RIKE MATEMATISKE PROBLEMER OG SPØRSMÅLSFORMULERINGER I MATEMATIKKUNDERVISNINGEN

Hvordan kan samspillet mellom disse fremme 11-åringers matematiske resonnementer?

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Anne-Gunn Svorkmo

Mai 2007

Høgskolen i Sør-Trøndelag avdeling for lærer- og tolkeutdanning

INNHOLD

1 Innledning 1
1.1 Bakgrunn 1
1.2 Forskningsspørsmål 4
2 Teoretisk ramme 5
2.1 Læringsteori 5
2.1.1 Sosialkonstruktivistisk læringsteori 5
2.1.2 Kvalitativ forskningsmetode 8
2.2 Matematisk resonnement 10
2.2.1 Ulike former for resonnement 10
2.2.2 Nivåinndeling av elevers resonnement 12
2.2.3 Klassifisering av elevers resonnement 13
2.2.4 Utvikling av elevers resonnement 14
2.3 Rike matematiske oppgaver 16
2.4 Spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen 19
2.5 Interaksjonen mellom rike matematiske oppgaver og spørsmålsformuleringer i undervisningen 21
3 Metode 22
3.1 Aksjonsforskning 23
3.2 Designeksperiment 26
3.3 Datamateriale 27
3.4 Oppgavene 28
4 Matematikkfaglig teori 30
4.1 Vekslingsproblemet 30
4.2 Diofantiske ligninger 31
4.3 Den grådige algoritme 33
4.3.1 McNuggets tall 34
5 Analyse av elevenes resonnement del 1 36
5.1 Oppgave med mer enn en løsning 36
5.1.1 Iskremoppgaven 36
5.1.2 Finnes det flere løsninger eller ikke? 37
5.1.3 Eksempler på elevenes resonnement 38
5.1.4 Betraktninger rundt elevenes egne spørsmålsformuleringer 40
5.1.5 Analyse av elevenes resonnement 43
5.1.6 Oppsummering av oppgave med mer enn en løsning 44
5.2 Oppgave med ingen løsning 45
5.2.1 Myntoppgaven 45
5.2.2 Finnes det flere løsninger eller ikke? 45
5.2.3 Eksempler på elevenes resonnement 48
5.2.4 Sammenligning av elevenes resonnement 51
5.2.5 Oppsummering av oppgave med ingen løsning 53
5.3 Oppgave med uendelig mange løsninger 54
5.3.1 Dagens tall 54
5.3.2 Eksempler på elevenes resonnement 55
5.3.3 Sammenligning av elevenes resonnement 58
5.3.4 Oppsummering av oppgave med uendelig mange løsninger 60

6 Analyse av elevenes resonnement del 2 ____ 61
6.1 Intuitive resonnementer ____ 61
6.2 Et spesielt elevresonnement ____ 62
6.3 Elevresonnement i en utviklingsprosess ____ 64
6.4 Oppsummering ____ 66
7 Spor av utvikling i elevens resonnement ____ 67
7.1 Spor av utvikling innefor den enkelte oppgave. ____ 67
7.2 Spor av utvikling innenfor aksjonsperioden ____ 68
8 Konklusjon og avsluttende kommentarer ____ 70
Litteratur ____ 70

1 Innledning

Denne oppgaven handler om hvordan elever kan bevisstgjøres og stimuleres til å tenke og resonnere matematisk under veiledning av en dyktig lærer. Med en dyktig lærer mener jeg en som er faglig trygg, har evne til å kommunisere og lytte til elevene, og som tør å ta sjanser.

1.1 Bakgrunn

Hva innbærer det å ha kunnskap i matematikk? Dette har vært et internasjonalt diskusjonstema gjennom lang tid. Forskning i matematikkdidaktikk har synliggjort at matematikkfaget har mange flere dimensjoner og nyanser enn tidligere antatt. Historisk har kunnskap og ferdigheter i faget, kort beskrevet, vært basert på gjengivelse av begreper og ulike teorier med vekt på automatisering av utregninger. (SOU 2004:97 s. 67)
Jeg ser andre perspektiver i matematikkfaget og har tanker om hvordan jeg kan undervise i faget for å heve elevenes matematiske kompetanse. Dette er i tråd med fagsynet og læringssynet som er presentert gjennom LK06 (Kunnskapsdepartementet, 2006).
Med bakgrunn fra over tjue år som lærer i grunnskolen har jeg mange meninger om hva matematisk kompetanse er, og hva som bør være målet med skolens matematikkundervisning. Kompetanse innebærer å kunne bruke den matematikken en lærer på skolen i ulike situasjoner i livet og fremtidig yrke. Det lærer man ikke bare ved å innøve ferdigheter alene, men ferdighetene må følges av forståelse og evnen til å kunne bruke det man har lært i nye sammenhenger. Disse erfaringene bringer jeg med meg inn i dette forskningsprosjektet.

Hva ønsker jeg at elever skal lære i matematikk? Vil jeg at de skal tro at matematikk går ut på å pugge algoritmer, at det er om gjøre å regne flest mulig oppgaver i boka, og at det bare handler om å komme fram til riktige svar? Mitt syn er at matematikkfaget er mer mangfoldig enn som så. Med det mener jeg at det finnes flere måter å lære matematikk på, og at faget er satt sammen av mange ulike kompetanser. Når vi ser hvilke krav samfunnet stiller til matematiske ferdigheter på ulike nivå, er det naturlig at skolematematikken i dag er forskjellig sammenlignet med tidligere. Dette vil igjen stille nye krav til undervisningen og til hva slags matematikk elevene skal lære.

Ut fra et didaktisk mangfold har jeg alltid vært interessert i å velge og prøve ut metoder hvor intensjonen er å synliggjøre spekteret i matematikkfaget. Målet er at elevene gjennom en variert og målrettet matematikkundervisning, skal lære at matematikk både er spennende, krevende og morsomt. Hensikten med faget, hovedområdene, de grunnleggende ferdighetene og kompetansemålene i fagene, slik LK06 skisserer, skal gjennom læringsprosessen komme tydelig fram for elevene. Dette er nøkkelord som også bevisstgjør meg i planleggingen av egen undervisning. Jeg er stadig på leting etter gode undervisningsmetoder og/eller kombinasjoner av slike for å nå disse målene. Den eller de metodene jeg ender opp med, velger jeg ut fra de målene jeg setter for undervisningen med hovedvekt på hva elevene skal lære.

I matematikkundervisningen er svaret og svarene ofte i fokus. Dette er i mange sammenhenger naturlig fordi det gjenspeiler særtrekkene i faget. Gjennom det svaret eller de svarene elevene kommer fram til, kan enkelte ferdigheter og former for kunnskap til en viss grad måles. Andre typer ferdigheter kan tilegnes og læres ved at det er løsningsprosessen som framheves. I mitt prosjekt vil jeg la elevene arbeide med det Berkmann (2006) kaller for "an answer about the answer". Det elevene skal komme fram til, dvs. svaret, er de betraktninger og vurderinger som gjøres rundt svaret på en oppgave. I mitt tilfelle skal elevene etter at de har arbeidet og løst en oppgave, komme fram til en forklaring på om de tror de har funnet alle løsningene på den enkelte oppgaven eller ikke. Dette skal begrunnes så godt som mulig. Disse forklaringene med begrunnelser ser jeg her på som elevenes resonnement.

Målet er å avdekke og fremme ulike former for matematisk resonnement hos elever på 6. trinn. Når det gjelder forskjellige måter å katalogisere elevenes resonnement på og hva som kjennetegner de ulike inndelingene, har jeg hentet teorier fra blant annet Brousseau og Gibel (2005) og Baroody (1993).
Klassifisering og analyse av elevens matematiske resonnement diskuteres i kapittel 5 og 6.
Jeg ønsker gjennom min studie også å undersøke om det finnes spor av utvikling i 11 åringers matematiske resonnement. Jeg har valgt aksjonsforskning som metode fordi det etter mitt syn, tjener det jeg skal undersøke best.

Problemløsning er et interessant område i matematikk av mange ulike årsaker.
Problemløsning skal her bety oppgaver hvor løsningsmetoden er uklar for problemløseren (Björkqvist, 2003). Å arbeide med problemløsningsoppgaver i undervisningen kan engasjere elever i matematikkfaget. I flere sammenhenger har jeg opplevd at elever har gitt uttrykk for at de liker å arbeide med slike oppgaver. De blir både nysgjerrige og inspirert til å lære matematikk. Elevene har i mange sammenhenger vært mer ivrige og utholdene i arbeidsprosessen med problemløsningsoppgaver, sammenlignet med når de arbeider med mer standard oppgaver der de kan bruke en kjent metode.

Min erfaring er at mange elever klarer å løse utfordrende og vanskelige problemløsningsoppgaver, sammenlignet med hvordan de takler andre typer oppgaver. En forklaring på dette kan være måten problemløsningsoppgavene blir presentert på og rammene for arbeidet med slike oppgaver. Jeg arbeider ut fra en hypotese om at problemløsningsoppgaver kan fremme elevers matematiske resonnement. Dette vil bli drøftet i kapittel 7, i konklusjonen med avsluttende kommentarer.

Jeg har designet tre oppgaver som jeg mener kan fungere som et verktøy for å kunne gi meg noen svar på mine forskningsspørsmål. Her har jeg hentet min teori fra rike matematiske problem (Hedrén m. fl., 2005) som er en form for problemløsningsoppgaver med spesielle kriterier. Disse kriteriene, som jeg mener sikrer oppgavenes kvalitet, vil jeg komme tilbake til i kapittel 2.
Oppgavene mine er laget slik at de bygger på hverandre. For at de skal passe inne i en aksjon hvor en mulig utvikling er et ønske, har jeg designet oppgavene slik at de har noen likehetstrekk samtidig som de har en naturlig progresjon. Oppgavene presenteres i kapittel 3.

For å kunne klare å fremme elevenes matematiske resonnement trenger jeg flere hjelpemidler. Teorier rundt det å stille spørsmål i matematikkundervisningen, er noe jeg har valgt å støtte meg til. På engelsk brukes begrepet ”problem posing” (Silver, 1994, Brown m.fl., 2005), og jeg oversetter det med spørsmålsformulering. Jeg tror spørsmålsformuleringer kan være et redskap til å løfte fram elevenes forklaringer. Disse forklaringene forteller igjen noe om hvordan elevene tenker. Men for at spørsmålsformuleringer skal fungere som et hjelpemiddel, er det viktig at de blir en del av undervisningssituasjonen der det er naturlig at både elever og lærer stiller spørsmål. Et spørsmål formulert av elever kan gjenspeile hva de forstår og hvordan de oppfatter matematikk.

Kort sammenfattet går dette prosjektet ut på å undersøke om det er mulig å bruke rike matematiske oppgaver og spørsmålsformuleringer som redskaper i undervisningen for å fremme 11 åringers matematiske resonnement. De tre designede oppgavene inklusive spørsmålsformuleringer er satt inn i et sammenhengende undervisningsforløp som strekker seg over fire uker. Undervisningsforløpet er formet som en aksjonsforskning der jeg selv er læreren. Målet med å velge aksjonsforskning som metode er å kunne påvirke elevenes resonnementer til utvikling.

Masteroppgaven innledes med et teorikapittel hvor blant annet læringsteori, teorier om matematiske resonnement, rike matmatiske oppgaver og spørsmålsformuleringer blir

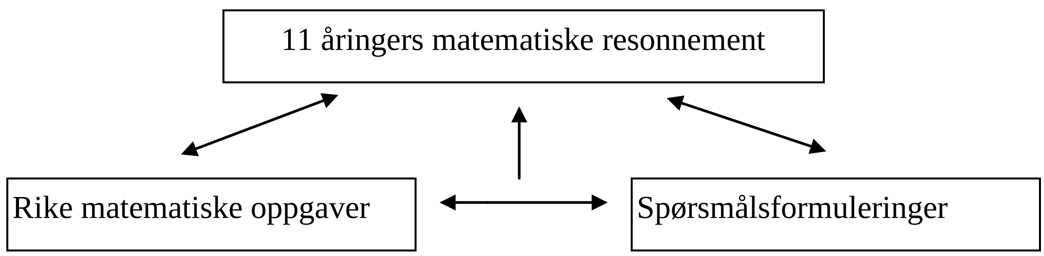
presentert. Deretter følger et metodisk kapittel som avsluttes med en introduksjon av de tre designede oppgavene. I kapittel 4 tar jeg utgangspunkt i en av de rike oppgavene jeg har valgt ut og belyser oppgaven teoretisk ut fra et matematikkfaglig perspektiv.
En stor del av masteroppgaven er knyttet til analysen av elevens resonnementer. Jeg har valgt å dele empirien i to. I kapittel 5 deler jeg inn elevenes resonnementer etter oppgavene. Analysen gjør jeg her ut fra Brousseau og Gibels (2005) nivåinndelinger. I kapittel 6 ser jeg alle elevresonnementene under ett og bruker Lithners (2006) og Baroodys (1993) definisjoner på ulike former for resonnement, som redskap i analysen.
Jeg avslutter med konklusjon og avsluttende kommentarer i siste kapittelet.

1.2 Forskningsspørsmål

Taflin (2003, s. 32) hevder at problemløsning i matematikk leder til og forutsetter mange ulike kunnskaper og ferdigheter. Kan jeg da legge til rette for at det nettopp er evnen til å resonnere oppgavene skal lede fram mot?
Jeg har valgt følgende forskningsspørsmål:

Rike matematiske problem og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen. Hvordan kan samspillet mellom disse fremme 11 åringers matematiske resonnement?

Med å ”fremme” mener jeg i denne sammenhengen det å synliggjøre, løfte fram og om mulig utvikle 11-åringers matematiske resonnement. Jeg vil undersøke om det eventuelt finnes spor av utvikling og undersøke om det i noen grad kan skyldes min aksjon. Figuren under kan gi et bilde av problemstillingen.



Jeg søker også etter svar på følgende spørsmål:

- Hvordan resonnerer elevene på dette trinnet, og hva bygger de sine resonnement på?
- Hvilke matematiske egenskaper bruker 11 åringene i sine resonnementer, og hvilke grader/stadier av matematiske resonnementer kan elever på 6. trinn klare?

- Hvilket utviklingspotensiale finnes i elevenes resonnementer, og hvordan kan jeg som lærer påvirke denne prosessen?

2 Teoretisk ramme

2.1 Læringsteori

Hva vil det si å lære? Hvordan lærer man? En læringsteori er en teori om hvordan man tror læring skjer. En læringsteori gir ikke en oppskrift på handling, men begrunnelsen for valg av handling ligger i synet på læring. Synet på hva det vil si å lære og synet på hvordan man lærer, vil influere på det en lærer gjør i klasserommet.

2.1.1 Sosialkonstruktivistisk læringsteori

Sosialkonstruktivismen bygger på konstruktivistisk læringsteori. Jeg vil først beskrive grunnleggende elementer i konstruktivismen, både den moderne og den radikale, før jeg går over på sosialkonstruktivismen.

Konstruktivismen er utledet fra en kognitiv vitenskap om hvordan man konstruerer ens egen læring. Konstruktivismes syn på læring bygger på en forestilling om en individuell og konstruerende kunnskap i form av mentale strukturer eller skjema. Læring skjer gjennom engasjement med den ytre verdenen, både fysisk og psykisk (Jaworski, 2005).
Innenfor denne læringsteorien antar man at det finnes strukturer i hjernen som forenkler denne organiseringen av kunnskap. Læring utfordrer, i følge konstruktivismen, eksisterende strukturer, fordi læring forårsaker en tilpasning til og reorganisasjon av eksisterende strukturer.

Innenfor konstruktivismen er det om å legge til rette for konstruksjon og rekonstruksjon av kunnskap for enkeltindividet. Denne læringsteorien setter individet dvs., i mitt tilfelle, barnet i sentrum.
Svakheter ved konstruktivismen er at den sier lite om mekanismer som støtter konstruksjon av læring (Jaworski, ibid.).

Moderne konstruktivisme er betegnelsen på den del av konstruktivismen som er utledet fra Piagets arbeid (Jaworski, 1996). I hans teorier er konstruksjon av læring karakterisert som en kognitiv tilpasning (adapsjon). Den kognitive tilpasningen utdypes og forklares via begrepene assimilasjon og akkomodasjon. Assimilasjon er når ny kunnskap blir tilpasset og smelter sammen med gammel kunnskap, dvs. tidligere inntrykk og erfaringer (www.ordnett.no). Akkomodasjon er når ny kunnskap fører til omstrukturering av det gamle skjemaet eller strukturen. Det vil si at dersom elever ikke har et nok utvidet skjema, må de bygge et nytt eller bygge om eksisterende skjema. Resultatet er en organisering i hvert enkeltindivid innefor den enkeltes erfaringsverden.

Von Glasersfeld (1987a, i Jaworski, 1996) hevder at Piagets kognitive tilpasning kan være en forgjenger til det han kaller radikal konstruktivisme. Ut fra Piagets teorier har han utarbeidet to prinsipper for radikal konstruktivismen:

- Knowledge is not passively received but actively built up by the cognising subject.
- The function of cognition is adaptive and serves the organisation of the experiential world, not the discovery of ontological reality.

Det første prinsippet hevder at den som lærer får ikke kunnskap, men konstruerer kunnskapen selv. Kunnskap konstrueres kun av et aktivt, tenkende og kunnskapssøkende menneske og kan ikke mottas passivt fra omgivelsene.
Det andre prinsippet forteller noe om at individet lærer ved adapsjon (tilpasning). Kunnskapsbygging er en tilpassningsprosess som hvert enkelt individ organiserer innefor sin erfaringsverden. Læring ses på som en prosess hvor mennesket tilpasser sitt syn på virkeligheten til resultatet av sine egne mentale konstruksjoner. Å konstruere kunnskap er ikke å oppdage den uavhengig og eksisterende virkeligheten som finnes utenfor mennesket. Radikalkonstruktivismen fornekter ikke at det finnes en objektiv virkelighet, men erkjenner at man kun kjenner til virkeligheten gjennom erfaring.

Innenfor konstruktivismen blir mennesket sett på som aktivt handlende og ansvarlig for egen læring. Kunnskap oppfattes som en konstruksjon av forståelse og mening gjennom et engasjement med det ytre verdenen. Dersom dette skjer i møtet mellom mennesker i sosial samhandling, vil den sosiale og kulturelle settingen som mennesket lever i, påvirke menneskets oppfattelse og forståelse (Postholm, 2005, s. 22). Sosialkonstruktivismens virkelighet beskrives her som en språklig konstruksjon skapt av mennesker i sosiale relasjoner.

Wood (1998, s. 39) uttrykker skillet og overgangen mellom konstruktivismen og sosialkonstruktivismen på følgende måte:

> “Piaget’s theory, with its emphasis on the active, constructive nature of human development is often referred as a “constructivist” approach. Whilst Bruner also accepted the image children as active architects of their own understanding he, in company with Vygotsky, stressed the role of social interaction and cultural practices in shape the course of human development. Their approach is often referred to a “social constructivism”.

Sosial interaksjon eller gjensidig påvirkning, hva ligger det i det? Taylor og Chambell-Williams (1993, i Jaworski 1996, s. 24) føyer til et 3. prinsipp til von Glasersfelds prinsipper innefor radikal konstruktivismen. De beskriver hvordan kunnskap kan konstrueres sosialt gjennom forhandlinger (negotiation) med andre:

> The third principle derives from the sociology of knowledge, and acknowledges that reality is constructed intersubjectively, that is it is socially negotiated between significant others who are able to share meanings and social perspectives of a common lifeworld (Berger and Luckmann, 1966). This principle acknowledges the sociocultural and socioemotional contexts of learning, highlights the central role of language in learning, and identifies the learner as an interactive co-constructor of knowledge.

Konstruksjon av læring skjer gjennom samtale, samarbeid, diskusjoner eller forhandlinger (negotiation) med andre. For at det skal legges til rette for læring, må det i følge Taylor og Chambell-Williams, skje i interaksjon med andre som har en positiv innvirkning på læringssituasjonen. Det stilles krav til ”den andres” rolle.
Kunnskapen skapes ikke utenfor individet, men individuelt i en sosial sammenheng hvor den som lærer konstruerer sin kunnskap i et vekselvirkende samspill med andre. Her blir de individuelle konstruksjonene utfordret, og en modifisering av enkeltindividets persepsjon tvinges fram. Det vil si at inni hvert individs hode finnes det en realitet som gjennom forhandlinger, prøves ut mot andres ved hjelp av språket.

Jeg vil i min forskning plassere meg innefor sosialkonstruktivistisk læringsteori, fordi den støtter det synet jeg har på læring.
Jeg vil i prosjektet prøve å legge til rette for samspillsituasjoner hvor to og to elever forhandler om mening. Dersom kommunikasjonen skal fungere, avhenger det av hvor nært perspektivet til den som snakket lytteren klarer å komme (Jaworski, 1996). Desto bedre elevene klarer å beskrive og utdype hvordan de tenker, jo lettere er det for de andre (lytterne) å nærme seg talerens perspektiv. Elevene må få bruke tid på å forklare hvordan de tenker. Som lærer må jeg støtte og hjelpe til med denne prosessen.

Utfordringen er når hvert individ konstruerer sin egen matematiske forståelse, hvordan kan man da dele hverandres forståelse? Bishop (1984, i Jaworski, 1996, s. 21) hevder at:

> ”If meaning are to be shared and negotiated then all parties must communicate … communication is more than just talking! It is also about relationship”.

Derfor ønsker jeg, etter at elevene har arbeidet med deler av en oppgave, å samle elevene i lyttekroken. På denne måten kan alle elevene i gruppa forhandle om, til en viss grad, en felles mening. Jaworski (1996, s. 25) uttrykker det slik:

> “Any persons’ account presents an individual, subjective, construction of events. When the people involved in an event negotiate their individual account it is possible to reach some level of agreement of interpretations of the event”.

Dermed blir resultatene, i følge Jaworski (ibid.) tilsynelatende en felles konstruksjon som igjen kan betraktes å være intersubjektiv dvs. en felles matematisk forståelse for elevene gruppen.

2.1.2 Kvalitativ forskningsmetode

Kvalitativ forskning er å utforske og undersøke menneskelige prosesser eller problemer i en virkelig setting (Postholm, 2005). Forskeren går dypt inn i aktiviteter utført av mennesker. Hun beskriver eller karakteriserer for eksempel hva de gjør, hvordan de tenker og hvilke verdier den utvalgte gruppe av mennesker har. Ut fra hva forskeren vil undersøke må hun først prøve å få en oversikt over deltakernes perspektiv. Hun må ta utgangspunkt i de situasjonsbestemte betingelsene som blir utgangspunktet og rammene for forskningen hennes. I forskningsperioden undersøkes og studeres ulike biter av hva som er fokus. Forskeren setter resultatet av disse undersøkelsene sammen, og forsøker tilslutt å gi en helhetlig beskrivelse av forskningsproblemet.

Forskeren er det viktigste forskningsinstrumentet i kvalitativ forskning (Postholm, ibid.). Hun må være åpen for hva deltakerne sier og gjør. Forskeren må i så måte være en god observatør for å kunnes løfte fram deltakernes perspektiv. Forskeren er en budbringer av deltakernes perspektiv.
Kvalitativ forskning innebærer i praksis et nært samarbeidsforhold mellom forsker og forskningsdeltakere (Guba og Lincoln, 1998 i Postholm 2005). Dette stiller krav til forskeren samarbeidsevne. Da forskningens perspektiv ofte løftes fram av samspillet mellom de deltakende parter, så er det sentralt for forskningsarbeidet at samarbeidet fungerer.

Postholm (2005) hevder at: ” De nære samarbeidsforholdene og prosessene det forskes på i sin naturlige kontekst, viser at kvalitativ forskning representerer et ståsted som innebærer at kunnskap og forståelse blir skapt i sosial interaksjon. Som en konsekvens av dette er, etter min mening, langt på vei all kvalitativ forskning på praksis et vitenskapelig arbeid som utføres innefor et konstruktivistisk paradigme”.
I så måte utfyller mine forskningsteorier hverandre.

