, de går fra å beskrive en sammenheng i naturlig språk, til dens grafiske representasjon (Duval, 2002). I artikkelen til Duval (2006) skriver han at den måten som matematiske bevis kommer frem i naturlig språk ikke kan bli formalisert, annet enn ved hjelp av symbolsystemer. Elevene i min undersøkelse klarer å formalisere sitt bevis ved å ta i bruk geometriske figurer i form av tegning, og det kan tolkes som om at språket alene ikke er godt nok bevis for elevene.

I analysen benytter elevene seg også av naiv empirisme (Balacheff, 1988), for å bevise at hypotesen de kommer med stemmer. Ut fra analysen kan det virke som om alle elevene er fornøyd, så lenge formelen stemmer for noen konkrete eksempler. Det kan tolkes som om elevene ikke er klar over at dette ikke regnes som et gyldig bevis (Balacheff, 1988). Grubletegningen viser jo bare en del av følgen, og det kan derfor tolkes som om elevene tester hypotesen opp mot de elementene som de har illustrert i grubletegningen eller den tallfølgen som de selv har tegnet opp.

Også når elevene benytter seg av avgjørende eksperiment (Balacheff, 1988), ser de på det som et gyldig bevis. Selv om tilleggsoppgavene til grubletegningene legger opp til at elevene skal benytte seg av avgjørende eksperiment, benytter elevene seg også av et tilfeldig element lengre ut i følgen, og argumenterer for at formelen som de har kommet frem til stemmer i akkurat det tilfellet. Balacheff (1988) skriver at bevis ved naiv empirisme og avgjørende eksperiment ikke regnes om gyldige bevis, han benytter seg bare av ordet bevis fordi de som benytter seg av naiv empirisme og avgjørende eksperiment ser på dem som bevis.

Det siste bevisnivået som elevene benytter seg av i min undersøkelse er generisk eksempel (Balacheff, 1988; Mason, 1996). Elevene ser på egenskapene til et gitt element i følgen, og ser på det elementet som en karakteristisk representant for følgen. I analyse kom det frem at elevene både benytter seg av generisk eksempel for å uttrykke sammenhenger i følgen, men også for å uttrykke økningen. Elevene ser på dette som gyldige bevis, fordi de ut fra dette eksemplet kan se at det gjelder for flere elementer enn bare akkurat det som de har brukt som eksempel. I analyse kom det også frem at det som en elev ser på som et generisk eksempel, ikke bestandig blir oppfattet som det av de andre elevene. Mason (1996) skriver at det som læreren presenterer som et generelt eksempel blir ikke alltid oppfattet som det av elevene. Når elevene benytter seg av generisk eksempel kan det tyde på at heller ikke her er deres naturlige språk nok for at de skal klare å forklare og argumentere godt nok for sine påstander og hypoteser. Adrian benyttere seg blant annet av en geometrisk figur (Duval, 2002) for å forklare hvordan han mener at figur nummer åtte kan brukes som et generisk eksempel for figurfølgen.

Det kan altså tyde på at for elevene i min undersøkelse er ikke det å uttrykke seg verbalt nok, de må også ta i bruk andre register av representasjoner for å kunne argumentere for sine hypoteser. Lee (1996) skriver at verbaliseringsnivå handler om å kunne uttrykke mønstret verbalt og tydelig. For elevene i min undersøkelse, er det altså ikke tilstrekkelig for dem å bare verbalisere sine generaliseringer, de må også ta i bruk andre register av representasjoner (Duval, 2002) for at mønstret skal blir tydelig for dem. Dette gjør at de påstandene elevene kommer med, kan sjekkes opp mot flere representasjoner enn bare en, og dermed virke mer troverdig. English & Warren (1998) fant i sin undersøkelse at elever syntes det var lettere å verbalisere sine generaliseringer enn å uttrykke dem ved symboler. Etter som generaliseringen ble mer kompleks, støttet elevene seg til en rekursiv tilnærming for å verbalisere sin generalisering.

5.3 Uttrykker seg ved algebraisk notasjon

Som en del av alle grubletegningene måtte elevene uttrykke den generelle notasjonen for følgen. Dette førte til at elevene var nødt til å bruke n for å representere den n'te plassen i følgen. Dette nivået kaller Lee (1996) for symboliseringsnivå. Her skal man kunne uttrykke antall elementer i figuren på plass n som funksjon av n. Jeg har valgt å kalle dette delkapittelet for "uttrykker seg ved algebraiske notasjon". Her vil jeg se hvordan elevene uttrykker den eksplisitte formelen og hvordan elevene uttrykker formelen representert ved n. At elevene uttrykte den eksplisitte formelen kunne også vært plassert under det forrige delkapittelet, "uttrykker mønstret verbalt". Siden jeg tolker det slik at elevene i min undersøkelse bare ser på den eksplisitte formelen som et gyldig svar på det å uttrykke formelen med generell notasjon, og at elevene uttrykker eksplisitt formel ved symbolspråk, har jeg valgt å plassere eksplisitt formel under denne kategorien.

