



Et innblikk i barns tallforståelse på slutten av barnehageårene gjennom digitale oppgaver

Gunnhild Saksvik-Raanes*, Trygve Solstad og Yvonne Grimeland

NTNU Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Norge

*Korrespondanse: Gunnhild Saksvik-Raanes, e-post: gunnhild.b.saksvik@ntnu.no

Sammendrag

I denne studien undersøkte vi tallforståelsen hos 77 femåringer fra fem ulike barnehager med digitale oppgaver. Kvantitative analyser av datamaterialet viste at det allerede før skolestart var stor spredning i barnas tallforståelse. Sammenlignet med det som er kjent fra før om norske barns utvikling av tallforståelse i barnehagealder, viste gruppen vi undersøkte overraskende godt utviklet tallforståelse. Vi diskuterer hva resultatene kan bety for den pedagogiske aktiviteten i barnehagen med tanke på å tilpasse aktiviteter til barns tallforståelse.

Nøkkelord: FoNS; kartlegging; Rasch analyse; tallforståelse

Abstract

An insight into five-year-old children's number sense in early childhood education using digital tasks

In this study we investigated the number sense of 77 five-year-old children from five early childhood education institutions using digital assessment tasks. From quantitative analyses of the data, we found a large variability in the children's number sense already before the start of formal education. Compared to what is known about Norwegian children's development of number sense in early childhood education, many children showed a surprisingly well-developed number sense. We discuss what these results could mean for learning activities in early childhood education.

Keywords: assessment; FoNS; Rasch analysis; number sense

Gjesteredaktører: Tamsin Meaney, Elin K. L. Reikerås og Camilla N. Justnes

Introduksjon

De siste års forskning i Norge har gitt større forståelse for kompleksiteten i det barnehage-lærere faktisk gjør når de arbeider med matematikk i barnehagen (Justnes & Mosvold, 2021; Sæbbe & Mosvold, 2020). Videre har vi fått økt innsikt i hvordan barnehagebarn tilnærmer seg matematikken i lek og argumenterer gjennom flere modaliteter (Nergård, 2021), og hvordan muligheter for læring skapes mellom barn og barnehagelærer (Breive, 2020). Barnehagelærernes kompetanse kan ha innflytelse på barnets deltakelse og engasjement i den matematiske samhandlingen i barnehagen, hvor mye tid som brukes på matematiske aktiviteter, og nivået på den matematiske diskursen (Hundeland et al., 2020). En systematisk tilnærming til matematiske læringsaktiviteter og kompetanseheving i personalet kan også bidra til å styrke barnas matematiske utvikling (Rege et al., 2021).

En av utfordringene barnehagelærere møter er å tilpasse innholdet i matematiske aktiviteter til barnas eksisterende kunnskap (Rinvold & Erstad, 2015). Utfordringen er også kjent fra andre lands forskning hvor det blant annet har blitt påpekt at aktiviteter i barnehage og skole ofte undervurderer hva barn egentlig kan (Clarke et al., 2006; Engel et al., 2013). Mer kunnskap om hva vi kan forvente at barn forstår om tall vil gi oss muligheten til å legge bedre til rette for at alle barn i barnehagen får møte meningsfulle matematiske aktiviteter, uavhengig av personlig utgangspunkt og sosial eller geografisk tilhørighet. Slik kunnskap vil også kunne bidra til å styrke kontinuiteten i opplæringen fra barnehage til skole (Hogsnes & Moss, 2014; Sundtjønn et al., 2021).

Selv om verdien av den matematiske kunnskapen barn tar med seg inn i skolen er anerkjent internasjonalt (Clarke et al., 2006; Ginsburg, 2002), er det få studier som har undersøkt barns tallforståelse i norsk og nordisk kontekst, både før og like etter skolestart (Reikerås, 2016). I den nordiske barnehagekonteksten evalueres og vurderes først og fremst kvaliteten på utdanningssystemet og hva slags aktiviteter det blir tilrettelagt for. Vurdering av det enkelte barns forutsetninger og kunnskaper er lite vektlagt med mindre man er bekymret for barnets utvikling (Urban et al., 2022). Følgelig er de fleste eksisterende kartlegginger og studier av matematikkunnskapene til barn under sju år designet for å identifisere de barna som trenger ekstra oppfølging. Denne typen kartlegginger inneholder først og fremst oppgaver det er forventet at flertallet av barna får til å løse, og de er derfor ikke egnet til å si noe om hva eller hvor mye det er *typisk* at barn i denne aldersgruppen får til (Reikerås, 2016). Også mange internasjonale kartlegginger er bundet av en slik tak-effekt (Benoit et al., 2013; Mix et al., 2014). Dermed har vi begrenset informasjon om tallforståelsen til flertallet av norske barn, og få verktøy for å tilegne oss slik informasjon innenfor rimelige ressursrammer.

Det kan være utfordrende få innsikt i barns matematiske kunnskaper. Skriftlige kartlegginger er effektive (Lopez-Pedersen et al., 2021), men validiteten og egnetheten til disse verktøyene er begrenset av faktorer som kontekst og språk, barns begrensede lese- og

skriveferdigheter, samt negative opplevelser forbundet med tidsbegrensede vurderingsoppgaver. Individuelle kartleggingsintervju (Clarke et al., 2011) og observasjoner av hvordan barnet naturlig anvender kunnskaper og ferdigheter i lek og hverdagslige aktiviteter (Bergsmo et al., 2020; Wager & Parks, 2016), kan derfor være å foretrekke for å få et best mulig bilde av hvert enkelt barns evne til matematisk tenking, handling og kommunikasjon. Slike intervjuer er på sin side tidkrevende, forutsetter en bestemt kompetanse hos hver enkelt kartlegger, og favner ofte et smalere spekter av oppgaver eller barn. Digitale plattformer gir mulighet til å balansere noen av egenskapene til de ulike kartleggingsmetodene og er blitt anerkjent som nyttige verktøy for å få innsikt i barns matematiske kunnskaper og videre behov (Clements et al., 2021; Ginsburg & Pappas, 2016).

Med et økt fokus på digitale verktøy i det matematiske læringsarbeidet i barnehagen (Carlsen et al., 2016; Lembrér & Meaney, 2016) følger det også muligheter til større innsikt i barns matematiske kunnskaper. En slik mulighet er at man kan lage standardiserte kartleggingsoppgaver uten tidsbegrensning eller behov for at barna kan å lese eller skrive. I tillegg kan interaktive og spill-lignende elementer bidra til engasjement. I norsk kontekst kjenner vi til to nylig utviklede digitale verktøy for vurdering av barns matematiske kunnskap. Det ene verktøyet vurderer barnehagebarns tallkunnskap, geometri- og problemløsningsferdigheter gjennom motiverende og lekpregede oppgaver på nettbrett (ten Braak & Størksen, 2021). Det andre verktøyet, som vi har brukt i denne studien, består også av nettbretttoppgaver med spillelementer, men er spesifikt utviklet for å gi detaljert informasjon om barns tidlige tallforståelse – den typen tallforståelse som undervises i de to første skoleårene (Saksvik-Raanes & Solstad, 2021). For å komplementere vår eksisterende kunnskap om norske barnehagebarns tallforståelse, utnytter vi i denne studien muligheter i digitale verktøy til å danne et kvantitativt oversiktsbilde av barnehagebarns tallforståelse på slutten av barnehageårene og besvare følgende forsknings spørsmål:

Hvilket bilde av femåringers tallforståelse får vi fra vårt digitale kartleggingsverktøy for tidlig tallforståelse?

Bakgrunn

Tallforståelse

Det finnes flere ulike beskrivelser av hva som menes med begrepet tallforståelse (Berch, 2005; McIntosh et al., 1992). Beskrivelsene kan plasseres i tre ulike kategorier av tallforståelse (Whitacre et al., 2020): (i) en antatt medfødt mengdesans (*approximate number sense*), (ii) en tidlig tallforståelse (*early number sense*) spesifikt knyttet til de lærte ferdighetene og kunnskapene om tall som barnet tilegner seg i begynneropplæringen i barnehage og skole, og (iii) en viderekommen tallforståelse som blant annet handler om fleksibilitet innen ulike

regneoperasjoner (*mature number sense*). I vår studie operasjonaliseres tallforståelse ved hjelp av rammeverket *Foundational Number Sense* (FoNS) (Andrews & Sayers, 2015) som hører til kategorien «tidlig tallforståelse» (Whitacre et al., 2020). FoNS-modellen beskriver ferdigheter knyttet til arbeid med tall i begynneropplæringen som barn ikke utvikler av seg selv (Andrews & Sayers, 2015).

