Mastergrad i matematikkdidaktikk

Masteroppgave

Eskil Ahn Braseth

Matematikk i ulike kontekster

Elevers bruk av regnestrategier i multiplikasjon

Trondheim, mai 2011

HiST TRONDHEIM

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Matematikk i ulike kontekster

Elevers bruk av regnestrategier i multiplikasjon

Mathematics in different contexts

Students' use of calculating strategies in multiplication

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Veileder: Frode Rønning

Hist/alt

Mai 2011

Av/ Eskil Braseth

Forord

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk setter punktum på et fem år langt skoleløp ved høgskolen i Sør-Trøndelag. Skolen som funksjon er utrolig viktig for samfunnet, og jeg føler meg derfor privilegert som har fått muligheten til å forske innenfor dette feltet. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært en lang og krevende prosess, men den har samtidig vært veldig lærerik. Prosessen har svingt veldig fram og tilbake mellom følelsen av å drive banebrytende forskning, til følelsen av å lete i blinde. Derfor er jeg ganske sikker på at dette ikke hadde vært mulig uten all hjelpen jeg har fått underveis. Jeg vil derfor takke de personene som har hjulpet meg i dette arbeidet.

Først og fremst vil jeg takke min kjæreste Oda Tingstad Burheim som har vist stor tålmodighet gjennom hele skriveprosessen, og ikke minst for uvurderlig hjelp, inspirasjon, støtte og oppmuntring i stunder som har føltes svartere enn oljesøl. Jeg vil også takke min veileder og professor Frode Rønning for konstruktive og grundige tilbakemeldinger, og Eirik Hovde Bye for hjelp til korrekturlesing. Jeg vil også takke medstudenter for gode innspill og fruktbare diskusjoner, og ikke minst læreren og elever ved praksisskolen som gav meg mulighet til å gjennomføre undersøkelsen min.

Til slutt vil jeg takke familien min som alltid har hatt troen på meg.

Eskil Braseth

Trondheim 24. mai. 2011

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Temaet for dette prosjektet er elevers bruk av regnestrategier i multiplikasjon i forskjellige kontekster. Å bruke matematikk i forskjellige sammenhenger og i ulike kontekster er noe Kunnskapsløftet (LK06) vektlegger i sin beskrivelse av den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne* (Udir., u. å.). De grunnleggende ferdighetene inngår i arbeidet med alle fag og må derfor sees i sammenheng med mange forskjellige kontekster, ikke bare matematikkfaget. Videre framgår det i beskrivelsen av ferdigheten *å kunne regne i matematikkfaget*: ”[å] kunne rekne i matematikk utgjer ei grunnstamme i matematikkfaget. Det handlar om problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt i praktiske, daglegdagse situasjonar og matematiske problem” (Udir., u. å.). Dette støttes av den nederlandske undervisnings- og læringsteorien *Realistic mathematics education* (RME) som også er opptatt av problemløsning og utforsking i matematikkfaget. RME er basert på Freudenthal sin idé om at matematikk, for at den skal være av menneskelig verdi, må være knyttet til en realitet, være nært for barn og bør ha en relevans til samfunnet (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Her er det imidlertid viktig at termen ”realitet” ikke nødvendigvis relateres til en praktisk virkelighet, men til intensjonen med problemet og situasjonen problemet presenteres i som elevene forestiller seg (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). For å oppfylle ferdigheten å kunne regne påpeker imidlertid Kunnskapsløftet at en må “kjenne godt til og meistre rekneoperasjonane, ha evne til å bruke varierte strategiar, gjere overslag og vurdere kor rimelege svara er” (Udir.,u. å.).

Når det gjelder regnestrategier i multiplikasjon er det forsket en del på regnestrategier for multiplikasjon med ensifrede tall (Anghileri, 1989; Cooney, Swanson, & Ladd, 1988; Hecht, 1999; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Flere har sett på elevers valg av regnestrategier i arbeid med multiplikasjonsoppgaver og kommet fram til ulike definisjoner og kategoriseringer av de forskjellige regnestrategiene. I den senere tid har Sherin og Fuson (2005) forsøkt å lage et felles klassifiseringssystem for regnestrategier i multiplikasjon med ensifrede tall, basert på egne data og tidligere forskning på feltet. De kom fram til en klassifisering på seks kategorier der hver kategori har flere underkategorier, men denne kategoriseringen sier imidlertid lite om hvordan ulike kontekster påvirker elevens bruk av regnestrategiene.

Flere har sett på læring og bruk av matematikk i forskjellig kontekster, og hvordan matematisk kunnskap kan overføres fra en kontekst til en annen, der *skolematematikk* og *hverdagsmatematikk* er eksempler på slike kontekster (Carraher & Schliemann, 2002; Evans, 1999; Masingila, Davidenko, & Prus-Wisniowska, 1996; Nunes, Schliemann, & Carraher 1993; Saxe, 1991). Nunes et al. (1993) har forsket på gatebarn i Brasil og sett hvordan de løste matematikkoppgaver med ulike kontekster. De så på hvordan elevene løste oppgaver der de jobbet som gateselgere, og hvordan elevene løste oppgaver der oppgavens kontekst var endret til en typisk skoleoppgave, der de i tillegg skulle benytte seg av papir og blyant i utrekningen. Resultatet viste blant annet at elevene løste oppgavene der de var gateselgere nesten feilfritt, men hadde store vanskeligheter med å løse oppgavene når konteksten var endret til en typisk skoleoppgave. Videre viste undersøkelsen at elevene benyttet seg av forskjellige typer regnestrategier i de to kontekstene (Nunes et al., 1993). Er det slik at strategiene elevene lærer i skolen ikke samsvarer med de strategiene de benytter seg av i dagliglivet eller i andre situasjoner?

Kunnskapsløftet sin beskrivelse av den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne i matematikkfaget* handler, som tidligere nevnt, om problemløsing og utforsking som tar utgangspunkt i praktiske, dagligdagse situasjoner og matematiske problemer (Udir., u. å.). Dette kan innebære å ha matematikkundervisning i andre kontekster enn i klasserommet og å ta i bruk hverdagslige kontekster i oppgavene. Evans (1999) mener at matematikk i andre sammenhenger enn den tradisjonelle skolekonteksten kan være med på å bygge bro mellom skolematematikken og hverdagsmatematikken. Evans sier at overføring av kunnskap generelt sett er å bruke ideer og kunnskap lært i én situasjon i en annen. Det kan skje i forskjellige former og Evans trekker fram bruken av et skolefag, som for eksempel matematikk, utenfor sitt felt og å gjøre seg nytte av aktiviteter som skjer utenfor skolen i læringen av skolefagene. Dette støttes også av Kunnskapsløftet sin beskrivelse av det arbeidende mennesket der det står at opplæringen må knyttes til elevenes egne opplevelser, og at undervisningen må legges opp slik at elevene blant annet får praktiske erfaringer (Udir., 2010). Evans understreker imidlertid at det er viktig at situasjonene som blir tatt i bruk har områder hvor hverdagssituasjoner overlapper og stemmer overens med skolematematikken.

Gjennom min egen utdanning har det blitt mer og mer interessant å reflektere rundt spørsmålet om den matematikken elevene lærer i skolen er til nytte for dem i hverdagen. I allmennlærerutdanningen ved HiST har jeg hatt praksisperioder på forskjellige trinn. Her har jeg i flere tilfeller observert situasjoner hvor elever har regnet matematikkoppgaver med én type strategi i en matematikktime, men ikke greid å regne lignende oppgaver eller brukt en helt ny strategi i en annen kontekst. Dette har jeg observert spesielt i forhold til oppgaver eller problemer relatert til multiplikasjon. For meg har det i flere tilfeller sett ut som om strategiene elevene har lært i matematikktimene blir mer eller mindre neglisjert i arbeid med lignende problemer i hverdagskontekster. Jeg vil derfor se på hvordan elever arbeider med regnestrategier i multiplikasjon også i andre situasjoner enn i en matematikktime. Dette for å se om det er noen sammenheng mellom strategiene elevene tar i bruk i forskjellige kontekster. For meg som fremtidig lærer er det interessant å vite noe om dette fordi jeg er opptatt av at det elevene lærer i skolen også skal komme til nytte for dem i deres hverdagsliv.

1.2 Problemstilling

Jeg vil altså i dette prosjektet studere elevers løsningsstrategier når de blir stilt overfor oppgaver som legger til rette for multiplikasjon i to ulike kontekster. De to kontekstene jeg vil se på er ei kroppsøvingsøkt og ei matematikkøkt. Hovedmålet med studien er å belyse elevenes løsningsstrategier i de to kontekstene, og å se på hva som karakteriserer disse strategiene. For å belyse dette har jeg utformet følgende problemstilling med to delspørsmål:

Hva karakteriserer elevenes regnestrategier i multiplikasjon med flersifrede tall i en matematikkfaglig kontekst og i en kroppsøvingskontekst?

- *Hvilke strategier benytter elever på femte trinn seg av i arbeid med multiplikasjonsoppgaver der flersifrede tall inngår?*
- *Hvilke sammenhenger kan sees mellom konteksten og elevenes valg av strategier?*

1.3 Teori

Jeg har valgt et sosiokulturelt perspektiv på læring i denne studien. Dette fordi jeg baserer analysene mine på elevenes interaksjon med hverandre, noe som står sterkt i sosiokulturell teori. Dysthe skriver at sosiokulturelle perspektiv på læring legger "avgjerande vekt på at *kunnskap blir konstruert gjennom samhandling og i ein kontekst*" (2001, s. 42, utheving i original). Av de ulike aspektene ved sosiokulturell teori ser jeg spesielt på begrepene *situert læring* og *mediering* i forhold til språket og noteringsredskaper som medierende verktøy for elevene i deres arbeid med multiplikasjonsoppgaver.

Videre i teorikapittelet går jeg inn på undervisning i matematikk der jeg gjennom Nunes, Schliemann og Carraher (1993) ser på hverdagsmatematikk og skolematematikk. I tillegg vil jeg se på overføring av kunnskap mellom kontekster, der jeg støtter meg til Evans (1999), før jeg gjennom van den Heuvel–Panhuizen (2003) og Freudenthal (1968, 1971) ser på undervisningsmodellen *Realistic mathematics education* (RME). Jeg vil også se på hvordan Skovsmose (1998) sine læringsmiljø kan sees i sammenheng med mine oppgaver og elevenes arbeid med oppgavene.

Fordi multiplikasjon er det matematiske elementet i denne studien er det naturlig at jeg ser på multiplikasjon som fenomen. Her har jeg blant annet har støttet meg til Greer (1996), Nunes og Bryant (1996) og ulike læreverk. Til slutt har jeg sett på ulike regnestrategier for multiplikasjon og intuitive modeller. Elevene jeg har observert benytter seg av ulike regnestrategier som jeg har kategorisert med utgangspunkt i blant annet Sherin og Fuson (2005) sine kategorier, og Thompson (1999) sin beskrivelse av skrevne algoritmer. I beskrivelsen av intuitive modeller har jeg støttet meg til Fischbein, Deri, Nello og Marino (1985) og Mulligan og Mitchelmore (1997).

1.4 Metode

Jeg har gjennom dette prosjektet fulgt en gruppe med tre elever på 5. trinn i to dobbelttimer, og sett på hvilke strategier de bruker for å løse multiplikasjonsoppgaver i ei matematikkøkt og i ei kroppsøvingsøkt. I matematikkøkta fikk elevene fem oppgaver med til sammen åtte delspørsmål, og i kroppsøvingsøkta fikk de seks oppgaver med til sammen 24 delspørsmål fordelt på to aktiviteter. Empirien, som omfatter hele datamaterialet i prosjektet og som er grunnlaget for analysen, er i hovedsak samlet inn ved hjelp av filmkamera. I tillegg vil jeg støtte meg til feltnotater. En slik undersøkelse hvor man går i dybden på elevers samtaler og interaksjon med hverandre hører inn under kvalitativ metode. Min tilgang til den enkelte elevs meninger, tanker og synspunkter skjer gjennom observasjoner av samarbeidssituasjonen de deltar i, og jeg vil derfor betrakte gruppen som en case. Jeg vil komme nærmere inn på de metodiske valgene jeg har tatt og drøfte disse i metodekapittelet.

1.5 Disposisjon av oppgaven

Denne oppgaven er delt inn i seks hoveddeler: *teori*, *metode*, *elevenes besvarelser*, *sammenligning og diskusjon*, og *avslutning* med *oppsummering og perspektivering*.

Teorikapittelet er delt inn i hoveddelene *aspekter ved sosiokulturell teori*, *undervisning av matematikk* og *multiplikasjon*. I den første delen, aspekter ved sosiokulturell teori, vil jeg presentere det sosiokulturelle læringssynet, der jeg spesielt går inn på begrepene *situert læring* og *mediering*. I den andre delen, undervisning av matematikk, tar jeg for meg matematikk i ulike kontekster og hva tidligere forskning har funnet på området. I tillegg ser jeg på noen læringsmodeller. Den siste delen omhandler multiplikasjon. Ettersom multiplikasjon er det matematiske temaet i min masteroppgave er det naturlig at jeg ser på multiplikasjon som fenomen og forskjellige typer regnestrategier innenfor multiplikasjon. Dette er teorien jeg støtter meg til i analysen min.

I metodekapittelet gir jeg leseren en presentasjon av mitt valg av forskningsmetode, som er kvalitativ. Videre går jeg inn på casestudie som kvalitativ tilnærming, en tilnærming jeg har benyttet i min studie. Deretter beskriver jeg min empiri, kontekstene jeg har gjennomført forskningen min i, og analysemetoden. Til slutt har jeg en del om hvilke problemer som har oppstått underveis i arbeidet med denne studien i en egen kritikk av metode.

Analysen er delt inn i de to hoveddeler: *elevenes besvarelser*, og *sammenligning og diskusjon*. I den første delen, elevenes besvarelser, ser jeg på matematikkøkta og kroppsøvingsøkta hver for seg. Her vil jeg se på løsningsstrategiene elevene benytter seg av i de to øktene. I andre del av analysen, sammenligning og diskusjon, vil jeg gjøre en sammenligning av strategiene elevene diskuterer i matematikkøkta og kroppsøvingsøkta og deretter se på hvilke faktorer som spiller inn for deres valg av strategi.

Til slutt i oppgaven vil jeg oppsummere hva jeg har funnet ut i denne studien der jeg kun vil ta for meg det viktigste. I tillegg vil jeg se på hvordan mine resultater kan sees i sammenheng med læreryrket gjennom en perspektivering. Her vil jeg drøfte påvirkningen denne studien vil ha for min framtidige praksis som lærer. Til slutt vil jeg se på hvilke nye spørsmål denne studien har generert, hva jeg fortsatt lurer på og hva som vil være interessant å se på i fremtidig forskning.

2.0 Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere teorien jeg støtter meg til i analysen av datamaterialet opp mot forskningsspørsmålet mitt.

2.1 Aspekter ved sosiokulturell teori

I det følgende vil jeg presentere hvilket læringsperspektiv jeg som forsker har valgt for denne studien. Ettersom jeg ser på kommunikasjon og samhandlingen mellom elever i en gruppe har jeg valgt et sosiokulturelt læringsperspektiv. Her vil jeg spesielt se på begrepene *situert læring* og *medierende verktøy.* Disse begrepene er relevante for min forskning fordi kommunikasjon og situasjonen elevene befinner seg i er sentrale aspekter for å finne svar på min problemstilling.

2.1.1 Sosiokulturell teori

Læring i et sosiokulturelt perspektiv er i følge Säljö (2001, s. 13) et resultat av menneskelig virksomhet, og i følge Dysthe (2001) legger sosiokulturelle perspektiv ”avgjerande vekt på at *kunnskap blir konstruert gjennom samhandling og i ein kontekst*” (s. 42, utheving i original). Interaksjon og samarbeid mellom mennesker blir dermed sett på som helt grunnleggende for læring, der deltakelse i sosiale praksiser hvor læring skjer er sentralt i det å lære. På bakgrunn av dette kan man si at læring handler om det vi som enkeltmenneske eller kollektivt tar med oss fra sosiale situasjoner og bruker i fremtiden (Säljö, 2001, s.13). Erfaringer fra en situasjon blir overført til fremtidige situasjoner, som igjen er med på en stadig utvikling og forandring av mennesket. Denne utviklingen og tilegnelsen av kunnskap skjer gjennom interaksjon med andre mennesker og er lagret i den kulturen vi lever i. Kunnskaper og ferdigheter er derfor utviklet, og utvikles, i takt med historiens løp gjennom samfunnet vi lever i. Læring, gjennom et sosiokulturelt perspektiv, handler derfor om å tilegne seg ressurser for å tenke og handle (Säljö, 2001), hvor kommunikasjon og interaksjon mellom mennesker har en avgjørende betydning for å tilegne seg disse ressursene. ”Det er gjennom kommunikasjon at sosiokulturelle ressurser blir skapt, men det er også gjennom kommunikasjon de blir ført videre” (Säljö, 2001, s. 22).

Situert læring og *mediering* er sentrale aspekt innenfor et sosiokulturelt læringsperspektiv. Disse begrepene vil jeg se nærmere på i det følgende.

2.1.2 Situert læring

Kommunikasjon og interaksjon har en avgjørende betydning i sosiokulturelle perspektiv på kunnskap og læring, men konteksten har også stor betydning. Säljö (2001) mener at menneskelige handlinger er situert i sosiale praksiser, og at handlinger og praksis konstruerer hverandre. I tillegg til kunnskaper og erfaringer er bevisste eller ubevisste oppfattelser av situasjoner med på å bestemme hvordan vi handler. Å kalle noen ”klovn” vil i de fleste situasjoner føles krenkende, mens på et sirkus vil det være helt naturlig. På samme måte vil fysiske handlinger være situasjonsavhengige. Å slå noen med knyttneven gir vanligvis fengselsstraff, mens det i en boksekonkurranse er den som slår best som blir hyllet (Säljö, 2001, s.133). Hvordan mennesker tenker og bruker erfaring og kunnskap i forhold til omgivelsene er altså avhengig av situasjonen eller virksomhetssystemet man befinner seg i. Säljö beskriver et virksomhetssystem som en historisk utviklet aktivitet av et eller annet slag, eksempelvis skole, forsvar, helsevesen og så videre (s.141). ”Tenking, kommunikasjon og fysiske handlinger er situert i kontekster, og å forstå koblingen mellom sammenhenger og individuelle handlinger er derfor noe av kjernepunktet i et sosiokulturelt perspektiv” (Säljö, 2001, s. 133). Med andre ord kan en si at situert læring er en dynamisk prosess som forutsetter samspill med et virksomhetssystem og forandring av hvert enkelt menneske i virksomhetssystemet.

Å avgjøre hvilken informasjon, hvilke ferdigheter og hvilken forståelse som er relevant i forskjellige situasjoner og sammenhenger kan sees i sammenheng med læring. For selv om læring i stor grad er et spørsmål om å tilegne seg informasjon, ferdigheter og forståelse har dette liten eller ingen nytteverdi hvis det ikke kan anvendes. Säljö sier at et av kjernespørsmålene for å forstå læring og utvikling er hvordan mennesker tar til seg tenkemåter, ferdigheter og evner, og bruker disse i nye sammenhenger (2001, s.145). Overføring av kunnskap mellom situasjoner og problemer blir omtalt som *transfer,* og Säljö mener denne overføringen er blitt tatt for gitt av allmennheten. ”Oversettelsen fra ett miljø til et annet er ofte ganske komplisert, fordi de virksomhetssystemene som handlinger foregår i, arbeider ut fra ulike forutsetninger og ulike logikker” (Säljö, 2001, s.145). Forskere som blant annet Nunes et al. (1993) har sett på hvordan barn i Brasil løser matematikkproblemer i ulike kontekster. Resultatene viste at barna hadde problemer med å løse oppgavene de fikk med skolekontekst, som skulle løses med papir og blyant, men løste alle oppgavene de fikk i konteksten som gateselgere nesten feilfritt. Carraher og Schliemann (2002) viser i sin studie til Brenner og Moschkovich som vektlegger at måten lærere presenterer oppgavene på, mer enn det realistiske aspektet i oppgaven, spiller en viktig rolle i elevenes tilnærming til problemløsning. De mener dette fører til en aritmetisk tilnærming, mens det realistiske ofte blir nedprioritert. Anderson, Reder og Simon (1996) peker også på forskjellene mellom skolekontekster og hverdagskontekster.

> Particularly important has been situated learning's emphasis on the mismatch between typical school situations and 'realworld' situations such as the workplace, where one needs to deploy mathematical knowledge. Greater emphasis should be given to the relationship between what is learned in the classroom and what is needed outside of the classroom, and this has been a valuable contribution of the situated learning movement.
> (Anderson et al., 1996, s. 5)

Dette underbygger tesen i et sosiokulturelt perspektiv om kognisjon, læring og utvikling som sier ”[d] et finnes ingen nøytral kontekst. Alle handlinger – og all kommunikasjon – er situert og må forstås relative til det virksomhetssystemet det inngår i” (Säljö, 2001, s.147).

Til tross for Nunes et al. (1993) sine resultater kan det være vanskelig å forestille seg at man ikke kan se at 10 gange 5 er 50 uansett hvilken situasjon man er i. Säljö (2001) sier ikke spesifikt at kunnskap kan overføres mellom kontekster, men han sier heller ikke noe om at det ikke kan forekomme. Han påpeker derimot at en del av problematikken som ligger i å analysere og forstå relasjoner mellom kunnskaper og situasjoner er at den som uttaler seg er subjektiv, fordi han vanligvis mener å vite hva som er den riktige tolkningen. Säljö mener at det er en ervervet evne å se at multiplikasjon med 10 vil være det samme som å legge til en null på slutten. Dette er et resultat av en sosiokulturell utviklingsprosess, her i forhold til kjennskap til titallssystemet. ”Det dreier seg om kunnskaper som er blitt så forankret i oss at de synes helt 'naturlige' og 'selvfølgelige' ” (Säljö, 2001, s.148). Dette støttes av Anderson et al. (1996) som i sin artikkel gir en oversikt over tidligere forskning på situert læring. De skriver at graden av overføring av kunnskap mellom oppgaver avhenger av situasjonen kunnskapen ble lært i, representasjonene som ble brukt og hvor mange ganger situasjonen er presentert. Det er altså flere faktorer som avgjør om kunnskapen fra en situasjon overføres til andre situasjoner, og i hvor stor grad den overføres.

Säljö (2001) mener også at motivasjon er en faktor som påvirker handling. Motivasjonen vil som regel variere, avhengig om man for eksempel kan vinne mye penger eller om det er snakk om å svare på en oppgave som synes ubetydelig.

2.1.3 Mediering og språket som medierende redskap

Mediering eller formidling er et av de nye begrepene Vygotsky har brakt inn i pedagogisk tenkning. Mediering blir brukt om alle typer støtte eller hjelp i læringsprosessen, enten det omhandler personer eller redskap (Dysthe, 2001). Dysthe omtaler ”reiskapar” eller ”verktøy” i et sosiokulturelt læringsperspektiv som ”dei intellektuelle og praktiske ressursane som vi har tilgang til, og som vi brukar for å forstå omverda og for å handle med” (s. 46). Våre muligheter til å forstå den verden vi lever i blir derfor påvirket av menneskeskapte gjenstander og artefakter. Dette er redskaper som er integrert i menneskenes praksis, som for eksempel notatboka og blyanten. Redskapene inneholder innsikt og erfaringer fra tidligere generasjoner som vi gjennom interaksjon og samspill drar nytte av. At vi ikke behandler artefaktene som døde objekter er derfor et viktig aspekt i å utvikle dem videre (Säljö, 2001, s. 84).

