Mastergrad i matematikkdidaktikk

Masteroppgave

Oda Tingstad Burheim

Generalisering av figurfølger i algebra

En casestudie om typiske trekk for elever på 7. trinn i arbeid med figurfølger

Trondheim, mai 2011

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Oda Tingstad Burheim

Generalisering av figurfølger i algebra
En casestudie om typiske trekk for elever på 7. trinn i arbeid med figurfølger

Generalisation of figural patterns in algebra
A case study on characteristics of 7th graders working with figural patterns

Masteroppgave, Mastergrad i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2011

Veileder:	Heidi Strømskag Måsøval

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Innhold

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Temaet for denne oppgaven er algebra, og algebraisk språk i arbeid med generalisering av figurfølger. Overgangen i skolen fra å bruke kun tall i matematikken til å ta i bruk bokstaver som algebraisk notasjon er en terskel som kan være problematisk for elever. Van Oers (2000) skriver at flere undersøkelser rundt elevers utvikling av matematisk tenkning viser at svikt i bruken av matematiske symboler er et av hovedproblemene i læring av matematikk. Dette støttes også av Watson (2009) som har tatt for seg algebraisk resonnering i et oppdrag fra Nuffield-stiftelsen. Hun har gått gjennom tilgjengelig forskning på hvordan barn lærer matematikk, og skriver at det vil være naivt å skrive om algebraisk resonnering uten å redegjøre for de betydelige vanskene elever har med å ta i bruk algebraens konvensjoner. Videre skriver hun at disse problemene ikke hovedsakelig skyldes bokstavene i seg selv, men å forstå underliggende operasjoner og strukturer. Resultatene fra Pisa-undersøkelsen i 2009 viser også at norske elever presterte relativt sett svakere på oppgaver med bruk av algebraiske representasjonsformer, selv om de generelle resultatene i matematikk viser framgang fra tidligere år (Olsen, 2010, ss. 156-157).

Mason (1996) skriver at å haste over fra ord til symboler og å lære regler for å manipulere bokstavuttrykk har vært det som kjennetegner skolealgebraen i over hundre år. Denne brå overgangen har ført til at elever som søker mening eller som ikke har vært flinke i å gjenkjenne forenklingsmønster spontant har forlatt matematikken, med algebraen som vendepunkt. Overgangen fra aritmetikk til algebra og bruk av algebraisk symbolspråk kan altså være kilde til frustrasjon for elever, og et vanskelig steg i undervisningen for læreren. Når jeg gjennomførte undersøkelser i grunnskolen første året på master opplevde jeg selv at en del elever syntes overgangen fra å uttrykke en algebraisk sammenheng med naturlig språk til å gå over til algebraisk symbolspråk var vanskelig. Elevene klarte å uttrykke sammenhenger de så med naturlig språk, men når de skulle uttrykke det samme ved hjelp av en variabel fikk de problemer. Jeg syntes dette var interessant og ble derfor interessert i å finne ut mer om elever i arbeid med algebra, og om hva som kjennetegner elevenes møte med algebra og algebraisk symbolspråk.

Duval (2006) beskriver transformasjonen fra å beskrive et forhold i naturlig språk til dets bokstavuttrykk som en *omdanning*, fordi man forandrer representasjonssystemet som brukes uten å forandre objektet som beskrives. Han sier at å utvikle evnen til denne omdanningen mellom representasjoner er den virkelige utfordringen i matematikkopplæring. Dette viser at det er viktig å arbeide med slike overganger mellom representasjoner i skolen for å støtte elevenes læring. For meg som fremtidig lærer er det interessant å vite noe om hvordan denne overgangen mellom representasjoner arter seg for elever og å ha kunnskap om utfordringene elever opplever i møtet med algebra og algebraisk symbolspråk. I tillegg er det interessant å vite noe om hva som kan fungere støttende for elevene i dette arbeidet.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Jeg vil derfor i denne oppgaven se nærmere på elever i arbeid med algebra, og hvordan overgangen fra representasjonen naturlig språk til algebraisk notasjon arter seg for elevene. Innenfor temaet algebra har jeg valgt å snevre meg inn til å fokusere på generalisering av figurfølger. Kaput og Blanton (2001) beskriver denne ene av fem kordeler[1] (tråder, bestanddeler) av algebraisk resonnering som generalisering ut fra numeriske mønster eller figurfølger for å kunne gi funksjonsbeskrivelser. Her arbeider man altså med funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon med utgangspunkt i mønster av tall eller figurer. Det er tidligere gjort mye forskning på arbeid med generaliseringsoppgaver som viser utfordringer med denne tilnærmingsmåten til algebra (Lannin, Barker, & Townsend, 2006, Orton & Orton, 2005, Stacey, 1989, Stacey & MacGregor, 2001, Warren, 2005). Disse utfordringene viser seg i metodene elevene tar i bruk i generaliseringen og bruken av representasjoner, noe jeg vil gå nærmere inn på i teorikapitlet.

Jeg har altså valgt å undersøke elever i arbeid med generalisering av figurfølger i algebra. Jeg vil se på typiske trekk for elevene i arbeid med generalisering av figurfølger, og på hva som fungerer som støtte for elevene i dette arbeidet og på denne måten kan være en katalysator for dem i generaliseringsprosessen. Problemstillingen jeg har kommet fram til er:

Hva er det som er typiske trekk for elever på 7. trinn i arbeid med generalisering av figurfølger i algebra, og hva er det som fungerer som katalysator for dem i denne generaliseringsprosessen?

[1] "Kordel" er den norske oversettelsen av "strand".

Den første delen av problemstillingen konkretiseres i disse to forskningsspørsmålene:

1. Hvilke metoder tar elevene i bruk når de arbeider med å komme fram til en generalisering av en figurfølge?
2. Hva kjennetegner overgangene mellom representasjonene elevene bruker i arbeid med figurfølger?

1.3 Introduksjon til teorien og metoden jeg har brukt

Jeg har valgt et sosiokulturelt perspektiv på kunnskap og læring. Det sosiokulturelle perspektivet legger vekt på at kunnskap blir konstruert gjennom samhandling med andre og at bruk av medierende redskaper er sentralt for læring (Dysthe, 2001). Dette preger hvordan jeg har valgt å gjennomføre undersøkelsene mine og hvordan jeg analyserer mine data. Jeg bruker sosiokulturell teori spesielt ved begrepet *mediering* i forhold til konkretiseringsmateriell og lærerens rolle som medierende verktøy for elevene i arbeid med figurfølger.

I teorikapitlet mitt går jeg inn på forskjellige representasjoner som brukes i matematikk, og mer spesielt i algebra. I arbeid med figurfølger benytter elevene seg av flere representasjoner, og jeg har her brukt Duval (2006) sine begreper og inndelinger som verktøy. Videre går jeg nærmere inn på arbeid med figurfølger innenfor området algebra, hvor jeg har brukt Kaput og Blanton (2001) og Kaput (2008) som utgangspunkt. Jeg vil også presentere tidligere forskning på generalisering av figurfølger som tilnærmingsmåte til algebra i skolen.

Jeg har gjennomført datainnsamlingen min i et klasserom med elever på 7. trinn. Jeg startet med et pilotprosjekt hvor jeg introduserte hele klassen på 18 elever for arbeid med figurfølger. Dette gjorde jeg fordi elevene hadde lite erfaring med slike oppgaver fra før. Jeg ville derfor innføre noen begreper for elevene som de kunne benytte seg av når de skulle arbeide sammen i grupper. Med dette ville jeg etablere en kultur for arbeid med generalisering av figurfølger slik at elevene fikk innblikk i hva generalisering av figurfølger går ut på og at de fikk et begrepsapparat de kunne bruke når de skulle arbeide sammen med oppgaver.

Etter pilotprosjektet konsentrerte jeg meg om to grupper med tre elever i hver gruppe. Disse to gruppene tok jeg ut hver for seg slik at jeg kunne observere dem under hele arbeidet. Jeg lot dem arbeide uten innblanding fra meg den største delen av tida, men jeg gikk inn og stilte noen spørsmål for å få dem til å forklare det de hadde tenkt og gjort og for å utfordre dem til å gå litt videre. I disse gruppearbeidene hadde jeg altså rolle som en delvis deltakende observatør, og brukte filmkamera for å kunne transkribere dialogen og se mer på det elevene sa og gjorde i etterkant av observasjonen i tillegg til å ta notater underveis. Jeg baserer mine analyser på observasjonene av disse to elevgruppene. De metodiske valgene jeg har tatt vil jeg komme nærmere inn på og drøfte i metodekapitlet.

1.4 Oppbyggingen av oppgaven

Denne masteroppgaven har følgende kapitler: teori, metode, analyse av det matematiske og didaktiske potensialet i oppgavene elevene har arbeidet med, analyse og diskusjon av data fra klasserommet og oppsummering av analyse og perspektivering. Jeg vil starte med å presentere teoriene jeg bygger mine undersøkelser og analyser på.

Videre kommer et metodekapittel hvor jeg begrunner forskningsdesignet i oppgaven. Her vil jeg beskrive hvordan jeg gjennomførte datainnsamlingen min og hvilke valg jeg tok for å få svar på problemstillingen min. Jeg vil også presentere analysemetoden jeg har brukt og vurdere validiteten i datamaterialet mitt.

Deretter følger analysedelen. Her vil jeg starte med et kapittel hvor jeg presenterer oppgavene jeg brukte i datainnsamlingen min, før jeg presenterer resultatene fra analysen min og bruker episoder fra datamaterialet som belegg for mine påstander. Jeg vil også diskutere resultatene av analysene mine. Til slutt i oppgaven vil jeg oppsummere mine resultater og perspektivere disse ved å drøfte hvordan mine funn har betydning for skolen og meg som fremtidig lærer, i tillegg til å se på hvilke spørsmål videre jeg sitter igjen med.

2. Teori

I dette kapitlet presenterer jeg teorien som er grunnlaget for analysen min. Jeg vil starte med den overordna teorien for forskningen min som er sosiokulturelle perspektiv på kunnskap og læring. Det ble naturlig for meg å velge dette perspektivet ettersom jeg i analysene mine vil se på elevers bruk av språk og representasjoner i arbeid med algebra, altså det som foregår i det sosiale. Etter denne delen vil jeg gå over på matematikkdidaktiske temaer. Her vil jeg starte med representasjoner i matematikk, og gå inn på språk og symboler. Videre vil jeg vil se nærmere på algebra, og gå spesielt inn på teori for læring og undervisning av figurfølger.

2.1 Sosiokulturelle perspektiv på læring

2.1.1 Introduksjon

Sosiokulturelle perspektiv ser på læring som et resultat av menneskelig virksomhet. Dysthe (2001) skriver at "sosiokulturelle perspektiv (…) legg avgjerande vekt på at kunnskap blir *konstruert gjennom samhandling og i ein kontekst,* og ikkje primært gjennom individuelle prosessar" (s. 42). Säljö (2001) påpeker også dette og skriver at "mennesker er født inn i og utvikles innenfor rammen for samspill med andre mennesker" (s. 67). Kunnskap og læring er altså i sosiokulturelle perspektiv sett på som grunnleggende sosialt.

I en grunnleggende betydning kan vi si at læring, i sosiokulturelle perspektiv, handler om hva vi som individer eller kollektivt tar med oss fra sosiale situasjoner og bruker i framtida (Säljö, 2001). Vi tar altså med oss erfaringer vi gjør oss og bruker disse i framtidige situasjoner. Dette betyr at mennesket hele tiden er i utvikling og forandring. Vi utvikler oss sammen med andre, og får kunnskap gjennom at verden rundt oss fortolkes i interaksjon med andre mennesker. Denne kunnskapen ligger ikke lagret i hjernen vår, men finnes i kulturen rundt oss, noe som betyr at hva og hvordan vi lærer er farget av kulturen vi lever i. Vi drar altså nytte av kunnskaper og ferdigheter som gjennom historien er bygd opp i samfunnet rundt oss gjennom interaksjon med andre mennesker. Med et sosiokulturelt utgangspunkt kan vi altså si læring handler om å tilegne seg ressurser for å tenke og å handle (Säljö, 2001). Säljö (2001) skriver at "det er gjennom kommunikasjon at sosiokulturelle ressurser blir skapt, men det er også gjennom kommunikasjon de blir ført videre" (s. 22). Dette viser den avgjørende betydningen kommunikasjon og interaksjon har i sosiokulturelle perspektiv på læring.

I sosiale aktiviteter samhandler vi med andre mennesker, men vi samhandler også ved hjelp av fysiske og intellektuelle redskaper. Mennesket står altså ikke i direkte kontakt med omverdenen, men tolker og håndterer den ved hjelp av slike redskaper. Denne bruken av redskaper som støtte for, formidling og overføring av mentale funksjoner kalles *mediering* (Dysthe, 2001, s. 77).

2.1.2 Mediering

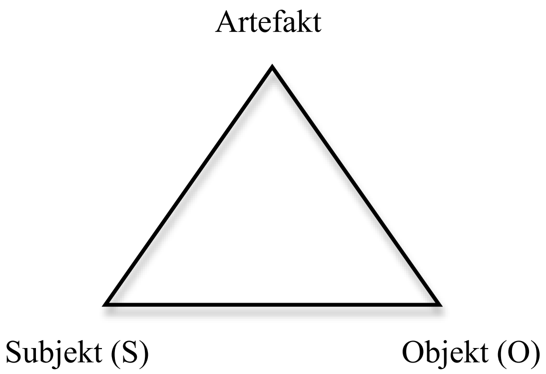
Mediering er et av de nye begrepene Vygotsky brakte inn i pedagogisk tenkning. Säljö (2001) skriver at begrepet mediering, fra tysk Vermittlung - formidle, er svært sentralt i et sosiokulturelt perspektiv (s. 83). Vi lever i en verden av menneskeskapte gjenstander, artefakter, som påvirker våre muligheter til å registrere omverdenen vår. Disse redskapene er integrerte deler av menneskenes praksis, som for eksempel en kikkert som gjør at vi kan se på lange avstander. Det er fortsatt individet som ser, men kikkerten gjør det mulig å se lengre og påvirker derfor hva vi har mulighet til å se. "Kombinasjonen av personar og reiskapar skaper heilt nye og utvida kognitive og praktiske potensial" (Dysthe, 2001, s. 46). Disse redskapene utvider altså de forutsetningene naturen har gitt oss som enkeltindivider.

Säljö (2001) skriver at medierende redskaper er ressurser vi har tilgang til og bruker når vi tolker vår omverden og handler i den. Disse redskapene inneholder erfaringer og innsikter fra tidligere generasjoner som vi samspiller med og drar nytte av. Det er derfor et viktig aspekt at vi ikke kan se på dem som døde objekter (Säljö, 2001). For å forstå hvordan mennesket lærer i sosiale praksiser kan vi ikke se bort i fra at vi erfarer ved hjelp av disse medierende redskapene. "Når vi tar bort redskapene og den sosiale praksisen og studerer tenking eller læring 'i seg selv', har vi mistet vårt fenomen og hengir oss til studier av temmelig hjelpeløse individer som er berøvet sine sosiokulturelle ressurser" (Säljö, 2001, s. 83). Dette betyr at vi ikke kan se på den menneskelige tenkningen i seg selv, men må se på hvordan tenkningen utøves i sosiale praksiser ved hjelp av medierende redskaper.

Medieringsbegrepet inkluderer, i tillegg til fysiske redskaper, også intellektuelle/språklige redskaper (Säljö, 2001). Cole (2005) hevder at virksomheten til redskapene har lik styrke enten de er begrepsmessige eller materielle. Han skriver videre at tenkningen om mediering gjennom redskaper brukes på lik linje for objekter og personer. Begrepet mediering brukes altså om alle typer støtte eller hjelp i læringsprosessen, enten det er av personer, fysiske eller intellektuelle redskaper.

2.1.3 Menneskelig utvikling

Vygotsky (1981) hevder at menneskelig utvikling har opphav i sosial aktivitet, og skriver at alle funksjoner i barnets utvikling skjer først på det sosiale plan og deretter på det psykologiske plan (den generelle genetiske loven for kulturell utvikling). I sosial samhandling begynner barnet å bruke de samme formene av adferd som andre bruker i forhold til ham eller henne, og overfører på denne måten de sosiale formene av adferd til seg selv (Vygotsky, 1981). Funksjonene opptrer altså først i samhandling med andre, og oppstår deretter som mentale funksjoner hos individet (Vygotsky, 1981). Denne prosessen kalles *internalisering*. Vygotsky skriver at alle høyere mentale funksjoner er internaliserte sosiale sammenhenger. I internaliseringsprosessen blir altså mentale funksjoner medierte ved hjelp av fysiske og intellektuelle redskaper som vi mennesker bruker i ulike former for sosial aktivitet. Cole (2005) illustrerer i medieringstriangelet forholdet mellom individet og omgivelsene som oppstår ved mediering:



Figur 1: Medieringstriangelet, hentet fra Cole (2005, s. 201).

Subjektet er individet og objektet er omgivelsene. Her finner vi de naturlige eller umedierte funksjonene langs basen i trekanten. Dette er funksjoner som har utspring i direkte stimuli, og altså er nært knyttet til oppfattelsen (Vygotsky, 1978, s. 39). De kulturelle, eller medierte, funksjonene er sammenkoblet via det øverste hjørnet i trekanten, altså gjennom bruk av artefakter (Cole, 2005).

2.1.4 Språket som medierende redskap

Det viktigste medierende redskapet vi har er språket vårt (Säljö, 2001). Språket gir oss mulighet til å kodifisere verden rundt oss og dele det vi erfarer med andre. Säljö (2001) skriver at "…språket er den mest unike bestanddelen i menneskelig kunnskapsbygging og, mer generelt, i vår evne til å samle erfaringer og kommunisere disse til hverandre. Ord og språklige utsagn medierer omverdenen for oss og gjør at den framstår som meningsfull" (ss. 84-85). Gjennom kommunikasjon lærer vi altså måter å beskrive verden på som er funksjonelle og som gjør at vi kan samspille med andre mennesker. Vi bruker språket både for å forstå, og for å uttrykke overfor andre det vi forstår (Dysthe, 2001). Säljö (2001) hevder at det viktigste menneskelige læringsmiljøet alltid har vært og alltid kommer til å være den hverdagslige interaksjonen og den naturlige samtalen.

Språket er et kollektivt redskap som vi overtar og setter i arbeid for våre egne formål i våre prosjekter i sosial interaksjon (Säljö, 2001). Gjennom kommunikasjon tar vi del i andres ord og kunnskap, og bruker dermed indirekte deres tanker og forestillinger for å uttrykke våre egne budskap. Säljö, Riesbeck, & Wyndhamn (2001) skriver at samtalen ansikt-til-ansikt er menneskets fremste ressurs for å bevare, tilpasse og utvikle kunnskaper og ferdigheter. De skriver videre at samarbeid i form av "forhandling" med læreren eller medelever åpner veien til nye innsikter. I denne sammenhengen må det etableres en diskurs slik at man kan snakke sammen om hendelser, prosesser og objekter, og kunnskap handler derfor i stor grad om å lære å beherske forskjellige diskurser (Säljö et al., 2001).

2.2 Språk og representasjoner i matematikk

Med sosiokulturelle perspektiv på læring og kunnskap som overordna teori er det nå naturlig for meg å gå videre inn på rollen til medierende redskaper i matematikk. Ettersom jeg tar for meg bruken av forskjellige representasjoner i arbeid med figurfølger i undersøkelsene mine, vil jeg her fokusere på matematiske representasjoner som brukes i slike aktiviteter.

2.2.1 Matematiske representasjoner

Duval (2006) skriver at grunnoppfatningen av representasjoner er at en representasjon er noe som står for noe annet. For å uttrykke matematiske ideer bruker vi en rekke representasjoner, noen som er vanlige i all slags tenkning, som naturlig språk, og noen som er spesifikke for matematikk, som algebraisk og formell notasjon. Disse representasjonene kaller Duval (2006) *semiotiske representasjoner*. Han skriver at "…semiotiske representasjoner, inkludert alle typer språk, er vanlige verktøy for å produsere ny kunnskap, og ikke bare for å kommunisere bestemte mentale representasjoner" (s. 104, min oversettelse). Vi bruker altså semiotiske representasjoner både til å utvikle kunnskap og til å uttrykke kunnskap. Duval skriver videre at den eneste måten vi kan få tilgang til og behandle matematiske objekter på er ved å bruke semiotiske representasjoner, og for ett matematisk objekt kan vi bruke flere forskjellige. For elever kan det derfor være vanskelig å kjenne igjen det samme representerte objektet gjennom forskjellige semiotiske representasjoner, noe som viser at evnen til å skifte fra et representasjonssystem til et annet er viktig i læring og i arbeid med problemløsning i matematikk (Duval, 2006).

I matematikk må vi altså arbeide med forskjellige representasjoner og kunne omforme disse. Duval (2006) skriver at vi har to typer omdanninger av representasjoner som er radikalt forskjellige: behandlinger og omdanninger. Behandlinger er transformasjoner av representasjoner som skjer innenfor samme system. Dette kan for eksempel være å gjøre utregninger med brøker, hvor vi holder oss innenfor systemet brøk. Omdanninger er transformasjoner av representasjon som består av å skifte representasjonssystem uten å skifte objektet som betegnes, for eksempel å gå fra algebraisk notasjon for en ligning til dets grafiske representasjon, eller å gå fra å beskrive en sammenheng med naturlig språk til dets notasjon med bokstavsymboler (Duval, 2006). Duval skriver at å utvikle evnen til denne omdanningen mellom representasjoner er den virkelige utfordringen i matematikkopplæring.