FoNS-modellen er utviklet med utgangspunkt i en litteraturstudie som kategoriserte beskrivelser av barns utvikling av tallforståelse i det første året av sin formelle utdanning pluss/minus ett år. Litteraturstudien identifiserte åtte gjensidig avhengige tallforståelseskategorier: tallidentifikasjon, systematisk telling, tall og mengde, mengdediskriminering, forståelse for ulike representasjoner av tall, estimering, aritmetisk kompetanse og bevissthet om tallmønstre. Kategorien tallidentifikasjon handler om å identifisere tallsymbol og å kunne koble tallsymbol til verbale tallord. Systematisk telling innebærer å kunne telle systematisk og fleksibelt i intervallet 0 til 20, og inkluderer forståelse for ordinalitet. En bevissthet om forholdet mellom tallord og størrelsen på mengder innebærer å kunne koble tallord med en mengde som har samme kardinalitet som tallordet, og en forståelse for kardinalitet der det siste tallordet i en telling av en samling objekter angir antallet i mengden. Mengdediskriminering handler om en bevissthet om størrelsen av mengder, å kunne sammenligne mengder og å bruke begreper som større enn, mindre enn, flest og færrest. En forståelse for ulike representasjoner av tall innebærer en innsikt i at tall og mengder kan representeres på ulike måter ved hjelp av konkrete, fingre og tallinje. Estimering handler om å anslå størrelsen på en samling objekter eller plassering av et tall på en tallinje. Aritmetisk kompetanse innebærer å kunne transformere små mengder ved hjelp av addisjon eller subtraksjon. Bevissthet om tallmønstre medfører i FoNS-modellen å kunne gjenkjenne og utvide tallmønstre, eller avgjøre hvilket tall som mangler i en tallrekke (Andrews & Sayers, 2015).

De åtte kategoriene i FoNS antas å være gjensidig avhengig av hverandre og utgjør en sammensatt, fleksibel og relasjonell tallforståelse. Den gjensidige avhengigheten mellom kategoriene er et uttrykk for et helhetlig tallforståelsesperspektiv. Rammeverket er tidligere brukt for å analysere barns læringsmuligheter i ulike kulturelle kontekster (Andrews et al., 2015; Andrews & Sayers, 2015).

Tallforståelse i den norske begynneropplæringskonteksten

FoNS-modellen er utviklet med hensyn på en flerkulturell utdanningskontekst. Vi gir her et innblikk i den norske begynneropplæringskonteksten for deltakerne i vår studie, både i barnehagen og senere i skolen.

I Norge går 92,8 prosent av alle barn mellom ett og fem år i barnehage (Statistisk sentralbyrå, 2020). Det pedagogiske tilbudet i norske barnehager er styrt av *Rammeplan for barnehagen* (Kunnskapsdepartementet, 2017b). Rammeplanen sier at barnehagen skal legge til rette for barnets læring og utvikling, samtidig som det er barnets helhetlige

utvikling og behov som skal ligge til grunn for aktivitetene i barnehagen. Gjennom sju kunnskapsområder beskriver rammeplanen læringsmuligheter barnehagen skal tilby gjennom sin pedagogiske virksomhet. Kunnskapsområdet *antall, rom og form* beskriver blant annet at barnehagen skal støtte barna i å danne erfaringer med å uttrykke tall, mengde og telling på ulike måter gjennom lek og eksperimenter (Kunnskapsdepartementet, 2017a). Disse kategoriene finner vi igjen som tallidentifikasjon, systematisk telling og tall og mengde i FoNS-modellen.

Opplæringstilbudet i den tiårige norske grunnskolen er styrt av Kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2019). Om vi ser spesifikt på kompetansemål relatert til tallforståelse etter 2. trinn, ser vi at elevene blant annet skal kunne telle, sammenligne og ordne tall på ulike måter, samt utforske tallbegreper med bruk av ulike representasjoner. Elevene skal også kunne plassere tall på tallinjen, bruke denne i regning og problemløsning, i tillegg til å utforske bruk av addisjon og subtraksjon gjennom praktisk erfaring (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kompetansemålene kan plasseres i følgende kategorier i FoNS-modellen: tallidentifikasjon, systematisk telling, tall og mengde, mengdediskriminering og aritmetisk kompetanse.

Tidligere kunnskap om barnehagebarns tallforståelse

Fra et internasjonalt perspektiv vet vi en del om barns tallforståelse når de nærmer seg skolealder. Enkelte forskere har forsøkt å beskrive generelle utviklingsløp og hevder at de fleste amerikanske femåringer kan telle opp til 20–30 objekter, sammenligne mengder, identifisere tall i rekkefølge og bruke strategier til å finne løsningen på varierte problemtyper innen addisjon og subtraksjon med små mengder (Clements & Sarama, 2021). Tidligere studier har vist at amerikanske barn i barnehagealder kan løse problemløsningsoppgaver som inkluderer både addisjon, subtraksjon, divisjon og multiplikasjon ved hjelp av direkte modellering av situasjonene (Carpenter et al., 1993).

I norsk sammenheng finnes det få studier av barnehagebarns tallforståelse. Som en del av et longitudinelt prosjekt har Reikerås (2016) benyttet observasjonsmateriellet *MIO: matematikken, individet, omgivelsene* (Bergsmo et al., 2020; Davidsen et al., 2008), for å undersøke om barnehagebarn utvikler nødvendige matematiske kunnskaper før skolestart. Innenfor områder relatert til tallforståelse, viser studien at flertallet av fire- og femåringene i barnehagen mestret oppgavene relatert til telling og tallserier, mens et mindretall (5–15 %) fortsatt hadde utfordringer med å gjengi tallrekka opp til ti, og kardinalitetsprinsippet i telling til fem. Reikerås (2016) argumenterer for at barna viste et lavere nivå av tallforståelse enn jevnaldrende barn fra andre land. Samtidig er tallene i rimelig overensstemmelse med internasjonale anslag av andelen barn som opplever utfordringer i møte med matematikk (Geary, 2015).

Resultatene til Reikerås (2016) indikerer også at språk om mengder ikke er tilstrekkelig vektlagt i norske barnehager. En NOVA-rapport av Gulbrandsen og Eliassen (2013)

støtter denne påstanden ved å vise at det er stor variasjon i hvor mye tid som vies til matematikk i ulike barnehager. Bare halvparten av de 649 barnehagene i studien rapporterte å ha «arbeidet ganske mye med» fagområdet *antall, rom og form*. Til sammenligning rapporterte åtti prosent det samme for fagområdet *kommunikasjon, språk og tekst*, noe som antyder at mange barnehager har et uforløst potensial i å integrere matematisk innhold i barnehagehverdagen.

Metode

Verktøy

Vi har utviklet et digitalt verktøy som skal hjelpe lærere med å beskrive tallforståelsen til fem og seks år gamle elever på starten av barneskolens 1. trinn i Norge (Saksvik-Raanes & Solstad, 2021). Tallforståelsesoppgavene presenteres i en webapplikasjon og er designet for å gjennomføres uten å lese eller skrive og uten direkte støtte fra en voksen. Applikasjonen gir taleforklaring til oppgavene og til hvordan applikasjonen fungerer. Oppgavesettet består av totalt 71 oppgaver fordelt over seks tallforståelseskategorier. Ni av oppgavene er dynamiske, som betyr at barnet skal flytte på objekter eller gjennomføre en prosess for å finne riktig svar, og 64 av oppgavene er statiske, som betyr at barnet skal svare ved å trykke på et svaralternativ. Appendiks 1 viser eksempler på et utvalg av oppgavene.

Hver oppgave ble skåret med ett poeng for rett svar og null poeng for feil svar. Verktøyet hadde ifølge Rasch-analysen en person reliabilitet på 0,87, som tilsvarer en Cronbach's alpha på 0,84 og betyr at oppgavene i stor grad måler samme konstrukt (tallforståelse).

Utvikling

I prosessen med å tilpasse oppgavens design og vanskegrad til målgruppen ble verktøyet prøvd ut i en pilotstudie med barnehagebarn. Pilotstudien utgjør datagrunnlaget for analysen av barnehagebarns tallforståelse i denne artikkelen.

Verktøyet er utviklet med utgangspunkt i FoNS-modellen som er forankret i forskning på tidlig tallforståelse i begynneropplæringen i matematikk. I tillegg beskriver modellen tallforståelseskategorier som er mulige å operasjonalisere. Da studien ble gjennomført hadde vi utviklet oppgaver til de fem første kategoriene i FoNS-modellen: tallidentifikasjon, systematisk telling, tall og mengde, mengdediskriminering og aritmetisk kompetanse, i tillegg til kategorien subitisering. Disse kategoriene samsvarte i størst grad med beskrivelsene knyttet til tallforståelse i rammeplanen og Kunnskapsløftet. Underveis i datainnsamlingen ble oppgavesettet oppdatert fordi foreløpige analyser viste at flere av oppgavene var for lette. Til sammen er 71 ulike oppgaver inkludert i studien, men på grunn av oppdateringen ble hvert barn presentert for maksimalt 56 oppgaver.

