Liva Barka
Ingrid Fodstad

Hanois tårn i læring av induksjonsbevis

En kvalitativ studie av hvordan en TDS-basert undervisningssituasjon, knyttet til Hanois tårn, kan fungere som introduksjon til induksjonsbevis i en 1T-klasse

Masteroppgave i matematikk
Veileder: Yael Fleischmann
Juni 2023

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Liva Barka
Ingrid Fodstad

Hanois tårn i læring av induksjonsbevis

En kvalitativ studie av hvordan en TDS-basert undervisningssituasjon, knyttet til Hanois tårn, kan fungere som introduksjon til induksjonsbevis i en 1T-klasse

Masteroppgave i matematikk
Veileder: Yael Fleischmann
Juni 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppgaven tar for seg en studie som omhandler design, realisering og validering av en undervisningssituasjon som introduserer en 1T-klasse for induksjonsbevis. Det teoretiske rammeverket i studien er Teorien for Didaktiske Situasjoner (TDS), og vi har tatt i bruk Strømskag (2020b) sin modell for utviklingen og designet av undervisningssituasjonen. Målet med studien har vært å designe en undervisningssituasjon, hvor elevene i grupper kommer frem til løsninger, ved å utforske både praktiske og teoretiske egenskaper ved et induksjonsbevis.

Datamaterialet i studien består av observasjoner og elevbesvarelser, som er analysert for å finne svar på forskningsspørsmålet: "*Hvordan kan en TDS-basert undervisningssituasjon, knyttet til Hanois tårn, fungere som introduksjon til induksjonsbevis i en 1T-klasse?*" Resultatene viser at algebraiske ferdigheter, og evnen til å se sammenhenger mellom de to stegene i et induksjonsbevis, var de største utfordringene for elevene. Et annet funn var at samtlige av elevene forsøkte å bevise den aktuelle formelen ved å kun teste én spesifikk verdi, men at noen av dem beveget seg over til en mer konseptuell bevisform etter innspill fra læreren. Analysen av undervisningsdesignet viste at ulike med- og motvindsfaktorer påvirket elevenes prestasjoner på veien mot målkunnskapen. Det vi har definert som medvindsfaktorer inkluderte adidaktiske elementer, reguleringer, samarbeid i grupper og institusjonalisering, mens begreps- og notasjonsforståelse, overgangen mellom ulike representasjoner, algebraiske ferdigheter og erfaringer ble definert som motvindsfaktorer.

Overordnet kan prosjektet bidra med viktig innsikt i utvikling og implementering av undervisningssituasjoner som tar sikte på at elevene skal lære spesifikke matematiske konsepter. Studien viser hvordan forberedende analyser kan brukes som didaktisk verktøy, hvor læreren kan utvikle sin faglige kompetanse og utvide sin forståelse av elevenes læringsprosesser. Dette kan være nyttig for utvikling av fremtidig undervisningspraksis og kan bidra til å øke kvaliteten på matematikkundervisningen.

Abstract

This master’s thesis is the result of a study that focuses on the design, implementation and validation of a teaching situation introducing proof by induction to a 1T class. The theoretical framework for the study is the Theory of Didactic Situations (TDS), and we have used Strømskag's (2020b) model for the development and design of the teaching situation. The goal has been to create a teaching situation where students can collaboratively find solutions, by exploring both practical and theoretical properties of a proof by induction.

The data in the study consists of observations and student responses, which have been analyzed to answer the research question: *"How can a TDS-based teaching situation, related to the Tower of Hanoi, work as an introduction to mathematical induction proofs in a 1T class?".* The results show that algebraic skills and the ability to recognize the connection between the steps in an induction proof were the biggest challenges for the students. Another finding is that all students initially attempted to prove the given equation by testing only one specific value, but some of them transitioned to a more conceptual form of proof, after input from the teacher. Furthermore, the analysis of the design of the teaching situation revealed that various facilitating and hindering factors influenced the students' performance on the path to reaching the target knowledge. Facilitating factors, as defined in this study, turned out to include adidactical elements, regulations, group collaboration, and institutionalization, while conceptual and notational understanding, transitions between different representations, algebraic skills, and previous experiences were identified as hindering factors.

Overall, this project has the potential provide valuable insights into the development and implementation of teaching situations that are aimed at helping students learn specific mathematical concepts. The study also demonstrates how epistemological analyses can be used as didactic tools, enabling teachers to enhance their subject knowledge and expand their understanding of students' learning processes. This can be useful for the development of future teaching practices and contribute to improving the quality of mathematics education.

Forord

Etter fem innholdsrike år på lektorutdanningen i realfag på NTNU, markerer denne masteroppgaven at vi snart er i mål. Disse årene har vært utrolig lærerike, men også utforende. Det er utrolig å tenke på at vi snart er ferdig utdannede lektorer, og vi gleder oss til å starte arbeidskarrieren og kunne bruke den brede kompetansen i både realfag og didaktikk som vi nå sitter på. I forbindelse med denne masteroppgaven vil vi takke den dyktige veilederen vår, Yael Fleischmann, som har gitt oss stor frihet i prosjektet til å velge et tema vi synes er spennende, og som gjennom hele semesteret har vist interesse og engasjement for våre idéer. Vi ønsker også å takke vår tidligere foreleser Heidi Strømskag, som har introdusert oss for nye didaktiske verktøy, og gitt oss inspirasjon til denne masteroppgaven. Takk til våre medstudenter og venner, for gode pauser i hverdagen med lunsj og bordtennisspill. Masterhverdagen hadde ikke vært det samme uten dere. Takk til lærerne på den videregående skolen i Rogaland, som vi fikk lov til å gjennomføre datainnsamlingen på. Vi vil også takke hverandre, for et givende og velfungerende samarbeid gjennom hele studien. Vårt samarbeid er basert på en tillit til hverandre og en evne til å gi og motta konstruktiv kritikk, som har ført til at vi nå sitter med en ferdig masteroppgave som vi er stolte av.

Ingrid Fodstad og Liva Barka

Trondheim, juni 2023

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

TDS	Teorien for didaktiske situasjoner
DI	Didaktisk ingeniørvitenskap
$\mathscr{k}$	Målkunnskap

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Tema for denne studien er elevers arbeid med en oppgave knyttet til induksjonsbevis. Innenfor matematikkdidaktikken er begrepene utforskning og undersøking nå velkjente konsepter. Forskning viser at det er behov for å bevege seg bort fra en tradisjonell tilnærming til matematikk, som en samling av regler og algoritmer som må læres utenat, og heller forksuere på rike oppgaver som utfordrer elevenes tenking og resonnering (Boaler, 2022). En undervisningssøkt som illustrerer en slik tilnærming, begynner typisk med å presentere et kognitivt krevende problem eller aktivitet for elevene. Deretter arbeider de i små grupper og får tilstrekkelig tid til å utforske, diskutere og utvikle løsninger. Læreren observerer arbeidet deres underveis, og oppmuntrer dem til å beskrive deres tankeprosesser. Til slutt samles alle gruppene til en helklassediskusjon, hvor læreren styrer samtalen for å koble elevenes løsninger til målkunnskapen (Nostrati & Wæge, 2015). Bevisoppgaver er spesielt relevante i denne sammenhengen, fordi de krever at elevene resonnerer og argumenterer for sine svar. Hanna (2000) understreker at bevis i skolen brukes primært for å fremme forståelse av matematiske konsepter, og metodikken i beviset anses som en sekundær faktor. Hun hevder at uansett hvor formelt og grundig et bevis er gjennomført, er det ikke verdifullt for en matematiker før det fører til en dypere forståelse av et matematisk konsept.