Ved å se på egenskapene til semiotiske representasjoner som er grunnleggende i matematisk aktivitet skiller Duval (2006) ut fire grunnleggende forskjellige typer av semiotiske systemer:

Naturlig språk: Muntlig: forklaringer Skriftlig: teoremer og bevis	**Ikoniske representasjoner:** Tegning, skisse og mønster **Ikke-ikoniske representasjoner:** Geometriske figurer som kan konstrueres med verktøy
Symbolsystemer: Kun skriftlig: utregninger og bevis	**Todimensjonale figurer som kombinasjon av endimensjonale og nulldimensjonale figurer (linjer og punkter)**: Diagrammer og grafer

Figur 2: Klassifisering av semiotiske systemer i matematisk aktivitet. Tilpasset fra Duval (2006, s. 110).

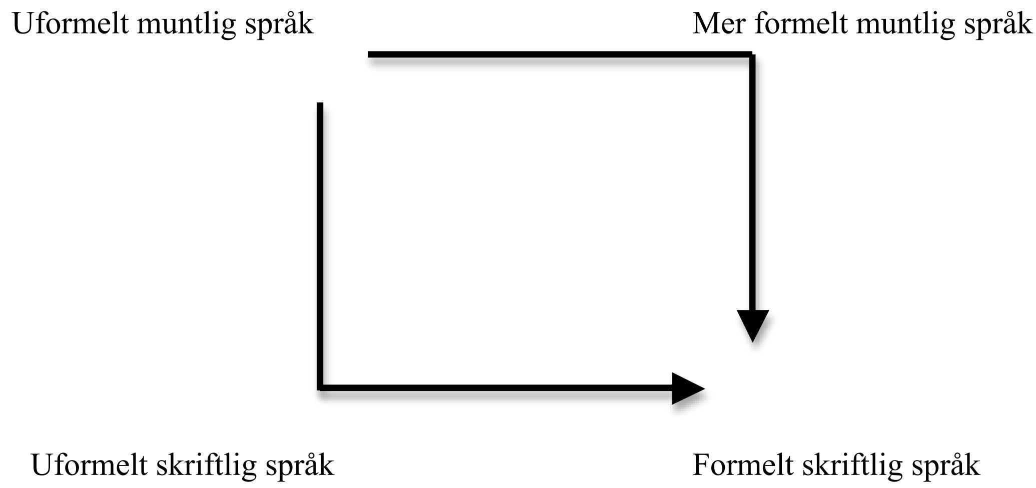
Denne inndelingen er relevant for meg i mitt arbeid med å se på representasjonene elevene bruker i arbeid med figurfølger. Videre i oppgaven vil jeg bruke de tre semiotiske systemene naturlig språk, ikoniske representasjoner og symbolsystemer for å beskrive representasjonene som brukes i arbeid med figurfølger.

2.2.2 Matematisk språk

I boka *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms* (1987) skriver Pimm at det i matematikktimer brukes både det han kaller "vanlig engelsk" og "matematisk engelsk". Han skriver videre at matematisk språk ikke kan ses på som et eget språk eller en dialekt innefor det engelske språket, men som et eget *register* innenfor engelsk språk. Et register beskrives som "a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structures which express these meanings" (Halliday, 1975, som sitert i Pimm, 1987, s. 75). Det matematiske registeret består altså av matematikkterminologiens matematiske begreper, men også naturlig språk brukt for å uttrykke matematikk.

Pimm (1987) skriver at den del av det å lære matematikk er å lære å snakke som en matematiker, altså å få kontroll over det matematiske registeret. Å utvikle sitt matematiske register betyr ikke bare å legge til nye matematiske ord og begreper i vokabularet, men også å snakke om matematikk og lære å argumentere matematisk. Pimm skriver videre at et behov for å uttrykke matematiske ideer med naturlig språk leder til utviklingen av matematiske registre hvor diskusjonen om matematiske ideer, objekter og prosesser kan foregå. Matematiske ideer uttrykkes muntlig med naturlig språk, og skriftlig med et komplekst, regelstyrt skriftsystem. Det skriftlige språket brukes til å eksternalisere tanker slik at man kan reflektere over dem (Pimm, 1991).

Pimm (1991) skriver at alle lærere møter vanskene med å få elever til å bevege seg over fra uformelt muntlig språk til formelt skriftspråk. Han skriver videre at denne overgangen fra uformelt muntlig språk til formelt skriftspråk kan gjøres på to forskjellige måter. Den første er å oppmuntre elevene til å skrive ned sine uformelle uttrykk og deretter arbeide med å gjøre de skriftlige uttrykkene mer formelle og generelle. Den andre måten er å arbeide med formelt språk og generalitet før man skriver ned de muntlige uttrykkene. Han viser de to veiene til formelt skriftlig språk fra muntlig språk med denne figuren:



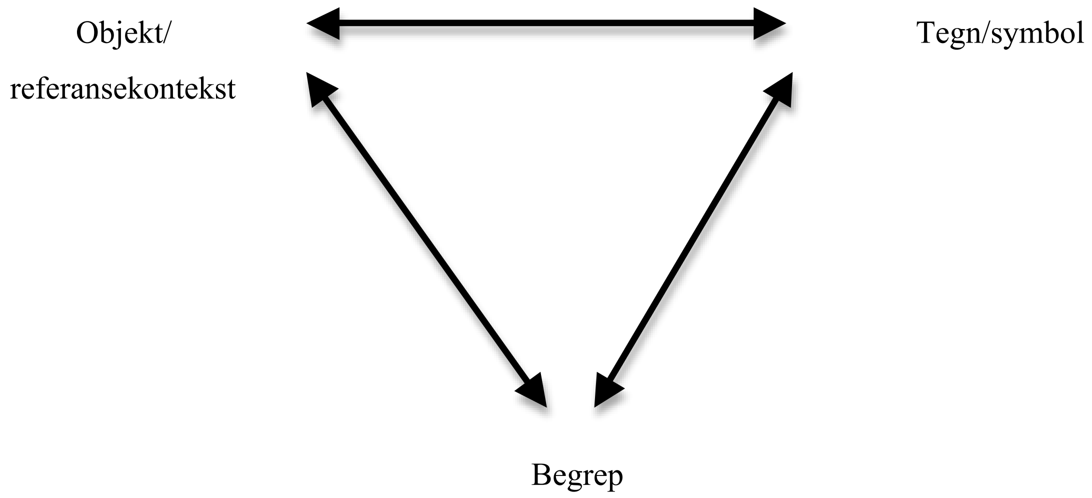
Figur 3: Overgangen fra uformelt muntlig språk til formelt skriftlig språk, hentet fra Pimm (1991, s. 21).

Pimm (1991) hevder at en lærer ikke kan få elevene til å lære, men at han eller hun kan legge til rette for læring ved hjelp av situasjoner som engasjerer elevene i matematiske ideer og språk. Ved å måtte forklare sine tanker og metoder for andre må elever reflektere over hva de skal si og hvordan de må uttrykke seg for at de andre skal forstå hva de tenker. På denne måten brukes språket til å mer enn å kommunisere fordi man må reflektere over tankene sine, noe som gjør at man kan få større tilgang til egne og andres tanker (Pimm, 1991).

2.2.3 Matematiske symboler og elevers forståelse av dem

I matematikk er tegn og symboler sentrale aspekter, og elever presenteres for en rekke symboler i matematikkundervisningen. Meningen i symbolene oppstår i samspillet mellom tegn eller symbolsystemer og en referansekontekst (Steinbring, 1997).

Steinbring (1997, 2005, 2006) viser forholdet mellom tegn, referanseobjekt og begrep i den epistemologiske trekanten. Her representeres aspektene til "virkeligheten" ved objekt/referansekontekst og språklige aspekter ved tegn/symbol (Steinbring, 2005). Denne trekanten viser altså koblingen mellom referansekonteksten som brukes for å skape mening i kunnskap, og tegnene som brukes for å kode denne kunnskapen. Symbolene har dermed ikke noen mening i seg selv, men får mening gjennom en referansekontekst.



Figur 4: Den epistemologiske trekanten, hentet fra Steinbring (1997, 2005, 2006).

Steinbring (1997) skriver at konstruksjonen av relasjoner mellom tegn/symbol og objekt/referansekontekst via begrep ikke fører fram til en ferdig definisjon, men er et samspill i stadig utvikling. Produksjonen av matematisk mening i dette samspillet kan beskrives som en prosess hvor en kjent situasjon (referansekonteksten) settes i forhold til et nytt og ukjent tegnsystem. På denne måten utstyres tegnsystemet delvis med mening gjennom å tolke det i overensstemmelse med referansekonteksten (Steinbring, 1997). Steinbring (2005) skriver at tolkningen av tegnene og koblingene til referansekontekster endrer seg hos den som lærer når kunnskapen utvikles. Jo flere erfaringer en elev får med for eksempel variabler vil alle delene av trekanten om variabler få mer innhold. Dette kalles en semiotisk mediering mellom referansekontekst og tegn i matematikken.

Steinbring (1997) hever at elever selv må aktivt produsere sammenhenger mellom tegn/symbol og referansekontekst. I sosial samhandling og diskusjon med lærer og medelever utvikles disse sammenhengene og blir avstemte og "offisielle" (Steinbring, 1997). Matematisk kunnskap kan ikke tilegnes gjennom å lese tegn, symboler og regler. Tegnene må tolkes, og disse tolkningene krever erfaringer og underforstått kunnskap og forhåndsantakelser (Steinbring, 2006).

Frege (1993) beskriver meningen i et bokstavuttrykk som sammensatt av to komponenter: donatasjon/referanse og betydning (mine oversettelser av begrepene "reference" og "sense").
Han skriver at et uttrykk refererer til noe, og dette noe er det han kaller uttrykkes denotasjon eller referanse. I tillegg til referanse har uttrykket en betydning som avhenger av måten uttrykket presenteres på (Frege, 1993). Denotasjonen til et uttrykk er altså objektet som

uttrykket refererer til, mens betydningen er tanken som uttrykkes i uttrykket. Frege (1993) skriver at koblingen mellom et uttrykk/tegn, dets betydning og dets referanse er slik at tegnet korresponderer en definitiv betydning og en definitiv referanse. Mens til en gitt referanse, eller et objekt, hører det ikke bare et enkelt tegn, fordi den samme betydningen kan ha forskjellige uttrykk (Frege, 1993). For eksempel er uttrykkene $4x + 2$ og $2 (2x + 1)$ forskjellige, men betegner likevel samme funksjon. De har altså lik referanse, men forskjellige betydning. Dette gjelder også i dagligtalen. For eksempel er uttrykkene "hovedstaden i Norge" og "Oslo" betegner den samme byen, selv om det kan legges forskjellig betydning i uttrykkene. Så i matematikken, som i naturlig språk, finner vi uttrykk som betegner det samme, men likevel innehar forskjellig betydning.

2.3 Algebra

Det finnes flere perspektiver på kjernen i algebra, altså de essensielle ingrediensene i algebraen i skolen. Jeg vil her presentere Kaput (2008) sitt syn på hva algebra er, Kaput og Blanton (2001) sin måte å se beskrive bestanddelene i algebra på i tillegg til Mason (1996) sin definisjon av algebraisk tenkning. Jeg vil deretter definere mitt eget syn ut fra disse.

Kaput (2008) beskriver to hovedsyn på hva matematikk og algebra er. Det første er å se på matematikk som en kulturell artefakt vi mottar som del av vår kulturarv. Denne kulturelle artefakten er nedfelt i utdanningssystemer i verden på forskjellige måter, spesielt når det gjelder hvordan algebra introduseres og integreres i andre fag. Det andre hovedsynet på matematikk som Kaput beskriver er at det er noe vi gjør. For eksempel involverer algebra produksjon av representasjoner for å uttrykke generaliseringer og transformering av disse representasjonene (Kaput, 2008).

Kaput og Blanton (2001) beskriver algebra ut fra hva som kjennetegner en utviklet algebraisk resonnering, noe de skriver er en kompleks sammensetning av fem innbyrdes relaterte kordeler:

1. Algebra som generalisering og formalisering av mønster og betingelser. Å bruke aritmetikk for å uttrykke og argumentere for generaliseringer. Dette kan være generaliserte aritmetiske operasjoner eller generalisering av bestemte tall eller forhold mellom tall.

2. Algebra som syntaksstyrte manipulasjoner, altså manipulasjoner gjennom bestemte regler.
3. Algebra som studiet av strukturer og systemer abstrahert fra utregninger og relasjoner. Abstrakt algebra og algebra som matematisk disiplin, for eksempel gruppeteori.
4. Algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon. Å generalisere ut fra numeriske mønster eller figurfølger for å kunne gi funksjonsbeskrivelser. Begge disse er med på å bygge funksjonsbegrepet som er viktig i algebraisk tenkning i skolen. Beskrivelsene kan også være av gjentagende art, hvor man ser på hvordan den neste figuren eller det neste tallet kan beskrives med utgangspunkt i nåværende figur eller tall.
5. Algebra som en samling av språk for håndtering av modeller og fenomener. Å bruke modellering som felt for å gjøre, uttrykke og argumentere for generaliseringer

(Kaput & Blanton, 2001, ss. 3-4)

Kaput og Blanton (2001) påpeker at de ser på generalisering gjennom overveid argumentasjon og å uttrykke generaliseringer som underliggende i alt arbeid vi gjør, og i tillegg som essensielt for å kunne bygge et referansesystem og mening for de symbolske objektene som manipuleres i algebra. De skriver at et snevert syn på algebra som hovedsakelig syntaksstyrte symbolske manipulasjoner undervurderer de mange sidene av algebra og er et utilstrekkelig fundament for forbedring av algebraen i skolen. Skolen trenger et bredt og dypt syn på algebra for å kunne vise de mange aspektene algebra har hatt i matematikken opp gjennom historien (Kaput & Blanton, 2001).

Mason (1996) vektlegger også at skolen trenger et bredt syn på algebra, og vektlegger generalisering som aktivitet. Han beskriver måten skolen har innført algebra på tidligere, ved å tilegne seg ferdigheter i symbolsk manipulasjon, som å som å lære noen å gå ved å flytte føttene for dem. Mason mener at å oppdage likheter og forskjeller, gjøre antagelser, klassifisere og benevne er uttrykk for drivkraften til forberedelse til framtida. Disse uttrykkene er basisen i det han kaller algebraisk tenkning og roten av det han kaller algebra. Mason skriver at elever må føle seg komfortable med å uttrykke generaliteter selv, før de kan forstå manipuleringer på andres generalisering i tradisjonelle algebraoppgaver.

Jeg ser på algebra som resonnering, og ser derfor på måten elever arbeider med, tenker og snakker om algebra som fundamentalt for definisjonen av algebra. I min forskning er det

Kaput og Blanton (2001) sin fjerde kordel som står i sentrum, nemlig generalisering ut fra figurfølger for å kunne gi funksjonsbeskrivelser. For at elevene skal kunne utvikle denne kordelen som del av en utviklet algebraisk resonnering mener jeg på samme måte som Mason (1996) at elevene må utvikle sin algebraiske tenkning gjennom å gjøre å oppdage likheter og forskjeller, gjøre antagelser, klassifisere og benevne. I denne oppgaven vil jeg se på hvordan elevene snakker sammen i arbeid med generalisering av figurfølger og hvilke representasjoner og metoder de bruker. Her mener jeg at også at algebra er en kulturell artefakt som vi får tilgang til gjennom vår kulturarv, fordi symboler og språket vi bruker bærer med seg kunnskap fra tidligere generasjoner.

2.4 Generalisering av figurfølger som aktivitet i skolen

Det er gjort mye forskning med bruk av figurfølger i skolen. Jeg vil her referere til noen forskeres undersøkelser og funn ved bruk av denne tilnærmingsmåten til algebra i skolen.

2.4.1 Generaliseringsprosessen

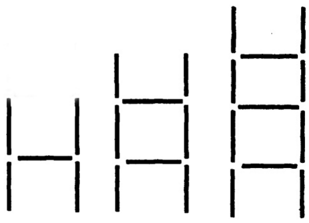
Stacey og MacGregor (2001) skriver at innføring av algebra i skolen tradisjonelt sett har vært gjort ved å bruke bokstavsymboler som ukjente tall. Med denne tilnærmingen til algebra lærer elevene først regler for å bruke bokstavsymboler og å løse ligninger, og går deretter videre til generalitet og å se på variabler og funksjonsuttrykk. Tilnærmingen som er basert på figurfølger derimot tar for seg generalitet først, med funksjonssammenhenger og algebraiske uttrykk. Deretter brukes denne forståelsen til å formulere og løse ligninger (Stacey & MacGregor, 2001).

Radford (1996) skriver at generalisering av geometrisk-numeriske mønster er en prosedyre hvor målet er å komme fram til et nytt resultat. Denne generaliseringsprosedyren starter med en sekvens av observasjoner og ender med en konklusjon som representerer disse observasjonene. Målet i generalisering av figurfølger er å finne et uttrykk som representerer konklusjonen, en formel som baserer seg på strukturen, ikke de konkrete observasjonene vi har (Radford, 1996). Radford sier videre at vi i arbeid med figurfølger kan finne antall for eksempel prikker ved aritmetikk helt til vi går over til å benytte oss av de generelle strukturene i figuren. Når vi benytter oss av de generelle strukturene i figurene har vi gått over til algebra og generalisering (Radford, 1996). Mason (1996) sammenfatter denne prosessen ved å si at generalisering handler om å se det generelle gjennom det spesielle, og det spesielle gjennom det generelle.

Generalisering er altså en prosess hvor vi beveger oss over fra konkrete observasjoner til å finne den generelle figuren eller det generelle tallet. Radford (2003) skriver at den generelle figuren forekommer kun i begrepsverdenen og skiller seg på denne måten fra de konkrete objektene ved at den kun kan oppfattes gjennom tegn og redskaper. Han skriver at denne overgangen fra spesielle tilfeller til generaliseringer skaper store utfordringer for elever fordi dette krever at de går over fra å utforske objekter som kan konstrueres fysisk til å behandle mentale objekter (Radford, 2003).

2.4.2 Metoder i arbeid med generalisering av figurfølger

Flere undersøkelser (Lannin et al., 2006; Orton & Orton, 2005; Orton, Orton, & Roper, 2005; Stacey, 1989; Stacey & MacGregor, 1995; Stacey & MacGregor, 2001; Warren, 2005) har dokumentert elevers vanskeligheter med å se mønster i figurfølger og å kunne uttrykke dette som en funksjonssammenheng. Stacey (1989) skriver at å finne og bruke mønster er en viktig strategi i problemløsning i matematikk. Hun undersøkte elevers metoder i arbeid med Stigeoppgaven (se figur 4) hvor elevene skulle finne ut hvor mange fyrstikker som trengs for å bygge stiger med forskjellige antall trinn.



Figur 5: Stigeoppgaven, hentet fra Stacey (1989, s. 48).

Stacey (1989) fant at i hovedsak fire metoder ble brukt for å finne figur nummer 20 og 100:

- *Tellemetoden* (min oversettelse av begrepet Counting Method): elevene teller antall fyrstikker fra en tegning
- *Differansemetoden* (min oversettelse av begrepet Difference Method) elevene ganger antall trinn med 3 som er differansen. Her antar man implisitt at gjentatt addisjon av 3 gir at $M(n) = 3 \cdot n$

- *Hel-objekt-metoden* (min oversettelse av begrepet Whole-objekt Method): elevene bruker antall fyrstikker for en mindre stige og multiplisere dette for å finne antall fyrstikker i en større stige. Her antar man implisitt at M (mn) = m · M (n). Denne metoden ble også brukt med addisjon ved å legge sammen antall fyrstikker for to stiger.
- *Lineær metode* (min oversettelse av begrepet Linear Method): elevene bruker et mønster som vedkjenner at både multiplikasjon og addisjon er involvert og at rekkefølgen av operasjonene har betydning. Bruker implisitt en lineær modell M (n) = an + b med b ≠ 0. Elevene som brukte denne metoden gjorde flere feil med konstantleddet b enn med variabelleddet.

Orton og Orton (2005) fant også i sine undersøkelser at elevene ofte tyr til ufullstendige metoder som differansemetoden og Hel-objekt-metoden som ikke fører fram til en riktig generalisering av figurfølgen. I analysearbeidet mitt har jeg brukt metodene Stacey (1989) beskriver for å kode metodene elevene jeg observerte tok i bruk.

Stacey (1989) skriver at hovedinntrykket fra hennes undersøkelsene i grunnskolen var at elevene ikke var motvillige til å generalisere, men at de konstruerte generaliseringen for fort og hadde fokus på enkelhet mer enn nøyaktighet. Hun skriver også at liten grad av stabilitet er en nøkkelegenskap for elevene, de tar tak i sammenhenger og bruker dem uten kritisk tenkning. "It seems that children who suspect that a relationship might be true use it without question" (Stacey, 1989, s. 161). Hun henviser også til Lee og Wheeler sin undersøkelse hvor de konkluderte med at "the reflex of checking the formula against the given [evidence] is not there" (Lee & Wheeler, 1987, som sitert i Stacey, 1989, s. 148).

Stacey og MacGregor (2001) skriver at elever ofte fokuserer på det rekursive forholdet i stedet for det eksplisitte når de arbeider med figurfølger. På denne måten kommer de ikke fram til funksjonssammenhengen som beskriver hele figurfølgen. For å hindre elevene i å fokusere bare på den rekursive sammenhengen skriver de at man må bruke oppgaver som utforsker eksplisitte heller enn rekursive regler. Orton og Orton (2005) påpeker også at å sette seg fast i en rekursiv tilnærming kan hindre framgang mot en universell regel. Lannin et al. (2006) fant i sine undersøkelser om elevers bruk av rekursive og eksplisitte funksjonssammenhenger at elevene beholdt koblingen til de ikoniske representasjonene i utviklingen av rekursive regler, men at de ofte mistet denne koblingen i utviklingen av eksplisitte regler (Lannin et al., 2006). De skriver at å framprovosere eksplisitte strategier hos elever kan føre til at de forlater sine egne meningsskapinger og går over til å gjette på strategier ut i fra overfladiske oppdagelser om mønsteret. Disse studiene argumenterer for at man som lærer må gi elevene oppgaver hvor de må ta i bruk en eksplisitt metode for å unngå at elevene kun bruker en rekursiv metode. Samtidig påpeker de at denne overgangen kan være utfordrende for elevene.