Oppgavekategorier

Oppgavesettet inkluderte seks av FoNS-kategoriene som er tidligere beskrevet i bakgrunnskapittelet: tallidentifikasjon, systematisk telling, tall og mengde, mengdediskriminering, subitisering og aritmetisk kompetanse. Subitisering er lagt til som en kategori i våre undersøkelser ettersom ferdigheten er vektlagt i barns utvikling av FoNS (Sayers et al., 2016) og beskrevet som et område innen utvikling av tallforståelse som trenger mer oppmerksomhet (Clements et al., 2019). Å subitisere innebærer å raskt oppfatte og bestemme størrelsen av en mengde uten å telle. Man skiller mellom perseptuell subitisering, hvor man oppfatter og bestemmer størrelsen på en mengde uten å bruke andre matematiske prosesser, og konseptuell subitisering, hvor man visuelt deler opp mengdene i grupper og behandler gruppene med mental aritmetikk for å bestemme antallet (Clements et al., 2019). I subitiseringsoppgavene ble en mengde prikker vist i ett sekund før de forsvant og barna skulle angi hvor mange prikker de så.

Utvalg

Utvalget består av 77 barn fra fem barnehager i Trøndelag fylke; de fem første som meldte seg av 32 barnehager som mottok tilbud om å delta. De fem barnehagene var lokalisert i ulike bydeler og ulike kommuner i Trøndelag. Datainnsamlingen skjedde ved slutten av barnehageåret, omtrent to måneder før barna begynte på skolen. Deltakerne i studien nærmet seg dermed slutten på sin tid i barnehagen, og var mellom fem og seks år gamle på denne tiden. Vi refererer likevel til deltakerne som femåringer. Alle barn som var til stede i barnehagen på datainnsamlingsdagen fikk tilbud om og valgte å delta, uavhengig av bakgrunn og forutsetninger. Deltakerne representerer dermed et mangfold av barn med ulik språklig og sosial bakgrunn fra fem vilkårlig valgte trønderske barnehager, men er ikke et statistisk representativt utvalg av norske eller trønderske barnehagebarn.

Prosedyre

Med hjelp fra personalet organiserte vi grupper på to til fire barn som gjennomførte kartleggingen samtidig. Noen av barna gjennomførte også oppgavene individuelt. Barna fikk hvert sitt nettbrett og gjennomgikk samme instruks før det individuelle arbeidet med oppgavene startet. Instruksene omhandlet generelle sider ved opplegget, som at barna skulle prøve å svare på så mange oppgaver de ville på nettbrettet de fikk tildelt, og at de kunne avslutte arbeidet når de ønsket. Videre fikk barna mer spesifikke instruksjoner knyttet til funksjonalitetene i webapplikasjonen om hvordan de kom seg til neste oppgave og hvordan figuren i venstre hjørne på skjermen forklarte hva de skulle gjøre. De fleste barna gjorde alle oppgavene de ble presentert for, men noen hoppet over enkelte oppgaver eller valgte å avslutte før de hadde gjennomført alle oppgavene. Forskeren satt sammen med barna under hele datainnsamlingen og tok observasjonsnotater. Bakgrunn

for observasjonsnotatene og videre analyse av dem er beskrevet under presentasjonen av det kvalitative datamaterialet.

Kvantitative analyser med Rasch målingsteori

For å beskrive generelle trekk ved barns tallforståelse ved skolestart er det hensiktsmessig å kunne måle tallforståelse. Når ikke alle barn har gjort alle de samme oppgavene er det problematisk å bruke totalt antall riktige svar eller andel riktige svar som mål på barnas tallforståelse. Dette problemet løses med å bruke Rasch målingsteori. I sosialvitenskapen kan vi kvantifisere egenskaper som i utgangspunktet er kvalitative ved hjelp av matematiske modeller (Stone, 1996). Rasch-analyser handler om å formelt teste data opp mot en statistisk modell for måling for å avgjøre hvor godt dataene passer med modellens forventninger til målingskonstruktet. I Rasch-modellen (Rasch, 1960) tilordnes hver person et mål på ferdighet (tallforståelse) og hver oppgave et mål på vanskegrad. Både ferdighet og vanskegrad måles på samme skala i enheten logit (Wright, 1977). Samme prinsipp brukes når vi måler ferdigheten til en høydehopper (hvor høyt hun kan hoppe) og vanskegraden til et høydestativ (hvor høyt stativet er) på samme skala i enheten meter.

Alle oppgavene i oppgavesettet skåres med rett eller galt, og vi har derfor brukt den dikotome Rasch-modellen for analysene. Modellen gir oss en sannsynlighet for at et barn med et gitt mål på tallforståelse vil svare riktig på en oppgave med en bestemt vanskegrad. Rasch-analysene beregner sannsynligheten for at barnet svarer rett på en oppgave ut fra forskjellen mellom barnets tallforståelse og oppgavens vanskegrad. I modellen har et barn med høyere tallforståelsesmål enn et annet barn større sannsynlighet for å svare riktig på en oppgave, uavhengig av hvilken oppgave i oppgavesettet det er snakk om. En oppgave med høyere vanskegrad enn en annen oppgave har lavere sannsynlighet for å bli besvart riktig, uavhengig av hvilket barn som løser oppgavene.

I en dikotom Rasch-modell, er X_{vi} en dikotom stokastisk variabel som vil si at X_{vi} har kun to mulige utfall, 0 eller 1. Sannsynligheten for at X_{vi} får utfallet 1, at person v svarer riktig på oppgave i , er gitt ved funksjonen

$$P\{X_{vi} = 1 | \beta_v, \delta_i\} = \frac{e^{(\beta_v - \delta_i)}}{1 + e^{(\beta_v - \delta_i)}}$$

der, β_v angir personens ferdighet og δ_i angir oppgavens vanskegrad. Sannsynligheten for at person v får ett poeng på oppgave i er da avhengig av forskjellen mellom personens ferdighet, β_v , og oppgavens vanskegrad, δ_i . Sannsynligheten for at en person får ett poeng på en oppgave med samme vanskegrad som personens ferdighet er $P\{X_{vi} = 1 | \beta_v = \delta_i\} = 0,5$. Parametrene β_v og δ_i beregnes numerisk i en iterativ prosess i programvaren Winsteps (Linacre, 2017).

Vi har beskrevet tallforståelse med én variabel og dermed antatt at oppgavene måler samme endimensjonale konstrukt som i vårt tilfelle er tallforståelse. Dimensjonsanalyser

av dataene underbygger at antakelsen om endimensjonalitet er meningsfull. Nesten alle oppgavene hadde en *outfit mnsq zstd*¹ under 1,75, noe som tilsier at de er produktive for måling med den endimensjonale Rasch-modellen vi har brukt (Wright & Linacre, 1994). For tre av oppgavene var *outfit mnsq zstd* over 2. Felles for disse oppgavene var at de var første oppgave i en ny oppgaveform, noe som indikerte at det kan være kvalitative sider ved barnas responsstruktur som var bakgrunnen for de høye *outfit*-verdiene.

En analyse av de standardiserte residualene viste at Rasch-dimensjonen forklarte 35,9 prosent av variansen i datamaterialet. Den uforklarte variansen i første kontrast var på 3,6 prosent med en eigenvalue på 3,9, noe som ikke nødvendigvis indikerer at tallforståelse er et flerdimensjonelt konstrukt. En *principal component analysis* (PCA) viste at enkelte av aritmetikk- og subitiseringsoppgavene grupperte seg i en egen kontrast, noe som kan indikere at disse danner en egen underdimensjon. Samtidig var ikke dette en entydig gruppering da noen av oppgavene innen aritmetikk og subitiseringsoppgaver fordelte seg på en annen måte. Forhold som oppgavens vanskegrad og utforming kan ha påvirket barnas svar. Ettersom våre analyser ikke viser klare tegn på at enkelte tallforståelseskategorier skiller seg ut ser vi på tallforståelse som én latent variabel.

Kvalitativt datamateriale

Det kvalitative datamaterialet består av notater fra enkeltobservasjoner gjort mens barna arbeidet med tallforståelsesoppgavene. Hensikten med observasjonene var å se om enkelte barn brukte løsningsstrategier vi ikke hadde forutsett og som kunne ha betydning for tolkingen av de kvantitative resultatene. Når noen av barna kom med ytringer om hvordan de forstod eller løste oppgavene med en klart uttalt strategi, ble dette samlet i observasjonsnotatene. Etter datainnsamlingen i hver barnehage ble det skrevet en mer fullstendig rapport hvor ulike forhold i datainnsamlingen knyttet til barnas interaksjon med oppgavene ble oppsummert. Rapportene og observasjonsnotatene ble analysert for å identifisere bruk av strategier og utsagn som kunne si noe om barnas tidligere erfaringer med oppgavekonteksten. For å belyse sider ved kartleggingsprosessen som de kvantitative dataene ikke kunne fange opp, har vi inkludert kvalitative beskrivelser av ett barns løsningsstrategi og sammenstilt dem med barnets kvantitative resultater på oppgavesettet. Dette er ikke en beskrivelse av et generelt aspekt ved gruppen, men en illustrasjon og et eksistensbevis på elementer som bør tas i betraktning når man tolker kvantitative data for enkeltpersoner.