Medierende redskaper utgjør integrerte deler av våre sosiale praksiser, og vi kan derfor ikke se på artefaktene og menneskets tenking hver for seg hvis vi skal forstå læring som en del av sosiale praksiser. ”Når vi tar bort redskapene og den sosiale praksisen og studerer tenking eller læring i ‘seg selv’, har vi mistet vårt fenomen og hengir oss til studier av temmelig hjelpeløse individer som er berøvet sine sosiokulturelle ressurser” (Säljö, 2001, s. 83). Mediering står derfor veldig sentralt i sosiokulturelle perspektiver. Den har gjort at vår tenking og forestillingsverden gjennom generasjoner har vokst fram av kulturen og dens intellektuelle og fysiske redskaper, der ressursene i språket er menneskets aller viktigste medierende redskap (Säljö, 2001).

Språket som medierende redskap er viktig for at vi gjennom samhandling med andre skal kunne samle erfaringer og kommunisere disse til hverandre. ”Ord og språklige utsagn medierer omverdenen for oss og gjør at den framstår som meningsfull” (Säljö, 2001, s. 84).

Det gjør at vi kan beskrive verden rundt oss og dermed delta i et samspill med andre mennesker i ulike aktiviteter. Säljö mener at det som gjør språket til et kraftig medierende redskap er den fleksible og utviklingsmessige relasjonen som finnes mellom språklige uttrykk og de fenomenene disse uttrykkene refererer til (s. 87). Videre har ordene vi bruker ofte flere betydninger og signaliserer et bredere innhold enn akkurat det vi refererer det til.

> Språket er *samtidig* et kollektivt, et interaktivt og et individuelt sosiokulturelt redskap. Det er derfor det kan fungere som et bindeledd mellom kultur, interaksjon og individets tenkning. Et grunnleggende spørsmål blir da hvordan individer tilegner seg innhold og betydninger, og hvordan samspillet mellom hva ord betyr for et enkelt individ og hva de betyr i kollektivet. (Säljö, 2001, s. 89, utheving i original)

Med andre ord er språket avgjørende for å kunne dele for eksempel følelser og opplevelser med andre, fordi vi ikke kan dele dem i deres fullstendige forstand. For at følelsene og opplevelsene skal bli tilgjengelig for andre må det en eller annen form for mediering, eller *re-presentasjon* til (Säljö, 2001, s. 89).

En sosiokulturell oppfatning er at relasjonen mellom betegnelsen og det som blir betegnet, antas å være av symbolsk eller symbiotisk karakter (Säljö, 2001, s. 87). Med det mener Säljö at det ligger mye kunnskap i den fleksible relasjonen mellom et uttrykk, eller et utsagn, og det som uttrykket refererer til.

2.2 Undervisning av matematikk

Flere har sett på hvordan elever arbeider med matematikkaktiviteter i forskjellige kontekster, der *skolematematikk* og *hverdagsmatematikk* er eksempler på slike kontekster (Carraher & Schliemann, 2002; Evans, 1999; Masingila et al., 1996; Nunes et al., 1993; Saxe, 1991). I det følgende vil jeg se på begrepene hverdagsmatematikk og skolematematikk, hvordan kunnskap kan overføres mellom kontekster, og RME som undervisningsmetode. Til slutt vil jeg også presentere Skvosmose (1989) sine seks læringsmiljø.

2.2.1 Skolematematikk og hverdagsmatematikk

Matematikk i hverdagslige situasjoner og i skolesammenheng blir definert på forskjellige måter. Matematiske aktiviteter lært utenfor skolesammenheng kaller Nunes et al. (1993)

gatematematikk, mens matematiske aktiviteter som er lært i skolesammenheng omtaler de som *skolematematikk*. Carraher og Schliemann (2002) bruker begrepet *hverdagsmatematikk* om matematikk som skjer i dagliglivet og begrepet *skolematematikk* om matematikk som er relatert til en skolesituasjon, mens Masingila et al. (1996) benytter begrepene *matematikk i-og-utenfor skolen* i den samme betydningen. Min studie skjer kun innenfor en skolekontekst. Begrepets betydning av matematikk i dagliglivet vil derfor ikke være av nevneverdig betydning for min del. Derimot vil matematikk i forskjellige kontekster være av betydning. For selv om aktivitetene i matematikktimen og kroppsøvingstimen skjer i en skolekontekst er de likevel å betrakte som to forskjellige kontekster, fordi de er rammet in av hvert sitt skolefag.

I denne oppgaven vil matematikkaktiviteter i skolen bli omtalt som *skolematematikk* og matematikk med en hverdagslig kontekst bli omtalt som *hverdagsmatematikk*. Det betyr imidlertid ikke at hverdagsmatematikken må skje i en hverdagskontekst utenfor skolen. Begrepet hverdagsmatematikk vil omhandle matematikk som skjer i andre kontekster enn i matematikkfaget i skolen. Det betyr derfor at hverdagsmatematikk kan opptre innenfor en skolekontekst, som for eksempel kroppsøving.

Nunes et al. (1993) forsket i sin studie på hvordan gatebarn i Brasil løste matematikkoppgaver i en skolekontekst og i en hverdagskontekst, der de blant annet så på forskjellene i bruk av aritmetiske prosedyrer i de to kontekstene. Hverdagskonteksten var knyttet til en arbeidssituasjon der elevene jobbet som gateselgere, mens skolekonteksten var knyttet til oppgaver der elevene skulle bruke papir og blyant og beregningsprosedyrer som var typiske for praksisen i skolen. Elevene gjennomførte to tester som inneholdt flere oppgaver med begge typer kontekst. En formell test som inneholdt oppgaver med skolekontekst, og en ikke-formell test som inneholdt oppgaver med hverdagskontekst. Oppgavene i den formelle testen inneholdt både tekstoppgaver og aritmetiske oppgaver. Oppgavene i den formelle testen bygget på de samme matematiske situasjonene som oppgavene i den ikke-formelle testen. Resultatet viste at elevene løste oppgavene som ble presentert i den ikke-formelle testen bedre enn oppgavene som ble presentert i den formelle testen. Generelt viste resultatet at oppgavene i den ikke-formelle testen hadde en riktighetsprosent på 98,2 %, og oppgavene i den formelle testen hadde en riktighetsprosent på 73,7 % for tekstoppgavene og 36,8 % for de aritmetiske oppgavene (Nunes et al., 1993).

Elevene i undersøkelsen viste forskjellige måter å løse oppgavene på i forhold til oppgavenes kontekst. Elevene løste oppgavene i den ikke-formelle testen i hodet, der de behandlet tallene som hele mengder. Det innebærer å behandle tallene i mengder i forhold til verdi, som er det motsatte av å behandle tallene som uavhengige sifre. Den foretrukne strategien så ut til å være gjentatt additiv beregning. For eksempel:

> Informal test:
> Customer: I'm going to take four coconuts. How much is that?
> Child: There will be one hundred five, plus thirty, that's one thirty-five…one coconut is thirty-five…that is…one forty!
> (Nunes et al., 1993, s. 24)

I den formelle testen, der elevene brukte papir og blyant, ble oppgavene forsøkt løst med skolelærte prosedyrer uten hell. Feilene oppstod som et resultat av at elevene blandet prosedyren for addisjon med prosedyren for multiplikasjon. For eksempel:

> Formal test:
> Child solves the item 35 · 4, explaining out loud: 'Four times five is twenty, carry the two; two plus three is five, times four is twenty.' Answer written: 200.
> (Nunes et al., 1993, s. 24)

Nunes et al. (1993) mener at disse resultatene viser at hverdagslig problemløsning kan bli utført med rutiner som skiller seg fra de som blir lært i skolen. På grunnlag av dette mener de at resultatene stiller spørsmål ved den pedagogiske praksisen med å lære elever å løse aritmetiske oppgaver før de skal bruke operasjonen i et problem med kontekst.

2.2.2 Overføring av kunnskap mellom kontekster

Jeff Evans (1999) har sett på hvorfor kunnskap er så vanskelig å overføre mellom kontekster, og hvordan broer kan bygges mellom praksiser for å gjøre overføring av kunnskap mulig. Generelt mener Evans at overføring av kunnskap refererer til bruken av ideer og kunnskap lært i en kontekst i en annen. "The *transfer* of learning refers in general to the use of ideas and knowledge learned in one context in another" (Evans, 1999, s. 23, utheving i original). Dette mener Evans kan skje i flere former:

(i) Bruken av et skolefag, som for eksempel matematikk, utenfor sitt felt (fysikk og økonomi).

(ii) Anvendelse av kunnskap fra pedagogiske kontekster i arbeidssituasjoner eller hverdagssituasjoner.

(iii) Gjøre seg nytte av aktiviteter som skjer utenfor skolen i læringen av skolefagene.

Når en skal bygge "bro" mellom to praksiser mener Evans (1999) at man må prøve å identifisere områder hvor hverdagssituasjoner overlapper og stemmer overens med skolematematikken. Hver praksis har forskjellige diskurser. For eksempel kan motsatsen til ordet ”mer” i dagliglivet være ”ikke mer”, mens i skolematematikken kan "mer" bli brukt i sammenheng med mengdelære, der motsatsen til "mer" blir "mindre". Noen begreper er altså forskjellige fra diskurs til diskurs, og derfor må de relasjonene som kan være villedende tydeliggjøres.

2.2.3 RME

Realistic mathematics education, heretter omtalt som RME, er en undervisnings – og læringsteori i matematikkutdannelsen som har blitt utviklet i Nederland. RME er basert på Freudenthal sin idé om at matematikk, for at den skal være av menneskelig verdi, må være knyttet til en realitet, være nært for barn og bør ha en relevans til samfunnet (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Elevene lærer matematikk gjennom å utvikle og søke matematiske begreper og verktøy i dagligdagse situasjoner som gir mening for dem. Dette betyr imidlertid ikke at oppgavenes kobling til virkeligheten er viktig. Van den Heuvel–Panhuizen sier at termen ”realistisk” refererer til intensjonen med problemet og situasjonen problemet er i som elevene forestiller seg. Både fantasiverdener og eventyr kan være passende kontekster for et problem så lenge det føles ekte for elevene.

I RME er elevene sett på som aktive deltagere i undervisnings- og læringsprosessen som er en del av den sosiale konteksten i klasserommet (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Elever bør derfor bli tilbudt et læringsmiljø hvor de kan konstruere matematisk kunnskap og ha muligheter til å nå høyere nivåer av forståelse (Freudenthal, 1991).

Et av hovedbegrepene innen RME er Freudenthal sin idé om at matematikk er en menneskelig aktivitet: "It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter" (Freudenthal, 1971, s. 413-414). For Freudenthal var ikke selve matematikken hoveddelen for matematisk kunnskap, men aktiviteten med å løse problemer og å se etter problemer, eller mer generelt aktiviteten med å organisere verden. I motsetning til tradisjonelle matematikkoppgaver der selve utregningen er i fokus, mener altså Freudenthal at hoveddelen av matematisk kunnskap er aktiviteten med å komme seg til utregningen gjennom å innrette praksiser i forhold til realiteter. Denne aktiviteten kaller Freudenthal *matematisering*. Han hevder at det ikke er matematikk uten matematisering og at det dermed ikke skapes noe matematisk kunnskap. "There is no mathematics without mathematization" (Freudenthal, 1973, s. 134). Videre vil matematiseringen føre til representasjoner av problemsituasjoner som i RME blir sett på som modeller, der disse nødvendigvis vil reflektere essensielle aspekter av matematiske begreper og strukturer som er relevante for problemsituasjonene (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Et eksempel på en slik modell kan være gjentatt addisjon.

2.2.4 Undersøkelseslandskap og oppgaveparadigmet

Et undersøkelseslandskap er av Skovsmose (1998) beskrevet som en måte å arbeide med matematikk på, der elevene gjennom undring utforsker matematikken. Læreren introduserer en åpen problemstilling, og elevene lager seg egne undringer og får lyst til å gjøre undersøkelser for å finne svar på sine spørsmål. På den måten er det elevene som stiller spørsmålene som, hva om? Enn hvis?, i stedet for læreren. "Det er elevenes 'Hvad nu hvis…?', der bliver retningsgivende for forløbet af udforskningen. Et undersøkelseslandskab udgør således en invitation til eleverne til at gennemføre en udforskning" (Skovsmose, 1998, s. 28). Med en slik utforsking er det i følge Skovsmose underforstått at det legges til rette for et felles samarbeid om å komme fram til en løsning, der diskusjon og interaksjon er viktig.

Å arbeide innefor oppgaveparadigmet er i følge Skovsmose (1998) ganske annerledes enn å utforske et undersøkelseslandskap. I oppgaveparadigmet former matematikktimen seg ofte slik at læreren innleder timen med å gjennomgå nytt stoff, deretter gjennomgår han utvalgte oppgaver, før elevene til slutt blir satt til å regne oppgaver, enten individuelt eller i grupper. Målet for matematikkundervisningen blir å forklare elevene noen matematiske forhold slik at bestemte oppgaver kan løses korrekt. Likevel mener Skovsmose at man kan befinne seg innenfor oppgaveparadigmet uten å befinne seg i fasitparadigmet hvor oppgaver har kun én riktig løsning. Oppgavene innefor oppgaveparadigmet kan ha en åpen karakter, og trenger ikke nødvendigvis å forutsette en entydig løsning.

Videre mener Skovsmose at man innenfor arbeid med et undersøkelseslandskap og oppgaveparadigmet kan skille mellom tre ulike oppgavetyper; ”ren” matematikk, ”konstruert” virkelighet, og problemstillinger som er bundet til ”realitetens verden” (1998, s. 29). Disse gir opphav til seks forskjellige typer *læringsmiljøer* som vist i figur 1.

	Oppgaveparadigmet	Undersøkelseslandskap
Referencer til ”ren” matematikk	(1)	(2)
Semi-referencer til ”virkeligheden”	(3)	(4)
Reelle referencer	(5)	(6)

Figur 1: Skovsmose (1998, s. 29) sin matrise av seks ulike læringsmiljøer.

Type (1) befinner seg innenfor ”ren” matematikk og oppgaveparadigmet, og går ut på at eleven får presentert og regner oppgaver av typen: 34 + 350 =, 43 · 29, (4a + 35b) · 2a, osv. Type (2) befinner seg innenfor ”ren” matematikk og undersøkelseslandskap, der tall, mønster og struktur utforskes. For eksempel generalisering av tallfølger. Type (3) befinner seg innenfor oppgaveparadigmet, der oppgavene refererer til ”virkeligheten”, for eksempel en butikksituasjon. Oppgavene refererer bare delvis til virkeligheten fordi butikksituasjonen bare er oppdiktet, derfor *er* det ikke en butikksituasjonen. Opplysninger som pris trenger heller ikke å være riktige, selv om konteksten er tatt fra virkeligheten. Type (4) befinner seg innenfor samme semi-referanse til virkeligheten som type (3), men matematikken er nå strukturert i et undersøkelseslandskap. Et eksempel kan være ”taxigeometri” (s. 30) der elevene for eksempel kan utforske raskeste strekning mellom to punkter. Type (5) befinner seg innenfor oppgaveparadigmet med reelle referanser til virkeligheten. I motsetning til type (3) stemmer opplysningene i forhold til virkeligheten så vel som konteksten, og elevene blir utfordret på flere spørsmål som relateres til konteksten. Men selv om referansene er reelle er situasjonene strukturert som oppgaver. Type (6) befinner seg innenfor undersøkelseslandskap med reelle referanser til virkeligheten, der resultatet betyr noe for elevene. Prosjektarbeid er typiske eksempler, men også aktiviteter elever er med på som skaper matematisk undring kan være eksempler på slike (Skovsmose, 1998, ss. 29-32).

Skovsmose (1998) mener det beste grunnlaget for matematikklæring oppnås ved å bevege seg mellom læringsmiljøene på en måte som læreren og elevene gjør sammen. Han mener også at det er avgjørende å utfordre oppgaveparadigmet, men ikke alltid i retning av type (6) som prosjektpedagogikken ofte anbefaler. Skovsmose mener oppgaveparadigmet kan utfordres gjennom å bevege seg fra (1) til (2) og fra (3) til (4).

2.3 Multiplikasjon

Det matematiske temaet for denne studien er multiplikasjon. I det følgende vil jeg derfor se på multiplikasjon som fenomen. I tillegg vil jeg se på ulike regnestrategier innenfor multiplikasjon, og intuitive modeller.

Multiplikasjon er, sammen med addisjon, subtraksjon og divisjon, en av de fire grunnleggende regneartene eller regneoperasjonene i aritmetikken. I norsk dagligtale blir ofte multiplikasjon erstattet med ordet *ganging,* på samme måte som addisjon blir erstattet med *legge sammen.* Framstilt med enkel algebra er multiplikasjon prosessen for å beregne resultatet av *faktorene* a addert b antall ganger, $a \cdot b$, hvis b er et heltall. Resultatet av faktorene a og b multiplisert kalles et *produkt* (Weisstein, 2011). Faktorene a og b kan også kalles henholdsvis *multiplikand* og *multiplikator,* eller *operand* og *operator*. Multiplikasjon blir ofte introdusert i skolen som gjentatt addisjon (se blant annet Bakke & Bakke, 2006a; Pedersen, Johansson, & Andersson, 2010), og oppfattes derfor av mange kun som gjentatt addisjon.

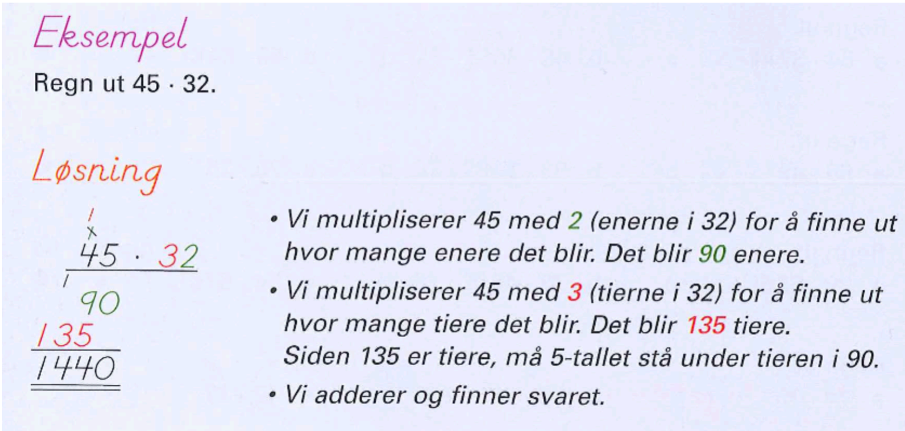
Nunes og Bryant (1996) mener det er galt å behandle multiplikasjon som en avansert form for addisjon fordi det å forstå multiplikasjon dreier seg om mer enn å beregne summer. Additiv resonnering handler om situasjoner der objekter eller mengder av objekter er lagt sammen eller delt opp. Nunes og Bryant mener at alt av tall i additive situasjoner er direkte relatert til mengdestørrelser og til handlinger der objekter og mengder legges sammen eller deles opp. Situasjoner som skaper multiplikativ resonnering er forskjellig fra additiv resonnering fordi de ikke involverer handlingene legge sammen eller dele opp. For eksempel peker Nunes og Bryant på situasjoner med innbyrdes forhold mellom mengder fra en til mange, som i et dagligdags eksempel kan relateres til en bil med fire hjul. Selv om både antall biler og hjul kan knyttes til mengder mener Nunes og Bryant (1996) at det er signifikante forskjeller mellom additiv og multiplikativ resonnering. For det første er det et konstant forhold mellom to mengder i situasjonen som er uforanderlig, noe som ikke er tilfelle i additiv resonnering. Forholdet mellom antall biler og hjul vil alltid være konstant, samme hvor mange biler som blir tilført. For det andre kreves det en *reprodusering* når en enhet legges til hvis et konstant forhold mellom to mengder skal opprettholdes. Med andre ord vil det bety at hvis mengden biler øker med én må mengden hjul økes med fire. Dette uansett om antall biler eller hjul endres. Nunes og Bryant mener derfor at reprodusere er noe annet enn å legge til, der alle mengder uansett størrelse kan adderes til mengden. Av forhold kommer også det Nunes og Bryant omtaler som *skalar faktor*. Hvis man ser for seg at man har 1 bil med 4 hjul, og skal gjøre mengden biler 6 ganger så stor. For at forholde mellom antall biler og antall hjul skal opprettholdes må antall hjul som er 4 på hver bil multipliseres med 6. Den skalare faktoren er derfor 6 i dette tilfellet. Verken forhold eller skalar faktor har noe med biler og hjul å gjøre, men forblir konstant uavhengig om størrelsen på mengdene øker.

Multiplikasjon kan ha ulik semantisk struktur, og situasjoner i multiplikasjon kan klassifiseres i forhold til hvordan tallene er delt inn i mengder og relasjonene mellom dem (Greer, 1996). Greer har kommet fram til fire kategorier som primært anvendes om problemer som involverer multiplikasjon av hele tall:

1. *Like grupper*. For eksempel 2 bord med 4 barn ved hvert bord.
2. *Multiplikative sammenhenger*. For eksempel 3 ganger så mange gutter som jenter.
3. *Rektangulær oppstilling*. For eksempel 3 rekker med 4 barn.
4. *Kartesiansk produkt*. For eksempel alle mulige kombinasjoner mellom 4 gutter og 3 jenter.

(s. 276-277)

Hvordan tallene er relatert i forhold til hverandre har altså en betydning for hvordan elevene ser på oppgaven, og påvirker dermed også løsingen av oppgavene til en viss grad. Et multiplikasjonsproblem kan løses på forskjellige måter, avhengig av hvordan man ser på tallene. For eksempel kan tallene deles opp i mindre deler og adderes, eller stykket kan brytes ned i mindre multiplikasjonsstykker for deretter å addere produktene (se blant annet Bakke & Bakke, 2006b). Likevel er prosessen for multiplikasjon med flersifrede tall mest kjent som standardalgoritmen for multiplikasjon, en algoritme som blir introdusert i skolen (se blant annet Bakke & Bakke, 2006c). Figur 2 illustrerer hvordan utregningen framgår med forklaring på høyre side, hentet fra Bakke og Bakke (2006c, s. 86).


Eksempel

Regn ut 45 · 32.

Løsning

45 · 32
90
135
1440

- Vi multipliserer 45 med 2 (enerne i 32) for å finne ut hvor mange enere det blir. Det blir 90 enere.
- Vi multipliserer 45 med 3 (tierne i 32) for å finne ut hvor mange tiere det blir. Det blir 135 tiere. Siden 135 er tiere, må 5-tallet stå under tieren i 90.
- Vi adderer og finner svaret.

Figur 2: Et eksempel på bruk av standardalgoritmen for multiplikasjon av tosifrede tall (Bakke & Bakke, 2006c, s. 86)

Hvilket tall som er multiplikand og multiplikator avhenger av hvilken situasjon tallene er beskrevet i, og kan ut ifra situasjonen vise et klart skille mellom disse. Vi kan tenke oss at en kontekst handler om penger som er donert til et idrettsforbund fra et antall personer. Hvis vi følger eksemplet over og tenker oss at 32-tallet står for millioner vil det ha stor forskjell for hver enkelt person om det er 32 millioner personer som gir 45 kroner hver enn om det er 45 personer som gir 32 millioner kroner hver, men det vil i selve utregningen og resultatet ikke spille noen rolle. Denne regelen om at produktet blir det samme selv om faktorene bytter plass kalles den kommutative lov og framgår slik: $a \cdot b = b \cdot a$ (Store norske leksikon, u. å.b).