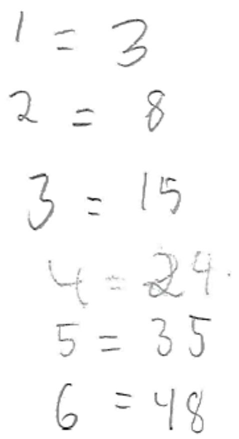
5.3.1 Uttrykker eksplisitt formel

Når elevene fikk i oppgave å uttrykke formelen, tolker jeg det slik at elevene ikke så på rekursiv formel som en gyldig formel. Elevene søkte etter å uttrykke den eksplisitte formelen i stede for å generalisere den rekursive formelen (Lannin et al., 2006). Under Froskeoppgaven (Oppgave 3) hadde elevene problemer med å komme frem til den generelle formelen selv om de uttrykte formelen eksplisitte flere ganger.

314. Alex: Men det starter jo men *n* gang, en gange tre, er tre. To gange fire er åtte. Tre gange fem er femten. Fire gange seks er tjuefire, og fem gange syv er trettifem (skriver ned det han sier, jentene starter på nytt å snakke om noe som ikke er relatert til det vi jobber med). Så det starter med tre også økes det alltid med at det man ganger med øker med en. *N* gange. Så en gange tre er tre, to gange fire er åtte, tre gange fem er femten, fire gange seks er tjuefire, fem gange syv er trettifem, syv nei, seks gange åtte er førtiåtte. Sånn vil det jo øke hele tiden. Så på seks vil det jo være førtiåtte...

[Froskeoppgaven, gruppe A]

For å se nærmere på det Alex sier vil jeg også ha med det han skrev ned på arket sitt under denne episoden.


1 = 3
2 = 8
3 = 15
4 = 24
5 = 35
6 = 48

Figur 26: Elevbesvarelse Alex, Froskeoppgaven (Oppgave 3).

Som vi kan se ramser Alex opp den eksplisitte formelen for hvert enkelt figurnummer og noterer ned svaret han kommer frem til. Han sier den eksplisitte formelen til de seks første elementene i følgen, men Alex noterer ikke ned noen av de utregningene som han gjør ved naturlig språk. Det kan tolkes som om dette gjør at Alex ikke klarer å generalisere det han sier til å uttrykke den generelle formelen for følgen, selv om han gjentatte ganger uttrykker den eksplisitte formelen ved naturlig språk (Duval, 2002). Jeg tolker det slik at siden Alex ikke noterer ned det han sier i naturlig språk, klarer han ikke å se sammenhengen mellom den eksplisitte formelen han uttrykker og uttrykke den generelle formelen for følgen. Han klarer dermed ikke å generalisere formelen for figurfølgen fra naturlig språk til symbolspråk (Duval, 2002).

Jeg vil også ta med en situasjon fra Pyramideoppgaven (Oppgave 2). Da elevene skulle svare på tilleggsspørsmålene til grubletegningene oppdaget jeg at elevene ofte brukte den eksplisitte formelen de var kommet frem til direkte, altså at de brukte den for bare å gi svaret og uten å uttrykke regnemetoden de hadde benyttet for å komme frem til svaret. Når gruppe B skulle svare på hvordan figur nummer 100 vil se ut, brukte de formelen direkte for å svare på spørsmålet. Elevene har i forkant av denne episoden kommet frem til at den eksplisitte formelen for figurfølgen måtte være $g_n = n^2$.

140.	Beate:	Totusenfemhundre
141.	Brage:	To, fem, ja, totusenfemhundre ... ja

[Pyramideoppgaven, gruppe B]

Her bruker både Beate og Brage formelen de har kommet frem til direkte. Siden vi ikke får innblikk i hva elevene tenker, kan man heller ikke si noe om hvilken fremgangsmåte de har benytte for å komme frem til svaret. Jeg tolker det slik at elevene benytter seg av den eksplisitte formelen som de nettopp er kommet frem til, som er ganske naturlig at elevene gjør. Selv om formelen som elevene er kommet frem til ikke viser ekvivalens relasjonene mellom summen av oddetall og kvadrattallet, ser elevene på kvadrattallet som rett formel for følgen.

5.3.2 Uttrykker formelen representert ved *n*

En viktig del av oppgavene som elevene jobbet med var at de skulle uttrykke den generelle notasjonen ved *n*. Jeg hadde bevisst brukt representasjonen *n* for å se hva elevene la i det matematiske begrepet og for at jeg skulle få innblikk i hvordan de uttrykte seg når de svarte på nettopp en slik oppgave.