I dagens læreplan for matematikk (LK20) er resonnering og argumentasjon definert som kjerneelementer (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldig, men har klare begrunnelser, og at de kan begrunne og bevise at deres resonnementer er gyldige. Arbeid med bevis er en del av kompetansemålene i både 1T og R2-matematikk på videregående skole. I 1T-matematikk er et av målene at eleven kan lese og forstå matematiske bevis, samt utforske og utvikle bevis i relevante matematiske emner. I R2-faget skal eleven kunne analysere og forstå matematiske bevis, forklare de bærende ideene i et matematisk bevis og utvikle egne bevis (Utdanningsdirektoratet, 2020). Å kunne utføre et induksjonsbevis er ikke lenger et eget kompetansemål, slik som det var i den gamle lærerplanen (LK06), men det er nå opp til lærerne å tolke hvilke bevis som bør inkluderes i pensum.

Matematisk induksjon, til tross for navnet, er en deduktiv bevismetode som kan brukes for å bevise teoremer som holder for alle naturlige tall[1]. Stylianides et al. (2016) hevder at formelle argumenter som bygger på matematisk induksjon, ikke er like viktig i skolen som på universitetsnivå, men at selve måten å resonnere på likevel er verdifull for elever på ungdomsskole og videregående. De begrunner dette med at metoden forbereder elevene på den sentrale rollen rekursivt resonnement spiller i numeriske og iterative metoder. Vi mener at disse temaene er relevante i lys av den tekniske retningen som matematikkfaget beveger seg i. Avital og Libeskind (1978) påpeker også at fordi en vesentlig del av matematikken har sitt utspring i de naturlige tallene, er forståelse og ferdigheter knyttet

[1] Ved induktiv metode brukes empiri til å trekke generelle konklusjoner om årsakssammenhenger mellom forskjellige faktorer og variabler (Tranøy, 2021). Ved deduktiv metode brukes etablerte teorier og logiske prinsipper til å avlede logiske konklusjoner fra en påstand (Alnes, 2023).

til induksjonsbeviset en nøkkelfaktor i elevenes matematiske utvikling. Tidligere studier viser at dette temaet er utfordrende for mange elever (Ernest, 1984; Ron & Dreyfus, 2004; Stylianides et al., 2007). Ernest (1984) mener at induksjonsbeviset fortjener en større didaktisk oppmerksomhet, for å kunne identifisere misoppfatninger som kan føre til problemer. Dubinsky (1989) skriver at matematisk induksjon er et svært vanskelig konsept å lære for studenter, og at det vil forbli slik så lenge vi fortsetter å ignorere misoppfatningene som finnes. I forskningslitteraturen pekes det også på hvordan lærerens mangel på forståelse og undervisning om induksjonsbeviset, kan lede til misoppfatninger hos eleven (Ron & Dreyfus, 2004). I denne sammenhengen skriver Lin et al. (2012) om viktigheten av lærerens valg i utforming av bevisoppgaver. Planleggingen av problemer og aktiviteter som skal benyttes i undervisningen påvirker i stor grad implementeringen av den matematiske kunnskapen hos elevene.

Formålet med denne studien er å undersøke hvordan en praktisk oppgave kan fremme læring av bevis. Bakgrunnen for studien er vår felles interesse for bevis, som har oppstått på grunn av egne erfaringer med utfordringer knyttet til bevisforståelse, spesielt på universitetsnivå. Vi kjente oss godt igjen da vi leste forskning som beskrev hvordan studenter ofte forstår et bevis når læreren går gjennom det, men sliter når de skal prøve selv. Gjennom studiet har vi blitt introdusert for moderne metoder for å designe matematikkundervisning, og en av disse er Brousseau (1997) sin teori for didaktiske situasjoner i matematikk. Dette rammeverket har vekket vår interesse, fordi det bryter med den tradisjonelle matematikkundervisningen. Vi ønsket å undersøke om et undervisningsopplegg med fokus på aktivitet, gruppearbeid og diskusjon, kunne være nyttig for å lære induksjonsprinsippet. Forskningslitteraturen anbefaler å bruke konkrete objekter i utforskende undervisning, objekter som kan manipuleres, og som visuelt og fysisk kan representere abstrakte matematiske ideer (Wæge & Nostati, 2015). Ifølge Duval (2006) oppnår elevene matematisk forståelse i arbeid med ulike representasjoner, for eksempel ved at observasjoner fra en fysisk modell kan konverteres til en skriftlig formel. Ron og Dreyfus (2004) anbefaler at lærere i større grad bør bruke modeller i undervisningen av induksjonsbeviset, og trekker frem Hanois tårn som en god modell for induksjonsprinsippet. Basert på tidligere forskning, Brosseau (1997) sitt rammeverk og vår egen interesse for matematikkdidaktikk, har vi designet et opplegg som vi har testet ut i en klasse på en videregående skole i Rogaland.

1.2 Forskningsspørsmål og oppgavens struktur

I denne studien har vi valgt å benytte oss av handlingsrommet i den nye læreplanen, og utfordret en 1T-klasse med en oppgave knyttet til induksjonsbevis. Vi ville gjennomføre studien i en klasse som oppfylte to kriterier, som var (1) konseptet induksjonsbevis skulle være ukjent for elevene og (2) det skulle være oppnåelig for dem å lære seg beviset gjennom et velutviklet undervisningsopplegg. Selv om vi ikke kunne garantere for det siste kriteriet, så var vår antagelse at en 1T-klasse hadde de nødvendige matematiske verktøyene til å mestre et induksjonsbevis, ved hjelp av noen retningslinjer. I en undervisningssituasjon hvor målkunnskapen er ukjent for elevene, vil utfordringen være å bruke forkunnskapene sine på en ny måte i en ukjent situasjon. Hensikten med prosjektet har vært å evaluere undervisningsopplegget som vi har designet, ved hjelp av relevant teori og sammenligning mellom *a priori*- og *a posteriori*-analyser. Denne masteroppgaven er en kvalitativ studie som svarer på følgende forskningsspørsmål:

Hvordan kan en TDS-basert undervisningssituasjonen, knyttet til Hanois tårn, fungere som introduksjon til induksjonsbevis i en 1T-klasse?

Med begrepet *fungere* som vi har valgt å bruke i formuleringen, sikter vi til hva slags læringsutbytte elevene vil sitte igjen med etter å ha gjennomført undervisningsopplegget, samt hvordan selve designet av situasjonen påvirker elevenes arbeid. Vårt svar på denne problemstillingen vil innebære å studere hvilke evner som kreves for å utføre beviset, hvilke form for bevis elevene bruker og hvilke faktorer i designet som hindrer eller leder til utvikling av målkunnskapen.

Oppgaven består til sammen av ti kapitler, hvor hvert av disse inneholder flere delkapitler. I Kapittel 2 presenteres det teoriestiske rammeverket for studien, samt annen relevant teori som studien baserer seg på. I Kapittel 3 vil vi beskrive metoden i studien, nemlig didaktisk ingeniørvirksomhet, som er nært knyttet til TDS-rammeverket. Videre vil Kapittel 3 inneholde en beskrivelse av innsamlingen og håndteringen av datamaterialet, samt noen etiske betraktninger som ble vurdert i forkant av datainnsamlingen. I Kapittel 4 vil den forberedende analysen av målkunnskapen bli presentert, som er en viktig del av didaktisk ingeniørvirksomhet. Her vil vi studere induksjonsbeviset fra et epistemologisk, didaktisk og institusjonelt perspektiv. I Kapittel 5 vil designet av undervisningssituasjonen bli beskrevet gjennom en *a priori*-analyse, og i Kapittel 6 vil resultatene fra datainnsamlingen bli presentert og analysert i en *a posteriori*-analyse. Videre vil vi analysere selve undervisningsdesignet i Kapittel 7. I Kapittel 8 vil vi presentere en oppsummering av funnene i studien, og i Kapittel 9 blir disse funnene diskutert. I et siste kapittel vil vi legge frem noen avsluttende refleksjoner som handler om hva vi sitter igjen med etter denne studien.