1 *Outfit MNSQ Zstd* er forenklet sett et mål på hvor mye svarene på en oppgave avviker fra Rasch-modellens forventede svar, uttrykt i antall standardavvik fra forventningsverdien (*Zstd*). Verdier langt unna null betyr at mange barn ikke har svart det man forventet på oppgaven ut fra deres tallforståelsesmål. Slike oppgaver kan ha elementer som ikke er relatert til tallforståelse men forstyrrer eller hjelper barnet. *Outfit* er et mål som vektet overraskende svar mest og mean squares (*MNSQ*) betyr at man kvadrerer avvikene før gjennomsnittet beregnes slik at store avvik vektet mer.

Etiske betraktninger

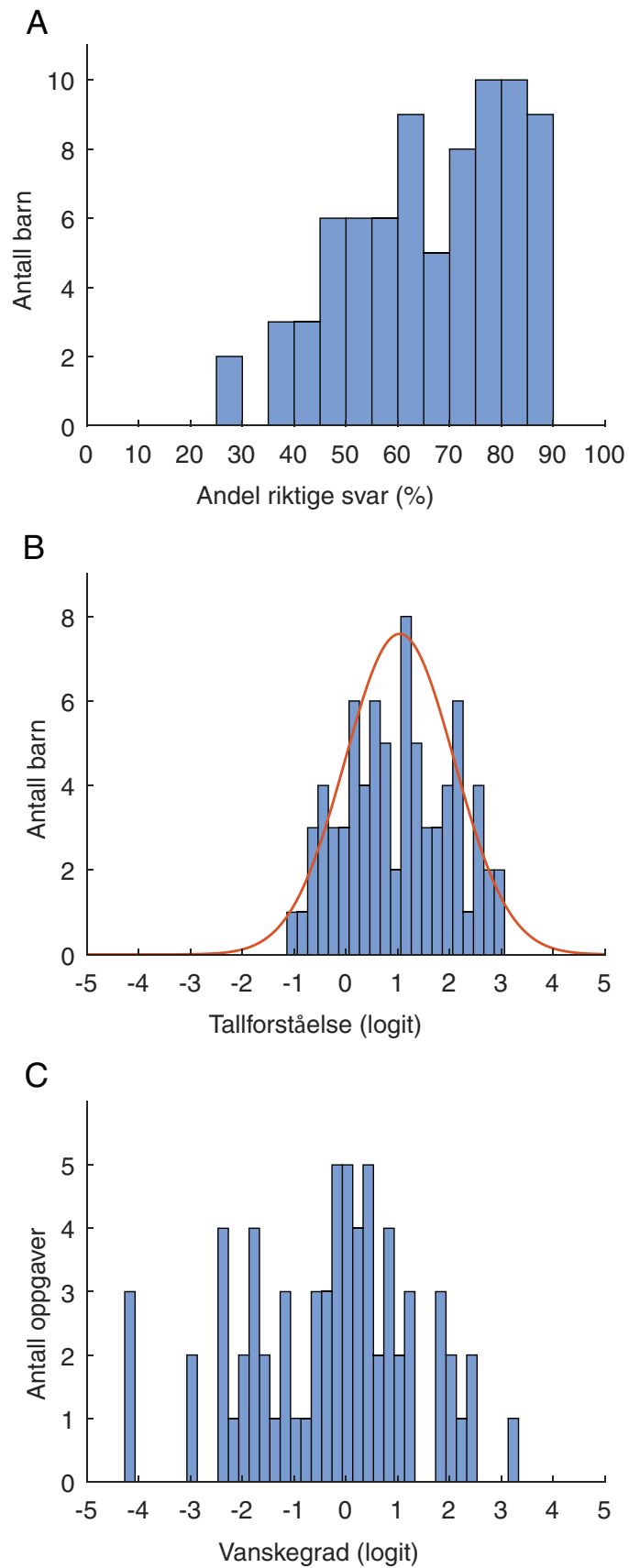
I møte med barna i barnehagene var det sentralt å gjennomføre datainnsamlingen på barnas premisser, i tråd med retningslinjer utgitt av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (2021). Barna fikk sitte på et kjent rom i barnehagen, og en av de voksne i barnehagen var tilgjengelig for barna under arbeidet. Om barna var usikre på svaret på enkeltoppgaver underveis ble de oppfordret av forskeren til å trykke på det svaret de trodde var riktig. Barna fikk avslutte arbeidet med oppgavene når de selv ønsket det. De fleste barna valgte å fullføre aktiviteten, og alle fikk hjelp til å komme inn i barnehagehverdagen igjen når de var ferdige med oppgavene. Barnas oppgavesvar ble innsamlet anonymt på nettbrett som forskeren hadde med seg. Oppgavesvarene ble registrert som rett eller feil gjennom en digital plattform uten videre innsamling av personidentifiserende informasjon.

I dialog med Norsk senter for forskningsdata (NSD) ble det før datainnsamlingen avklart at studien ikke utløste meldeplikt hos NSD, og at det ikke var nødvendig med samtykke ut over å informere foresatte om studien da studien ikke samler inn personidentifiserende opplysninger. Informasjon til foresatte ble sendt ut via barnehagene.

Resultater

Mange barn går ut fra barnehagen med godt utviklet tallforståelse

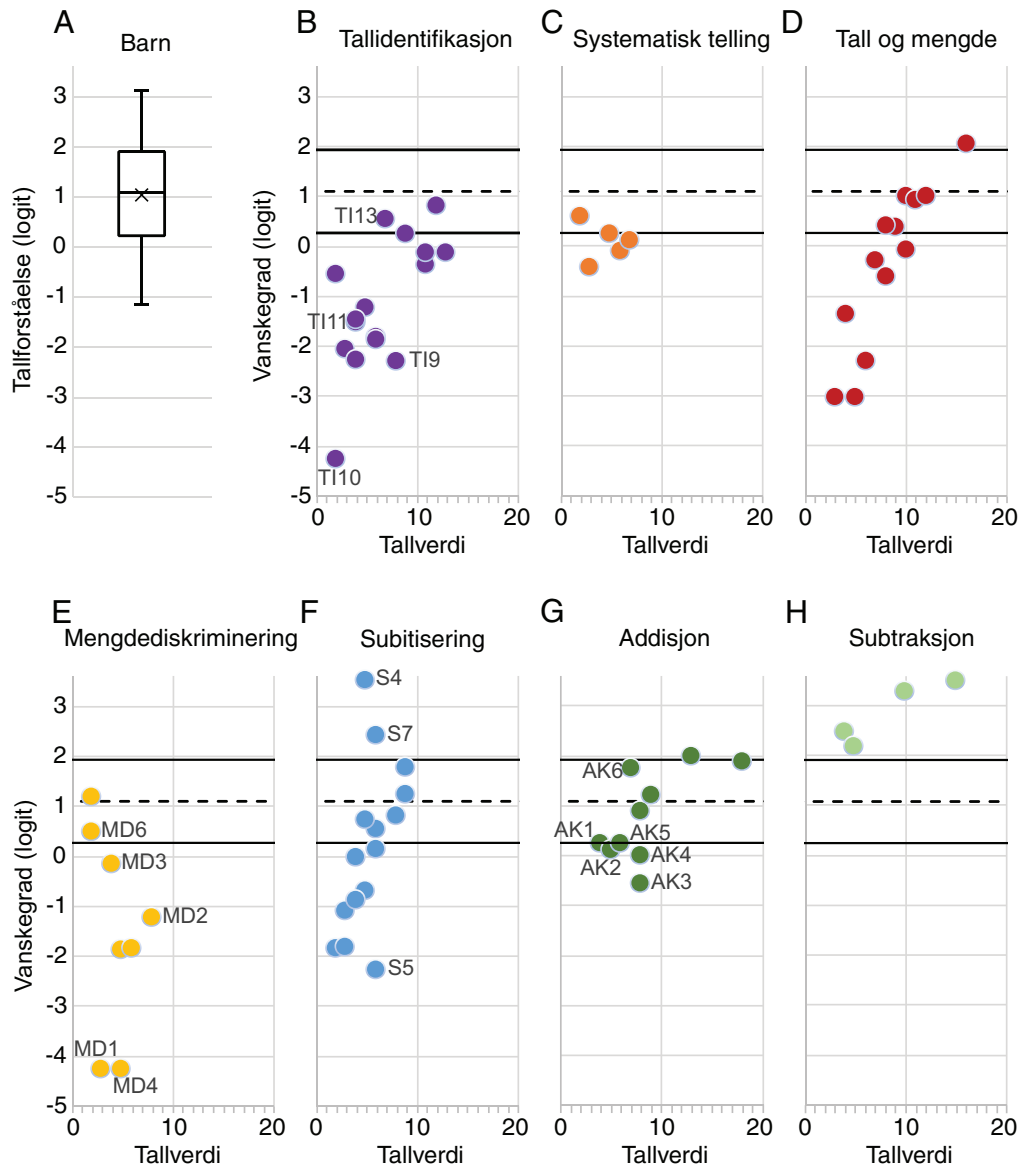
Som gruppe viste barnehagebarna i denne studien overraskende godt utviklet tallforståelse, spesielt ettersom oppgavesettet var laget ut fra beskrivelsene i FoNS-rammeverket som er tilpasset matematikken barn møter i 2. trinn i Norge. Figur 1A viser at andelen riktige svar på oppgavene var skjevfordelt mot høye andeler riktige svar. Alle femåringene fikk riktig svar på minst 25 prosent av oppgavene, og hovedvekten av barna fikk til rundt 80 prosent av oppgavene. Denne skjevfordelingen betyr imidlertid ikke at tallforståelse var skjevfordelt i utvalget, men oppstår fordi det var mange flere enkle oppgaver enn vanskelige oppgaver. For å få et riktig inntrykk av fordelingen av barnas tallforståelse brukte vi Rasch-analyse som tar hensyn til at oppgavene har ulik vanskegrad. Da så vi at barnas tallforståelse var tilnærmet normalfordelt (figur 1B; Kolmogorov-Smirnov test for normalitet; $p = 0,2$; $df = 79$). Rasch-analysen gir oss også vanskegraden til oppgavene, som er på samme måleskala som, og kan sammenlignes direkte med, barnas tallforståelse i figur 1C. Vi ser at tjue oppgaver hadde lavere vanskegrad enn alle barnas tallforståelsesmål. Dette var oppgaver som handlet om å identifisere og koble tallsymboler og mengder på inntil fem objekter. Videre lå barnas gjennomsnittlige tallforståelse (1 logit) over vanskegraden til de aller fleste oppgavene (57 av 71), og en fjerdedel av barna hadde et tallforståelsesmål over 1,9 logit, som er vanskegraden til addisjonsoppgaver med tosfrede tallsymboler.