Det ble tidlig klart for meg at elevene i undersøkelsen min så på det å finne en formel som en viktig del av arbeidet med grubletegningene. Jeg vil derfor starte med å trekke frem en episode der elevene skal svare på boblene i Pyramideoppgaven (Oppgave 2).

30.	Alex:	Men hvordan skal vi beskrive hvorfor det er rett? Vi må jo ha en begrunnelse eller forklaring
31.	Adrian:	Ja (Alex puster tungt ut, jentene flirer litt. Alex begynner å skrive på arket sitt) [pause 34 s]
32.	Alex:	Vi burde finne en formel første, for da kan vi sjekke de andre om de er rett.

[Pyramideoppgaven, gruppe A]

Alex sier at de må finne en måte slik at de kan gi en god nok begrunnelse på hvordan de kan påstå at de har rett. Alex foreslår så at de burde finne en formel for figurfølgen, slik at de så kan sjekke opp mot formelen om snakkeboblene i grubletegningen er rett eller feil. Det kan altså tolkes slik at elevene ikke ser på sine verbale uttrykk som god nok begrunnelse på om snakkeboblene i grubletegningen stemmer eller ikke. De må kunne uttrykke formelen representert ved n, for å kunne si noe om gyldigheten til de påstandene og hypotesene som elevene allerede har kommet med.

Lenger ut i Pyramideoppgaven (Oppgave 2), kommer elevene med et forslag til hva formelen for figurfølgen er. I forkant har jeg brutt inn for å hjelpe elevene på vei, siden jeg så at de flere ganger både uttrykte formelen rekursivt og eksplisitt. Jeg fikk elevene til å se på økningen, for å hjelpe dem med å se sammenhengen mellom summen av oddetall og kvadrattallet. Dette gjorde at Aina kom med et forslag til den generelle notasjonen for følgen.

171.	Aina:	Hva med n gang n? Ok, nå kommer jeg med noe helt random
172.	Adrian:	n gang n faktisk
173.	Alex:	Emm
174.	Aina:	Ja for to gange to er jo fire og det er fire der.
175.	Alex:	N
176.	Aina:	Og tre gange tre er ni og det er ni der.
177.	Anna:	Det er jo det, det er jo det her shj shj (lager lyd med munnen, og viser på arket sitt)
178.	Alex:	Fire gange fire, fem gange fem, og seks gange seks, trettiseks (ser på Adria)
179.	Aina:	Ja
180.	Anna:	Ja
181.	Aina:	Blir det ikke bare n gange n da?
182.	Adrian:	Jo
183.	Anna:	Jo (Elevene ler)
184.	Alex:	Det blir jo faktisk det. Det blir n gang n.

[Pyramideoppgaven, gruppe A]

Her ser vi hvordan Aina kommer med forslag om at formelen må bli n multiplisert med n. Hun starter med en hypotese for den generelle formelen og tester den for den andre og tredje figuren i følgen. Dette er også de figurene som er illustrert i grubletegningen og det kan tolkes at det dermed er enkelt både for Aina og de andre elevene å sjekke opp om det hun sier stemmer. I tillegg ser Alex at det også stemmer for de neste tre figurene i følgen som er figur nummer fire, fem og seks. Dette hadde elevene snakket om og kommet frem til i forkant av denne episoden. Jeg tolker det slik at selv om elevene klarer å uttrykker den den generelle notasjonen for følgen, ser de ikke likheten mellom summen av oddetallene og kvadrattallet.

Som vi skal se har også Beate i gruppe B også tenkt på samme måte som Aina, i Pyramideoppgaven (Oppgave 2). Beate kom veldig tidlig med en hypotese om hva den generelle notasjonen for følgen kunne være.

> 24. Beate: Ja, men jeg vet hva formelen er tror jeg, eller det er hvert fall en gange en er en rute, to gange to er fire, tre gange tre er ni, også blir det fire gange fire er.. da blir det jo bare *n* i andre, *n* gange *n* som er formelen.
>
> [Pyramideoppgaven, gruppe B]

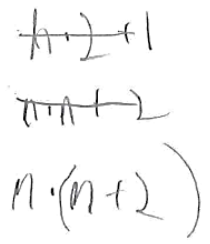
Beate ser på de fire første figurene i følgen, der hun tar for seg hver enkelt figur og uttrykker det hun mener er den eksplisitte formelen til hver av figurene. Hun uttrykker også antall komponenter som blir i hver figur, foruten for figur fire. Beate generaliserer det hun sier slik at hun ender opp med det som hun ser på som den eksplisitte formelen for figurfølgen, som i dette tilfellet gir $g_n = n^2$. Jeg tolker det til at dette kan komme av at hun har bilde av de tre første figurene på grubletegningen, men ikke den fjerde, som gjør at hun ikke kan sjekke denne opp mot illustrasjonen i grubletegningen. I og med at Beate ikke har sett på økningen mellom figurene, tolker jeg det slik at heller ikke hun har sett likheten mellom kvadrattallet og summen av oddetall.