Kvalitativ forskningsmetode er verdiladet. Forskeren klarer ikke å være helt objektiv. I følge Postholm (ibid.) er det en nær sammenheng mellom forskerens teoretiske ståsted, spørsmålene som blir stilt og metoden/e som blir valgt. Dette påvirker igjen hva som blir samlet inn av datamateriale, analysene og tolkningene og videre hvordan materialet blir presentert. Det jeg påpeker her er en svakhet ved metoden. Forskeren må være bevisst metodens svakheter. Dersom han eller hun klarer å tydeliggjøre sitt ståsted blant annet ved å synliggjøre sine antakelser og sin subjektivitet, kan det være med på å heve verdien på den kvalitative forskningen.

Jeg velger en kvalitativ forskningsmetode fordi jeg vil gå i dybden av et begrenset, innsamlet materiale. Jeg vil vise eksempler på hvilke kvaliteter det kan finnes i 11-åringers matematiske resonnementer, hvordan 11 åringer resonnerer i matematikk og hva de bygger sine resonnementer på.
Målet med en kvalitativ analyse er å gi en helhetlig beskrivelse av det som studeres. For å kunne fremme elevenes resonnementer, er jeg som forsker spesielt avhengig av et nært samarbeidsforhold med elevene. Begrepet epistemologi handler i følge Guba og Lincoln (1998, i Postholm, 2005), om forholdet mellom de det forskes på og forskeren. Ut fra denne gjengivelsen, plasserer jeg min kvalitative forskning først og fremst innefor et epistemologisk paradigme. Jeg ser en forbindelse mellom teorien jeg har valgt og metoden jeg må bruke. En slik forbindelse er i følge Rhedding-Jones (2005), innenfor rammene til et epistemologisk paradigme.

Hensikten med kvalitativ forskningsarbeid er blant annet er å gi andre lærere innspill til egen undervisning. Lærere som leser et forskningsarbeid, skal kunne finne og kjenne igjen elementer fra egen praksis. På denne måten kan deler av et kvalitativt forskningsarbeid tilpasses og overføres til flere klasserom. Lærere og ikke minst elever, kan inspireres og lære av andres forskningsarbeide.

2.2 Matematisk resonnement

Å resonnere er synonymt med det å tenke, følge en logisk tankerekke eller bedømme noe ut fra fornuftgrunner. Et resonnement kan da ses på som en tankegang eller en fornuftslutning. Det å føre et resonnement er å tenke ut og framføre en forklaring enten skriftlig eller muntlig (www.ordnett.no). Uttrykt på en annen måte kan man si at et resonnement er en logisk forklaring på noe som man tror er sant. I et matematisk resonnement forklarer man og trekker fornuftslutninger med og ved hjelp av matematikk.
Lithner (2006, s. 5) beskriver resonnering på denne måten:

Reasoning is the line of thought, the way of thinking, adopted to produce assertion and reach conclusions.

Jeg ser for meg en rekke av tanker som bygger på og følger etter hverandre gjerne formet som en linje av tanker slik Lithner (ibid.) beskriver det. Det første tanken befinner seg helt til venstre på denne linja, og helt til høyre, finnes den siste tanken, en påstand med stor styrke i form av en konkluderende tanke.

I skolehverdagen kan resonnement henge tett sammen med forståelse. For mange lærere kan en elevs resonnement indikere graden av elevens oppfattelse og forståelse. Dette stemmer ikke alltid med virkeligheten. Elever kan repetere eller gjengi resonnementer, enten fra læreboka, fra en medelev eller læreren, uten å forstå helheten i prosessen (Kolenza og Kabani, 2006). Lithner (2006) kaller dette for et imitert resonnement. Denne typen deler han igjen inn i memorert og algoritmisk resonnement. Memorert resonnement er når eleven erindrer et svar på en tidligere løst oppgave og repeterer dette. Algoritmisk resonnement er når eleven gjengir en tidligere og kjent løsningsprosedyre.
Lithner (ibid.) hevder at dersom en lærer får elever til å resonnere over noe utradisjonelt, noe nytt, vil det være lettere å få tak i og få fram hvordan elevene tenker. Jeg mener at dette utradisjonelle kan være en oppgave som er forskjellig fra det elevene er vant med eller en annerledes problemstilling.

2.2.1 Ulike former for resonnement

Det finnes mange ord og uttrykk som beskriver ulike former for matematisk resonnementer. Begrepene sier noe om innholdet, kvaliteten på innholdet, nivået og styrken som ligger i det enkelte resonnementet. Jeg mener den enkleste form for et resonnement kan beskrives med begrepet *forklaring*. Balacheff (1988) mener at den enkleste form et bevis er å vise det direkte ved handling.

Det resonnementet som har høyest kvalitet og størst tyngde innefor matematikk, er et *bevis*. Mellom det sterkeste og det svakeste nivået finnes det mange andre former for å resonnere som for eksempel å argumentere overbevisende, å verifisere (to verify) eller å rettferdiggjøre (to justify).

Brousseau og Gibel (2005) definerer et resonnement som en relasjon R mellom to elementer A og B slik at (min oversettelse):

- A angir en betingelse eller et observert faktum som kan være avhengig av gitte eller spesielle omstendighet.
- B er en konsekvens, en bestemmelse, eller en avgjørelse.
- R er en relasjon, en regel eller noe betraktet som er kjent og akseptert. Relasjonen R leder den som resonnerer, i tilfelle betingelse A er oppfylt eller at faktum A finner sted, å beslutte B, å forutsi B eller fastslå at B er sann.

En spesiell form for resonnement som jeg vil trekke fram, er kreativt resonnement. Jeg har funnet modellen hos Lithner (2006), og den bygger på hans tidligere forskning om plausible resonnementer (Lithner, 2000).

Et *kreativt resonnement* har følgende vilkår:

1. Originalitet (novelty)
2. Fleksibilitet (flexibility)
3. Tilsynelatende riktighet (plausibility)
4. Matematisk fundamentering (mathematical foundation)

Originalitet er å lede elevene inn i en ny, for den som resonnerer, løsningssekvens. Det kan også være en sekvens som er glemt og som må fremkalles på nytt. Poenget er her å unngå imiterte resonnementer (se definisjon s. 12). Fleksibilitet rommer ulike tilnærmingsmåter og tilpasninger til situasjonen. Tilsynelatende riktighet, plausibilitet, er når argumentasjonen i resonnementet er begrunnet og satt sammen av komponenter med matematisk innhold. Argumentene kan her beskrives som kvalitative gjetninger, vage intuisjoner eller følelsesmessige begrunnelser som ikke er nøye overveid.
For at et kreativt resonnement skal ha et matematisk fundament, må argumentasjonen i resonnementet bygge på og inneholde vesentlige matematiske egenskaper.
Jeg vil komme tilbake til kreativt resonnement under analysen i kapittel 6.

I det videre arbeidet ønsker jeg å bruke betegnelsen resonnement for hvilken som helst form for av begrepet så lenge det kan forbindes med elevenes tankeprosesser i matematikk - undervisningen. En snever tolkning av begrepet, vil hemme hensikten med prosjektet mitt.

2.2.2 Nivåinndeling av elevers resonnement

Evnen til å resonnere, eller det som Niss og Højgaard Jensen (2002) kaller resonnementskompetanse, innebærer blant annet å kunne tenke ut og gjennomføre et elementært matematisk resonnement, dvs. en kjede av matematiske argumenter. De beskriver en evne satt sammen av mange komponenter og skisserer hvordan kompetansen kan utvikles og utvides gjennom undervisningsforløpet i grunnskolen. Det er viktig å være bevisst denne utviklingen og de ulike nivåene. I tillegg er det nyttig å kunne gradere eller nivåinndele elevenes resonnement innenfor et enkelt klassetrinn og kanskje innefor en enkelt oppgave.

I følge Brousseau og Gibel (2005) kan et resonnement klassifiseres i nivåer i henhold til funksjon og situasjon. Det er mulig å skille mellom flere nivåer av mer eller mindre degenererte (vage) slutninger. De deler inn slutninger eller resonnementer inn i tre ulike nivåer, N3, N2 og N1 hvor N3 er det høyeste nivået og N1 det laveste. Nivåene bygger på Brousseau og Gibel sin definisjon av et resonnement fra avsnitt 2.2.1.

- N3, resonnering på nivå 3, defineres som et fullstendig og formelt resonnement basert på en rekke av korrekte, sammenhengende slutninger. Resonnementet refererer tydelig til elementene i situasjonen eller til den kunnskapen som betraktes som felles for elevgruppen. Resonnering på nivå 3, karakteriseres av en kontrollert og vurdert sitasjon. Karakteristisk for en slik situasjon er at man avgjør om noe er riktig eller galt. Det påstås ikke at dette resonnement er korrekt. For eksempel kan logikken kan være riktig, men konklusjonen kan til tross for dette være feil.

- N2, resonnering på nivå 2, defineres, formelt sett, som et ufullstendig resonnement. Her er det hull eller åpninger som kan betraktes som underforstått gjennom aktiviteten. Resonnementet ses ikke på som en fullstendig formulering fordi det mangler en begrunnelse eller et bevis. N2-resonnement spiller en viktig rolle i muntlig aktivitet.

- N1, resonnering på nivå 1, defineres som et resonnement, men er i henhold til definisjonen (se s.), ikke er formet som et. Et N1-resonnement er en modell av en aktivitet utført av et subjekt. Her er subjektet han eller hun som resonnerer. I mitt tilfelle er subjektet eleven, og han eller hun tillegges denne formen for resonnement på bakgrunn av det han eller hun gjør.

Det er viktig å bemerke at et resonnement på nivå 3 nødvendigvis ikke trenger å være korrekt, men at det kan være det.
Jeg ønsker å bruke resonnementsnivåene inn i den aksjonen jeg skal gjennomføre for mulig å kunne utvikle elevenes resonnement. I kapittel 3.1 kommer jeg tilbake til hvordan jeg vil gjøre dette. Jeg vil også benytte Brousseau og Gibels nivåinndeling i analysen av det innsamlede materialet i kapittel 5.

2.2.3 Klassifisering av elevers resonnement

Elevenes resonnementer kan klassifiseres på andre vis enn ved nivåinndeling. Baroody (1993) deler inn resonnement i tre hovedtyper:

1. Intuitivt resonnement
2. Induktivt resonnement
3. Deduktivt resonnement

Baroody bruker uttrykket ”playing a hunch” når han forklarer hva et *intuitivt resonnement* er. Jeg oversetter det med å leke med eller spille på et innfall eller en ide som naturlig dukker opp i den gitte situasjonen. Eleven har ikke all den informasjon som er nødvendig for å trekke en beslutning. Hun bygger sin konklusjon på en klar og tilgjengelig kjennskap eller innsikt som føles åpenbart eller som gir en god følelse. Et intuitivt resonnement kan bygge på en antakelse som er misledende eller feil. På denne måten kan en intuisjon vise seg å være korrekt, men også vise seg å være ukorrekt.

Et *induktivt resonnement* viser at en regel gjelder for noen eksempler eller i enkelte tilfeller, men ikke for alle. Derfor kan et slikt resonnement alene ikke påvise at en konklusjon er sann. En induksjon kan fremstille en konklusjon som er sann i spesielle tilfeller. Dette resonnementet er ikke en form for generalisering hvor konklusjonen gjelder under alle omstendigheter.

Et *deduktivt resonnement* har på samme måte som et plausibelt resonnement, høy kvalitet. Resonnementet har likevel sine begrensninger og kan misbrukes. Her trengs en fast fundamentering som gjenspeiles i forutsetningene i form av logisk argumentasjon. Et deduktivt resonnement garanterer en sann konklusjon hvis:

a) forutsetningene for argumentet er sant og
b) argumentet er logisk eller gyldig

Disse tre hovedinndelingene for typer av resonnement vil jeg komme tilbake til i kapittel 6 når jeg skal analysere 11 åringenes resonnement.

2.2.4 Utvikling av elevers resonnement

Det ikke enkelt for en lærer å vite hvordan det er mulig å stimulere til en utvikling av elevers evne til å resonnere matematisk. I tillegg er det viktig å huske på at store deler av denne tankeprosessen ikke er synlig for en utenforstående fordi at den foregår mentalt i hver enkelt elev (Bjuland, 2002).

> Även om man betraktar en enskild elev är det svårt att beskriva utvecling och progression av matematikkunskaperna. Visserligen får eleven erfarenheter från allt fler områden inom matematiken alltefter som hon går genom skolsystemet, men det finns många fundamentala matematiska förmågar som man inte har nogon kontroll alls över (Helenius, 2006).

Helenius tenker her blant annet på evnen til det å kunne resonnere matematisk. Han har gått gjennom lærebøker for å se om det finnes oppgaver som kunne ha støttet elevene i en slik utvikling. Men han har bare funnet oppgaver hvor progresjonen går ut på at elevene skal vise at de behersker å regne med andre eller større tall. Oppgaven endrer ikke karakter og derfor trenger ikke elevene å resonnere på en annen måte for å løse neste oppgave. Resonnementet er ferdig når elevene har løst første oppgave og i så måte kan de i liten grad lede til en utvikling av elevers evne til å resonnere.

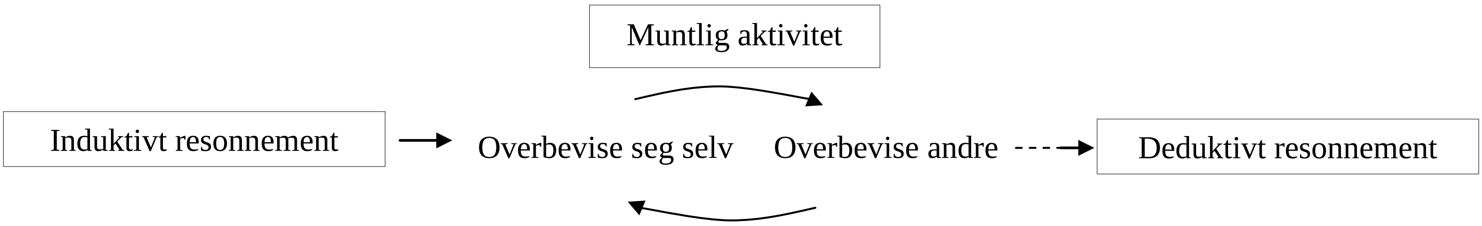
Bjuland (2002) sammenligner sin forskning med andres og mener at det er visse typer aktiviteter som kan stimulere til utvikling av elevenes resonneringsevne. Dette er aktiviteter som engasjerer elevene i former for utforsking, undersøkelser, beskrivelser og forklaringer. I tillegg må undervisningsmiljøet preges av en åpenhet som tillater elevene å gjette, til å ta sjanser og komme med ideer eller bruke resonnement som nødvendigvis ikke er fullstendige.

Mason og Davis (1991) beskriver dette støttende og positive miljøet som et miljø preget av ”conjecturing atmosphere”.

Kollektiv argumentasjon (Miller, 1986 i Bjuland, 2002) er et begrep som beskriver den sosiale lærings-prosessen hvor det forhandles om en mening. Kjernen i aktiviteten framheves ved den interaksjonen som skjer mellom flere deltakere ansikt til ansikt. Det er her selve læringsprosessen foregår. I løpet av samspillet skal de involverte forsøke å presentere sine ideer på en overbevisende og en gyldig måte.
Elevene må også ha noe å samarbeide om (Johnson og Johnson, 1989). Det finnes oppgaver som egner seg for samarbeid, og oppgaver som passer best å løse individuelt. Oppgavene jeg designer bør formuleres slik at de innbyr og motiverer til samarbeid. Det skal føles naturlig for elevene å samarbeide om oppgavene.

Innlæring av matematiske ferdigheter skjer best i en dynamisk prosess hvor elevene engasjerer seg (Ahlberg, 1991). En eller annen form for samarbeid mellom to eller flere elever, kan være et eksempel på en slik dynamisk prosess. Problemløsning fungerer best når elevene samarbeider og får forklare for hverandre hvordan de resonnerer (ibid.). Det vil si at når elever samarbeider om problemløsningsoppgaver, så kan arbeidsprosessen løfte fram og fremme elevenes resonnement. Det blir naturlig for elevene å forklare for hverandre hvordan de tenker og resonnerer fordi sitasjonen rundt er lagt til rette for det.

For at elever skal kunne være i stand til å komme med deduktive argumenter mener Bjuland (2002) at det er viktig å arbeide med resonnementsprosesser som innebærer kvalitative gjetninger (conjecturing) og overbevisninger (convincing). Disse to formene for matematisk tenkning henger tett sammen og egner seg godt å formidle muntlig. Samtaler i klasserommet hvor elever kvalitativt gjetter og overbeviser, kan være en måte å utvikle elevenes resonnement på, dvs. å gå fra et induktivt resonnement mot et deduktivt resonnement.
Et av elementene i min definisjon av det å resonnere, var å argumentere overbevisende. Det å gjette og overbevise er grunnlaget for det å kunne argumentere (ibid.).
Mason og Davis (1991) mener at en slik argumentasjon utvikles gradvis. Først må eleven kunne gjette og overbevise seg selv om at hans argument holder. Deretter må han finne en måte å overbevise noen andre slik at de ser og oppfatter det samme som han gjør. Denne prosessen gjentas.
Ut fra Bjuland (2002) og Masons og Davis (1991) teorier, kan hele denne resonnementprosessen illustreres på følgende måte:



Resonneringsprosessen som beskrives ovenfor, ligger nært opp til det jeg i avsnittet over betegnet som en *kollektiv argumentasjon.*

2.3 Rike matematiske oppgaver

Rike matematiske oppgaver er en spesiell type problemløsningsoppgaver. Slik jeg skrev i innledningen skal problemløsning her bety oppgaver hvor løsningsmetoden er uklar for problemløseren (Björkqvist, 2003). I tillegg ønsker jeg å betrakte problemløsningsoppgaver som oppgaver hvor det både kreves arbeid, tankevirksomhet og anstrengelser fra en person for å finne en løsning (Hedrén m. fl., 2005).

Et problem kan for noen elever være en rutineoppgave eller en rekonstruksjon av en oppgave de har løst tidligere, mens for andre kan samme oppgave være en utfordring. Det er altså relasjonen mellom individet og oppgaven som avgjør om oppgaven er et problem eller ikke (Ahlberg, 1992, s. 8). Det er interessant at Hedrén m.fl.(2005) også definerer et problem som en matematisk oppgave som en person har lyst til eller ønsker å løse.
Ut fra dette og sagt på en enkel måte, ser jeg på en problemløsningsoppgave som en interessant matematisk utfordring.

Rike matematiske problemer kjennetegnes ved sju kriterier (min oversettelse):

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.
3. Problemet skal oppleves som en utfordring, kreve anstrengelse og tillates å ta tid.
4. Problemet skal kunne løses på ulike måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal kunne initiere en matematisk diskusjon som viser til ulike strategier, representasjoner og matematiske ideer.
6. Problemet skal fungere som en brobygger mellom ulike matematiske områder.
7. Problemet skal kunne lede elever og lærer til å formulere nye interessante problemer.

Ved å ta utgangspunkt i kriteriene ovenfor, vil kvaliteten i oppgavene sikres og matematikken stå i fokus. I rike matematiske problem er spørsmålsformuleringer eller videreutvikling av problemet en naturlig del av arbeidet. Spørsmålene kan enten formuleres av elevene, læreren eller av elever og lærer i fellesskap. Dette kommer jeg tilbake til i neste kapittel.

Forfatterne presenterer disse kriteriene for rike problemer slik at oppgavetypen mer eller mindre skal oppfylle kravene i alle sju punktene ovenfor. Kriteriene rangeres ikke, og skal tolkes slik at de har samme styrke.
I de fleste sammenhenger mener jeg at sju kriterier kan gi for stramme rammer å arbeide etter. Ut fra forskningsprosjektet er noen av kriteriene mer sentrale enn andre. Derfor velger jeg å fokusere på de tre kriteriene 1, 2 og 7.

Kriterium 1 : Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller løsningsstrategier.

> Vi anser att det är viktig arbetet med ett rikt problem hjälper eleverna att komma i kontakt med viktiga matematiska begrepp och procedurer. Eleverna ska inspireras att använda sig av sådane matematiska idéer, som hon redan tidligare stiftat bekannskap med, men också känna ett behov av att lära sig tidligare okände begrepp eller att pröva för henne nya procedurer och tekniker.
>
> Hedén m. fl (ibid.)

For å kvalitetssikre at de oppgaver har et matematisk innhold må læreren velge eller designe oppgaver som inneholder den matematikken han eller hun vil at elevene skal arbeide med. Elevene skal kunne bruke basiskunnskapene sine på nye problemstillinger og i nye kontekster. Læreren må ofte hjelpe elevene til å kunne kjenne igjen matematikken i ulike sammenhenger.
Følgende oppgave er et eksempel på et problem hvor elevene skal komme i kontakt med matematiske ide. Elevene skal her finne et mønster i et fordelingssystem av drops:

Det er tre barn og de skal dele 5 drops. På hvor mange ulike måter kan de fordele dropsene hvis alle skal få minst et drops?

Hva hvis det var 7 drops? Hva hvis det var 10 drops? Finnes det noe mønster?

Denne oppgaven leder til et system og et mønster hvor antall ulike måter å fordele et bestemt antall drops på, bygger på summen av de naturlige tallene også kjent som trekanttallene. Drops-problemet er et eksempel på et problem som kan løses fra det konkrete til det generelle. Tanken med dette problemet er at elevene kan starte med det nære og konkrete, via muligheten til å oppdage matematiske mønstre for så tilslutt å komme fram til et generelt uttrykk eller en formel (Hagland, 2006).

Kriterium 2: Problemet skal være lett å forstå og alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.

Det at et rikt matematisk problem kjennetegnes ved at det er lett å forstå og dermed lett å komme i gang med, gjør at oppgaven kan tilpasses til mange elever. Med andre ord kan man si at en rik oppgave har lav inngangsterskel. Differensieringsaspektet er ivaretatt. Dette er ikke det samme som at oppgaven er lett. Hensikten er at elevene skal føle at de har en evne til å arbeide med problemet, og målet er ikke at alle elever skal nå like langt. Alle elever skal klare å løse en bit av problemet.

En rik oppgave har også mange utvidelsesmuligheter slik at de elevene som trenger faglige utfordringer også får dekt sine behov.

Kriterium 7: Problemet skal kunne lede elever og lærer til å formulere nye interessante problemer.

Dette kriteriet fokuserer på læringsprosessen. Elever løser først et problem med matematisk innhold og oppfordres deretter til å stille nye spørsmål inspirert av det opprinnelige problemet og løsningsprosessen.

Den nye problemformuleringen bygger på de erfaringene elevene har ervervet seg under arbeidet med den opprinnelige oppgaven. Elevene får på denne måten kontakt med og kjennskap til det matematiske innholdet i oppgaven. Har ikke elevene ikke fått tak i matematikken, vil dette avsløres i den nye spørsmålsformuleringen.

Spørsmålsformuleringer til elevene sier mye om deres forståelse, hvordan de har oppfattet innholdet, tenkt matematisk og tolket problemet. Oppgavene elevene formulerer har også en hensikt og et mål. Elevene skal løse den oppgaven de selv har laget.

Å la elever stille spørsmål til en oppgave som de har arbeidet med og løst er noe annet enn å la elever formulere helt nye problemer. Dette ligger ikke innenfor rammene til kriterium 7.

Som Taflin (2003) hevder, så forutsetter problemløsning mange ulike kunnskaper og ferdigheter. Hun mener et av de viktigste aspektene ved problemløsning er å skape en matematisk diskurs. Rike matematiske oppgaver egner seg godt til å løse som samarbeidsoppgaver fordi de innbyr elevene blant annet til å diskutere, komme med løsningsforslag og vurdere løsninger. Den matematiske dialogen er vesentlig både i undervisningen og for å utvikle det eleven skal lære. Derfor bygger jeg på disse forutsetningene.

2.4 Spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen

Å spørre med fornuft er halvt å vite (Aritoteles).