2.4.3 Utfordringer og støtte i arbeid med figurfølger

Lee (1996) skriver at algebra, og matematikk generelt, handler om å generalisere mønster. Gjennom sine undersøkelser har hun kommet fram til at hindringene i arbeid med generalisering av figurfølger kan beskrives ved tre nivå: oppfattelsesnivået – å se det tilsiktede mønsteret: verbaliseringsnivået – å kunne uttrykke mønsteret man ser tydelig: og symbolnivået – å bruke n som representasjon for den n-te rekken eller nummeret og videre uttrykke antall prikker ved hjelp av dette. Lee mener at problemet for elevene hun forsket på ikke var å se mønsteret, men å se et algebraisk brukbart mønster. Hun mener at nesten 100 % av de hun spurte kunne se et mønster og kunne tegne opp den neste figuren, men problemet var å kunne beskrive mønsteret på en matematisk og presis måte.

Stacey og MacGregor (1995) fant i sine undersøkelser at elevene kunne tolke og fortsette på en tallfølge, men at en stor del av dem ikke kunne uttrykke en riktig regel som koblet x og y ved hjelp av matematiske symboler. Amit og Neria (2004) fant i sine undersøkelser at de fleste elevene valgte å uttrykke seg ved hjelp av skriftlige representasjoner basert på naturlig språk eller aritmetiske beregninger. Få elever valgte å uttrykke seg ved hjelp av algebraisk notasjon, og de skriver at materialet deres derfor indikerer at å bruke algebraisk notasjon er svært vanskelig for elever (Amit & Neria, 2004). Disse studiene viser altså at overgangen fra bruk av muntlig språk og uformelt skriftlig språk til symbolspråk er utfordrende for elever i arbeid med generalisering av figurfølger.

Redden (1996) så i sin undersøkelse på sammenhengen mellom elevenes bruk av naturlig språk og symbolspråk i arbeid med figurfølger. Resultatene viste at 80 % av elevene i undersøkelsen som klarte å uttrykke funksjonen algebraisk hadde uttrykt funksjonen korrekt med naturlig språk først. Dette antyder at elever som begynner å arbeide med algebra må formulere beskrivelser av mønster muntlig før de klarer å formulere seg skriftlig (Redden, 1996). Stacey og MacGregor (2001) fant også i sine undersøkelser at elevene som klarte å uttrykke en korrekt formel muntlig hadde lettere for å kunne uttrykke formelen korrekt skriftlig etterpå. De framhever derfor viktigheten av den verbale fasen i arbeid med figurfølger, og sier at det er viktig og kanskje nødvendig for å kunne gjenkjenne en funksjon og uttrykke den algebraisk (Stacey & MacGregor, 2001). Disse studiene påpeker at det er viktig at elever får utvikle sitt matematiske språk gjennom å snakke om mønster og sammenhenger for å utvikle og forbedre sine begreper.

Warren (2005) fant i sine undersøkelser at elevenes muntlige beskrivelser av figurfølgene manglet presisjon og at de brukte gester og konkreter som støtte til forklaringene. Hun skriver at læreren og konkretiseringsmateriell fungerer som støtte for elevene i arbeid med generaliseringer. Konkretiseringsmateriell ser ut til å hjelpe elever å finne ut av de manglende trinnene i et mønster, og dermed er med på å støtte elevenes tenkning (Warren, 2005). Hun sier også at spesifikke spørsmål fra læreren som er med på å gjøre forholdet mellom mønsteret og indekstallet tydeligere støtter elevenes tenkning i arbeid med funksjonssammenhenger (Warren, 2005). Orton et al. (2005) mener også at konkretiseringsmateriell, som fyrstikker, tilfører situasjonen mangfold og kontekst, noe som kan være viktig for å utvide erfaringene til elevene.

3. Metode

Problemstillingen min for dette prosjektet er: Hva er det som er typiske trekk for elever på 7. trinn i arbeid med generalisering av figurfølger i algebra, og hva er det som fungerer som katalysator for dem i denne generaliseringsprosessen? For å finne svar på problemstillingen min er jeg avhengig av et godt datamateriale, altså et datamateriale som gir belegg for å si noe om det jeg vil forske på, og med resultater som kan ses på som valide. Gronlund sier at man må se på graden av validitet, og ikke validitet som en absolutt tilstand (1981 i Cohen, Manion og Morrison, 2007, s. 133). Vi må derfor strebe etter å minimalisere ugyldighet og maksimere validitet, noe jeg vil komme tilbake til i kapittel 3.4. I mitt prosjekt var det ingen tvil om at jeg måtte ut i skolen og forske på elever for å finne svar, ettersom det er elever i arbeid med figurfølger jeg vil se nærmere på. Jeg vil i dette kapitlet beskrive forskningen min og de valg jeg har tatt for å få svar på problemstillingen min.

3.1 Kvalitativ metode

Forskningen jeg har gjort er innenfor kvalitativ forskning. Postholm (2005) skriver at kvalitativ forskning er en undersøkelse av menneskelige/sosiale prosesser i deres naturlige setting. Forskningsspørsmålet mitt handler om elever i arbeid med generaliseringsaktiviteter i algebra. Jeg vil se på hvordan de arbeider med figurfølger, hvilke metoder de tar i bruk i generaliseringen og hvordan de bruker forskjellige matematiske representasjoner som naturlig språk og symbolspråk. For å kunne finne ut noe om dette må jeg studere situasjoner hvor elever arbeider sammen med generaliseringsaktiviteter, nemlig i menneskelige sosiale prosesser med kommunikasjon og samhandling. Jeg vil derfor studere situasjoner hvor elever arbeider sammen med generaliseringsaktiviteter og ha fokus på metodene og representasjonene de bruker. På denne måten kan jeg få tilgang til elevenes språk og resonnement og deretter beskrive og forstå situasjonene ved å prøve å se gjennom deres øyne. Dette betinger en fortolkende teori og plasserer meg innenfor det subjektivistiske forskningsparadigmet.

I arbeid med generaliseringsaktiviteter mener jeg at deltakerne er med på skape praksisen ved at de bidrar med tanker og ytringer, og dermed skaper handlingen og framdriften. Virkeligheten jeg vil forske på ser jeg altså på som skapt av deltakerne i forskningen, noe som medfører at mine forskningsresultater er kontekstualiserte og situerte. Jeg vil derfor ikke komme fram til generelle resultater eller kunne beskrive lovmessigheter, men heller beskrive og forstå situasjoner og altså konsentrere meg om det spesielle. Jeg vil forsøke å beskrive og forstå situasjoner ved å prøve å se gjennom elevenes øyne, og er derfor selv et viktig redskap i forskningen min. Postholm (2005) skriver at "forskeren er det viktigste forskningsinstrumentet i all kvalitativ forskning" (s. 35). Dette gjør at kunnskapen jeg sitter igjen med om elevers bruk av algebraisk språk vil være farget av meg, og altså være subjektiv.

For at jeg skal kunne få svar på problemstillingen min vil jeg altså observere en gruppe elever i arbeid med generaliseringsaktiviteter og studere disse situasjonene i dybden. For å kunne gå i dybden på datamaterialet mitt er jeg nødt til å begrense omfanget av deltakere og tid til å passe med rammene for forskningsprosjektet. Jeg har derfor valgt å konsentrere meg om to grupper med tre elever i to skoletimer hver, noe som gjør at jeg kan kalle forskningen min for en casestudie (Stake, 1995).

3.1.1 Casestudie

Cohen et al. (2007) skriver at en casestudie er et spesifikt eksempel som er utformet for å illustrere et mer generelt prinsipp. Eksempelet som studeres er en avgrenset samling, for eksempel en elev, en elevgruppe, en klasse eller en skole. Cohen et al. skriver videre at en casestudie har som mål å gi en analytisk heller enn en statistisk generalisering, og ønsker på denne måten å utvikle teori som kan hjelpe forskere med å forstå andre lignende caser. Stake (1995) skriver at en casestudie er en studie av særegenheten og kompleksiteten i en enkel case. Han skriver videre at vi har forskjellige typer av casestudier som defineres ut fra hva vi er ute etter. I mitt tilfelle er jeg ute etter å finne ut noe om hva som er typiske trekk for elever som arbeider med figurfølger. Stake beskriver dette som en instrumentell casestudie, hvor vi har en problemstilling, eller noe vi lurer på, som vi kan få innsikt i ved å studere enkelttilfeller. Her brukes en casestudie for å forstå noe annet et den enkelte casen vi studerer, og er på denne måten et instrument for å utføre noe (Stake, 1995). I min forskning vil jeg altså bruke mine to caser som instrument for å finne ut noe om elevers arbeid med generalisering av figurfølger.

Postholm (2005) skriver at det er problemstillingen og hensikten med studien som avgjør hvilke og hvor mange caser forskeren velger å studere. Som forsker må man altså finne ut om problemstillingen gjør det mest hensiktsmessig å ta for seg flere caser eller å gå mer i dybden på en case. Postholm skriver også at rammen for forskningsarbeidet har betydning for valget av caser. Hun utdyper at det i mindre forskningsarbeid kan være mest hensiktsmessig å velge bare en case slik at det kan gjennomføres innenfor tidsrammen, i tillegg til at dette gir forskeren mulighet til å gå dypere inn i denne ene casen. Jeg har til hensikt å gå i dybden på de data jeg finner, og innenfor rammen for mitt prosjekt var det derfor ikke aktuelt å studere flere caser. Jeg valgte likevel to caser i stedet for en for å prøve å sikre at jeg får data jeg kan relatere til problemstillingen min, i tilfelle gruppesammensetning eller annet gjør den ene datainnsamlingen mindre vellykket. "Et essensielt trekk for en casestudie er at tilstrekkelige data blir samlet inn slik at forskere gjøres i stand til å utforske viktige trekke og tolke det som blir studert" (Postholm, 2005, s. 53). Jeg mener at to caser gir meg tilstrekkelig med data for å kunne si noe om problemstillingen min, men vil være åpen for å hente inn mer data hvis det skulle vise seg å være nødvendig. Jeg har i utgangspunktet tenkt å observere de to casene i to skoletimer hver og intervjue elevene i etterkant når jeg har begynt å analysere dataene og kan se hva jeg ønsker mer informasjon om.

3.2 Gjennomføring av datainnsamling

3.2.1 Valg av skole og trinn

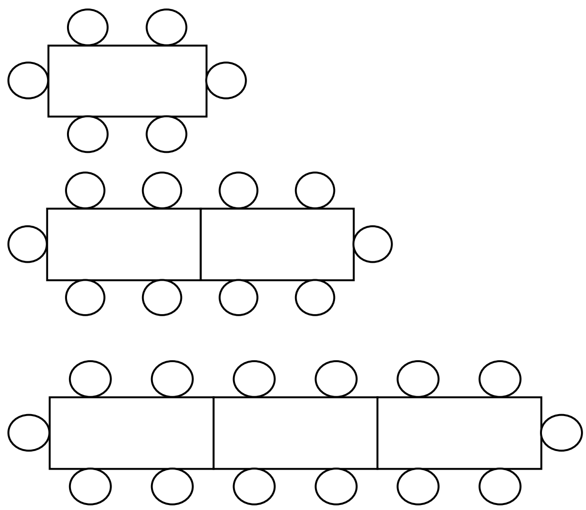
Jeg gjennomførte datainnsamlingen min i november i en klasse med 18 elever på 7. trinn (den ene av fem klasser på trinnet) ved en skole i Trondheim. Jeg hadde ingen kriterier for valg av skole, bortsett fra at de måtte være positive til å la meg gjennomføre datainnsamlingen min der. Jeg tok kontakt med skolen hvor jeg har gjort datainnsamlingen min fordi jeg var der i praksis for fem år siden, og hadde en lærer jeg kjente til og kunne kontakte. Han satte meg i kontakt med læreren med matematikkansvaret på 7. trinn som sa seg villig til å la meg gjennomføre datainnsamlingen min i klassen hans. Jeg hadde dermed ikke noe kjennskap til elevgruppa jeg har brukt fra før, men valgte den på grunn av at jeg fikk lov til å komme dit.

Grunnen til at jeg valgte 7. trinn er fordi elevene her har kommet til det punktet i matematikken hvor de første kompetansemålene innenfor hovedområdet tall og algebra presenteres i Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, u. å.), og det er vanlig at elevene presenteres for algebraisk notasjon. Elevene jeg observerte i datainnsamlingen min hadde ikke arbeidet med algebraisk notasjon tidligere, men de hadde arbeidet litt med oppgaver hvor de skulle finne neste figur i en figurfølge. Altså hadde de vært borti oppgaver med å se strukturen og økningen i figurfølger, men de hadde ikke arbeidet med å beskrive funksjonssammenhengen i figurfølgen. Jeg ser det som en fordel at elevene ikke hadde arbeidet mye på denne måten fra før, fordi jeg da kunne observere hvordan de arbeider med generalisering av figurfølger når dette var et relativt nytt område for dem. På denne måten uttrykte de generaliseringer og funksjonssammenhenger de fant på den måten som var naturlig for dem.

3.2.2 Pilotprosjekt

Den første datainnsamlingen min var et pilotprosjekt på to skoletimer. Som tidligere nevnt hadde elevene lite erfaring med arbeid med figurfølger, og jeg så det derfor som nødvendig å gi elevene noe erfaring med denne typen oppgaver slik at de kunne arbeide sammen i grupper med minst mulig innblanding fra meg i selve undersøkelsen. Jeg begynte med å presentere meg seg, og fortalte elevene at jeg forsker på elever og matematikklæring før jeg fortalte litt om hvorfor jeg brukte videokamera og hvem som kunne se videoen etterpå. Jeg fortalte ikke elevene hva slags matematisk tema vi skulle arbeide med, men begynte å presentere en figurfølge for elevene på tavle. Gjennom denne oppgaven innførte jeg begrepene *figurnummer, mønster* og *metode.* Hensikten med pilotprosjektet var altså å gi elevene erfaring med arbeid med figurfølger og å innføre noen begrep slik at de hadde et begrepsapparat de kunne bruke når de skulle arbeide med flere figurfølger i grupper senere.

Figurfølgen jeg presenterte for elevene var en oppgave med sammensetting av bord:



Figur 6: Bord-oppgaven

Jeg viste først ett bord med plass til seks stoler rundt på tavla. Deretter spurte jeg elevene hvor mange stoler vi får plass til hvis vi har langbord med to bord og tre bord før jeg viste disse figurene. Etter å ha presentert denne bordfølgen for elevene på tavla lot jeg dem arbeide to og to sammen med spørsmål jeg hadde skrevet på ark som jeg delte ut. Jeg valgte å la elevene arbeide sammen to og to slik som de sitter til vanlig i klasserommet for å gjøre rammen mest mulig lik en vanlig matematikktime. Mens elevene arbeidet med oppgavene gikk jeg rundt og hørte på elevenes diskusjoner og hjalp dem litt på vei hvis de hadde spørsmål. Jeg hadde plassert et videokamera bakerst i klasserommet slik at jeg skulle kunne se tilbake på hva jeg selv og elevene hadde sagt i ettertid. Etter at elevene hadde arbeidet med spørsmål til bordfølgen ei stund gikk vi gjennom spørsmålene sammen. Den siste delen av økta delte jeg ut et ark med flere figurfølger de skulle arbeide med.

Etter pilotprosjektet noterte jeg mine umiddelbare tanker og refleksjoner rundt elevenes arbeid og ytringer i økta. I dette pilotprosjektet fikk jeg et inntrykk av hvordan elevene reagerte på denne typen oppgaver og hvordan de arbeider med dem. Dette var verdifull kunnskap for meg i forhold til gruppearbeidene jeg skulle gjennomføre videre fordi jeg oppdaga momenter som jeg måtte ta hensyn til og jeg fikk også et inntrykk av hva elevene klarte og hva det virket som de opplevde som vanskelig.

I tillegg til at jeg fikk et inntrykk av elevene gjennom pilotprosjektet fikk også de blitt litt kjent med meg og det å ha et videokamera i klasserommet før jeg tok ut noen elever til observasjon i mindre grupper. Postholm (2005) skriver at "gjennom en tilvenningsprosess mellom forskeren og utstyret han eller hun skal bruke og forskningsdeltakerne, kan det være mulig for forskeren å observere prosesser som også hadde skjedd dersom forskeren ikke hadde vært der" (s. 65). Altså kan pilotprosjektet mitt ha vært med på å gjøre situasjonen mer naturlig for elevene i de små gruppene, noe som kan være med på å øke validiteten.

3.2.3 Observasjon i grupper

Utvalget av elever til undersøkelsen er basert på frivillighet fordi elevene selv fikk velge om de ville delta. Alle elevene i klassen sa seg villige til å delta, og jeg måtte derfor velge ut seks elever til de to gruppene jeg skulle observere. Her hadde jeg ikke til hensikt å representere en større gruppe av befolkningen, men å se på en bestemt gruppe som kun vil representere seg selv. Denne typen utvalg er det Cohen et al. (2007) kaller et ikke-sannsynlighetsutvalg. Her gjennomfører forskeren undersøkelsene sine med en bestemt gruppe med full viten om at den ikke representerer befolkningen, men kun seg selv, noe som ofte er tilfelle i småskalaforskning hvor målet ikke er å generalisere.

Jeg ba læreren om å velge ut elever til to grupper med tre elever i hver til videre observasjon. Kriteriene jeg ga læreren for valg av elever var at de skulle kunne samarbeide med hverandre og at de var tilbøyelige til å uttrykke seg muntlig. Stake (1995) skriver at noen caser vil gjøre en bedre jobb enn andre i instrumentelle casestudier. Kriteriene for valg av case settes derfor for at vi skal maksimere det vi kan lære og i tillegg til at de som deltar er mottakelige for forskningen. Jeg satte mine kriterier for å sikre at gruppearbeidene skulle fungere greit, og dermed sikre at jeg ville få et datamateriale jeg kunne bruke i analysene mine. Dette er altså det Cohen et al. (2007) kaller et formålstjenelig utvalg fordi jeg plukker tilfeller til gruppene jeg vil observere ut fra noen valgte kriterier slik at gruppen tilfredsstiller mine behov. Stake (1995) skriver at det kan være nyttig å velge caser som er typiske eller representative for andre caser, men at det likevel er vanskelig å forsvare at et lite utvalg er representativt for en større gruppe. Elevene som ble valgt ut er derfor ikke nødvendigvis representative for klassen, men de er representative for elever som liker å uttrykke seg muntlig og kan arbeide sammen, og er valgt ut på dette grunnlaget. Læreren i klassen mener også at elevene som ble valgt ut er representative for klassen som helhet.

Jeg observerte de to gruppene i to skoletimer hver. Ved å observere dem hver for seg la jeg til rette for å få med meg mest mulig av det de sa og gjorde. Observasjonene foregikk på et grupperom med ett bord hvor jeg plasserte to elever på den ene siden av bordet og én elev på den andre. Ved enden av bordet satte jeg opp et videokamera på stativ slik at det filmet både elevene og bordplata. På denne måten kunne jeg i ettertid se på det de skrev ned og hvordan de brukte konkreter underveis i arbeidet. Cohen et al. (2007) skriver at videoopptak kan overkomme det ufullstendige i observatørens syn på en hendelse og tendensen mot å se kun hendelsene som skjer ofte, noe som er med på å øke validiteten. Selv plasserte jeg meg på den ene sida av bordet slik at jeg satt midt i mot to elever og hadde den tredje eleven ved siden av meg. Jeg trakk meg mest mulig mot enden av bordet slik at det at jeg noterte litt underveis opptok minst mulig av elevenes oppmerksomhet. Jeg presenterte figurfølgene muntlig for elevene i tillegg til å vise figurene ved hjelp av konkreter eller opptegna på ark. Deretter ga jeg dem ark med skrevne oppgaver til figurfølgene. Figurfølgene jeg brukte i undersøkelsen vil jeg presentere og analysere nærmere i kapittel 4.

Jeg prøvde å skape en situasjon som var mest mulig lik en vanlig gruppearbeidssituasjon for elevene, ut ifra mitt fokus som var figurfølger. Jeg valgte å la elevene arbeide uten innblanding fra meg fra starten av med hver figurfølge. Etter at de hadde svart på oppgavene på arket stilte jeg noen spørsmål for å utfordre dem videre eller for å oppklare noe av det de hadde sagt og gjort. Jeg hadde altså rolle som en delvis deltakende observatør. Postholm (2005) skriver at den kvalitative forskeren er opptatt av å observere aktiviteter i sin naturlige gang, men har samtidig et fokus for observasjonen basert på teori. Jeg var spesielt opptatt av metodene de brukte og hvordan de brukte forskjellige representasjoner i arbeid med figurfølger. Cohen et al. (2007) kaller en slik observasjon, hvor man har forhåndsbestemte tema som man vil samle inn data for å belyse og beskrive, for en semistrukturert observasjon. Gjennom observasjonen kan jeg gi beskrivelser av situasjonene hvor elever arbeider med figurfølger og av metodene og representasjonene de tar i bruk.

3.3 Analysemetode

3.3.1 Data

Datamaterialet mitt er altså observasjonene av elevene som jeg samlet inn med bruk av videokamera, i tillegg til mine egne notater underveis og i etterkant av observasjonene. I analysearbeidet har jeg i tillegg til transkriberinger fra videofilmene og egne notater brukt elevenes skriftlige besvarelser fra observasjonene.

3.3.2 Den konstant komparative analysemetoden

Etter datainnsamlingen begynte jeg med å transkribere videofilmene. Jeg skrev ut alle transkripsjoner og leste gjennom dem flere ganger for å bli kjent med datamaterialet mitt. Ved å ha dialogen som tekst kunne jeg notere underveis og identifisere spesielle situasjoner i materialet som var signifikante med hensyn til forskningsspørsmålet mitt. Jeg markerte slike situasjoner og skrev ned stikkord som beskrev situasjonene, i tillegg til tanker og refleksjoner jeg fikk. På denne måten ble jeg mer klar over hva datamaterialet mitt innehold, og fikk satt ord på det jeg så i materialet og mine tanker rundt det.