Til slutt vil jeg trekke frem en episode når elevene jobbet med Froskeoppgaven (Oppgave 3). Også her hadde elevene problemer med å uttrykke den generelle formelen for følgen. I forkant har Brage uttrykt den rekursive formelen til følgen og dette gjør at Britt komme med forslag om den eksplisitte formelen.

251. Britt: Det blir jo *n* gange *n* pluss to (skriver det ned på arket sitt) [pause 8 s]
252. Brage: To, ja det ser rett ut. To gange to pluss to, Tre gange tre ehh ... Tre gange tre pluss to [pause 19 s] *n* gange *n* pluss to.

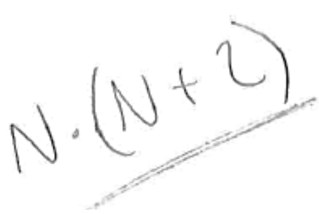
[Froskeoppgaven, gruppe B]

Her komme Britt med en hypotese på at formelen blir $h_n = n(n+2)$, men sjekker ikke selv opp mot noen av elementene i tallfølgene om den stemmer. Brage ser ut til å være enig i det forslaget som Britt komme med. Men om man ser på det Brage har notert ned på arket, kan det tolkes som om han har misforstått det Britt har sagt og har dermed ikke helt rett formel.



Figur 27: Elevbesvarelse Brage, Froskeoppgaven (Oppgave 3)

På det første som Brage har notert kan vi se at han her feil eksplisitt formel. Det kan tolkes slik at han har sett at det øker med to og dermed tenkte at *n* må multipliseres med to på en eller annen måte. Han har så strøket over dette og skriver $n \cdot n + 2$, som viser at han er inne på rett tankegang, men formelen er ikke rett slik som det står. På nytt stryker Brage over dette og skriver til sist ned formelen $n \cdot (n + 2)$, men det er Britt som setter parentesen på arket til Brage. Det kan tyde på at Brage ikke vet helt prioriteringen til regneoperasjonene, som må benyttes for å løse oppgaven. Som vi skal se under har også Britt notert ned den eksplisitte formelen representert ved *n* på sitt ark.



Figur 28: Elevbesvarelse Britt, Forskeoppgaven (Oppgave 3).

Dette gjorde Britt første gangen hun så den eksplisitte formelen, og det kan tolkes som om hun har en forståelse av at hun må addere variabelen med to før hun kan multiplisere den med seg selv. Det kan tolkes som om Britt har kontroll på hvilke regneoperasjoner som skal gjøres først. Hun vet at multiplikasjon og divisjon har høyrer prioritet enn addisjon og subtraksjon, noe som gjør at formelen hun har kommet frem til inneholder en parentes. På den måten vet hun at hun må utføre regneoperasjonen som er inne i parentesen før hun kan multipliserer, eller at hun må multipliserer hvert ledd i parentesen med tallet som står utfor parentesen. Det kan derfor tolkes som om Brage ikke har helt kontroll på regneoperasjonene ut fra det han skriver i figur 28. Det kan også tolkes som om Britt benytter seg av Stacey (1989) lineær metode der Britt bruker et mønster der hun både tar i bruk multiplikasjon og addisjon, og hun dermed vet at rekkefølgen på operasjonene er avgjørende.

5.3.3 Hvordan mønstret uttrykkes ved algebraisk notasjon

Jeg oppdaget tidlig at det kunne tolkes som om elevene i min undersøkelse så på det å finne den generelle notasjonen for følgen, som avgjørende for å kunne begrunne svarene sine for de fire boblene i grubletegningene. Når elevene skal uttrykker den eksplisitte formelen (Lannin et al., 2006) for følgen, kan det tyde på at de har problemer med å uttrykke seg generelt fordi at de mangler mening for de symbolene som de benytter (Steinbring, 2005). Dette gjør at elevene har problemer med å omdanne representasjonene, når de skal gå fra naturlig språk til symbolsystem (Duval, 2002).

Også når elevene skal uttrykke formelen representert ved *n*, kan det tyde på at elevene mangler mening for symbolet *n* (Steinbring, 2006) som gjør at elevene har problemer med å uttrykke seg. Det kan virke som om elevene i min undersøkelse ikke har klart å skape mening for de symbolene som de bruker. Steinbring (1997) skriver at meningen i symbolene oppstår i samspillet mellom tegn eller symbolsystemer og en referansekontekst. Symbolene har altså ikke noen mening i seg selv, men får mening gjennom referansekonteksten. Det kan altså tolkes som elevene mangler meningen gjennom referansekonteksten, og derfor har problemer med å kunne utrykke den generelle notasjonen for følgen. Selv om elevene i min undersøkelse hadde kjennskap til symbolet *n* fra før, der de blant annet visste at det ville si at det skulle gjelde for alle, kan det virke som om de ikke har den rette meningen for dette symbolet. English og Warren (1998) skriver i sin undersøkelse at variabelen er et grunnleggende verktøy for å uttrykke generalisering. En forståelse av begrepet variabel er selve fundamentet for at elever skal oppleve mestring i algebra.