Å la elever stille spørsmål uten å ha noe kunnskap om hva de skal spørre om, har liten verdi for læring. Som lærer må jeg sørge for at elevene har en bakgrunnskunnskap som kan hjelpe og støtte elevene når de skal formulere egne spørsmål.
Jeg vil her presentere ulike teorier om spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen, og hvordan og hvorfor de kan brukes som et pedagogisk hjelpemiddel til å fremme elevers matematisk resonnement. En god læringssituasjon i denne sammenhengen, legger opp til at det skal stilles spørsmål, kanskje først fra læreren, og senere fra elevene. Lærerens ”hvorfor” skal bli til elevenes ”hvorfor” (Skovsmose, 2003). Elevene må lære å stille spørsmål.

Spørsmålsformuleringer kan ses på som et pedagogisk virkemiddel eller metode. Silver (1994) mener at det å stille spørsmål er en form for en kreativ aktivitet som kan utvikle matematisk talenter eller egenskaper. Spørsmålsformulering bør fremheves som en del av de utforskende aktivitetene elever kan tilnærme seg matematikkfaget på. Han mener at spørsmålsformulering er en disiplin som ligger i matematikkens natur. Matematiske problemstillinger oppstår ofte når en kjent løsning skal generaliseres, eller når hypoteser skal framstilles. I denne prosessen, fra det spesielle til det generelle, dukker problemstillinger ofte opp som et under-problem av det overordnede matematiske problemet.

Spørsmål kan stilles i forkant, underveis eller etter at elevene har funnet en løsning på problemet. Jeg vil konsentrere meg om spørsmål som stilles i etterkant av en problemløsningsoppgave. Etter at man har løst et problem, så forstår man ofte ikke helt betydningen eller rekkevidden av den løsningen man har kommet fram til. Det skjer først ved en generalisering hvor man prøver å analysere en klasse av lignende problemer (ibid.). Spørsmålene som elevene formulerer, kan enten være en reformulering, en omformulering av det opprinnelige problemet eller så kan det opprinnelige problemet inspirere elevene til å stille andre typer spørsmål.
Brown og Walter (2005) mener at spørsmålene ”What-if?” og ”What-if-not?” oppmuntrer elevene til å se et problem i et annet lys. Kriteriene i oppgaven endres mens selve fenomenet

forblir slik det var i det opprinnelige problemet. Forfatterne mener at det å se noe som noe annet enn det opprinnelige, gir en dypere forståelse.

I følge Silver (1994, s. 19) er spørsmålsformulering en prosess da elevene transformerer en gitt setting av et problem inn i en ny versjon. Denne transformasjonsprosessen ser jeg på som en del av den læringsprosessen elevene går igjennom under arbeidet med en oppgave. Å formulere spørsmål blir en naturlig del av denne arbeids- og løsningsprosessen. Spørsmålsformuleringene leder mot nye problemstillinger som kan ses på som under-oppgaver til et større matematisk problem. Denne muligheten kan igjen utnyttes i undervisningssituasjonen ved å la elevene undersøke og analysere klasser av problemer.

Silver (ibid.) hevder at ressursen eller styrken i det opprinnelige problemet ligger utenfor elevens kontroll og bevissthet. Han mener at denne ressursen, som jeg tolker som det matematiske innholdet i oppgaven, først kommer til syne for elevene når de fordyper seg i problemet. Når elever setter seg grundig inn i et matematisk problem, har elevene et bedre utgangspunkt for å formulere nye spørsmål eller nye problemer.
Lærerens rolle er sentral i denne prosessen. Han må være bevisst på samspillet mellom seg og elevene. Undervisningsatmosfæren som er skapt av læreren, legger opp til at det er naturlig at både elever og lærer stiller spørsmål. Læreren må hele tiden oppmuntre, lytte, gi hint og stille delspørsmål.

Ikke overraskende finnes det en sammenheng mellom det enkelte subjekts matematikkunnskap og kvaliteten på de spørsmålene som blir formulert (Leung ,1993, i Silver, 1994). Når elever formulerer spørsmål så baseres disse på elevenes egne erfaringer og interesser. Elevene er friere og mer åpne for nye ideer og tenkemåter sammenliknet med en voksen som kan være mer opphengt i ulike metoder og tradisjonell tenking. Dette kan igjen føre til at spørsmålene elevene formulerer leder til andre typer løsninger. Om et nytt problem har en enkel løsning eller ikke noe løsning i det hele tatt, er vanskelig å forutse. Men det er ikke viktig i denne prosessen.

Leung (ibid.) har forsket på 6.klassinger og hvordan disse formulerer spørsmål. Elevenes spørsmålsformuleringer gjør at de får et mer personlig eierforhold til problemet og dermed matematikken. Dette kan motivere den enkelte slik at interessen for og dermed prestasjonene i matematikk øker. Burton m.fl. (1999) beskriver dette eierforholdet som en form for et forfatterskap. De betrakter elevene som “authors in the mathematics classroom”.

Silver (1994) mener også at spørsmålsformulering er en måte for elever å tilegne seg kunnskap på. Ikke at dette er en bedre metode sammenlignet med andre, men at det fungerer som et verktøy og et virkemiddel i undervisningssammenheng.
Det er på denne måten jeg ønsker å bruke spørsmålsformuleringer for støtte opp under og fremme elevenes matematiske resonnement.

2.5 Interaksjonen mellom rike matematiske oppgaver og spørsmålsformuleringer i undervisningen

Problem posing, along with problem solving, is central to the discipline of mathematics and the nature of mathematical thinking (Silver, 1997).

Silver peker her på kjernen i matematikk og matematisk tenkning. I skolematematikken kommer vanligvis spørsmålene fra en utenforstående kilde, enten fra læreboka eller læreren. Mens i den ekte matematikken er det å formulere nye spørsmål det helt sentrale i det å gjøre matematikk. Det kan være i forbindelse med generalisering av et kjent resultat eller som foreløpige gjetninger for å komme fram til en arbeidshypotese.

Silver snakker om kreative aktiviteter i matematikkundervisningen hvor spørsmålsformuleringer er en del av denne aktiviteten. Den kreative aktiviteten skjer som en respons eller en tilbakemelding på det han kaller et innspill her gitt i form av et matematisk problem. Han knytter tre nøkkelord til kreativitetsbegrepet:

1. Flyt (fluency).
2. Fleksibilitet (flexibility).
3. Originalitet (novelty).

Flyt refererer til mangfoldet av ideer som produseres som en respons på et innspill. Fleksibilitet henviser til evnen til å være fleksibel i form av å endre og tilpasse tilnærminger til ulike og nye innspill. Originalitet er å utvikle og produsere nyskapende ideer med utspring i et innspill. Silver hevder at den kognitive prosessen som utledes via denne kreative aktiviteten, skjer i interaksjonen mellom problemløsning og spørsmålsformuleringer (Silver, ibid., s. 76).

Silver (1994) mener at det potensiale som ligger i det å formulere spørsmål, kan fremme elevers kompetanse i problemløsning. Han kjenner ikke til at det er funnet noen sammenheng mellom kompetansen i det å kunne formulere spørsmål og kompetansen i det å løse problemer.

Brown og Walter (2005, s. 111) er også av samme oppfatning. De presiserer at problemløsning og spørsmålsformuleringer utfyller og løfter hverandre på mer eller mindre finurlige måter. Ved å betrakte og videre utforske et problem, kan uventede trekk i det opprinnelige problemet tre tydeligere fram. For å løfte fram elevenes resonnement og tenkning, oppfordrer forfatterne til at lærere og elever skal spørre ”why” (hvorfor er det sånn?). Elevene skal prøve å komme med en forklaring som gjenspeiler den forståelsen og den innsikten den enkelte har av situasjonen. Dette er en annen metode for å nyttiggjøre læringsaspektet som ligger i interaksjonen mellom problemløsning og spørsmålsformuleringer. Her har jeg som lærer mulighet til å få innsyn i elevenes resonnement.

3 Metode

Min undersøkelse kan forstås som et designeksperiment innenfor rammene av aksjonsforskning. Min hypotese er at det er mulig å fremme elevers resonnement når de får arbeide med rike matematiske oppgaver. Kvaliteten på spørsmålsformuleringer knyttet til oppgavene, vil også være en viktig forutsetning for å stimulere elevenes resonnering. Oppgavene jeg har laget og de rammene jeg setter for undervisningen, mener jeg skal fungere som et redskap for å løfte fram og påvirke til en slik resonnering.

Hvordan kan jeg finne spor av elevens matematiske resonnementer? Hvilke merker vil finnes etter aksjonsprosessen som kan være interessante å analysere? Noen spor av elevens resonnementer vil finnes i det skriftlige materialet fra arbeidet med de tre oppgavene. Jeg samler inn alle elevarbeider fra perioden. I tillegg vil jeg ta lydbåndopptak av samtaler mellom to og to elever når de samarbeider om å løse oppgavene. Rett etter undervisningsøkta ønsker jeg å intervjue to elever slik at de kan forklare og utdype hvordan de løste den siste oppgaven. Jeg vil ta opp dette på lydbånd. Intervjuet vil være en form for et ”stimulated recall” (Nunan , 1992), dvs. en samtale for å kunne tilbakekalle hva elevene gjorde når de løste oppgaven og få fram hvordan de tenkte.
Jeg vil også ta lydbåndopptak av enkelte oppsummeringer i lyttekroken.
I tillegg vil jeg bruke mine egne notater fra aksjonsperioden som en del av mitt datamateriale.

I aksjonsperioden er det jeg som er hovedlærer og arbeidsleder for elevene. Kontaktlærer skal være tilstede og vil fungere som en ekstra lærer. Hun vil i forkant av hver undervisningsøkt få en plan for hva som skal skje, hvilke mål jeg har for undervisningen, samt en presentasjon av oppgaven/e. Hun vil da kunne, på lik linje med meg, hjelpe elevene under arbeidet med oppgavene.
Jeg må være min bevisst min dobbeltrolle som lærer og forsker. Det er lett å miste oversikten, overblikket og ikke minst fokuset for forskningen når man er midt i en undervisningssituasjon. Jeg må prøve å få en viss distanse til det innsamlede materialet for at analysen skal bli best mulig.

Jeg deler analysen av det innsamlede materialet i to. I den første delen ønsker jeg å analysere elevenes resonnementer, for å kunne si noe om hvilke former for resonnementer jeg har løftet fram. Her betrakter jeg de tre oppgavene, med tilhørende innsamlet materiale, hver for seg. Til å analysere elevenes resonnementer bruker jeg Brousseau og Gibels (2005) nivåinndelinger i analysen. Jeg vil analysere enkeltresonnementer og grupper av resonnementer. Analysen vil også brukes til å finne fellesetrekk i elevenes forklaringer. Da kan jeg antyde visse trekk ved 11-åringers matematiske resonnement.

I andre del ønsker jeg å bruke analysen til å finne andre kvaliteter ved elevenes resonnementer enn det som kom fram ved bruke av nivåinndelingen i første del av kapittelet. Her vil jeg betrakte hele det innsamlede materialet under ett. Baroody (1993) og Lithner (2006) sine definisjoner på ulike former for resonnementer er nå analyseverktøyet sammen med Bjulands (2002) teorier om resonnement som del av en utviklingsprosess.

Jeg vil gå dypere inn i teorier for aksjonsforskning og designeksperiment for å begrunne valgene mine.

3.1 Aksjonsforskning

This is a study of social situation with a view to improving it. Action research must be undertaken collectively (…). Any group with a shared problem can take this up, as action research is done by the participants, not by outsiders.

Slik beskriver Redding-Jones (2005, s. 69) kort hva aksjonsforskning går ut på. Samspillet og samarbeidet mellom to likeverdige parter, læreren og forskeren, står sentralt, og begge har samme mål, nemlig et ønske om endring eller utvikling av praksis. De utfører handlinger for å nå dette målet. Læreren kan betraktes som en medforsker.

Aksjonsforskning kjennetegnes ved:

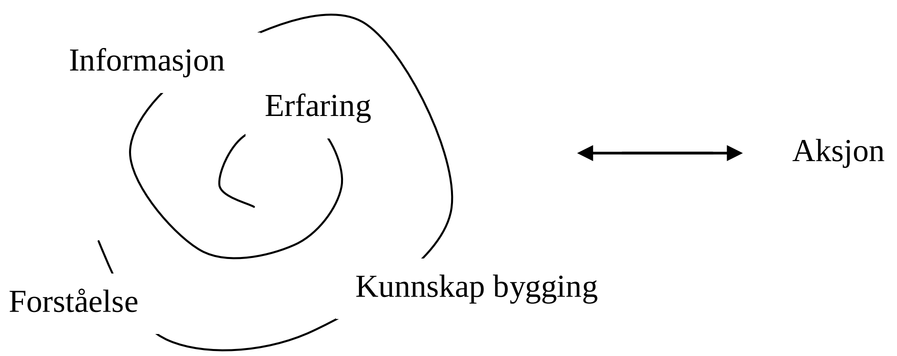
- Nøye planlegging før oppstart:

1. Læreren og forskeren vurderer situasjonen på det aktuelle fagområdet i klassen/gruppen.
2. I samarbeid med læreren utvikler forskeren aksjoner ut fra hva som er sitasjonen i klassen /gruppen.

- Syklus som gjentas:

1. Aksjonen vurderes kontinuerlig.
2. Aksjonen justeres og utvikles underveis.

Wells (1999) ser for seg denne syklusen som en spiral og har kalt den for kunnskapsspiralen (the spiral of knowing). (Se illustrasjon neste side). Spiralen inneholder fire begreper: *forståelse* (understanding), *kunnskapsbygging* (knowledge building), *informasjon* (information) og *erfaring* (experience). Kunnskapsspiralen og aksjonen påvirker hverandre gjensidig.
Som tidligere nevnt vurderes aksjonen kontinuerlig. Dette fører til at en syklus justeres eller utvikles ut fra de erfaringer foregående syklus og aksjon har gitt. Det medfører en endring i neste aksjon. De erfaringer man sitter igjen med etter siste syklus, påvirker oppstarten i en ny syklus. Forståelsen, som er det første leddet, er nå justert og til en viss grad utviklet sammenlignet med forrige syklus. Kommende aksjon har et annet utgangspunkt sammenlignet med den forrige, og det vil alltid være slik at forrige aksjon vil påvirke kommende aksjon. En ny aksjon vil igjen justere eller utvikle forståelsen av fokuset for aksjonen. Syklusen gjentas fram til aksjonen er avsluttet.



Rhedding-Jones (2005) ser på justering og utvikling av sykluser som kritiske endringer. Det er lærer og forsker som bestemmer hvilke endringer som skal utføres ut fra observasjoner,

refleksjoner over egen undervisning, gjennom forhandlinger og diskusjoner. Lærer og forsker gjør seg erfaringer og prøver å lære av disse erfaringene.
Aksjonsforskning kan på denne måten ses på som en systematisk og strukturert form for forskning.

Jeg velger å bruke aksjonsforskning fordi det er en metode til å fremme refleksjon over praksis på. Jeg kan også via mitt forskningsprosjekt være med på til utvikle den praksisen jeg forsker på. Aksjonsforskning tar utgangspunkt i den praksisen som allerede eksiterer. Jeg mener at for å kunne utvikle praksis, så må man først prøve å forstå og utforske den eksisterende praksisen.
For å kunne fremme elevers matematiske resonnement, må jeg først løfte fram de eksisterende elevresonnementene. Jeg vil via en aksjon, hvor jeg justerer og endrer enkelte elementer ved undervisningen, påvirke elevenes eksisterende resonnementer for å kunne styrke og utvikle disse.

Et av målene for aksjonsforskning, slik jeg ser det, er at både at lærer, forsker og elever utvikler seg og lærer. Det er viktig for meg at min forskning også kommer elevene til gode. Aksjonsforskning kjennetegnes ved regelmessige og gjentatte av forløp. Forskningen gjenspeiler den aktiviteten jeg planlegger i klasserommet med fokus på rike oppgaver og spørsmålsformuleringer.
Målet for min forskning er sammenfallende med målet for aksjonsforskning nemlig å forberede praksis, produsere kunnskap og dokumentere endringsprosesser og forbedret praksis (Madsen, 2004).

I forkant av aksjonen var jeg nødt til å kjenne til teorier om ulike former for resonnementer og hvordan resonnementer kunne graderes etter kvalitet og innhold. For å kunne påvirke og eventuelt utvikle elevenes resonnementer, måtte jeg se elevenes resonnementer som en del av en utviklingsprosess. Ut fra teorien jeg hadde tilegnet meg kunne jeg peke på hva som kunne påvirkes og eventuelt utvikles i elevens resonnementer.

Jeg støttet meg Brousseau og Gibels (2005) nivåinndelinger og Baroodys (1993) klassifiseringer av resonnementer når jeg i forkant skisserte noen mulige steg for aksjonen:

<u>Aksjon 1:</u> For å fremme elevenes eksisterende resonnement, vil jeg på tavla skrive ned et par eksempler på hvordan elevene kan starte når de skal forklare og resonnere. Jeg kaller disse eksemplene for hjelpesetninger og elevene står fritt i å bruke dem eller ikke.

Aksjon 2: Oppmuntre elevene til å bruke myntene når de forklarer.

Aksjon 3: Prøve å få elevene til å se mønsteret/systemet/felles trekk i regnestykkene. Oppmuntre elevene til å nærme seg generalisering for å prøve å få elevene til å uttrykke dette i resonnementene sine.

Ovenfor beskriver jeg hva som kan justeres og utvikles i elevenes resonnementer. Aksjon 2 og 3 er en del av den kommende aksjonen. Da vil jeg fokusere på hvordan jeg skal fremme elevenes resonnementer. I den kontinuerlige vurderingen av aksjonen vil jeg sammen med lærer, støtte meg på Wells (1999) kunnskapsspiral.

3.2 Designeksperiment

Et designeksperiment skal kunne utvikle nye teorier. Vi kan se på en undervisningssituasjon som et komplekst system bestående av et mangfold av elementer av ulik art og på ulike nivå. Disse elementene vil innbyrdes ha en innvirkning på hverandre. I et designeksperiment er hensikten å velge ut og utvikle noen elementer som sammen støtter opp under læring.

> We use the metaphor of an ecology to emphasize that designed contexts are conceptualized as interacting systems (…). Cobb m. fl., 2003, s. 9.

Hensikten med å bruke metaforen er å synliggjøre at design eksperiment skjer i et samhandlende system. Det er ikke en liste med ulike faktorer heller ikke en oppramsing av aktiviteter.

I mitt tilfelle er oppgavene og spørsmålene jeg har designet, en del av det samhandlende systemet. Forskningsspørsmålet mitt er om disse faktorene kan fremme 11-åringers resonnement. Rike matematiske oppgaver og spørsmålsformuleringer er bare en del av det komplekse systemet som støtter opp under læring. Merk at oppgavene er laget ut fra mine forkunnskaper om elevene. Jeg kjenner til at elevene har utviklet ferdigheter og opparbeidet erfaringer med samarbeidslæring, og er fortrolige med denne arbeidsformen.

Målet for et designforskning er å komme fram til et produkt, en metode eller tilnærmingsmåte som kan brukes uten at forskeren er tilstede. Innefor designeksperiment tones fokuset på produktet noe ned. i følge Cobb m.fl. (ibid.), gjennomføres et designeksperiment, for å utvikle teorier, ikke først og fremst vise hva som virker.

3.3 Datamateriale

Jeg ønsker å bruke problemløsningsoppgaver som et verktøy for min datainnsamling om elevers resonnementer fordi:

- Denne oppgavetypen kan vekke elevenes nysgjerrighet på en måte som gir dem lyst til å arbeide med problemet (Hedrén m.fl., 2005).
- Oppgavetypen forutsetter og leder til mange ulike ferdigheter og kunnskaper (Taflin, 2003).
- Elleveåringers matematiske resonnement kan fremmes ved problemløsningsoppgaver. I følge Ahlberg (1992) er problemløsning en resonnementsprosess.

Oppgavene er et redskap for å fremme elevenes matematiske resonnement. Sporene av elevenes resonneringsprosesser kan kobles nært opp til de ulike fasene i arbeidet med oppgavene. Derfor må jeg få tak i sporene og hva som skjer når elevene løser oppgavene.

En stor del av resonneringsprosessen foregår inne i den enkelte elevs hode, men deler av denne vil komme til utrykk under den muntlig aktivitet mellom to og to elever eller mellom elevene og lærer. Deler av elevenes muntlige resonnementsprosess vil kunne spores i det skriftlige arbeidet.

Jeg har innledningsvis i dette kapittelet beskrevet hvordan jeg vil samle inn mitt datamateriale.
Jeg ønsker å ta lydbåndopptak av to og to elever når de arbeider med oppgavene. I etterkant av undervisningen vil jeg intervjue to elever som har samarbeidet om en oppgave. Dette intervjuet vil jeg ta opp på bånd.

I samarbeid med den medforskende læreren, valgte vi ut elever fra gruppen som er gode til å sette ord på hvordan de tenker, som er muntlig aktive og er flinke til å samarbeide. Læreren bestemte ut fra dette, hvilke elever som parvis skulle samarbeide. Vi tok hensyn til elever som hadde reservert seg.

Tilslutt hadde jeg ei liste med 4 – 5 elevpar hvor alle sa seg villige til å bli intervjuet eller til å ha en lydbåndopptaker liggende på pulten mens de samarbeidet om en oppgave. Jeg valgte å starte med to av elevparene, men ville i aksjonsperioden stå fritt i å velge hvilke/n av de 4 – 5 parene fra den utvalgte gruppen jeg ønsket å fokuserte på.

3.4 Oppgavene

Jeg har valgt ut og satt sammen tre oppgaver og kalt disse for iskremoppgaven, myntproblemet og dagens tall.
Hvorfor ble oppgavene slik de ble? Utgangspunktet for oppgaveformuleringene er de tre utvalgte kriteriene til rike matematiske oppgaver (se s. 19-20).

1. Oppgavene skal introdusere viktige matematiske ideer eller løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal kunne komme i gang og ha muligheter til å arbeide med det.
3. Problemet skal kunne lede elever og lærer til å formulere nye og interessante spørsmål.

Hvorfor akkurat disse tre oppgavene? Sammensetningen av oppgavene måtte fungere i en aksjonssammenheng. Det var gunstig om oppgavene kunne ha noen likhetstrekk, de skulle til en viss grad bygge på hverandre, men det skulle også være en progresjon mellom dem.
Jeg mener utformingen av oppgavene ble påvirket av teorier jeg hadde lest om ulike former og nivåer av resonnementer, teorier rundt problemløsning og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen og ikke minst mine egne erfaringer som lærer.

Nedenfor presenterer jeg kort de tre oppgavene. Selve oppgaveteksten er skrevet i kursiv.

Iskremoppgaven

A. Du skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire forskjellige smaker. Du vil kjøpe to kuler is.
På hvor mange måter kan du sette sammen den isen du vil kjøpe?

B. Lag et lignende problem og løs det.

Myntproblemet

Ettersom myntproblemet er en oppgave hvor det ikke finnes en løsning, valgte jeg å la elevene først få arbeide med et nært beslektet problem med to løsninger. Oppgave A er laget som en introduksjonsoppgave til oppgave B.

A. Jeg har åtte mynter i lomma, og jeg har til sammen 50 kroner. Hvilke mynter har jeg i lomma mi?

B. Jeg har fem mynter og har til sammen 20 kroner. Hvilke mynter kan det være?

Dagens tall

Dagens tall er satt sammen av fire deloppgaver.
Hovedspørsmålet er: *Dagens tall er tallet 1.*

A. *Lag divisjonsstykker hvor svaret skal bli 1.*
B. *Lag multiplikasjonsstykker hvor svaret skal bli 1*
C. *Lag subtraksjonsstykker hvor svaret skal bli 1*
D. *Lag addisjonsstykker hvor svaret skal bli 1*

Det sentrale spørsmålet som går igjen i alle oppgavene er:

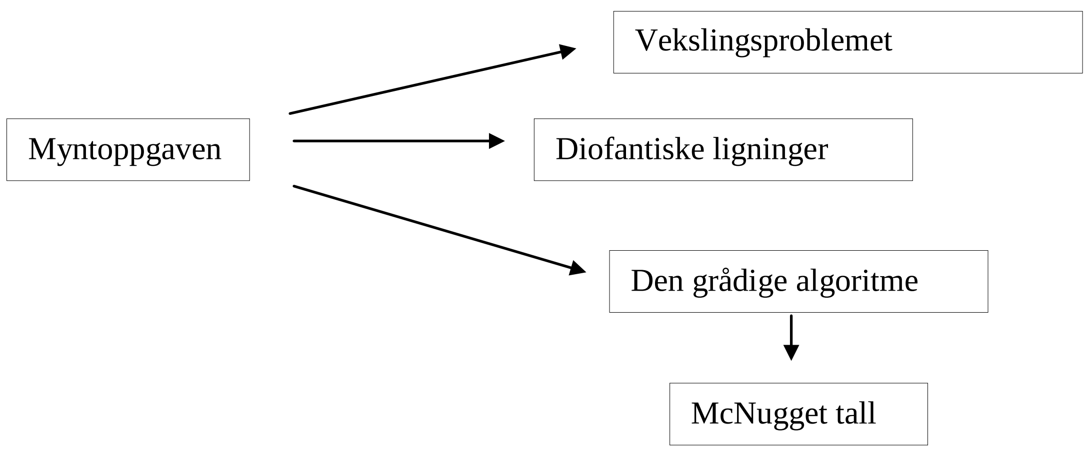
Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke? Forklar hvorfor dere tror det.