Figur 1. Tallforståelse og vanskegrad. A. Fordeling av barnas andel riktige svar; B. Fordeling av barnas tallforståelse sammenlignet med normalfordelingen (rød kurve); C. Fordeling av oppgavens vanskegrad

FoNS-kategori

For å få et nærmere innblikk i hva som kjennetegnet tallforståelsen til barna i denne studien har vi sammenlignet barnas tallforståelse med vanskegraden til hver enkelt oppgave i hver FoNS-kategori i figur 2. Barnas tallforståelse er delt inn i kvartiler og vist som horisontale linjer i hvert panel for å forenkle sammenligningen med oppgavens vanskegrad. Hvert panel i figur 2 viser vanskegraden til oppgavene i en FoNS-kategori, sortert etter største tallverdi i oppgaven.



Figur 2. Mål på barnas tallforståelse og oppgavens vanskegrad i enheten logit. A. Boksplokk av barnas tallforståelse (y-aksen). Gjennomsnittet er markert med x. B-H. Spredningsplott av oppgavens vanskegrad (y-aksen) for hver FoNS-kategori. Oppgavene er ordnet etter største tallverdi i oppgaven (x-aksen). Hel linje markerer første og tredje kvartil for barnas tallforståelsesmål. Stripete linje markerer median for barnas tallforståelsesmål. Oppgaver som er nevnt i teksten er markert med navn i hvert enkelt spredningsplott (T19, T110, T111 og T113 i kategorien Tallidentifikasjon).

I det følgende ser vi nærmere på tre områder som påvirket vanskegraden til oppgavene og dermed forteller noe om barnas tallforståelse: FoNS-kategori, tallområde og matematisk språk.

Tallidentifikasjon, tall og mengde og mengdediskriminering var kategorier som hadde lav vanskegrad i forhold til barnas tallforståelse. Aritmetisk kompetanse var som ventet den vanskeligste FoNS-kategorien. Subtraksjon skilte seg ut som spesielt vanskelige oppgaver, men seks barn (8 %) svarte riktig på de vanskeligste av disse oppgavene. Alle de letteste aritmetikkoppgavene (AK1–AK5, se eksempler i appendiks 1) involverte objekter arrangert i mønstre som vi antok var lett gjenkjennbare for mange av barna, som for eksempel terningmønster. AK6 var representert bare med verbal instruks, mens de vanskeligste oppgavene var representert med symboler. Det kan altså se ut til at overgangen fra konkrete mengder til symboler utgjorde et skille i tallforståelse hos barna med høyest tallforståelse. Omtrent 75 prosent av barna svarte riktig på oppgaver om å addere konkrete mengder på til sammen inntil ti objekter. Omtrent 25 prosent av barna svarte riktig på addisjon med symboler og tallverdi over ti.

Subitiseringsoppgaver med mengder større enn fem var omtrent like vanskelige som addisjonsoppgaver med symboler (figur 2 F–H). Dette kan bety at barna bruker mental addisjon for å løse slike konseptuelle subitiseringsoppgaver som krever at barnet utnytter at en mengde kan deles inn i delmengder (Clements et al., 2019; Starkey & McCandliss, 2014).

Tallområde

Alle barnehagebarna i denne studien kunne løse oppgaver med tall og mengder opp til og med fem i fire av FoNS-kategoriene (figur 2). Dette komplementerer studien til Reikerås (2016), hvor omtrent femten prosent av barna ikke ble observert i å dekke på til fem personer eller gjengi hvor mange objekter det er i en mengde etter å ha telt fem objekter («kardinalitetsprinsippet»). Oppgavesettet har ikke mange oppgaver med tallverdier over ti, men resultatene viser at over halvparten av barna hadde forståelse for tall over ti.

I noen, men ikke alle, av FoNS-kategoriene ble oppgavene vanskeligere dess større tallverdiene i oppgaven var. For tallidentifikasjon var korrelasjonen mellom tallverdi og vanskegrad $r = 0,7$ ($p < 0,01$), men hvis vi bare ser på oppgavene med identifikasjon av formelle tallsymboler ser det ut til at vanskegraden i hovedsak var bestemt av om tallsymbolene var større eller mindre enn ti.

For tall og mengde var korrelasjonen mellom tallverdi og vanskegrad $r = 0,89$ ($p < 0,001$). For subitisering var korrelasjonen ikke signifikant, men tre av oppgavene skilte seg ut ved å være spesielt enkle (S5: terningmønster for 6) eller spesielt vanskelige (S7 og S4: en kolonne med fem prikker som det er kjent at er vanskelig å oppfatte). Uten disse tre oppgavene var korrelasjonen mellom tallverdi og vanskegrad $r = 0,91$ ($p < 0,001$).

Matematisk språk og begreper

Resultatene fra kategorien tallidentifikasjon viste at de fleste barnehagebarna var kjent med formelle tallsymboler, men ikke uformelle symboler som tellestreker. Mens tellestreker for tallene 2 (TI10) og 4 (TI11) var oppgaver alle barna fikk til, var det å gjenkjenne tellestrek-symbolet for mengden 7 (TI13; 0,52 logit) nesten 3 logit vanskeligere enn å gjenkjenne det formelle tallsymbolet for 8 (TI9; -2,84 logit) og 1 logit vanskeligere enn å knytte tallsymbolet 7 til den tilsvarende mengden (TM2; -0,5 logit). Resultatet kan tolkes dit hen at omtrent en tredjedel av barna ikke kjente betydningen av den horisontale tellestreken i symbolet for 5, og antyder at disse barna hadde begrenset erfaring med opptellings-aktiviteter og spill hvor denne strategien brukes for å holde orden på antall over 5.