Pimm (1991) skriver at matematikk kan oppleves som krevende for mange og at mangel på virkelige matematiske objekter som referanse, får mange elever til å tro at det er symbolene som er den virkelige matematikken. For elevene i min undersøkelse kan det virke om de ser på det å uttrykke seg ved algebraisk notasjon, som den virkelige matematikken i grubletegningene. De ser ikke på generaliseringen som de har benyttet for å kunne uttrykke den generelle notasjonen som matematikk. Elevene ga tidlig utrykk for at de måtte finne den generelle formelen for følgen for å kunne sjekke om de boblene i grubletegningene stemte eller ikke. Radford (1996) skriver at målet med generalisering av følger er å finne et uttrykk som representerer konklusjonen, en formel som baserer seg på strukturen. Det kan virke som om elevene i min undersøkelse har som mål å finne uttrykket som representerer konklusjonen, og at det er dette som førere dem frem i generaliseringen.

Det kan tolkes som om generaliseringen til elevene utvikles gjennom det at de må uttrykke seg ved algebraisk notasjon, og å komme seg til det som Lee (1996) kaller for symboliseringsnivå. Under symboliseringsnivå skal elevene kunne bruke n for å representere den n'te plassen i følgen, for så å uttrykke antall elementer i figuren på plass n som en funksjon av n. I Lee (1996) sin undersøkelse påpeker hun at problemet for deltakerne ikke var å se mønsteret, men å se et algebraisk brukbart mønster. For elevene i min undersøkelse kan det tyde på at de har det samme problemet som deltakerne i hennes undersøkelse. Elevene klarer helt fint å se mønstret i følgen, men de har problemer med å finne og uttrykke et algebraiske brukbart mønster. I undersøkelsen til Stacey og MacGregor (2001) sier de at tilnærming til algebra som er basert på figurfølger som tar for seg generalitet først, med funksjonssammenhenger og algebraiske uttrykk, for så å bruke denne forståelsen til å formulere og løse ligninger, er den rette veien og gå. Dette gjør at elevene selv skaper forståelsen for formelen som de produserer.

Det kan tyde på at boblene i grubletegningene er med på å sette i gang elevers samtale om algebraisk generalisering, som fører elevene til symboliseringsnivå (Lee, 1996). Sexton et al. (2009) antyder at man må gi elevene flere muligheter til å utvikle mentale strategier for resonering. Grubletegninger kan gi innsikt i hvilke strategier elevene bruker når de jobber med problemløsningsoppgaver i matematikk, og gir en nyttig kontekst for å diskutere fordeler og ulemper av strategiene som brukes av de ulike karakterene i grubletegningen. Funnene i undersøkelsen markerer viktige behov for å få tilgang til elever oppfatninger om deres tilnærming til å lære matematikk, fordi elever og lærere ikke alltid deler en felles forestilling om disse tilnærmingene (Sexton, 2010).

5.4 Sammenfatning og refleksjoner

I denne oppgaven har jeg har jeg analysert datamaterialet mitt ut fra forskningsspørsmålet:

Hvordan bidrar tre grubletegninger til å sette i gang to elevgruppers samtale om algebraisk generalisering?

Hvordan genererer elevene argumentasjon og resonnement?

På hvilken måte støtter elevene seg til grubletegningen i sine argumentasjoner?

Gjennom analysearbeidet mitt har jeg kommet frem til tre typiske trekk ved elevene jeg observerte i arbeid med grubletegninger. Alle tre er utfordringer elevene støter på i arbeid med generalisering av figurmønster, som var tema i grubletegningene elevene jobbet med i perioden jeg gjennomførte undersøkelsen. Den første utfordringen er at elevene måtte oppdage og snakke om funksjonssammenhengene i figurfølgen før de kunne uttrykke seg generelt om formelen for følgen. Jeg fant at elevene tok i bruk nærgeneralisering for å uttrykke de funksjonssammenhengene som de så i følgen, noe som også gjorde at de hadde en rekursiv tilnærming når de så på økning og dekomponering.

Den andre utfordringen var at elevene måtte ta i bruk språket som medierende redskap for å kunne finne svaret på grubletegningene, som gjorde at de måtte uttrykke mønsteret verbalt. For elevene i min undersøkelse kan det virke som om de synes det var lettere å verbalisere generaliseringene sine enn å uttrykke dem ved symboler.