4 Matematikkfaglig teori

Det finnes mange vakre og klassiske, elegante og vanskelige, hverdagslige og spennende matematiske problemer å velge mellom. Mitt myntproblem har mange av disse elementene i seg. Å bruke mynter i problemløsningsoppgaver gir mange muligheter. Ved å redusere eller endre forutsetningene i oppgaven, justere eller forandre spørsmålsformuleringen, kan nye, interessante problemstillinger dukke opp. Disse kan igjen grupperes og deles inn etter visse likhetstrekk. Grupperingen kan lede mot nye klasser av myntproblemer.
Det er viktig at læreren er oppmerksom på at når elever arbeider med rike oppgaver og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen eller andre former for problemløsning, at nye klasser av problemstillinger kan tre fram.

Kanskje det mest kjente og klassiske av alle myntproblemer er ” the coin problem” også kalt ”the money-changing problem” eller frimerkeproblemet. For å skille dette problemet fra mitt, kaller jeg det for vekslingsproblemet. Andre grupper av myntproblemet kan for eksempel betraktes som diofantiske ligninger. Visse myntproblemer kan løses ved hjelp av en grådig algoritme.

Illustrasjonen under viser hvordan det er mulig å se for seg at myntproblemet leder mot nye klasser av problemer og hvordan noen emner henger sammen med andre.
Vekslingsproblemet, diofantiske ligninger og den grådige algoritme er alle kjente emner i matematikk.



4.1 Vekslingsproblemet

I dette klassiske problemet brukes enten mynter eller frimerker med heltallsverdier. Jeg velger å bruke mynter.

I vekslingsproblemet er det om å finne det største pengebeløpet som ikke kan representeres ved to eller flere myntenheter. Ofte blir dette tallet kalt Frobeniustallet (Mathworld, Coin problem, 2007).
Det er liten hensikt å finne Frobenius tallet hvis 1-eren er en av myntenhetene, for da kan alle pengebeløp representeres. Likeledes er det mest interessant å betrakte myntenheter hvor største felles faktor, sff, er 1.
Her er et eksempel:

Jeg velger meg myntenhetene 3- er og 5-er. Hva er det største pengebeløpet som ikke kan representeres ved disse myntene?

Laveste verdi er 3. Vi ser at 4 ikke kan representeres, 5 og 6 kan representeres, men ikke 7. Videre får vi at 8, 9, 10 kan representeres. Ettersom jeg har en 3-er, kan jeg legge den til pengebeløpene 8, 9, 10 og få de tre påfølgende beløpene, 11, 12, 13. Slik kan jeg fortsette i det uendelige.
Frobeniustallet er i dette tilfellet lik 7.

Sylvester (Mathworld, Coin problem, 2007) viste i 1884 at dersom man har to heltall hvor sff=1 så, vil differansen mellom produktet og summen av de to tallene, gi det største tallet som ikke kan representeres ved de to verdiene. Jeg bruker myntverdien i eksemplet ovenfor for å vise at dette stemmer:
$(3 \bullet 5) – (3 + 5) = 15 – 8 = 7$

Det finnes algoritmer for å finne Frobeniustallet for tre hele tall, men den generelle løsningen for et vilkårlig antall valgte tall er kjent som et NP problem. Det er problemer av typen der løsning kan gjettes og der en kan sjekke at den er riktig, men ikke løses fra bunnen av i gjennomførbar tid.

4.2 Diofantiske ligninger

Betrakter jeg myntproblemet mitt som en diofantisk ligning, må jeg først redusere noen av forutsetningene i oppgaven. Jeg fjerner først betingelsen om å bruke et bestemt antall mynter. Deretter forenkler jeg oppgaven og velger bare å bruke myntenhetene 5, kr, 10 kr og 20 kr.
En diofantisk ligning er en ligning med flere ukjente som krever en heltallsløsning (Petersen, 2004). Jeg leter etter løsninger med spesielle betingelser fordi jeg her ikke er interessert i negative løsninger. Derfor forutsetter jeg at løsningen er hele, positive tall.

I mitt tilfelle kan den diofantiske ligningen for myntproblemet stilles opp slik:

$a \bullet 5 + b \bullet 10 + c \bullet 20 = 50$

En løsning til denne ligningen er tre hele, positive tall, a_1, b_1 og c_1 som er slik at $a_1 \bullet 5 + b_1 \bullet 10 + c_1 \bullet 20 = 50$
En diofantisk ligning kan ha ingen løsninger eller uendelig mange løsninger. Under gitte forutsetninger kan en diofantisk ligning ha et begrenset antall løsninger.
Jeg vet at mitt diofantiske myntproblem har et begrenset antall løsninger.
Et par eksempler på løsninger er:

$a_1 = 2$, $b_1 = 2$ og $c_1 = 1$ og $a_1 = 4$, $b_1 = 1$ og $c_1 = 1$.

Jeg endrer på enda en betingelse. Det er nå mulig å bare bruke myntenhetene 5 kr og 10 kr. Myntproblemet kan da omformes til en lineær ligning. Myntproblemet ser nå slik ut:

$5x + 10y = 50$

Et eksempel på en løsning er når $x_0 = 4$ og $y_0 = 3$. Dette er en spesialløsning fordi jeg vet at finnes andre løsninger som passer.

For å kunne betrakte en generell løsning av en diofantisk ligning bruker jeg følgende teorem (Petersen, 2004):

Gitt en linær diofantisk ligning $ax + by = c$. Dersom x_0, y_0 er en spesiell løsning, så er andre løsninger gitt ved:
$x = x_0 + (b/d)\,t$, $y = y_0 - (a/d)\,t$
Her er t for ulike verdier av et helt tall og d er største felles faktor for a og b, dvs. sff (a, b) = d

Jeg vet at myntproblemet og den diofantiske ligningen $5x + 10y = 50$ har en spesiell løsningen gitt ved $x_0 = 4$ og $y_0 = 3$. Her er sff (5, 10) = 5.

Jeg kan ved hjelp av teoremet utlede den generelle løsningen gitt ved:

$x = 4 + (10/5)t \qquad y = 3 – (5/5)t$

Jeg vil bare betrakte positive løsninger for denne ligningen og omformer uttrykkene ovenfor til ulikheter:

$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

$4 + 2\,t \geq 0 \qquad 3 – 1t \geq 0$

$t \geq -2 \qquad t \leq 3$

Siden t skal være et helt tall, så kan t ha verdiene –2, -1, 0, 1, 2, 3. Alle disse verdiene av t gir en løsning på mitt myntproblem. Jeg viser et eksempel på en av løsningene ved å sette t = 1:

$x = 4 + (10/5) \bullet 1 = 6$ og $y = 3 – (5/5) \bullet 1 = 2$
Setter jeg inn verdiene x = 6 og y = 2 i ligningen 5x + 10 y = 50 får jeg:
Venstre side: $5 \bullet 4 + 10 \bullet 2 = 50$
Høyre side: 50

En diofantisk ligning med enda en tilleggsbetingelse kan løses ved hjelp av en grådig algoritme. I neste avsnitt vil jeg se nærmere på denne klassen av myntproblemet.

4.3 Den grådige algoritme

Myntproblemet kan omformuleres slik at det er om å finne det minste antall mynter som kan representere et gitt eller valgt pengebeløp. Myntenhetene man kan velge mellom må også oppgis.
Jeg vil komme med et eksempel:

Gitt de norske myntene (ikke 50-ører) og pengebeløpet 33 kroner. Hva er det minste antall mynter som kan til sammen danne 33 kroner?

Ved å sette sammen en 20 kr, en 10 kr og tre 1 kr, klarer jeg å danne pengebeløpet 33 kroner ved hjelp av fem mynter. Med de norske myntene vil den optimale løsningen være fem mynter.
Dersom jeg velger andre myntenheter for eksempel 20, 10, 5 og 3, vil det påvirke resultatet. Da vil den optimale løsningen være lik tre, fordi pengebeløpet kan representeres ved myntene 20, 10 og 3.

Den grådige algoritme er en algoritme hvor det er om å konstruere en samling av objekter satt sammen av et minste antall deler. Algoritmen deles opp i flere valg som igjen leder til nye trinn og nye valg. Hvert valg gjøres isolert fra de andre, og hensikten er å få det optimale ut av hvert valg uten å ta hensyn til hvilke konsekvenser dette har for det eller de framtidige valg/ene. Ettersom det her gjelder å få det maksimale ut av hvert valg, dvs. ved å "ta" mest mulig, så har algoritmen fått navnet den grådige algoritme (Mathworld, Greedy algorithm, 2007, Wikipedia, Greedy algorithm, 2007).

Det er interessant at en sammensatt algoritme hvor hvert steg blir gjort isolert og med optimal hensikt, kan lede fram til en helhetlig algoritme med fullkommen løsning. I noen tilfelle kan den grådige algoritmen føre til gode, men ikke fullkomne løsninger. Da er ofte denne løsningen ikke langt fra den optimale.

4.3.1 McNuggets tall

Et interessant tilfelle i denne sammenhengen er McNugget tallene. Det er tallene 6, 9 og 20. I følge Mathworld (McNugget Number, 2007), stammer disse tallene fra ordrebestillinger med friterte biter med kylling fra McDonalds som opprinnelig kom i pakninger med enten 6, 9 eller 20 McNuggeter i hver. Den grådige algoritme ble her brukt i praktisk sammenheng. For hver ordrebestilling var det om å sende av gårde minst antall pakninger med McNuggeter. Alle heltall er McNugget tall bortsett fra 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37 og 43. Det vil si at Frobenius tallet i det her tilfellet er 43.

Jeg vil betrakte McNugget tallene som myntenheter for å vise et eksempel på hvordan den grådige algoritme fungerer i praksis.
Først trenger jeg noen definisjoner (Mathworld, Greedy algorithm, 2007, Wikipedia, Greedy algorithm, 2007):

La en vektor (a_1, a_2, …, a_n) være en n-tuppel av tall hvor $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Vi definerer **skalarproduktet a • c,** også kalt prikkproduktet mellom a og c, mellom to vektorer a = ($a_1, a_2, \ldots, a_k$) og c= ($c_1, c_2, \ldots, c_k$) til å være:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{c} = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k c_k = \sum_{i=1}^{k} c_i a_i$$

La n være et gitt positivt heltall og c og a to vektorer med samme dimensjon.
Definer Δ som: $\Delta = n - a \bullet c$

I mitt eksempel velger jeg at $n = 94$.
Nå vil 94 tilsvare verdien av alle myntene til sammen. Vi starter med den største av de tre myntenhetene 6-ere, 9-ere, og 20-ere, nemlig 20-eren. Jeg velger optimalt antall 20-ere slik at summen av de 20-erne jeg velger, er lik eller mindre enn 94, dvs. 4. Jeg har da $94 – (4 \bullet 20) = 14$ igjen. Jeg velger maksimalt antall 9-ere, dvs.1. Jeg står nå igjen med $14 – (1 \bullet 9) = 5$. Nå kan det ikke velges noen 6-ere, slik at $c = (0, 1, 4)$, men $\Delta = 94 – 0 \bullet 6 + 1 \bullet 9 + 4 \bullet 20 = 5 \neq 0$.
Da må jeg se på myntverdien med nest største verdi, her 9-ere, og redusere antallet vi har av disse med 1. Jeg har fremdeles fire 20- ere som gir $94 – 4 \bullet 20 = 14$, altså må vi lage summen 14 med 6-ere. Jeg kan maksimalt ta to 6-ere, som gir $c= (2, 0, 4)$. Dette gir igjen at $\Delta = 94 – 2 \bullet 6 + 0 \bullet 9 + 4 \bullet 20 = 2 \neq 0$.

Neste justering må igjen foretas for neste stigende myntverdi, som her er 20-ere (fordi antall 9-ere nå er lik 0 og jeg kan ikke justere 9-erne ved å ta en mindre). Jeg må redusere 20-erne med 1, dvs. fra fire til tre. Nå er $94 – 3 \bullet 20 = 34$. På nytt velger maksimalt antall 9-ere slik at summen blir lik eller mindre enn 34, altså antall 9-ere lik 3. Jeg står da igjen med $34 – (3 \bullet 9) = 7$. Jeg kan velge en 6-er som gir $c= (1, 3, 3)$, men $\Delta = 94 – 1 \bullet 6 + 3 \bullet 9 + 3 \bullet 20 = 1 \neq 0$.

De neste justeringene utføres på samme måte og jeg undersøker $c= (2, 2, 3)$, $c= (4, 1, 3)$, og $c= (5, 0, 3)$, men fremdeles er $\Delta \neq 0$. Jeg må igjen justere førstevalget slik at $c= (0, 6, 2)$. Da får jeg at $\Delta = 94 – 0 \bullet 6 + 6 \bullet 9 + 2 \bullet 20 = 2 = 0$, og jeg vet at jeg har funnet en løsning.
Ved hjelp av den grådige algoritme har jeg funnet ut at det minste antall mynter jeg kan bruke, med myntenhetene 6, 9 og 20, for få summen 94, er $c= 8$, med to 20-ere og seks 9-ere.

5 Analyse av elevenes resonnement del 1

Jeg vil her presentere og analysere det innsamlede datamaterialet. I del 1 har jeg delt inn elevenes resonnementer etter oppgavene. Jeg analyserer elevens resonnementer ut fra hvilken oppgave de tilhører. Når jeg viser til oppgavene som jeg introduserte for elevene, iskremoppgaven, myntoppgaven og dagens tall, kaller jeg i hvert tilfelle for introduksjonsoppgaven. Den eller de oppgavene elevene formulerte selv ut fra introduksjons oppgaven, kaller jeg for elevoppgaven/e.

I transkripsjonen er utfyllede kommentarer skrevet i parentes. Hakeparentes markerer at deler av samtalen er utelatt fordi den har ingen betydning for det videre arbeidet. Når jeg henviser til andre elever enn de jeg fokuserer på, bruker jeg en kode på tre bokstaver. Den siste bokstaven, en j eller g, forklarer om det er ei jente eller en gutt det henvises til.

I dette kapittelet vil jeg presentere eksempler på hvordan elever på dette trinnet resonnerer. Jeg vil se nærmere på hva elevene bygger de sine resonnementer på og hvordan resonnementene er sammensatt. De matematiske egenskapene som 11-åringene bruker i sine resonnementer og sammenhengen mellom disse, er sentrale når jeg skal analysere kvaliteten på enkelte av eksemplene.
Jeg velger å bruke Brousseau og Gibels (2005) måte å inndele resonnementer på. Dette er et verktøy for å kunne plassere, til dels gradere egenskapene i 11-åringenes resonnementer etter styrke og kvalitet. Analyseredskapet sier igjen noe om innholdet i 11-åringenes resonnement. Ut fra dette kan jeg si noe om hvilke stadier av matematiske resonnementer jeg mener elever på 6. trinn kan klare.

5.1 Oppgave med mer enn en løsning

5.1.1 Iskremoppgaven

Iskremoppgavene var første oppgave i aksjonsperioden. Oppgaven ble presentert for elevene slik:

Du skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire forskjellige smaker. Du vil kjøpe to kuler is. På hvor mange måter kan du sette sammen den isen du vil kjøpe?

I tillegg til de gitte forutsetningene i oppgaven, ble elevene og jeg enige om følgende betingelser:

1. Kulene skal ha forskjellig smak.
2. Rekkefølgen på smakene spiller ingen rolle. Sjokolade–banan og banan–sjokolade telles som en type.

Det ble naturlig at vi skilte mellom is-smaker og is-typer. Is-smakene var de smakene med is elevene kunne velge mellom, og en is-type var en is satt sammen av to kuler med forskjellig smak.
Under introduksjonen av oppgaven spurte elevene om de kunne skrive navnet på fire forskjellige is-smaker. Jeg foreslo at de bare kunne bruke første bokstaven i smaken, men det var mer naturlig for dem å bruke hele betegnelsen. For meg virket som om problemstillingen ble enda mer interessant når de kunne velge egne smaker og arbeide konkret med disse.

Som tidligere nevnt hadde jeg på forhånd valgt ut to elevpar som jeg skulle ta lydbåndopptak av . Under arbeidet med iskremoppgaven var Vivi og Pål to av elevene jeg fokuserte på sammen med Tom og Erik.

5.1.2 Finnes det flere løsninger eller ikke?

Vivi og Pål hadde før samtalen som det refereres til nedenfor, løst den opprinnelige oppgaven og arbeidet nå med å forklare hvorfor de trodde at de har funnet alle løsningene eller ikke. De trodde ikke at det var flere enn seks is-kombinasjoner å velge i mellom, men utfordringen var hvordan de skulle forklare og begrunne dette.

> Vivi: Vi trur ikke at det e flere istypa for vi dobbeltsjekka alle og kika gjennom.
> AG: Dåkker gjor det ja. […] Ka va det dåkker dobbeltsjekka?
> Vivi: Vi sjekka, e det after eight og det (peker på arket) ehh og jordbær, after eight og vanilje, after eight og sjokolade og sånn.
> Pål: Hu (Vivi) sa alle typan som gikk an og så så æ at vi hadd alle, bare så det. Vi hadde tatt alle sånn forskjellige da. Vi tok ikke det samme og sånn. Det va ikke lov.
> AG: Dåkker hadd jo bestemt dåkker for at det ikke va lov, så det va jo helt greit.

Jeg går fra elevene. De jobber videre alene og diskuterer hva de skal skrive.

> Vivi: Vi tror ikke at det er flere is, løsninger med is fordi vi dobbeltsjekka det.
> Pål: Ja, fordi vi dobbeltsjekka det. (Pål gjentar det de har blitt enige om å skrive flere ganger mens Vivi skriver). Vi tror ikke det finnes flere løsninger.
> Vivi: Typer is må vi heller skriv.
> Pål: Typer, ja.

Elevene diskuterer videre hvordan de skal formulere det de skal skrive.

> Pål: Vi dobbeltsjekka det. Kan vi ikke skriv hvordan vi dobbeltsjekka det da?
> Vivi: Jo da, vi ska det.

Forslaget til Pål blir ikke fulgt opp. De har nå skrevet: Vi tror ikke det er flere typer fordi vi dobbeltsjekket alle typene.
Vivi og Pål diskuterer videre de gitte forutsetningene i oppgaven og eventuelt hvordan de skal skrive det på arket.

> Vivi: […] Vi fikk ikke lov til å ha to like.
> Pål: Vi sa, vi trudde at, da visst vi jo ikke at vi hadd lov eller ikke. [...] Da trudde vi at det ikke va lov til å ha de dobbelt samme. De, æ mene sånn, du vet, sånn jordbær og jordbær.

Læreren kommer bort til elevene.

> Vivi: [...] Vi mener at det ikke er lov å ta to is, to av hver sort.
> Pål: Ja.
> Lærer: [...] Ka har dåkker skreve da?
> Vivi: Vi tror ikke det er flere typer is fordi vi dobbeltsjekket alle typene. (Ramser opp en del kombinasjoner).
> Pål: Hu sa bare alle typan og så så æ at vi hadd det. Fordi det sto, på arket. Hvis vi gjor, hvis vi, (utydelig tale) gjor vi sånn her, æhh
> Vivi: Så sa æ: E det vanilje og sjokolade?
> Pål: Så sa æ ja, sa ja, ja hver gang hu sa, og så da sto alle de (kombinasjonene) hu sa va her. Og det var alle.
> Lærer: Men hvis Vivi overså en og den ikke sto her? Kordan kan dåkker vær helt sikker på at dåkker ikke har oversett nån?

Det ble stille i noen sekunder før elevene på nytt gikk i gang og sjekket enda en gang at alle kombinasjonene var med. Vivi leste opp og Pål kontrollerte at den kombinasjonen som ble lest opp, sto på arket. De konkluderte igjen med at de har funnet alle løsningene (typene) og at det er bare mulig å kombinere fire smaker is på 6 ulike måter. De begrunnet hele tiden med at de hadde ”dobbeltsjekket” som går ut på at de gjentok samme prosedyre flere ganger. De prøvde ikke å forklare dette på en annen måte. De kom heller ikke tilbake til spørsmålet læreren stilte: Hvordan kan dere være sikre på at dere ikke har oversett noen?

5.1.3 Eksempler på elevenes resonnement

I forkant av undervisningen hadde jeg laget tre hjelpesetninger. Disse var en del av aksjonen min og tenkt som et mulig virkemiddel for å fremme elevenes resonnement i oppstartsfasen. Elevene kunne bruke disse når de skulle forklare og begrunne skriftlig hvorfor de trodde det fantes flere løsninger eller ikke. Jeg kommenterte kort hvordan setningene kunne hjelpe elevene, men at det var fritt opp til dem om de ville bruke setningene eller ikke.
Hjelpesetningene ble skrevet på tavla slik at de var tilgjengelig for alle under arbeidet:

- Vi tror at vi har funnet alle løsningene fordi …

- Vi tror at vi ikke har funnet alle løsningene fordi ...
- For når vi har …(gjort slik og slik, prøvd både det og det)… så har vi funnet ut/oppdaget at ...

Løsningene av denne opprinnelige oppgaven er skrevet ned på et oppgaveark i en eller annen form for en notasjon. Denne notasjonen er i de fleste tilfellene en slags figur eller tegning. Dette er utgangspunktet for elevenes skriftlige forklaringer. Det er viktig å betrakte både notasjonene på arbeidsarket og elevenes skriftlige forklaringer, som elevenes resonnement. Alle elevene var enige om at det ikke fantes flere enn seks løsninger.

Her er noen eksempler på hvordan elevene skriftlig formulerte at de hadde kombinert alle de fire smakene med hverandre (prikkpunktene under er min avskrift av elevenes arbeider):

- Vi har tatt alle med alle (Iej, Fng).
- Vi har blandet alle isene (Adj, Jng).
- Vi har brukt alle is-kombinasjonene (Tom, Erik).
- Vi har funnet alle kombinasjonene og blandet alle smakene sammen (Aaj, Vjj).

I et tilfelle henviser elevene bare til illustrasjonen de har laget når de skal forklare om de tror det finnes flere løsninger eller ikke:

- Vi setter det opp så vises det bare at det blir 6 forskjellige (De har skrevet kombinasjonene på arket) (Sej, Jmg).

Elevene var også bevisste på at de måtte ta hensyn til to gitte forutsetninger. De fleste elevene brukte den ene forutsetningen, at det ikke er lov til å ha to kuler med samme smak, som en del av sin forklaring:

- […] det er ikke lov å ta samme is to ganger (Adj, Jng).
- […] uten å ha samme smak sammen (Aaj, Vjj).
- […] fordi det går ikke å ha 2 av den samme isen (Vej, Trg).

I prikkpunktet nedenfor mener elevene at det ikke finnes flere enn seks løsninger, men hvis rekkefølgen på is-smakene ikke er likegyldig, så vil det finnes flere is-typer.
Kun ett elevpar betraktet rekkefølgen av is-kulene i sin forklaring.

- […] Hvis vi tar flere typer blir det det samme bare at vi snur (smaken blir det samme bare omvendt vei) (Jej, Nsg).