2 Teori

2.1 Teoretisk rammeverk - teorien for didaktisk situasjoner

I dette kapittelet vil vi presentere studiens teoretiske rammeverk, som er *teorien for didaktiske situasjoner* (heretter TDS). I tillegg vil vi i et kort avsnitt beskrive hvilke læringsteorier som er tilknyttet TDS, for å tydeliggjøre hvordan det i TDS argumenteres for at læring oppstår. Til slutt vil vi presentere relevant teori om bevis og rekursjon, som er temaer knyttet til undervisningsopplegget.

Ifølge Strømskag (2020b) er TDS-rammeverket en systematisk, vitenskapelig tilnærming for undervisning og læring av matematikk. TDS har sin opprinnelse i Frankrike på 1960-tallet, hvor den ble introdusert av den franske didaktikeren Guy Brousseau (Artigue et al., 2014, s. 47). I samarbeid med flere forskere er teorien fremdeles i utvikling, og brukes på alle nivåer i utdanningssystemet (Strømskag, 2020b). Rammeverkets begreper og modeller utgjør til sammen et analytisk system, som kan brukes i design og analyse av matematikkundervisning.

Et kjennetegn ved TDS er at den aktuelle matematiske målkunnskapen er i fokus, og spiller en sentral rolle for designet og analysen av undervisningen (Artigue et al., 2014). På grunn av dette rettes mye av oppmerksomheten mot målkunnskapens epistemologi, som vil si dens natur, opprinnelse, funksjon og gyldighet (Strømskag, 2020b, s. 26). TDS er nyttig når intensjonen er å lære én spesifikk matematisk kunnskap.

TDS bygger på to epistemologiske prinsipper: den matematiske målkunnskapen skal være en optimal løsning på et problem innebygd i en situasjon; og at den intellektuelle og materielle virkeligheten elevene opererer i bør gi dem en indikasjon på om deres svar er tilstrekkelig med hensyn til målkunnskapen (Strømskag, 2017). De to prinsippene vil ifølge Strømskag (2017) sette eleven i sentrum for å kunne utvikle den aktuelle kunnskapen. En situasjon hvor de to prinsippene ovenfor opprettholdes, definerer Brousseau (1997) som en *fundamental situasjon*. I en fundamental situasjon vil meningen med den matematiske kunnskapen bevares, som ifølge Strømskag (2020b) vil si at løsningen på det aktuelle problemet i en slik situasjon skal være en lineær avbildning av den matematiske kunnskapen, som er et av hovedmålene ved bruk av TDS.

For å forstå hvordan en undervisningssituasjon designes og analysere i TDS, vil vi i det påfølgende kapittelet definere noen sentrale begreper som vi vil bruke gjennom oppgaven. I tillegg til å forklare begreper, vil vi gi en kort beskrivelse av de ulike fasene som en TDS-basert undervisningssituasjon i består av.

2.1.1 Sentrale begreper fra TDS

Hovedessensen i TDS er at den matematiske kunnskapen (også referert til som målkunnskapen, heretter $\mathscr{k}$), skal oppfattes som et redskap til å løse problemer. For å oppnå dette, designes det en situasjon som består av et problem, hvor $\mathscr{k}$ er den optimale løsningen på problemet. Det er slike situasjoner som i TDS defineres som *didaktiske situasjoner* (Strømskag, 2020b). Videre vil begrepene miljø, adidaktisk situasjon, didaktisk variabler og didaktisk kontrakt forklares, siden disse er sentrale i modellering av en didaktisk situasjon.

Miljøet i en didaktisk situasjon er elementene som elevene samhandler med. Det vil si at miljøet inkluderer alt av materiell og informasjon, som er hensiktsmessig for elevene å bruke til å løse problemet (Artigue et al., 2014, s. 47). Ifølge Strømskag (2020b) har miljøet som mål å virke sammen etter en bestemt plan, og defineres derfor som et system. Målet med systemet er at det skal gi elevene en form for objektiv feedback. Et fungerende miljø skal gjøre det mulig for elevene å vite om deres handlinger og resonnementer er gunstige når de forsøker å løse det aktuelle problemet, og denne evnen defineres som det *adidaktiske potensialet* til miljøet. Miljøet består dermed av det som Strømskag (2020b) definerer som *adidaktiske elementer*. Disse elementene innehar adidaktisk potensial, og det er gjennom operasjoner på disse elementene at elevene kan bygge en relasjon til målkunnskapen. Designprosessen av hva miljøet skal bestå av er viktig, siden miljøet skal føre til at eleven utvikler og tar i bruk målkunnskapen $\mathscr{k}$ (Strømskag, 2020b, s. 12–13).

Den delen av den didaktiske situasjonen, hvor elevene arbeider i samspill med miljøet for å løse problemet (uten essensiell hjelp fra læreren), defineres som en *adidaktisk situasjon* (Strømskag, 2020b). Brousseau (1997) beskriver en adidaktisk situasjon som en situasjon hvor elevene gjør problemet til sitt eget, og forsøker å løse det ut ifra oppgavens indre logikk, uten å prøve og tolke lærerens intensjon med oppgaven. I en didaktisk situasjon vil det være ulike variabler som styres av læreren, disse defineres som *didaktiske variabler*. Disse variablene vil påvirke dynamikken og læringsutbytte i situasjonen. Eksempelvis vil valg av begreper, størrelsen på gruppene for samarbeid og lengden på undervisningssekvensen være didaktiske variabler (Strømskag, 2020b).

Samspillet mellom læreren og elevene styres av en *didaktisk kontrakt.* Brousseau (1997) definerer denne kontrakten som spillereglene og strategien for den didaktiske situasjonen. Han presiserer at den didaktiske kontrakten ikke er en generell pedagogisk kontrakt, men at den avhenger av den spesifikke målkunnskapen i oppgaven. Den didaktiske kontrakten utgjør det settet av gjensidige forpliktelser og forventinger som finnes mellom elevene og lærerne (Artigue et al., 2014, s. 31). I noen tilfeller må læreren gjøre endringer i miljøet dersom målkunnskapen ikke anvendes slik som tiltenkt. Slike endringer i miljøet defineres i TDS som *reguleringer.* Det er to ulike former for reguleringer, hvor den ene av dem er endringer i den didaktiske kontrakten, som for eksempel endring av gruppesammensetning. Den andre formen kalles for et *informasjonssprang,* som innebærer at læreren kommer med tilleggsopplysninger eller ekstra betingelser underveis (Strømskag, 2020b).