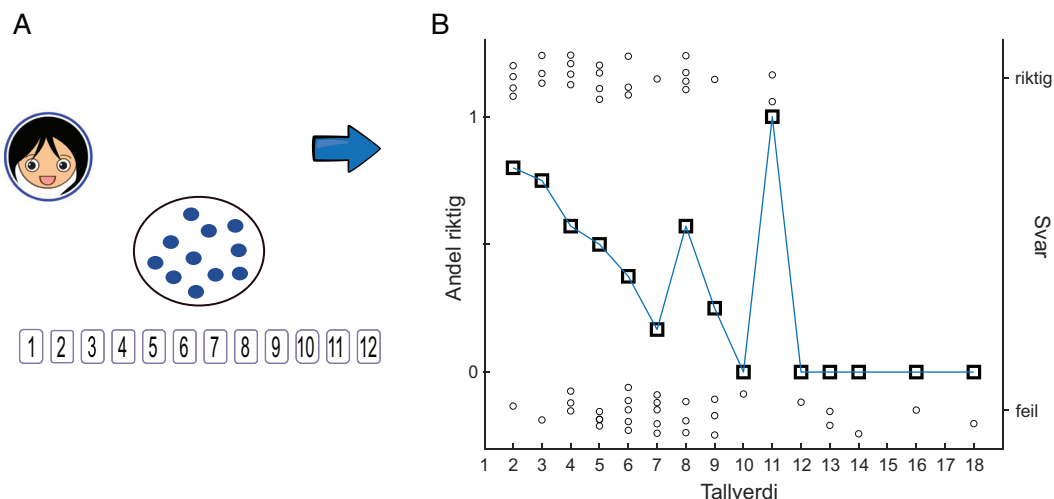
Terninger er en annen form for uformelle tallsymboler som barn møter i sammenheng med spill. Kategorien subitisering hadde oppgaver der noen mengder var strukturert som terningmønster. Alle disse terningmønstrene hadde vanskegrad på -0,7 logit eller lavere, som er lavere enn 76 av barna sine tallforståelsmål. Til sammenligning hadde oppgaver med tilsvarende mengder, men som ikke var strukturert som et ikonisk mønster, vanskegrader høyere enn -0,11 logit. At innlærte, ikoniske mønstre er lettere å subitisere er kjent fra litteraturen (Leibovich-Raveh et al., 2018). Selv om forskjellen mellom terningmønstre og ustrukturerte mønstre ikke er systematisk undersøkt i denne studien, tyder resultatene på at mange av barna i studien hadde kjennskap til ikoniske mønstre som er forbundet med terningspill.

Opgavene innen systematisk telling skiller seg ut i figur 2 med lite spredning og høy vanskegrad i forhold til tallverdi, og var heller ikke korrelert med tallverdi. En mulig årsak til dette er at alle oppgavene i denne kategorien inneholder ord knyttet til ordinalitet, som «før», «etter», «andre», «tredje» og «femte». Bare omtrent halvparten av barna i denne studien viste forståelse for disse begrepene og ordene. Til sammenligning viste omtrent nitti prosent av femåringene i studien til Reikerås (2016) at de kunne identifisere objekter «i midten» av en rekke objekter, som også handler om språk for ordinalitet.

Et tilsvarende fenomen ser vi i kategorien antallsdiskriminering. Oppgavene som inneholder ordene «færrest» (0,28 logit; MD3) og «færre enn» (0,26 logit; MD6) hadde betydelig høyere vanskegrad enn oppgavene som inneholder ordene «flest» (-1,25 logit; MD2) og «flere enn» (-2,61 logit; MD4) til tross for at de to sistnevnte oppgavene hadde høyere tallverdi. Resultatene kan tyde på at barna i studien ikke hadde like mye erfaring med begrepene «færrest» og «færre enn». Dataene i denne studien ble samlet inn i en landsdel hvor man i dagligtale bruker ordet «mindre» om både antall og mål og ordet «færre» ikke er en del av dialekten (trøndersk). Det er altså mulig at flere barn hadde forståelse for *begrepene* «færre enn» og «færrest» enn det kan se ut som i denne studien selv om de ikke kjente ordene.

Kvalitative observasjoner knyttet til barnas tallforståelse

De kvantitative resultatene vi har presentert hittil viser hva deltakerne i studien har svart på de ulike oppgavene. Samtidig er det sider ved barnas tallforståelse, som barnas strategier og



Figur 3. Petters løsning. A. Oppgaven TM8 fra FoNS-kategorien Tall og mengde. Barna fikk den verbale instruksjonen «Trykk på tallet som viser hvor mange baller det er i rundingen». B. Andel riktige svar på oppgavene som funksjon av største tall i oppgaven for Petter som resonnererte seg frem til riktig tallsymbol for 11. Svarte kvadrater angir andel riktige svar (venstre y-akse) for hver tallverdi (x-aksen), mens svarte sirkler angir feil eller riktig svar for hver oppgave (høyre y-akse).

løsningsprosess, som de kvantitative dataene ikke kan fange opp. For å illustrere noe av den matematiske kunnskapen som de digitale oppgavene *ikke* fanger opp, gir vi her en kvalitativ beskrivelse av Petters løsning av oppgave TM8 (figur 3A). Episoden viser at selv om et barn ikke har svart riktig på oppgaver med tall over ti, kan barnet likevel ha god forståelse for telling og være i stand til å resonnerere om tall som er utenfor sitt eget tallområde.

Petter målte 0,15 logit på tallforståelseskalaen. Figur 3B viser at Petter fikk få riktige svar på oppgaver som involverte tall større enn fem. Samtidig ser vi at oppgaver med tallene 8 og 11 som svar skiller seg ut som oppgaver han mestrer i større grad. Observasjoner av Petter da han løste oppgave TM8, viste at han benyttet seg av peketelling for å bestemme antall objekter i sirkelen og endte på 11 i sin verbale tallrekke. Petter visste altså at det siste tallet i tellesekvensen ga han kardinaliteten til mengden, men han visste ikke hvordan tallsymbolet 11 så ut. Etter å ha tenkt seg litt om, kom Petter på at han kunne gjenkjenne 7-tallet. Dermed fant han tallet 7 blant rekka med tallsymboler, som var oppgitt som svaralternativer, og telte seg oppover fra 7 for å finne symbolet for 11.

Diskusjon

Femåringenes tallforståelse sammenlignet med tidligere kunnskap

Kunnskap om barns tallforståelse kan legge føringer for hva slags matematikkaktiviteter barnehagene legger til rette for. Tidligere studier har antydnet at enkelte norske barnehagebarns tallforståelse utvikles senere enn det vi ser internasjonalt (Reikerås, 2016). Vi mangler imidlertid kunnskap om tallforståelsen til bredden av norske barnehagebarn og spesielt til de som kan mest om tall. Til nå har det også vært ressurskrevende å samle denne typen

kunnskap. I denne studien har vi sett at digitale oppgaver kan gi oss et oversiktsbilde av tallforståelsen til femåringer i norske barnehager på en mer tidseffektiv måte enn tidligere.

Vi fant at det var betydelig spredning i barnas tallforståelse, fra barn som viste begrenset forståelse for tallsymboler og mengder over fem, til barn som behersket aritmetikk med tosifrede tallsymboler. Som gruppe viste barna vesentlig større grad av tallforståelse enn det man kunne forvente ut fra tidligere forskning og rammeplanen for barnehagens beskrivelser av tallidentifikasjon, systematisk telling og forhold mellom tall og mengde. Eksempelet med Petters løsning viser også at barn som ikke har lært alle tallsymbolene, likevel kan ha tilstrekkelig forståelse for tallsystemet til å resonnerer seg frem til riktig tallsymbol ved å utnytte strukturen i kjente representasjoner. I sum kan vi nå si at mens enkelte femåringer har behov for praktiske erfaringer med tallmengder inntil fem, har mange barn allerede bred forståelse for mengder og tall til og ut over ti. For å engasjere denne potensielt store gruppen barn i matematiske spørsmål og tenkemåter, vil det være nødvendig å tilby dem utfordringer i møte med matematikken både i barnehagen og senere i skolen (Clements et al., 2013; Rinvold, 2017).

Barnehagen kan være en viktig arena for barnets utvikling av tidlig tallforståelse. En nylig publisert intervensjonsstudie antyder at flere barnehager allerede har en systematisk tilnærming til matematikk, og at strukturerte læringsaktiviteter kombinert med kompetanseheving hos personalet kan være positivt for barns matematiske utvikling (Rege et al., 2021). Samtidig er det stor variasjon mellom barnehagene med tanke på hvilke aktiviteter det legges til rette for (Gulbrandsen & Eliassen, 2013; Urban et al., 2022). Våre data gir ikke grunnlag for å si noe om hvor barna har gjort sine matematiske erfaringer eller hvorfor det er stor spredning i barnas tallforståelse. Det vil derfor være av interesse å se nærmere på barnehagens rolle i å tilby barn relevante matematiske erfaringer og utjevne forskjeller i tråd med rammeplanen (Kunnskapsdepartementet, 2017b) i videre forskning.

Norsk forskning i barnehagefeltet har med et prosessorientert fokus satt søkelyset på samhandling mellom barn og voksne i barnehagen (Breive, 2020; Nergård, 2021) og kompleksiteten i å lede matematiske diskusjoner (Justnes & Mosvold, 2021) der barnehagelæreren må improvisere og løse flere pedagogiske og matematiske utfordringer for å videreutvikle barnets lek og spontane hverdagssituasjoner til læring (Sæbbe & Mosvold, 2020). Barnehagelærerens kompetanse kan dermed være av stor betydning for den matematiske samhandlingen i barnehagen (Hundeland et al., 2020). Kunnskap om variasjonen i barnehagebarns tallforståelse kan bidra til at barnehagelærere vier mer oppmerksomhet til viktigheten av å tilpasse innholdet i matematisk lek og samhandling til barnas kunnskaper. På denne måten kan våre kvantitative resultater indirekte bidra til å heve kvaliteten på de matematiske prosessene som foregår i en kompleks barnehagehverdag.