Flere av elevene forklarer på samme måte dvs. de argumenterer med at dersom kriteriene i oppgaven endres, så vil det finnes flere løsninger.

5.1.4 Betraktninger rundt elevenes egne spørsmålsformuleringer

Etter at elevene hadde løst den opprinnelige oppgaven, skulle de formulere sin egen iskremoppgave.
I følge Silver (1994) så ligger ressursen eller styrken i det opprinnelige problemet utenfor elevens kontroll og bevissthet. Dette trer i følge han, tydeligere fram når det opprinnelige problemet blir omformulert og personifisert, dvs. når elevene fordyper seg i problemet. Jeg ville samtidig at elevene skulle bygge på de erfaringene de hadde opparbeidet seg under arbeidet med den opprinnelige iskremoppgaven. Derfor laget jeg noen rammer for elevens egne spørsmålsformuleringer. Fortsatt var det bare mulig å kjøpe is satt sammen av to kuler. De kunne selv bestemme antall smaker, men kunne ikke velge flere enn ti. For mange kuler ville bringe inn for mye støy. Jeg ville legge til rette for at elevene, om mulig, skulle oppdage det matematiske i oppgaven.
Dette var første gangen 11-åringene i denne sammenhengen formulerte egne oppgave. Alle elevene valgte et sted mellom 6-10 is-smaker. Her er et eksempel på en oppgave som elevene laget (min avskrift):

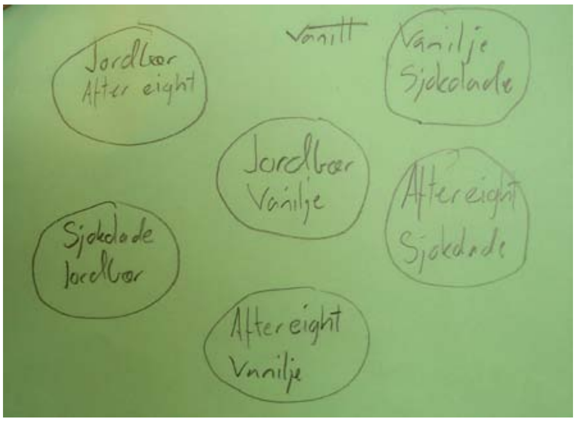
- 10 forskjellige smaker. Tokulers is. Ikke lov med samme smak. Hvor mange kombinasjoner blir det?

I etterkant av undervisningen gjennomførte jeg som planlagt et intervju med Tom og Erik.
Ut fra det disse to elevene hadde skrevet på arbeidsarket til elevoppgaven, kunne jeg se hvordan de på en mer eller mindre systematisk måte, hadde kombinert alle is-smakene. Jeg hadde også en viss formening hvordan elevene hadde resonnert seg fram.
I løpet av intervjuet fikk jeg bekreftet at det jeg kunne lese ut av besvarelsen deres, stemte med det elevene presenterte og la fram for meg i.

Tom og Erik arbeidet etter et system hvor de kombinerte alle is-smakene med hverandre. Når de hadde kombinert en is-smak med alle de andre, satte de en strek over denne smaken. Deretter tok de for seg neste is-smak og behandlet den på samme måte. Slik fortsatte de til alle kombinasjonene var skrevet opp. Så telte de opp antall kombinasjoner. (Illustrasjon 1).

Illustrasjon 1

Ved å sammenligne det Tom og Erik hadde skrevet på løsningsarket i den opprinnelige oppgaven, med løsningsarket til elevoppgaven, ser det ut til at de hadde brukt samme framgangsmåte på begge oppgavene.(Illustrasjon 2).



Illustrasjon 2

De to elevene løste elevoppgaven ganske nøyaktig på samme måte som de løste den opprinnelige oppgaven. Elevene fikk bekreftet at både framgangsmåten og måten å resonnere seg fram til en løsning, fungerte i begge oppgavene. Tom og Erik følte sikkert en slags trygghet i det. Men Tom mente det hadde vært krevende å komme fram til en løsning i elevoppgaven. Det var mange smaker og kombinasjoner å holde styr på. Han uttrykte det slik:

> ”Det vart litt slitsom da, men vi klart å kom oss i mål.”

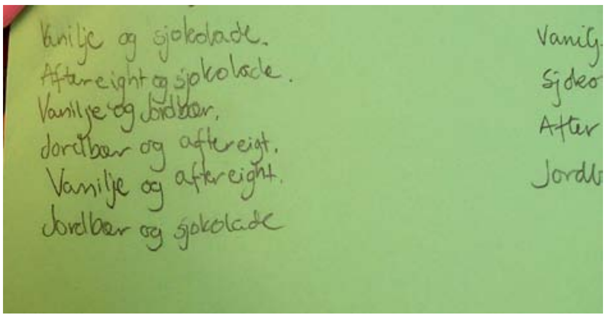
Tom og Eriks to oppgaveløsninger har så mye til felles at hvis elevene igjen ble bedt å forklare om de trodde de hadde funnet alle løsningene eller ikke, så kunne de ha brukt den samme forklaringen i elevoppgaven som i den opprinnelige oppgaven:

”Vi tror at det ikke finnes flere løsninger fordi vi har brukt alle is-kombinasjonene”

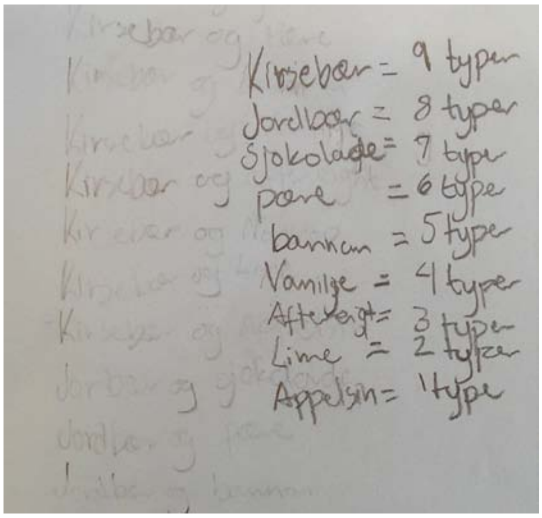
Under arbeidet med analysen med iskremoppgaven, oppdaget jeg at det var interessant å sammenligne løsningene hvert enkelt elevpar hadde på den opprinnelige oppgaven med løsningene på elevoppgaven. Jeg måtte undersøke hvor mange av elevparene som hadde beholdt sin framgangsmåte og hvor mange som hadde endret framgangsmåte.

Av til sammen åtte elevpar brukte fem av dem den samme framgangsmåte på elevproblemet som på det opprinnelige problemet. Tom og Erik var et av parene. Blant de tre elevparene som hadde endret sin prosedyre, var Pål og Vivi.
Pål og Vivi hadde under arbeidet med den opprinnelige oppgaven kombinert nokså tilfeldig alle is-smakene. (illustrasjon 3). Da de arbeidet med elevoppgaven, startet de på samme måte som de gjorde i det opprinnelige problemet. De valgte seg ti is-smaker, og skrev disse under hverandre på arket. Jeg kan se at de på oppgavearket har skrevet den første is-smaken og kombinert den med alle de andre ni smakene. Deretter har de begynt med neste is-smak på lista og kombinert denne med de tre påfølgende smakene på lista. Så har de visket bort det de hadde skrevet. (Illustrasjon 4)
Av en eller annen grunn har de endret framgangsmåte og sannsynligvis måten å resonnere på. Vivi og Pål har så skrevet ei ny liste med ni is-smaker. Bak den første smaken har de skrevet 9, bak den neste 8, deretter 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. For ut fra de ti konkrete is-smakene som de hadde valgt, så må de ha oppdaget at den først smaken, som var kirsebær, kunne kombineres med ni andre smaker, neste smak kunne kombineres med åtte andre smaker og så videre.

Slik forsatte de helt til at det var igjen en kombinasjon.



Illustrasjon 3



Illustrasjon 4

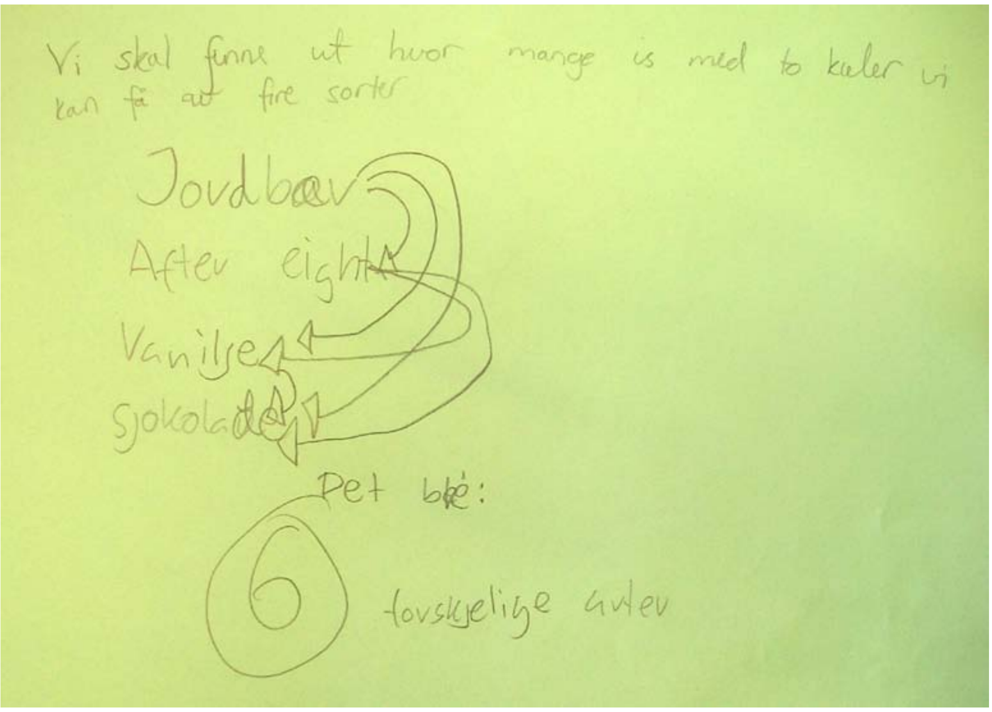
Muligens så de et mønster samtidig som de oppdaget at den nye framgangsmåten var mye mindre arbeidskrevende enn den opprinnelige. De kunne også ha blitt klar over at en mer systematisk måte å kombinere is-smakene på ville gjøre det lettere for dem å forklare og begrunne at de hadde funnet alle løsningene. Det at de har utelatt å addere alle kombinasjonene kan tyde på at de har glemt spørsmålet i oppgaven de selv har formulert.

.

Jeg kan her bare peke på at det måtte ha skjedd en endring i elevenes resonnement. Det er viktig å bemerke at den opprinnelige oppgaven ikke ble gjennomgått på tavla i fellesskap. I så måte har ikke innspill fra de andre elever ført til endringene hos Vivi og Pål. Det eneste vi oppsummerte i felleskap var elevens forklaringer på at det ikke fantes flere enn seks løsninger. Selvfølgelig kunne Vivi og Pål ha sett noen av de andre løsningene, men ettersom de startet med å løse elevoppgaven på samme måte som den opprinnelige oppgaven, er det lite sannsynlig.
I ettertid ser jeg at det ville ha vært interessant og intervjuet Vivi og Pål om det jeg skisserer i avsnittet ovenfor. Hvordan ville de nå ha forklart og begrunnet at de hadde funnet alle løsningene? Hvorfor hadde de visket ut is-kombinasjonene de hadde skrevet i elevoppgaven? Ville Vivi og Pål nå ha brukt begrepet dobbeltsjekke?

5.1.5 Analyse av elevenes resonnement

The most elementary form of expression of a proof is one direct showing (Balacheff, 1988).



Illustrasjon 5

Elevbesvarelsen (illustrasjon 5) kan ses på som et uttrykk eller et direkte visning på at det, i den her sammenhengen og under de gitte forutsetningene, ikke finnes flere enn seks løsninger. Dette er en grunnleggende måte å uttrykke et matematisk bevis på i følge Balacheff (ibid.). Men beviset er avhengig av evnen til vedkommende som ser notasjonen. Hun må kunne rekonstruere hvordan den som beviser (i mitt tilfelle eleven) har tenkt og hvordan eleven indirekte har resonnert, dvs. det som eleven ikke klarer å uttrykke på en annen måte (Sémadéni (1984) i Balcheff, 1988).

Brousseau og Gibel (2005) kaller denne formen for bevis et resonnement på nivå 1 (N1). I følge deres definisjon på hva et resonnement er, er ikke N1 formet som et resonnement, men en modell av en aktivitet. Elevene må tillegges eller tilegnes denne formen for resonnement på bakgrunn av det han eller hun gjør.

Alle elevene i gruppen har former for N1 resonnement. Selv om elevene under arbeidet med den opprinnelige oppgaven, ikke systematisk kombinerte is-smakene, så kan modellene på arbeidsarkene vise spor av den aktiviteten de har gjort. Elevoppgaven utfordret mange av elevparene til å utvikle og i noen tilfeller endre aktivitetsmodellen de hadde brukt i den opprinnelige oppgaven. Når antall is-kombinasjoner økte, tvang det fram en aktivitet av mer en systematisk art. Dette gjenspeiles i modellen. Arbeidsarkene fra elevoppgaven viser at fem av elevparene har modeller hvor det har skjedd en utvikling. I tre tilfeller har elevparene endret den modellen de brukte i den opprinnelige oppgaven.

Aktiviteten og det resonnementet som jeg tilegner det enkelte elevparet, kommer enda tydeligere fram i elevoppgaven fordi elevene ble nødt til å tenke mer systematisk. Modellene i elevoppgavene er mer strukturerte og ligner på tabeller eller lignende notasjoner som modellen i illustrasjon 5.

5.1.6 Oppsummering av oppgave med mer enn en løsning

Å få elevene til å forklare og begrunne skriftlig hvorfor de trodde at de hadde funnet alle løsningene, var av stor betydning for å kunne fremme elevenes resonnement. Det er viktig å påpeke at dette er vanskelig å forklare selv for eldre elever, ja, til og med voksne.

I den opprinnelige oppgaven var det forholdsvis enkelt for elevene å skaffe seg en oversikt over alle kombinasjonsmulighetene ut fra de gitte forutsetningene. Elevens resonnement hadde ikke blitt løftet fram bare ved at de hadde løst iskremoppgaven.

Jeg var opptatt av at elevene skulle få bruke de erfaringene de hadde skaffet seg under arbeidet med den opprinnelige oppgaven. Jeg hadde sett for meg en form for stadfesting eller til en viss grad utvikling av elevens resonnement i denne prosessen, dvs. fra den opprinnelige iskremoppgaven til oppgaven elevene formulerte selv (elevoppgaven). At noen av elevene

løste den opprinnelige oppgaven på en måte, men løste elevoppgaven helt annerledes, hadde jeg ikke forestilt meg. Hva var det som gjorde at elevene endret sin framgangsmåte? Det hadde vært interessant til å vært vitne til resonnementet som førte til endringene.
Av de tre elevparene som forandret sin framgangsmåte, er Vivi og Pål sitt tilfelle mest interessant. Lydbåndopptakeren burde absolutt ha blitt liggende på pulten deres under arbeidet med elevoppgaven.

5.2 Oppgave med ingen løsning

5.2.1 Myntoppgaven

Myntoppgaven består av tre deloppgaver. Den første er en introduksjonsoppgave så følger elevoppgaven og deretter hovedoppgaven. Introduksjonsoppgaven har to løsninger og hovedoppgaven har ingen løsninger.
Jeg vil her se kun på introduksjonsoppgaven og hovedoppgaven, og fokusere på hvordan elevene forklarte og resonnerte seg fram til hvorfor de trodde det fantes flere løsninger eller ikke.

Min aksjon var å oppfordre elevene til å bruke myntene og de ulike verdiene på disse, når de skulle forklare hvorfor de trodde at det fantes flere løsninger eller ikke.

Jeg konsentrerte meg om elevparene Erik og Tom samt Ine og Finn i myntoppgaven. Når Tom og Erik skulle forklare og begrunne hvorfor de trodde de har funnet alle løsningene eller ikke, hadde de lysbåndopptakeren på pulten (introduksjonsoppgaven). Ine og Finn intervjuet jeg etter at de hadde løst myntoppgaven med ingen løsning (hovedoppgaven).

5.2.2 Finnes det flere løsninger eller ikke?

Erik og Tom hadde før samtalen som refereres nedenfor løst den opprinnelige oppgaven og arbeidet nå med å forklare hvorfor de trodde at de har funnet alle løsningene eller ikke. De hadde funnet ut at det fantes to løsninger på problemet: *Jeg har åtte mynter i lomma, og jeg har til sammen 50 kroner. Hvilke mynter har jeg i lomma mi?*
Den ene løsningen består av fem 1-kroner, en 5-er og to 20 kroner, den andre løsningen er seks 5-ere og to 10-ere.

> Tom: Veit du om det finnes flere?
> Erik: Nei, æ trur egentlig ikke det, for vi har prøvd nesten alt, har vi jo, alt som finns har vi jo.

Tom: Ja.
Erik: Kanskje det mest sannsynlige (Tom tar over og fullfører setningen som Erik startet på)
Tom: e at det finnes en te.
Erik: Ja, vi har prøvd alt, omtrent.
Tom: Mmm, bortsett fra nåkka, men det trur vi ikke kan.
Erik: Vi kan ikke ha tre 20 kroninga heller.
Tom: Nei.
Erik: Det blir mye mer. Vi kan ikke bruk 50 øre (utydelig tale) blitt det samme. Eller så e, e, det blitt for mye eller for lite.

Elevene snakker sammen på en slik måte at de tar over og fullfører hverandres setninger. Jeg markerer det ved å unnlate punktum i en ytring for så å utelate stor bokstav i neste ytring.

E: […] Så fikk resten av gruppa heller sant mer enn to, så da finns det ikke no flere.
T: Nei, ikke æ heller.
E: Men hvordan skal vi forklar at det ikke er flere.
T: Æ trur, vi trur ikke det er flere på grunn av
E: vi tror det ikke
T: finnes flere
E: finnes flere ehh (han starter med å skrive forklaringen ned på arket)
T: fordi resten av gruppa ikke fant.
E: Nei, vi kan ikke si, vi kan ikke stol på gruppa heller, dæm kan jo ha feil, dæm!

Erik godtar ikke Toms forklaring og begrunner hvorfor de ikke kan skrive det han foreslår. Tom godtar dette.
Elevene fortsetter samtalen og bruker god tid på å formulere sin forklaring. De skriver følgende:

"Vi tror det ikke finnes flere mynter som til sammen blir femti fordi at vi kan ikke ta med 50 øre for da blir det for lite. Og vi kan heller ikke ta tre 20 kroner for da blir det for mye. Også har vi prøvd mange forskjellige forslag, og vi fant to svar, men resten ble det samme eller for mye eller for lite."

I løpet av denne undervisningsøkta går jeg rundt, hjelper til og snakker med elevene. I samtalen som fortsetter under, har jeg kommet bort til Erik og Tom.

AG: Kan dåkker lese opp ka dåkker har funne ut?
Erik: (Leser opp forklaringen som er sitert overfor.)
AG: Veldig fint. God begrunnelse. Men koffår i all verden e det for lite eller for my da?
Erik: (Erik starter nå på en lang forklaring på hvorfor det ikke går an å bruke 50 ører:) For hvis vi har to 50-øringa
AG: Ja.
Erik: asså, asså, du kan, kan ikke bare ha to 50-øra
AG: Nei.
Erik: nei, for da, for da har vi to her
AG: Mmm
Erik: så har vi tre, fire, fem, nei, en to, tre, fire, fem (Erik bruker tilgjengelige papp-mynter når han forklarer).
AG: ja, til sammen fem krona (Han fyller opp med 1-ere slik at han får til sammen fem kroner).
Erik: Da har vi seks (mynter)
AG: seks mynta mmm.

Erik: Også, da må vi ha en 5-er til, så det blir en 10-er (Fyller opp til nærmeste 10-er)
AG: Det må du ha, ja.
Erik: også e det ingen lønnsomhet (utydelig tale), for det e ingen mynt som e 40, og da går det ikke. (Det ligger nå sju mynter på bordet og mangler bare en.)
AG: Akkurat. Ka meine du om 50 øra? E det lurt å bruk 50 øra i den her sammenhengen Tom?
Tom: Nei
AG: Veit du eller trur du bare?
Tom: Æ e egentlig ikke helt sikker, men.

Tom er ærlig, og Erik forklarer enda en gang for Tom hvorfor det ikke er mulig at det finnes en løsning som inneholder 50 øringer. Når Erik er ferdig spør jeg Tom enda en gang om han tror det går an å bruke 50 øringer i denne oppgaven. Tom svarer:

T: Nei
AG: I sted så sa du at du trudd det bare, e du sikker på det no?
T: Mmm.
AG: Koffor det?
T: Det at det blir for lite hvis du bruke 50 øra. Det tar opp så my plass.
AG: Akkurat, der si du nåkka. For lite ka?
T: For lite, du ska opp te, opp te åtte mynta som ska til sammen ska bli femti, men så bruke vi opp alt for my, altfor my mynta
AG: Ja.
T: med derre 50 øran.
AG: 50 øran. Ok, da har dåkker funne ut noe viktig. Legg bort 50 øran. Da har dåkker undersøkt det faktisk.(Pause 2 sek) Ka e neste mynten dåkker vil undersøk?
T: Eneran.
E: Eneran.
AG: Eneran. Så gjør dåkker det på samme måte, dåkker toan.

Guttene går i gang med å undersøke antall mulige løsninger når de bruker 1-ere. De jobber systematisk og finner en løsning. Tom og Erik konkluderer med at dette er den eneste mulige løsningen de finner med 1- ere og at dette er en av de to løsningene de har fra før av.
De fortsetter på samme måte med 5-erne. Igjen finner de ut at den eneste mulige løsningen med 5-ere i, har de også funnet fra før av.
Kort etter konkluderer guttene med at:

T: Det finnes ikke flere løsninga, e det ikke. Vi har funne alle måtan for å si det sånn.
E: Vi har funne alle løsningan, ja.
T: Æ mene at (pause 2 sek.) hvis det e nån som finn tre løsninga, så e dæm god
E: Ja.
T: for æ trur ikke dæm finns (Pause 11 sek.). Vi fant ut at det bare va dæm to løsningan, vi.
E: Det gjor vi.

Til å begynne med var guttenes metode en mer eller mindre tilfeldige ”prøve og feile-metode”. Ut fra dette arbeidet fant de to løsninger og konkluderte med at det ikke fantes flere enn to løsninger. De baserte sine antakelser på ikke-matematiske argumenter: ” Også har vi prøvd mange forskjellige forslag, og vi fant to svar, men resten ble det samme eller for mye eller for lite.”

Når Tom foreslo at de kunne skrive:”Vi trur ikke det er flere på grunn av […] fordi resten av gruppa ikke fant”, så mente Erik at dette argumentet ikke var godt nok. ”Nei, vi kan ikke si, vi kan ikke stol på gruppa heller, dæm kan jo ha feil, dæm!” Toms argument overbeviste ikke Erik. Erik måtte slik som Mason (1991) antyder, først finne en måte å overbevise seg selv på, før han kunne overbevise noen andre slik at de så og oppfattet det han gjorde.

Da jeg kom bort til elevene og stilte oppfølgingsspørsmål, så ønsket jeg å motivere dem til å gjennomføre en mer systematisk undersøkelse basert på de enkelte myntenhetene. Jeg ville at mine innspill skulle hjelpe elevene til å resonnere mer matematisk.
Jeg prøvde å lose elevene inn på å bruke sin tallforståelse kombinert med betingelsene som oppgaven gir i form av antall mynter, totalverdien og de norske myntenhetene.
Jeg mener innspillet mitt satte elevene i stand til å gå systematisk gjennom de ulike myntenhetene, slik at de kunne trekke noen delkonklusjoner underveis. Ved å betrakte enkeltmyntene måtte de samtidig vurdere mulige kombinasjoner hvor enkeltmynten ble brukt. De utelukket flere og flere alternativer, før de til slutt konkluderte med at de har funnet alle løsningene. Matematikken guttene utforsket er et kombinatorisk problem.