Den distributive lov er en ”algebraisk relasjon som knytter sammen addisjon og multiplikasjon: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Vi sier at multiplikasjon er distributiv over addisjon” (Store norske leksikon, u. å.a). Goodman (2011) mener *den distributive lov* ligger implisitt i bruken av standardalgoritmen for multiplikasjon. Dette kan man se i oppdelingen av tallene der begge strategiene deler multiplikanden inn i mindre deler, som deretter multipliseres med multiplikatoren hver for seg. Vi ender opp med to delprodukt som er like for de to strategiene. Dette kan illustreres ved å vise utregningen av stykket $22 \cdot 3$ med begge strategiene:

Standardalgoritmen for multiplikasjon:

$$\begin{array}{r} 22 \cdot 3 \\ \hline 6 \\ 60 \\ \hline = 66 \\ \hline\hline \end{array}$$

Den distributive lov: $22 \cdot 3 = (20 + 2) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 60 + 6 = 66$

Her ser vi at multiplikanden 22 blir delt inn i 20 + 2 og deretter multiplisert med 3 i begge strategiene. Dette gir delproduktene 6 og 60, noe som forekommer i begge strategiene. Det som skiller disse to strategiene er i hovedsak strukturen i notasjonen. Vi ser at standardalgoritmen følger en vertikal struktur i utregningen, mens den distributive lov følger en horisontal struktur. I tillegg kan strategiene skilles ved å se på adderingen av delproduktene. I standardalgoritmen for multiplikasjon følger som regel adderingen prosedyren til standardalgoritmen for addisjon, mens med den distributive lov behandles tallene i adderingen som mengder. Likevel viser dette at disse to strategiene er nært beslektet og er vanskelige å skille, spesielt ved en muntlig presentasjon av beregningen der notasjonens struktur ikke er synlig.

2.3.1 Intuitive modeller i matematikk

Fischbein et al. (1985) har i sin studie sett på hvordan elevers *intuitive modeller* påvirker deres løsninger av tekstoppgaver. Dette på grunnlag av en følgende hypotese:

> Each fundamental operation of arithmetic generally remains linked to an implicit, unconscious, and primitive intuitive model. Identification of the operation needed to solve a problem with two items of numerical data takes place not directly but as mediated by the model. The model imposes its own constraints on the search process.
> (Fischbein et al., 1985, s. 4)

Intuitive modeller er i følge Fischbein et al. (1985) primitive oppfatninger av situasjoner. De er implisitte og kommer bare til uttrykk gjennom elevenes handlinger. "…when trying to discover the intuitive model that a person tacitly associates with a certain operation, one has to consider some practical behaviour that would be the enactive, effectively performable counterpart of the operation" (Fischbein et al., 1985, s. 5). Fischbein et al. antar altså at det for en hver fundamental aritmetisk operasjon, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon, finnes en mental primitiv intuitiv modell, og mener at den primitive modellen for multiplikasjon er gjentatt addisjon.

Mulligan og Mitchelmore (1997) ser også på elevers intuitive modeller ved å se på deres preinstrumentelle strategier for multiplikasjon og divisjon. De definerer intuitive modeller som en intern mental struktur som samsvarer med en gruppe løsningsstrategier. Mulligan og Mitchelmore har gjennom sin studie identifisert tre kategorier for intuitive modeller for multiplikasjon: *Direkte telling*, *gjentatt addisjon* og *multiplikative operasjoner*. Elevene tilegner seg et repertoar av slike intuitive modeller for multiplikasjon som Mulligan og Mitchelmore hevder at stadig utvides.

2.3.2 Regnestrategier i multiplikasjon

Her vil jeg presentere den teorien jeg har brukt i analysen av elevenes valg av løsningsstrategier i de to arbeidsøktene. Jeg har i hovedsak støttet meg til Sherin og Fuson (2005) og Thompson (1999). I tillegg jeg har også sett på andre forskere som har klassifisert elevers løsningsstrategier for multiplikasjon. Jeg vil gå nærmere inn på enkelte kategorier som ulike forskere har beskrevet, og utelate noen da ikke alle er relevante for min studie.

Flere har forsøkt å klassifisere løsningsstrategier knyttet til multiplikasjon med ensifrede tall i kategorier med ulike definisjoner (Anghileri, 1989; Cooney, Swanson, & Ladd, 1988; Hecht, 1999; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997). I den senere tiden har Sherin & Fuson (2005) forsøkt å lage sin egen klassifisering basert på en egen studie og deretter sammenlignet sin klassifisering med tidligere studier. De mener resultatene til forskerne varierer når det kommer til forskningen på multiplikasjon av ensifrede tall. Selv om det er en vekst i forskningen er det stor uenighet i forskernes beskrivelse av strategier og i terminologien. Basert på den tidligere forskningen utført av andre og sin egen forskning har Sherin og Fuson forsøkt å lage et felles klassifiseringssystem for strategier i multiplikasjon.

Sherin og Fuson (2005) mener at den tidligere forskningen angående læring av multiplikasjon med ensifrede tall kan samles i fire hovedtråder: (1) *Semantic types* (modeller av situasjoner), (2) *Intuitive models,* (3) *Solution procedures*, og (4) *Models of retrieval.* Sherin og Fuson ser bare på læring av multiplikasjon med ensifrede tall gjennom den tredje tråden som de kaller for *solution procedures,* her oversatt til løsningsstrategier. Å analysere løsningsstrategier handler om beskrivelsen av operasjonssekvenser som eleven utfører for å komme seg fra de gitte tallene til produktet. Videre tydeliggjør Sherin og Fuson at de refererer til mønster i regneaktiviteter, med et gitt abstraksjonsnivå, når de prater om regnestrategier (Sherin & Fuson, 2005, s. 350). Dette står i kontrast til et alternativt standpunkt som ser på strategier som elevenes kunnskap eller kognitive strukturer. Slik Sherin og Fuson snakker om regnestrategier er det ikke kunnskap, men snarere mønster og strukturer i utregningsaktiviteter som fører fram til et resultat. I strategien gjentatt addisjon finner man eksempler på slike mønster og strukturer, der multiplikanden blir addert like mange ganger som multiplikatoren viser.

Sherin og Fuson (2005) har gjennom sin studie delt regnestrategiene i seks hovedkategorier: *telle alt, additiv beregning, gruppetelling, mønsterbasert, kjent kunnskap* og *hybrid.* Disse hovedkategoriene er blitt laget basert på hvilke regnestrategier elevene benyttet seg av, der hver strategi ble kategorisert etter hvilke tallspesifikke regneressurser elevene brukte. Det vil si at hvordan elevene behandlet tallene avgjorde hvilken kategori strategien tilhørte i. For eksempel vil strategien gjentatt addisjon, som jeg vil komme tilbake til, være en tallspesifikk regneressurs som går under kategorien additiv beregning. Fordi det er relativt små nyanser som skiller noen av strategiene fra hverandre er det flere strategier som utgjør hver kategori. Av de seks kategoriene vil jeg i det følgende konsentrere meg om additiv beregning, mønsterbasert, kjent kunnskap og hybrid.

Additiv beregning omfatter alle strategier som baserer seg på addisjonsrelaterte teknikker. Sherin og Fuson (2005) mener elever benytter seg av en slik strategi fordi de som regel har erfaringer fra addisjon tidligere. Følgende to strategier som utgjør kategorien additiv beregning:

- *gjentatt addisjon*
- *grupperende addering.*

Gjentatt addisjon er situasjoner der eleven utfører fortløpende addering ved å stadig addere den samme gruppestørrelsen til den totale mengden. Eksempelvis vil oppgaven $3 \cdot 4$ løses slik: $4 + 4 = 8$, $8 + 4 = 12$. Den andre strategien, grupperende addering, er situasjoner der elevene adderer grupper, som regel to og to, og deretter legger disse sammen. Eksempelvis vil

$4 \cdot 8$ løses slik: $8 + 8 = 16$, $16 + 16 = 32$. Sherin og Fuson (2005) mener disse to strategiene er nært beslektet med Mulligan og Mitchelmore (1997) sine definisjoner på regnestrategiene ”gjentatt addisjon” og ”additiv dobling”. Sherin og Fuson understreker imidlertid at Mulligan og Mitchelmore refererer til intuitive modeller når de bruker frasen ”gjentatt addisjon”. Intuitive modeller er i følge Fischbein et al. (1985) indre mentale strukturer som elever utnytter seg av i møte med situasjoner som innebærer arbeid med multiplikasjon. Jeg vil komme tilbake til Mulligan og Mitchelmore senere i kapittelet.

Kategorien *mønsterbasert* blir beskrevet av Sherin og Fuson (2005) som situasjoner der elevene raskt kommer til svaret uten noen form for synlig arbeid. Elevene benytter seg av forskjellige mønster ved multiplikasjon som for eksempel 0- gangen, 1- gangen og 10- gangen for å komme fram til svaret. Følgende to strategier utgjør kategorien mønsterbasert:

- *Regler 0-, 1-, 10- gangen*
- *Fingerteknikk ved 9- gangen*

Sherin og Fuson (2005) beskriver fingerteknikk ved 9- gangen som en teknikk der elevene multipliserer $9 \cdot n$ ved å holde opp begge hendene sine, og bøye ned sin n’te finger fra venstre. Tierne vil da være representert som antall fingre til venstre for den bøyde fingeren, og enerne vil være antall fingre til høyre for den bøyde fingeren.

Kjent kunnskap er av Sherin og Fuson (2005) forbundet med en stor samling av tallspesifikke ressurser. Responsen fra elevene er hurtig og de bruker ikke synlige beregninger, verken fingrer eller tegninger. Eleven vet svaret og kan eksempelvis svare ”jeg vet det bare” når han får spørsmål om å forklare hvordan han kom fram til svaret. Kjent kunnskap består kun av en strategi som blir omtalt som kjent kunnskap. Videre mener Sherin og Fuson at alle forskerne i deres sammenligning har lignende strategier å vise til. Blant annet har Mulligan og Mitchelmore (1997) en strategi de kaller for *known multiplication fact*, på norsk *kjente multiplikative fakta*. Dette vil jeg komme tilbake til senere i kapittelet.

Hybridstrategier er basert på ulike kombinasjoner av alle strategiene som utgjør kategoriene telle alt, additiv beregning, gruppetelling, mønsterbasert og kjent kunnskap. I prinsippet er det derfor mulig å danne et stort antall hybridstrategier, der Sherin og Fuson (2005, s. 356) også presiserer at det er mulig å kombinere strategier innenfor samme kategori. Sherin og Fuson observerte også hybridstrategier som var sammensatt av mer enn to strategier. Blant de andre forskernes klassifiseringer mener Sherin og Fuson (2005) at det bare var noen få tilfeller av hybridstrategier. Den vanligste hybriden var det som tidligere er blitt referert til som "utledete fakta" av Mulligan og Mitchelmore (1997). I følge Sherin og Fuson, som jeg vil vise senere, har også Cooney et al. (1988) "utledete fakta" som en av sine kategorier.

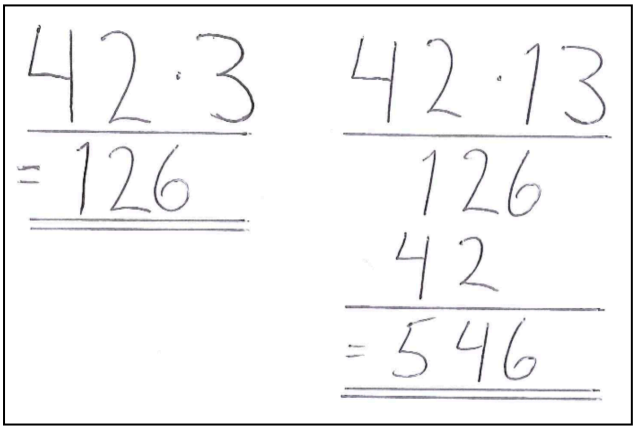
Cooney, Swanson og Ladd (1988) har gjennom sin studie klassifisert strategier som elever i Grade 3 og 4 (9-10 år) bruker for å løse enkle multiplikasjonsoppgaver. De klassifiserte strategiene de fant i sju kategorier deriblant *rules og derived facts*, på norsk *regler og utledete fakta*. Utsagn som "alle tall som multipliseres med null blir null" eller " et større tall multiplisert med 1 blir det større tallet" ble klassifisert som regler. Utledete fakta er basert på elevenes bruk av et kjent produkt sammen med bruken av en annen strategi, eksempelvis telling, for å komme fram til svaret. For eksempel $5 \cdot 6$. Eleven vet at $6 \cdot 6 = 36$, trekker fra 6 og får svaret 30.

Hecht (1999) har med sin undersøkelse forsøkt å fremme kunnskap om prosessene som voksne bruker for å løse addisjons- og multiplikasjonsstykker med ensifrede tall. Han har i forbindelse med sin undersøkelse klassifisert løsningsstrategier i multiplikasjon av ensifrede tall i seks forskjellige kategorier, deriblant *dekomposisjon*. Hecht mener kategorien dekomposisjon knyttes til prosedyrer som involverer bruk av kjente aritmetiske fakta for å finne svaret. For eksempel kan problemet $6 + 7$ løses ved å at eleven vet at $6 + 6 = 12$ og deretter legger en til 11 og få 12. I lys av Sherin og Fuson (2005) sin beskrivelse av hybrid, kan Hecht sin beskrivelse av dekomposisjon sees på som en begrenset modell av denne. I denne studien vil derfor min referanse til hybrid også omfatte Hecht sin beskrivelse av dekomposisjon.

Mulligan og Mitchelmore (1997) har i sin studie forsket på et utvalg jenters intuitive modeller i tekstoppgaver for multiplikasjon og divisjon i Grade 2 og 3 (7-9 år) i Australia. For multiplikasjon identifiserer Mulligan og Mithcelmore 3 forskjellige intuitive modeller med til sammen 7 forskjellige regnestrategier (s. 316). Blant disse regnestrategiene vil jeg se på*, gjentatt addisjon, gjentatt fordobling, kjente multiplikative fakta og utledete multiplikative fakta.* Gjentatt addisjon har ikke Mulligan og Mitchelmore utdypet på samme måte som de andre regnestrategiene, men de beskriver strategien som en videreføring av telling der elevene beregner seg fram til stykket framfor å telle f. eks. "$2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$". Additiv dobling betraktes som en regnestrategi der elevene dobler summen av to enheter f. eks. ”3 og 3 er 6, 6 og 6 gir 12”. Kjente multiplikative fakta er en strategi eleven bruker når han vet svaret. Eleven kjenner til produktet fra før og henter det fra et kunnskapslager f. eks. ”3 gange 2 er 6”. Utledete multiplikative fakta er utledet fra kjente fakta. Eleven kjenner ikke til produktet fra før, men kjenner til et annet produkt som det er mulig å utlede fra med en annen strategi f. eks. ”$3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 2$”.

Thompson (1997) mener skolen har for stort fokus på *skriving* i matematikken, og det faktum at matematikk er noe som foregår *mentalt* i for stor grad blir forsømt av skolen. Thompson mener at skriftlige metoder i matematikken er noe som forbindes med *skolematematikk*, i motsetning til *hverdagsmatematikk* som som regel foregår mentalt. Studier viser at barns mentale metoder er veldig forskjellig fra skriftlige standardalgoritmer på flere måter. Skrevne metoder opererer fra høyre mot venstre, mens mentale strategier oftest opererer i motsatt retning; mentalt manipuleres tall som mengder og ikke single enheter for eksempel 43 + 26 er 40 + 30…eller 43 + 20…og ikke 4 tiere + 2 tiere i tierkolonnen osv. Å behandle tall som mengder framfor single enheter gjør at elevene får et mer helhetlig syn på tall kontra ”siffer – for – siffer”. I tillegg foretrekker barn å sette tallene horisontalt framfor vertikalt når de bruker skriftlige metoder (Thompson, 1999, s.170). Thompson mener at konsekvensen av dette er at det virker urealistisk å forvente at det vil bli en jevn progresjon fra elevenes særegne mentale metoder til standardalgoritmene for de fire regnestrategiene.

Thompson (1999) ser på elevers løsninger i form av skriftlige algoritmer og deler disse inn i kategoriene: *formelle, ikke-formelle, standard og ikke-standard*. En formell standardalgoritme for multiplikasjon med flersifrede tall er forskjellig ut fra om både multiplikatoren og multiplikanden er flersifret, eller om bare én av dem er flersifret. Standardalgoritmen for to tosifrede tall kan sees på som en videreføring av standardalgoritmen for bare ett tosifret tall. Figur 3 viser eksempel på begge forekomstene med utregning av $42 \cdot 3$ og $42 \cdot 13$.



Figur 3: Standardalgoritme for multiplikasjon med ett tosifret tall og to tosifrede tall.

Slike standardalgoritmer er prosedyrer som forteller deg nøyaktig hva du skal gjøre uten at du behøver å tenke (Thompson, 1999). Utregningen av 42 · 3 og 42 · 13 følges av et argument som dette: ”3 ganget med 2 er 6, setter strek under stykket og plasserer 6-tallet lengst til høyre under streken. 3 ganget med 4 er 12, setter 12-tallet til venstre for 6-tallet”. Her blir 42 · 3 = 126. Videre fortsetter argumentet til utregningen av 42 · 13 slik: ”1 ganget med 2 er 2, setter 2-tallet en linje under og ett hakk til venstre under siffer 2 i 12-tallet. 1 ganget med 4 er 4, setter 4-tallet til venstre for 2-tallet. Setter strek og legger sammen tallene. 6 pluss ingen ting er 6. 2 pluss 2 er 4. 1 pluss 4 er 5. Svaret er 546.” Thompson (1999) viser til Williams som mener at slike metoder skaper kognitiv passivitet fordi elevens valg om hvordan man skal sette opp problemet aritmetisk, hvor man skal starte utregningen, hvilke verdier tallene skal ha osv. er fjernet. Thompson mener at prosedyren beskrevet over er obligatorisk i bruken av en formell standardalgoritme. Videre underbygger han at elevene oppnår kognitiv passivitet med å hevde at denne prosedyren fremmer en ”siffer – for – sifferhåndtering” av tallene.

Formelle ikke – standard algoritmer har ikke form som en skriftlig standardalgoritme, men er utseendemessig gjenkjennbar som formelle. Thompson (1999) mener disse algoritmene er mer brukervennlige, enn formelle standardalgoritmer fordi de appellerer til elevenes uformelle mentale strategier. Thompson mener slike strategier gir elevene mer kontroll i alle steg når de regner fordi de opererer med tall som hele mengder framfor symboler. Det gir videre en mer forståelig sammenheng mellom tallene og posisjonssystemet. Det står i kontrast til formelle standardalgoritmer som behandler tallene siffer – for – siffer. En utregning av 22· 11 kan eksempelvis se slik ut:

$22 \cdot 11$

$$20 \cdot 10 = 200 \qquad 10 \cdot 2 = 20 \qquad 2 \cdot 11 = 22 \qquad 200 + 20 + 22 = 242$$

Julia Anghileri (2006) har en lignende beskrivelse av multiplikasjon av større tall. Hun mener at multiplikasjon av større tall handler om å bryte ned stykket til mindre deler. I tilfeller hvor gjentatt addisjon ikke er hensiktsmessig mener Anghileri at tallene i stykket kan deles inn i deler, eller ”biter”, uten å miste forståelsen av den fundamentale ideen.

> *The multiplication 3 x 26, for example, could be calculated as '3 lots of 20 together with 3 lots of 6' or it could be '3 lots of 25 and 3 more' and each of these calculations relates to a different way of 'chunking' the number 26 to relate to already established facts.*
>
> (Anghileri, 2006 s. 99)

Formelt kjenner vi igjen dette eksempelet som den distributive lov som sier at multiplikasjon er distributiv over addisjon.

$$3 \cdot 26 = 3 \cdot (20 + 6) = (3 \cdot 20) + (3 \cdot 6) = 60 + 18 = 78$$

eller

$$3 \cdot (25 + 1) = (3 \cdot 25) + (3 \cdot 1) = 75 + 3 = 78$$

Anghileri (2006) poengterer imidlertid at elever trenger å kjenne til denne regelen, men ikke nødvendigvis å kunne navnet på den.

Anghileri skriver blant annet om *clever calculating*, her oversatt til *kompenserende beregning* (2006, s. 78-79). Kompenserende beregning handler om å utnytte tallenes egenskaper i titallssystemet, ved å kompensere der tallene er nært hele tiere. Et eksempel kan være 5 + 9. Her kan man kompensere ved å heller legg til 10 og deretter trekke fra 1 i svaret, slik at stykket blir 5 + 10.

3.0 Metode

3.1 Kvalitativ metode

Problemstillingen for denne studien er: *Hva karakteriserer elevenes regnestrategier i multiplikasjon med flersifrede tall i en matematikkfaglig kontekst og i en kroppsøvingskontekst?* I dette prosjektet har jeg valgt en kvalitativ metode. En kvalitativ metode tar for seg få forekomster, men studerer hver forekomst nøye (Cohen, Morrison, & Manion, 2007). Mine interesser strekker seg i retning av elevenes tanker rundt strategivalg og strategibruk gjennom deres dialoger med hverandre, og disse dataene lar seg vanskelig tallfeste. For å finne svar på problemstillingen min vil jeg finne ut hvordan elevene arbeider. Jeg vil altså utforske menneskelige prosesser i en naturlig setting, noe som også karakteriserer en kvalitativ studie (Cohen et al., 2007). Jeg ønsker derfor ikke å si noe om hva som karakteriserer elevers strategier i ulike kontekster på bred basis.

I denne studien vil jeg se på hva som karakteriserer elevers regnestrategier i multiplikasjon i ei matematikkøkt og ei kroppsøvingsøkt. For å finne svar på dette må jeg se på elever i arbeid med multiplikasjonsoppgaver både i ei matematikkøkt og ei kroppsøvingsøkt. Jeg legger vekt på at læring skjer i det sosiale og støtter meg derfor til et sosiokulturelt perspektiv på læring. I et sosiokulturelt perspektiv på læring blir interaksjon og samarbeid mellom mennesker sett på som helt grunnleggende for læring, der deltakelse i sosiale praksiser hvor læring skjer er sentralt i det å lære (Säljö, 2001). Derfor har jeg valgt å se på hvordan en gruppe på tre elever sammen kommer fram til regnestrategier, der jeg legger stor vekt på kommunikasjonen mellom aktørene. Ved å studere denne gruppen kan jeg få tilgang til elevenes bruk av regnestrategier og deretter beskrive og forstå situasjonene ved å se gjennom deres øyne. Jeg vil altså studere denne gruppen i dybden, noe som betyr at jeg vil bruke fortolkende teori.

Virkeligheten jeg vil forske på mener jeg skapes av elevene som deltar i situasjonene. Mine resultater i denne forskningen vil derfor være kontekstualiserte og situerte. Dette betyr at mine resultater er knyttet til elevene i min studie og situasjonen forskningen foregår i. Jeg kommer altså ikke fram til generelle resultater. Resultatene vil også være farget av meg som forsker, fordi det er jeg som beskriver situasjonen og gjør tolkningene av elevenes arbeid. Dette gjør at resultatene vil være subjektive.

For å finne svar på problemstillingen min vil jeg altså gå i dybden på situasjoner hvor en gruppe elever arbeider sammen om multiplikasjonsoppgaver. For at jeg skal kunne gå i dybden på situasjonene må jeg begrense omfanget av forskningen min. Jeg velger derfor å ta for meg en gruppe med tre elever i ei matematikkøkt og ei kroppsøvingsøkt, hver på 90 minutter. Dette betyr at forskningen min kan kalles en casestudie.

3.1.1 Casestudie

En casestudie kjennetegnes blant annet ved å ha muligheten til å studere enkeltindivider eller grupper og komme til en forståelse av den enkeltes oppfatning av en hendelse, der hvert individ eller gruppe i en bestemt situasjon er en case (Cohen et al., 2007, s. 253). Cohen et al. beskriver casestudie som et spesielt tilfelle som ofte er designet for å illustrere et mer generelt prinspipp, altså en studie av en situasjon som er i aksjon. På denne måten danner casestudie et unikt eksempel av personer i ekte situasjoner, som igjen gjør leseren i stand til forstå ideene bedre i stedet for å få dem presentert som abstrakt teori (Cohen et al., 2007). Min forskning baserer seg verken på elevenes tidligere arbeid eller fremtidige undersøkelser, og foregår i en begrenset periode. Studien er derfor begrenset i tid og rom og har en veldefinert start og slutt, noe som også kjennetegner en casestudie (Cohen et al., 2007 s. 253).