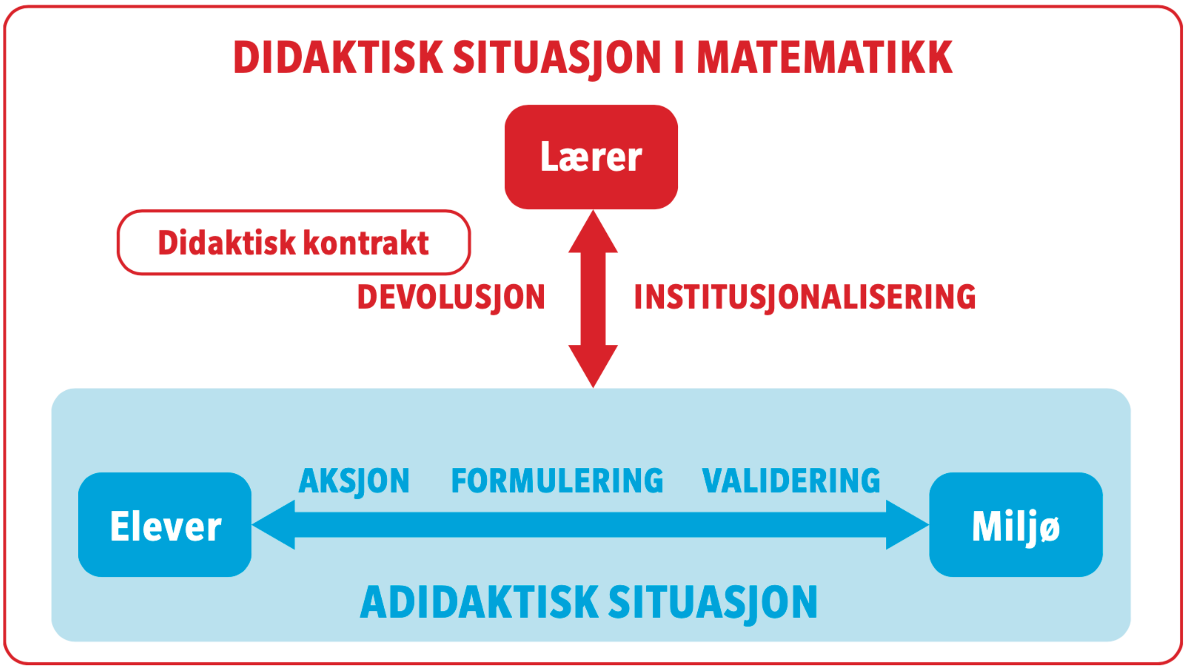
2.1.2 Faser i en didaktisk situasjon

En didaktisk situasjon består av fem ulike faser. Læreren vil spille hovedrollen i de to didaktiske fasene, devolusjon og institusjonalisering, som henholdsvis er den første og siste fasen i en didaktisk situasjon (Brousseau, 1997). I *devolusjonsfasen* skal læreren overlevere en adidaktisk situasjon, som inkluderer et problem og et miljø, til elevene. Den didaktiske kontrakten vil i denne fasen introduseres for elevene, og målet er at elevene skal kunne overta oppgaven og løse problemet uten lærerens hjelp (Strømskag, 2020b). Dette leder elevene over til de tre adidaktiske fasene, som er aksjon, formulering og validering.

I *aksjonsfasen* forklarer Strømskag (2017) at elevene vil konstruere en representasjon av situasjonen, en «modell» som vil veilede dem i beslutninger. Dette skjer ved at elevene overtar problemet og forsøker å løse det på grunnlag av dets indre logikk. Gjennom interaksjoner med hverandre og det materielle miljøet, vil de på denne måten forsøke å finne en implisitt løsning på problemet (Strømskag, 2020b). Dersom devolusjonsfasen var vellykket, vil læreren opptre som observatør i denne fasen. Når elevene går over i *formuleringsfasen,* vil de gjennom indirekte arbeid med miljøet, forsøke å formulere en eksplisitt løsning på problemet. I denne fasen vil elevene mest sannsynlig følge løsningsmetoden til den første eleven som finner en løsning, hvor målet er at medelevene skal forstå og kunne anvende den samme løsningsmetoden. Videre i den tredje og siste adidaktiske fasen, *valideringsfasen*, skal elevene forsøke å bekrefte løsningen deres, som vil si at de skal begrunne et fenomen eller verifisere en formodning. Lærerens rolle i denne fasen er å lede en slags matematisk debatt, hvor hensikten er å få elevene til å begrunne sine løsninger matematisk og presist (Strømskag, 2017).

Institusjonaliseringsfasen er den femte og siste fasen i en didaktisk situasjon, og er en didaktisk fase, hvor kunnskapen som oppsto i de adidaktiske fasene blir dekontekstualisert. Læreren vil i denne fasen koble den kunnskapen elevene har bygget, med rollen og betydningen til målkunnskapen $\mathscr{k}$. På denne måten vil $\mathscr{k}$ generaliseres slik at den kan anvendes utenfor situasjonen hvor den ble utviklet (Strømskag, 2020b). I Figur 2.1 illustreres en ideell didaktisk situasjon. I devolusjonen overlever læreren en adidaktisk situasjon til elevene, etterfulgt av de tre adidaktiske fasene hvor elevene får eierskap til problemet og målkunnskapen utvikles. Avslutningsvis, i institusjonaliseringen, går læreren gjennom elevenes løsninger og bryter ned målkunnskapen. Det kan forekomme reguleringer underveis, siden læreren ikke kan forutse med sikkerhet hvordan elevenes vil respondere på undervisningssituasjonen.

Figur 2.1 *En didaktisk situasjon i matematikk.*



Merknad. Figuren er hentet fra *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (Strømskag, 2020b, s. 54). Gjengitt med tillatelse.

2.2 Læringsteori

Etter å ha presentert sentrale TDS-begrep i det forrige delkapittelet, vil vi nå knytte rammeverket opp mot noen kjente læringsteorier, for å forklare hvordan denne typen undervisning kan bidra til læring. TDS er et verktøy man kan bruke i design av undervisning, dersom man har som mål at elevene skal tilegne seg en *ekte* matematisk kunnskap. Strømskag (2020b) definerer ekte i den forstand at elevene skal vite hensikten med og brukbarheten til den aktuelle kunnskapen. Gjennom en didaktisk situasjon skal elevene ta i bruk målkunnskapen og kunne anvende den i nye situasjoner, som vil si at elevene på selvstendig vis skal konstruere en ny kunnskap (Strømskag, 2017). Ifølge Strømskag (2020b) blir elevenes læring forklart som en kombinasjon av to prosesser: tilpasning og akkulturasjon. *Tilpasning* betyr at elevene lærer ved å tilpasse seg miljøet, og dette kan sees i lys av konstruktivistisk læringsteori, hvor kunnskap ikke bare overføres, men konstrueres individuelt av hver enkelt elev (Ringnes & Mark, 2020). Innenfor konstruktivisme er kunnskap ikke et ferdig produkt som læreren overfører til eleven, men noe som oppstår når elevene handler aktivt basert på egne interesser. Læring beskrives som et resultat av handling, og lærerens hovedoppgave blir derfor å legge til rette for at elevene kan utforske omgivelsene (Ringnes & Mark, 2020). Læringsteorien kan assosieres med arbeidet til den velkjente pedagogen og psykologen Jean Piaget (1896–1980). Han mente at kunnskap konstrueres individuelt gjennom en konstant prosess, frem og tilbake mellom personen og omgivelsene, som i TDS uttrykkes gjennom begrepet tilpasning. Piaget (1976) sin teori er basert på hans forståelse av hvordan organismer tilpasser seg sine omgivelser og endringer i dem, hvor hovedessensen er at det skal være en form for balanse i forholdet mellom en organisme og dens omverden (Skott et al., 2008). Piaget (1976) definerer to forskjellige tilpasningsprosesser: assimilasjon og akkomodasjon. Med tanke på utvikling av ny kunnskap knyttes *assimilasjon* til når elever tolker ny kunnskap med utgangspunkt i kunnskap eleven allerede besitter. På den andre siden oppstår *akkomodasjon* når eleven må tilpasse det han allerede vet, slik at den nye kunnskapen stemmers overens med hans virkelighet (Piaget, 1976).

Ifølge Lyngsnes og Rismark (2020) er det gjennom assimilasjon og akkomodasjon, at varig og anvendbar kunnskap utvikles, som Piaget (1976) definerer som *operasjonell kunnskap*. Piaget skiller mellom denne typen kunnskap og *figurativ kunnskap,* som er fakta, informasjon og detaljer som kan gjentas, men ikke anvendes (Lyngnes & Mark, 2020). Denne oppfatningen av kunnskap kan vi knytte til Skemp (1978) sin diskusjon rundt forståelse. Skemp (1978) skiller mellom relasjonell og instrumentell forståelse, hvor *relasjonell forståelse* defineres som å vite hva man skal gjøre og hvorfor, mens *instrumentell forståelse* kan beskrives som «regler uten mening». Når man bruker TDS er målet at elevene skal ta i bruk målkunnskapen, uten nødvendigvis å være bevisst på det, slik at de anvender den basert på logikk og intuisjon, og dermed utvikler en relasjonell forståelse. Disse begrepene kan også sees i sammenheng med strukturell og operasjonell oppfatning, som Sfard (1991) definerer som to ulike oppfatninger av matematiske konspekt. En *strukturell oppfatning* innebærer å se på, og referere til, konseptet som et objekt, som vil si å kunne gjenkjenne ideen bak konseptet. En *operasjonell oppfatning* assosieres derimot kun med prosesser, algoritmer og handlinger, knyttet til det matematiske konseptet. Eksempelvis kan oppfatningen av derivasjon kobles til derivasjonsregler og beregningsprosesser (operasjonell), eller et ordnet par som beskriver stigningen til en funksjon (strukturell) (Sfard, 1991). Sfard (1991) sin teori baserer seg på hvordan man individuelt oppfatter ulike matematiske konsept, mens Piaget (1976) sitt skille mellom operasjonell og figurativ kunnskap i større grad er knyttet til hvordan man anvender kunnskapen. I samsvar med Piaget sin definisjon av operasjonell kunnskap, kan man derfor hevde at en relasjonell forståelse kreves for å utvikle en strukturell oppfatning av det aktuelle matematiske konseptet.