Gjennom denne utforskningen brukte elevene matematiske resonnement på et relativt høyt nivå. Ut fra Brousseau og Gibel (2005) nivåer mener jeg å kunne plassere Tom og Eriks resonnement nærmere et N3-resonnement enn et N2-resonnement. Guttene refererte tydelig til elementene i situasjonen. Et eksempel på dette er: ”Vi kan ikke ha tre 20 kroninga heller”. Resonnementet inneholder mer eller mindre korrekte slutninger som er henger sammen: ”Det blir for lite hvis du bruke 50 øra. Det tar opp så my plass”. Elevene får underveis mer og mer kontroll over situasjonen fordi de systematisk undersøker hver myntenhet og mulige kombinasjoner koblet til disse. Tom og Erik klarer å trekke en konklusjon ut fra sine slutninger.

5.2.3 Eksempler på elevenes resonnement

Min aksjon i myntoppgaven var å oppfordre elevene til å bruke myntene og verdien på myntene når de skulle forklare om de trodde det fantes flere enn to løsninger eller ikke. I tabellen på neste side finnes en del eksempler på elevens forklaringer (min avskrift) fra introduksjonsoppgaven. Jeg har skrevet utfyllende kommentarer og tolkninger i kolonnen til høyre.

Elevenes forklaringer	Initialer	Kommentarer
Vi tror at det ikke finnes flere muligheter fordi …. Det er litt rart om 18 personer ikke finner flere….. Dessuten går det ikke an og bruke 50 øre… fordi det er så smått.	Ine og Finn	Jeg antar at de har undersøkt om de kan bruke 50-øringer i en løsning, men funnet ut at denne mynten har for lav verdi til å kunne innfri begge forutsetningene i oppgaven..
Vi tror ikke at det finnes flere løsninger fordi vi ikke finner noen.	Adj og Jng	Elevparet bruker ikke myntenhetene når de forklarte at det ikke fantes flere løsninger.
Sikkert flere men de er vanskelige og finne ut. Og bruke penger kunne ha vært en bra løsning til flere.	Vej og Trg	Kanskje de mener at det må finnes flere løsninger bare fordi at jeg spør om det? Elevene bruker ikke myntenhetene i sin forklaring
Jeg tror ikke det finnes flere løsninger fordi man kan ikke bruke 50 øringer og man kan ikke bruke flere 20 kroninger enn 2 eller 1, men ikke over to	Jrg	Eleven har funnet ut mye, men forklarer ikke hvorfor det blir slik. Han bruker myntverdiene til å forklare med. Han eliminerer 50-øringer og har observert at en løsning ikke kan innholde mer enn to 20-kroner.
Vi tror ikke det finnes flere fordi vi har prøvd alle vi klarte og at vi ikke kan ta med lapper og 50 ører. Da blir det for lite. Vi har prøvd mange forskjellige svar og vi fant 2 svar. Med 3 20 kroner blir det også for mye og det må være med 8 mynter	Aaj og Vjj	Jentene antar at elevene her har brukt ”prøve og feile–metoden”. De mener at 50-øringer ikke kan brukes og ser bort fra denne mynt-enheten. Å bruke tre 20 kroner går ikke. Underforstått så sier elevene at løsningene på oppgaven må være en kombinasjon av 1-ere, 5-ere, 10-ere og 20 kroner, men det maksimale antallet av 20 kroner som kan brukes er to.

Flere av elevene prøvde å bruke myntenhetene i sine forklaringer og kombinerte dette ofte sammen med ikke-matematiske argumenter. Elevene måtte i myntoppgaven forholde seg til betingelsene i oppgaven samtidig som de måtte betrakte den enkelte myntenheten, men også kombinasjoner av myntenhetene. Dette var utfordrende for mange av elevene. Flere av elevene studerte løsninger ut fra en enkelt myntenhet, men jeg finner ingen spor hvor elevene resonnerte rundt kombinasjoner av myntenhetene.

Mange elever klarte å resonnere seg fram til løsninger som ikke tilfredsstiller begge kravene. De valgte seg en myntenhet og ut fra denne eliminerte de enkelte løsninger. I mange sammenhenger mestret elevene å forklare hvorfor de kunne gjøre det. På denne måten uttrykte 11-åringene implisitt at de løsningene som de lette etter, ikke kunne inneholde 50-ører og heller ikke flere enn to 20-kroner.
Ettersom denne første myntoppgaven var en introduksjonsoppgave, velger jeg å gå dypere inn i elevenes resonnementer under hovedoppgaven.

Etter dette arbeidet presenterte jeg hovedoppgaven for elevene: *Jeg har fem mynter og har til sammen 20 kroner. Hvilke mynter kan det være?*

Etter at Ine og Finn hadde arbeidet en stund med hovedoppgaven, intervjuet jeg dem. Det er denne samtalen jeg har transkribert under. Elevene hadde ikke på samme måte som tidligere, presentert sin løsning i fellesskap og deretter å forklart skriftlig om de trodde de hadde funnet alle løsningene eller ikke. Denne gangen ble det naturlig at elevene samtidig som de la fram sin løsning, forklarte hvorfor de trodde at det ikke fantes flere løsninger (i det her tilfellet ingen løsning). Elevene brukte papp-mynter i arbeidet.
Jeg innledet samtalen med å spørre elevene hva de hadde gjort.

> Ine: Vi begynt med å prøv. Vi prøvd om vi bare hadd hatt 10 krona, men det går jo an med fire femmera, men
> Finn: men det skull vær fem mynta.
> Ine: Så da fant vi ut at 50 øringen va for lite og 20 kroningen den går ikke an å bruk.
> Finn: Nei.
> Ine: Så derfor prøvd vi først med den der. (Henviser det de har skrevet på arket: 10+5+1+1+1+1+1).
> AG: Mmm, altså med en 10-er, og en 5-er og fem 1 krona.
> Ine: Det går jo selvfølgelig an bare å ha en 10-er i stedet for 1 kronan, så får vi tjue, men det går ikke det heller
> Finn: så da ble det for lite mynta. Hvis vi tar 10-er, 5-er og fem 1-krona blir det for my.
> AG: Akkurat.
> Ine: Det går ikke an å bruk fem, fem, nei tre 5-era og så går det ikke an å bruk en 10 krone og to 5-era
> Finn: Nei.
> AG: (Leser det elevene har skrevet på arket:) 20 kroner er for stor og 50 øre for lite. Man kan, dåkker har faktisk funne ut at to mynta kan vi ikke bruk. Vi har igjen bare en krona og 5 krona og 10 krona (Jeg skriver 1, 5, 10 nederst på arket).
> Finn: Så fant vi ut at tre 1-krona kunn vi heller ikke bruk da. Men da ble det for lite.
> Ine: Da måtta vi bruk fem av den. Vi mått bruk fem av den for å bruk den.
> AG: Ja
> Ine: Så det går ikke. Det blir hele svaret.

Elevene prøvde seg fram, en strategi som flere av elevene på trinnet benytter. Tidlig i prosessen eliminerte Ine og Finn bort 50-ører og 20-kr (i tredje ytring). Av de resterende myntene lagde de en kombinasjon, en nærliggende løsning som tilfredsstilte en av de to forutsetningene i oppgaven, dvs. at summen av myntene var 20 kroner.
Med utgangspunkt i dette eksemplet bestående av fem 1-ere, en 5-er og en 10-er, vekslet de seg fram og tilbake med papp-myntene. Dette gjorde de for å kunne se om de klarte å oppfylle den andre forutsetningen i oppgaven, nemlig at det skulle være fem mynter til sammen.

I motsetningen til introduksjonsoppgaven oppfordrer/tvinger hovedoppgaven i større grad elevene til å betrakte kombinasjonene av myntene. Ine og Finn studerte ikke kombinasjonene av myntene systematisk. Fordi at de tar utgangspunkt i kombinasjonen 10+5+1+1+1+1+1 og resonnerte ut fra dette eksempelet, så klarer de likevel å betrakte alle kombinasjons-mulighetene med de resterende myntene.

Da jeg hentet Ine og Finn for å intervjue dem, hadde de skrevet følgende på arket:
” Vi tror ikke det går… 20 kr er for stor. 0,50 kr er for lite.”
De hadde i tillegg tegnet en del mynter og mynt-kombinasjoner på arket. De hadde satt et kryss over notasjonen etter hvert som de hadde funnet ut at den ikke kunne brukes, både den enkelt myntenheten og forslag på kombinasjoner.
Mesteparten av elevenes resonneringsprosess foregikk parallelt med denne avkrysningsaktiviteten. Denne ble ikke skrevet ned på arket. Da jeg intervjuet elevene fikk jeg en forklaring på notasjonene på arket samtidig som elevene beskrev hvordan de hadde resonnert seg fram til at det ikke fantes en løsning på denne myntoppgaven. Ved å intervjue elevene fikk jeg løftet fram måten de hadde resonnert på.

5.2.4 Sammenligning av elevenes resonnement

I de tre utvalgte eksemplene under forklarer tre elevpar hvorfor de trodde at det ikke finnes noen løsning på hovedoppgaven i mynt-problemet. Elevene nyttiggjorde seg de erfaringene de hadde opparbeidet seg under arbeidet med introduksjonsoppgaven. Det skjedde en utvikling i elevens resonnementer fra introduksjonsoppgave til hovedoppgave, fordi alle elevene brukte nå myntene i sine forklaringer.
Alle elevene hadde sjekket mer enn to myntenheter, to elevpar sjekket ut alle fem myntenhetene. Halvparten av elevene undersøkte også flere enn en kombinasjonsmulighet av myntene. Utfordringen var om elevene systematisk klarte å teste ut alle kombinasjonene.

Elevene fikk bruke papp-mynter under dette arbeidet. Det ble enklere for elevene å forholde kombinasjonsmulighetene når de hadde tilgang på konkrete ”mynter”. Deler av elevens resonneringsprosesser skjedde under aktiviteten når elevene satte sammen ulike mynter, tok bort andre og la til nye mynter. Ut i fra arbeidsarkene oppfatter jeg at flere av elevene har undersøkt om de for eksempel kan bruke 10-eren, og jeg får også vite konklusjonen av den enkelte myntobservasjonen. Men jeg får ikke innblikk i hva de har gjort heller ikke hvordan de har tenkt, fordi deler av resonneringsprosessen skjedde under den praktiske aktiviteten med myntene. Dette blir ikke gjengitt på arbeidsarket.

Eksempler på slike resonnementer finnes i tabellen under (min avskrift):

Resonnement	Initialer	Kommentarer
0,5: går ikke fordi det blir for lite 20: går ikke for det blir for mye 5: går ikke for det blir for lite eller for mye penger 1: går heller ikke (Elevene har skrevet gjentakelsestegne av begrunnelsen over dvs. det blir for lite eller for mye penger) Vi finner ingen. Vi skulle hatt 4kr 2kr 3kr 6 kr så hadde vi klart det	Jej og Nsg	Elevene undersøker hver enkelt mynt, men ikke kombinasjonene. De undersøker ikke 10-kronene.
50 øre er for lite fordi vi har bare 5 mynter 1 er for lite 5 er for mye 10er for mye 20 er for mye Det finnes ingen nøyaktig løsning. Det nærmeste vi kommer er 5+5+5+5+0,5=20,50 Løsning med andre mynter: 5+5+5+3+2=20 6+4+5+2+3 Vi burde hatt 3-kroning og 2-kroning her i Norge (I den andre alternative løsningen har de også brukt 6 kr og 4 kr)	Tom og Erik	De undersøker også hver mynt-verdi, men ser ikke på og undersøker muligheter med kombinasjonen/e av myntene. De finner den nærmeste løsningen de kan komme 20 kroner med 5 mynter. Interessant vinkling på oppgaven
Ingen! Det går ikke an å bruke 20 kr mynten fordi da blir 20 kr med 1 mynt og vi skulle ha 5 mynter Det går ikke an å bruke mer enn 1 tier (de prøver dette): 10+5+1+1+1 (setter kryss over når de ser at det ikke går) Det går ikke med noen tiere fordi da blir svaret feil Det går ikke an å bruke 1-ere eller 50-øringer fordi da blir svaret for lite. Siden vi ikke kan bruke myntene 20, 10, 1, 50 øre har vi bare femmere igjen men da blir svaret 25 og det blir for mye, eller det kan bli 20 kr men da har vi bare brukt 4 mynter. Det går ikke!	Anne og Synne	Dette er en grundig forklaring. De undersøker myntene hver for seg og tar også med kombinasjonene av disse. Egentlig er det bare en kombinasjon (10+5+1+1+1) som bør vurderes og den har A og S tatt med. Elevenes forklaring følger her en logisk tankerekke og jeg mener at dette resonnementet er av den høyeste grad av det man kan forvente av elever på dette trinnet.

I de to første resonnementene i tabellen ovenfor, trekker elevene en konklusjon ut fra det Brousseau og Gibel (2005) beskriver som et ufullstendig resonnement. Her finnes det hull eller åpninger som gjør at disse må betraktes som ukomplette og mangelfulle resonnementer. Ingen av de to elevparene har blant annet studert kombinasjoner av myntene. Elevene

konkluderer med at: ”Det finnes ingen nøyaktig løsning” og ”Vi finner ingen”. Elevenes resonnement er her ikke en fullstendig formulering fordi det mangler flere begrunnelser. Resonnementer med slike trekk, som nevnt i dette avsnittet, definerer Brousseau og Gibel som et N2-resonnement.
Et N2-resonnement spiller en viktig rolle i muntlig aktivitet. Alle resonnementene her har utspring fra en muntlig aktivitet og resonnementene preges av den situasjonen de har blitt formet i.

Anne og Synnes sitt resonnement, det siste eksempelet i tabellen ovenfor, skiller seg ut. Resonnementet refererer tydelig til elementene i situasjonen, de fem norske myntene, fem mynter og til sammen tjue kroner. Resonnementet er basert på en rekke korrekte og sammenhengende slutninger. Elevene har betraktet hver enkelt myntenhet, unntatt 50-øringer, eliminert noen mynter underveis og forklart hvorfor. Deretter satte Anne og Synne sammen en kombinasjon av de resterende myntene og resonnerte videre ut fra denne. De trakk nye konklusjoner underveis. Tilslutt satt de igjen med bare 5-ere. Det er tydelig at elevene har hatt kontroll over situasjonen.
Ut fra det jeg har pekt på i dette avsnittet mener jeg at Anne og Synnes resonnement, i følge Brousseau og Gibel (2005), kan ses på som et N3-resonnement.

5.2.5 Oppsummering av oppgave med ingen løsning

Lithner (2006) hevder at dersom en lærer får elever til å resonnere over noe utradisjonelt, noe nytt, vil det være lettere å få tak i og få fram hvordan elevene tenker. I myntoppgaven var dette utradisjonelle at hovedoppgaven ikke hadde noen løsning. Elevene reagerte ulikt på å få presentert en slik oppgave. Ine ble i følge henne selv og samarbeidspartneren, stresset. Erik var frustrert fordi han ikke fant en løsning. Han betraktet ikke ”det finnes ingen løsning på dette problemet” som en løsning. Men under oppsummering i lyttekoken presenterte resten av elevene sin løsning, på mynt-problemet med ingen løsning, som en hvilken som helst annen løsning. Det virket på meg som om det var helt naturlig at disse elevene hadde løst et problem som ikke hadde noen løsning.

Hva gjør elleveåringer når de finner ut at et problem ikke har løsning? Jo, flere av dem lager seg nye hypoteser som har løsninger. Hva hvis vi har andre typer mynter som for eksempel 2-kroner og 3-kroner? Enn hvis vi kan dra til et annet land (underforstått at det landet har andre myntenheter)? To elever konkluderte med at det ikke finnes en nøyaktig løsning og stiller derfor spørsmålet: Hvilken løsning er da den nærmeste løsningen?

I teorikapittelet skrev jeg om interaksjonen mellom problemløsning og spørsmålsformulering. som i følge Silver (1997), kan lede til kreative aktiviteter. Dette kan, i følge han, være tilbakemeldinger eller responser på et problem. Tilbakemeldingene kan som i eksemplene ovenfor, være formet som spørsmål.
Silver knytter tre nøkkelord til kreativitetsbegrepet: Flyt (fluency), fleksibilitet og originalitet (novelty). I følge Silvers definisjoner inneholder to av de kreative eleveksemplene en stor grad av fleksibilitet: ”Hva hvis vi har andre typer mynter som for eksempel 2-kroner og 3-kroner?” eller ”Enn hvis vi kan dra til et annet land (underforstått at det landet har andre myntenheter)”. Her tilpasser elvene nye tilnærminger til oppgaven ved at de tenker seg at det finnes andre myntenheter. Elevene tilnærmer seg problemet ved å formulere spørsmål av typen ”What-if” eller ”What-if-not”.
Den kreative tilbakemeldingen fra elevene som skrev, ”Hvilken løsning er da den nærmeste løsningen?”, rommer en stor grad av originalitet. Her formulerer elevene et problem som er noe annerledes enn det opprinnelige. Jeg betrakter dette som et nyskapende og friskt innspill.

5.3 Oppgave med uendelig mange løsninger

5.3.1 Dagens tall

Dagens tall er en sammensatt oppgave med mange muligheter. Oppgaven består av fire deloppgaver:
Dagens tall er tallet 1.

A. *Lag divisjonsstykker hvor svaret skal bli 1.*
B. *Lag multiplikasjonsstykker hvor svaret skal bli 1*
C. *Lag subtraksjonsstykker hvor svaret skal bli 1*
D. *Lag addisjonsstykker hvor svaret skal bli 1*

Jeg kommer igjen tilbake til Lithners (2006) påstand at ved å få elever til å resonnere over noe utradisjonelt eller nytt, vil det være lettere å få tak i og få fram hvordan elevene tenker. Dagens tall har uendelig mange løsninger, og det var nytt for elevene i den her sammenhengen. Dessuten er løsningene i dagens tall oppstillinger av forskjellige regnestykker. Svaret på regnestykkene er gitt.
Hvordan ville elevene svare på spørsmålet: Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke? Forklar hvorfor dere tror det.
Min aksjon var å utfordre elevene til å nærme seg former for generalisering i sine forklaringer og resonnementer. Hvilke spørsmål måtte jeg stille for å få 11-åringene i gruppa til å utrykke dette på best mulig måte?

Jeg vil konsentrere meg om to av deloppgavene og analyserer bare det innsamlede materiale i forbindelse med divisjon og subtraksjon. Fokuselevene var i utgangspunktet Ine og Finn samt Anne og Synne, men i dagens tall blir det deler av lyttekroksekvensene det jeg fokuserer mest på.

5.3.2 Eksempler på elevenes resonnement

Vi startet med divisjon fordi jeg mener at innefor dagens tall, så er divisjon den regnearten hvor det er enklest å uttrykke generalitet.
På samme måte som myntoppgaven uten løsning, løste elvene oppgaven og forklarte om de trodde det fantes flere løsninger eller ikke. Vi hadde ingen oppsummering i mellom oppgaveløsning og begrunnelser.
Når elevene skulle finne eksempler på divisjonsstykker hvor kvotienten skulle være lik 1, valgte de tall fra tallmengden positive, hele tall. De første eksemplene på regnestykker som alle elevparene laget, var innefor tallintervallet 1 til 10. Noen elever fant fire eksempler på divisjonsstykker hvor kvotienten er lik 1, andre skrev over tjue.
Elevene oppfattet fort at i dagens tall var det ikke snakk om et bestemt antall løsninger, men en stor mengde med løsninger, en uendelig stor mengde med divisjonsstykker hvor kvotienten var lik 1.

Noen elever brukte begrepet uendelig og enkelte av disse hadde en viss forståelse av hva det betydde. Andre elever var usikre på hva det ville si at noe var uendelig og brukte andre måter å forklare at det finnes et stort antall løsninger mengden med antall løsninger på (min avskrift):

- Det finnes uendelig med løsninger for eksempel 1000 0000: 1000 0000 =1 (Jng, Jmg).
- Det er uendelig fordi du deler med det samme for eksempel 9999999:9999999=1 (Jrg)
- Jeg tror det finnes flere løsninger fordi hvis du deler et tall med det samme tallet blir det for eksempel1297:1297=1 (Erik, Tom)
- Og sånn kan du fortsette … (Henviser her til de eksemplene de har skrevet).
  100 0000: 100 0000 = 1. Jeg tror det finnes flere løsninger fordi du kan gange (mener her dele)alle tall, men det må være like siffer (Ine, Finn).

Jeg tror elevene på dette trinnet og i denne sammenhengen så på et stort tall som et slags ekstremeksempel. Elevene visste at det går an å lage divisjonsstykker med lave, positive, hele tall, og når det fungerte for tall med et stort antall siffer, så hadde de kanskje en formening om at det da ville gjelde for alle de andre hele tallene som ligger i intervallet mellom de to eksemplene. I følge Piaget (1974, i Balacheff, 1988) så er det å prøve ut et lite antall eksempler for så å bekrefte at det gjelder for alle, en av de første måtene å utrykke generalisering på.

Det kan være problematisk for elevene å forklare hvorfor det finnes uendelig mange løsninger. Ikke minst stiller det krav til at de har et redskap, et matematisk språk som de kan bruke. I det siste prikkpunktet ovenfor blander elevene en del begreper som gjør at det er vanskelig å oppfatte hva de mener.
Andre elever forklarer skriftlig hvorfor det finnes uendelig mange løsninger på følgende måter (min avskrift):

- Alle måtene går hvis du deler et tall med det samme. Vi kan finne noen flere måter fordi det er uendelig med tall. Alle tall går hvis vi deler et tall med seg selv (Pål, Vivi).
- Det er uendelig fordi når tallet deles med seg selv så får man et (Trg og Vej).
- Vi tror det finnes flere løsninger fordi hvis vi tar alle tall i verden og deler det med det samme, blir alle svarene 1 (Vjj og Aaj).
- Hvor mange divisjonsstykker kan vi få når svaret blir 1? 1 – 100.000.000.000.000.000. Vi tror vi ikke har funnet alle løsningene fordi tallene fortsetter og da kan vi ta fra ∞ (uendelig) til 1 og alle blir (Jej, Nsg)

Da elevene var ferdige med divisjonsoppgaven, hadde vi en oppsummering i lyttekroken. Jeg gjengir tre korte sekvenser fra denne samtalen hvor noen av elevene prøvde å forklare hva det vil si at noe er uendelig:

Trg: Det e uendelig løsninga fordi det, når, når tallet deles med sæ sjøl, så bli det en.
AG: Uendelig løsninga.
Trg: Ja.
AG: Ka, ka e uendelig løsninga?
Trg: Det, det, det stoppe aldri. Det e alltid en ny løsning.

Jej: Vi trur at vi ikke har funnet alle løsningan fordi tallan fortsette. Det stoppe aldri, så da kan vi ta fra (pause 2 sekunder). Det stoppe aldri, vi kan få helt til tallan stoppe, men det stoppe jo aldri så det blir jo forferdelig my løsninga.

Iej: Uendelig e lissom ikke et tall, det bli lissom litt som, hvis du si sånn, du kan ikke si at du har funnet verdens største tall, fordi at det finnes alltid noe større. Også, også, uendelig blir lissom sånn, veldig, veldig stort, sånn, du veit ikke helt kor stort heller, på en måte
AG: Flott forklart!
Jmg: Når du ska skriv uendelig så kan du skriv et liggende åttetall, sånn at det betyr på en måte uendelig.

I denne oppgaven bygger elevenes resonnementer på tallforståelse. Det gjelder både hvordan tallene er satt sammen og hva det enkelte sifferet representerer, men også hvordan elevene oppfatter de ulike representasjoner av tall i form av heltall, brøk og desimaltall. Elevene betraktet stort sett bare positive tall.

Sammen med tallforståelse gjenspeiles også elevenes oppfatning av hvordan tallene behandles innefor den enkelte regnearten. Det er en utfordring for elevene samtidig å kunne forklare likhetstrekkene i regnestykkene, dvs det generelle, og sammenhengen mellom tallene innenfor den enkelte regnearten på en entydig måte. Elevene er avhengig av et språk for å kunne sette ord på dette. Jeg oppfatter at det er lettere for elevene å utrykke dette muntlig, spesielt i dialog med en lærer.