Videre fant jeg ut at jeg måtte sortere materialet mitt for å få bedre oversikt over hva det inneholdt, og begynte å kode og dele opp materialet mitt i situasjoner. Jacobsen (2005) skriver at noe av det første vi gjør når vi har hele datamaterialet klart er å forsøke å redusere kompleksiteten ved å forenkle og strukturere det. Denne måten å arbeide med analyse på er det som kalles den konstant komparative analysemetoden, og som Postholm (2005) skriver at kan brukes innenfor alle kvalitative studier hvor koding og kategorisering blir viktig i analysearbeidet. Jeg har her brukt begreper fra Postholm sin beskrivelse av denne analysemetoden som er beskrivende for analysemetoden i mitt prosjekt, nemlig *åpen koding* og *aksial koding*. Jeg har altså ikke brukt alle begrepene i hennes beskrivelse av metoden, ettersom ikke alle disse delene var relevante for mitt arbeid.

Jeg begynte med å kode materialet ut fra begrepene til Lee (1996): oppfattelsesnivå; verbaliseringsnivå; symbolnivå, i tillegg til at jeg kom fram til en egen kode som jeg kalte skriftlige representasjoner i naturlig språk (for utdyping av disse, se vedlegg 2: analyselogg). Jeg sorterte ikke hvert utsagt for seg, men delte materialet inn i små situasjoner etter de forskjellige nivåene. Videre begynte jeg å se på de forskjellige metodene elevene brukte i arbeid med figurfølgene innenfor disse kodene. Jeg fant etter hvert ut at jeg ville kode materialet mitt mer detaljert for å få bedre oversikt over hva elevene gjorde. I denne andre kodingen brukte jeg noen begreper fra Stacey (1989) som beskriver metoder elevene bruker, i tillegg til noen egne koder. Denne fasen er det Postholm (2005) kaller *åpen koding*. I denne fasen kategoriserer forskeren fenomener og setter navn på situasjoner etter nøye gjennomgang av datamaterialet (Postholm, 2005). Her blir altså datamaterialet delt inn i mindre deler som blir gitt et navn, en kode som representerer fenomenet. Man sammenligner videre deler av datamaterialet slik at samme fenomen får samme navn (Postholm, 2005). Postholm skriver at navn på kodene kan komme fra forskerens teoribakgrunn, men forskeren kan også selv komme fram til et begrep.

Etter å ha kodet hele materialet mitt endte jeg opp med disse elleve kodene:

- Tellemetoden (fra Stacey Counting method). Ser strukturen i følgen, teller antall komponenter og kan tegne/legge opp de påfølgende figurene.
- Rekursiv metode. Ser den rekursive sammenhengen i figurfølgen og kan benytte denne til beregning av påfølgende figurer. For eksempel, hvor mange er det i Figur 111 hvis det er 331 i Figur 110?
- Utvikling av eksplisitt metode. Elevene går vekk fra å bruke en rekursiv metode og arbeider med å finne en eksplisitt metode for å beregne antall komponenter for en figur langt ute i følgen.

- Helobjektmetoden (fra Stacey Whole-object method). Bruker antall komponenter for en mindre figur i følgen og multipliserer dette, antar implisitt at $M(mn) = m \cdot M(n)$
- Differansemetoden (fra Stacey Difference method). Ganger figurnummeret med 3, og antar implisitt at gjentatt addisjon av 3 betyr at $M(n) = 3n$
- Lineær metode – eksplisitt metode (fra Stacey Linear method). Elevene har kommet fram til et mønster i figurfølgen som vedkjenner at både multiplikasjon og addisjon er involvert og at rekkefølgen av operasjonene har betydning, altså implisitt å bruke en lineær modell. $M(n) = an + b$ med $b \neq 0$. Elevene har funnet fram til en riktig eksplisitt metode, altså funksjonssammenhengen i følgen. Jeg har her også innlemmet bruk av riktig eksplisitt metode for den kvadratiske figurfølgen.
- Skriftlig representasjon i naturlig språk. Skriver ned metoden de har kommet fram til ved hjelp uformelt matematisk språk som er basert på det naturlige språket.
- Symbolisering (n). Uttrykker den eksplisitte metoden ved hjelp av variabelen n.
- Konkreter som generisk eksempel. Forklarer det eksplisitte forholdet ved hjelp av konkreter. Bruker konkretene som generisk eksempel.
- Sammenligning av metoder. Sammenligner forskjellige uttrykk de har funnet for samme figurfølge. Noen uttrykk er ekvivalente, mens andre gir forskjellige svar.
- Oppfattelse av variabelen. Elevene uttrykker forskjellige oppfatninger av hva n er og hvordan den skal brukes.

Postholm (2005) skriver at man etter å ha delt inn materialet i koder må gruppere disse slik at materialet blir håndterlig. Forskeren grupperer begrepene som kodene er klassifisert under, slik at antallet enheter å jobbe videre med reduseres (Postholm, 2005). Etter at jeg hadde delt materialet inn i de elleve kodene begynte jeg å studere situasjonene innenfor de forskjellige kodene for å se etter mer generelle kjennetegner for elever i arbeid med figurfølger. Jeg skrev ned stikkord med kjennetegn jeg fant, og begynte å sortere kodene ut ifra hvilke tema som hadde tilknytning til hverandre. På denne måten fikk jeg sortert kodene jeg hadde kommet fram til og satt dem sammen med stikkord på mine tolkninger så langt. "Denne prosessen som består i å samle grupper av begreper som ser ut til å dekke de samme fenomener, kalles *kategorisering*" (Postholm, 2005, s. 88). Jacobsen (2005) skriver at en kategorisering skal ta utgangspunkt i dataene, det vil si at kategoriene skal springe ut fra dataene man har tilgjengelig.

Gjennom dette kategoriseringsarbeidet fikk jeg sammenfatta datamaterialet mitt i tre typiske trekk for elevene jeg observerte i arbeid med figurfølger:

1. Elevene tar i bruk ufullstendige metoder
2. Overgangen mellom representasjoner er utfordrende for elevene
3. Medierende redskaper fungerer støttene for elevene i generaliseringsprosessen

Jeg strukturerte materialet ut i fra disse tre kategoriene, og sorterte igjen kodene og situasjonene som jeg hadde delt materialet inn i tidligere med hensyn til disse tre. Dette er den andre fasen i den konstant komparative analysemetoden som kalles *aksial koding*. Her begynner man å se på hvordan kategoriene man har kommet fram til forholder seg til kodene og setter disse i system (Postholm, 2005). Gjennom dette arbeidet omstrukturerte jeg kodene i nye underkategorier til de tre kjennetegnene. Postholm (2005) skriver at kjernekategorien representerer forskningens hovedtema. Jeg kom altså fram til tre kjernekategorier, med underkategorier:

Bruk av metoder	Overgangen mellom representasjoner	Mediering
1. Rekursiv metode 2. Overgangen fra rekursiv til eksplisitt metode 3. Ufullstendige metoder	1. Overgangen fra naturlig språk til skriftlige representasjoner 2. Overgangen fra uformelt skriftlig språk til symbolspråk	1. Konkretenes rolle 2. Lærerens rolle

Etter at materialet har blitt samlet opp og delt inn i deler ut fra koder og kategorier blir forskerens neste oppgave å finne ut hvilke eksempler fra datamaterialet som skal velges som illustrasjoner på de ulike kategoriene (Postholm, 2005). Jeg fant situasjoner i datamaterialet mitt som belyste disse kategoriene og det jeg ville drøfte i analysen min. Disse illustrasjonene blir i neste omgang analysert for å oppnå en enda mer dyptgripende forståelse av settingen eller fenomenet som studeres (Postholm, 2005). Gjennom denne forskningsprosessen, fra observasjon og transkripsjon til koding og kategorisering hadde jeg gjort en god del analyser og tolkninger som var med på hjelpe meg til å forstå og tolke de observerte situasjonene.

Postholm (2005) skriver at forskeren til slutt skriver en helhetlig tekst eller fortelling som representerer forskningsfeltet med utgangspunkt i kjernekategorien og underkategorier. Jeg har brukt kjernekategoriene som delkapittel i analyse- og drøftingskapittelet mitt, og underkategoriene som underoverskrifter innenfor disse.

3.4 Etiske forholdsregler og metodekritikk

3.4.1 Etiske forholdsregler

I forkant av undersøkelsene mine delte jeg ut et brev til de foresatte for elevene i klassen jeg skulle gjennomføre datainnsamlingen i (se vedlegg nr. 1). Her fortalte jeg om prosjektet mitt og ba om tillatelse til å bruke videoopptak i klasserommet under gjennomføringen. Jeg beskrev også hva videoopptakene skulle brukes til og hvem som ville kunne se opptakene. De foresatte fikk velge om de ville tillate videoopptak eller ikke, og måtte levere en svarslipp til læreren før jeg gjennomførte datainnsamlingen. På denne måten sikret jeg at de involverte i datainnsamlingen og deres foresatte visste hva prosjektet de deltok i var, og hva jeg skulle bruke datainnsamlingen til. I presentasjonen av analysene mine er det naturlig å bruke deler av transkripsjon eller elevenes skriftlige representasjoner som belegg for mine funn og påstander. Jeg har derfor anonymisert elevene slik at dialogen ikke kan spores tilbake til elevene som deltok i undersøkelsen. Dette har jeg har gjort ved å gi elevene fiktive navn, og ved å unngå å nevne skolens navn, stedsnavn eller å røpe dialekter.

Under observasjonen la jeg vekt på å gjøre videokameraet lite framtredende slik at elevene skulle bli minst mulig preget av at de ble filmet. Likevel ser jeg på videofilmene mine at elevene var litt sjenerte i starten og pratet lavt. Dette gikk over i løpet av få minutter, så det ble ikke noe problem for undersøkelsen min som sådan, men jeg ser i ettertid at jeg kunne hatt en “oppvarmings-aktivitet” før de skulle arbeide med oppgaver på egenhånd. På denne måten kunne de kommet litt i gang slik at de ikke lenger var sjenerte når de skulle begynne å arbeide med figurfølgene.

Ettersom jeg ville utfordre elevene til å ta i bruk algebraisk notasjon selv om de ikke hadde fått undervisning i dette var det viktig for meg å ikke gi elevene dårlig selvfølelse eller en opplevelse av å ikke mestre spørsmålene jeg stilte. Miles og Huberman (1994) påpeker også dette og skriver at deltakere i forskning kan komme til skade ved at selvtilliten deres svekkes eller at de ser “dårlige ut” for andre. De skriver at vi som forskere må prøve å redusere risikoen for at dette skjer. Jeg var derfor nøye med å fortelle elevene at jeg kunne komme til å stille dem spørsmål som de ikke forstod, men at jeg ikke forventet at de ville kunne svare på alt, og at det var helt greit. Det oppstod også situasjoner i datainnsamlingen hvor elever var uenige og begynte å krangle om hvem som hadde riktig svar. Her så jeg meg nødt til å bryte inn for å hindre uvennskap ved å si ifra om at det kunne være flere riktige svar, og at de ikke behøvde å komme fram til et felles svar.

Etter at prosjektet mitt er ferdig vil jeg la læreren jeg gjennomførte datainnsamlingen min hos lese oppgaven min. Gjennom å lese mine analyser kan han få en dypere forståelse for temaet jeg har forsket på, noe som kan tilføre ham og hans elever nyttig kunnskap. På denne måten kan deltakerne ha noe igjen for å ha vært med i forskningen min, og se hva som kom utav studien som de var med på å gjøre mulig. Miles og Huberman (1994) skriver at deltakere i forskningen kan få nye innsikter eller kunnskap, og på denne måten forbedre sin personlige praksis. Læreren jeg gjennomførte forskningen min hos kan altså ha nytte av forskningen min og sitte igjen med et utbytte av deltakelsen sin.

3.4.2 Metodekritikk

Selv om jeg observerte elevene i kjente omgivelser, på skolen, var situasjonen ukjent for dem. I tillegg til at jeg ikke er en lærer de har et forhold til fra før, tok jeg dem ut av klasserommet og ga dem oppgaver som ikke er naturlige i deres skolehverdag. Jeg kan derfor ikke se bort fra at denne nye situasjonen påvirket elevene og dermed datamaterialet mitt. Likevel mener jeg at jeg la forholdene mest mulig til rette for at elevene skulle føle seg trygge i situasjonen ved at jeg gjennomførte et pilotprosjekt på forhånd hvor de ble kjent med meg og det at de ble filmet.

Ettersom jeg selv var en deltakende observatør i undersøkelsene kan jeg heller ikke se bort i fra at det jeg sa og gjorde underveis i observasjonen har påvirka elevene. Mine observasjoner er også farget av meg, og vil være påvirket av hva og hvordan jeg ser og tolker situasjonene. Jeg kan ikke være sikker på at en annen forsker ikke ville sett ting annerledes enn det jeg gjorde. Ved å presentere en mengde data som belegg for mine analytiske påstander kan jeg likevel arbeide for å sikre troverdigheten i min påstander. Stake (1995) skriver at vi ved å beskrive situasjoner detaljer gir leseren mulighet til å triangulere ved å gjøre egne tolkninger.

Jeg har også fått andre til å lese kritisk gjennom mine analyser, og fått tilbakemeldinger og veiledning i dette arbeidet.

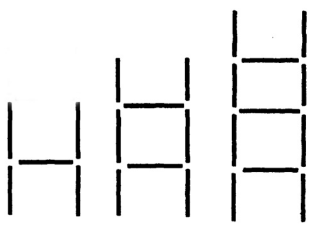
Jeg har gjennomført undersøkelsene mine med en liten gruppe elever som ikke er representative for en større gruppe i befolkningen. Jeg kan derfor ikke se på dataene mine som representative eller trekke generelle slutninger ut fra mine funn. Stake (1995) skriver at vi ikke studerer en case hovedsakelig for å forstå andre caser, men for å forstå denne ene. Det er altså spesialisering mer enn generalisering som står i fokus. Likevel legger mine beskrivelser til rette for at andre skal kunne sammenligne mine funn med lignende caser og på denne måten dra nytte av mine funn og tolkninger.

4. Analyse av det matematiske og didaktiske potensialet i oppgavene jeg har brukt

Før jeg går inn på resultater og analyse av datamaterialet mitt vil jeg vil presentere oppgavene jeg brukte i datainnsamlingen min. Disse fire oppgavene er figurfølger som jeg viste elevene ved å legge opp fyrstikker eller hadde tegna opp på ark på forhånd. Tre av figurfølgene har lineær vekst, og en har kvadratisk vekst. Jeg viste elevene de tre første figurene i figurfølgen og ga dem deretter et ark med spørsmål, hvor de ble spurt om å tegne eller legge opp Figur 4 og 5, og deretter om antallet fyrstikker/kuler/fliser i Figur 10, 20 og 100. Dette er de fire figurfølgene:

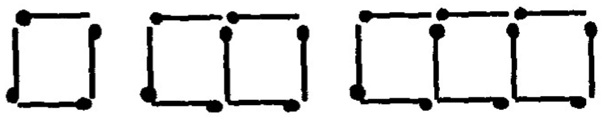
Stigeoppgaven (Oppgave 1)

Denne oppgaven har jeg lånt fra Stacey (1989). Her skal elevene bygge stiger med bruk av fyrstikker. Denne figurfølgen har lineær vekst, og den eksplisitte formelen for følgen er $f_n = 3n + 2$.



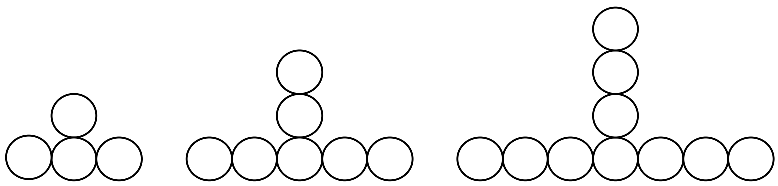
Firkantmønster (Oppgave 2)

Denne oppgaven har jeg lånt fra MacGregor og Stacey (1995). Her skal elevene legge et mønster av firkanter med bruk av fyrstikker. Denne figurfølgen har lineær vekst, og den eksplisitte formelen for følgen er $f_n = 3n + 1$.



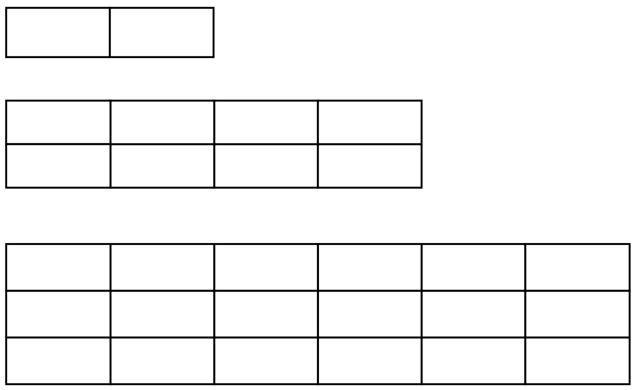
Kulemønster (Oppgave 3)

Denne oppgaven har jeg lånt fra Mason (1996), men jeg har brukt hans Figur 2 som Figur 1 og så videre. Denne figurfølgen presenterte jeg for elevene opptegna på ark. Denne figurfølgen har lineær vekst, og den eksplisitte formelen for følgen er $f_n = 3n + 1$.



Flismønster (Oppgave 4)

Denne figurfølgen presenterte jeg for elevene opptegna på ark. Denne figurfølgen har kvadratisk vekst, og den eksplisitte formelen for følgen er $f_n = n \cdot 2n = 2n^2$.



I tillegg til oppgavene på arket jeg delte ut stilte jeg elevene noen spørsmål muntlig. Jeg spurte dem om å forklare og deretter skrive ned metodene de hadde brukt for å beregne antall komponenter i figurene. Med antall komponenter mener jeg antallet byggesteiner som figuren består av (fyrstikker, kuler eller andre symboler). Jeg hadde med hensikt ikke skrevet at elevene skulle bruke algebraiske symboler eller nevnt n på oppgavearket. På denne måten kunne jeg først observere hvordan elevene valgte å formulere seg uten påvirkning fra meg, og hvilke representasjoner det var naturlig for dem å bruke. Hvis de ikke selv valgte å ta i bruk algebraisk notasjon spurte jeg om de kunne skrive ned metoden sin med bruk av n.

Som nevnt i teorikapitlet hører arbeid med figurfølger inn under den kordelen av algebraisk resonnering som Kaput og Blanton (2001) kaller algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon. En funksjon er en relasjon som entydig assosierer elementene i en mengde med elementer til en annen mengde. Mer formelt er en funksjon fra mengden A til mengden B et objekt f slik at hver a $\in$ A er entydig assosiert med et objekt f (a) $\in$ B. En funksjon er derfor en mange-til-en eller en en-til-en relasjon (Weisstein, 2011). I arbeid med figurfølger er det et mål å beskrive mønsteret i figurene, altså hvordan figurene i følgen utvikles og den systematiske variasjonen. Denne systematiske variasjonen beskrives i en funksjonssammenheng mellom mengden A og mengden B. Her er A definisjonsmengden, altså figurnumrene, og B er verdimengden, altså antall komponenter i de forskjellige figurene i følgen. Målet i arbeid med figurfølger er å uttrykke funksjonssammenhengen i figurfølgen som et generelt uttrykk ved hjelp av algebraisk notasjon.

Jeg antok på forhånd at elevene ville starte med å bruke den rekursive sammenhengen i figurfølgen for å tegne opp Figur 4 og 5 og finne antall komponenter i disse figurene. Den rekursive sammenhengen i en figurfølge kan beskrives i en rekursjonsformel, som er en formel hvor hvert element beregnes ut fra ett eller flere av de foregående elementene (Thompson, Martinsson, Gunnesdal, & Rian, 2006). Dette betyr at bruk av den rekursive sammenhengen i en figurfølge med elementene $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ krever beregning av alle de foregående figurene for å finne antall komponenter i f_n. Man kan altså alltid finne antall komponenter i den påfølgende figuren når man vet antall komponenter i én figur. Jeg hadde som mål at elevene skulle uttrykke den rekursive sammenhengen muntlig og at de skulle kunne bruke den til beregning av de påfølgende figurene. Ettersom jeg ville fokusere på funksjonssammenhengen mellom figurnummeret og antall komponenter i figurene i følgen valgte jeg ikke å arbeide med at elevene skulle uttrykke denne rekursjonsformelen skriftlig.

Jeg hadde altså hovedfokus på at elevene skulle se sammenhengen mellom antall komponenter i figurene og figurnummeret. Denne funksjonssammenhengen i figurfølgene kan uttrykkes som en eksplisitt funksjon. En funksjon $x \rightarrow y$ er eksplisitt hvis den kan beskrives av en ligning som er løst med hensyn på y, det vil si en likning på formen $y = f(x)$ (Thompson et al., 2006). Funksjonssammenhengen i figurfølgen kan dermed uttrykkes i en eksplisitt formel som knytter den avhengige variabelen y, som er antall komponenter i figuren, til den uavhengige variabelen x, som er figurnummeret. Denne formelen tillater en direkte beregning av antall komponenter i hvilken som helst figur i følgen, $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. Målet mitt var at elevene skulle se hvordan figurfølgen utviklet seg, komme fram til en direkte metode for beregning av antall komponenter i hvilken som helst figur, og deretter uttrykke denne metoden generelt både muntlig og skriftlig. Ettersom jeg visste at elevene hadde lite erfaring med figurfølger og ingen erfaring med algebraisk symbolspråk fra før kunne jeg ikke anta at de ville klare å uttrykke den eksplisitte funksjonssammenhengen med bruk av algebraisk notasjon. Jeg lot dem derfor uttrykke metoden sin skriftlig på den måten som var naturlig for dem først, og deretter utfordret jeg dem til å ta i bruk algebraisk notasjon om de ikke valgte å gjøre det selv.