Som nevnt tidligere i dette delkapittelet, blir elevenes læring i TDS forklart som en kombinasjon av tilpasning og akkulturasjon. Slik som vi har beskrevet ovenfor, kan tilpasning knyttes til et konstruktivistisk syn på læring, og vil oppstå i de adidaktiske fasene hvor elevene tilpasser seg miljøet. For at elevene skal oppnå målkunnskapen definerer Strømskag (2020b, s. 61) begrepet *akkulturasjon*, som oppstår når elevens kunnskapskonstruksjoner kobles til den vitenskapelige og dekontekstualiserte formen av kunnskapen. For at slik akkulturasjon skal skje, er det nødvendig med didaktiske intervensjoner fra læreren, som utføres i den avsluttende fasen institusjonaliseringen. Siden akkulturasjon innebærer at elevene og læreren utvikler kunnskap i samspill med hverandre, kan denne prosessen knyttes til sosiokulturell læringsteori. I motsetning til konstruktivisme innebærer en *sosiokulturell tilnærming* at kunnskap konstrueres når mennesker deler sin forståelse og sine meninger i sosiale samhandlinger (Postholm & Jacobsen, 2018). Gjennom tilpasning i den adidaktiske situasjonen, styrt av den didaktiske kontrakten, får elevene mulighet til å fritt konstruere ny kunnskap, som gjennom akkulturasjon i institusjonaliseringen ønskelig skal bli en referansekunnskap, som elevene kan anvende i nye situasjoner. Tilpasning og akkulturasjon, samt en kombinasjon av et konstruktivistisk og sosialkulturelt syn på læring, kan dermed sees på som komplimentere prosesser ved bruk av TDS (Strømskag, 2020b).

Til nå har vi presentert ulike elementer av studiens teoretiske rammeverk, og i neste delkapittel vil vi legge frem relevant teori om det matematiske temaet som studien baserer seg på. Senere i oppgaven, i den forberedende analysen, vil vi presentere teori som er direkte knyttet til målkunnskapen, nærmere bestemt induksjonsbevis. I dette kapittelet vil vi derfor fokusere på annen relevant teori, knyttet til de mer overordnede temaene gjennom oppgaven, som er bevis, representasjoner og rekursjon.

2.3 Ulike typer bevis

Vi vil nå definere begrepet bevis og beskrive hvordan man kan skille mellom ulike typer av dem. Begrepet bevis har veldefinerte betydninger innenfor matematikken, både i forskning og i skolesammenheng (Samadeni, 1984). I boken *Proof and Proving in Mathematics Education* beskriver Tall et al. (2012) hva matematikere legger i begrepet bevis.

> Fra et epistemologisk synspunkt krever et *bevis* for matematikere å tenke på nye situasjoner, fokusere på viktige aspekter, bruke tidligere kunnskap til å kombinere nye ideer på nye måter, vurdere sammenhenger, lage antagelser, formulere definisjoner etter behov og bygge opp en gyldig argumentasjon (s. 15, vår oversettelse).

Beskrivelsen viser at det kreves forkunnskaper, logisk tenkning og evne til å anvende matematisk kunnskap i nye situasjoner for å føre et bevis. Bevisføring er derfor en sentral del av matematikken, og bevisundervising kan bidra til å styrke elevenes resonnering og matematisk forståelse, samt evne til å se sammenhenger mellom matematisk kunnskap (Zaslavsky, 2012).

Et bevis er et resultat av gyldig resonnering og argumentasjon, og det finnes flere ulike kategorier for bevis, hvor nivået av evner som kreves varierer. Balacheff (1988a) presenterer eksempelvis, i sin studie om bevis i skolesammenheng, hvordan ulike former av bevis kan kategoriseres. Han skiller først og fremst mellom pragmatiske og konseptuelle bevis. *Pragmatiske bevis* tar utgangspunkt i konkreter, figurer, uttrykk og handlinger, mens *konseptuelle bevis* i motsetning krever en løsrivelse fra konkrete tilfeller. Denne sistnevnte typen bevis hviler på formuleringer av de aktuelle matematiske egenskapene og forholdet mellom dem (Balacheff, 1988b).

Basert på elevenes besvarelser i studien og tidligere forskning, definerer Balacheff (1988) fire ulike undergrupper av bevis: naiv empirisme; avgjørende eksperiment; generisk eksempel; og tankeeksperiment, hvor de tre første kategoriene regnes som pragmatiske bevis. Dersom man beviser noe ved *naiv empirisme,* hevder man at en påstand er sann ved å verifisere ulike tilfeller av det aktuelle utsagnet. Videre defineres *avgjørende eksperiment* som en bevisform hvor utfallet av et eksperiment gjør det mulig å velge mellom to hypoteser. Dette er fordi eksperimentet er designet slik at utfallet skal være tydelig avhengig av hvilken hypotese som er tilfellet. Denne formen for validering skiller seg fra naiv empirisme, ved at eleven eksplisitt stiller spørsmål knyttet til generalisering av problemet, og svarer på dette ved å teste et spesifikt tilfelle (Balacheff, 1988a). Dersom man tar beviset et steg videre, havner man innenfor kategorien *generiske eksempel.* I disse tilfellene blir det matematiske konseptet generalisert, ved at et spesielt tilfelle blir brukt til å representere alle tilfellene i et generelt argument. Den siste kategorien, *tankeeksperiment,* er den eneste som ifølge Balacheff (1988a) regnes som et fullverdig bevis. Et bevis plasseres i denne kategorien dersom resonnering oppstår uten tilhørighet til hendelser eller handlinger, og kun består av mentale operasjoner (Balacheff, 1988b). Egenskapene til den aktuelle kunnskapen løsrives fra pragmatiske argument, og blir i denne bevisformen formulert på en generell måte (Balacheff, 1988a, 1988b).

2.4 Representasjoner

I tillegg til bevis, spiller også representasjoner en sentral rolle i vår studie. Vi vil nå legge frem teori som argumenterer for at ulike representasjoner i matematikkundervisning fremmer forståelse. I Duval (2006) sitt arbeid knyttet til forståelse i matematikk, presiserer han at enhver form for matematisk prosess krever bruk av et semiotisk system av representasjoner. I matematikken består en *representasjon* av matematiske *tegn*, som ifølge Steinbring (2006) spiller en avgjørende rolle for konstruksjon og formidling av matematisk kunnskap. Et tegn har to ulike funksjoner, en *semiotisk funksjon* som er rollen til det matematiske tegnet («noe som står for noe annet»), og en *epistemologisk funksjon* ved å inneholde kunnskap om hva det står for (Steinbring, 2006). På bakgrunn av dette definerer Duval (2006) en *semiotisk representasjon* som bruk av matematiske tegn, hvor tegnet representerer noe, i tillegg til å representere det som relateres til hva tegnet står for.