I min casestudie har jeg et forskningsspørsmål som jeg forsøker å finne svar på. Det er det Stake (1995) omtaler som en *instrumentell* casestudie, hvor forskeren bruker en case som instrument for å forstå noe. Forskeren har altså et forskningsspørsmål som han eller hun kan finne ut noe om gjennom å studere en spesiell case (Stake, 1995). I min studie er gruppen med tre elever en case som jeg bruker som et instrument til å finne ut hva som karakteriserer elevers bruk av regnestrategier i multiplikasjon i ei matematikkøkt og ei kroppsøvingsøkt.

3.2 Konteksten

Studiens empiri baserer seg på to arbeidsøkter, hver på 90 minutter, fordelt på en dobbelttime matematikk som foregår i klasserommet og en dobbelttime kroppsøving utendørs i egnede omgivelser. Skolen var under ombygging på det tidspunkt datamaterialet ble samlet inn og elevgruppa hadde derfor ikke areal til kroppsøving innendørs. Arbeidsøkta i matematikk ble gjennomført i uke 45, år 2010, der elevgruppen arbeidet med oppgaver tilrettelagt for multiplikasjon i kjente omgivelser. Arbeidsøkta i kroppsøving ble gjennomført i uke 49 samme år. Gjennomføringen av kroppsøvingsøkta var planlagt å gjennomføres i uke 47, men på grunn av streng kulde i en lang periode ble kroppsøvingstimen utsatt.

3.2.1 Læreren

Elevgruppas matematikklærer har undervist matematikk i 14 år, og har siden elevgruppas skolestart vært deres kontaktlærer. Jeg ville at så mange faktorer som mulig skulle være uendrede. Derfor ville jeg at den faste læreren skulle ha ansvaret i øktene der jeg selv hadde rollen som observerende forsker. Ved å la så mange faktorer som mulig være uendret legges forholdene til rette for at elevene ikke blir påvirket til å gjøre noe uvanlig. Da arbeidsøkta i kroppsøving skulle gjennomføres var det lærerstudenter på praksis hos elevgruppa. Det førte til at en av lærerstudentene hadde ansvaret for aktivitetene under kroppsøvingen. For å bevare lærerens og lærerstudentens anonymitet har jeg gitt dem pseudonymer. Elevgruppas matematikklærer har fått pseudonymet *Jon*, og lærerstudenten har fått pseudonymet *Lars*.

3.2.2 Elevgruppa

Studien ble gjennomført på 5. trinn på en barneskole som består av ca. 490 elever. Trinnet bestående av 88 elever er fordelt på 4 elevgrupper, der jeg fulgte Jon sin elevgruppe på 23 elever, 11 gutter og 12 jenter.

Det er stor spredning blant elevenes faglige matematikkompetanse innad i elevgruppa. Matematikkundervisningen har vært en blanding mellom *oppgaveparadigmet* (Skovsmose, 1998), der lærer gjennomgår stoff og elevene arbeider med oppgaveløsning, og *undersøkelseslandskap* (Skovsmose, 1998) der elevene arbeider med diskusjonsoppgaver og stiller spørsmål til matematikken. Elevene har derfor litt erfaring med oppgaver med fokus på resonnering som en del av utviklingen av matematikkforståelse.

3.2.3 Valg av elever

Elevene som skulle være med på undersøkelsen ble valgt ut av elevgruppas faste matematikklærer. Alle elevenes foresatte hadde gitt tillatelse til videofilming ved en tidligere anledning og læreren gikk god for at elevene ville delta i forskningen min. Utvelgelsen var derfor ikke avhengig av noen formelle krav. Jeg valgte en gruppestørrelse på tre elever. Av tidligere erfaringer ser det ut til at gruppedynamikken fungerer best med en gruppe på tre framfor en gruppe på to eller fire. For å bevare elevenes anonymitet har jeg valgt å gi dem pseudonymene, *Kari*, *Siri* og *Einar*.

De tre elevene valgte Jon ut etter mine ønsker og krav. Jon fikk beskjed om å velge ut elever som var muntlig aktive for å sikre en muntlig interaksjon innad i gruppa. Jeg ville forske på muntlig aktive elever fordi jeg ønsket å studere elevenes kommunikasjon, som følge av at kunnskap blir konstruert i samhandling mellom mennesker (Dysthe, 2001). En slik type utvelgelse omtaler Cohen et al. (2007 s. 114 og 115) som ”purposive sampling”, eller ”utvelging med hensikt”, der forskeren håndplukker casene som skal utgjøre utvelgelsen. Ved å gjøre det på en slik måte vil utvelgelsen være mest mulig tilpasset forskerens spesielle behov.

3.3 Empiri

Empirien for studien består i hovedsak av videoopptak med lyd av dialogen mellom elevene i arbeidet med oppgavene. I tillegg utgjør elevenes notater og egne feltnotater den samlede empirien.

3.3.1 Forberedelse til datainnsamling

For å sikre et datamateriale som kunne gi svar på problemstillingen på en best mulig måte var det avgjørende å legge et godt grunnlag i forberedelsene. Målet med oppgavene var å få kunnskap om elevenes regnestrategier i multiplikasjon. Som nevnt i teorikapittelet finnes det mange ulike regnestrategier for multiplikasjon, der strategiene skiller seg fra hverandre for eksempel i noteringens struktur og i behandlingen av tallene. Elevene kan ha flere strategier som de bruker i forskjellige situasjoner. Hvilken strategi de benytter seg av, avhenger blant annet av hvilken kontekst de er i, problemets karakter og vanskelighetsgrad. I noen tilfeller er det bare små nyanser som skiller strategiene fra hverandre, både hos den enkelt elev og elevene imellom.

I utformingen av oppgavene til kroppsøvingsøkta ble det en ekstra utfordring med tanke på innsamling av datamaterialet. Ettersom jeg benyttet videokamera for å samle inn data var det nødvendig å ta høyde for at matematikkproblemene i kroppsøvingsøkta var av en slik karakter at elevene ikke hadde behov for å bevege nevneverdig på seg når problemene skulle løses.

Dette for å sikre gode opptak, da bevegelse i kamera forstyrrer både bilde og lyd. I tillegg ble mangel på inneareal til kroppsøvingstimen en faktor som måtte tas i betraktning.

Med tanke på min problemstilling var det også viktig at de samme elevene, som utgjorde gruppen jeg forsket på, deltok både i matematikkøkta og i kroppsøvingsøkta i forhold til datamaterialets validitet. Cohen et al. (2007, s. 145) sier blant annet at få varierende faktorer som påvirker datamaterialet øker sjansen for å minimalisere invaliditeten. I min studie ville to forskjellige grupper i de to arbeidsøktene gitt et resultat som det ikke er grunnlag for å vurdere opp mot hverandre. Nettopp fordi strategivalget i matematikktimen for den ene gruppa ikke vil ha noen sammenheng med strategivalget i kroppsøvingstimen for den andre gruppa. Et slikt resultatet kan derfor ikke si noe om kontekstforskjeller spiller inn på strategivalg i multiplikasjon.

I denne studien har jeg selv utformet undervisningsoppleggene som la grunnlaget for empirien. Oppgavene i undervisningsoppleggene er uavhengige av hverandre, noe som blant annet betyr at elevene ikke er avhengig av å løse en bestemt oppgave for å løse en annen. Oppgavene ble formet ut fra flere kriterier:

- Oppgavene skal kunne gi svar på problemstillingen.
- Tydelige mål i Kunnskapsløftet for matematikk og for kroppsøving i oppgavene til kroppsøvingsøkta.
- Oppgavene skal legge til rette for bruk av multiplikasjon uten at ordene multiplikasjon og gange blir brukt i oppgaveteksten.
- Matematikkelementet til oppgavene i kroppsøvingsøkta skal springe ut av aktiviteten.

Det hadde vært en stor fordel å bruke oppgaver som andre forskere kunne vise til erfaringer med. Oppgaver som har fungert tidligere gir gode sjanser for å fungere igjen, og i tillegg gir tidligere resultater sammenligningsgrunnlag. Dessverre fant jeg ingen oppgaver tilpasset mine ønsker og kriterier.

Oppgavene til matematikkaktiviteten har jeg selv designet med inspirasjon fra et hefte med modelleringsoppgaver vi arbeidet med i modelleringskurset. Disse oppgavene er tilpasset slik at de omhandler multiplikasjon, men også med tanke på å være realistiske for elevene. Å lage oppgaver som er virkelig for elevene er i tråd med RME som er basert på Freudenthal`s sin idé om at matematikk, for at den skal være av menneskelig verdi, må være knyttet til en realitet, være nært for barn og bør ha en relevans til samfunnet (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Å gi elevene oppgaver med en slik type kontekst var viktig for å skape et godt grunnlag for muntlig aktivitet, både matematikkfaglig og i forhold til oppgavens virkelighetsaspekt. I tillegg var oppgavene designet slik at det ikke var avgjort at elevene måtte løse oppgavene ved hjelp av multiplikasjon, noe som åpnet for mange mulige regnestrategier. Aktivitetene for kroppsvingsøkta ”Pulsmåling” og ”Løping på tid” er inspirert av eksisterende oppgaver som jeg fant i artikkelen *Å regne i kroppsøving* (Jakobsen & Mjåtveit, 2009) som tar for seg regning i kroppsøvingsfaget. Disse aktivitetene la til rette for oppgaver som oppfylte kriteriene over, spesielt med tanke på at oppgavene skal ta utgangspunkt i en aktivitet elevene har vært med på. Det er viktig for at elevene skal se på problemet i oppgaven og ikke bare aritmetikken. At oppgavene ikke direkte kobles til multiplikasjon åpner videre for at elevene ikke binder seg til en multiplikasjonsstrategi, men kan velge alle mulige regnestrategier.

3.3.2 Innsamling av datamateriale

I min forskning vil jeg beskrive og forstå situasjoner ved å se gjennom deltakernes øyne. Det var derfor viktig at jeg fikk samlet inn data av situasjoner der elevene befant seg i en naturlig setting (Cohen et al., 2007 s. 396). For å få gode data av elevenes samtaler valgte jeg derfor å ikke delta selv, verken som informasjonsformidler eller hjelper. Jeg ville ikke at mine innspill eller svar skulle påvirke elevenes strategivalg. Likevel ble jeg nødt til å gå inn med lærerrolle i kroppsøvingsøkta. Cohen et al. (2007, s. 404) omtaler denne typen observasjon som *complete observer*. Jeg som forsker og elevene som deltakere arbeidet derfor adskilt med tydelige rolleforskjeller. Wagner (1997) ser på dette som en ekstraktiv forskningsmetode der det er klare skiller mellom forsker og deltaker. Forskeren er beskrevet som personen som rapporterer kunnskapen og konstruerer kunnskapen som blir rapportert, mens deltakerne er de som utfører arbeidet som senere blir beskrevet og analysert.

Jeg observerte gruppen i en dobbeltime matematikk og en dobbeltime kroppsøving. I matematikkøkta observerte jeg gruppen i et klasserom, der elevene arbeidet i grupper på tre og fire. Eleven fikk utdelt oppgavene i et hefte av læreren Jon og løste oppgavene med papir og blyant som hjelpemidler. Underveis i arbeidsøkta gikk Jon rundt og hjalp elevene. I kroppsøvingsøkta var gruppa jeg skulle observere slått sammen med en annen gruppe på tre elever. Dette fordi studentene som var i praksis skulle få ansvaret for like mange elever hver. I kroppsøvingsøkta ble alle oppgavene og instruksene for aktiviteten presentert muntlig for elevene av Lars og meg. Det var i utgangspunktet Lars som skulle ha styringen i hele kroppsøvingsøkta, men på grunn av at det ble for krevende for Lars å ha ansvaret for seks elever under hele økta ble de delt mellom meg og Lars. Dette førte til at jeg hadde ansvaret for gruppa jeg skulle observere i halve økta. Elevene hadde ingen skriveredskaper under kroppsøvingsøkta. Dette fordi fokuset i starten av studien dreide seg om hoderegningsstrategier og ikke regnestrategier. Jeg så det derfor ikke som ønskelig å gi elevene tilgang til noteringsverktøy i kroppsøvingstimen.

Det ble i hovedsak brukt filmkamera til innsamling av datamateriale. Kamera med stativ ble plassert nær gruppen jeg forsket på, der jeg som observatør sto for filmingen. Passiv observasjon ble en naturlig datainnsamlingsstrategi for min studie, fordi jeg som nevnt over ikke ville at mine innspill eller svar skulle påvirke elevenes strategivalg. Jeg valgte å observere gruppen jeg skulle forske på med et filmkamera fordi det fanger opp elevenes samtaler, samtidig som jeg får et bilde av hva som skjer på gruppa i forhold til aktivitet. Aktiviteten og elevenes bevegelser kan i mange tilfeller være viktig for å få et klarer bilde av hva som blir sagt og gjort. Et filmkamera vil kunne fange opp elevers fakter og uttrykk som kan være med på å forklare samtaler og samhandlinger dersom aktiviteten foregår foran et stillestående kamera (Postholm, 2005 s. 62). I tillegg kan ansiktsuttrykk vise om en person er enig, uenig eller likegyldig. Ansiktsmimikk kan også være til hjelp for å lokalisere hvem det er som prater hvis noen stemmer er like, eller hvis ukjente stemmer blir fanget opp av mikrofonen. Et videoopptak gir meg derfor en bedre oversikt over hva som blir sagt, hvem som snakker og en bedre mulighet til å forstå hva som menes, enn hva et lydopptak ville gjort. Jeg kan også se på de forskjellige situasjonene flere ganger, og observasjonen blir derfor grundigere og transkripsjonen enklere. Sammen med videoopptak utgjør feltnotater og elevenes notater fra arbeidsøkta i matematikktimen det samlede datamaterialet.

3.3.3 Oppgavene

Oppgaver til matematikktime

Elevene fikk et hefte med følgende fem oppgaver.

Oppgave 1

Innsamlingsaksjonen gikk i år til flyktninghjelpen, og elevene samlet inn penger gjennom en joggeaksjon med en startkontingent på 20 kr.

a) Hvor mye penger ville de 7 lærerne på 5. trinn samlet inn hvis de også hadde jogget?
b) Hvor mye penger ville lærerne samlet inn hvis startkontingenten hadde vært 40 kr?

Oppgave 2

Amerikanerne brukte i år ca. 34 milliarder kroner på halloween.

a) Hvor mye penger bruker de i løpet av 4 år hvis de bruker det samme hvert år?

Oppgave 3

Rubiks kube er et 3-dimensjonelt mekanisk puslespill som ble oppfunnet av den ungarske skulptøren og professoren Ernő Rubik. Den ble verdenslansert i 1980 og har blitt et av verdens mest solgte puslespill.

a) Hvor mange klosser trengs for å lage en slik kube?
b) Hvor mange klosser trengs for å lage 7 slike kuber?

Oppgave 4

Røyking er en veldig usunn vane. Røyking er helseskadelig og kan forårsake kreft og andre farlige sykdommer. I tillegg er røyking dyrt og de som røyker kan spare penger ved å slutte å røyke.

En pakke røyk koster ca 65. kroner. Hvor mye kan en røyker spare i måneden hvis han:

a) røyker 6 pakker i måneden?
b) røyker 8 pakker i måneden?

Oppgave 5

Pirbadet i Trondheim er et svømmeanlegg med flere bademuligheter i forskjellige basseng og sklier.

a) Bølgebassenget er 12 meter bredt og 24 meter langt. Hva er arealet av bølgebassenget?

Oppgaver til kroppsøvingstime

Elevene fikk presentert oppgavene muntlig.

Pulsmåling

Elevene måler pulsen ved forskjellige tilstander med forskjellig tid og ved å beregne antall pulsslag per minutt.

1. Elevene måler sin egen puls i 10 sekunder ved tilnærmet hviletilstand.
   - Finn hvilepulsen til alle på gruppa.
     (Elevene kommer fram til alle de tre pulsmålingene sammen i gruppa)

2. Elevene løper lett jogg, eksempelvis løper et lite stykke uten å bli fullstendig sliten. Deretter blir pulsen målt i 15 sekunder.
   - Finn pulsen etter lett jogg til alle på gruppa.
     (Elevene kommer fram til alle de tre pulsmålingene sammen i gruppa)

3. Elevene løper de så fort de orker til de er fullstendig slitne og måler pulsen i 30 sekunder ved tilnærmet makspuls.
   - Finn makspulsen til alle på gruppa.
     (Elevene kommer fram til alle de tre pulsmålingene sammen i gruppa)

Løping på tid

Elevene løper en distanse på 100 meter på tid.

- Hvor lang tid ville du brukt på en distanse som var 2 ganger så lang?
  (Elevene kommer fram til alle de tre tidene sammen i gruppa)

- Hvor lang tid ville du brukt på en distanse som var 4 ganger så lang?
  (Elevene kommer fram til alle de tre tidene sammen i gruppa)

- Hvor lang tid ville du brukt på en distanse som var 6 ganger så lang? (Elevene kommer fram til alle de tre tidene sammen i gruppa)

Elevene løper en distanse på 200 meter på tid.

- Hvor lang tid ville du brukt på en distanse som var 2 ganger så lang? (Elevene kommer fram til svarene sammen i gruppa)

- Hvor lang tid ville du brukt på en distanse som var 4 ganger så lang? (Elevene kommer fram til svarene sammen i gruppa)

- Hvor lang tid ville du brukt på en distanse som var 7 ganger så lang? (Elevene kommer fram til svarene sammen i gruppa)

Den semantiske strukturen for alle oppgavene i de to øktene kan i forhold til Greer (1996) sine fire kategorier gå under kategorien *like grupper*, bortsett fra oppgave 5 i matematikkøkta. Oppgave 5 i matematikkøkta er å karakterisere som *rektangulær oppstilling*, der arealet av bassenget beregnes ved å multiplisere 12 med 24 som tilsvarer lengde og bredde på samme måte som rekke og kolonne. Bortsett fra denne oppgaven tar alle de andre oppgavene utgangspunkt i en gruppe som skal multipliseres et visst antall ganger. For eksempel tar oppgavene i aktiviteten *Løping på tid* utgangspunkt i hvor fort elevene løper på 100 og 200 meter, for deretter å beregne de andre oppgavene ut i fra den tiden. Dette ved å multiplisere antall grupper, som i dette tilfellet er tiden på 100 og 200 meter, som trengs for å komme fram til svaret.

3.4 Analysemetode

Jacobsen (2005) mener at analyse av kvalitative data enkelt sagt dreier seg om tre ting; *beskrive, systematisere og kategorisere, og sammenbinde*. I min analysemetode for denne studien har jeg støttet meg til disse.

Beskrive

Først må datamaterialet beskrives. Det innebærer blant annet utskriving av observasjoner, og en viss form for systematisering av intervjuene (Jaconbsen, 2005). Empirien i denne studien, er som nevnt tidligere, i hovedsak innhentet inn med videoopptak av elevenes besvarelser på oppgavene nevnt ovenfor. Derfor valgte jeg først å transkribere alle videofilmene. Underveis i transkripsjonen beskrev jeg også hva elevene gjorde, ansiktsuttrykk og noen gestikuleringer, fordi en slik beskrivelse av situasjonen er med på å tydeliggjøre hva som menes i de enkelte utsagnene. I analysen av transkripsjonene så jeg i første omgang over alt som var transkribert for å se hva som fantes av interessante situasjoner, samtidig som jeg skrev ned noen stikkord underveis av ulike tanker og refleksjoner av situasjonene. På den måten fikk jeg mer oversikt og et bredere innsyn i hva datamaterialet mitt inneholdt.

Systematisere og kategorisere

Her mener Jacobsen (2005) at det uoversiktlige datamaterialet skal systematiseres og reduseres. Dette skjer gjennom en utsiling og forenkling av datamaterialet i analyseprosessens første del. Denne systematiseringen er nødvendig for å kunne formidle det vi har funnet (Jacobsen, 2005). På bakgrunn av dette valgte jeg å se på transkripsjonene av de to arbeidsøktene hver for seg. Dette for å kartlegge hvilke regnestrategier elevene benyttet seg av i de to arbeidsøktene. Ut i fra hvilke regnestrategier som ble funnet i de to øktene dannet jeg passende kategorier som jeg plasserte regnestrategiene under, én kategorisering for hver økt. Disse kategoriene laget jeg ved å ta utgangspunkt i tidligere forskning på feltet (Anghileri, 2006; Cooney, Swanson, & Ladd, 1988; Hecht, 1999; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Thompson, 1997) og ut i fra det definerte jeg mine egne kategorier, slik at de passet med regnestrategiene jeg fant i matematikkøkta og kroppsøvingsøkta. Jeg har valgt å dele elevenes regnestrategier fra matematikkøkta inn i følgende fem kategorier:

- Additiv beregning
- Multiplikative regler
- Distributive lov
- Siffer – for – sifferstrategi
- Kombinasjonsstrategi

Additiv beregning

Et eksempel på en slik teknikk kan være Mulligan og Mitchelmore (1997) sin beskrivelse av strategien *gjentatt fordobling* der elevene gjør fordoblinger av summen slik at antall enheter vokser geometrisk, 2, 4, 8, 16,…,2^n. Eksempelvis vil $21 \cdot 8$ løses slik: $21 + 21 = 42$, $42 + 42 = 84$, $84 + 84 = 168$, $21 \cdot 8 = 168$. En slik strategi er beslektet med Sherin og Fuson (2005) sin beskrivelse av strategien *grupperende addering*. Forskjellen er at grupperende addering omfatter addering av grupperinger av ulike størrelser uten presisering om fordobling på samme måte som gjentatt fordobling. Grupperende addering utgjør, sammen med strategien *gjentatt addisjon,* kategorien Sherin og Fuson omtaler som *additiv beregning*, der gjentatt addisjon er å sette multiplikanden opp som addend. Min beskrivelse av additiv beregning vil være den samme som Sherin og Fuson (2005) sin beskrivelse av kategorien additiv beregning, men jeg vil legge til gjentatt fordobling (Mulligan & Mitchelmore, 1997) som en tredje strategi.

Multiplikative regler

Bruk av multiplikative regler til å finne svaret på multiplikasjonsoppgaver går ut på å benytte seg av visse egenskaper eller mønster ved multiplikasjon. Det kan være regler som ”alle tall som multipliseres med null blir null” eller ” et større tall multiplisert med 1 blir det større tallet” (Cooney et al., 1988). Løsningen kommer av at elevene bruker et ”mønster” (Sherin og Fuson, 2005). Et annet eksempel kan være å se bort i fra alle 0 - tall i multiplikasjon med hele tiere og legge til tilsvarende 0 - tall på svaret. Slik at $M \cdot N0 = Z0,$ der M og N er naturlige tall og Z er produktet $M \cdot N$. Eks. $3 \cdot 10$, ser bort ifra alle 0-tall $3 \cdot 1 = 3$, setter på alle 0-tall i svar $3 \cdot 10 = 30$. Verken Cooney et al. eller Sherin og Fuson beskriver denne ”regelen” som en del av kategorien *regel* (Cooney et al., 1988) eller *mønsterbasert* (Sherin & Fuson, 2005). Slik jeg har forstått deres definisjoner av regel og mønsterbasert vil jeg påstå at regelen om multiplikasjon med hele tiere er nært beslektet med begge kategoriene. *Multiplikative regler* vil i denne oppgaven omhandle Cooney et al. sin beskrivelse av regel og Sherin og Fuson sin beskrivelse av mønsterbasert, og i tillegg omhandle regelen om multiplikasjon med hele tiere.