Den tredje utfordringen er at elevene måtte uttrykke seg ved algebraisk notasjon, noe som innebar at de måtte omdanne representasjonssystemet sitt og går fra å uttrykke seg ved naturlig språk til å representere følgen ved notasjon med symboler. Det viste seg å være vanskelig for elevene å skulle gå fra et register av representasjonssystem til et annet, fra representasjon ved naturlig språk til symbolspråk.

Jeg oppdaget tidlig at elevene hadde et behov for å finne den eksplisitte formelen for å kunne svare på grubletegningene. De var altså avhengig av å komme på symboliseringsnivå (Lee, 1996) for at begrunnelsene deres skulle være godt nok. At formelen ble representert ved *n* var deres argumentasjon for at de hadde svart rett på utsagnene i grubletegningen. Når de først hadde kommet til symboliseringsnivået kunne de benytte seg av formelen for å sjekke svaret eller svare på boblene i grubletegningene.

Påstandene i grubletegningene er med på å føre elevene videre i generaliseringen sin, ved at de legger opp til at elevene må uttrykke den generelle notasjonen for følgen. Dette vil si at elevene i undersøkelsen min hadde et mål om å komme seg til symboliseringsnivå, for å kunne svare på alle påstandene i grubletegningen, og dermed argumentere godt nok for at de var kommet frem til rett svar. Sexton (2010) skriver at de påstandene som er i grubletegningen gir elevene frihet til å vurdere om de er enig eller uenig i de synspunktene som kommer frem. Dette var også tilfelle for elevene i min undersøkelse. Elevene benyttet seg av påstandene for å kunne uttrykke den generelle notasjonen for følgen.

5.5 Pålitelighet

I etterkant av forskningen min ser jeg at det er ting jeg kunne gjort annerledes og at jeg til tider kan ha påvirket elevene i undersøkelsen min. Når elevene hadde problemer med å komme seg videre i oppgaven, ble det til at jeg blandet med inn og dermed kan dette ha påvirket elevene. Selv om jeg hadde påtatt meg rollen som delvis deltakende observatør, ble det til at jeg ikke helt klarte å holde den rollen. Om jeg hadde klart å holde rollen min, er det mulig at jeg hadde hatt et annet datamateriale enn det jeg fikk i undersøkelsen min. Jeg har forsøk å unngå slike tilfeller der jeg bryter inn, i de situasjonene jeg har analysert, dette for å hindre mulig påvirkning av resultatet.

Jeg vil også trekke frem mulige svakheter med grubletegningene som elevene jobbet med i undersøkelsen min. Jeg kunne for eksempel bare hatt grubletegninger som la opp til at elevene skulle ha figurativ tilnærming til figurfølgen, slik at jeg på den måten ga elevene tre grubletegninger med noe likt potensial. Jeg kunne også ha gjennomført undersøkelsen med hel klasse for å få et innblikk i hvordan grubletegninger fungerer som en arbeidsmetode i hel klasse og ikke bare i to individuelle elevgrupper. Jeg kunne også gitt elevene vanlige oppgaver som ikke var grubletegninger for å se hvilken betydning grubletegningene egentlig hadde. Om elevene hadde fått samme oppgave presentert som en vanlig oppgave, og ikke i form av grubletegning, vet jeg ikke om jeg ville kommet frem til samme resultat som jeg har gjort. I forkant av datainnsamlingen visste jeg ikke hva jeg kom til å finne, og så derfor ikke de samme mulighetene som jeg gjør nå i etterkant.

Utgangspunktet mitt for denne oppgaven var at grubletegninger som arbeidsmetode i naturfag ble veldig godt mottatt av de elevene jeg hadde i praksis. Dette gjordet at jeg ønsket å se om det også var mulig å bruke grubletegninger som en arbeidsmetode i matematikk. Utenfor Norge er det allerede gjort undersøkelser på denne arbeidsmetoden (Dabell, 2008; Naylor & Keogh, 2012; Sexton et al., 2009; Sexton, 2010). Naylor & Keogh (2001) mener blant annet at det er mulig å skape grubletegninger i alle fag hvor det er en mulighet for alternative oppfatninger og motstridende synspunkter.

Som nevnt i metodekapitlet kommer jeg i denne undersøkelsen ikke frem til generelle resultat eller lovmessigheter. Likevel vil jeg si at mine resultat har betydning ved at det tilfører fagfeltet ny forskning på et område i matematikken som enda ikke er kjent i Norge. Mine funn samsvarer med undersøkelser som er gjort i forhold til grubletegninger i matematikk (Dabell, 2008; Naylor & Keogh, 2012; Sexton et al., 2009; Sexton, 2010). Det betyr likevel ikke at om noen andre enn meg hadde gjort akkurat den samme undersøkelsen, ville de fått det samme resultatet som meg. Selv om jeg kom frem til at det er boblen som omhandlet det å skulle uttrykke formelen ved notasjon, som igjen fører elevene til å generalisere sine påstander, kan jeg ikke si at andre om utfører den samme undersøkelsen vil komme frem til det samme svaret.