Det finnes flere ulike måter å representere matematiske objekt på, og Duval (2006) deler semiotiske representasjoner inn i fire ulike kategorier, basert på ulike egenskaper. Han skiller blant annet mellom diskursive og ikke-diskursive representasjoner, hvor de *diskursive representasjonene* inneholder forklaringer, notasjoner eller beregninger, mens de *ikke-diskursive representasjonene* kun inneholder figurer, skisser eller mønstre. I tillegg til dette skiller Duval (2006) også mellom to ulike registre, nemlig multifunksjonelle og monofunksjonelle registre, hvor type register beskriver hvordan man uttrykker den semiotiske representasjonen. *Monofunksjonelle registre* er prosesser som kan algoritmiseres, mens de *multifunksjonelle registrene* på den andre siden ikke har denne egenskapen (Duval, 2006).

Videre definerer Duval (2006) to ulike former for transformasjoner mellom de ulike representasjonene, som han benevner behandlinger og konverteringer. Behandlinger defineres som transformasjoner innenfor samme register og representasjon, hvor man dermed blir værende i samme system av matematisk notasjon. Gjennomfører man en *konvertering* vil man derimot endre register, uten å endre hva representasjonen står for. Eksempelvis, dersom man blir gitt funksjonsuttrykket $f(x) = x^2$, vil det å regne ut den deriverte av $f(x)$ være en behandling, mens å skissere grafen vil være en konvertering. I artikkelen til Duval (2006) presenteres det i tillegg empiriske data, som viser at arbeid innenfor flere registre og representasjoner er nøkkelen for matematisk forståelse. Han konkluder derfor med at den sanne utfordringen med matematikkundervisning, er å få elevene til å utvikle evnen til å gjøre slike konverteringer.

2.5 Rekursjon

Vi har nå sett at undervisningssituasjonen i denne studien vil handle om bevis, og at ulike representasjoner er et viktig didaktisk aspekt å ta hensyn til, ved utformingen av undervisningssituasjonen. Vi vil nå avslutte teorikapittelet ved å presentere begrepet rekursjon, og dets sammenheng med induksjonsbevis. Vi vil også gi en kort oversikt over tidligere forskning som har utforsket elevers forståelse av dette konseptet. Rekursjon er et begrep som har sitt opphav i fysikk, tallteori og matematisk logikk, og som i dag brukes mer og mer innenfor datavitenskap (Kilpatrick, 1985). Selv om det ikke finnes en universelt akseptert definisjon av begrepet, kan det referere til flere relaterte begreper, som for eksempel rekursjonsrelasjoner, rekursive funksjoner, rekursive prosedyrer og rekursive betingelsesuttrykk. Bruken av rekursjon blir stadig viktigere i matematikkundervisningen, og spesielt innen programmering fordi det kan kan føre til mer lesbar og effektiv kode (Kilpatrick, 1985).

Ifølge Watumull et al. (2014) var det løsningen på ett av de matematiske problemene til Hilbert[2], beslutningsproblemet (Entscheidungsproblem), som dannet grunnlaget for det matetiske konseptet. Dette problemet gikk ut på å formulere en prosedyre som kunne bestemme validiteten til et vilkårlig logisk uttrykk, i et endelig antall steg. Bevismetoden induksjon, som i dag brukes til å bevise matematiske påstander, var en av tilnærmingene som ble undersøkt når dette problemet skulle løses og ble utviklet ved bruk av rekursjon. Kilpatrick (1985) beskriver *rekursjon* som en funksjon, hvor hver verdi defineres ved en tidligere definert verdi. Matematisk rekursjon referer dermed til en prosess der en sekvens eller funksjon defineres i termer av seg selv.

En annen måte å beskrive en rekursiv prosess på, kan være som en funksjon som kaller på seg selv. Et eksempel på dette er trekanttallene, hvor tallmønsteret kan uttrykkes rekursivt ved $a_{n+1} = a_n + (n+1)$. Siden vi bruker det forrige figurtallet (a_n) for å finne det neste (a_{n+1}), er dette en rekursiv formel hvor funksjonen kaller på seg selv. Rekursive formler og funksjoner kan på denne måten være nyttige for å løse problemer innenfor matematikk og datavitenskap, og er et kraftig verktøy for problemløsning og modellering innenfor mange felt (Kilpatrick, 1985).

Tidligere forsking har vist at mange elever og studenter sliter med å lære og forstå rekursjon, og at de generelt har problemer med å bruke konseptet i problemløsning (Haberman & Averbuch, 2002; Kilpatrick, 1985). Å forstå rekursjonsprinsippet vil si at elevene har evnen til å evaluere og formulere rekursive algoritmer (Haberman & Averbuch, 2002). Ifølge Kilpatrick (1985) krever bruk av rekursjon at elevene evner å se det aktuelle systemet utenfra, som vil si å forstå hva funksjonen gir i stedet for hvordan den gjør det. Elevene blir forvirret av en prosedyre som kaller på seg selv, fordi den operer på to ulike nivåer samtidig (Kilpatrick, 1985).

[2] Hilberts problemer var en liste over 23 matematiske problemer formulert av den tyske matematikeren David Hilbert i 1900. Hilbert sin intensjon var å identifisere de viktigste spørsmålene som var ubesvarte innenfor matematikk på den tiden, slik at matematikeren hadde mål å arbeide mot (Yandell, 2001).

I tillegg til begrenset forståelse av grunnleggende matematiske konsepter og symbolsk representasjon, trekker Sooriamurthi (2001) frem funksjonell abstraksjon som hovedfaktor for å kunne anvende rekursjon. Å mestre rekursjon vil si å ha en grunnleggende forståelse av *funksjonell abstraksjon*, som vil si å rette fokus mot hva en funksjon gjør i motsetning til hvordan den gjør det (Sooriamurthi, 2001). I studier rundt elevers forståelse av rekursjon er et av resultatene som går igjen at elevene har utilstrekkelig forståelse av funksjonell abstraksjon, i tillegg til mangel på riktig metodikk for å uttrykke en rekursiv løsning (Haberman & Averbuch, 2002; Soorimurthi, 2001).

I 1985 ble det gjennomført en studie knyttet til elevers ulike mentale modeller av rekursjon som en prosess (George, 2000). Basert på denne studien og videre forskning av George (2000) kan man skille mellom to ulike typer mentale modeller av rekursjon, kalt (oversatt til norsk) løkkemodeller og kopimodeller. *Løkkemodellen* innebærer at elevene ser på rekursjon som en gjentakende prosess som kjører flere ganger. Denne modellen av rekursjon kan føre til at elevene har vanskeligheter med å forstå mer komplekse rekursive algoritmer, og hvordan de påvirker resultatene. *Kopimodellen* derimot, innebærer at elevene ser på rekursjon som en selvstendig prosess som kan skape flere kopier av seg selv, og ved bruk av denne modellen evner elevene å løse mer komplekse problemer. Studien viste at undervisningsmetoder som benytter visualisering og konkrete eksempler av rekursjon kan hjelpe elevene å gradvis bevege seg mer over til kopimodellen av rekursjon, og kan dermed bidra til å forbedre elevens forståelse av konseptet (George, 2000).

Samlet viser disse studiene at elevers evne til å forstå rekursjon kan påvirkes av ulike faktorer, inkludert undervisningsmetoder og kontekst. Konkrete eksempler og visuelle hjelpemidler kan være spesielt nyttige for elever som har vanskeligheter med å forstå rekursjon på et abstrakt nivå (Haberman & Averbuch, 2002; George, 2000; Soorimurthi, 2001).

3 Metode

Etter å ha presentert studiens teoretiske rammeverk i forrige kapittel, vil vi i dette kapittelet beskrive *didaktisk ingeniørvirksomhet* (heretter DI), som er metodologien brukt i TDS. Vi vil i dette kapittelet beskrive metoden som er brukt gjennom hele studien, som innebærer en gjennomgang av prosessen før, under og etter datainnsamlingen. Til slutt i dette kapittelet vil vi kort drøfte noen etiske betraktninger og vår rolle som forsker gjennom studien.