Distributiv lov

Anghileri (2006) mener at multiplikasjon av større tall handler om å bryte ned stykket til mindre deler. En måte å bryte ned et multiplikasjonstykke i mindre deler på er å benytte seg av den distributive lov. Den distributive lov er en ”algebraisk relasjon som knytter sammen addisjon og multiplikasjon: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Vi sier at multiplikasjon er distributiv med hensyn til addisjon” (Store norske leksikon, u. å.a). $15 \cdot 5$ kan for eksempel brytes ned til $10 \cdot 5$ og $5 \cdot 5$. Ved å bryte ned tallet 15 i delene 10 og 5, står vi igjen med to mindre og enklere multiplikasjonsstykker. Ved å følge den distributive lov kan det formelt sett noteres slik:

$$15 \cdot 5 = (10 + 5) \cdot 5 = (10 \cdot 5) + (5 \cdot 5) = 50 + 25 = 75$$

Siffer – for – sifferstrategi

Siffer – for – sifferstrategi kan relateres til det Thompson (1999) omtaler som formelle standardalgoritmer. I multiplikasjon læres som regel standardalgoritmen for ensifrede tall først, da standardalgoritmen for tosifrede tall kan sees på som en videreføring av denne. Begge standardalgoritmene betraktes som prosedyrer der den som utfører prosedyren slipper å tenke (Thompson, 1999). Denne prosedyren blir som en oppskrift der elevene strengt tatt ikke har behov for å kjenne til titallsystemet (Thompson, 1999). I denne kategorien har jeg derfor plassert situasjoner der elevene ser på tallene som uavhengige sifre, framfor mengder.

Kombinasjonsstrategi

I situasjoner hvor en strategi alene ikke fører fram, kan det lønne seg å kombinere to eller flere strategier for å finne svaret. Det kan skje på flere måter. En kan for eksempel bevisst bruke to forskjellige strategier på en oppgave for å komme fram til svaret, eller en kan se hvilke strategier som passer best etter å ha delt stykket i deler (Anghileri 2006). Sherin og Fuson (2005) kaller slike kombinasjonsstrategier for *hybrider*. De beskriver en hybrid som en sammensetting av to eller flere strategier. Mulligan og Mitchelmore (1997) og Cooney et al. (1988) sin beskrivelse av utledete multiplikative fakta eller utledete fakta kan også sees på som en kombinasjonsstrategi. Til forskjell fra Sherin og Fuson sin beskrivelse av hybrider er multiplikative fakta eller utledete fakta mer begrenset fordi de alltid tar utgangspunkt i et kjent produkt (Cooney et al., 1988), eller kjente multiplikative fakta (Mulligan og Mitchelmore 1997). I min oppgave omtaler jeg hybrider (Sherin & Fuson, 2005), utledete multiplikative fakta (Mulligan & Mitchelmore, 1997) og utledete fakta (Cooney et al., 1988) som *kombinasjonsstrategier.* I tillegg dekker min beskrivelse av kombinasjonsstrategier også kombinasjoner av andre typer strategier enn de som defineres av Sherin og Fuson. Et eksempel på en annen type strategi er regelen om multiplikasjon med hele tiere, som nevnt i kategorien *multiplikative regler*.

Inndelingen av elevenes regnestrategier fra kroppsøvingsøkta er delt inn i noen av de samme kategoriene. Forskjellen er at siffer – for – sifferstrategi er byttet ut med *standardalgoritmer,* og slått sammen med kategorien den distributive lov. I tillegg er kategorien kombinasjonsstrategi byttet ut med *kompenserende strategi.* Det gir følgende kategorier:

- Additiv beregning
- Multiplikative regler
- Distributive lov og standardalgoritme
- Kompenserende strategi

Standardalgoritme

Standardalgoritme for multiplikasjon benyttes ved multiplikasjon av flersifrede tall og omtales av Goodman (2011) som ”langmultiplikasjonsalgoritme”.
Denne algoritmen er nært beslektet med den distributive lov. Selve prinsippet med oppdelingen av tall i mindre mengder for deretter å addere de sammen er på mange måter likt, men de skiller seg litt fra hverandre i strukturen i oppsettet. Standardalgoritmen har et vertikalt oppsett i utregningen, der delproduktene plasseres under stykket, mens den distributive lov har et horisontalt oppsett, der delproduktene plasseres etter likhetstegnet til høyre for stykket. I tillegg er det vanlig for standardalgoritmen å benytte standardalgoritmen for addisjon for å legge sammen delproduktene, mens den distributive lov vanligvis adderer tallene som mengder. Det er det imidlertid vanskelig å skille disse strategiene hvis de kun uttrykkes med et muntlig språk. Jeg har derfor valgt å plassere disse to strategiene under en felles kategori for kroppsøvingsøkta.

Kompenserende strategi

I denne kategorien har jeg valgt å plassere alle situasjonene der kompenserende strategi inngår. Strategien går blant annet ut på å benytte seg av tallenes egenskaper i forhold til titallssystemet, ved å kompensere der tallene er nært hele tier (Anghileri, 2005). Hvis man skal beregne 5 + 9, kan man kompensere ved å legge til 10 og deretter trekke fra 1 i svaret. I min beskrivelse av kompenserende strategi kan kompenseringen også skje på andre måter. For eksempel å gjøre seg nytte av tidligere beregninger i en ny beregning. Hvis man i en tidligere oppgave har beregnet $25 \cdot 4 = 100$, kan man gjøre seg nytte av svaret i beregningen av $25 \cdot 5$. Dette ved å beregne $25 \cdot 5 = 100 + 25$. Ettersom kompenserende strategi i denne studien alltid er i kombinasjon med en annen strategi, er denne kategorien en begrenset modell av kategorien kombinasjonsstrategi.

Sammenbinde

Her mener Jacobsen (2005) at data skal fortolkes, dvs. lete etter meninger, årsaker, forsøke å generalisere eller å bringe en viss orden inn i data. Dette gjøres blant annet med å koble sammen kategoriene og enhetene som tidligere er brukt i analysen. Forskeren går utover det som er sett eller hørt og forsøker å se hva om som ikke er blitt direkte sagt eller gjort (Jacobsen, 2005). For å kunne si noe om sammenhengene mellom elevenes regnestrategier for de to øktene laget jeg en tabell som viser en oversikt over hvilke regnestrategier elevene diskuterte, og antall forekomster som var å spore av de forskjellige regnestrategiene for begge øktene. Ved å se på tabellen, og de forskjellige situasjonene der elevene bruker de forskjellige strategiene, har jeg forsøkt å sammenligne regnestrategiene i matematikkøkta med regnestrategiene i kroppsøvingsøkta. Jeg har sett på likheter og ulikheter i både bruken og valg av de ulike regnestrategiene, spesielt ved å forsøke å se på strukturen i elevenes notasjon eller muntlige presentasjon av regnestrategiene. Jeg valgte også å lage en tabell over antall riktige og gale svar for de to øktene for å gi et grunnlag for å senere se på årsaker til at noen svar ble riktige, mens andre ble feil.

Analysen for denne studien er altså delt inn i to hoveddeler: Elevenes besvarelser og sammenligning og diskusjon, der hoveddelen, elevenes besvarelser, videre er delt inn i de to delene: matematikkøkta og kroppsøvingsøkta.

3.5 Kritikk av metode

Hvis målet ikke er progresjon bør det ikke gå for lang tid mellom datainnsamlingene. Når tidsrommet mellom datainnsamlingene øker, øker også sjansen for at elevenes forutsetninger for de ulike aktivitetene blir avgjørende ulik. Det kan være forutsetninger som er blitt endret med tanke på hva eleven(e) jeg forsket på har gjort eller blitt eksponert for i mellomtiden. Ulike forutsetninger kan igjen påvirke datamaterialet til å bli mindre pålitelig (Cohen et al., 2007). I min undersøkelse ble tidsrommet på 4 uker, noe som er å betrakte som lang tid. I forhold til Kari, Siri og Einar er det derfor viktig å vurdere hva de har gjort i mellomtiden, spesielt i matematikktimen. I følge Jon arbeidet ikke elevgruppa med multiplikasjon i det tidsrommet, men han kunne ikke redegjøre for om andre lærere i andre timer hadde arbeidet med multiplikasjon på noen måte. I tillegg kan det tenkes at noen av elevene har fått "hjemmeundervisning".

Under kroppsøvingsøktas andre aktivitet, løping på tid, måtte Lars ta seg av den ene gruppa fordi noen av elevene ble litt krevende. Det førte til at jeg måtte styre den ene aktiviteten i kroppsøvingsøkta. Dette handler også om ulike forutsetninger for elevene som kan påvirke datamaterialet til å bli mindre pålitelig (Cohen et al., 2007). Mine kommentarer kan ha påvirket elevene til å velge andre typer strategier enn hva de ville gjort hvis Lars hadde styrt aktiviteten.

4.0 Elevenes besvarelser

I dette kapittelet skal jeg presentere og analysere ti situasjoner fra matematikkøkta og elleve situasjoner fra kroppsøvingsøkta. Situasjonene er valgt ut på bakgrunn av at de involverer multiplikasjon, der elevene diskuterer og finner løsninger på matematikkoppgaver. Kapittelet er videre delt inn i to deler: matematikkøkta og kroppsøvingsøkta. Gjennom analysen av disse strategiene skal jeg forsøke å gi svar på det første delspørsmålet mitt: *Hvilke strategier benytter elever på femte trinn seg av i arbeid med multiplikasjonsoppgaver der flersifrede tall inngår?* Jeg velger å se på matematikkøkta og kroppsøvingsøkta hver for seg for å lettere se hvilke strategier elevene velger i de forskjellige kontekstene.

Transkripsjonskoder

[] = Avbrutt

… = Kort pause, 1-2 sekund

* = Informasjon

Sekvensene jeg har brukt i analysen er bare utdrag av større sekvenser, og linjene er derfor nummerert i forhold til den opprinnelige sekvensen, der det første tallet står for oppgavenummer. Eks. 1. 23, der 1-tallet foran punktum sår for oppgave 1, og 23-tallet står for utsagn nr. 23 i sekvensen. I matematikkøkta vil $^{\#}$ stå foran noen tall. Eks. $^{\#}$1. 23. Det betyr at linja er hentet fra en sekvens hvor elevene på gruppa går igjennom oppgavene på slutten av økta, etter at de har løst alle oppgavene. I tillegg vil det i kroppsøvingsøkta stå en P eller en L foran oppgavetallet, der P står for aktiviteten pulsmåling, og L står for aktiviteten løping. Eks. P1. 23 og L1. 23. I tillegg vil alle sekvensene i matematikkøkta være merket med bokstaven M, og sekvensene i kroppsøvingsøkta vil være merket med bokstaven K. Sekvensene vil også være nummererte. Eks. M1 og K1, der M og K står for henholdsvis matematikkøkt og kroppsøvingsøkt og 1-tallet står for sekvens nummer 1. En komplett kode for matematikkøkta kan for eksempel være M1.2.34, der M står for matematikkøkt, 1-tallet står for sekvens 1, 2-tallet for oppgave 2 og 34 for utsagn nummer 34. En komplett kode for kroppsøvingsøkta kan for eksempel være K1.P2.34, der K står for kroppsøvingsøkta, 1-tallet står for sekvens 1, P står for aktiviteten pulsmåling, 2-tallet står for måling nummer 2 og 34-tallet står for utsagn nummer 34.

4.1 Matematikkøkta

Her vil jeg presentere løsningsstrategiene Kari, Einar og Siri benyttet seg av i matematikkøkta. Jeg tar utgangspunkt i transkripsjonen fra økta og elevenes notater. Strategiene blir delt inn i følgende kategorier:

- Additiv beregning
- Multiplikative regler
- Distributiv lov
- Siffer – for – sifferstrategi
- Kombinasjonsstrategi

Eksempler fra elevenes arbeid vil komme fortløpende.

4.1.1 Additiv beregning

I denne kategorien har jeg samlet strategiene der elevene bruker ulike additive teknikker for å komme fram til svaret. Elevenes arbeid med oppgave 2 er et eksempel på anvendelse av gjentatt fordobling. Her skal elevene finne ut hvor mye penger USA bruker på halloween i løpet av fire år, basert på hva de brukte i 2010 som var 34 millioner, altså $34 \cdot 4$.

<u>M 1</u>

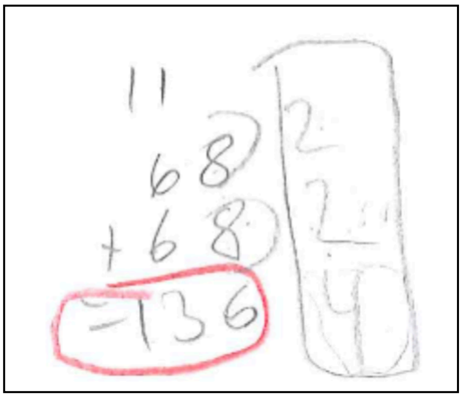
2. 1	Einar:	34 ganger 4
*		Kari og Sara ler
2. 2	Kari:	Det er "helbra" hehe...34 pluss 34. Skal vi ta svaret pluss svaret?
*		3 sekunders pause
2. 3	Kari:	Hmm...34pluss 68...pluss 68
2. 4	Einar:	Mhm
*		Liten pause på noen sekunder hvor Kari skriver ned 34 pluss 34 og 68 pluss 68, mens de to andre følger nøye med (se figur 4)
2. 5	Kari:	Åtte pluss åtte er 16...og seks pluss seks blir 12, 13...tre hundre og sek...
2. 6	Siri:	136!
2. 7	Kari:	Ja!

Her er det Kari som tar initiativ i linje 2.2 med å foreslå "…34 pluss 34. Skal vi ta svaret pluss svaret?" Når hun sier "34" kan det se ut som om 34 refererer til ett års forbruk, altså 34 milliarder. 34 pluss 34 vil da tilsvare to års forbruk, altså en fordobling (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Ved å følge denne argumentasjonen vil utsagnet i linje 2.3 der Kari sier "…68…pluss 68" referere til verdien av to års forbruk addert med seg selv, altså en fordobling av to års forbruk. Det vil igjen tilsvarer fire års forbruk, noe som også er svaret på oppgaven. Den additive utregningen skjer ved bruk av en formell standardalgoritme for addisjon (Thompson 1999), der Kari behandler tallene som uavhengige sifre (se figur 4). Dette kommer tydelig fram i Karis uttalelse i linje 2.5. Her refererer hun 8 + 8 = 16 til enerne i 68 + 68. Deretter blir tieren i 16 satt i mente, noe som kommer fram når hun skal legge sammen tierne 6 + 6 med utsagnet "seks pluss seks blir 12, 13." Selve utregningen er gjengitt i figur 4. Argumenteringen om elevenes bruk av gjentatt fordobling blir også bekreftet når Kari, Einar og Siri går igjennom oppgavene tilslutt i økta.

<u>M 2</u>

#2.	19 Siri:	Men hvorfor tar vi ikke bare 34 gange 4 da?
#2.	20 Kari:	Ja, men 68 det er jo to ganger, og 68 ganger til, det er jo fire ganger. For to ganger det er jo fi...to to ganger det er jo fire, to pluss to er fire. Og da, 68 pluss 68 må jo da vær svaret.
#2.	21 Siri:	Ja, ja det er det.

Det er spesielt Kari sin forklaring i linje #2.20 sammen med hennes notater som bekrefter argumentasjonen over. Kari starter forklaringen sin med å si at "68 er to ganger", og at "68 ganger til" er fire ganger. Slik jeg oppfatter dette refererer "ganger" til antall år, altså fire år. Dette kan også knyttes til de innrammede tallene Kari har skrevet på høyre side av figur 4, hvor det kan se ut til at hun bygger opp multiplikatoren additivt. Her har hun altså forklart at 68 addert med 68 tilsvarer fire års forbruk ettersom 68 er summen av to års forbruk. Likevel fortsetter hun med å presisere hvorfor denne doblingen er riktig med å si "…to to ganger det er jo fire, to pluss to er fire." i samme linje. Slik jeg oppfatter dette dreier tallene i denne forklaringen seg om antall år, og at det derfor er en forklaring på hvor mange ganger 34 blir addert.



Figur 4: Kari sine notater av oppgave 2

Et annet eksempel hvor elevene velger gjentatt fordobling som strategi er deres arbeid med oppgave 3. b, hvor de skal beregne 27 · 7. Før denne sekvensen begynner har elevene bygget opp til 216 med gjentatt fordobling, altså 27 + 27 = 54, 54 + 54 = 108, 108 + 108 = 216. 216 tilsvarer derfor 27 · 8, altså har de tatt 27 én gang for mye. På samme måte som i situasjon M 2 viser elevene sammenhengen mellom fordobling i verdi, og hvor mye hver fordobling tilsvarer i antall enheter ved at de bygger opp multiplikatoren additivt. Videre oppdager de at de ikke kan doble seg fram til 27 · 7, men må benytte en annen strategi i tillegg for å komme fram til svaret.

<u>M 3</u>

3. 33 Kari:	Men, men her har vi jo...der sa vi fire, og så skal vi bare ha to til.
3. 34 Einar:	Ja 216 blir det her nå, blir det ikke det da? 108 pluss 108 det er 216.
3. 35 Kari:	Ja
3. 36 Siri:	Da må vi ta en sånn og en sånn så må vi pluss (peker på arket til Kari. Ut fra videotapen ser jeg at hun mener 108 + 54).
3. 37 Kari:	Og da har vi jo seks klosser.
3. 38 Einar:	Ja, men hvor mang[]
3. 39 Kari:	Og så skal vi ha.
3. 40 Ei. og K.:	En til
3. 41 Kari:	Og da blir det pluss 54...
3. 42 Siri:	Hvorfor er det 27...nei, jo! blir det en...
3. 43 Einar:	Det er 1 ja. ja da må vi jo pluss 27.

Problemet med gjentatt fordobling er at elevene bare kan fordoble seg fram til tall som er en potens av 2 på denne måten: x, $2x$, $4x$, $8x, \ldots, 2^n x$, der n er et naturlig heltall. Hvis multiplikator ikke er en potens av 2 må det fordobles til nærmeste tall som er en potens av 2, som kan være større eller mindre i forhold til multiplikatoren. Ettersom 27 skal multipliseres med 7 er elevene i dette tilfellet avhengige av å bruke en form for additiv beregning i tillegg til gjentatt fordobling for å komme fram til svaret. I linje 3.33 gjør Kari de andre oppmerksomme på at de bare skal ha to enheter til etter at de har fordoblet tilsvarende fire enheter. I tillegg mener både Einar og Kari i linje 3.40 at de trenger en enhet til etter at Einar i linje 3.34 spør hvor mange de trenger. Slik jeg oppfatter dette benytter elevene seg av to strategier innenfor additiv beregning: gjentatt addisjon og gjentatt fordobling. En slik kombinering av to strategier er nært beslektet med Sherin og Fuson (2005) sin beskrivelse av *hybrider*. Dette vil jeg utdype i kategorien *kombinasjonsstrategier.* Flere eksempler på hybrider kommer senere i analysen.

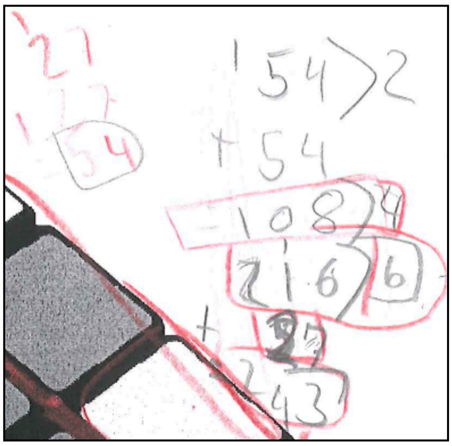
Utfordringer med bruk av gjentatt fordobling som løsningsstrategi

Gjentatt fordobling som løsningsstrategi kan være en effektiv strategi alene og sammen med andre additive beregninger i multiplikasjonsoppgaver med få operasjoner, men strategien byr også på noen utfordringer for elevene. Ved bruk av gjentatt fordobling vil selve fordoblingen av antall enheter følge en geometrisk følge, 2, 4, 8,…, 2^n, der n er et naturlig heltall. Denne følgen kan lett forveksles med en aritmetisk følge, 2, 4, 6,…, $2n$, der n er et naturlig heltall, fordi følgene er helt like fram til det tredje leddet. I sekvens M 3 er det tendenser til rot når elevene skal holde styr på hvor mange enheter de har og hvor mye hver fordobling utgjør i antall enheter. Når Einar i linje 3.34 sier at 108 + 108 tilsvarer 216 har elevene doblet tre ganger, noe som tilsvarer 8 enheter, én mer enn det de skal ha. Einar sin uttalelse kommer på tross av at Kari i linje 3.33 gjør de andre oppmerksomme på at de etter fire enheter bare skal ha to til. Hun mener altså at de skal regne seg fram til seks enheter, mens oppgaven sier sju enheter. Siri svarer på Kari sin påstand i linje 3.36 og Kari sin påstand i linje 3.37 sammen med hennes og Einar sitt utsagn i linje 3.40 kan tyde på at de har kontroll over antallet enheter de trenger. I linje 3.41 vil Kari legge til 54, noe som er to enheter, og selv om Einar mener at de skal legge til 27 i linje 3.43, altså én enhet, fortsetter problemet om antall enheter videre i elevenes arbeid med oppgave 3. b. Sekvensen under er en fortsettelse av M 3.

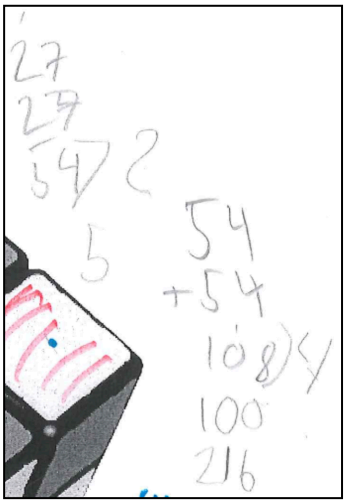
<u>M 4</u>

3. 44 Kari:	Men hvor fikk vi 54 ifra?
3. 45 Siri:	27 pluss 27
3. 46 Kari:	Å ja, ja det stemmer
3. 47 Kari:	Ehh...tjue eh sju
3. 48 Siri:	Ehm...eh...
3. 49 Kari:	Jeg vet ikke, seks pluss 20 er...
3. 50 Erik:	Hva ble det da?
3. 51 Kari:	Hehe...6 pluss...to, tre, fiiire. hundre og , to hundre og førti[]
3. 52 Erik:	Førti...
3. 53 Kari:	3 kom jeg fram til...
3. 54 Erik:	Ok, da prøver vi det

Kari får oppklart hvor 54 kommer fra av Siri i linje 3.45 og det skulle tilsi at et tillegg på én enhet, altså 27, var det som manglet i regnestykket for å få syv enheter. I stedet ser det ut til at de legger til 27 til 216. Kari og Einar sin utregning fra linje 3.51 – 3.53 sammen med Kari sine notater fra oppgaven kan tyde på det, se figur 5.



Figur 5: Kari sine notater fra oppgave 3. b



Figur 6: Siri sine notater fra oppgave 3. b

Usikkerheten rundt antall fordoblinger i forhold til antall enheter preger sekvensen og er nok også årsaken til at elevene ikke kommer fram til riktig svar. Dette kommer også fram i elevenes notater, figur 5 og 6. På samme måte som i figur 4 noterer elevene noen tall til høyre for utregningen i figur 5 og 6, som ser ut til å symbolisere antall enheter etter hver fordobling. Det ser ut som om systemet ikke fungerer fra 2. til 3. fordobling. Sammen med sekvens M 4 kommer dette tydeligst fram i figur 5. Multiplikatoren som elevene bygger opp additivt følger en aritmetisk følge, 2, 4, 6,…, $2n$, der n er et naturlig heltall, i motsetning til selve fordoblingen av antall enheter som følger en geometrisk følge, 2, 4, 8,…, 2^n, der n er et naturlig heltall. For meg virker det som om elevene følger en geometrisk følge i fordoblingen, mens de tror fordoblingen følger en aritmetisk følge. Dette gjør at elevene tar utgangspunkt i 8 enheter når de skal legge til én enhet, der seks enheter egentlig tilsvarer 108 + 54 = 162. Det fører videre til at svaret blir 2 enheter for mye, altså 9 i stedet for 7.