Muligheter i det digitale formatet og videre forskning

Vårt øyeblikksbilde av femåringers tallforståelse gjennom digitale oppgaver utfyller de longitudinelle observasjonsstudiene til Reikerås (2016). Studiene tegner et sammensatt bilde

av norske barnehagebarns tallforståelse. Videre vil det kreve et samspill mellom kvalitative observasjoner av barns tallforståelse i hverdagen og kvantitative øyeblikksbilder for å få mer utfyllende kunnskap.

Det digitale formatet muliggjør undersøkelser av en større gruppe barns tallforståelse på en måte som tilfredsstillende kravene til validitet (Saksvik-Raanes & Solstad, 2021). Samtidig viser våre kvalitative resultater at det er sider ved barns tallforståelse, som barnas strategier og løsningsprosesser, som de kvantitative dataene ikke har fanget opp. Det er fortsatt et stort uforløst potensial i digitale kartlegginger med spill-elementer som kan bidra til å styrke ulike aspekter ved kartleggingenes validitet. For eksempel hadde enkelte av oppgavene i oppgavesettet vi benyttet en større grad av interaktivitet, der barna skulle strukturere objekter på skjermen for å finne en løsning. Barnas løsningsprosess kan spilles av og analyseres i etterkant. Denne muligheten åpner for å få dypere innsikt i barnas løsningsstrategier, men hvordan denne informasjonen best kan tolkes og benyttes må avklares i egne studier. Der vår studie var begrenset til et øyeblikksbilde av barnas tallforståelse, åpner inntoget av digitale matematikkaktiviteter som integrerer lek og læring i hjem og barnehage en ny kilde til kunnskap om hvordan barn utvikler og anvender sin tallforståelse (Carlsen et al., 2016; ten Braak & Størksen, 2021).

Med bakgrunn i rammeplanens beskrivelser av barnets læringsmuligheter, helhetlige utvikling og behov, er det forbundet en skepsis til kartlegging av barnehagebarns kompetanse ut fra et humanistisk syn på læring og utvikling (Vik, 2017). Den digitale utviklingen åpner opp for å samle mer informasjon om barns forståelse gjennom lystbetonte aktiviteter på nettbrett, noe som kan føre til utvikling av ny kunnskap om barns tidlige matematiske kompetanse. I denne sammenhengen er det viktig å være påpasselig med at resultatene fra kartlegginger blir brukt i samsvar med det nordiske verdigrunnlaget i barnehagen (Urban et al., 2022). Samtidig er kunnskap om barns matematiske kompetanse et nødvendig grunnlag for å kunne gi alle barn like muligheter til å lære, bruke og glede seg over matematikk, både i barnehagen og videre i livet.

Författarbiografi

Gunnhild Saksvik-Raanes er doktorgradsstipendiat i matematikdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning, NTNU. Temaet for doktorgraden er digital vurdering av barns tallforståelse i overgangen fra barnehage til skole. Gunnhild har tidligere jobbet som lærer i grunnskolen med særlig interesse for begynneropplæringen i matematikk.

Trygve Solstad er førsteamanuensis i matematikdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning, NTNU, Norge. Han har sin ph.d. i nevrovitenskap fra NTNU og har forsket på matematiske modeller for læring og hukommelse som postdoktor ved the Salk Institute, USA.

Han er nå leder for forskergruppen Matematisk kognisjon og literacy ved NTNU som forsker på tallforståelse og matematiske læringsprosesser.

Yvonne Grimeland er førsteamanuensis i matematikdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning, NTNU. Hun har en ph.d. i matematikk, innen abstrakt algebra, fra NTNU. Hun har tidligere undervist i matematikdidaktikk ved Dronning Mauds Minne høgskole for barnehagelærerutdanning, og er særskilt interessert i yngre barns arbeid med matematikk.

Referanser

- Andrews, P. & Sayers, J. (2015). Identifying opportunities for grade one children to acquire foundational number sense: Developing a framework for cross cultural classroom analyses. *Early Childhood Education Journal*, 43(4), 257–267. <https://doi.org/10.1007/s10643-014-0653-6>
- Andrews, P., Sayers, J. & Marschall, G. (2015). Developing foundational number sense: Number line examples from Poland and Russia. I K. Krainer & N. Vondrová (Red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1681–1687). European Society for Research in Mathematics Education.
- Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C. & Jouen, F. (2013). Young children's mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition*, 129(1), 95–101. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.06.005>
- Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333–339. <https://doi.org/10.1177/00222194050380040901>
- Bergsmo, H. S., Dalvang, T. & Kirsti, L. R. E. (2020). *MIO. Matematikken. Individet. Omgivelsene. Håndbok* (2. utg.). GAN Aschehoug.
- Breive, S. (2020). Student–teacher dialectic in the co-creation of a zone of proximal development: An example from kindergarten mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 28(3), 413–423. <https://doi.org/10.1080/1350293X.2020.1755498>
- Carlsen, M., Erfjord, I., Hundeland, P. S. & Monaghan, J. (2016). Kindergarten teachers' orchestration of mathematical activities afforded by technology: Agency and mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 1–17. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9692-9>
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, 24(5), 428–441. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.24.5.0428>

- Clarke, B., Cheeseman, J. & Clarke, D. (2006). The mathematical knowledge and understanding young children bring to school. *Mathematics Education Research Journal*, 18(1), 78–102. <https://doi.org/10.1007/BF03217430>
- Clarke, D., Clarke, B. & Roche, A. (2011). Building teachers' expertise in understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: The power of task-based, one-to-one assessment interviews. *ZDM*, 43(6), 901–913. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0345-2>
- Clements, D. H., Baroody, A. J. & Sarama, J. (2013). *Background research on early mathematics*. National Governor's Association.
- Clements, D. H., Sarama, J. & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The neglected quantifier. I A. Norton & M. Alibali (Red.), *Constructing number. Research in Mathematics Education* (s. 13–45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2
- Clements, D. H., Sarama, J., Tatsuoka, C., Banse, H. & Tatsuoka, K. (2021). Evaluating a model for developing cognitively diagnostic adaptive assessments: The case of young children's length measurement. *Journal of Research in Childhood Education*, 1–16. <https://doi.org/10.1080/02568543.2021.1895921>
- Clements, D. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (3. utg.). Routledge.
- Davidson, H. S., Løge, I. K., Lunde, O., Reikerås, E. & Dalvang, T. (2008). *MIO. Matematikken. Individet. Omgivelsene. Håndbok*. Aschehoug.
- Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. <https://www.forskningsetikk.no/>
- Engel, M., Claessens, A. & Finch, M. A. (2013). Teaching students what they already know? The (mis) alignment between mathematics instructional content and student knowledge in kindergarten. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 35(2), 157–178. <https://doi.org/10.3102/0162373712461850>
- Geary, D. C. (2015). The classification and cognitive characteristics of mathematical disabilities in children. I R. C. Kadosh & A. Dowker (Red.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (s. 767–786). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.017>
- Ginsburg, H. P. (2002, 21.–26. juli). Little children, big mathematics: Learning and teaching in the preschool. I *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED476078.pdf>
- Ginsburg, H. P. & Pappas, S. (2016). Invitation to the birthday party: Rationale and description. *ZDM*, 48, 947–960. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0818-4>

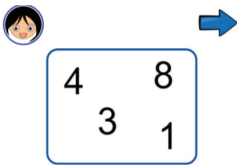

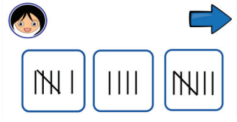
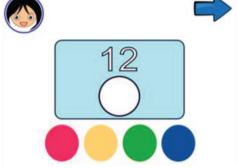
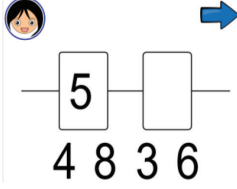