Som tidligere nevnt antok jeg på forhånd at elevene ville starte med en rekursiv metode for de første figurene de ble spurt om, altså å gjenkjenne og bruke økningen fra en figur til neste for å beregne antall komponenter i de påfølgende figurene. Stacey og MacGregor (2001) skriver at elevene helst fokuserer på den rekursive sammenhengen i tallfølger, og at man derfor må bruke oppgaver som utforsker eksplisitte sammenhenger i følgene for å få elevene til å gå videre fra en rekursiv metode til funksjonssammenhengen som beskriver hele følgen. For å få elevene til å gå over til å finne en eksplisitt metode måtte jeg altså gi dem et behov for å finne en slik direkte beregningsmåte. Ved å spørre etter figurer langt ute i figurfølgen blir det vanskeligere å benytte seg av den rekursive sammenhengen, noe som gir elevene behov for å gå over til en eksplisitt metode. Stacey (1989) beskriver dette ved å skille mellom det hun kaller *nærgeneralisering* og *fjerngeneralisering* (min oversettelse). Nærgeneralisering betegner et spørsmål som kan løses med tegning eller telling steg-for-steg, mens fjerngeneralisering betegner et spørsmål som går utenfor de gjennomførbare grensene for beregning steg-for-steg (Stacey, 1989). I nærgeneralisering kan elevene altså bruke en rekursiv metode, mens de i fjerngeneralisering får behov for å gå over til en eksplisitt metode. Jeg antok også på forhånd at oppgavene hadde forskjellig vanskelighetsgrad for elevene. Tre av oppgavene har lineær økning og en har kvadratisk økning. Jeg antok at oppgavene med kvadratisk økning ville være mer utfordrende for elevene, noe også tidligere forskning viser (se Orton & Orton, 2005).

Jeg har nummerert ytringene i dialogsekvensene jeg presenterer i analysekapitlet slik at det første tallet viser hvilken oppgave sekvensen er hentet fra, og det andre tallet viser hvilken ytring innenfor denne oppgaven det er.

5. Analyse og diskusjon

I dette analysekapitlet vil jeg presentere resultatene fra analysen min og bruke episoder fra datamaterialet mitt som belegg for de analytiske påstandene jeg kommer med. Som tidligere nevnt startet jeg analysearbeidet med å kode datamaterialet mitt. Etter at jeg hadde delt hele materialet inn i disse kodene begynte jeg å se på sammenhengene mellom kodene for å komme fram til kategorier som beskriver elever i arbeid med figurfølger mer generelt. Gjennom dette arbeidet kom jeg fram til tre typiske trekk for elevene jeg observerte:

1. Elevene tar i bruk ufullstendige metoder
2. Overgangen mellom representasjoner er utfordrende for elevene
3. Medierende redskaper fungerer støttene for elevene i generaliseringsprosessen

Jeg har strukturert dette analysekapitlet ut fra disse tre trekkene. Jeg vil presentere situasjoner fra datamaterialet i hvert delkapittel og deretter diskutere resultatene mine. I kapittel 5.1 ser jeg først på elevenes bruk av rekursiv metode, og på overgangen til bruk av eksplisitt metode. Videre ser jeg nærmere på de ufullstendige metodene elevene tar i bruk, og analyserer hva elevene som tar i bruk disse metodene gjør. I kapittel 5.2 går jeg inn på overgangen fra bruk av muntlig språk til skriftlig språk, og fra uformelt skriftlig språk til symbolspråk. Jeg ser på hvordan disse overgangene mellom representasjoner arter seg for elevene, og hvor elevene får utfordringer. I kapittel 5.3 ser jeg på den rollen fyrstikkene jeg brukte som konkretiseringsmateriell og jeg som lærer hadde som medierende redskapene for elevene. Det siste delkapitlet, 5.4, er sammenfatning og refleksjoner over resultatene fra analysen min.

5.1 Bruk av ufullstendige metoder

I observasjonen av elever i arbeid med generalisering av figurfølger var det første som slo meg at elevene i stor grad tok i bruk ufullstendige metoder for beregning av antall komponenter i figurene i figurfølgene. I analysearbeidet kodet jeg datamaterialet mitt ut fra forskjellige metoder elevene brukte og så nærmere på disse ufullstendige metodene elevene tok i bruk. Jeg vil her presentere noen sitasjoner fra den ene gruppa som i størst grad tok i bruk ufullstendige metoder og analysere metodene de brukte.

5.1.1 Rekursiv metode

For alle figurfølgene gikk den første oppgaven til elevene ut på å tegne eller legge opp Figur 4 og Figur 5 og å finne antall komponenter i dem. For å få til dette måtte elevene se mønsteret for hvordan figurfølgen utviklet seg og bruke det til å fortsette følgen. Dette bød ikke på problemer for elevene jeg undersøkte, og de klarte å tegne/legge opp de påfølgende figurene riktig for alle figurfølgene[2]:

2. 1 Mats: Hvor mange fyrstikker trengs for å lage mønsteret med fire firkanter? Det er ti her (peker på Figur 3), og så legger vi på en der, en der og en der (peker med blyanten). Det blir 13. (Erik legger opp Figur 4).
2. 2 Mats: Hvor mange trengs med fem? Vi vet at det ble 13 (peker på Figur 4).
2. 3 Erik: 14, 15, 16.

Her legger Mats og Erik opp Figur 4 og Figur 5, og teller på figurene hvor mange fyrstikker det er i dem. De bruker altså det Stacey (1989) omtaler som tellemetoden. Med denne metoden bruker elevene mønsteret de ser for hvordan figurfølgen utvikler seg, altså økningen i figurfølgen, til å legge opp Figur 4 og Figur 5. Etter at elevene hadde funnet antallet fyrstikker i firkantmønsteret med 100 firkanter stilte jeg tilleggsspørsmål om hvor mange fyrstikker vi trenger hvis vi har 101 firkanter:

2. 14 Atle: Plusser på tre.
2. 15 Mats: Fordi det er tre mer enn 320. Fordi det var det det var med 100, og så legger man på tre til, for tre er det man må ha for å lage en firkant til her (peker på enden av figur 5).

Elevene ser her at økningen er tre hver gang vi legger på en firkant. Her bruker de altså den rekursive sammenhengen i følgen for å beregne antall komponenter i de påfølgende figurene. Elevene oppfattet den rekursive sammenhengen i figurfølgen for alle figurfølgene og klarte å bruke denne til beregning av antall komponenter i de påfølgende figurene. Ettersom elevene

---

[2] Jeg bruker følgende transkriberingskoder når jeg presenterer dialogsekvenser:

( ) – beskrivelse av handlinger

[ ] – blir avbrutt

… – kort pause

kunne bruke denne rekursive sammenhengen i figurfølgen korrekt til å beregne antall komponenter i figurene, kan jeg si denne fasen i generaliseringen ikke bød på problemer for elevene.

Elevene hadde heller ikke problemer med å se og bruke den rekursive sammenhengen i figurfølgen med kvadratisk økning, flisoppgaven:

4. 6 Mats: Da må vi ta en til den veien, og to lenger bort (peker på Figur 3). Ta seks under og så plusser du på to bortover.
4. 7 Erik: Seks, sju åtte (tegner opp videre fra Figur 3). Det kommer til å ta årevis.
4. 8 Oda: Hvordan fant du ut at det måtte bli sånn da Mats?
4. 9 Mats: Fordi det er jo sånn det er her og (peker på Figur 1). Her er det lagt på en under og så plussa på to på sida. Og så er det lagt på en under og plussa på to på sia (peker på Figur 2).

Her uttrykker Mats den rekursive sammenhengen i følgen ved å si at vi "legger på en under og så plusser på to på sida". Denne figurfølgen har kvadratisk økning, og har altså ikke en fast økning fra figur til figur. Likevel fant elevene ut hvordan følgen utviklet seg fra figur til figur, og kunne på denne måten finne antall komponenter i de påfølgende figurene ved å tegne opp og telle antall komponenter. I denne oppgaven uttrykte altså elevene den rekursive sammenhengen i følgen med utgangspunkt i hvordan den konkrete figuren utvikler seg fra figur til figur.

Det var altså felles for alle figurfølgene at elevene oppfattet den rekursive sammenhengen i figurfølgen og kunne bruke denne til beregning av antall komponenter i de påfølgende figurene. Her kom de altså fram til det Lee (1996) kaller et algebraisk brukbart mønster fordi de kom fram til et generelt forhold ved figurene de kunne bruke til å beregne antall komponenter i påfølgende figurer i følgen.

5.1.2 Overgangen fra rekursiv til eksplisitt metode

Som antatt på forhånd startet altså elevene med å bruke den rekursive sammenhengene i følgen for å beregne antall komponenter i de påfølgende figurene. For å få elevene til å finne en eksplisitt metode for beregning av antall komponenter i figurene ga jeg dem oppgaver hvor den rekursive metoden ville være tidkrevende å bruke. På denne måten antok jeg at elevene ville prøve å finne en annen metode for beregning av antall komponenter i figurene som gjorde denne jobben enklere. På oppgavearket jeg ga til elevene ble de spurt om å finne antall komponenter i Figur 10, 20 og 100. Når elevene kom til disse spørsmålene hadde de allerede funnet antall komponenter i Figur 4 og Figur 5, og hadde altså en oppfattelse av den rekursive sammenhengen i følgen og brukt denne til beregning av antall komponenter i Figur 4 og Figur 5.

Elevene jeg observerte gikk alltid over til å bruke en ny metode, og gikk dermed vekk fra den rekursive metoden, når de kom til spørsmålet om Figur 10. Det var altså i overgangen fra Figur 5 til Figur 10 at skillet gikk mellom det Stacey (1989) omtaler som nærgeneralisering og fjerngeneralisering for disse elevene. Her gikk elevene over til å finne og bruke en eksplisitt metode for beregning av antall komponenter i figurene. I en del tilfeller var metoden elevene kom fram til en feil generalisering av figurfølgen og ga feil svar. Det var altså når elevene ikke lenger kunne bruke en rekursiv metode og måtte gå over til å finne en eksplisitt metode at de fikk utfordringer og i en del tilfeller gikk over til en metode som ikke var basert på et algebraisk brukbart mønster i figurfølgen (Lee, 1996), noe jeg vil vise eksempler på i det følgende.

5.1.3 Ufullstendige metoder

I arbeid med koding av datamaterialet mitt fant jeg at elevene tok i bruk de samme metodene som Stacey (1989) fant i sine undersøkelser, som beskrevet i kapittel 2.4.2. Stacey fant disse metodene i undersøkelser av elever i arbeid med stigeoppgaven (Oppgave 1). I mine undersøkelser ser jeg at elevene også tar i bruk de samme metodene i arbeid med de andre figurfølgene, og jeg har derfor brukt hennes begreper for å beskrive elevenes metoder i alle de fire figurfølgene. Som tidligere nevnt bruker jeg her eksempler fra den ene gruppa som i størst grad tok i bruk ufullstendige metoder.

Den mest brukte metoden som ikke førte fram til en riktig generalisering av hvordan figurfølgen utvikler seg er det Stacey (1989) omtaler som *Hel-objekt-metoden*. Her bruker man antall komponenter i en mindre stige og multipliserer dette for å få antall komponenter i en stor stige. Når elevene skulle beregne antall fyrstikker i en stige med 20 trinn gjorde denne gruppa det slik:

1. 34 Mats: Det blir 17 gange fire.
1. 35 Erik: Hvorfor det?
1. 36 Atle: Det er 17 fyrstikker med fem trinn, så tar du fem, nei fire []
1. 37 Mats: Nei, det blir 14 fyrstikker.
1. 38 Atle: Nei, dette er 17 (peker på stigen med fem trinn), fem trinn er 17. Så da må vi ta 17 gange fire.
1. 39 Oda: Hvorfor tar dere 17 gange fire?
1. 40 Atle: Fordi fem trinn er 17, så hvis du tar fem gange fire så blir det 20 (regner ut 17 gange fire på et ark). 68.

Her bruker elevene antall fyrstikker i stigen med fem trinn og multipliserer dette med fire for å få antall fyrstikker i stigen med 20 trinn, og antar derfor implisitt at F (20) = 4 · F (5). Denne metoden gir riktig svar for en funksjon hvor figurnummer og antall komponenter i figuren er direkte proporsjonale størrelser. Dette er ikke tilfelle for stigeoppgaven, fordi vi må ta hensyn til konstantleddet som er to. Dermed gir ikke Hel-objekt-metoden riktig svar i denne oppgaven.

Elevene tok også i bruk denne metoden i oppgaven med kvadratisk økning (Oppgave 4):

4. 36 Oda: Hvor mange fliser tror dere det blir i Figur 10 da?
4. 37 Mats: 100, for den her er 50 (peker på Figur 5), og det her er fem.

Her antar elevene implisitt at F (10) = 2 · F (5). På samme måte som i stigeoppgaven antar altså elevene her at figurnummeret og antall komponenter i figuren er direkte proporsjonale størrelser.

For å se hva elevene gjorde når de ikke kunne bruke Hel-objekt-metoden direkte spurte jeg elevene om de kunne finne antall fyrstikker i Figur 73. I stigeoppgaven fikk jeg dette svaret:

1. 62 Mats: Tre gange 73, da blir det ganging.

Her går Mats over til å bruke det Stacey (1989) omtaler som *Differansemetoden*. I denne metoden ganger man antall trinn med 3 som er differansen, og antar implisitt at gjentatt addisjon av 3 gir at F (n) = 3 · n. Denne metoden er altså basert på at økningen i figurfølgen er tre, og at det derfor vil bli tre nye fyrstikker for hvert trinn. Mats antar altså her implisitt at å gange antall trinn med 3 gir riktig svar ettersom økningen i følgen er 3. Med denne metoden tar man ikke hensyn til konstantleddet, altså de invariante delene av figuren som er like for alle figurene i følgen. Derfor får man ikke en riktig generalisering av figurfølgen og ikke riktig svar.

I datamaterialet mitt er det felles for de ufullstendige metodene elevene bruker at de ikke tar hensyn til konstantleddet, enten ved at de bruker Hel-objekt-metoden eller Differansemetoden. Disse metodene fungerer for figurfølger som er direkte proporsjonale, men ikke for figurfølgene elevene fikk i oppgave å generalisere her. Jeg kan derfor si at metodene deres i disse situasjonene er ufullstendige fordi de ikke har tatt med all informasjonen om figurfølgen som er nødvendig for å gi en riktig generalisering. Dette viser at overgangen fra rekursiv til eksplisitt metode er et utfordrende punkt i generaliseringsprosessen for elevene.

5.1.4 Diskusjon av mine funn i forhold til bruk av ufullstendige metoder

I datamaterialet mitt ser jeg altså at elevene ikke har problemer med å se mønsteret i figurene og å bruke den rekursive sammenhengen til å beregne antall komponenter i påfølgende figurer. Derimot når de skal gå over til å finne en eksplisitt metode er de tilbøyelige til å ta i bruk ufullstendige metoder som ikke gir en riktig generalisering av følgen. Dette fant også Lee (1996) i sine undersøkelser. Hun mener at nesten 100 % av elevene hun spurte kunne se mønsteret i figurene og tegne opp den neste figuren, men problemet var å kunne beskrive mønsteret på en matematisk og presis måte. Dette viser seg også i mine undersøkelser ved at elevene ikke har problemer med å fortsette mønsteret korrekt, men får problemer når de skal uttrykke en eksplisitt metode for figurfølgen, altså funksjonssammenhengen mellom figurnummeret og antall komponenter i følgen.

I de situasjonene hvor elevene bruker en metode for beregning av antall komponenter i figurene som ikke fører til en riktig generalisering ser jeg at de enten har antatt at posisjon og antall komponenter er proporsjonale størrelser, eller at de har tatt hensyn kun til koeffisienten, og ikke konstantleddet. I figurfølgene med lineær økning har de altså en riktig oppfatning av økningen, men tar ikke hensyn til at figurfølgen også har noen deler som er konstante. I oppgaven med kvadratisk økning antar de også en struktur om proporsjonal økning, selv om de tidligere har funnet at økningen ikke er konstant. Disse antagelsen som elevene gjør om hvordan man kan operere med figurene mener jeg kan ha sammenheng med at elevene ikke er vant til å arbeide med generalisering av figurfølger. De er vant til å arbeide med tall og mengder, og ikke til å se på funksjonsforholdet mellom størrelser. Hvis elevene ser på oppgavene som aritmetiske oppgaver hvor tall og mengder er objektene man opererer med er det ikke så rart at de ser det som naturlig å kunne doble antall komponenter i Figur 10 for å få Figur 20. For eksempel i multiplikasjon vil det gi riktig svar å gange et tall med 10 og deretter doble dette for å finne ut hva det samme tallet gange 20 gir. På denne måten kan det hende at elevene tenker at de tar en gyldig "snarvei" til svaret.

Det er også interessant at elevene ikke oppdager at metodene de kommer fram til er ufullstendige. I datamaterialet mitt ser jeg at elevene i liten grad reflekterer over eller vurderer gyldigheten i metodene de kommer fram til. Når elevene hadde kommet fram til en metode fortsatte de å bruke denne uten å vurdere den opp mot de konkrete objektene de hadde fått oppgitt. Ikke før jeg stilte spørsmål som rettet oppmerksomheten deres mot de konkrete figurene de hadde fått oppgitt så de ut til å vurdere om metoden deres ga riktig svar. Det kan altså virke som elevene bruker metoden de har kommet fram til uten kritisk tenkning rundt den. Stacey (1989) skriver at dette er en nøkkelegenskap for elevene hun undersøkte, nemlig at de tar tak i en sammenheng og bruker den uten kritisk tenkning. Det samme fant Lee og Wheeler som Stacey henviser til: "the reflex of checking the formula against the given [evidence] is not there" (Lee & Wheeler, 1987, som sitert i Stacey, 1989, s. 148).

Ettersom elevene ikke vurderte metodene de kom fram til kan det virke som de fokuserte på å komme fram til et svar mer enn å fokusere på å finne et riktig svar. Dette gjør at de kommer fram til en generell metode fort, men at de ikke vurderer hvorvidt denne metoden gir en riktig generalisering av figurfølgen. Dette stemmer også med det Stacey (1989) skriver er hovedinntrykket fra hennes undersøkelse, nemlig at elevene ikke var motvillige til å generalisere, men at de konstruerte generaliseringen for fort og hadde fokus på enkelhet mer enn nøyaktighet. Dette kan ha sammenheng med at elevene ikke er vant til å arbeide på denne måten hvor de må argumentere for hvorfor en metode er gyldig og begrunne den. I den ene figurfølgen spurte jeg om elevene kunne sjekke om svaret de hadde kommet fram til var riktig, hvorpå sjekket om utregningen de hadde gjort var riktig. Når jeg spurte om de kunne sjekke det på en annen måte svarte de at de kunne brukt kalkulator. Her sjekket altså elevene om de hadde utført de aritmetiske operasjonene riktig, men vurderte ikke metoden de hadde brukt. Jeg mener dette kan ha sammenheng med at elevene er vant til å bruke metoder de har lært for aritmetiske beregninger i for eksempel multiplikasjon, og at de er vant til at feilene som oppstår skjer i utregningene.

Når elevene tok i bruk ufullstendige metoder kunne det også virke som om de mistet noe av koblingen til de ikoniske representasjonene av figurfølgen. I oppgavene hvor elevene brukte nærgeneralisering tok de i bruk økningen, altså den rekursive sammenhengen i følgen for å beregne antall komponenter i figuren. Denne beregningen er nært knyttet til de konkrete objektene elevene får oppgitt ettersom elevene her ser på hva som forandrer seg fra figur til figur og fortsetter mønsteret på samme måte. Deretter når de gikk over til en eksplisitt metode var ikke denne lenger like koblet til de konkrete objektene. Lannin et al. (2006) fant også i sine undersøkelser at elevene beholdt koblingen til de ikoniske representasjonene i utviklingen av rekursive regler, men at de ofte mistet denne koblingen i utviklingen av eksplisitte regler.

5.2 Overgangen mellom representasjoner er utfordrende for elevene

I arbeid med figurfølger kan man ta i bruk flere representasjoner for å beskrive det samme objektet. Jeg velger her å bruke tre av Duval (2006) sine begreper for semiotiske representasjonstyper i matematikk: naturlig språk, ikoniske representasjoner og symbolsystemer, i tillegg til Pimm (1991) sine skiller mellom formelt og uformelt skriftlig språk, som beskrevet i teorikapitlet. Figurfølgene jeg brukte i datainnsamlingen min presenterte jeg for elevene ved ikoniske representasjoner, med fyrstikker eller på ark. For å kunne snakke om figurfølgen ble elevene derfor nødt til å ta i bruk minst én annen semiotisk representasjon, nemlig det naturlige språket. I tillegg ga jeg elevene i oppgave å skrive ned metoden de kom fram til, og jeg utfordra dem til å uttrykke generaliseringene sine ved hjelp av variabelen n, altså symbolsystemer. Jeg fikk dermed mulighet til å observere elevene arbeide med flere representasjonssystemer, og med å skifte mellom representasjonssystemer. Duval (2006) skriver at å skifte mellom representasjoner er en utfordring for elever i matematikk, noe jeg også observerte i mine undersøkelser og vil se nærmere på i det følgende.

5.2.1 Overgangen fra naturlig språk til skriftlige representasjoner

Jeg hadde med hensikt ikke brukt n eller spurt etter generelle uttrykk i oppgaveteksten jeg ga elevene. Dette gjorde jeg fordi jeg ville se hvordan elevene uttrykte seg på den måten som var naturlig for dem. Elevene jeg observerte brukte muntlig naturlig språk for å uttrykke seg, og de brukte skriftlige representasjoner for å gjøre utregninger og skrive ned svarene de kom fram til, altså antall komponenter de fant i de forskjellige figurene i følgene. For disse elevene var det altså muntlig naturlig språk som var det naturlige representasjon å bruke i arbeidet med figurfølgene.