Jeg synes at det her er mer utfordrende å analysere elevens resonnementer enn tidligere. Slutningene kommer ofte ikke i en naturlig rekkefølge samtidig som elevene bruker et språk som i denne sammenhengen, ikke er entydig. Spesielt må jeg tolke de skriftlige formuleringene deres. Vivi og Pål formulerer hvorfor de tror at de ikke har funnet alle løsningene på dagens tall, innefor divisjon, på følgende måte:

Alle måtene går hvis du deler et tall med det samme. Vi kan finne flere måter fordi det er uendelig med tall. Alle tall går hvis vi deler et tall med seg selv.

Elevene forklarer på sitt vis at når man deler et tall med seg selv så får man en kvotient lik 1. Fordi det finnes uendelig med tall, så må det finnes uendelig med løsninger, dvs divisjonsstykker hvor kvotienten er lik 1.

Et resonnement betegnet som et N3-resonnement (Brousseau og Gibel, 2005),
baseres på en rekke av korrekte, sammenhengende slutninger. Hos Vivi og Pål er kanskje ikke slutningene formulert korrekt, men slutningene er sammenhengende til tross for at de ikke opptrer i en naturlig rekkefølge.
Etter mitt syn så inneholder resonnementet kvaliteter som ligger nærmere definisjonen av et N3-nivå enn et N2-nivå.

> The quiality of the reasoning must not be determined by its correctness, but also by the context.
>
> Lithner, 2006, s. 11.

Med støtte i Lithner så mener jeg at når to 11-åringer fremstiler et slikt resonnement, ser jeg på det som en veldig god prestasjon. Hadde derimot en matematikkstudent utført det samme resonnementet, ville jeg ha vurdert det annerledes. Jeg klassifiserer derfor Vivi og Pål sitt resonnement som et N3-resonnement.

Under arbeidet med divisjon var det ikke naturlig å trekke inn andre tallmengder enn positive, hele tall. Elevene hadde klart å svare på om det fantes flere løsninger eller ikke, og om det samme gjelder for brøk og desimaltall, var uinteressant.

5.3.3 Sammenligning av elevenes resonnement

Elevene mente også at det finnes uendelig mange løsninger av subtraksjonsstykker hvor differansen er lik 1. Men hva er det som er felles for alle regnestykkene? Dette måtte de kunne beskrive for å forklare at det finnes uendelig mange løsninger.
Elevene laget eksempler på regnestykker hvor differansen var lik 1, og det var ingen overraskelse at de bare brukte positive, hele tall i alle tilfellene. Vi hadde tidligere snakket mye om begrepet uendelig under divisjon, så nå ble det naturlig at vi fokuserte mer på generaliteten i regnestykkene. Noen av elevene forklarte de generelle trekkene for at et subtraksjonsstykke skal ha en differens lik 1, slik (min avskrift):

- Du må ta et tall en mindre enn det tallet du har, og ta det tallet du har – (minus) det tallet du fant ut for å få en (Anne, Synne).
- Vi tror det finnes flere svar fordi hvis vi tar 53-52 = 1 så er det bare å ta et tall mindre enn det vi startet med (Vjj, Aaj).
- Du kan minusere alle tall bare det ene tallet er et siffer større (Ine, Finn).
- Hvis vi subtraherer et tall med det tallet som er før. Får vi en uansett. Hvis du skal bruke hele tall, så må du trekke fra tallet under. Eks. 99 – 98 = 1 (Pål, Vivi).

Elevene kan bare forholde seg til den fagkunnskapen de har (lært fram til nå).
Resonnementene og generaliseringene begrenses av den delen av matematikken som er kjent for elevene. I ”Dagens tall” innefor subtraksjon var det naturlig for elevene å resonnere ut fra tallmengden hele, positive tall. Fordi 11-åringene blant annet ikke kjenner til hvordan de skal subtrahere negative tall, kan de ikke velge hvilket som helst helt tall.
Tallmengden elevene resonnerer ut fra er forskjellig fra den tallmengden jeg resonnerer og generaliserer ut fra. Jeg velger mine tall fra de reelle tallene. På grunn av dette så får jeg under oppsummeringen et uventet innspill fra elevene. Det dukker opp et unntak fra den generelle regelen.
Vi satt i lyttekroken og elevene hadde besvart spørsmålet: Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke. De hadde også forklart hvorfor.
Jeg spurte elevene, ganske tilfeldig, om den samme regelen ville gjelde for desimaltall.

> Janne: Det e også en slags regel da. Hvis du har 1 og så har du null komma tjue, en komma null komma tjue (1, 020?), så tar du bort null komma tjue, så bli det jo.
> AG: Du tar det som

Janne: bak, bak 1 (ett-tallet).
AG: Akkurat, men hvis du har to komma tjuefem for eksempel (2,25).
Janne: Da må du ta (bort) en komma tjuefem.

Janne forklarer hvordan regelen er for desimaltall. Jeg spør her om Janne kan ta det tallet hun trekker fra, dvs. 1,25 og sammenligne det med 2, 25. Det blir stille en stund før hun sier at det kan hun ikke. Jeg oppfatter at spørsmålet er vanskelig, lar det bare ligge og henvender meg til neste elev.
Torgeir mener at regelen for desimaltall er den samme som for hele, positive tall:

Torgeir: Det e den samme, samme regelen (som med hele tall) bare at man må minuser bort alle desimaltallan. Man må ta bort alle desimaltallan. Må minuser dæm bort.
AG: Samme eksemplet som æ spurt Janne om. To komma tjuefem, hvis æ da tar bort alle desimalan da, så står æ igjen med 2.
Torgeir: Man må minuser med en mindre.
AG: En mindre pluss desimaltallan, e det det du si?
Torgeir: Ja
AG: Får æ vis dæ et eksempel på tavla? (Skriver på tavla 625,741) Kom hit og forklar.
Og da har Torgeir en teori:
Torgeir: Da må æ ta minus 624, altså det en mindre enn det der (peker på tallet på ener-plassen).
AG: En hel mindre enn det (det tallet jeg skrev på tavla).
Torgeir: Og ta bort dæm der (Han viser til tallene bak komma. Han skriver 624,741).
AG: Og svaret e?
Torgeir: En

Etter en stund sier Tom:

Tom: Ka hvis det e null komma seksten da?
AG: Ka hvis det e null komma seksten?
Tom: Det va det æ som fant på.
Ine: Da må vi ta pluss eller gange, for hvis vi tar minus, så blir det bare mindre.
AG: Vi har nån regla her som si at vi kan ikke jobbe med tall under
Tom: null!
Erik: En!
Noen andre: Null!
AG: Bestem dåkker!
Tom: Under en!
Flere andre elever: En!
AG: Så bra at dåkker ble enig da. […] Vi kan ikke jobbe med tall under 1. Interessant!

Anne og Synne hadde også oppdaget at det var et unntak fra regelen. De hadde skrevet på arket sitt: Du kan ikke ta et tall mindre enn 1 når du skal ta minus for å få en. Det var etter at de hadde laget subtraksjonsstykker med desimaltall hvor differansen var lik 1.

5.3.4 Oppsummering av oppgave med uendelig mange løsninger

Vil den samme regelen som elevene laget for heltall også gjelde for desimaltall?
Ettersom 11-åringene holdt seg innenfor tallmengden positive tall, hadde jeg sett for meg et kort og greit svar på det spørsmålet jeg stilte: Ja, regelen vil også gjelde for desimaltall. (Så lenge differansen i absoluttverdi mellom de to tallene er 1 gjelder regelen, kunne jeg ha føyd til). I ettertid ser jeg at flesteparten av de reglene elevene hadde laget for hele tall, ikke kunne brukes for desimaltall. Vivi og Pål hadde skrevet: "Hvis vi subtraherer et tall med det tallet som er før. Får vi 1 uansett".
Dette var deres regel for hele, positive tall, men hvordan ville denne fungere for desimaltall? Hvilket tall er for eksempel før 2,25?

Fordi at regelen min var annerledes enn elevenes, hadde jeg heller ikke sett for meg hva som i det her tilfellet ble et unntak. Det er viktig å prøve å sette seg inn i hva elevene resonnerer ut fra. Gjør ikke læreren det så kan mange av elevresonnementene bli sett på som mangelfulle og til dels feilaktige.

Det var utfordrende å formulere spørsmål som skulle få elevene til å beskrive det generelle i regnestykkene. Jeg prøvde meg på flere formuleringer: Hva er mønsteret i regnestykkene, hva er likhetstrekkene, finnes det en regel eller oppskrift på hvordan vi lager regnestykkene innenfor den enkelte regnearten. I ett tilfelle prøvde jeg å få elevene til å beskrive hvordan regnestykkene så ut. Det fungerte ikke! To elever skrev: "Et tall, så et tegn, så et tall, så et tegn og så svaret".
Spørsmålsformuleringen var viktig for at elevene skulle oppfatte hva de skulle se etter eller legge merke til, men også for at jeg skulle kunne klare å fremme det matematiske i elevenes resonnementer.
Det var greit for elevene både å oppdage og uttrykke generaliteten i divisjon. De kunne bruke et hverdagslig språk for å forklare hvorfor det finnes utallige divisjonsstykker som gir kvotienten 1:

E. […] når tallet deles med seg selv så får man et (Trg og Vej).

Det var mer krevende for elevene å forklare generaliteten innefor subtraksjon. Elevene valgte seg et helt, positivt tall og ut fra dette første tallet, beskrev de det neste tallet. Jeg mener resonnementet kan gjenspeile den måten elevene utfører regneoperasjonen på.
Jeg prøvde å komme med noen innspill for å oppmuntre elevene til å sammenligne de to tallene i stedet for å betrakte det ene tallet ut fra det andre (se samtalen med Janne). Jeg hadde en ide om at det kanskje ville være enklere for dem å beskrive generaliteten ved å si at

forskjellen mellom de to tallene alltid må være lik 1. Men det var ikke naturlig for elevene å sammenligne disse to tallene. Jeg oppfattet at de ikke var vant til å tenke subtraksjon som forskjellen mellom to tall.

6 Analyse av elevenes resonnement del 2

I dette kapittelet vil jeg se alle elevresonnementene under ett uavhengig av hvilken oppgave det enkelte resonnement tilhører. Jeg vil trekke fram noen eksempler på elevers resonnementer og bruke Baroodys (1993) inndelinger, intuitive -, induktive – og deduktive resonnementer, som verktøy i analysen. Via denne analysen vil jeg blant annet bruke hans definisjon av deduktive resonnement sammen med Lithners (2006) definisjon av kreative resonnementer for å analysere et spesielt elevresonnement.

Å analysere eller tolke elevers resonnementer som enten den ene eller andre formen for et matematisk resonnement, er i de fleste tilfeller umulig. Det er heller ikke hensikten med mitt arbeide. Elevenes resonnementer er sammensatt av flere argumenter. Innenfor ett og samme resonnement kan et eller flere av argumentene for eksempel tolkes som intuitive, mens andre er mer formet som induktive resonnementer. Når jeg analyserer enkelte av elevenes resonnementer, så kan det være interessant å se om jeg for eksempel kan finne induktive trekk i 11-åringenes resonnementer.

I tillegg vil jeg betrakte en av elevenes forklaringer som en resonneringsprosess, for dermed å se at evnen til å resonnere stadig er i utvikling. Da kan jeg som lærer være med å påvirke prosessen, dvs. å hjelpe elevene til å utvikle deres resonnement. Analysen har til hensikt å finne ut hva som kan utvikles eller utdypes i det enkelte tilfellet.

6.1 Intuitive resonnementer

Et intuitivt resonnement definerer Baroody (1993) som et "lekent" resonnement. Han mener denne formen for resonnement skjer ved at elevene spiller videre på et innfall eller en ide som naturlig dukker opp i den gitte situasjonen. Elevene bygger sin konklusjon på en klar og tilgjengelig kjennskap eller innsikt som kjennes riktig for dem.
Her er noen eksempler på det jeg vil kalle intuitive resonnementer (min avskrift):

- Vi tror ikke det finnes flere (is) typer fordi vi dobbeltsjekket alle typene (Vivi og Pål, iskremoppgaven).
- Vi tror ikke det finnes flere løsninger fordi vi ikke finner noen (Asj, Jng, mynt-oppgaven)
- Vi tror at det ikke finnes flere muligheter fordi … Det er litt rart om 18 personer ikke finner flere (Ine og Finn, myntoppgaven).

Jeg ser at elevene resonnerte på ulike måter, men med en innsikt eller en tigjengelig kjennskap som bygget på en ide hentet ut fra den gitte situasjonen. To elever konkluderte med at: ”Vi tror ikke det finnes flere løsninger fordi vi ikke finner noen”.

For å kunne løfte fram elevers intuitive resonnementer, så må læreren sørge for at undervisningsmiljøet preges av en åpenhet som tillater elevene å legge fram sine ideer og innfall (Bjuland, 2002). Det er viktig at elevenes ufullstendige resonnementer blir mottatt og behandlet på en god måte både av medelever og av lærer.

6.2 Et spesielt elevresonnement

Av de skriftlige resonnementene jeg har samlet inn, så skiller Anne og Synnes forklaring på myntproblemet med ingen løsning, seg ut fra alle de andre (resonnementet er gjengitt både i tabellen på s. 52 og i tabellen under). Dersom jeg analyserer dette resonnementet både ved å sammenligne det med kriterier fra et deduktivt resonnement og samtidig med kriterier fra et kreativt resonnement, vil jeg kunne se kvalitetene ved elevenes resonnement tydeligere.

Jeg har laget en tabell og plassert elevenes resonnement i midten. Til venstre har jeg splittet opp definisjonen på et deduktivt resonnement i punkter. Til høyre har jeg gjort det samme med definisjonen av et kreativt resonnement. Deretter har jeg trukket enkelte forbindelseslinjer mellom elevenes resonnement og kriteriene for et deduktivt og et kreativt resonnement. Jeg har nummerert enkelte av forbindelseslinjene for å kunne henvise til disse seinere. Noen av elevens ytringer kunne ha passet sammen med flere av kriteriene innefor kreativt og deduktivt resonnement, disse er ikke nummerert.

Kreativt resonnement

1. Originalitet:
Ny løsningssekvens for elevene. Ikke imitert resonnement.

2. Fleksibilitet:
Tilnærmingsmåtene er tilpasset situasjonen.

3. Plausibilitet:
Kvalitative gjetninger , følelsesmessige begrunnelser, ikke nødvendig overveid. Vage intuisjoner.

4. Matematisk fundamentering:
Argumentasjonen i resonnementet må bygge på og inneholde vesentlige matematiske egenskaper.

Anne og Synnes resonnement:

Det går ikke an å bruke 20 kr mynten fordi da blir 20 kr med 1 mynt og vi skulle ha 5 mynter

Det går ikke an å bruke mer enn en 10-er (de prøver dette):
10+5+1+1+1 (setter kryss over når de ser at det ikke går)
Det går ikke med noen tiere fordi da blir svaret feil

Det går ikke an å bruke 1-ere eller 50-øringer fordi da blir svaret for lite.

Siden vi ikke kan bruke myntene 20, 10, 1, 50 øre har vi bare femmere igjen (og har da to muligheter enten fire eller fem 5-ere):
men da blir svaret 25 og det blir for mye, eller det kan bli 20 kr men da har vi bare brukt 4 mynter.

Det går ikke!

Deduktivt resonnement

Fast fundamentering som gjenspeiles i forutsetningene i form av logisk argumentasjon.

Sann konklusjon hvis:

Forutsetninger for argumentet er sant. Argumentet er logisk eller gyldig.

Elevenes resonnement har en fast fundamentering fordi elevene argumenterer systematisk og logisk (1). Argumentasjonen bygger på forutsetningene i oppgaven, dvs. myntenhetene, antall mynter og verdien av alle myntene til sammen (2). Resonnementet består av kvalitative gjetninger (3). Konklusjonen trekkes på grunnlag av logiske argumenter. Derfor er konklusjonen sann. (4).
Tilnærmingsmåtene er tilpasset situasjonen ved at elevene noen ganger betrakter den enkelte myntenheten opp mot forutsetningene i oppgaven, andre ganger prøver seg fram ved å kombinere flere mynter (5).
I tillegg har jeg som lærer ledet elevene inn i en løsningssekvens som er ny for dem. Elevene har ikke tidligere arbeidet med problemløsningsoppgaver hvor det ikke finnes en løsning på problemet (punkt 1 under kreativt resonnement).

Jeg mener at Anne og Synnes resonnement har flere likhetstrekk med både et kreativt og et deduktivt resonnement. Begge disse resonnementstypene er definert som resonnementer av høy kvalitet. Derfor må elevresonnementet også være av høy kvalitet.
Jeg vil igjen støtte meg på Lithners (2006) påstand om at et resonnement ikke bare bør bestemmes ut fra dets riktighet, men også ut fra sammenhengen. Når to 11-åringer fremstiller et resonnement med slike kvaliteter slik som Anne og Synnes har gjort, ser jeg på det som en meget god prestasjon.

6.3 Elevresonnement i en utviklingsprosess

Baroody (1993) beskriver tre former for resonnementer: Intuitivt -, induktivt - og deduktivt resonnement. Disse er her plassert i en slags stigende rekkefølge hvor det deduktive resonnementet er det resonnementet med størst styrke og av høyest kvalitet.

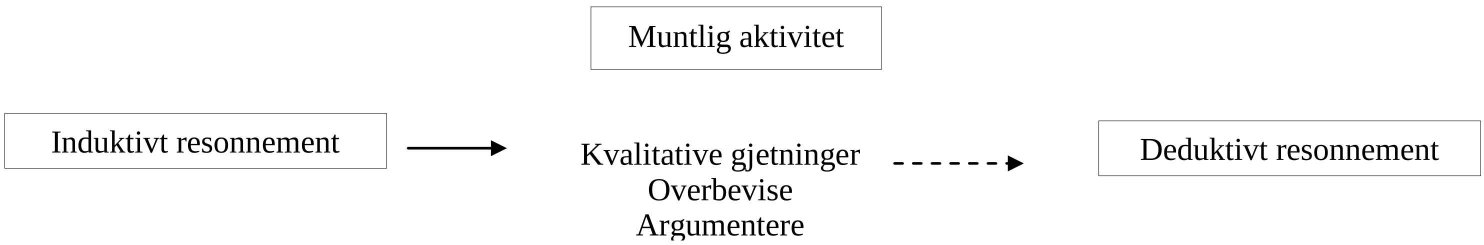
Elevenes resonnementer inneholder argumenter med induktive kvaliteter, men i enkelte tilfeller kan det finnes argumenter med deduktive kvaliteter i samme resonnement. For å kunne betrakte elevers resonnementer som en del av en utviklingsprosess, er det interessant å betrakte elevenes forklaringer som en mellomting av et induktiv og et deduktivt resonnement. Hva er det i elevenes resonnement som kan utvikles og hvordan kan resonnementet utvikles eller utdypes?

Jeg vil komme med et eksempel hvor jeg tar utgangspunkt i et resonnement fra myntoppgaven. Resonnementet er satt sammen av et skriftlig og et muntlig resonnement hvor det muntlige utdyper det elevene har skrevet på arbeidsarket.
Jeg ser først på det skriftlige resonnementet:

- Vi tror det ikke finnes flere mynter som til sammen blir femti fordi at vi kan ikke ta med 50 øre for da blir det for lite. Og vi kan heller ikke ta tre 20 kroner for da blir det for mye. Også har vi prøvd mange forskjellige forslag, og vi fant to svar, men resten ble det samme eller for mye eller for lite.

Her er det Tom og Erik som prøvde å forklare hvorfor det ikke var flere løsninger ved å vise til noen få eksempler med myntene. Elevenes resonnement kan ikke alene påvise at konklusjonen er sann. Dette er et trekk ved induktive resonnementer.

Før jeg går videre til den muntlige delen av resonnementet, vil jeg trekke inn Bjulands (2002) resonnementsprosesser som jeg beskrev i teorikapittelet. Han betrakter elevenes resonnementer som en del av en utviklingsprosess.
Bjuland hevder at dersom elever skal være i stand til å komme med deduktive argumenter, så er det viktig å arbeide med resonnementsprosesser som innebærer kvalitative gjetninger (conjecturing) og overbevisninger (convincing). Samtaler i klasserommet hvor elever kvalitativt gjetter og overbeviser, kan være en måte å utvikle elevenes resonnement på, dvs. å gå fra et induktivt resonnement mot et deduktivt resonnement. Jeg har laget en illustrasjon som forklarer denne prosessen:



Den muntlige delen av Erik og Toms resonnement, er hentet fra en transkribert samtale mellom elevene og meg (læreren). Elevene arbeidet her ved pulten, de hadde skrevet sin forklaring på arbeidsarket og så kom jeg bort til der de satt. Etter å ha lest det de hadde skrevet på arbeidsarket, ba jeg elevene forklare meg hva de mente med ”for mye eller for lite”.

> Erik: (Erik starter nå på en lang forklaring på hvorfor det ikke går an å bruke 50 ører:) For hvis vi har to 50-øringa
> AG: Ja.
> Erik: asså, asså, du kan, kan ikke bare ha to 50-øra
> AG: Nei.
> Erik: nei, for da, for da har vi to her
> AG: Mmm
> Erik: så har vi tre, fire, fem, nei, en to, tre, fire, fem (Erik bruker tilgjengelige papp-mynter når han forklarer).
> AG: ja, til sammen fem krona (Han fyller opp med 1-ere slik at han får til sammen fem kroner).
> Erik: Da har vi seks (mynter).
> AG: Seks mynta mmm.
> Erik: Også, da må vi ha en 5-er til, så det blir en 10-er (Fyller opp til nærmeste 10-er. Det ligger nå sju mynter på bordet)

Erik tenkte videre og trakk følgende konklusjon: ”Også e det ingen lønnsomhet (utydelig tale), for det e ingen mynt som e 40, og da går det ikke”.

Erik prøvde å argumentere for å overbevise meg at det de hadde skrevet på arket var gyldig. Jeg ser på hans argumentasjon som logisk og argumentasjonen kan gjenspeiles i forutsetningene. Dette er kriterier for et deduktivt resonnement, og derfor har denne muntlige delen av elevenes resonnement deduktive kvaliteter.

Samtalen mellom guttene og meg er et eksempel på det Bjuland (2002) hevder er en resonneringsprosess hvor elevene gjennom argumentasjon og overbevisning klarer å nærme seg former for et deduktivt resonnement. I mange sammenhenger vil det finnes et utviklings - og utdypingspotensiale i elevenes resonnementer noe som gjenspeiler seg i dette sammensatte resonnementet. I tilfelle Tom og Erik stilte jeg et spørsmål som satte i gang en prosess. Et lignende innspill fra en annen elev, kunne ha gjort samme nytte.
Ved å sammenligne første delen av resonnementet med den muntlige delen, så finnes det tydelig spor at det har skjedd en utvikling.

Jeg vil igjen bemerke at elevenes muntlige resonnementer er mer utfyllede sammenlignet med de skriftlige. Deler av det elevene har resonnert seg fram til muntlig utelates når det skriftliggjøres. Men ved å vise til dette eksempelet som består av både et skriftlig og et muntlig resonnement, så bekreftes Bjulands (ibid.) teorier om elevenes resonneringsprosesser i enda sterkere grad.

6.4 Oppsummering

I dette kapitlet har jeg brukt Baroodys (1993) og Lithners (2006) sine definisjoner på ulike former for resonnement for å belyse enkelte av elevenes resonnementer. I tillegg har jeg støttet meg på teorier fra Bjuland (2002). Hensikten var å vise at en analyse kan brukes til noe mer enn bare å rangere elevenes resonnementer etter nivåer.

Jeg har vist eksempler på hvordan 11-åringer kan resonnere ut fra en gitt situasjon og hvordan de brukte argumenter som falt seg naturlig for dem å bruke i denne situasjonen, det som kan kalles intuitive resonnementer. Jeg mener at denne måten å resonnere på er kjent for elevene. Mange elever resonnerer intuitivt når de muntlig må argumentere for et eller annet. Derfor var det interessant å vise eksempler på intuitive resonnementer under problemløsning.