6 Didaktiske refleksjoner

Som avslutning på denne masteroppgaven vil jeg ta for meg hvilke didaktiske implikasjoner min undersøkelse kan ha for undervisning i grunnskolen og hvordan jeg som fremtidig lærer har dratt nytte av denne forskningen.

6.1 Didaktiske implikasjoner

Som jeg tar for meg i metodekapittelet, er funnene mine basert på datamateriale fra en liten gruppe elever som ikke var tilfeldig utvalgt, og de er derfor ikke representative for en større gruppe i befolkningen. Jeg kan heller ikke trekke generelle slutninger ut fra mine funn, til å gjelde en større populasjon enn de elevene som deltok i undersøkelsen min. Likevel mener jeg at beskrivelsene mine ligger til rette for at andre skal kunne sammenligne mine funn med lignende prosjekter, og på den måten dra nytte av mine funn og tolkninger. Det vil si at andre kan benytte seg av min forskning, og se om de får noen av de samme resultatene som jeg har fått.

Jeg startet innledningsvis å henvise til formål for matematikk i Kunnskapsløftet som sier at problemløsningsoppgaver innebærer å analysere og omforme et problem til matematisk form, løser det og vurdere hvor gyldig svaret er. Dette har også språklige aspekt, som det å resonnere og kommunisere om hverandres ideer (Kunnskapsdepartementet, 2010, s. 2). Ut fra funnen mine vil jeg si at grubletegningene jeg har benyttet meg av i min undersøkelse, legger til rette for at elevene skal analysere og omforme problemet i grubletegningen. Elevene må også løse problemet, og vurdere hvor vidt svaret de kommer frem til er gyldig eller ikke. I tillegg er grubletegninger ment som gruppeoppgave i hel klasse, der elevene må resonnere og kommunisere om hverandres ideer og tanker, ikke bare innad i gruppen, men også vurdere andre gruppers hypoteser og slutninger. Dabell (2008) skriver at grubletegninger er mest effektive når de diskuteres i nivå blandet grupper. Dette resulterer i en større grad av menings utveksling og tillater forskjellige ideer å komme til overflaten, som deretter kan diskuteres. Videre skiver han at grubletegningene også er et verdifullt verktøy å bruke med elever med særskilte behov, og de som krever ekstra tillit i å vise frem sine synspunkter i matematiske sammenhenger.

Grubletegninger legger altså vekt på at elevene skal lære å uttrykke seg muntlig og argumentere for egne og andres tankegang og ideer. For at eleven skal kunne gjøre dette må de ha et språk som er tydelig, presist og formelt. Det betyr at det må snakke innenfor et matematisk register (Duval, 2002; Pimm, 1987). Duval (2006) skriver at ingen form for matematisk behandling kan utføres uten å bruke et register av representasjoner, fordi matematikk innebærer alltid å erstatte et register av representasjoner til et annet. I løpet av min undersøkelse har det blitt tydelig for meg hvor viktig skifte mellom ulike representasjoner har i matematikkundervisningen. I min undersøkelse så jeg på hvordan tre grubletegninger var med på å sette i gang elever samtale om algebraisk generalisering, noe som førte til at elevene tok i bruk forskjellige representasjoner for å komme frem til løsning på oppgaven. Elevene i min undersøkelse brukte blant annet naturlig språk, ikoniske representasjoner, uformelt skrift språk og symbolspråk for å løse oppgaven. Det er viktig å legge til rette for at elevene skal kunne bytte mellom ulike representasjoner, og dermed få en bedre forståelse av funksjonsbegrepet, ved å skape mening av de sammenhengene som de oppdager. Bruk av formler og funksjoner er sentralt i matematikk, og det er derfor viktig at man bruker tid på at elevene skal forstå funksjonsbegrepet.

6.2 Avslutning

Gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har jeg lært mye om hvordan tre grubletegninger bidrar til å sette i gange elevers arbeider med algebraisk generalisering av figurfølger, og jeg mener at funnene mine er relevant både for skolen, elevene og læreren. Selv om gruppene og elevene i undersøkelsen min ikke var tilfeldig eller et representativt utvalg for en større gruppe, viser resultatene likevel viktige spørsmål og gir nye spørsmål for videre forskning. Det hadde blant annet vært interessant å undersøke hvordan grubletegningene fungerer i hel klasse, og hvordan de kunne bidratt til å få en bedre forståelse i andre emner enn algebra. I min forskning så jeg at det var et behov for en oppsummering på slutten av økten. Ved å bruke grubletegningene i hel klasse ville elevgruppene kunne delt de erfaringene de hadde fått ved å ha en oppsummering der alle gruppene fikk si noe om hvordan de hadde løst oppgaven og hvilke metoder de hadde benyttet.