4.1.2 Multiplikative regler

Elevene viste at de kan utnytte egenskaper og regler ved multiplikasjon ved flere anledninger, spesielt regelen om multiplikasjon med hele tiere:

$M \cdot N = Z0$, der M og N er naturlige tall og Z er produktet av $M \cdot N = 0$ Eks. $10 \cdot 3$, ser bort ifra 0, $3 \cdot 1 = 3$, setter på en 0 i svaret $10 \cdot 3 = 30$.

Elevenes arbeidet med oppgave 1. a er et eksempel på bruk av denne regelen, der elevene skal beregne $7 \cdot 20$. Før denne sekvensen har elevene forsøkt seg med gjentatt addisjon, men denne strategien førte ikke fram.

<u>M 5</u>

1.	7 Kari:	Ja men to-gangen da?!...den kan vi jo
1.	8 Einar:	Ja.
1.	9 Kari:	To gange sju det er… Siri?
1.	10 Einar:	14.
1.	11 Kari:	Sju pluss sju er 14 ikke sant?
1.	12 Siri:	M-m.
1.	13 Einar:	140.
1.	14 Kari:	Ja!
1.	15 Einar:	Det blir 140.
1.	16 Kari:	Ja, for sju gange to[]
1.	17 Siri:	Ja.

Kari kommer på at deres kunnskaper om to-gangen kan benyttes til å løse oppgaven. I linje 1.11 poengterer Kari svaret til Einar i linje 1.10 med å vise at to gange sju er det samme som sju pluss sju. Deretter bruker elevene kunnskapen om multiplikasjon med hele tiere når de setter på en null fra 20 i svaret, slik at svaret blir 140. Med Kari sin addisjonsstrategi tatt i betraktning kan elevenes beregning av denne oppgaven også sees på som en kombinasjonsstrategi, med strategiene additiv beregning og multiplikative regler. Regelen om multiplikasjon med hele tiere benytter elevene seg også av i arbeidet med oppgave 1. b, der de skal beregne $7 \cdot 40$.

M 6

1. 23 Kari:	Fire...gange...sju.
1. 24 Einar:	Fire gange 7...det er...
*	Læreren informerer om at elevene må være oppmerksomme på hverandres løsningsforslag. Han sier at det kan hende at andre har gode løsningsforslag og at man bør høre på hverandres forslag. (Det ser ikke ut til at elevene blir påvirket av dette).
1. 25 Einar:	28!...28...280!
1. 26 Kari:	Ja

Oppgave 1. b i forhold til oppgave 1. a er lagt opp slik at elevene kan benytte seg av svaret i oppgave 1. a ved å doble det til å finne svaret i oppgave 1. b. I stedet velger elevene å benytte seg av samme strategi som de bruker til å finne svaret i oppgave 1. a, nettopp multiplikative regler. Her er det $40 \cdot 7$ som elevene løser, der de finner ut at $4 \cdot 7$ er 28 og at svaret derfor må bli 280.

Det ser ut som om det blir brukt to forskjellige strategier i begge sekvensene. I linje 1.10 og 1.11 i sekvens M 5 er det helt klart at de finner 14 før de bruker en multiplikativ regel til å finne 140, der de også forklarer hvordan de kommer fram til 14. På samme måte er linje 1.25 i sekvens M 6 dokumentasjon på at elevene også her finner tallet 28 før de legger på en 0. Selv om det er vanskelig å avgjøre hvilken strategi som blir brukt til å finne $4 \cdot 7 = 28$ i sekvens M 6 er det helt klart en annen type strategi enn multiplikative regler. I sekvensen M 5 er det lettere å lokalisere hvilken strategi elevene bruker til å finne 14, ettersom Kari i linje 1.11 forklarer med additiv beregning. En slik kombinasjon av strategier kan derfor betraktes som hybrid (Sherin & Fuson (2005).

4.1.3 Distributiv lov

I denne kategorien har jeg plassert de situasjonene hvor elevene deler opp stykket i mindre deler, men likevel behandler tallene som mengder og ikke som uavhengige sifre. Elevenes arbeid med oppgave 4. a ser ut til å være bruk av den distributive lov. Denne oppgaven handler om hvor mye penger en røyker kan spare i måneden hvis han slutter å røyke. I oppgave 4 a skal elevene beregne hvor mye penger en person som røyker seks pakker i måneden kan spare. Det gir regnestykket $65 \cdot 6$.

M 7

4.	7 Einar:	60 gange 6.
4.	8 Kari:	Nei 60 gange 5.
4.	9 Einar:	Ja
4.	10 Kari:	Det eee...nei 6 gange 5, det er tretti[]
4.	11 Einar:	Når mang...ja.
4.	12 Kari:	Og seksti gang, seks pluss seks er tretti tre hundre og...seks pluss seks er tre hundre og seksti det. Og da blir det tre...seks pluss tre er jo ni...tre hundre og nitti, er dere enige?
4.	13 Siri:	Ja

Matematikkproblemet er i utgangspunktet 65 · 6, men elevene bryter ned stykket til tall de har kjennskap til fra før. Elevene har vist i tidligere oppgaver at de kan utnytte kunnskap om multiplikative regler, spesielt med tanke på multiplikasjon av hele tiere, og benytter seg av det også denne gangen. Einar setter dem først på ideen og foreslår å begynne med 60 · 6 i linje 4.7, men Kari mener heller at de skal ta utgangspunkt i 60 · 5. Hvorfor Kari velger å ta utgangspunkt i 60 · 5 framfor 60 · 6 er det ingen av elevene som argumenterer verken for eller mot. I forhold til gangetabellen er 5-gangen enklere å lære seg enn 6-gangen, og kan derfor være en årsak til at elevene går ut i fra 60 · 5 og ikke 60 · 6. På den annen side er 60 · 6 en enklere måte å dele opp 65 · 6 på fordi den gir færre deler å forholde seg til. I tillegg skulle man tro at 60 · 5 gjorde hele oppdelingen vanskeligere med tanke på at både multiplikanden og multiplikatoren er endret. Kari fortsetter altså med 60 · 5 og sier at 6 · 5 er 30 i linje 4.10, men så virker det som om hun ombestemmer seg. Hvorfor hun velger å følge Einar sitt utsagn fra linje 4.7 med 60 · 6 er ikke godt å si, men i linje 4.12 opererer hun altså med 60 · 6. I den samme linjen kan det virke som om hun starter med å multiplisere med 60, men bryter tallet ned ved å se bort fra tallet 0 når hun sier ”Og seksti gang, seks pluss seks…”. Dette underbygges også av at hun sier ”seks pluss seks er tretti tre hundre”, der hun først regner ut at seks gange seks er 30 for så å legge til en 0 slik at det blir 300. Her sier hun at seks *pluss* seks er tretti, men slik jeg oppfatter dette mener hun seks *gange* seks. Videre oppdager hun at seks gange seks er 36 og ikke 30, noe hun uttrykker ved å si ”…seks pluss seks er tre hundre og seksti det”. Også her ser vi at hun sier pluss i stedet for gange. Deretter ser det ut som om hun adderer sammen tierne 60 fra 360 og 30 fra 5 · 6, men behandler dem som enere som om det er underforstått at det er snakk om tiere. Dette kommer fram når hun sier ”Og da blir det tre…seks pluss tre er jo ni”. Til slutt legger hun alle delene sammen og får 390. Med algebraisk notasjon kan denne presentasjonen framstilles slik:

$$65 \cdot 6 = (60 + 5) \cdot 6 = (60 \cdot 6) + (5 \cdot 6) = 360 + 30 = 390$$

Dette er en typisk måte å benytte seg av den distributive lov på. Her behandles tallene som hele mengder, der både notasjonens struktur og adderingen av tallene skiller strategien fra standardalgoritmen for multiplikasjon. Delproduktene blir utregnet hver for seg og addert i sin helhet uten bruk av standardalgoritmen for addisjon. Derfor kan en slik beregning av stykket også sees på som en hybrid (Sherin & Fuson, 2005) kombinert av strategiene mønsterbasert og additiv beregning.

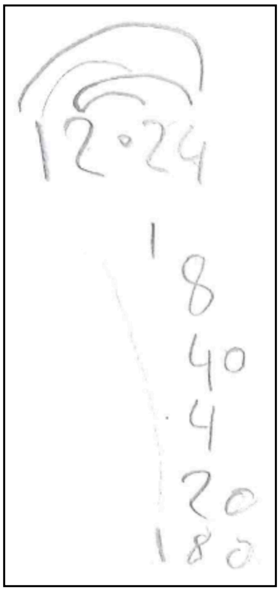
4.1.4 Siffer – for – sifferstrategi

I denne kategorien har jeg plassert situasjoner der elevene benytter formelle standardalgoritmer (Thompson, 1999, s.173) hvor de behandler tallene som bestående av uavhengige sifre i stedet for mengder. Elevenes arbeid med oppgave 5 er et eksempel på forsøk på bruk av en siffer – for – sifferstrategi, der elevene setter opp stykket etter standardalgoritmen, men behandler tallene som uavhengige sifre uten å bry seg om sifrenes verdi.

<u>M 8</u>

5.	12 Kari:	Jeg har ikke en anelse om hvordan vi skal klare dette her jeg
5.	13 Siri:	Okay 24 gange 12...24 gang 12
5.	14 Kari:	Ja vi bare begynn[]
5.	15 Siri:	Først tar vi enerne gang...4 gange 2
5.	16 Kari:	Jjjaa
5.	17 Siri:	Fire åtte det da... 2 gange 1, 2...2?!
5.	18 Kari:	Først så tar vi 12 tjueemm....
*		Kari og Sara ler
5.	19 Kari:	Ehm...prøver jeg da...2 gange 4, det er 8. og 2 gange 2 det er 4. og 1 gange 4

Her er det Siri som først er inne på tanken om å bruke en siffer – for – sifferstrategi. Siri sier i linje 5.15 at de skal starte med enerne. Ettersom Siri sitt utregningsforslag ikke fører fram kommer Kari med et nytt utregningsforslag i linje 5.19. Begge disse forslagene samsvarer med prosedyren som sier at man skal starte bakerst, i dette tilfelle med enerne, og deretter arbeide seg fra høyre mot venstre, en prosedyre som ofte følger regning med standardalgoritmer (Thompson, 1999, s.173). Kari sitt utregningsforslag ser ut til å stemme med prosedyren for multiplikasjon av tosifrede tall. Linje 5.19 vitner om at alle ledd blir multiplisert med hverandre, noe som Kari illustrerer i figur 7 med streker mellom hvert ledd. Derimot ser det ut til at det er noen misoppfattelser i forhold til sifrenes verdi i produktene. Thompson (1999) mener slike misoppfatninger kommer av at prosedyren i standardalgoritmene involverer ren manipulasjon av symboler, der symbolene ikke refererer til den spesielle meningen som knytter disse symbolene til en verdi. I linje 5. 19 og i figur 7 ser det ut til at $4 \cdot 2$ og $4 \cdot 10$ er blitt til 8 og 40, noe som er riktig, men produktene $20 \cdot 2$ og $10 \cdot 20$ har blitt til henholdsvis 4 og 20. Her kan det se ut til at Kari beregner $2 \cdot 2$ og $10 \cdot 2$ som et resultat av at hun behandler tallene som rene sifre uten å ta i betraktning hvilken verdi de har i forhold til tallsystemet. Til slutt ser man også i figur 7 at Kari behandler alle produktene som tiere når hun legger dem sammen.



Figur 7: Kari sine notater fra arbeidet med oppgave 5.

4.1.5 Kombinasjonsstrategi

I denne kategorien har jeg plassert situasjoner hvor elevene ikke finner svaret ved å benytte seg av bare én strategi, men kombinerer to eller flere. Som vist i sekvensene over er det flere situasjoner som kan betraktes som tilfeller med bruk av kombinasjonsstrategier. Blant annet i sekvens M 3, der elevene beregner $27 \cdot 7$, benytter elevene seg av to former for additiv beregning, ettersom gjentatt fordobling alene ikke fører fram til svaret. Det er også mulig å se på situasjoner der elevene benytter seg av den distributive lov som et tilfelle av kombinasjonsstrategi. I sekvens M 7, der elevene beregner $65 \cdot 6$, er det helt klart at elevene bruker distributiv lov, men bruk av distributiv lov innebærer samtidig bruk av andre typer strategier. I sekvens M 7 ser det ut til at elevene benytter seg av en multiplikativ regel for å finne delproduktet $60 \cdot 6 = 360$, og $5 \cdot 6 = 30$ ser ut til å være et kjent produkt. Deretter benytter de additiv beregning for å legge delproduktene sammen. Det er selvfølgelig ikke gitt at man skal bruke multiplikative regler for å komme fram til delproduktene. Det er fullt mulig å bruke andre typer strategier som for eksempel additiv beregning eller at produktet er kjent kunnskap som vist i dette eksempelet. Når delproduktene skal legges sammen må man nødvendigvis bruke en type additiv beregning, noe som i de fleste tilfeller er en annen strategi enn den som ble brukt for å beregne delproduktene. En kan dermed si at distributiv lov er en type kombinasjonsstrategi, der additiv bergning inngår. Hvordan man kommer fram til delproduktene kan variere.

Elevenes arbeid med oppgave 4. b er et annet eksempel på kombinasjon av strategier. Her beregner elevene 65 · 8.

<u>M 9</u>

4. 24 Kari:	Åtte pakker i måneden ja, men da tar vi utgangspunkt i 390 som er seks...og så 7, 8, da trenger vi bare å pluss på to pakker til da
4. 25 Siri:	Mhm...og så...
4. 26 Kari:	Pluss
4. 27 Siri:	Eh 65 pluss 65…(nynner)
4. 28 Einar:	13…
4. 29 Siri:	130
4. 30 Kari:	Pluss 130 og det er 2 pakker?
4. 31 Siri:	Ja, da bli det 130 pluss 390

Her benytter elevene seg av resultatet de fant i den foregående oppgaven, hvor elevene fant ut hvor mye seks pakker røyk tilsvarer. Elevene kompenserer ved å ta utgangspunkt i seks pakker røyk og slipper dermed å starte hele multiplikasjonsprosess på nytt. I stedet trenger de bare å legge til to pakker, noe Kari påpeker i linje 4.28. Denne kompenseringen kan også betraktes som kjent kunnskap for elevene, og jeg mener derfor at det kan sammenlignes med Sherin og Fuson (2005) sin beskrivelse av strategien kjent kunnskap. Sherin og Fuson definerer ikke kjent kunnskap på denne måten, men slik jeg tolker kjent kunnskap handler det om å anvende kunnskap fra et kunnskapslager. I dette tilfellet er 65 · 6 = 390 en del av elevenes kunnskapslager. For selv om elevene mest sannsynelig ikke kommer til å huske at 65 · 6 = 390 i all evighet, er poenget at de ikke trenger å regne det ut på nytt denne gangen fordi det på dette tidspunktet er en del av deres kunnskapslager. Etter å ha funnet ut hvor mye to pakker tilsvarer viser Siri i linje 4.31 hvordan regnestykket blir, 130 + 390. En kombinasjon av disse to strategiene ser jeg altså på som en kombinasjon av strategiene kjent kunnskap og additiv beregning (Sherin & Fuson 2005).

4.2 Kroppsøvingsøkta

Her vil jeg presentere løsningsstrategiene Kari, Einar og Siri benyttet seg av i matematikkøkta. Jeg tar utgangspunkt i transkripsjonen fra økta og elevenes notater. Strategiene ble delt inn i følgende kategorier:

- Additiv beregning
- Multiplikative regler
- Distributive lov og standardalgoritme
- Kompenserende strategi

Eksempler fra elevenes arbeid vil komme fortløpende.

4.2.1 Additiv beregning

Additiv beregning ble også benyttet i kroppsøvingsøkta, og på samme måte som i matematikkøkta oppstod problemet med strategien gjentatt fordobling. Dette er også tilfellet i elevenes arbeid med å finne ut hvor lang tid Siri bruker på en distanse som er fire ganger så lang som 100 meter. Dette gir regnestykket 23 · 4.

Fram til denne sekvensen har elevene regnet ut hvor mange sekunder Siri vil bruke på en distanse som er to ganger så lang og fire ganger så lang som 100 meter. Dette ut ifra tiden hun løp på 100 meter som var 23 sekunder.

<u>K 1</u>

L1.	21 Eskil:	Okay, enn hvis Siri skulle løpt 6 ganger så langt da?
L1.	22 Siri:	4 var 92. Da blir det 2 ganger til
L1.	23 Kari:	Ja, 2 ganger til
L1.	24 Siri:	Ehm...
L1.	25 Kari:	Eh...184...
L1.	26 Siri:	Ja...184!

Her går elevene ut ifra svaret de fikk i forrige oppgave, der de regnet ut tiden Siri vil bruke på en distanse som er 4 ganger så lang. Det kommer fram i linje L1.22 der Siri sier ”4 var 92” som viser til den forrige oppgaven. Deretter sier hun ”da blir det 2 ganger til”, som Kari i linje L1.23 sier seg enig i. Spørsmålet er imidlertid om Kari sier seg enig i det Siri mener med ”2 ganger til"? Ettersom Siri allerede har oppfattet at 4 ganger tilsvarer 92 kan det tyde på at utsagnet "2 ganger til" betyr "23 gange 2 en gang til", slik at det til sammen tilsvarer 6 ganger. Med matematisk notasjon kan en framstilling av Siri sitt utsagn se slik ut: $23 \cdot 6 = 23 \cdot 4 + 23 \cdot 2$. Her kan vi trekke direkte koblinger mellom "2 ganger til" og "$23 \cdot 2$", der ordet "til" knyttes til "23" som er tiden Siri bruker på 100 meter. Kari ser imidlertid ut til å oppfatte "2 ganger til" som "gange med 2 en gang til". Dette kan forklares ut ifra hennes utsagn i linje L1.25 der hun sier 184, som er resultatet av $92 \cdot 2$. I tillegg har elevene ganget 23 med 2, og 46 med 2 for å finne ut hvor lang tid Siri bruker på henholdsvis 200 meter og 400 meter i de to foregående oppgavene. Ordet "til" ser derfor ut til å bety "enda en gang" for Kari og ikke "23" som Siri mener. Her kan man se at overgangen fra det naturlige språket til matematikkspråket ikke er entydig. Kari sin tolkning av Siri sitt utsagn tar en annen retning som en konsekvens av at språket ikke er presist nok. Denne avsporingen fører til at elevene går over fra en aritmetisk følge til en geometrisk følge, på samme måte som i matematikkøkta. Siri mener med sitt utsagn å følge en aritmetisk følge der "2 ganger til" vil gi en ny økning på 2 enheter, altså 2, 4, 6 mens de ender opp med å følge Kari sin avsporing som gir en dobling, altså 2, 4, 8. Ettersom elevene går ut fra svaret på forrige oppgave og deretter velger en additiv beregningsmetode, kan dette også betraktes som et forsøk på en hybrid (Sherin & Fuson 2005) med strategien kjent kunnskap og additiv beregning.

Problematikken med bruk av gjentatt fordobling med en geometrisk følge i situasjoner der de egentlig skulle benyttet en additiv bergningsstrategi med en aritmetisk følge, oppstod flere ganger i økta. Et annet eksempel er elevenes utregning av tiden Kari ville brukt på en distanse som er seks ganger så lang som 100 meter. Elevene skulle også her gått ut ifra tiden, 25 sekunder, Kari bruker på 100 meter.

<u>K 2</u>

L1. 55	Kari:	To, vent litt…ehm eh...først jeg femti på to...og så på fire så var det 100 og da må på 6 bli 200, ja!

I denne sekvensen fordobler Kari 25 sekunder med bruk av en geometrisk rekke 2, 4, 8,…, 2^n. Fordoblingen skjer tre ganger og tilsvarer dermed 8 enheter á 25 sekunder. Kari sier imidlertid at 200 tilsvarer 6 enheter á 25 sekunder når hun sier "femti på to…og så på fire så var det 100 og da må på 6 bli 200." Det er derfor ikke samsvar med det hun gjør og det hun sier at hun gjør. Hun sier at antall enheter følger en aritmetisk rekke 2, 4, 6,…, $2n$ med en økning på 2 enheter mellom hvert ledd, men det hun gjør er å doble antall enheter etter en geometrisk rekke med en økning på 2^{n-1} enheter mellom hvert ledd. Denne problematikken er den samme som forekommer i sekvens M 4 i matematikkøkta.

4.2.2 Multiplikative regler

På samme måte som i matematikkøkta valgte elevene også å benytte seg av regelen om multiplikasjon med hele tiere i kroppsøvingsøkta. Et eksempel på det er elevenes arbeid med å regne ut hvor mange sekunder Kari ville brukt på distansen 4 gange 200 meter løping, med utgangspunkt i tiden hun bruker på 200 meter. Regnestykket er 55 · 4.

<u>K 3</u>

L2.	101 Einar:	Hva hadde du 55?
L2.	102 Kari:	Ja
L2.	103 Einar:	Og så, hva skulle vi ta det på?
L2.	104 Kari:	Fire ganger
L2.	105 Einar:	Fem gange fire...
L2.	106 Kari:	Det er...det er
L2.	107 Ei. og K.:	20
L2.	108 Einar:	20, og så eh...eh..50 gange 4. Eh 5 gange 4 er 20, 200..eh
L2.	109 Kari:	220?
L2.	110 Einar:	220 ja

I elevenes arbeid med å regne ut 5 · 4 = 20 kommer svaret relativt kjapt, og elevene viser heller ingen form for utregning. Det ser ut til at 5 · 4 = 20 er noe elevene henter fram fra et kunnskapslager, og som derfor er kjent kunnskap for dem. Når det gjelder elevenes arbeid med å regne ut 50 · 4 = 200 er denne beregningen å betrakte som en mønsterbasert strategi, eller regelstrategi (Cooney et. al.,1988). På samme måte som i blant annet M 6 fra matematikkøkta tyder Einar sin beskrivelse i linje L2.108 på anvendelse av regelen om multiplikasjon med hele tiere. Her gjentar han først at 5 gange 4 er 20 for deretter å si 200. 5 · 4 = 20 er her å betrakte som en mellomregning og denne kombinert med regelen om multiplikasjon med hele tiere gir svaret 200. Elevenes oppdeling av tallene i mengder kan også betraktes som bruk av den distributive lov eller bruk av standardalgoritmen beskrevet på følgende måte:

$$55 \cdot 4 = (50 + 5) \cdot 4 = (50 \cdot 4) + (5 \cdot 4) = 200 + 20 = 220$$

eller

$$\begin{array}{r} 55 \cdot 4 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline = 220 \\ \hline\hline \end{array}$$

Ut ifra elevenes muntlige beskrivelse er det vanskelig å si noe om hvilke av de to strategiene de benytter. Alt avhenger av hvordan de setter opp stykket, noe som foregår mentalt hos elevene og som man derfor ikke har tilgang til. Dette er et eksempel på hvor beslektet disse to strategiene er, og at en muntlig presentasjon slik som denne gjør det mer eller mindre umulig å avgjør hvilken strategi som blir brukt.

På samme måte som beskrivelsen av kombinasjonsstrategier i matematikkøkta kan bruken av distributiv lov betraktes som bruk av kombinasjonsstrategi. Situasjon K 3 kan derfor betraktes på samme måte som situasjon M 7 i matematikkøkta, altså både som distributiv lov og kombinasjonsstrategi med bruk av strategiene multiplikative fakta (Mulligan & Mitchelmore 1997), regler (Cooney et al., 1988) og additiv beregning (Sherin & Fuson, 2005).