Etter at elevene hadde funnet antall komponenter i Figur 100 spurte jeg dem om å skrive ned metoden de hadde brukt. Elevene valgte her å skrive ned metoden sin ved hjelp av ord og tall, altså med det Pimm (1991) kaller uformelt skriftlig språk. Elevene valgte altså ikke å ta i bruk det formelle matematiske språket for å uttrykke metoden sin skriftlig, men brukte skriftlige representasjoner som var basert på det naturlig språket de hadde brukt til å uttrykke seg muntlig med. For eksempel i stigeoppgaven (Oppgave 1, se kapittel 4) skrev Mari ned metoden de hadde funnet på denne måten:

Man tar entall trinn og ganger med 3 så da
får man svaret og plusser på 2.

Her har denne gruppa kommet fram til et mønster som er algebraisk brukbart fordi det beskriver figurene generelt slik at det gjelder for alle figurene i følgen (Lee, 1996). Denne skriftlige representasjonen av metoden de har kommet fram til er uttrykt generelt ved hjelp av uformelt matematisk språk som er basert på det naturlige språket. Elevene beveger seg altså ikke over til å bruke symbolspråket av seg selv, og jeg kan derfor si at symbolspråket ikke var en naturlig del av det matematiske registeret til disse elevene.

Jeg ser også i mitt datamateriale at overgangen fra å uttrykke en generell metode muntlig til å uttrykke den samme generelle metoden med uformelt skriftlig språk var utfordrende for elevene. Den ene gruppa brukte Hel-objekt-metoden for å beregne antall fyrstikker i figurene i firkantmønsteret (Oppgave 2, se kapittel 4). Jeg spurte derfor etter Figur 73 for å se om de da ville gå over til å finne en annen metode å bruke:

2.	47 Erik:	Nummer 73. Da blir det sånn at vi skal ha 73 sånne da (peker på en firkant i Figur 5)
2.	48 Mats:	Da blir det jo tre... 73 gange tre, og så plusser du på en (holder opp den første fyrstikken i Figur 5).

Her uttrykker Mats en korrekt eksplisitt metode som er koblet til Figur 73. Videre spurte jeg elevene om de kunne finne en metode vi kunne bruke til å finne antall fyrstikker uansett hvor mange firkanter vi har:

2.	59 Atle:	Gange, gange… med tre.
2.	60 Mats:	Og så plusser du på en.

Her har elevene uttrykt en generell metode for beregning av antall komponenter i figurfølgen. Når jeg videre spurte dem om å skrive ned metoden de hadde funnet skrev Mats:

plusse på 3 for hver firkant.

gange 73·3 og plusse på 1.

Her har Mats uttrykt den rekursive sammenhengen de tidligere hadde brukt for å finne antall fyrstikker i figurene i nærgeneralisering, i tillegg til den eksplisitte metoden for å finne antall fyrstikker med uformelt skriftlig språk koblet til Figur 73. Elevene hadde altså her kommet fram til en korrekt eksplisitt metode som de hadde brukt med eksempler og uttrykt generelt muntlig. Når jeg utfordret dem til å skrive ned en generell metode gikk de tilbake til den rekursive sammenhengen, og uttrykte i tillegg den eksplisitte metoden koblet til Figur 73. Elevene klarte altså ikke her å uttrykke den eksplisitte metoden de hadde kommet fram til generelt.

5.2.2 Overgangen fra uformelt skriftlig språk til symbolspråk

Etter at elevene hadde kommet fram til en eksplisitt metode og skrevet den ned ved hjelp av uformelt språk ville jeg prøve å få dem til å gå over til mer formelt skriftlig språk (Pimm, 1991). Elevene i den ene gruppa hadde i firkantmønsteret (Oppgave 2, se kapittel 4) kommet fram til en generell eksplisitt metode for beregning av antall fyrstikker i figurene og uttrykt denne skriftlig med uformelt matematisk språk ved å bruke Figur 73 som eksempel. Videre spurte jeg om de kunne uttrykke metoden de hadde funnet ved hjelp av *n*, hvorpå Erik skrev ned:

$N \cdot 3$

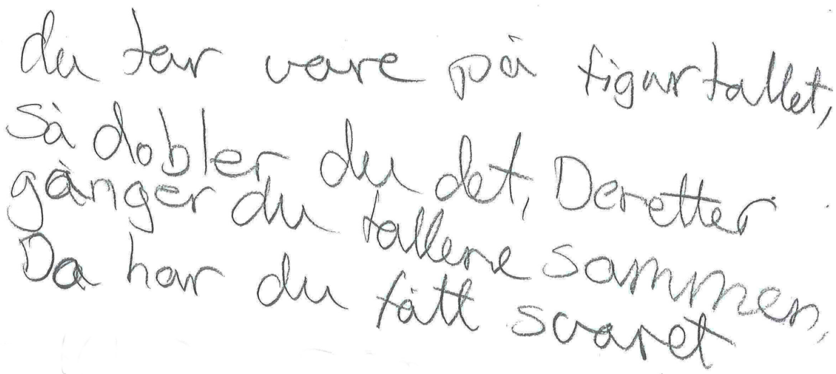
Her har Erik uttrykt førstegradsleddet i den lineære funksjonen, men ikke konstantleddet. Altså har ikke Erik tatt med all informasjonen om figurfølgene som de hadde kommet fram til og tidligere uttrykt muntlig og med uformelt skriftlig språk. Dette er ikke et riktig uttrykk for figurfølgen fordi konstantleddet 1 ikke er tatt med. Jeg kan derfor si at Erik "mistet" noe av informasjonen i denne omdanningen fra uformelt skriftlig språk til symbolspråk, slik at det generelle symboluttrykket ikke ble korrekt. Elevene hadde her kommet fram til en riktig eksplisitt metode som de brukte for å finne antall fyrstikker i figurene. Denne metoden kunne de skrive ned ved hjelp av et eksempel, men når de skulle skrive den generelt med brukt av *n* mistet Erik noe av informasjonen de tidligere hadde uttrykt muntlig og med uformelt matematisk språk.

I flismønsteret (Oppgave 4) hadde den andre gruppa kommet fram til en riktig eksplisitt metode for beregning av antall fliser. Deretter spurte jeg om de kunne uttrykke metoden de hadde kommet fram til for å beregne antall fliser med *n*:

4. 120 Line: Ja, sånn. Ehh, to gange *n* er lik *n* gange, og så liksom det tallet, er lik (ler)… Det ble litt mange *n*-er. Men, se nå. Nå tar jeg det for figur fire da. To, fordi det er to på figur en, gange fire er lik åtte. Så må du gange det også med fire, og det blir 32. Og det ble svaret. Jeg vet ikke hvordan jeg fikk det, men jeg tror det ble riktig.

Her starter Line å uttrykke metoden med *n*, men går så over til å forklare metoden sin ut fra et eksempel, Figur 4, i stedet. Hun uttrykker en korrekt eksplisitt metode for beregning av antall fliser i figurene som de tidligere har uttrykt muntlig og skrevet ned med uformelt matematisk språk. Etter at hun har forklart metoden ved hjelp av eksempelet i Figur 4 sier hun at hun ikke vet hvordan hun kom fram til det. Her har elevene kommet fram til en riktig generell metode som de tidligere har uttrykt muntlig og med skriftlig uformelt språk. Når Line skal skrive ned denne metoden ved hjelp av *n* får hun problemer, og går tilbake til å vise metoden ved hjelp av et eksempel, Figur 4. Ettersom elevene her hadde uttrykt metoden korrekt ved hjelp av muntlig naturlig språk og uformelt matematisk skriftlig språk kan jeg si at det er når hun tar i bruk variabelen *n* at hun får problemer. Dette tyder på at det er vanskelig for elevene å løsrive seg fra eksempler og uttrykke metoden de har kommet fram til generelt ved hjelp av *n*. Radford (2003) skriver også at denne overgangen fra spesielle tilfeller til generalisering et utfordrende for elevene ettersom de går over fra konkrete representasjoner til mentale objekter.

I den samme oppgaven skrev Emma ned metoden hun hadde kommet fram til for beregning av antall fliser på denne måten:


du tar være på figurtallet,
Så dobler du det, Deretter
gånger du tallene sammen,
Da har du fått svaret

Her har Emma uttrykt den generelle metoden de har kommet fram til ved hjelp av uformelt matematiske språk. Når de hadde uttrykt den generelle metoden sin med uformelt skriftlig språk spurte jeg om de kunne uttrykke metoden de hadde kommet fram til ved hjelp av *n*, hvor Emma skrev og forklarte det hun hadde skrevet på denne måten:


N doble det N·N=antall fliser

4. 123 Emma: Jeg skrev *n*, og så skal jeg doble det, og så da tar jeg det doblede tallet og det der sånn at, liksom hvis det var 100 så har jeg doblet det. Så ble det 200, så ble det 100 gange 200, og så får du svaret.

Her har Emma brukt en kombinasjon av uformelt skriftlig språk og symbolspråk. Hun har brukt *n* som uttrykk for figurtallet, og har skrevet med ord at figurtallet skal dobles. Deretter har hun skrevet "$n \cdot n$" for å uttrykke at $2n$ skal multipliseres med *n*. Hun har altså brukt symbolspråket på en måte som ikke er korrekt ettersom hun bruker *n* for to forskjellige tall, hvorav den ene er $2n$ og den andre er *n*. Når hun skal forklare det hun har skrevet begynner hun å snakke om *n*, men går over til å beskrive metoden sin ut fra eksempelet 100. På samme måte som Line får hun altså problemer med å forklare uttrykket ved hjelp av variabelen *n* og går over til å forklare ut fra et eksempel.

I denne situasjonen ser jeg at elevene ikke har den nødvendige kunnskapen om bruk av symboler, ettersom Emma bruker *n* som to forskjellige størrelser i samme uttrykk. Dette viser at å uttrykke en metode ved hjelp av symboler er utfordrende for elevene selv om de har kommet fram til en korrekt generalisering som de har uttrykt ved hjelp av muntlig språk og uformelt skriftlig språk.

Jeg ser i flere situasjoner i datamaterialet mitt at elevene brukte variabelen *n* som flere verdier i samme uttrykk. I stigeoppgaven hadde den samme gruppa kommet fram til en korrekt eksplisitt metode som de hadde uttrykt ved uformelt skriftlig språk. Når jeg spurte dem om å uttrykke denne metoden ved hjelp av *n* skrev Emma:

$$N \cdot 3 = N + 2 = N$$

Her har Emma først brukt *n* som figurnummeret, deretter som 3*n* og til slutt som svaret, altså antall fliser i Figur *n*. Her ser vi altså at elevene har kommet fram til en riktig eksplisitt metode som de ikke har problemer med å uttrykke muntlig og ved hjelp av uformelt skriftlig språk. I omdannelsen fra uformelt skriftlig språk til symbolspråk derimot oppstod det feil som følge av at elevene ikke har nok kjennskap til konvensjonene for bruk av algebraisk symbolspråk.

Det var også forskjell på hvordan elevene oppfattet bruken av variabelen *n*. Samtalen som følger viser diskujon rundt rollen til *n* i arbeid med firkantmønsteret:

2. 18 Mari: Da kan vi bruke *n* som tre. Ta *n* ganger 20 pluss to.
2. 19 Emma: Nei, for det må alltid være tre ganger antallet firkanter.
2. 20 Mari: Jo, men hvis *n* er tre.
2. 21 Emma: Hvorfor kan vi ikke bare skrive det opp når det ska være tre på alle stykkene?
2. 22 Mari: Hæ.
2. 23 Emma: Vi kan jo bare skrive det opp, for det ska jo vær *n*, eller tre på alle stykkene.
2. 24 Mari: Ja nettopp, da kan *n* være tre på alle stykkene.
(begge ler)

Her gikk jeg inn og sa at elevene ikke trengte å bli enige om en måte å skrive det på. Mari valgte å skrive metoden de hadde kommet fram til på denne måten:

20 · N
60 + 1 = 61   61 fyrstikker

Her har hun skrevet ned metoden de har brukt for å finne antall komponenter i Figur 20. Hun har valgte å bruke *n* for koeffisienten 3, og har ikke uttrykt figurnummeret ved hjelp av en variabel. Dette er ikke en korrekt måte å bruke *n* på, ettersom *n* her ikke har rollen som variabel, men som koeffisienten 3. På denne måten er ikke antall komponenter i figuren en funksjon av figurnummeret, og det går derfor ikke an å uttrykke funksjonssammenhengen i figurfølgen ved å bruke *n* på denne måten.

5.2.3 Diskusjon av funn i forhold til elevenes bruk av representasjoner

Jeg lot elevene først uttrykke sammenhengene de oppdaget på den måten som var naturlig for dem. Deretter spurte jeg dem om å skrive ned metodene sine og å uttrykke dem ved hjelp av variabelen *n*. I arbeid med disse figurfølgene gikk altså veien til det formelle algebraiske språket fra naturlig språk via uformelt skriftlig språk (Pimm, 1991). Elevene jeg observerte valgte å bruke naturlig språk for å uttrykke seg i arbeidet med figurfølgene, i tillegg til at de brukte skriftspråket for å gjøre aritmetiske beregninger, og å skrive ned antall komponenter i figurene de hadde kommet fram til. Elevene valgte ikke å skrive ned metodene de hadde kommet fram til før jeg spurte dem om det. Når de ble bedt om å skrive dem ned brukte de skriftlige representasjoner som var basert på det naturlige språket, ved hjelp av ord og tall. Denne overgangen fra naturlig språk til representasjoner i uformelt skriftlig språk vil jeg kategorisere som en behandling av et uttrykk i naturlig språk ettersom begge disse er basert på det naturlige språket. Denne overgangen viste seg å ikke by på store utfordringer for elevene hvis de på forhånd hadde kommet fram til en generelt mønster som var algebraisk brukbart slik at det beskrev alle figurene i følgen generelt (Lee, 1996).

Overgangen fra uformelt skriftlig språk til bruk av symbolspråk er det Duval (2006) kaller en omdanning. Her skiftes det semiotiske representasjonssystemet som brukes fra naturlig språk til symbolspråk. Duval mener denne omdanningen er den virkelige utfordringen for elever i arbeid med matematikk. I mine undersøkelser observerte jeg også at denne omdanningen var utfordrende for elevene. I flere tilfeller tok ikke elevene med all informasjonen om figurfølgen i uttrykket med symbolspråk som de tidligere hadde uttrykt ved hjelp av uformelt skriftlig språk. Elevene "mistet" altså noe av informasjonen de tidligere hadde uttrykt med naturlig språk når de gikk over til å uttrykke seg ved hjelp av symbolspråket. Her kan det virke som om elevene hadde problemer med å kjenne igjen det samme representerte objektet gjennom forskjellige semiotiske representasjoner ettersom de ikke reagerte på at uttrykket deres ikke var riktig overført mellom representasjonene. Ved bruk av muntlig språk og uformelt skriftlig språk erfarte jeg altså at elevene klarte å generalisere og beskrive figurene for hverandre, men at omdanningen derifra til symbolspråket i mange tilfeller ikke ble riktig.

Elevene jeg observerte i datainnsamlingen min hadde ikke erfaring i arbeid med å uttrykke funksjonssammenhenger med symbolspråk. Dette viste seg ved at de delvis brukte n på en måte som ikke er korrekt, og at de derfor ikke klarte å omstille uttrykkene ved uformelt skriftlig språk til et korrekt uttrykk i symbolspråk. På samme måte som Stacey og MacGregor (1995) og Amit og Neria (2004) fant jeg altså at elevene kunne tolke og fortsette følgene, men at overgangen til et riktig uttrykk ved hjelp av n var utfordrende for dem. Amit og Neria fant i sine undersøkelser at de fleste elevene valgte å uttrykke seg ved hjelp av skriftlige representasjoner basert på naturlig språk eller aritmetiske beregninger. Dette samsvarer også med mine funn hvor elevene valgte å ta i bruk skriftlige representasjoner basert på naturlig språk, og ikke bevegde seg over til bruk av symbolspråk på egen hånd.

Steinbring (1997) skriver at meningen i symbolene oppstår i samspillet mellom tegn eller symbolsystemer og en referansekontekst. Symbolene har altså ikke noen mening i seg selv, men får mening gjennom referansekonteksten. Ettersom elevene jeg observerte hadde lite erfaring med bruk av symbolspråket er det derfor naturlig at de ikke ga symbolene den "riktige" meningen, og ikke kunne operere med symbolene på riktig måte. Steinbring skriver at elevene selv må aktivt produsere sammenhenger mellom symboler og referansekontekst. Denne produksjonen skjer ved at en kjent referansekontekst settes i forhold til et nytt og ukjent tegnsystem (Steinbring, 1997). På denne måten utstyres tegnsystemet gradvis med mening gjennom å tolke tegnsystemet i overensstemmelse med referansekonteksten (Steinbring, 1997). Elevene må altså få erfaring med symbolene og gjennom denne erfaringen utstyre dem med mening. Elevene jeg observerte hadde lite erfaring med bruk av symbolene. Hos dem hadde derfor ikke symbolet n blitt utstyrt med nok mening til at de hadde kommet fram til en riktig definisjon.

Som tidligere nevnt tok elevene ikke i bruk skriftlige representasjoner eller symbolspråk før jeg spurte dem om det. I den tredje oppgaven fikk jeg likevel spørsmålet "skal vi bruke n nå?" før jeg hadde spurt elevene om å gjøre det. Elevene tok her i bruk ord og begreper som jeg hadde innført, og hadde altså tilegnet seg et nytt språklig redskap (Säljö, 2001), selv om de ikke hadde utviklet dette redskapet fullt ut. Gjennom referansekonteksten i form av figurfølger skjedde det altså en semiotisk mediering som ga elevene erfaring med variabelen n. Gjennom flere erfaringer med variabler vil elevenes kunnskap om variabler forandre seg og utvikles videre.

Steinbring (1997) påpeker at sammenhengen mellom symboler og referansekontekst utvikles og blir avstemt gjennom samhandling og diskusjon med lærer og medelever. På denne måten lærer elevene nye måter å beskrive matematiske fenomener på (Säljö, 2001). I mitt datamateriale ser jeg altså at symbolspråket ikke var en naturlig del av elevenes matematiske register, men at elevene etter hvert valgte å ta det i bruk på egenhånd etter at de hadde blitt oppfordret av meg til å bruke det flere ganger. Derfor kan jeg si at denne læresituasjonen hvor målet var å bruke algebraisk notasjon var avhengig av at elevene ble oppfordret av meg som lærer til å ta i bruk symbolene. Pimm (1987) skriver at elevene må oppfordres til å ta i bruk symbolspråket slik at de blir vant til å bruke dette til å uttrykke seg og på denne måten utvikle sitt matematiske register. Læreren har altså en viktig rolle for å hjelpe elevene til å utvikle sitt matematiske register.

5.3 Medierende redskaper som støtte i generaliseringsprosessen

I arbeid med koding av datamaterialet mitt slo det meg at fyrstikkene jeg brukte som konkretiseringsmateriell hadde større betydning enn å bare vise figurfølgene for elevene i arbeidet med figurfølgene. I tillegg oppdaget jeg at noen spørsmål fra meg som lærer var en utløsende faktor for utviklingen i generaliseringsprosessen til elevene. Disse to tingene, fyrstikkene elevene fikk utdelt som konkretiseringsmateriell og meg som lærer, fungerte altså som medierende redskaper for elevene i arbeid med figurfølgene. Jeg vil her vise noen situasjoner hvor denne medieringen foregår og se på rollen til disse to medierende redskapene.

5.3.1 Konkretenes rolle

Jeg presenterte figurfølgene for elevene på to forskjellige måter. To figurfølger la jeg opp med fyrstikker, mens de to andre var opptegna figurer på ark. Jeg vil her sammenligne den ene gruppa i arbeid med Oppgave 2 og Oppgave 3, firkantmønster og kulemønster, respektive (se kapittel 4). Disse to figurfølgene har lik eksplisitt formel og er dermed strukturelt sett like selv om de er utformet forskjellig. De har altså lik denotasjon, men forskjellig betydning (Frege, 1993). Firkantmønsteret ble presentert for elevene med fyrstikker, mens kulemønsteret ble presentert som figurer på ark.

I firkantmønsteroppgaven (Oppgave 2) hadde denne gruppa kommet fram til en korrekt eksplisitt metode for beregning av antall fyrstikker i figurene hvor de ganget med tre og deretter la på en. Når jeg spurte dem hvorfor de la på en fikk jeg dette svaret:

2. 27 Mari: Fordi at det her er tre (peker med tre fingre på de tre siste fyrstikkene som er lagt på i Figur 5) og så, ja… på den første er det fire ikke sant (peker på Figur 1), og så plusser du på tre på sidene hele tida. Og så da blir det alltid den her til overs (holder opp den første fyrstikken i Figur 1). Da må du plusse på den her til slutt (legger den siste fyrstikken tilbake igjen).

Her forklarer Mari metoden de har kommet fram til ved hjelp av fyrstikkene. Hun viser at vi legger på tre fyrstikker for hver nye firkant ved å peke på de tre siste fyrstikkene som er lagt på i Figur 5. Deretter forklarer hun at vi legger på en ved å holde opp den første fyrstikken i mønsteret og si at den alltid blir til overs og må plusses på til slutt. Ved å fysisk ta bort en fyrstikk viser Mari strukturen i figurfølgen og knytter denne til forklaringen sin.

Her har Mari kommet fram til en konklusjon som baserer seg på strukturen til figurene i mengden (Radford, 1996), og hun bruker fyrstikkene som hjelpemiddel for å forklare metoden sin. Altså begrunner Mari metoden de har kommet fram til ved hjelp av den invariante strukturene i figurene og ser det generelle gjennom Figur 5 (Mason, 1996). Her kan jeg si at Mari har kommet fram til et *generisk eksempel* (Balacheff, 1988; Mason, 1996) ettersom hun bruker de generelle strukturene ved mengden av figurer til å forklare hvordan vi finner antall fyrstikker når vi vet hvor mange firkanter vi har.