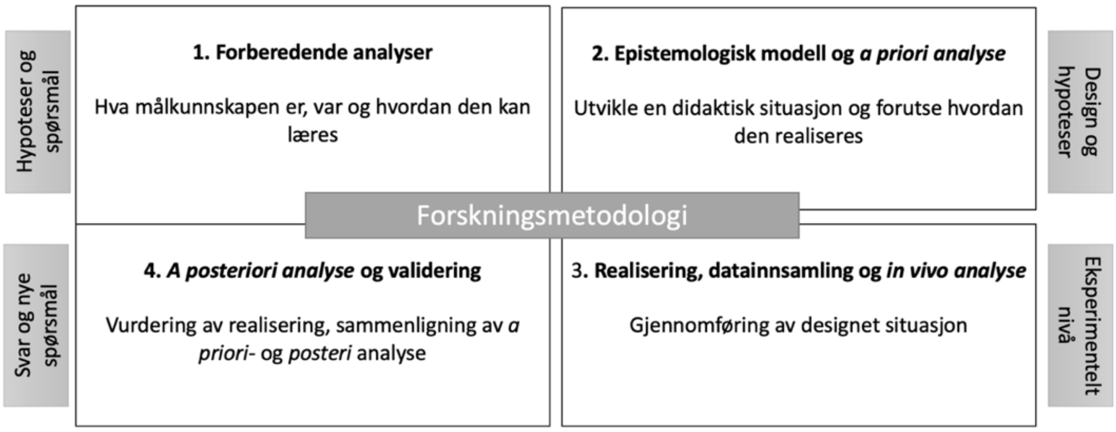
3.1 Didaktisk ingeniørvirksomhet

Hensikten med studien har vært å teste validiteten til en egendesignet didaktisk situasjon hvor elevene gjennom praktisk arbeid med Hanois tårn skulle bevise en formel ved bruk av induksjonsbevis. I vår oppgave har vi valgt å bruke Strømskag (2020a) sin modell for didaktisk ingeniørvirksomhet. For å kunne designe en didaktisk situasjon innenfor TDS er DI utviklet for å kunne gi læreren de nødvendige verktøyene. Ifølge Barquero og Bosch (2015) ligger metodologien i skjæringspunktet mellom forskning og undervisning, og ble utviklet med ønske om å oppfylle to ulike krav, hvorav det ene var å ta hensyn til kompleksiteten i et klasserom og det andre var å uttrykke forholdet mellom forskning og undervisingsinnovasjon. Basert på kvalitative analyser er DI strukturert i de fire ulike fasene: forberedende analyser; design og *a priori*-analyse; realisering, datainnsamling og in vivo-analyse, og til slutt *a posteriori*-analyse og validitetsvurdering (Artigue, 2015; Strømskag, 2020a). Validiteten til den designede undervisningssituasjonen har i vårt tilfelle blitt testet ved en sammenligning av *a priori*- og *a posteriori*-analyse, som er analyser som presenteres senere i kapitelet. Vi vil i det påfølgende delkapittelet forklare de ulike analysefasene i DI nærmere, samt se på DI i lys av pedagogisk forskning.

3.1.1 Design innen TDS

Barquero og Bosch (2015) beskriver *DI* som kjernen i prosjektet for didaktikkvitenskap som ble grunnlagt av tidligere nevnte Brousseau. Forskningsmetoden brukes blant annet til å designe og analysere undervisningssituasjoner innenfor TDS, og skiller seg fra tradisjonell utdanningsforskning da valideringen ikke baserer seg på sammenligning av kontroll- og eksperimentelle grupper (Artigue, 2015). Validiteten til DI baserer seg derimot på to ulike analyser som videre vil defineres i de fire ulike fasene som DI består av. I Figur 3.1, som er basert på Barquero og Bosch (2015) sin modell for DI, ser man en oversikt over de ulike fasene av DI som videre vil forklares.

Figur 3.1 *Fasene i didaktisk ingeniørvirksomhet innenfor TDS*



Merknad. Figuren beskriver de fire fasene i DI-metodologien innenfor TDS, og er tilpasset etter Barquero og Bosch (2015, s. 252).

3.1.1.1 Forberedende analyse

Den første fasen i DI inkluderer analyser av den matematiske målkunnskapen, $\mathscr{k}$, som den designede situasjonen skal baserer seg på. Den innledende fasen inkluderer de tre analysene; epistemologisk analyse, didaktisk analyse og institusjonell analyse. Hensikten med analysene er å undersøke hvilke forhold og begrensinger som kan påvirke den didaktiske situasjonen med hensyn på $\mathscr{k}$. Den forbedrende analysen gir følgelig et godt utgangspunkt for å kunne designe en situasjon hvor $\mathscr{k}$ er den optimale løsningen på et matematisk problem (Strømskag, 2020a).

Den *epistemologisk analyse* av $\mathscr{k}$ hjelper forskeren å identifisere mulige epistemologiske hindringer som kan oppstå, i tillegg til å gi forskeren et innblikk i ulike matematiske situasjoner hvor $\mathscr{k}$ kan brukes (Artigue, 2015). For å gjennomføre en slik analyse presenterer Strømskag (2020b) fire spørsmål som skal besvares; Hva består $\mathscr{k}$ av (dens natur)? Hvor kommer $\mathscr{k}$ fra (dens opprinnelse)? Hva kan $\mathscr{k}$ brukes til (dens funksjon)? Hvorfor fungerer $\mathscr{k}$ (dens gyldighet)?

Den *didaktiske analysen* har som formål å kartlegge hva som finnes av tidligere forskning når det gjelder undervisning og læring av $\mathscr{k}$ (Artigue, 2015). Denne analysen vil kunne gi ideer til hva som bør gjøres for å oppnå den læringen man ønsker, og vil ofte lede utformingen av den didaktiske situasjonen siden den gir et innblikk i resultater fra forskning rundt det aktuelle matematiske temaet (Strømskag, 2020b).

For å identifisere konteksten for den planlagte undervisningen gjennomføres det en *institusjonell analyse.* I denne analysen studeres eksempelvis forholdet knyttet til typiske undervisningspraksiser, tilgjengelige teknologiske ressurser, vurderingspraksiser og skolen som organisasjon (Artigue, 2015; Strømskag, 2020b). Intensjonen bak en institusjonell analyse er å avdekke egenskapene til konteksten hvor undervisningen skal finne sted, slik at man kan ta hensyn til forholdene og begrensingene når man designer den didaktiske situasjonen (Artigue, 2015, s. 472).

3.1.1.2 Utvkling av epistemologisk modell og *a priori*-analyse

Den neste fasen i modellen av DI inkluderer designet av undervisningssituasjonen og *a priori-analyse*. Det vil si at forskerne utvikler en didaktisks situasjon og analyserer den *a priori*, som er å analysere situasjonen med tanke på hva man forventer vil skje når situasjonen blir realisert i klasserommet (Strømskag, 2020a). Når man designer en didaktisk situasjon utvikles en *epistemologisk modell* som baseres seg på de forbedrende analysene. Den epistemologiske modellen inneholder en *modell av målkunnskapen* (ofte en ikonisk representasjon), en situasjon hvor målkunnskapen må være en meningsfull og optimal løsning på et problem og miljøer for de tre ulike fasene i den adidaktiske situasjonen (aksjon-, formulering- og valideringsfasen). Med liten grad av hjelp fra læreren må elevene i samspill med miljøet kunne løse problemet eksplisitt (Strømskag, 2017). Basert på de forberedende analysene og karakteristikken til den designede situasjonen vil det i denne fasen formuleres *forskerhypoteser* om hvordan forløpet til situasjonen vil utspille seg i klasserommet, som er en del av *a priori*-analysen (Artigue, 2015; Strømskag 2020b). Intensjonen med analysen er ikke å studere hvordan den enkelte elev vil handle og lære i situasjonen, men å kunne predikere hvordan den designede situasjonen gir mulighet for læring med de forkunnskapene og deltakelsen som er antatt (Strømskag, 2020b). Analysen vil skape en *referansemodell* som kan brukes i sammenligning med realiseringen av situasjonen i skolesammenheng (Artigue, 2015).