4.2.3 Distributiv lov og standardalgoritme

I arbeidet med oppgavene i kroppsøvingsøkta er det flere tilfeller hvor elevene benytter en form for standardisert prosedyre. Blant disse tilfellene velger imidlertid elevene å omtale tallene som mengder, og ikke som uavhengige sifre. Den distributive lov og standardalgoritmen for multiplikasjon er, som nevnt i teorikapittelet 2.3, nært beslektet og elevenes arbeid med å beregne Kari og Siri sin hvilepuls, $16 \cdot 6$, er et eksempel på det. Som tidligere nevnt i metoden 3.3.2 fikk ikke elevene tilgang til noteringsredskaper i denne økta, men i situasjonen under setter elevene seg på bakken og noterer i snøen.

K 4

P1.	28 Kari:	Så tar vi seis..16...
*		Elevene tegner i snøen
P1.	29 Einar:	Mm
*		Siri og Kari ler
P1.	30 Kari:	Gange 6 er lik, okay sist vet du så krysset vi 6 gange 6 som er 36
P1.	31 Einar:	36 og så 10 gange 6...var det ikke det da?
P1.	32 Kari:	Jooo...
P1.	33 Einar:	60...
P1.	34 Kari:	Sytti åtti...seks tror jeg...jeg er usikker
P1.	35 Siri:	Haha...86....haha
P1.	36 Kari:	Hehe...ja 16..
P1.	37 Einar:	Ja, men hva fikk vi først. 6 eller 36?
P1.	38 Kari:	Ja..
P1.	39 Einar:	36...og så...tror det er...
P1.	40 Alle:	10 gange 6
P1.	41 Siri:	Som er 60
P1.	42 Einar:	Som er 60...og så 60 under…og så[]
P1.	43 Kari:	Og så plusser vi sammen det
P1.	44 Einar:	Null…og så 6 pluss 3
P1.	45 Einar:	96

I denne sekvensen velger elevene å dele stykket $16 \cdot 6$ inn i to deler (Anghileri, 2006), $6 \cdot 6$ og $10 \cdot 6$. Dette kommer fram i linje P1.30 og linje P1.31 hvor Kari og Einar utfyller hverandre. Ut ifra denne beskrivelsen er det vanskelig å avgjøre om elevene benytter standardalgoritmen eller den distributive lov. Med bruk av begge strategiene vil en slik mengdeoppdeling finne sted, men som nevnt i teorikapittel 2.3 kan strategiene skilles ved å se på notasjonens struktur i elevenes beregninger. Siden elevene i denne sekvensen noterte i snøen har vi mulighet til å se på dette. I følge videoopptaket setter Kari opp stykket horisontalt i snøen. På samme måte som i sekvens M 8 trekker hun strek mellom de tallene som skal multipliseres, der denne streksettingen mellom tallene er en metode for å holde styr på hvilke tall som skal multipliseres. Denne streksettingen kan for så vidt benyttes som hjelp i begge strategiene, men den videre oppstillingen av produktene og adderingen av dem skiller de to strategiene. I første omgang skriver Kari opp delproduktene $6 \cdot 6 = 36$ og $10 \cdot 6 = 60$ horisontalt etter likhetstegnet slik: $16 \cdot 6 = 36 + 60$. I linje P1.34 kan det se ut som om Kari bygger på Einar sin uttalelse i linje P1.34 og forsøker å regne ut svaret i hodet ved å dele 36 inn i delene 10 + 10 +10 + 6. Det ser ut som om hun starter fra 60, som Einar sier, og teller i hele tiere til 80 og legger til 6 på slutten. Denne tolkningen av Kari sin additive beregning sammen med hennes notering av stykket, vist over, kan samlet sett framstilles slik:

$$16 \cdot 6 = 36 + 60 = 60 + 10 + 10 + 6 = 86.$$

Slik Kari strukturerer beregningen notasjonsmessig er dette et eksempel på bruk av den distributive lov. Strukturen i notasjonen er framstilt horisontalt, multiplikasjonen så vel som addisjonen. Svaret til Kari er imidlertid feil fordi hun legger til 20 og ikke 30 før 6 legges til på slutten. Dermed blir regnestykket 60 + 26 = 86, og ikke 60 + 36 = 96. Usikkerheten rundt dette svaret gjør imidlertid at elevene starter addisjonen på nytt, og her skjer det noe interessant. Einar tar over i linje P1.37 og starter å notere delproduktene på nytt, men han velger å notere det vertikalt, noe som også framgår i linje P1.42 hvor han sier ”og så 60 under”. Det ser ut som om han tenker å notere dem under stykket, men der sitter Siri i veien så han noterer dem ved siden av på en ledig plass. Deretter benytter han standardalgoritmen (Thomsposn, 1999) for addisjon til å legge sammen tallene i linje P1.44 – P1.45, der han behandler tallene som uavhengige sifre. På samme måte som Kari sin framstilling kan denne tolkningen av Einar sin notasjon av stykket framstilles slik:

$$16 \cdot 6 \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \underline{60} \\ \underline{\underline{96}} \end{array}$$

I motsetning til Kari velger altså Einar å sette opp delproduktene vertikalt for så å addere dem sammen. En slik beregning er i tråd med standardalgoritmen for multiplikasjon. Den eneste forskjellen er at delproduktene plasseres under det opprinnelige stykket i følge prosedyren. På den annen side ser det ut til at han tenker å notere delproduktene under stykket, men som tidligere nevnt satt Siri i veien for det.

Denne sekvensen viser hvor sterkt slektskapet mellom den distributive lov og standardalgoritmen for multiplikasjon er. De kan ikke uten videre skilles, og uten håndfaste notater som viser strukturen på utregningen kan resultatet tolkes i begge retninger. Uansett er disse eksemplene på oppdeling av tall i mindre mengder et bevis på at elevene forstår at de kan dele opp multiplikasjonsstykket, multiplisere delene hver for seg, og deretter addere dem sammen. "Children need to know these results but not the name of the rule" (Anghileri, 2006).

4.2.5 Kompenserende strategi

På samme måte som i matematikkøkta valgte elevene ofte å kombinere to eller flere løsningsstrategier i arbeidet med de forskjellige oppgavene i kroppsøvingsøkta. Men i motsetning til i matematikkøkta er kombinasjonsstrategiene i kroppsøvingsøkta alltid en strategi i kombinasjon med en *kompenserende strategi*. Den kompenserende strategien er ofte i form av at elevene tilpasser eller kompenserer det ene tallet slik at det blir lettere å beregne, spesielt hvis det ene tallet er nært en tier. Den andre strategien varerier. Et eksempel på en slik strategikombinasjon er beregningen av Kari sin puls etter andre løping, der de skal beregne 39 · 4.

K 5

P2.	129 Kari:	39 gange 4.
P2.	130 Siri:	Fikk du 39?
P2.	131 Kari:	Ja
P2.	132 Einar:	9 gange 4.
P2.	133 Kari:	Det er tretti...
P2.	134 Einar:	6.
P2.	135 Kari:	Ja
P2.	136 Einar:	Er det ikke det da? Ja
P2.	137 Siri:	Siden du var 39 gange 4, da kan vi jo bare ta 40 gange 4 minus fire da? el?
P2.	138 Einar:	Nja...
P2.	139 Kari:	Jo det bli jo det, Siri du er genial!
*		Einar og Siri ler
P2.	142 Kari:	40 gange 4, ee...Hva da? Det er 80...nei?
P2.	143 Siri:	40 gange 2 er 80...da bli det 80 pluss 80!!

Det er to deler i denne sekvensen som er spesielt interessant å se på, og som påvirker hvordan elevene går fram i arbeidet med å finne Kari sin puls. Elevene starter med en tankegang som ligner på Thompson (1999) sin beskrivelse av formelle standardalgoritmer. Selv om dette arbeidet ikke gjøres skriftlig av elevene kan deres muntlige beskrivelse fra linje P2.129 –

P2.134 betraktes som en standardprosedyre. Spesielt kan Einar sitt utsagn i linje P2.132, der han viser til multiplikasjon av enerne i stykket, betraktes som starten på standardprosedyren for multiplikasjon. Denne strategien blir imidlertid forkastet når Siri i linje P2.137 forslår en helt annen strategi. Ettersom multiplikatoren, 39, er nært et rundt tall foreslår Siri å addere opp multiplikatoren til 40, multiplisere 40 med 4 og deretter trekke fra tilsvarende addert, i dette tilfellet 4. En slik tipasning er beslektet med strategien Anghileri (2006, s. 79) omtaler som *clever calculating*, her oversatt til *kompenserende beregning*. Kompenserende beregning er en strategi hvor elevene kompenserer tallet når tallets verdi er nært en hel tier. Å addere 9 til et tall kan for eksempel løses ved å addere 10 og deretter trekke fra 1. I forhold til sekvensen over er 39 bare 1 enhet unna neste tier, 40. Ved å kompensere 39 med å legge til 1 kan elevene bruke gjentatt fordobling (Mulligan & Mitchelmore 1997) for å finne svaret. Selv om Anghileri relaterer denne prosessen til situasjoner som omhandler addisjon mener jeg prinsippet med kompenseringen er den samme. Poenget med strategien er å gjøre utregningen lettere. Siri vet at det er lettere å multiplisere hele tiere og velger derfor å gjøre om stykket før multipliseringen, og deretter subtrahere tilsvarende addert fra svaret.

En annen form for kompensering er å gjøre seg nytte av resultatet av tidligere beregninger i beregningen av nye oppgaver. Eksempelet under viser elevenes arbeid med å beregne hvor lang tid Siri ville brukt på en distanse som er 4 ganger så lang som 100 meter, beregnet ut ifra tiden hun bruker på 100 meter som var 23 sekunder.

<u>K 6</u>

L1.	8 Eskil:	Hva om du skulle løpt fire ganger så langt da?
L1.	9 Siri:	46 gange fire d da?
L1.	10 Kari:	46 gange 2, det blir det
L1.	11 Siri:	Å ja å ja
L1.	12 Kari:	6 gange 2...
L1.	13 Einar:	Nei blir det ikke 46...gange ja d bli…det er 80..90..92 nei...jo det er kanskje 92

På samme måte som i blant annet sekvens M 9 fra matematikkøkta benytter elevene seg av resultatet fra forrige oppgave når de skal beregne hvor mange penger åtte pakker røyk tilsvarer. Som nevnt i analysen av M 9 anser jeg det tidligere resultatet som kjent for elevene. Denne kunnskapen er derfor en del av den kategorien Sherin og Fuson (2005) omtaler som kjent kunnskap. Likevel er dette å betrakt som en kompensering ettersom elevene ikke starter hele beregningen på nytt, men kompenserer ved å dra nytte av resultatet fra forrige beregning. Dette kommer fram i linje L1.10 når Siri foreslår en fordobling av 46, altså 2 ganger så langt som 100 meter. Når disse skal adderes ser det ut til at elevene velger å dele opp begge 46-tallene i 40 + 40 + (6 + 6) der 6 + 6 er delt opp i 10 + 2. I Einar sitt utsagn i L1.13 forklares dette slik: ”46...gange ja d bli…det er 80..90..92.” Her vil 40 + 40 tilsvare 80, 40 + 40 + 10 tilsvare 90 og 40 + 40 + 10 + 2 tilsvare 92.

5.0 Sammenligning og diskusjon

I dette kapittelet vil jeg gjøre en sammenligning av strategiene elevene benyttet seg av og var innom i arbeidet med oppgavene i matematikkøkta og kroppsøvingsøkta. I denne sammenligningen vil jeg se på forskjeller og likheter i strategibruk, og hvilke faktorer som spiller inn for elevenes valg av strategi i de to øktene. Her vil jeg forsøke å finne svar på andre delspørsmål av problemstillingen min: *Hvilke sammenhenger kan sees mellom konteksten og elevenes valg av strategier?* I siste del av dette kapittelet vil jeg forsøke å svare på problemstillingen min på bakgrunn av analysen jeg har gjort i denne studien: *Hva karakteriserer elevenes regnestrategier i multiplikasjon med flersifrede tall i en matematikkfaglig kontekst og i en kroppsøvingskontekst?*

5.1 Kontekstens betydning

5.1.1 Overføring av kunnskap og oppgavekontekstens betydning for elevene

Elevenes valg av løsningsstrategier i matematikkøkta og kroppsøvingsøkta ble klassifisert i henholdsvis fem og fire kategorier, og resultatet viser flere likheter i elevenes valg av løsningsstrategier. Figur 8 viser en oversikt over forekomstene av de forskjellige strategiene i begge arbeidsøktene. Ettersom elevene arbeidet med åtte delspørsmål i matematikkøkta og til sammen 22 delspørsmål i de to aktivitetene i kroppsøvingsøkta, førte det til et større antall forekomster av strategier i kroppsøvingsøkta. I utgangspunktet var det 24 delspørsmål i kroppsøvingsøkta, men siden elevene hadde to tilfeller hvor to av målingene ble like ser jeg på dem som ett spørsmål. For å gjøre det lettere å sammenligne har jeg valgt å oppgi prosentvis fordeling i tillegg til antall forekomster. Elevene benyttet seg ikke av alle strategiene de diskuterte. I figur 8 har jeg derfor tatt med både strategiene elevene faktisk benyttet for å komme fram til en løsning, og strategiene de bare diskuterte.

Matematikkøkt			**Kroppsøvingsøkt**		
Strategier	Antall forekomster		Strategier	Antall forekomster	
Additiv beregning	5	29.4%	Additiv beregning	8	22,8%
Multiplikative regler	3	17,65%	Multiplikative regler	5	14,4%
Distributiv lov	3	17,65%	Distributiv lov og Standardalgoritme	14	40%
Siffer – for - sifferstrategi	1	5,9 %			
Kombinasjonsstrategi	5	29,4%	Kompenserende strategi	8	22,8%
Sum	17		Sum	35	

Figur 8: En oversikt over antall forekomster av de forskjellige strategiene i matematikkøkta og kroppsøvingsøkta.

Oversikten (figur 8) viser at elevene i kroppsøvingstimen benyttet seg av eller var innom fire av de fem strategiene som de benyttet i matematikktimen, men i forskjellig grad. Dette viser at elevene bruker den samme matematiske kunnskapen i kroppsøvingsøkta som de bruker i matematikkøkta i arbeidet med å løse multiplikasjonsoppgaver. En slik kunnskapsoverføring er i tråd med det Evans (1999) mener om at *overføring* av kunnskap refererer til bruken av ideer og kunnskap lært i én sitasjon i en annen. Et eksempel på det er elevenes bruk av regelen om multiplikasjon av hele tiere. Denne regelen finner vi blant annet i sitasjon M 5 og M 6 i matematikkøkta, hvor elevene regner ut $20 \cdot 7$ og $40 \cdot 7$, og i situasjon K 3 hvor elevene regner ut $55 \cdot 4$. I alle situasjonene bruker elevene regelstrategien når de skal finne tierens verdi. I situasjon K 3 må de gjøre beregningen $5 \cdot 4$ i tillegg, men regelen gjør at elevene i alle situasjonene kommer raskt og effektivt fram til svaret. Måten elevene bruker og håndterer regelen om multiplikasjon med hele tiere på gir et inntrykk av at den er mer eller mindre automatisert. Elevene nevner ikke regelen i bruken av den, men de bruker den som om det nærmest var en selvfølge. Säljö sier at overføring av kunnskap dreier seg om ”kunnskaper som er blitt så forankret i oss at de synes helt ‘naturlige’ og ‘selvfølgelige’ ” (2001, s. 148). Det kan derfor tyde på at elevene kjenner godt til denne regelen og ikke trenger å tenke på når og hvordan de skal bruke den, de bare gjør det.

Flere mener at overføring av kunnskap mellom kontekster er komplisert (Anderson, Reder, & Simon, 1996; Evans, 1999; Säljö, 2001), og Nunes et al. (1993) viser gjennom sin undersøkelse at overføring av kunnskap fra en skolekontekst til en hverdagskontekst som gateselger er vanskelig. Et naturlig spørsmål er da hvorfor Kari, Einar og Siri mestrer kunsten i å overføre kunnskap fra matematikkøkta til kroppsøvingsøkta? For selv om regelen om multiplikasjon med hele tiere kan virke selvfølgelig for elevene kan man vanskelig tenke seg at alle strategiene elevene benytter er like automatiserte. En av grunnene som gjør overføringen av kunnskap mulig kan være kontekstens betydning for elevene. I motsetning til gatebarna i Brasil kan det virke som om kontekstforskjellene ikke har så stor betydning for Kari, Einar og Siri. Dette ser vi spesielt på elevenes behandling og oppfattelse av oppgavene de regner og aktivitetene de gjennomfører i kroppsøvingsøkta. Elevene løser oppgavene i kroppsøvingsøkta uten å stille spørsmål rundt realitetselementet som ligger i aktivitetenes natur. Normalt er det, med disse aktivitetene, grunn til å diskutere om det er slik at en måling av puls i 10 sekunder gir et like godt resultat som måling av puls i 30 sekunder? Og om det er rimelig at man løper 600 meter på 6 ganger den tiden man bruker på 100 meter? Dette diskuteres ikke, noe som kan tyde på at elevene ikke påvirkes av konteksten, men oppfører seg som om det er en vanlig matematikktime. Dette mener Säljö er essensielt i forhold til overføring av kunnskap mellom kontekster: ”Oversettelsen fra ett miljø til et annet er ofte ganske komplisert, fordi de virksomhetssystemene som handlinger inngår i, arbeider ut fra ulike forutsetninger og ulike logikker” (2001, s.145). Sett i forhold til gatebarna i Brasil ser det ut til at Kari, Einar og Siri arbeider innenfor samme virksomhetssystem under begge kontekstene, noe som i følge Säljö gjør kunnskapen lettere å overføre. Aktivitetene greier ikke å løsrive elevene fra matematikkonteksten, noe som viser at matematikkdiskursen står sterkt.

At matematikkdiskursen står sterkt underbygges også av at kunnskapen elevene overfører fra matematikkøkta til kroppsøvingsøkta er mer eller mindre uforandret. I overføring av kunnskap fra én kontekst til en annen er det naturlig at kunnskapen endres eller tilpasses den nye konteksten, men her skjer overføringen mer direkte. Dette kan i likhet med argumentet over skyldes at elevene oppfatter begge arbeidsøktene som matematikktimer. På samme måte som i kroppsøvingsøkta, med unntak av et par tilfeller, knytter heller ikke elevene tallene i oppgavene i matematikkøkta til oppgavekonteksten. Oppgavene i matematikkøkta er, som tidligere nevnt, basert på RME sin idé om at oppgavenes kontekst skal være virkelig og ekte for elevene (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Likevel diskuteres kun de aritmetiske problemene i de fleste tilfellene, mens selve problemet i oppgavens kontekst ikke vies mye oppmerksomhet verken før, under eller etter at elevene har kommet fram til svaret. Et tydelig eksempel på det er at elevene i nesten hver oppgave i matematikkøkta innleder med å uttrykke det aritmetiske problemet. For eksempel i linje 2.1 i sitasjon M 1 sier Einar ”34 gange 4” som er det aritmetiske problemet i oppgave 2. Gjennom elevenes diskusjon av denne oppgaven er ikke verken 34-tallet knyttet til antall millioner brukt på halloween eller 4-tallet knyttet til antall år. Ved å kun se på sekvensen M 1 er det mulig å forestille seg at den kan være hentet fra mange ulike oppgaver med ulik kontekst. Strategikunnskapen elevene benytter i matematikkøkta er derfor aritmetisk kunnskap som er uavhengig av konteksten. Ettersom det kan virke som om elevene, som nevnt over, ser på kroppsøvingsøkta som en ren matematikktime ser det ut til at kunnskapen som overføres kun er aritmetisk.

Det er også interessant å se på hvorfor oppgavenes kontekst virker å være uinteressant for elevene. Her kan det være flere faktorer som spiller inn. En av faktorene kan rett og slett være at elevene ikke oppfattet oppgavenes kontekster som virkelige. Selv om oppgavene i matematikkøkta inneholdt flere elementer som knyttes direkte til disse elevenes hverdag, hadde ikke svarene noen betydning for dem. Van den Heuvel–Panhuizen (2003) mener at termen ”realistisk” ikke betyr at oppgavenes kobling til virkeligheten er viktig, og påpeker at både fantasiverdener og eventyr kan være passende kontekster for et problem så lenge de føles ekte for elevene. En annen faktor som kan spille inn på elevenes tilsynelatende dårlige interesse er om elevene er vant til å arbeide med denne typen oppgaver. Som nevnt i metodekapittel 3.2.2 er undervisningen elevene er vant til en blanding mellom oppgaveparadigmet og undersøkelseslandskap. Det er derfor naturlig å tro at elevene har arbeidet med denne typen oppgaver før. Likevel sier det ingen ting om hvordan elevene arbeidet med disse oppgavene. Carraher og Schliemann (2002) viser til Brenner og Moschkovich som vektlegger at måten lærere presenterer oppgavene på, mer enn det realistiske aspektet i oppgaven, spiller en viktig rolle for elevenes tilnærming til problemløsning. Hvis målet med oppgavene er å løse matematikkproblemet og å se på hvilke måter det er mulig å løse matematikkproblemet på, kan fokuset til elevene flyttes fra problemet i konteksten til det aritmetiske problemet i oppgaven. Konteksten vil ikke spille noen rolle hvis fokuset på oppgaven er tradisjonelt.

5.1.2 Oppgavene og elevenes arbeid sett i lys av Skovsmose sine læringsmiljøer

Elevenes endring av fokus fra problemet i konteksten til det aritmetiske problemet kan også sees i lys av Skovsmose (1998) sin matrise av seks læringsmiljøer. Alle oppgavene i matematikkøkta har referanser til virkeligheten, men denne virkeligheten er ikke ekte for elevene fordi de ikke er en del av den. Denne referansen er en virkelighetskontekst som er tilført oppgaven og er derfor bare å betrakte som en semi-referanse til virkeligheten. Ettersom matematikkproblemene er formet som oppgaver er de innenfor oppgaveparadigmet. På bakgrunn av dette mener jeg oppgavene i matematikkøkta tilhører det Skovsmose (1998) omtaler som læringsmiljø (3). På den annen side er dataene i oppgavene reelle. Jeg vil påstå at hvis oppgavene hadde lagt opp til at elevene selv skulle finne informasjonen for å løse oppgavene, for eksempel hvor stort bølgebassenget i Pirbadet er, ville disse oppgavene passet inn i læringsmiljø (5). Ettersom disse opplysningen ble gitt i oppgaveteksten vil jeg plassere oppgavene i læringsmiljø (3). Dette viser at det ikke er noen klare skiller mellom læringsmiljø (3) og læringsmiljø (5).

I likhet med matematikkøkta har oppgavene i kroppsøvingsøkta også referanse til virkeligheten, men i motsetning til matematikkøkta er ikke denne virkeligheten noe som bare er tilført elevene gjennom oppgavene i kroppsøvingsøkta. I kroppsøvingsøkta er elevene en del av virkeligheten i oppgavene, og referansene er derfor å betrakte som reelle. Matematikkproblemene er formet som oppgaver og er derfor innenfor oppgaveparadigmet på samme måte som oppgavene i matematikkøkta. På bakgrunn av dette vil jeg plassere oppgavene innefor læringsmiljø (5). Likevel er det på den annen side et spørsmål om konteksten og aktivitetene i kroppsøvingsøkta er av en slik karakter at de kan plasseres innenfor læringsmiljø (6). Som nevnt tidligere vil jeg påstå at det i aktivitetenes natur legges til rette for at elevene kan undre seg over flere matematiske spørsmål, spesielt i forhold til svarenes gyldighet. Dette spesielt fordi det er elevene som utfører handlingene der matematikkoppgavene springer ut av aktivitetene. På bakgrunn av dette vil jeg påstå at oppgavene i kroppsøvingsøkta også har slektskap til læringsmiljø (6), nettopp fordi de legger til rette for at elevene kan undre seg, og fordi svarene har mening for dem.