Elevene brukte konkretene som hjelpemiddel på denne måten når de skulle forklare metoden sin i begge de to oppgavene med konkreter. I figurfølgene som var opptegna på ark derimot viste det seg at elevene ikke knyttet metoden de hadde funnet like mye til de konkrete figurene de hadde tilgjengelig:

3. 36 Emma: Jeg har funnet ut hvordan en skal tenke.
3. 37 Oda: Kan du forklare det til de andre?
3. 38 Emma: Ja, en skal ta tre ganger hvilken figur det er… liksom hvis det er figur 100, så må man ta tre gange 100 og så må man plusse på en.
3. 39 Oda: Hvorfor må man plusse på en?
3. 40 Emma: Jeg vet egentlig ikke jeg, jeg bare fant det ut… for hvis ikke så ble ikke svaret på de andre riktig.
3. 41 Oda: Kan du vise hvordan du fant det ut da?
3. 42 Emma: Jeg bare prøvde meg fram liksom, sånn for å sjekke.

Her har Emma funnet en eksplisitt metode for beregning av antall kuler ved å se på antall kuler i de fem første figurene. Hun har kommet fram til en riktig eksplisitt metode, men når jeg spør hvorfor man må plusse på en her svarer hun at hun "bare fant det ut" og at hun "bare prøvde seg fram". Her knytter altså ikke Emma forklaringen av metoden deres til de konkrete figurene de har fått oppgitt. Etter at elevene hadde arbeidet videre med denne oppgaven en stund kom de fram til at grunnen til at vi må legge på en er at kula i midten alltid er der, og at det legges på en ny kule på hver av de tre armene. De kom altså fram til en forklaring av metoden sin i forhold til de konkrete figurene også her, men de brukte lenger tid på å finne denne koblingen mellom metoden og de konkrete figurene enn de gjorde i oppgavene med konkreter.

I begge de to oppgavene med konkreter begynte elevene raskt å ta på fyrstikkene når de ville vise til hverandre at det økte med tre, og tok vekk fyrstikker eller viste hvordan vi legger på flere for å fortsette mønsteret. På denne måten brukte elevene selve figurene som utgangspunkt for å gjøre generaliseringer, mens de i oppgavene som var opptegna på ark så ut til å være mer opptatt av antall komponenter i figurene, altså mengdene. Elevene kunne også dekomponert de opptegna figurene ved å tegne på figurene på arket, noe de ikke gjorde. Elevene brukte altså figurene til å dekomponere og begrunne metoden sin i større grad i figurfølgene som ble presentert med konkreter enn i figurfølgene som ble presentert på ark.

Dette gjorde at elevene klarte å koble den eksplisitte metoden de kom fram til mer til de konkrete objektene de fikk oppgitt i oppgavene med konkreter, og hadde lettere for å begrunne hvorfor metoden de hadde funnet var riktig. Jeg ser altså i mitt datamateriale at elevene i større grad argumenterte ved hjelp av et generisk eksempel i oppgavene som var med konkreter.

I analysearbeidet mitt startet jeg med å kode og dele opp datamaterialet mitt ut fra kategoriene til Lee (1996). Når jeg hadde delt inn materialet mitt på denne måten så jeg tydelig at elevene brukte lenger tid på oppfattelsesnivået i de oppgavene som var uten konkreter (oppgavene med kulemønster og flismønster) enn i oppgavene som var med konkreter (stigeoppgaven og oppgaven med firkantmønster). Dette kan jeg vise i denne tabellen som viser antall ytringer på oppfattelsesnivået hos begge gruppene i de fire figurfølgene:

Figurfølge	Antall ytringer i dialog
Stigeoppgaven	63
Firkantmønster	48
Kulemønster	191
Flismønster	121

Ut fra denne tabellen vises det at elevene kom raskere over på verbaliseringsnivået i oppgavene med konkreter, altså kom de raskere fram til et muntlig uttrykk for den eksplisitte metoden de så i følgen. De tre første oppgavene i tabellen gir alle opphav til lineære funksjoner og kan dermed antas å ha omtrent lik vanskelighetsgrad for elevene. Likevel ser vi i tabellen at det er stor forskjell i antall ytringer i de to første oppgavene som var med konkreter og den tredje oppgavene som var uten konkreter.

Elevene kom fram til en riktig beskrivelse av mønsteret i alle de fire figurfølgene, men de kom raskere fram til denne i oppgavene med konkreter. I tillegg kunne de lettere begrunne hvorfor metoden fungerte ut i fra de ikoniske representasjonene i oppgavene med konkreter. Her fungerer altså fyrstikkene som et medierende verktøy for elevene som har betydning for generaliseringsprosessen. Konkretene er med på å visualisere strukturen i figurfølgene, i tillegg til at de gir mulighet til å flytte på og ta bort deler av figurene. På denne måten gjør fyrstikkene det lettere for elevene å dekomponere figurene enn det opptegna figurer gjør. Ved at elevene kunne ta på og flytte om på fyrstikkene mener jeg også at de var med på å styrke elevenes oppfatning av strukturen i følgen, noe som gjorde at elevene hadde en klarere oppfatning av hvordan følgen utvikler seg og hvorfor det blir sånn. Konkretene fungerte på denne måten som en støtte i elevenes tilnærming til figurfølgene, og var forløsende for kommunikasjonen og læringen på den måten at de ga støtte til elevenes tanker og generaliseringer i generaliseringsprosessen.

5.3.2 Lærerens rolle

Som nevnt i kapittel 5.1 tok elevene delvis i bruk ufullstendige metoder for å beregne antall komponenter i figurer når de gikk over til fjerngeneralisering. Det er også et generelt trekk i datamaterialet mitt at elevene i liten grad vurderte metoden de hadde kommet fram til opp mot de konkrete figurene de hadde fått oppgitt. I situasjonene hvor de tok i bruk en ufullstendig metode oppdaget de derfor ikke at metoden de hadde kommet fram til ikke ga en riktig generalisering av figurfølgen. Når jeg spurte om antall komponenter i figurer langt ute i følgen fortsatte de å bruke den samme metoden. Jeg stilte dem derfor spørsmål om figurene de allerede hadde tegna eller lagt opp med konkreter for å se om dette gjorde at de vurderte gyldigheten av metoden de hadde funnet. I stigeoppgaven hadde den ene gruppa brukt *Differansemetoden* og ganget antall trinn med tre for å finne antall fyrstikker i figuren. Deretter stilte jeg dem spørsmål om hvor mange fyrstikker vi trenger for en stige med ett trinn:

1. 64 Mats: Da blir det tre.
1. 65 Atle: Det blir seks!
1. 66 Mats: Hvis du ska ha ett trinn?
1. 67 Atle: Ja (peker på stigen med ett trinn).
1. 68 Mats: Ja… da må du ha fem da. 1, 2, 3, 4, 5.

Her har elevene tidligere benyttet seg av at de vet at økningen er tre og tatt i bruk Differansemetoden for beregning i fjerngeneralisering. Når jeg spør hvor mange fyrstikker vi trenger for en stige med ett trinn fortsetter Mats å bruke denne metoden og svarer at det blir tre, men når Atle ser på figuren de har lagt opp på bordet oppdager han at det ikke stemmer. Deretter teller Mats på figuren, og de finner ut at det riktige svaret er fem. Her gjør altså spørsmålet fra meg at elevene oppdager at metoden de har brukt ikke gir riktig svar. Etter denne situasjonen begynte elevene å legge på to ekstra etter at de hadde ganget med tre:

1. 78 Mats: En må ha, når en først har en bit så må en ha tre for hvert trinn. Men ikke den første.
1. 79 Oda: Hvis vi skal finne ut hvor mange det blir med 100 trinn da, tar vi 100 gange tre da?
1. 80 Mats: Hvis vi ganger 100 med tre, og så legger vi på to til.
1. 82 Oda: Hvorfor legger du på to til?
1. 83 Mats: Fordi at blir det ikke ett trinn hvis vi gjør sånn her (tar vekk de to nederste fyrstikkene)

Etter spørsmålet fra meg ble elevene altså klare over mangelen med metoden de hadde brukt, og forandra metoden slik at den ga riktig svar. Mats forklarer denne forandringen i ytring 80 ved at "når en først har en bit så må en ha tre for hvert trinn. Men ikke den første". Her knytter han det de allerede hadde funnet ut, nemlig at økningen er tre, til at den første figuren har to fyrstikker ekstra. I ytring 84 viser han dette fysisk ved å ta vekk de to nederste fyrstikkene. Han viser altså at hvert nye trinn i stigen består av tre fyrstikker, men at den første har to ekstra.

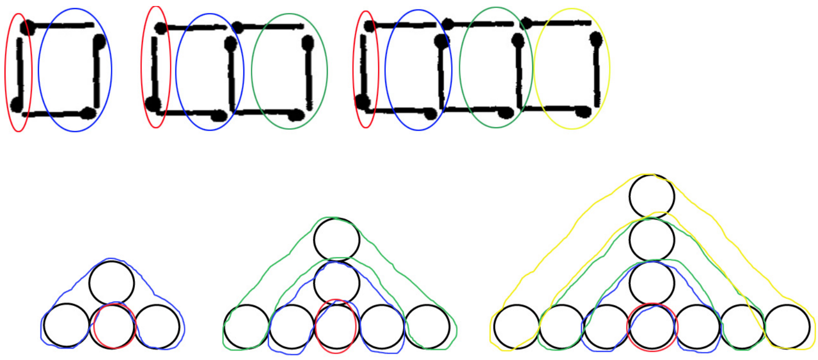
Dette ene spørsmålet fra meg gjorde altså at elevene revurderte metoden de hadde kommet fram til, og oppdaga at de måtte forandre på metoden. De gikk dermed over fra en ufullstendig metode til en lineær metode som ga en riktig generalisering av figurfølgen. Ettersom det var spørsmålet fra meg som gjorde at elevene kom et steg videre på veien mot en riktig generalisering av figurfølgen kan jeg si at jeg fungerte som en mediator for elevene i dette arbeidet. Ved at jeg stilte dem et spørsmål som retta oppmerksomheten deres mot de konkrete figurene de hadde fått oppgitt fikk jeg elevene til å reflektere over metoden de hadde brukt og viderearbeide denne slik at den ble riktig. Jeg var derfor med på å utvide elevenes forutsetninger for å gjøre en riktig generalisering. På denne måten var jeg den utløsende faktoren som gjorde at elevene kom fram til en riktig eksplisitt metode, og jeg kan derfor si at jeg var en katalysator for elevene i arbeid med denne figurfølgen. I mine undersøkelser kan jeg derfor si at jeg som lærer hadde en medierende rolle og bidro til at elevene kom fram til en riktig generalisering i stedet for å stoppe opp ved en ufullstendige metode.

5.3.3 Diskusjon av mine funn i forhold til medierende verktøy i generaliseringen

I mitt datamateriale ser jeg altså at jeg som lærer og konkretene som ble brukt fungerte som medierende verktøy i generaliseringsprosessen og ga støtte til elevene i deres arbeid med og refleksjon over figurfølgene. Warren (2005) fant også i sine undersøkelser at elevene brukte konkreter som støtte til forklaringene sine i arbeid med generaliseringer. Hun skriver at konkretene ser ut til å hjelpe elever å finne ut av de manglende trinnene i et mønster, og er dermed med på å støtte elevenes tenkning. Jeg ser også i mitt datamateriale at elevene brukte konkretene som støtte til forklaringene sine, og at konkretene gjorde at prosessen med å se og uttrykke strukturen i figurfølgene gikk raskere. Når elevene hadde kommet fram til en eksplisitt metode brukte de også konkretene i argumentasjonen for metoden sin ved å dekomponere figurene og vise de forskjellige delene i den eksplisitte metoden. Orton et al. (2005) skriver at konkretiseringsmateriell, som fyrstikker, tilfører situasjonen mangfold og kontekst. Jeg ser i mitt datamateriale at elevene brukte kortere tid på oppfattelsesnivået i figurfølgene som ble presentert med konkreter, altså brukte de her kortere tid på å oppfatte strukturen i følgen og hvordan de utvikler seg. Dette tror jeg har med nettopp det Orton et al. poengterer, nemlig at fyrstikkene tilfører situasjonen kontekst og på denne måten fungerer som støtte for elevenes tanker i arbeidet med generaliseringen.

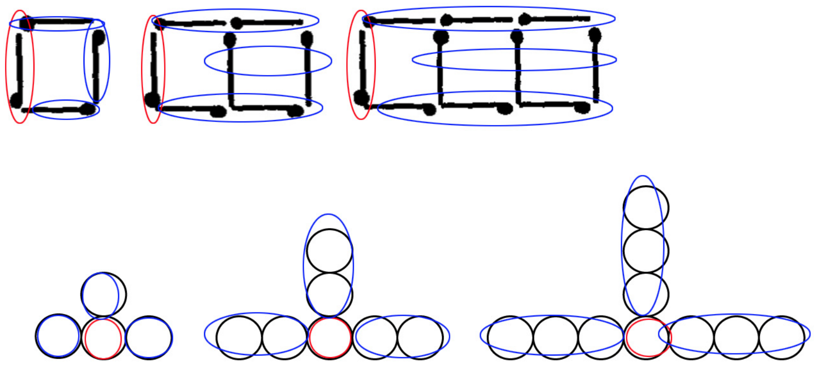
Som nevnt i kapittel 5.1 beholdt ikke elevene koblingen til de ikoniske representasjonene i like stor grad når de tok i bruk en eksplisitt metode som de gjorde når de bruke en rekursiv metode. I oppgavene som ble presentert med konkreter beholdt de denne koblingen i større grad enn i oppgavene som ble presentert som figurer på ark. Dette viser at konkretene spilte en rolle for elevenes oppfatning av strukturen i mønsteret, noe som igjen var med på å forsterke koblingen mellom de konkrete figurene og metoden elevene kom fram til. Jeg mener derfor at konkretene gjør det enklere for elevene å koble den generelle metoden til de konkrete figurene de har fått oppgitt. I tillegg mener jeg at konkretene gjør det mer naturlig for elevene å argumentere ved hjelp av et generisk eksempel fordi de lettere kan operere på figurene og se på den generelle strukturen i følgen.

Kuleoppgaven og firkantmønsteret er ikke helt like, selv om de representerer det samme funksjonsuttrykket og dermed er strukturelt sett svært like. Dette kan vi se på forskjellige måter ved å dekomponere figurene:



Her har jeg dekomponert Figur 1, Figur 2 og Figur 3 i begge følgene ved å tenke meg at det legges på tre nye komponenter for hver gang utenpå de forrige. I Figur 1 har vi altså den konstante komponenten som er rød, og de tre blå. Videre i Figur 2 legges det på tre grønne, og i Figur 3 legges det på tre gule. Her legges det altså på en treer for hver figur, slik at vi får *n* antall treergrupper i tillegg til den konstante komponenten.

En annen måte å dekomponere figurene på er å se på de varierende komponentene som delt i tre grupper:



I Figur 1 får vi da den konstante komponenten som er rød, i tillegg til tre grupper med en komponent i hver. I Figur 2 har vi tre grupper med to i hver, og i Figur 3 tre grupper med tre i hver. Her får vi altså den konstante komponenten i tillegg til tre grupper med *n* komponenter i hver.

Ved å dekomponere figurene ved aritmetikk kan vi uttrykke komponentene i de to figurfølgene likt ved å dele figurene inn i konstante deler og variable. Vi kan dermed skrive komponentene i de tre første figurene i følgene som en sum av disse to på denne måten i begge disse figurfølgene: Figur 1: 1 + 3, Figur 2: 1 + 3 + 3 og Figur 3: 1 + 3 + 3 + 3.

I disse dekomponeringene ser vi altså at figurfølgene er bygd opp likt. Disse to figurfølgene har altså samme denotasjon, men presenteres forskjellig og har derfor forskjellig betydning (Frege, 1993). Ettersom betydningen er forskjellig oppfattes oppgavene forskjellig av elevene, og jeg kan derfor ikke si at det er kun konkretene som gjør at elevene knytter forklaringen av metoden sin mer til figurene i den ene oppgaven enn i den andre. Likevel mener jeg at det er en interessant observasjon at to oppgaver som er strukturelt sett svært like, men presenteres med og uten konkreter, oppfattes forskjellig av elevene. Jeg mener derfor at datamaterialet mitt viser at konkretene har betydning for disse elevenes oppfattelse av strukturen i figurfølgene, selv om jeg ikke kan si med sikkerhet at dette skyldes kun konkretene.

I datamaterialet mitt er det flere situasjoner hvor elevene hadde kommet fram til en metode som ikke ga en riktig generalisering av figurfølgen, og fortsatte å bruke den til jeg ved å stille spesifikke spørsmål fikk dem til å vurdere metoden sin eller se metoden i sammenheng med de konkrete objektene de hadde fått oppgitt. Warren (2005) skriver at spesifikke spørsmål fra læreren som er med på å gjøre forholdet mellom mønsteret og figurtallet tydeligere støtter elevenes tenkning i arbeid med funksjonssammenhenger. Dette viser at læreren har en viktig rolle når det gjelder å få elevene til å reflektere over og vurdere metodene sine når de arbeider med generalisering av figurfølger. Ved å stille spørsmål kan læreren påvirke elevenes tanker og refleksjoner og dermed gjøre at de kommer lenger i generaliseringsprosessen. Jeg påvirka elevenes tanker på den måten at jeg rettet oppmerksomheten til elevene mot de konkrete figurene de hadde fått oppgitt, noe som gjorde at elevene oppdaget at metodene deres hadde mangler. På denne måten måtte elevene revurdere forholdet mellom figurtallet og mønsteret de tidligere hadde brukt. Säljö et al. (2001) skriver at samarbeid i form av "forhandling" med læreren eller medelever åpner veien til nye innsikter. På denne måten var jeg som lærer med på å utvide elevenes potensial i arbeid med figurfølger og gjorde at de kom lenger i generaliseringsprosessen.

5.4 Sammenfatning og refleksjoner

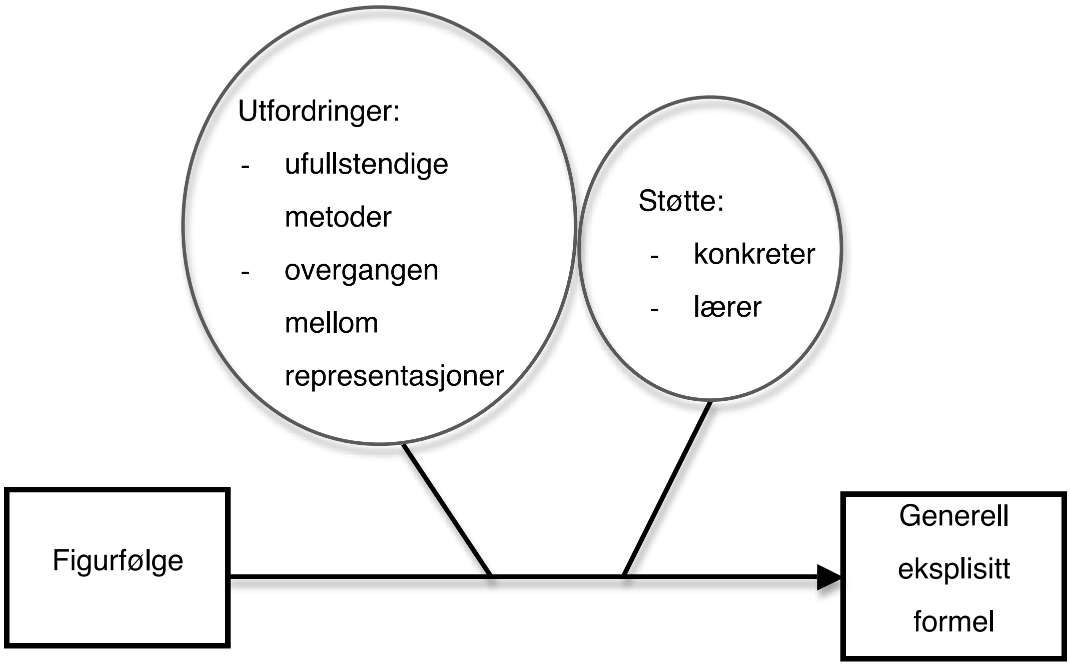
I analysearbeidet mitt har jeg kommet fram til tre typiske trekk for elevene jeg observerte i arbeid med figurfølger. To av disse typiske trekkene er utfordringer for elevene og læreren i generaliseringsprosessen i arbeid med figurfølger. Den første utfordringen er at elevene gjerne tyr til ufullstendige metoder når de går over fra å beregne antall komponenter i figurene ved hjelp av den rekursive sammenhengen i følgen til å gå over til å finne en eksplisitt metode. I de ufullstendige metodene antar elevene i mitt datamateriale en direkte proporsjonalitet i figurfølgene som ikke er riktig, noe jeg mener har sammenheng med at de ikke er vant til å arbeide med algebra, men med aritmetikk. Den andre utfordringen elevene møter i arbeid med figurfølger er overgangen mellom representasjoner. I mine undersøkelser så jeg tydelig at overgangen mellom representasjoner er utfordrende for elevene ved at de mistet noe av informasjonen og dermed omsatte objektet feil når de forandra representasjonssystem.

Det kommer også fram i mine undersøkelser at konkretiseringsmateriell og læreren fungerer støttende for elevene i arbeid med figurfølger og på denne måten fungerer som medierende verktøy. Fyrstikkene jeg brukte fungerte som medierende verktøy for elevene i arbeidet med figurfølger, og var på denne måten med på å gjøre tankeprosessen enklere for elevene. Læreren er også en viktig faktor for å fremme utvikling, og er derfor med på å styre elevenes arbeid. I mitt datamateriale ser jeg tydelig at spørsmål fra meg er med å avgjøre hvor langt elevene kommer i å finne et generelt funksjonsuttrykk og om de tar i bruk en ufullstendig metode eller en korrekt lineær metode.