I visse sammenhenger kan det være gunstig å studere et elevarbeid for å kunne peke på kvalitetene i arbeidet. Jeg analyserte et spesielt elevresonnement ved hjelp av Baroodys

(1993) kriterier for deduktive resonnement og Lithners (2006) definisjon av et kreativt resonnement. Jeg hadde mistanker om at Anne og Synnes resonnement var av høy kvalitet, men var ikke klar over at resonnementet hadde så mange likhetstrekk med et deduktivt og kreativt resonnement.
Et av spørsmålene jeg stilte i innledningen var: Hvilket utviklingspotensiale finnes i elevenes resonnementer, og hvordan kan jeg som lærer påvirke denne prosessen? Jeg har vist et eksempel på hvordan et elevresonnement kan betraktes som en del av en resonnementsprosess. Lærerens (mitt) innspill til elevene viste et eksempel på hvordan det er mulig å påvirke og starte en slik prosess.

7 Spor av utvikling i elevens resonnement

Med spor av utvikling mener jeg at kvaliteten på innholdet i elevenes resonnementer endres til det bedre.
Jeg ønsker å dele dette avsnittet i to. For å se om jeg kan finne spor av utvikling i elevenes forklaringer, vil jeg først vil jeg se på en enkelt oppgave, deretter ønsker jeg å betrakte alle resonnementene fra aksjonsperioden under ett.

7.1 Spor av utvikling innefor den enkelte oppgave.

Resonnementene som elevene produserte under iskremoppgaven, er eksempler på hvordan 11-åringer klarer å resonnere uten noen form for formell introduksjon til resonnering.

I avsnitt 5.1.4 om betraktninger rundt elevenes spørsmålsformuleringer, viste jeg at Vivi og Pål endret løsningsstrategi underveis (se illustrasjon 3 og 4, s. 42). I elevoppgaven oppdaget de at is-smakene kunne kombineres etter et system, slik fant de antall is-typer ganske lett. Det skjedde en endring i elevenes resonnementsprosess. Denne prosessen har jeg ikke tilgang på siden den skjedde i samspillet mellom elevene. Samtalen ble ikke tatt opp på lydbånd.

Da elevene oppdaget at det fantes et mønster eller et system, så mener jeg dette må ha virket inn på den videre resonneringsprosessen. Jeg vil bemerke at iskremoppgaven har kvaliteter som kan påvirke elevenes resonnementer slik at de endre og mulig utvikles.
Iskremoppgaven leder på samme måte som dropsoppgaven (vist som et eksempel på en rik oppgave i avsnitt 2.3.), til et system og et mønster hvor antall ulike måter å kombinere et

bestemt antall is-smaker på, bygger på trekanttallene. Iskremoppgaven er enda et eksempel på et problem som kan løses fra det konkrete til det generelle. Oppdager elevene mønsteret kan det videreutvikle resonneringsprosessen deres.

I tabellen på side 49, finnes det eksempler på elevenes resonnement hvor de forklarer at det i den første myntoppgaven (introduksjonsoppgaven) så eksisterer det ikke flere enn to løsninger. I tabellen på side 52 viser jeg tre eksempler på hvordan elevene forklarer og resonnerer seg fram til at den andre myntoppgaven (hovedoppgaven) ikke har noen løsning. Jeg vil sammenligne resonnementene tilhørende hver sin myntoppgave.

Min aksjon var at jeg skulle oppfordre elevene til å bruke myntene i sine forklaringer. Noen elever prøver å bruke myntene i sine forklaringer i den første oppgaven, men det blir ganske tilfeldige betraktninger. For eksempel ”Det går ikke an å bruke 50 øre fordi det er så smått” (Iej, Fng) eller ”Man kan ikke bruke flere 20 kroninger enn 2 eller 1, men ikke over to” (Jrg). Ettersom hovedoppgaven ikke har løsning, så presses elevene i en viss grad til å sjekke ut alle mulige sammensetninger med de fem myntene. For tross alt så leter elevene etter en konkret løsning. Elevene måtte betrakte de fleste og aller helst alle myntkombinasjoner for å kunne trekke sin konklusjon. Fordi myntoppgaven (hovedoppgaven) krevde en mer omfattende resonneringsprosess, vil deler av denne gjenspeiles i elevens resonnementer. Elevene ble på grunn av oppgavens egenart oppfordret til et mer systematisk resonnement.
Begge disse kriteriene var med å sette spor av utvikling i elevenes resonnementer.

7.2 Spor av utvikling innenfor aksjonsperioden

Undervisning er en kompleks situasjon, og det er mange faktorer som spiller inn.
Bjuland (2002) hevder at visse aktiviteter hvor elevene utforsker, undersøker, forklarer og beskriver, kan stimulere til utvikling av elevenes resonneringsevne. Kjernen i slike aktiviteter fremheves ved den interaksjonen som skjer mellom flere deltakere ansikt til ansikt. I følge Miller (1986, i Bjuland, 2002), er det her selve læringsprosessen foregår.
Helenius (2006) mener at man ikke bare kan støtte seg på oppgaver i ei lærebok for å utvikle elevenes matematiske resonnement. I lærebøker går ofte progresjonen ut på at elevene skal vise at de behersker å regne med andre eller større tall. For at elevene skal kunne utvikle sin evne til å resonnere må oppgavene endre karakter. Hvis ikke så trenger de ikke å resonnere på en annen måte for å løse neste oppgave.

Aktivitetene, samspillet mellom elevene og oppgavene, var en del av undervisningsmiljøet under hele aksjonen. I mitt tilfelle var det via oppgavene elevene oppøvde sin resonneringsevne, men det skjedde i samspill med andre elever. Oppgavene ble utformet med tanke på å stimulere elevene til ulike former for aktiviteter.

Jeg hadde designet oppgavene ut fra en mal, inspirert av rike matematiske oppgaver, slik at alle tre hadde noen likhetstrekk. For at elever skal kunne bli flinkere til å resonnere hevder Baroody (1993) at det best er å la elever arbeide med oppgaver de er fortrolige med. I løpet aksjonsperioden ble elevene så kjent med oppgaveformen at det ble naturlig for dem å stille seg selv spørsmålet: Har vi funnet alle løsningene eller ikke? Hvorfor tror vi det?

Oppgavene skulle bygge på hverandre etter stigende vanskegrad, og de skulle utfordre og muligens utvikle elevenes resonnementer gradvis. Helenius (2006) mener at dersom det skal skje en utvikling når det gjelder elevenes matematiske resonnement, så må oppgavene etter hvert endre karakter slik at elevene trenger å resonnere på en annen måte for å løse den neste oppgaven. Hos meg var det selve innholdet i oppgavetypen som endret seg.

Jeg mener at det ikke er lett å få elever i barneskolen til å generalisere i matematikk. Men ved at elevene går inn i en mer fullstendig analyse av et rikt matematisk problem, kan de bli mer oppmerksom på sammenhenger og mønstre i matematikken. Dette kan gjøre det lettere for dem å generalisere.
Med gode rammer og under visse forutsetninger, slik som nevnt i avsnittet ovenfor, så har jeg vist at det er mulig for 11-åringer å uttrykke generalitet i sine matematiske resonnementer. Jeg mener at det har skjedd en utvikling i elevenes resonnementer fra iskremoppgaven til dagens tall.

8 Konklusjon og avsluttende kommentarer

Gjennom dette forskningsprosjektet har jeg fokusert på at elevenes resonnementer og deres evne til å utrykke disse muntlig og skriftlig.
Et av målene mine var å avdekke og fremme ulike former for matematisk resonnement hos elever på 6. trinn. Jeg ser at mange 11-åringer resonnerer intuitiv, dvs. de spiller på et innfall eller en ide som naturlig dukker opp i den gitte situasjonen. I andre sammenhenger resonnerer elevene induktivt ved at de argumenterer med en regel som kun gjelder for et bestemt tilfelle. Jeg har også sett og kommet med eksempler på at enkelte av elevene klarer å resonnere deduktivt ut fra at de bygger sine resonnementer på logiske og sanne argumenter.

Videre har jeg via en aksjon, også vist hvordan man med et riktig valg og design av oppgaver, og gjennom gode spørsmålsformuleringer, kan få elevene til å utvikle og utvide sin evne til å resonnere matematisk på et høyt nivå, også for 11-åringer. Ved blant annet å stimulere elevene til å finne eventuelle nye løsninger på oppgaver de allerede har funnet en løsning på, har jeg sett at selv elever med mindre matematisk innsikt kan vise evne til å tenke logisk, resonnere og bruke det de kan fra før til å utvikle sin egen matematiske kompetanse.

Jeg har betraktet rike matematiske oppgaver og spørsmålsformuleringer som mine verktøy i forskningsprosjektet, og jeg vil her trekke fram styrken og eventuelle svakheter ved dem. Jeg vil også svare på tidligere stilte spørsmål som ikke ble besvart i analysedelen.

Rike matematiske problemer og spørsmålsformuleringer som verktøy

Taflin (2003, s. 32) hevder at problemløsning i matematikk leder til og forutsetter mange ulike kunnskaper og ferdigheter. Kan jeg da legge til rette for at det nettopp er evnen til å resonnere oppgavene skal lede fram mot? Dette var et av spørsmålene jeg stilte innledningsvis i prosjektet (se s. 4).
Synet på problemløsning i matematikkundervisningen har endret seg gjennom tidene fra å være en matematikkundervisning for problemløsning til en matematikkundervisning via problemløsning (Wyndham m. fl., 2000, i Taflin, 2003). Jeg har vist at ved å introdusere et ukjent matematisk problem i form av en rik oppgave, er det mulig å utvikle og trene på en bestemt matematisk kompetanse, her matematisk resonnement. Det er essensielt at oppgavene blir valgt med omhu, men også avgjørende i hvilken grad læreren er i stand til å få fram elevens engasjement gjennom tilrettelegging og støttende spørsmålsformuleringer.

Grevholm (2006) mener også at problemløsningen er sentral og at en viktig del av denne er å formulere nye spørsmål. Videre spør Bjørkqvist: Men är det möjligt att problemösning är så centralt för undervisningen i matematikk att man kan beskriva den som matematikes kärna? (Björkqvist, 2001, s. 52). Det er viktig å være bevisst på at det er ikke oppgavene Grevholm og Björkqvist her sikter til, men måten det arbeides med oppgavene på. Det som gjør en oppgave rik er når læreren ser hvilket mangfold av muligheter som ligger i en slik oppgave og klarer å formidle dette til elevene. Læreren må ha oversikt over det matematiske innholdet i oppgavene og ha klare mål for hvordan dette skal presenteres for elevene. Hun må kjenne til måter elever kan arbeide med problemløsningsoppgaver på, slik at de gjennom arbeidsprosessen får tak i det matematiske budskapet og tilegne seg dette. Da først kan en lærer bruke rike matematiske problemer som et verktøy i matematikkundervisningen. Fra beskrivelsen av forløpet under aksjonen i min datainnsamling, går det tydelig fram at disse kriteriene var oppfylt, og at mine tre oppgaver derfor klart må karakteriseres som rike.

Etter aksjonsperioden så jeg at de oppgavene jeg hadde valgt var mer innholdsrike og hadde flere kvaliteter enn hva jeg var klar over i utgangspunktet. Dette var et resultat av at elevenes tenking og forsøk på løsninger som fikk meg til å se nye og andre muligheter med oppgavene. I samspillet mellom elevene og meg og i samspillet mellom elevene oppdages mangfoldet i oppgavene.

Silver og Kilpatric (1989, English, 1998) hevder at elevene må bruke former for original tenkning eller dyp resonnering under problemløsning når løsningsprosedyren ikke er kjent. Det er gunstig at oppgavetypen legger til rette for resonnementsprosesser, og i så måte var det nyttig å velge rike oppgaver som verktøy for å fremme elevenes resonnement.
En metode jeg brukte var at elevene måtte presentere sine egne resonnement for de andre elevene i lyttekroken. Elevene måtte tydeliggjøre sine egne tankeprosesser når de presenterte sitt arbeid for hverandre.

For å kunne bruke spørsmålsformulering som et av mine verktøy, måtte jeg legge forholdene til rette for at elevene skulle se at det er mulig å stille spørsmål ved løsningen på et problem. Jeg måtte være bevisst på at det er både uvant og vanskeligere for elever å argumentere rundt løsningen på ett problem enn det er å løse selve problemet (Wyndhamn og Säljö, 1997). Likeledes er det ikke selvsagt at elever er motiverte til å reflektere over det de har kommet fram til (Björkqvist, 2003, s. 62). Mange elever sier seg ferdige med en oppgave når de har funnet en løsning.

Etter at elevene hadde løst et rikt problem, stilte jeg spørsmålet ”Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke? Forklar hvorfor dere tror det”. Alle elevparene hadde da hver sin løsning å arbeide og resonnere ut fra, og det spilte ingen rolle at de var forskjellige. Noen hadde tegnet en løsning, andre hadde brukt tallsymboler og noen hadde bare funnet deler av løsningen. Jeg mener det var en fordel for elevene at dette spørsmålet gikk igjen i alle oppgavene. Spørsmålet ble et gjenkjennende element for dem. Det ble etter hvert så naturlig for dem å stille spørsmål ved løsningen på et problem at de uten å bli oppfordret til det, selv stilte samme spørsmål. Lærerens ”hvorfor” hadde blitt til elevenes ”hvorfor” (Skovsmose, 2003) (se s. 19).

Spørsmålsformuleringer kan fungere som et verktøy eller virkemiddel i undervisnings-sammenheng (Silver, 1994). Men det er ikke en selvfølge at de fungerer. Det optimale utgangspunktet er et undervisningsklima hvor det er like naturlig at både elever og lærer stiller spørsmål. Her ligger det flere betingelser for at elevenes resonnementer kan fremmes ved hjelp av et slikt verktøy. Jeg mener at hvis elevene oppfatter matematikk ensidig som å finne svar på oppgaver, kan dette hemme læringsprosessen. Det viktigste er å få elevene til å forstå at målet med matematikk ikke bare er å produsere løsninger, men også å produsere kunnskap (Måsøval, 2005, s. 23). Da først kan spørsmålsformuleringer være et verktøy for å fremme elevenes resonnementer slik jeg har vist i dette forskningsprosjektet.

<u>Matematisk resonnement</u>

For å få elever til å resonnere matematisk, må de ifølge Grevholm (2006), overbevises om at de kan tenke matematisk. Læreren må støtte elevene slik at de stoler på egen tankekraft og forstår at de kan resonnere matmatisk, resonnere logisk og overbevise andre om at deres tankegang er riktig. Grevholm (ibid.) mener at all undervisning i matematikk innefor hele utdanningsforløpet må inneholde mange flere tilfeller hvor elevene får utvikle sine evner til å resonnere matematisk. Hensikten med å oppøve evnen til å resonnere matematisk begrunner hun med følgende:

> (…) den som prövat på kraften som ligger i att kunna tänka och resonera matematiskt, har erfarit att den är stärk och mångsidig användbar. Den som har utvecklat denna förmåga kan ha glädje av den i många av livets skeden. (…) Et sätt att göra det (dvs. oppøve sin evne til å resonnere matematisk) är att vara med om att skapa problem, ställa nya frågor och lösa dem med sina matematiska förmågor.

Grevholm snakker her om studenter, men jeg tenker på elever på 6. trinn. Jeg vet at det er mulig å oppøve evnen til å resonnere matematisk gjennom å skape problemer, stille nye spørsmål og løse dem med sine matematiske evner også med en gruppe 11-åringer. Her får jeg en bekreftelse på at jeg har valgt riktige verktøy. Ut fra det Grevholm (2006) sier, har forskningsprosjektet mitt vist en vei for hvordan det er mulig å oppøve elevers evne til å resonnere. Jeg er glad for at jeg har bidratt med noe som elever kan ha nytte og glede av i mange av livets faser, dvs. å kunne resonnere matematisk.

Konklusjon og veien videre

Dersom jeg hadde hatt anledning til å gjennomføre en fjerde aksjon med disse 11-åringene, ville jeg ha lagt til rette for at to og to elever skulle ha vurdert andre sine skriftlige resonnementer. Baroody (1993, s.60) mener at det er viktig å kunne vurdere andres resonnementer ikke bare innefor matematikk, men også ellers i livet. Jeg mener at elevene blant annet kunne ha lært mye av å forklare og begrunne hvilke argumenter i et gitt resonnement, de vurderer som gode og hvilke som ikke holder mål.
I løpet av aksjonsperioden har to og to elever, til en viss grad, vurdert og godkjent hverandres resonnementer, men det var ikke det som var det sentrale i den gitte situasjonen. Jeg kunne i en neste aksjon, latt elevene bytte resonnementer for å la de vurdere hverandres forklaringer.

Som en videreføring ville det ha vært interessant og prøvd å fremme andre elevers kompetanse i det å resonnere, både yngre og eldre. Jeg ser ingen begrensninger med prosjektet annet enn at oppgavene og kravene til resonnementene må tilpasses elevenes alder og nivå. Dersom et lignende prosjekt skulle gjennomføres med yngre elever, hadde det vært gunstig å kunne tatt opp elevenes forklaringer på lydbånd.

Man kan spørre seg om det er mulig for andre lærere å arbeide på denne måten, og legge til rette for å øve opp elevenes evne til matematikk resonnement. Jeg mener at en lærer kan klare å oppnå lignende resultater som jeg har gjort dersom visse kriterier er oppfylt. Læreren må være faglig trygg, ha evne til å kommunisere og lytte til elevene, være villig til å bruke tid på en oppgave og tørre å ta sjanser (Stedøy, 2006).

Hva vet jeg nå som jeg ikke visste fra før? Jeg vet at 11-åringer har stor kapasitet når det gjelder å resonnere matematisk. For å kunne hjelpe til med å utvikle elevenes matematiske resonnementer, har jeg sett at det avgjørende at jeg som lærer kan innta en aktiv rolle. Lærerens aktive rolle i denne sammenheng er å formulere spørsmål på en måte som stimulerer elevene til å stole på sine egne resonnementer. Mine spørsmålsformuleringer og aktive rolle oppmuntret elevene til å være utholdende og arbeide med oppgavene så lenge at de fikk gjentatt ulike resonnementer flere ganger, hørt på hverandres resonnementer, og utviklet seg i samspill med andre. Styrken i dette vil avhenge av mulighetene til å finne gode, rike problemer i flere av emnene som ligger i læreplanene. Læreren må etter hvert kunne øse av sin egen ”matematiske skattekiste” som inneholder et stort utvalg av slike oppgaver.

Litteratur

Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I: Emanuelson, G., Johansson, B. og Ryding, R. (red). *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur, s. 85 –99.

Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande. Göteborg Studies in Educational Sciences 87.* Götebrog: Acta Universitatis Gothoburgensis

Balcheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I: D. Pimm (red.), *Mathematics, teachers and children.* A reader. (s. 216-230). London: Hodder and Stoughton.

Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating (K-8). Helping children think mathematically*. New York: Macmillan Publishing Company.

Berkmann, R. M. (2006). *One, some or none: Finding beauty in ambiguity*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org

Bjuland, R. (2002). *Problem solving in geometry.* Department of Applied Education, Faculty of Psychology, University of Bergen, Norway, s. 14 – 25.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I: Grevholm, B. (red). *Matematikk for skolen.* Bergen: Fagbokforlaget.

Brousseau, G. og Gibel, P. (2005). *Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations.* Educational Studies in Mathematics, 59: s.13-58.

Brown, S. I. og Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Burton, L., Povey, H., Angier, C. og Boylan (1999). Learners as Authors in the Mathematics Classroom. I: L. Burton (red.), *Learning Mathematics from Hierarchies to Networks*. London: Falmer Press.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R og Schauble, L. (2003). *Design Experiments in Educational Research.* Educational researcher, Vol 32, No 1, pp. 9-13.

Grevholm, B. (2006). Problemens roll. Nämnaren 2006 (3), s.22- 27.

Hagland, K. (2006). *Från det konkreta till det generella.* Nämnaren 2006 (4), s.19- 21.

Hedrén, R., Taflin, E. og Hagland, K. (2005). *Rika matematiska problem.* Stockholm: Liber AB.

Helenius, O. (2006). *Kompetenser och matematik.* Nämnaren 2006 (3), s.11- 15.

Kunnskapsdepartementet (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. Midlertidig utgave juni 2006. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Jaworsky, B. (1996). Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry. London: The Falmer Press. (Første utgave 1994). Kap.2, s. 14- 35.

Jaworsky, B. (2005). Power Point presentasjon og notater fra forelesning med tittelen: Theories in learning and teaching mathematics. 1.11 – 2.11. 2005.

Johnson, D. W. og Johnson, R. T. (1989). *Samarbeid i skolen*. Namsos: Pedagogisk psykologisk forlag.

Koleza, E. og Kabani, E. (2006). T*he use of reasoning in the resolution of geometric problems.* Nordic Studies in Mathematics Education, 11 (3), 31-56.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. I: *Educational Studies in Mathematics*, 41 (2), s. 165-190.

Lithner, J. (2006). *A Framework for Analysing Creative and Imitative Mathematical Reasoning.* Research reports in mathematics education 3, Department of mathematics, Umeå university.

Madsen, J. (2004). *Sosiokulturell forskningstradisjon, aktivitetsteori og aksjonsforskning som gjensidige støttespillere.* I: Tiller. T. (red.) (2004). Aksjonsforskning i skole og utdanning. Krisitansand: Høyskoleforlaget.

Mason, J. og Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving.* Victoria: Deakin University Press.

Mathworld (2007). *Coin problem.* Hentet 9. mai 2007 på Verdensveven: http://mathworld.wolfram.com/CoinProblem.html

Mathworld (2007). *Greedy algorithm.* Hentet 9. mai 2007 på Verdensveven: http://mathworld.wolfram.com/GreedyAlgorithm.html

Mathworld (2007). *Mc Nugget Number*. Hentet 9. mai 2007 på Verdensveven: http://mathworld.wolfram.com/McNuggetNumber.html

Måsøval, H. S. (2005). When negotiation og mathematical meaning is replaced by striving for fulfilment of the didactical contract. I: Winsløw, C. (red). *Didactics of Mathematics- The French Way.* København: Center for Naturfagens Didaktik.

Niss, M. og Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18-2002, Undervisningsministeriet. København: Undervisningsministeriets forlag.

Nunan, D. (1992). *Research Methods in Language Learning.* New York: Cambridge University Press. Kapittel 5.

Petersen, V. B. (2004). *Et notat om "Diofantiske ligninger".* Hefte delt ut i forbindelse med forelesning 16.11.04.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Rhedding-Jones, J. (2005). *What is research? Methodological Practices and New Approaches.* Oslo: Universitetsforlaget.

Silver, E. A. (1994). *On Mathematical Problem Posing.*
For the Learning of Mathematics 14, 1. Vancouver: FLM Publishing Association.

Silver, E. A. (1997). *Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing.* Zentralblatt für Didaktik der Matematikk, 29(3): 75-80.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I: Skovsmose, O. og Blomhøj, M. (red.) (2003). *Kan det virkelig passe – om matematiklæring.* København: L&R Uddannelse.

Statens offentliga utredningar, SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – interesse, lärande, kompetans.* Stockholm: Elanders Gotab AB.

Stedøy, I. (2006). Hur blir man en duktig matematiklärare? I: Boesen, J. m. fl. (2006). *Lära och undervisa matematik – internasjonella perspektiv.* Göteborgs universitet: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, s. 241 – 257.

Taflin, E. (2003). *Problemlösning och analys av rika matematiska problem.*
Research reports, No 5, in Mathematics Education. Umeå University.

Wells, G. C. (1999). Dialogic inquiry: towards a sociocultural and theory of education. New york: Cambridge University Press. Kap. 2, s. 51 – 97.

Wikipedia (2007). *Greedy algorithm*. Hentet 9. mai 2007 på Verdensveven: http://en.wikipedia.org/wiki/Greedy_algorithm

Wood, D. (1998). *How children think and learn. Second Edition*. Oxford: Blackwell.

Wyndhamn, J. og Säljö, R. (1997). *Word problems and mathematical reasoning – a study of children's mastert of reference and meaning in textual realities.* Learning and Instruction. Vol. 7, No 4, s. 361-382.