Oppgavene har altså referanser til virkeligheten i begge øktene, enten semi-referanser eller reelle referanser. Likevel, som nevnt over, ser ikke disse referansene ut til å være interessante for elevene. De har kun fokus på aritmetikken i oppgavene og på å finne fram til svaret, noe som relaterer til læringsmiljø (1). Et eksempel på dette kan være sekvens M 1. Som nevnt tidligere kan denne sekvensen være hentet fra mange ulike oppgaver, der det er umulig å si hva konteksten er. Ekstra spesielt er det kanskje for oppgavene i kroppsøvingsøkta, der elevene arbeidet med matematikkoppgaver som følge av en aktivitet de hadde gjennomført. Et eksempel kan være sekvens K 4 der elevene beregner hvilepulsen. Hvis man ikke hadde visst hva elevene gjorde, kunne denne sekvensen fint passet inn i en klasseromssituasjon der elevene arbeidet med rene aritmetiske oppgaver på samme måte som sekvens M 1. Det viser seg dermed at elevene beveger seg bort fra læringsmiljøet oppgavene befinner seg i og ender opp i læringsmiljø (1), altså oppgaver med ”ren” matematikk.

5.2 Språket som medierende verktøy

Säljö (2001) mener at det som gjør språket til et kraftig medierende redskap er den fleksible og utviklingsmessige relasjonen som finnes mellom språklige uttrykk og de fenomenene disse uttrykkene refererer til. Videre sier han at ordene vi bruker ofte har flere betydninger og signaliserer et bredere innhold enn akkurat det vi refererer det til. Säljö mener derfor at samspillet mellom hva ord betyr for et enkelt individ og hva det betyr i kollektivet har en grunnleggende betydning for at alle skal forstå meningen bak det som blir sagt. I kroppsøvingsøkta ble aktivitetene presentert muntlig for elevene, og ordlyden i matematikkoppgavene inneholdt ofte begrepene *gange* eller *ganger*:

P1. 1 Lars: Dere skal gange det med 6.

P2. 11 Lars: Prøv å tenk litt annerledes da, nå ska det ganges med 4.

L1. 21 Eskil: Okay, enn hvis hun skulle løpe 6 ganger så langt da?

Begrepene gange, ganges eller ganger kommer av begrepet *ganging* som er et annet ord for multiplikasjon, og er det begrepet som oftest benyttes i dagligtalen. I skolen er også begrepene gange, ganges eller ganger benyttet (se blant annet Bakke & Bakke, 2006b), selv om multiplikasjon skal benyttes som en del av målene innenfor matematikkfaget i Kunnskapsløftet (Udir., u. å.). I matematikkøkta fikk elevene presentert oppgavene i papirform, der begrepene gange, ganger og ganges ikke var nevnt. Når både Lars og jeg presenterte oppgavene med disse begrepene var det selvsagt for oss at de innbefatter alle mulige regnestrategier. For elevene derimot kan det virke som om disse begrepene får dem til å tenke på spesielle multiplikasjonsprosesser de har lært for å løse oppgavene. Oversikten av strategiforekomstene i de to øktene (figur 8) viser at bruken av den distributive lov og standardalgoritmen er klart mest brukt i kroppsøvingsøkta, i motsetning til i matematikkøkta hvor strategiene er mer jevnt fordelt. Dette underbygger antagelsen om at språket har innvirkning på elevenes valg av strategier.

I kroppsøvingsøkta kan det virke som om elevene tenker at oppgavene skal løses med bruk av standardalgoritmen eller den distributive lov, noe de også benytter ved flere anledninger. Et eksempel på det er situasjon K 4 hvor elevene setter seg ned i snøen og skriver opp stykket. I denne situasjonen bruker de både den distributive lov og standardalgoritmen for multiplikasjon når de deler opp stykket $16 \cdot 6$ i to mindre mengder, $6 \cdot 6$ og $10 \cdot 6$. I begge strategiene fremgår det en inndeling av stykket i mengder av enere og tiere som skal multipliseres med den gjenstående faktoren i stykket, for deretter å addere delproduktene sammen. Denne prosessen med å multiplisere enerne for seg selv og deretter tierne for seg selv er vanlig for arbeid med standardalgoritmen i multiplikasjon, i motsetning til additiv beregning som behandler tallene på en annen måte. Det kan altså virke som om begrepene i den muntlige presentasjonen av oppgavene kan være grunnen til at elevene velger å benytte den distributive lov og standardalgoritmen for multiplikasjon i langt større grad i kroppsøvingsøkta enn i matematikkøkta.

Viktigheten av språket viser seg også på flere områder å være mer avgjørende i kroppsøvingsøkta enn i matematikkøkta. Som nevnt i metodekapittel 3.3.2 fikk ikke elevene tilgang til noteringsverktøy i kroppsøvingsøkta. Dette krever ikke bare en større muntlig aktivitet av elevene, men også at kommunikasjonen skjer med et tydelig språk slik at de tolker hverandres utsagn riktig. Selv om dette ikke er gjennomgående for kroppsøvingsøkta er elevenes arbeid i situasjon K 1 et eksempel på hvordan en utydelighet i språket kan påvirke valg av strategi. I stedet for at elevene benytter gjentatt addisjon eller en annen passende form for additiv beregning, bruker Kari gjentatt fordobling fordi hun tolker Siri sitt utsagn "2 ganger til" feil. Her ser vi at språket er en direkte årsak til at Kari endrer strategi, noe som igjen fører til at svaret blir feil. I likhet med problematikken rundt begrepene gange, ganger og ganges i presentasjonen av oppgavene i kroppsøvingstimen viser dette hvordan språket som medierende redskap (Säljö, 2001) avhenger av tydelighet, og at alle aktører har lik forståelse av begrepet.

5.3 Noteringsredskap som medierende verktøy

I tillegg til språket kan det se ut til at mangelen på noteringsverktøy som medierende verktøy (Säljö, 2001) er med på å skape problemer for valg av strategi i kroppsøvingsøkta. Strategier som gjentatt fordobling og andre former for additiv beregning krever at elevene husker alle mellomregningene og at de til enhver tid har kontroll på hvor mange enheter som gjenstår i adderingen. Dette gjenspeiler seg også i oversikten i figur 8 der det er tydelig at strategien additiv beregning forekommer langt oftere i matematikkøkta hvor elevene har blyant og papir enn i kroppsøvingsøkta hvor de ikke har det.

Mangelen på skriveverktøy får imidlertid elevene til å finne andre noteringsmuligheter. I arbeidet med den første pulsmålingen velger elevene å benytte seg av snøen og fingrene som noteringsverktøy, og beregner svaret med bruk av standardalgoritmen. Denne strategien er både effektiv og riktig, men før beregningen av den andre pulsmålingen får elevene beskjed om å ikke tegne i snøen av Lars. Overgangen fra å ha muligheten til å notere til å ikke ha det krever en omstilling i strategivalg og strategibruk. Standardalgoritmen som elevene benyttet seg av i første oppgave krever god hukommelse hvis man ikke har noteringsredskaper, noe som gjør strategien mer krevende. Likevel kan det være vanskelig å omstille seg og tenke annerledes når en strategi fungerer godt. Dette ser også ut til å være vanskelig for Kari, Einar og Siri som virker å være for opphengt i å regne med den metoden de brukte under første måling til at de greier å tenke annerledes. Elevene forsøker fortsatt å benytte standardalgoritmen, men uten skriveredskaper sliter de med å huske alle tallene og mister derfor oversikten. Dette fører til at de forsøker å notere på andre måter. De begynner blant annet å skrive på ryggene til hverandre med fingeren som blyant. I tillegg forsøker elevene å holde oversikten over alle tallene og mellomregningene ved hjelp av fingrene, der antall fingre representerer en mellomregning eller et annet tall. Disse noteringsstrategiene fungerer imidlertid dårlig, og elevene finner raskt ut at de er tvunget til å gjøre beregningene i hodet. Dette byr tilsynelatende på problemer og Kari ytrer sin frustrasjon over dette i linje P2.71.

P2. 71 Kari: Det er jo 36 da, okay...og det var...åh, det hadde vært mye lettere og hatt oversikten hvis vi hadde hatt papir og blyant.

Mangelen på noteringsverktøy ser altså ut til å skape problemer under hele kroppsøvingsøkta, noe som gjenspeiler seg i antall riktige og gale svar. Figur 9 viser en oversikt over antall riktige og gale svar i de to arbeidsøktene.

Matematikkøkt			Kroppsøvingsøkt		
Antall riktige svar	7	87,5%	Antall riktige svar	15	68,2%
Antall gale svar	1	12,5%	Antall gale svar	7	31,8%
Antall oppgaver	8		Antall oppgaver	22	

Figur 9: En oversikt over hvor stor andel av besvarelsene som var riktige og gale.

Problemene med å huske tallene og mellomregningene gjelder alle strategiene, så vel som standardalgoritmen. Antall gale svar tyder derfor på at elevene ikke greier å benytte seg av strategien på samme måte uten noteringsverktøy. Dette viser at noteringsverktøy fungerer som et medierende verktøy (Dysthe, 2001 og Säljö, 2001) for elevene og er et redskap som gjør det lettere å huske tall og mellomregninger, noe som igjen gir større sjanse for riktig svar.

6.0 Avslutning

6.1 Oppsummering

I denne studien har jeg undersøkt hva som karakteriserer elevenes regnestrategier i multiplikasjon med flersifrede tall i en matematikkfaglig kontekst og i en kroppsøvingskontekst. For å undersøke dette har jeg sett på tre elevers valg av regnestrategier i multiplikasjon i ei matematikkøkt og ei kroppsøvingsøkt. I tillegg har jeg sett på hvilke årsaker som virker inn på elevenes valg av de forskjellige regnestrategiene.

Denne studien viser at kunnskap er overførbart (Evans, 1999) mellom kontekster. Det som ser ut til å påvirke denne overføringen mest er elevenes oppfatning av konteksten. Elevene i denne undersøkelsen arbeider med multiplikasjonsoppgaver i to skolekontekster, men måten elevene behandler oppgavene på viser at kontekstforskjellen i liten grad påvirker elevene. Elevene bryr seg ikke om forholdet mellom resultat og virkelighet verken for oppgavene i matematikkøkta eller aktivitetene i kroppsøvingsøkta. Elevene beregner oppgavene rent matematisk, noe som viser at matematikkdiskursen står sterkt hos elevene. Når det er sagt vil det nok i dette tilfellet være flere grunner til at elevene viser liten eller ingen interesse for oppgavenes kontekst. For eksempel elevenes faktiske interesser eller hvordan de er vant til å arbeide med slike oppgaver.

Språket og noteringsredskaper fungerer som medierende verktøy (Säljö, 2001) og viser seg i denne studien å være direkte gjeldende, både for valg og bruk av strategi. Språket jeg og Lars bruker i kommunikasjon med elevene, så vel som språket elevene bruker seg i mellom viser seg å være for upresist. Dette gjenspeiler seg blant annet gjennom presentasjonene av oppgavene i kroppsøvingsøkta, der begrepene *gange, ganger* og *ganges* blir brukt. Disse begrepene ser ut til å fungere som mediatorer og får elevene til å anvende strategier som inneholder en prosedyre, standardalgoritmen og den distributive lov, noe som gjenspeiler seg i oversikten over antall strategiforekomster for de to øktene (se figur 8). Utydelighet i språket mellom elevene fører også til problemer i løsingen av oppgaver. Uten noteringsverktøy er elevene avhengige av et presist språk. Upresist språk fører til ulike tolkninger av hverandres utsagn, som igjen fører til feil løsningsmetode og feil svar. Mangelen på noteringsverktøy skaper også hodebry for elevene i den forstand at de må huske alle tall og mellomregninger i hodet. Dette blir i noen tilfeller vanskelig for elevene, noe som gir seg utslag i en prosentvis større andel gale svar i kroppsøvingsøkta enn i matematikkøkta hvor noteringsverktøy var tilgjengelig.

6.2 Perspektivering

Gjennom arbeidet med denne studien ser jeg flere aspekt som beriker mine matematikkdidaktiske kunnskaper, men også aspekter som får meg til å stille videre spørsmål om hvordan jeg vil at min matematikkundervisning skal være. I det følgende vil jeg diskutere noen av disse aspektene.

Selv om studien åpenbart viser at kunnskap overføres fra matematikkøkta til kroppsøvingsøkta kan man spørre seg om *hvilken* kunnskap vi ønsker at eleven skal overføre fra klasserommet til andre kontekster. Min oppfatning av grunnskolen er at den skal gjøre elevene rustet til å møte hverdagslivet og samfunnet vi lever i, noe som også innbefatter hverdagsmatematikk og å mestre utfordringer sammen med andre. ”Den [skolen] skal gi hver elev kyndighet til å ta hånd om seg selv og sitt liv, og samtidig overskudd og vilje til å stå andre bi” (Udir., 2010.). Med tanke på dette er det kanskje et spørsmål om det er likeså viktig å diskutere problemet i oppgavens kontekst, som hvordan aritmetikken i oppgaven skal løses. På denne måten kan man sette fokus på *hvor* og *når* elevene skal anvende matematikkunnskapen og ikke bare *hvordan*. Dette krever å vite noe om hvilke kontekster som er fruktbare for elevenes læring. Evans (1999) mener overføring av kunnskap kan skje i flere former, blant annet ved å bruke skolematematikk utenfor matematikktimen og å gjøre seg nytte av aktiviteter utenfor skolen i læringen av skolematematikk.

En didaktisk implikasjon av denne studien er at matematikkundervisningen er tjent med å ha en realistisk tilnærming til oppgavenes kontekst, nettopp fordi det gir et grunnlag for at den matematiske kunnskapen som elevene tilegner seg kan brukes i reelle situasjoner. Dette gjør at kunnskapen blir nyttig for elevene. Å bruke oppgaver med en realistisk kontekst i undervisningen fremmer det Kunnskapsløftet sier om det arbeidende menneske:

> Opplæringen må derfor knyttes til egne iakttakelser og opplevelser. Ferdighetene til å handle, til å gjøre nye erfaringer og tolke dem, må ta utgangspunkt i den forestillingsverden barn, unge og voksne møter utdanningen med - både lokale erfaringer de har høstet, målføret i deres nærmiljø og felles impulser de har fått gjennom massemediene. Undervisningen må legges opp med nøye omtanke for samspillet mellom konkrete oppgaver, faktisk kunnskap og

begrepsmessig forståelse. Ikke minst må den legges opp slik at elevene etter hvert får praktiske erfaringer med at kunnskap og ferdigheter er noe de selv kan være med på å utvikle (Udir., 2010.).

RME går blant annet ut på at elevene lærer matematikk gjennom å utvikle og søke matematiske begreper og verktøy i dagligdagse situasjoner som gir mening for dem (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Dette skjer ved at elevene arbeider med oppgaver med en ”realistisk” kontekst, der termen ”realistisk” refererer til intensjonen med problemet og situasjonen den presenteres i som elevene forestiller seg (van den Heuvel–Panhuizen, 2003). Ved å gi elevene slike oppgaver vil selve oppgaven få elevene til å *matematisere* (Freudenthal, 1971) problemet, og gjennom denne prosessen skape matematisk kunnskap. Likevel kan det se ut til at disse oppgavene ikke gjør jobben alene. Denne studien viser at elevene ikke ser på virkelighetselementet, noe det kan være flere grunner til. Det kan tyde på at oppgavene jeg benyttet ikke er virkelige nok for elevene og derfor ikke føles ekte, på tross av at oppgavenes kontekst omhandler elevenes hverdag på forskjellige måter. Å finne gode kontekster som føles realistiske og ekte for elevene slik at de løsriver seg fra den sterke matematikkdiskursen er ikke enkelt, og må derfor heller ikke tas for gitt. I tillegg tror jeg også at læreren må være støttende slik at elevene ser problemet i konteksten og ikke bare matematikkoppgaven. Det må legges til rette for at realiteten i oppgavene blir diskutert, og på denne måten skapes en kultur som igjen tjener sammenhengen mellom skole og hverdag. Dette støttes også av Skovsmose (1998) som mener oppgaveparadigmet kan utfordres gjennom å bevege seg fra læringsmiljø (1) til (2) og (3) til (4), altså fra oppgaveparadigmet til undersøkelseslandskap. Med det mener Skovsmose at både aritmetiske oppgaver og oppgaver som har en referanse til virkeligheten kan brukes som et utgangspunkt for å diskutere matematikken videre, både rent aritmetisk og forholdet mellom svar og virkelighet.

Standardalgoritmen for multiplikasjon, eller standardalgoritmer generelt, er jeg jevnt over lite tilhenger av. Jeg deler Thompsons syn, på formelle standardalgoritmer, som er at disse skaper en del vanskeligheter blant annet fordi de kan føre til at man følger en bestemt prosedyre i stedet for å forstå hva tallene egentlig representerer (1999, s.173). I denne studien har jeg beskrevet denne strategien som en ”siffer – for – sifferstrategi”, der tallene behandles som uavhengige sifre. Gjennom analysen har jeg imidlertid blitt mint på hvordan standardalgoritmen egentlig behandles som en strategi hvor stykket deles inn i delprodukt, og tallene behandles som mengder i stedet for sifre. Det som likevel har vakt størst oppsikt er standardalgoritmens likhet med den distributive lov. Jeg har vært bevisst på at den distributive lov er beslektet med standardalgoritmen, men gjennom denne studien har jeg virkelig sett hvor nært beslektet de er. Blir beregningen presentert muntlig er det nærmest umulig å skille disse to strategiene, noe som også framgår i elevenes besvarelser i denne studien. Hvis presentasjonen tydelig viser hvordan adderingen av produktene gjøres kan de til en viss grad skilles ved at standardalgoritmen vanligvis bruker standardalgoritmen for addisjon. På den annen side er det ingen regel som sier at standardalgoritmen for addisjon ikke skal brukes i sammenheng med den distributive lov, og heller ikke at den må brukes i sammenheng med standardalgoritmen for multiplikasjon. Med utgangspunkt i disse funnene har jeg blitt mer bevisst på hvordan disse to strategiene kan utfylle hverandre, og hvordan den ene strategien kan brukes som utgangspunkt for å lære den andre. I tillegg har jeg fått øynene opp for at standardalgoritmen for multiplikasjon kan være meningsfull ved å ha et sterkt fokus på å behandle tallene som mengder framfor uavhengige sifre.

Studien viser hvordan elevene til en viss grad avhenger av å bruke noteringsverktøy for å et riktig resultat når de benytter enkelte strategier. Dette viser at undervisningen også bør ha fokus på hoderegningsstrategier, slik at elevene ikke blir avhengig av noteringsverktøy når de skal gjøre beregninger. Studien viser at unøyaktigheter i språket både gir begrep og setninger rom for annerledes tolkning enn hva som egentlig menes. Det viser hvor kraftfullt språket vårt er og hvordan ordene vi bruker ofte har flere betydninger og signaliserer et bredere innhold enn akkurat det vi refererer det til (Säljö, 2001). For at språket skal bli meningsfullt er det derfor viktig med et presist språk, der alle ord og begreper har en felles mening for kollektivet. Fokus på språket og noteringsverktøy som medierende redskaper anser jeg derfor som viktig i undervisningen.

Denne studien har gitt meg mange svar på hvordan matematikk kan sees i sammenheng med andre kontekster, og hva som er viktig å tenke på når man tar i bruk andre kontekster og situasjoner i matematikkundervisningen. Likevel har det underveis i denne forskningsprosessen dukket opp nye spørsmål som jeg ikke har fått svar på. Hvordan kan matematikkundervisning legges opp for at elevene skal bli mindre avhengige av noteringsverktøy? Hvor viktig er språket i matematikken med tanke på begrepsforståelse? Hvordan kan matematikkundervisningen gjennom et tverrfaglig opplegg ta i bruk andre fag i skolen på en fruktbar måte? Dette er spørsmål som jeg mener det vil være interessant å forske videre på for å stadig utvikle meg til å bli en bedre matematikklærer i skolen.

Litteraturliste

Anderson, J. R., Simon, H. A., & Reder, L. M. (1996). Situated learning and education. *Educational Researcher*, *25*, 5-11.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 367-385.

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2. utg.). London: Continuum international pub.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006a). *Grunntall: matematikk for barnetrinnet: Grunnbok 3b*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006b). *Grunntall: matematikk for barnetrinnet: Grunnbok 5a*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006c). *Grunntall: matematikk for barnetrinnet: Grunnbok 6a*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Carraher, D.W., & Schliemann, A.D. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? I J. Moshkovich, & M. Brenner (Red.), *Everyday mathematics. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education*, *11* (ss.131-153). Reston, Va.: National council of teachers of mathematics.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg). London: Routledge.

Cooney, J. B., Swanson, H. L., & Ladd, S. F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition and Instruction, 5*, 323-345.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (ss. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Evans, J. (1999). Building bridges: Reflections in the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 23-44.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Nederland: D. Reidel Publishing Company.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. I D. A. Grouws (Red.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 276-295). New York: Macmillan. Goodman, L. (2011). *Long Multiplication.*

Goodman, L. (2011). *Long multiplication*. Fra MathWorld: A Wolfram Web Resource, skapt av E. W. Weisstein, Hentet 29. april 2011 fra: http://mathworld.wolfram.com/LongMultiplication.html

Hecht, S. A. (1999). Individual solution processes while solving addition and multiplication math facts in adults. *Memory & Cognition, 27*, 1097-1107.

Heuvel-Panhuizen, M. v. d. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (2. utg). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Jakobsen, A., & Mjåtveit, A. (2009). Å regne i kroppsøving. I J. Fauskanger, R. Mosvold, & E. K. L. Reikerås (Red.), *Å regne i alle fag* (ss. 200-212). Oslo: Universitetsforlaget.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158.

Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1&2), 175-200.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.

Nunes, T. N., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Pedersen, B. B., Johansson, E., & Andersson, K. (2010). *Abakus*: *Grunnbok 3b*. Oslo: Aschehoug.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Saxe, G. (1991). Emergent goals in everyday practices: Studies in children's mathematics. I F. Furinghetti (Red.), *Proceedings of the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,(PME-15)* (vol. III, ss. 230-237). Assisi, Italia: PME.

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 347-395.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang, & V. Rohde (Red.). Matematikk for alle: LAMIS 1. sommerkurs, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU), Trondheim 6.-9. august 1998 (ss. 24-37). Landås: Landslaget for matematikk i skolen.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks, CA: Sage

Store Norske Leksikon (u. å.a). *Distributive lov – matematikk*. Hentet 20. april 2011 fra: http://www.snl.no/distributive_lov/matematikk

Store Norske leksikon (u. å.b). *Den kommutative lov – matematikk*. Hentet 20. april 2011 fra: http://www.snl.no/den_kommutative_lov/matematikk

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv.* Oslo: Cappelen akademisk.

Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: Can the gap be bridged? I I. Thompson (Red.), *Teaching and learning early number* (ss. 97-110). Buckingham, UK: Open University Press.

Thompson, I (1999). Written methods of calculation. I I. Thompson (Red.). *Issues in teaching numeracy in primary schools* (ss. 169-183). Buckingham, UK: Open University Press.

Utdanningsdirektoratet (2010). *Den generelle delen av læreplanen*. Hentet 29. april 2011 fra: http://www.udir.no/Store-dokumenter-i-html/Den-generelle-delen-av-lareplanen-bokmal/

Utdanningsdirektoratet (u. å). *Grunnleggende ferdigheter*. Hentet 6. mai 2011 fra: http://www.udir.no/grep/Grunnleggende-ferdigheter/?visning=4

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher*, *26*(7), 13-22.

Weisstein, E. (2011). *Multiplication.* Fra MathWorld: A Wolfram Web Resource. Hentet 4. april, 2011, fra: http://mathworld.wolfram.com/Multiplication.html