I etterkant av forskningen min ser jeg at det er ting jeg kunne gjort annerledes. For eksempel kunne jeg kun konsentrert meg kun om lineære figurfølger for å lettere kunne sammenligne elevenes arbeid i de forskjellige oppgavene. Jeg kunne også tatt for meg flere figurfølger med likt funksjonsuttrykk med og uten konkreter for å få mer data på hva konkretene betyr for generaliseringsprosessen. Dette gjorde jeg ikke fordi jeg ikke forutså at fyrstikkene ville ha så stor betydning for elevenes generaliseringer. I forkant av datainnsamlingen visste jeg ikke hva jeg kom til å finne, og så derfor ikke de samme mulighetene som jeg gjør i etterkant.

Som nevnt i metodekapitlet kommer jeg i denne undersøkelsen ikke fram til generelle resultater eller lovmessigheter. Likevel mener jeg at mine resultater har betydning ved at de tilfører fagfeltet mer forskning på et viktig område i matematikken. Jeg har også funnet samsvar med tidligere forskning, noe som er med på å underbygge gyldigheten i mine funn. Jacobsen (2005) skriver at å bruke andre teoretikeres forskning til sammenligning med egne resultater er med på å styrke gyldigheten i resultatene. Jeg har funnet samsvar med flere andre undersøkelser som er gjort i forhold til figurfølger (Amit & Neria, 2004; Lannin et al., 2006; Lee, 1996; Stacey, 1989; Stacey & MacGregor, 1995; Warren, 2005) som jeg har presentert resultatene fra i diskusjonen av mine analyser. Ved at tidligere forskning har funnet det samme styrkes gyldigheten i mine resultater.

I mine undersøkelser har jeg altså kommet fram til tre trekk som beskriver veien elevene gikk fra en ikonisk representasjon av en figurfølge og fram til å uttrykke et generelt uttrykk for denne figurfølgen ved hjelp av algebraisk notasjon. To av disse trekkene er utfordringer elevene kan oppleve på denne veien, mens det siste trekket er to medierende verktøy som fungerer støttende for elevene på den samme veien. Jeg kan illustrere mine funn i denne figuren som viser veien fra figurfølgen til en generell eksplisitt formel, og utfordringene og støtten elevene møter i denne prosessen:



6. Oppsummering av analyse og perspektivering

Hensikten med denne oppgaven har vært å identifisere typiske trekk for elever i arbeid med figurfølger i algebra, i tillegg til å se på hva som fungerer som katalysator for elevene i dette arbeidet. For å finne ut noe om dette har jeg observert elever på sjuende trinn i arbeid med figurfølger. I analysen har jeg drøftet de tre viktigste kjennetegnene jeg fant i mitt datamateriale. Her kommer det fram at arbeid med figurfølger i algebra er en arbeidsform som byr på utfordringer for elevene, og for læreren som bruker denne arbeidsformen i sin undervisning. I denne siste delen av oppgaven vil jeg føre diskusjonen litt videre når det gjelder noen av resultatene jeg har kommet fram til.

Jeg har i denne oppgaven sett på elevenes bruk av semiotiske representasjoner i arbeid med generalisering av figurfølger. Det jeg har observert er at elevene foretrekker å bruke hverdagsspråket sitt, altså naturlig språk. Elevene valgte å bruke naturlig språk for å uttrykke sine generaliseringer til jeg som lærer spurte dem om å ta i bruk skriftlige representasjoner og algebraisk notasjon. Elevene må altså ha et behov for eller bli utfordret til å ta i bruk skriftspråk og matematiske symboler før de gjør det. Dette viser den viktige rollen læreren har i forhold til å oppfordre elevene til å bevege seg over til nye områder i matematikken og dermed påvirke elevenes læring ved å la dem utforske nye områder og innføre bruk av nye begreper for dem. Som lærer blir det derfor viktig å planlegge hvilke spørsmål som kan stilles for å få elevene til å utvikle seg videre, og hvilken støtte elevene kan komme til å trenge for å ikke stagnere på et punkt i generaliseringsprosessen. Lærerens rolle viser seg altså å være essensiell for utvikling av matematikkunnskap, noe som gjør det viktig at læreren er bevisst i planlegging av undervisning.

Elevene jeg gjennomførte mine undersøkelser med hadde lite erfaring med arbeid med figurfølger, og ingen erfaring med algebraisk symbolspråk. Jeg tror derfor at noe av utfordringen for dem var å bli vant til denne nye måten å arbeide på, og bli kjent med den algebraiske tenkemåten. Elevene var vant til å arbeide med aritmetikk, og fikk derfor nye utfordringer når de måtte generalisere og komme fram til generelle metoder i stedet for å finne et svar i aritmetiske oppgaver. Balacheff (1996) skriver i sitt oppsummerende kapittel i boka *Perspectives on school algebra* at læreren har en sentral rolle i læring av algebra. Han skriver at elevene må oppleve et brudd med, og ikke bare en overgang fra aritmetikk til algebra. Læreren har en sentral rolle i å la elevene erkjenne dette bruddet og må derfor ta denne rollen (Balacheff, 1996). Jeg synes mine observasjoner viser nettopp dette at overgangen fra aritmetikk til algebra er stor for elevene, og at det derfor er viktig å bruke tid på å la elevene komme inn i denne nye måten å tenke på. I innledningen min henviste jeg til Watson (2009) som sier at elevenes problemer i algebra ikke hovedsakelig skyldes bokstavene i seg selv, men å forstå underliggende operasjoner og strukturer. Dette mener jeg også at jeg ser i mine observasjoner, noe som underbygger viktigheten av å innføre algebra for elevene på en måte hvor de må se på og reflektere over operasjoner og strukturer og arbeide med algebraisk tenkning mer enn algebra som manipulasjon av symboler. Mine resultater viser altså at algebraisk tenkning og symbolspråket ikke er noe som kommer av seg selv for elevene. Elever trenger erfaring i å se strukturen til forhold mellom tall, og å beskrive disse for å skape mening i symboler og forstå denne måten å tenke på.

Gjennom dette prosjektet har jeg sett tydeligere enn tidligere den viktige rollen å skifte mellom representasjoner har i matematikklæring, og gjennom mine analyser ser jeg eksempler på det Duval (2006) skriver om at å skifte mellom representasjoner er utfordrende for elever. Jeg mener at generaliseringsaktiviteter og arbeid med figurfølger er en arbeidsform som gir gode muligheter til å arbeide med denne overgangen mellom forskjellige representasjoner. I mine undersøkelser brukes ikoniske representasjoner, naturlig språk, uformelt skriftlig språk og algebraisk symbolspråk. I tillegg går det an å ta inn representasjoner som tabeller og grafer, og på denne måten utvide elevenes forståelse av funksjonsbegrepet i tillegg til å arbeide med evnen til å bevege seg mellom representasjoner. Bruk av formler og funksjoner er sentralt i matematikk, og jeg mener at arbeid med figurfølger kan være et viktig bidrag for å utvikle kunnskap om dette, og om matematiske representasjoner generelt.

I arbeid med denne oppgaven har jeg lært mye om hvordan elever arbeider med generalisering av figurfølger, og det jeg har funnet ut er relevant for skolen, elevene og læreren. Selv om gruppene og elevene i denne undersøkelsen ikke var et tilfeldig eller et representativt utvalg for en større elevgruppe reiser resultatene likevel viktige spørsmål og gir nye spørsmål for videre forskning. Jeg synes det kunne vært spesielt interessant å undersøke mer rundt konkretenes rolle og hva de har å si for oppfattelsen av figurfølger. I min forskning ser jeg tendenser til at konkretene har betydning som medierende verktøy i oppfattelsen og beskrivelsen av figurfølger, noe det kunne vært interessant å finne ut mer om.

I Kunnskapsløftets generelle del er *det skapende mennesket* et av de sju forskjellige menneskene som elevene i skolen skal få mulighet til å utvikle egenskaper som (Utdanningsdirektoratet, 2010). I denne delen presenteres tre tradisjoner hos mennesker gjennom historien hvorav den ene er *søking*. Her legges det vekt på at elevene skal få trening i tenkning, i å trekke slutninger og avgjøre ved resonnement, og ikke minst i argumentasjon, drøfting og bevisføring (Utdanningsdirektoratet, 2010). Dette mener jeg underbygger generaliseringens rolle i skolen. Gjennom arbeid med generalisering får elevene trening i å trekke slutninger, resonnere og argumentere. Innenfor det skapende mennesket vektlegges den vitenskapelige arbeidsmåte, og den aktive elev som skal utvikle både kreative og kritiske evner. Evne til kritisk tenkning innebærer å analysere og prøve om forutsetningene for en tankerekke holder. Dette betyr at skolen ikke bare skal overføre lærdom til elevene, men også gi dem kompetanse til å utforske og skaffe seg ny kunnskap selv, og utvikle både fantasi og skepsis (Utdanningsdirektoratet, 2010).

Jeg mener det skapende mennesket i Kunnskapsløftet underbygger en algebra i skolen som vektlegger algebraisk tenkning, i motsetning til den tradisjonelle tilnærmingen til algebra som Mason (1996) beskriver. Her kan bruk av figurfølger være en god tilnærmingen fordi elevene i arbeid med figurfølger må delta aktivt ved å komme fram til generaliseringer, være kritiske til disse for å se om de er gyldige og argumentere for sine resonnementer. På denne måten mener jeg også at skolen gir elevene kompetanse til å skaffe seg ny kunnskap selv, ved at de lærer en måte å arbeide på, mer enn regler og prosedyrer de må kunne bruke. Ved å arbeide med algebraisk tenkning i skolen mener jeg elevene får mer enn kunnskap om algebra og generalisering, de får kjennskap til en arbeidsmåte og dermed et verktøy de kan bruke i mange typer problemløsning, noe jeg mener er viktig for å utvikle seg som et skapende menneske i matematikk.

Litteraturliste

Amit, M., & Neria, D. (2004). Students' preference of non-algebraic representations in mathematical communication. I M. J. Høines & A. B. & Fuglestad (Red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3. ss. 409–416). Bergen: PME.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (ss. 216-230). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1996). Symbolic arithmetic vs. algebra the core of a didactical dilemma. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Red.), *Perspectives on school algebra* (ss. 249-263). Dordrecht: Kluwer.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg). London: Routledge.

Cole, M. (2005). Putting culture in the middle. I H. Daniels (Red.), *An introduction to Vygotsky* (ss. 199-227). London: Routledge.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (ss. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Frege, G. (1993). On sense and reference. I A. W. Moore (Red.), *Meaning and reference* (ss. 23-43). Oxford: Oxford University Press.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (2. utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol I, ss. 344-351). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (ss. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit reasoning: How can we build student algebraic understanding? *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 299-317.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activites. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (ss. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (ss. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Olsen, R. V. (2010). Matematikk i PISA. I M. Kjærnsli, & A. Roe (Red.), *På rett spor: Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009* (ss. 138-158). Oslo: Universitetsforlaget.

Orton, A., & Orton, J. (2005). Pattern and the approach to algebra. I A. Orton (Red.) *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (ss. 104-121). London: Continuum.

Orton, A., Orton, J., & Roper T. (2005). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. I Orton, A. (Red.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (ss. 121 136). London: Continuum.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1991). Communicating mathematically. I K. Durkin & B. Shire (Red.), *Language in mathematical education. Research and practice* (ss. 17-23). Buckingham: Open University Press.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (ss. 107-111). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5(1)*, 37-70.

Redden, T. (1996). "Wouldn't it be good if we had a symbol to stand for any number". I L. Puig & A.Gutierrez (Red.), *Proceedings of the 20th International Group for Psychology of Mathematics Education* (ss. 195-202). Valencia, Spania: International Group for Psychology of Mathematics Education.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 147-164.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Red.), *Perspectives on school algebra* (ss. 141-153). Dordrecht: Kluwer.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks, California: Sage

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigations of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 32, (ss. 49 – 59).

Steinbring, H. (2005). Do mathematical symbols serve to describe or construct "reality"? – Epistemological problems in teaching mathematics in the field of elementary algebra. I M. H. G. Hoffamnn, J. Lenhard, & F. Seeger (Red.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (ss. 91-104). New York: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv.* Oslo: Cappelen akademisk.

Säljö, R., Riesbeck, E., & Wyndhamn, J. (2001). Samtal, samarbete och samsyn: En studie av koordination av perspektiv i klassrumskommunikation. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (ss. 219-241). Oslo: Abstrakt forlag.

Thompson, J., Martinsson, T., Gunnesdal, W., & Rian, J. (2006). *Matematikkleksikon*. Oslo: Kunnskapsforlaget.

Utdanningsdirektoratet (u. å.). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet 05. mai 2011 fra: http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=1101832&visning=5

Utdanningsdirektoratet (2010). *Den generelle delen av læreplanen*. Hentet 29. april 2011 fra: http://www.udir.no/Store-dokumenter-i-html/Den-generelle-delen-av-lareplanen-bokmal/

Van Oers, B. (2000). The appropriation of mathematical symbols: A psychosemiotic approach to mathematics learning. I P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Red.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (ss. 133-177). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The Development of Higher Psychological Prosesses.* London: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. I J. V. Wertsch (Red.), *The concept of activity in Soviet psychology* (ss. 144-188). Armonk, NY: M. E. Sharpe.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, ss. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning. Paper 6: Algebraic reasoning.* London: Nuffield Foundation.

Weisstein, E. (2011). *Function.* Fra MathWorld: A Wolfram Web Resource. Hentet 18. april, 2011, fra: http://mathworld.wolfram.com/Function.html

Vedlegg 1

Oda Tingstad Burheim
odatb@stud.hist.no
Tlf: 90 52 71 82

Trondheim, 08.11.10

Til foreldre/foresatte for elever på 7. trinn ved […] skole

Anmodning om tillatelse til videoopptak

Jeg er student på masterprogrammet i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Dette studieprogrammet har som mål å utdanne lærere som vil være i stand til å gi en god matematikkundervisning for elever i skolen, og det fokuserer på hva som er nødvendig kunnskap å ha når det gjelder undervisning og læring av matematikk. Jeg skal nå gjennomføre mitt masterprosjekt som handler om elevers språk i arbeid med algebraoppgaver.

For å få et så godt dokumentert datamateriale som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak av undervisningssekvenser/intervju med/av elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre videoopptak av elever på 7. trinn ved […] skole. Det er snakk om 2 – 6 skoletimer. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt for de involverte og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Observasjonene vil være basert på normale undervisningssituasjoner i klassen, og opptakene vil bli lagt til rette slik at de i minst mulig grad skal kunne påvirke elevenes læring. Jeg vil også intervjue noen elever for å få større tilgang til hvordan de tenker underveis i arbeidet med oppgavene. Opptakene vil kun bli sett av meg, min veileder og eventuelt av andre masterstudenter i matematikk og deres veiledere ved høgskolen. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at masteroppgaven er fullført, etter planen i juni 2011, vil det innsamlede datamaterialet bli slettet.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer).

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til videoopptak der deres barn er med.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen
Oda Tingstad Burheim

SVARSLIPP

Jeg/vi gir/gir ikke (stryk det som ikke passer) tillatelse til at det kan bli foretatt videoopptak av matematikkundervisning der ________________________________(elevens fornavn og etternavn) er med.

Jeg/vi har snakket med vårt barn om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

____
(Sted og dato)

____
(underskrift fra foresatte/foreldre)

Vennligst returner svarslippen til lærer så snart som mulig.

Vedlegg 2

Analyselogg

Jeg startet analysearbeidet med å transkribere videofilmene fra gruppearbeidene. Deretter ville jeg bli kjent med materialet og skrev ut alle transkripsjoner og leste gjennom dem flere ganger. Jeg markerte situasjoner som jeg syntes var interessante og skrev ned stikkord som beskrev situasjonene, og tanker og refleksjoner jeg fikk mens jeg leste. På denne måten ble jeg mer klar over hva datamaterialet mitt innehold, og fikk satt ord på det jeg så i materialet og mine tanker rundt det.

Etter denne startfasen i analysearbeidet begynte jeg å kode materialet. Jeg startet med å sortere ut fra kategoriene til Lee (1996), oppfattelsesnivå, verbaliseringsnivå og symbolnivå. Jeg sorterte ikke hvert utsagt for seg, men delte materialet inn i små situasjoner etter de forskjellige nivåene. Jeg kopierte de forskjellige situasjonene fra transkripsjonene over i forskjellige dokumenter for å få en oversikt over hva som fantes innenfor de tre nivåene Lee beskriver. Underveis i dette arbeidet ble jeg klar over at jeg ikke hadde noe sted å legge aritmetiske framstillinger hvor elevene skriver ned formlene de har kommet fram til med tall og ord. Dette er verken symbolnivå eller verbalnivå, og måtte derfor sorteres i en egen kategori. Jeg valgte å kalle denne kategorien nedskriving av naturlig språk. Dermed endte jeg opp med fire koder:

- Oppfattelsesnivå: Se det tilsiktede mønsteret. Bruke mønsteret de ser til beregning av antall komponenter.
- Verbaliseringsnivå: Uttrykke mønsteret tydelig. Uttrykke hele mønsteret riktig.
- Skriftlige representasjoner i naturlig språk: Skrive ned metoder med uformelt matematisk språk, altså ved hjelp av ord og tall
- Symbolnivå: Uttrykke metoden ved hjelp av n

Elevene jeg observerte kom delvis fram til eksplisitte metoder for beregning av antall komponenter i figurene som ikke ga en riktig generalisering av figurfølgene. Jeg begynte derfor videre å se på de forskjellige metodene elevene tok i bruk når de skulle finne en eksplisitt metode. I dette arbeidet fant ut at jeg trengte å kode materialet mitt mer detaljert for å få bedre oversikt over hva elevene arbeidet med. Derfor gikk jeg bort ifra de fire kategoriene jeg hadde fra før og koda datamaterialet på nytt. Her brukte jeg noen begreper fra Stacey

(1989) om de forskjellige metodene elevene bruker, i tillegg til egne koder. Jeg endte opp med ellve koder som jeg delte opp og sorterte materialet inn i. Disse kodene beskriver metoden elevene bruker i de små situasjonene jeg har delt materialet mitt inn i. De to siste kodene beskriver diskusjoner mellom elevene, hvor de sammenligner metoder de har funnet eller diskuterer variabelen *n*.

Dette er de elleve kodene jeg fant:

- Tellemetoden (fra Stacey Counting method). Ser strukturen i følgen, teller antall komponenter og kan tegne/legge opp de neste figurene.
- Rekursiv metode. Ser den rekursive sammenhengen i figurfølgen og kan benytte denne til beregning av påfølgende figurer. For eksempel hvor mange er det i Figur 111 hvis det er 331 i Figur 110?
- Utvikling av eksplisitt metode. Elevene går vekk fra å bruke en rekursiv metode og arbeider med å finne en eksplisitt metode for å beregne antall komponenter for en figur langt ute i følgen.
- Helobjektmetoden (fra Stacey Whole-object method). Bruker antall fyrstikker for en mindre stige og multipliserer dette, implisitt anta at $M(mn) = m \cdot M(n)$
- Differansemetoden (fra Stacey Difference method). Ganger antall trinn med 3, implisitt anta at gjentatt addisjon av 3 betyr at $M(n) = 3n$
- Lineær metode – eksplisitt metode (fra Stacey Linear method). Elevene har kommet fram til et mønster i figurfølgen som vedkjenner at både multiplikasjon og addisjon er involvert og at rekkefølgen av operasjonene har betydning, altså implisitt å bruke en lineær modell. $M(n) = an + b$ med $b \neq 0$. Elevene har funnet fram til en riktig eksplisitt metode, altså funksjonssammenhengen i følgen. Jeg har her også innlemmet bruk av riktig eksplisitt metode for den kvadratiske figurfølgen.
- Skriftlig representasjon i naturlig språk. Skriver ned metoden de har kommet fram til ved hjelp uformelt matematisk språk som er basert på det naturlige språket.
- Symbolisering (*n*). Uttrykker den eksplisitte metoden ved hjelp av variabelen *n*.
- Konkreter som generisk eksempel. Forklarer det eksplisitte forholdet ved hjelp av konkreter. Bruker konkretene som generisk eksempel.
- Sammenligning av metoder. Sammenligner forskjellige uttrykk de har funnet for samme figurfølge. Noen uttrykk er ekvivalente, mens andre gir forskjellige svar.
- Oppfattelse av variabelen. Elevene uttrykker forskjellige oppfatninger av hva *n* er og hvordan den skal brukes.

Etter at materialet vart delt inn i disse elleve kodene begynte jeg å studere situasjonene innenfor de forskjellige kodene for å se etter hva som kjennetegner overgangen fra naturlig språk til symbolspråk. Jeg skrev ned stikkord med kjennetegn jeg fant, og begynte å sortere disse ut ifra hvem som hørte sammen. Gjennom disse stikkordene og sorteringene fikk jeg sammenfatta datamaterialet mitt i tre kjennetegn på overgangen fra naturlig språk til symbolspråk:

1. Elevene tar i bruk ufullstendige metoder
2. Overgangen mellom representasjoner er utfordrende for elevene
3. Medierende redskaper fungerer støttene for elevene i generaliseringsprosessen

Jeg strukturerte materialet ut i fra disse tre kjennetegnene, og sorterte igjen kodene og kom fram til nye underkategorier til disse tre kjennetegnene. Jeg kom dermed fram til tre kjernekategorier med underkategorier som er strukturert på denne måten:

Bruk av metoder	Overgangen mellom representasjoner	Mediering
4. Rekursiv metode	3. Overgangen fra naturlig språk til skriftlige representasjoner	3. Konkretenes rolle
5. Overgangen fra rekursiv til eksplisitt metode	4. Overgangen fra uformelt skriftlig språk til symbolspråk	4. Lærerens rolle
6. Ufullstendige metoder		