Som fremtidig lærer vil jeg benytte meg av grubletegninger som en arbeidsmetode både i matematikk og i naturfag. Ut fra erfaringene jeg har gjort meg gjennom denne undersøkelsen, tror jeg elever vil se på grubletegninger som en ny og spennende arbeidsmetode i matematikk.

Jeg tror også at de vil være med på å gjøre matematikk mer interessant, og at grubletegningene kan være med på å motivere elevene til å lære.

Litteraturliste

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-230). London: Hodder and Stoughton.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 465-472). Praha: Charles University.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg). London: Routledge.

Dabell, J. (2008). Using concept cartoons. *Mathematics Teaching, 206*, 34 – 36.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comperhension in a learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131.

Dyste, O. (2001). *Dialog, samspel og læring*. Oslo: Abstrakt forlag

English, L. D. , & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Matehematics teacher, 91*(2), 166-171.

Garnier, R., & Taylor, J. (1996). *100% Mathematical proof*. Chichester: Wiley.

Hagen, M. B. (2006). *Tetra : matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Samlaget.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol I, s. 344-351). Melbourne: The University of Melbourne.

Kunnskapsdepartementet. (2010). *Lærerplan i matematikk fellesfag*. Oslo: Utdanningsdepartementet. Hentet, fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-03.pdf?lang=nno

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit reasoning: How can we build student algebraic understanding? *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 299-317.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activites. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (red.), *Approaches to algebra* (s. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns : A case study of didactical situations in mathematics at a university college*. (38), University of Agder, Faculty of Engineering and Science, Kristiansand.

Naturfagssenteret. (2013). *Grubletegninger*. Hentet fra http://www.naturfag.no/side/vis.html?tid=1233983

Naylor, S. & Keogh, B. (2012). *Concept cartoons: What have we learnt?* Paper presented at the Fibonacci Project European Conference, Inguiry-based scienc and mathematics education: bridging the gap between education research and practice. Lenicester.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically : Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1991). Communicating mathematically. I K. Durkin & B. Shire (red.), *Language in mathematical education : Research and practice.* (s. 17-23). Milton Keynes: Open University Press.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode : En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (red.), *Approaches to algebra* (s. 107-111). Dordrecht: Kluwer.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk.

Sexton, M., Gervasoni, A. & Brandenburg, R. (2009). Using a concept cartoon to gain insight into children's calculation strategies [online]. *Australian Primary Mathematics Classroom*, Vol. 14, No. 4, 2009. 24-28.

Sexton, M. (2010). Using concept cartoons to access student beliefs about preferred approaches to mathematics learning and teaching. I L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (red.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 515-522). Freemantle: MERGA.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 32*(1), 49-92.

Steinbring, H. (2005). Do mathematical symbols serve to describe or construct "reality"? Epistemological problems in teaching mathematics in the field of elementary algebra. I F. Seeger, M. H. G. Hoffmann & J. Lenhard (red.), *Activity and sign : Grounding mathematics education* (s. 91- 104). New York: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 147-164.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (red.), *Perspectives on school algebra* (s. 141- 153). Dordrecht: Kluwer.

The Design-based Research Collective. (2003). Design-based research: an emerging paradign for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

Vedlegg

Vedlegg A

Nina Johansen
Kjøpmannsgata 16C
7013 Trondheim
Tlf.: [...]
E-post: [...]

Tromsø, 18.09.12

Til foreldre/foresatte for elever på 9. trinn ved [...] skole

Anmodning om tillatelse til video-/lydopptak av undervisning og av intervju

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Jeg skal i løpet av studieåret 2012-2013 gjennomføre et masterprosjekt i matematikk, der jeg skal se på hvordan grubletegninger kan bidra til en bedre forståelse i matematikk for elevene.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre video-/lydopptak av undervisningssekvenser/intervju med/av elever. Jeg vil i tillegg samle inn elevarbeid og be elevene føre logg etter undervisningssekvensen. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre video-/lydopptak av elever i 9.trinn ved [...] skole. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Dersom eleven ikke deltar i masterprosjektet, vil det ikke få noen innvirkning på elevens forhold til skolen eller undervisningen. Han/hun vil følge undervisningen som læreren har planlagt.

Opptakene vil kun bli sett/hørt av meg og min veileder Heidi Måsøval. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at oppgavene er gjennomførte vil innsamlede data bli slettet, senest 01.08.13.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til videoopptak/lydopptak i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen
Nina Johansen

SVARSLIPP (stryk det som ikke passer)

Vi / jeg har mottatt skriftlig informasjon og er villig til at det kan bli foretatt video-/lydopptak av undervisning i klassen der ________________________________(elevens navn) er elev.

Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

____
(Sted og dato)

____
(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til matematikklæreren i klassen så snart som mulig.