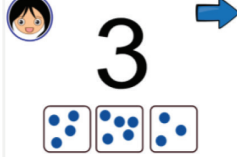
- Gulbrandsen, L. & Eliassen, E. (2013). *Kvalitet i barnehager. Rapport fra en undersøkelse av strukturell kvalitet høsten 2012* (NOVA-rapport 1/13). <https://hdl.handle.net/20.500.12199/5062>
- Hogsnes, H. D. & Moss, T. (2014). Forståelser av gode overganger og opplevelse av sammenheng mellom barnehage, skole og skolefritidsordning. *Nordic Early Childhood Education Research Journal*, 7(6), 1–24. <https://doi.org/10.7577/nbf.625>
- Hundeland, P. S., Carlsen, M. & Erfjord, I. (2020). Qualities of mathematical discourses in kindergartens. *ZDM*, 52(4), 691–702. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01146-w>
- Justnes, C. N. & Mosvold, R. (2021). The work of leading mathematical discussions in kindergarten: A Norwegian case study. I G. A. Nortvedt, N. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkiöniemi, B. E. Jessen, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić & A. Wernberg (Red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Proceedings of Norma 20. The ninth Nordic Conference on Mathematics Education* (s. 153–160). Swedish Society for Research in Mathematics Education.
- Kunnskapsdepartementet. (2017a). *Antall, rom og form*. <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/rammeplan-for-barnehagen/fagomrader/antall-rom-form/>
- Kunnskapsdepartementet. (2017b). *Rammeplan for barnehagen. Forskrift om rammeplan for barnehagens innhold og oppgaver*. <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/rammeplan-for-barnehagen/>
- Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). <https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob>
- Leibovich-Raveh, T., Lewis, D. J., Al-Rubaiey Kadhim, S. & Ansari, D. (2018). A new method for calculating individual subitizing ranges. *Journal of Numerical Cognition*, 4(2), 429–447. <https://doi.org/10.5964/jnc.v4i2.74>
- Lembrér, D. & Meaney, T. (2016). Preschool children learning mathematical thinking on interactive tables. I T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics Education in the Early Years* (s. 235–254). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_13
- Linacre, J. M. (2017). *Winsteps® Rasch measurement computer program. User's guide*. Winsteps.
- Lopez-Pedersen, A., Mononen, R., Korhonen, J., Aunio, P. & Melby-Lervåg, M. (2021). Validation of an early numeracy screener for first graders. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 65(3), 404–424. <https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1705901>
- McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2–8,44.
- Mix, K. S., Prather, R. W., Smith, L. B. & Stockton, J. D. (2014). Young children's interpretation of multidigit number names: From emerging competence to mastery. *Child Development*, 85(3), 1306–1319. <https://doi.org/10.1111/cdev.12197>

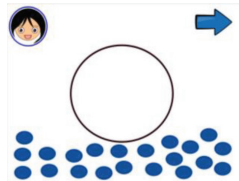
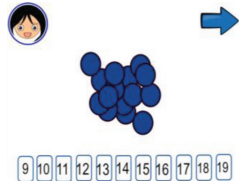
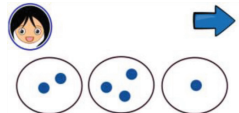
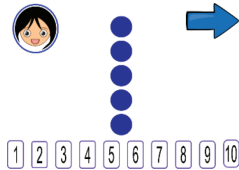
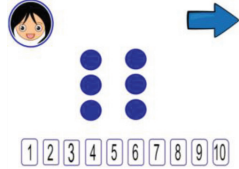
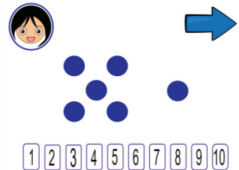
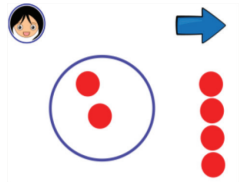
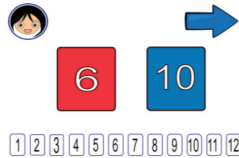
- Nergård, B. (2021). Preschool children's mathematical arguments in play-based activities. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00395-6>
- Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. University of Chicago Press.
- Rege, M., Størksen, I., Solli, I., Kalil, A., McClelland, M., ten Braak, D., Lenes, R., Lunde, S., Breive, S., Carlsen, M., Erfjord, I. & Hundeland, P. (2021). The effects of a structured curriculum on preschool effectiveness: A field experiment. *Journal of Human Resources*, 0220-10749R3. <https://doi.org/10.3368/jhr.0220-10749R3>
- Reikerås, E. (2016). Central skills in toddlers' and pre-schoolers' mathematical development, observed in play and everyday activities. *NOMAD. Nordic Studies in Mathematics Education*, 21(4), 57–78.
- Rinvold, R. A. (2017). To streker under svaret – matematiske møter mellom teori og praksis. I M. Løtveit (Red.), *Tidssignaler: Lærerutdanningsfag i utvikling: Utdanning av lærere på Hamar – 150 år* (s. 259–276). Oplandske Bokforlag.
- Rinvold, R. A. & Erstad, H. (2015). Learning interventions supporting numerosity in three year old children. I K. Kraine & N. Vondrová (Red.), *Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1968–1974). ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288494>
- Saksvik-Raanes, G. & Solstad, T. (2021). Developing a formative, teacher-oriented, digital tool to assess number sense in school starters. I G. A. Nortvedt, N. F. Buchholtz, J. Fauskanger, M. Häikiöniemi, B. E. Jessen, M. Naalsund, H. K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić, J. Ö. Sigurjónsson, O. Viirman & A. Wernberg (Red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Proceedings of Norma 20. The ninth Nordic conference on mathematics education* (s. 212–219). Swedish Society for Research in Mathematics Education.
- Sayers, J., Andrews, P. & Boistrup, L. B. (2016). The role of conceptual subitising in the development of foundational number sense. I T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics education in the early years* (s. 371–394). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_21
- Starkey, G. S. & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of «groupitizing» in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 126, 120–137. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.03.006>
- Statistisk sentralbyrå. (2020). *Utdanning barnehager*. <https://www.ssb.no/utdanning/barnehager/statistikk/barnehager>
- Stone, M. H. (1996). An essay on the ruler: What is measurement? *Rasch Measurement Transactions*, 10, 502–503.
- Sundtjønn, T., Hølland, S., Bjørnestad, E. & Dalland, C. P. (2021). *Overgangspraksiser, læring og undervisningspraksiser – barnehage og første klasse En arbeidsrapport av litteraturgjennomgang*. <https://www.udir.no/contentassets/af616ec30b0446fb-833024bcb151164a/sk-21-1-manus-lui-publisert.pdf>

- Sæbbe, P.-E. & Mosvold, R. (2020). The complexity of teaching mathematics in kindergarten: A case study and conceptualization. I *Mathematics education in the early years, results from the POEM4 conference 2018* (s. 385–400). https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_23
- ten Braak, D. & Størksen, I. (2021). Psychometric properties of the Ani Banani math test. *European Journal of Developmental Psychology*, 18(4), 610–628. <https://doi.org/10.1080/17405629.2021.1879046>
- Urban, M., Reikerås, E., Eidsvåg, Gunnar M. Guevara, J., Saegø, J. & Semmoloni, C. (2022). *Nordic approaches to evaluation and assessment in early childhood education and care* (TemaNord rapport 2022:512). <http://dx.doi.org/10.6027/temanord2022-512>
- Vik, N. E. (2017). Språkkartlegging av flerspråklige barn i barnehagen-fra kontrovers til kompromiss? *Tidsskrift for nordisk barnehageforskning*, 14(10), 1–16. <https://doi.org/10.7577/nbf.1734>
- Wager, A. A. & Parks, A. N. (2016). Assessing early number learning in play. *ZDM*, 48(7), 991–1002. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0806-8>
- Whitacre, I., Henning, B. & Atabas, S. (2020). Disentangling the research literature on number sense: Three constructs, one name. *Review of Educational Research*, 90(1). <https://doi.org/10.3102/0034654319899706>
- Wright, B. D. (1977). Solving measurement problems with the Rasch model. *Journal of Educational Measurement*, 14(2), 97–116.
- Wright, B. & Linacre, J. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, 8(3), 370.

Appendiks 1

Eksempler på oppgaver fra hver FoNS-kategori.

Navn	Bilde	Instruksjon	Tallverdi
Tallidentifikasjon (TI)			
TI1		«Trykk på tretallet»	3
TI6		«Trykk på tallet 13»	13
TI13		«Trykk der du ser sju»	7
TI16		«Flytt riktig ball inn i hullet, trykk på ballene for å høre hvilket tall de har»	12
Systematisk telling (ST)			
ST1		«Flytt tallet som kommer etter fem inn i boksen.»	6
ST4		«Trykk på den andre stjernen i rekken.»	2
Tall og mengde (TM)			
TM1		«Trykk der du ser like mange baller som tallet.»	3

TM9		«Flytt fem baller inn i den store rundingen.»	5
TM13		«Flytt ballene for å telle dem, trykk på tallet som viser hvor mange baller det er.»	16
Mengdediskriminering (MD)			
MD1		«Trykk der det er flest.»	3
Subitisering (S)			
S4		«Hvor mange prikker så du?»	5 (rad)
S5		«Hvor mange prikker så du?»	6 (terning)
S11		«Hvor mange prikker så du?»	6
Aritmetisk kompetanse (AK)			
AK1		«Dra baller inn i rundingen slik at det blir fire til sammen.»	4
AK10		«Det er seks baller i den røde boksen. Det er ti baller i den blå boksen. Hvor mange flere er det i den blå?»	$10 - 6 = 4$