3.1.1.3 Realisering, datainnsamling og *in vivo*-analyse

Det er i den tredje fasen av DI at den designede didaktiske situasjonen realiseres. Følgelig vil rollen til forskerne hovedsakelig være observatører som samler inn data som skal brukes i den siste fasen. Formålet med datainnsamling er skaffe informasjon om hvordan elevene samspiller med miljøet med tanke på den didaktiske intensjonen, samt data for å kunne analysere devolusjons- og institusjonaliseringsfasen (Strømskag, 2020a). Hvilken type data som samles inn vil være avhengig av det spesifikke målet bak den designede situasjonen og hvilke hypoteser fra *a priori*-analysen som skal testes. Dataene består ofte av en form for opptak av elevene, i tillegg til innsamling av elevenes arbeid. Dersom designet inneholder flere sekvenser er det vanlig å gjennomføre en analyse underveis i realisering, kalt *in vivo*-analyse (Strømskag, 2020a). Denne formen for analyse kan føre til nødvendige endringer som gjøres underveis i realisering. Dersom det gjøres slike tilpasninger er dokumentasjon og begrunnelse av dem nødvending, siden de vil bli tatt i betraktningen i *a posteriori*-analysen (Artigue, 2015).

3.1.1.4 *A posteri*-analyse og validitetsvurdering

I etterkant av realiseringen vil det, i den siste fasen av DI, bli gjort en *a posteriori*-analyse. Barquero og Bosch (2015) beskriver dette som en analyse organisert med tanke på kontrast, validering og utvikling av designet og forskerhypotesene fra de tidligere fasene. Gjennom denne analysen studerer man dermed i hvilken grad de innsamlede dataene samsvarer med *a priori*-analysen, og hvordan de eventuelt divergerer eller konvergerer. Analysen fører vanligvis til formulering av nye problemer knyttet til både forskning rundt læring av den matematiske kunnskapen og undervisingsutvikling (Barquero & Bosch, 2015). Validiteten av den didaktiske ingeniørvirksomheten studeres ved å gjøre en sammenligning av *a priori*-analysen og *a posteriori*-analysen, som enklere kan forklares som en sammenligning av forventede og faktiske resultater (Strømskag, 2020a). Artigue (2015) og Strømskag (2020a) presiserer begge at det alltid vil være forskjeller mellom modellen utviklet i *a priori*-analysen og de faktiske handlingene til elevene i realiseringen, som fører til at gyldigheten av forskerhypotesene ikke innebærer at de to analysene matcher fullstendig.

3.1.2 DI – i lys av pedagogisk forskning

Studien vår kan sees på som en kvalitativ studie med fastsatt design. I boken *Forskningsmetoder for masterstudenter i lærerutdanning* definerer Postholm og Jacobsen

(2018, s. 113) kvalitative metoder som metoder hvor man hovedsakelig samler inn data i form av ord som er rettet mot å beskrive og forstå menneskers handlinger i deres naturlige kontekst. Kvalitative studier bygger på forutsetningen om at det eksisterer flere virkeligheter, som betyr at forskerne og forskningsdeltakerne vil ha ulike oppfatninger av virkeligheten, og det er disse perspektivene man ønsker å studere i en kvalitativ studie (Nilssen, 2012, s. 25). I vår studie ønsker vi å undersøke hvordan 1T-elever kan utvikle forståelse for prinsippet bak induksjonsbevis gjennom praktisk arbeid med Hanois tårn. For å få innsikt i elevenes virkelighet gjennom undervisningssituasjonen vil vi analysere videopptak av den didaktiske situasjonen i tillegg til skriftlige elevbesvarelser, som fører til at studien vår faller under kategorien kvalitativ forskning. I kvalitative studier er datamaterialet ofte omfattende, og analyseprosessen går ut på å skaffe seg en systematisk oversikt over de ulike typene data (deskriptiv analyse). Gjennom en kvalitativ analyse er nemlig intensjonen å finne mønster og sortere dataene i ulike kategorier, slik at dataene blir forståelige og rapportvennlige (Postholm & Jacobsen, 2018). At studien har fastsatt design vil si at vi har funnet ut hva vi skal gjøre og hvordan vi skal gjøre det i betydelig detalj før vi startet å samle inn data (Robson & McCartan, 2016, s. 112). For å øke kvaliteten på selve datainnsamlingen ble det i forkant gjort en pilotundersøkelse. I neste delkapittel vil vi begrunne hvorfor vi har valgt å gjøre en pilot, samt kort presentere resultater fra den.

3.2 Pilotundersøkelse

Ifølge Robson og McCartan (2016) bør fastsatte design alltid piloteres. Å gjøre en pilot vil si å gjennomføre en miniversjon av studien før man forplikter seg til den egentlige studien. Ved å gjøre en pilotering får man muligheten til å teste ut gjennomførbarheten til det man allerede har planlagt, og på denne måten kan man gjøre endringer slik at datainnsamlingen forhåpentligvis i større grad svarer på det man ønsker (Robson & McCartan, 2016, s. 74). Vi valgte derfor å pilotere den didaktiske situasjonen vi designet på fire videregåendeelever i Trøndelag. Hensikten med piloteringen var å teste hvilke deloppgaver elevene opplevde som utfordrende, samt få en indikasjon på hvilke hint vi kanskje måtte gi elevene for at de skulle klare å løse oppgaven. Gjennom pilotering fikk vi også et innblikk i om tidsrammen var realistisk og sammensetningen av elevene i grupper. I piloteringen gjennomførte to grupper på to elever opplegget på hver sitt grupperom med en lærer til stede. Med unntak av devolusjon- og institusjonaliseringsfasen hadde vi for det meste rollen som observatør underveis i piloten. Det var likevel noen deler av oppgavearket som var utfordrende for elevene å tolke, og vi var derfor nødt til å gripe inn i situasjonen og komme med noen reguleringer. Basert på disse erfaringene gjorde vi noen justeringer i oppgaveformuleringen, som vil bli presentert i mer detalj i Kapittel 5.1.2. Basert på piloteringen valgte vi også å inkludere en avsluttende diskusjonsoppgave, hvor elevene selv fikk muligheten til å diskutere validiteten av beviset de hadde gjennomført. I neste delkapittel vil vi beskrive utvalget som vi gjennomførte datainnsamlingen på, som var en 1T-klasse på en videregående skole i Rogaland.

3.3 Utvalg

I forbindelse med å reklamere for studiet vi nå er i ferd med å avslutte, altså lektorutdanning i realfag, var en av oss på besøk til sin gamle videregående skole i hjemkommunen i Rogaland. Under dette besøket ble det spurt om det var mulig å gjennomføre datainnsamlingen til masteren der, og vi fikk positiv respons fra matematikklærerne som underviste i 1T. Realiseringen av den designede didaktiske situasjonen ble gjennomført i en av de to 1T-klassene, som var en klasse på 12 elever. På grunnlag av at vi ikke kjente til nivået blant elevene i klassen, lot vi læreren sette sammen elevene i grupper på tre i forkant av datainnsamlingen. Vi informerte læreren om at god kommunikasjonsflyt og samarbeidsevne var de viktigste faktorene for å sette sammen gruppene, og ikke elevenes faglige nivå. Læreren informerte oss om at elevene var vant til å jobbe i tilfeldige grupper, og at gruppesammensetningen ikke burde bli et problem. Vi tok videoopptak, samt lydopptak, av fire grupper i de adidaktiske fasene, som vi heretter vil referer til som Gruppe 1, 2, 3 og 4. Alle gruppene var samlet i ett klasserom under devolusjon- og institusjonaliseringsfasen, og det ble kun tatt opptak av sistnevnte. En grundigere beskrivelse av selve datainnsamlingen er gitt i neste delkapittel.

3.4 Gjennomføring av datainnsamling

For å undersøke hvordan det designede undervisningsopplegget fungerte som en introduksjon til induksjonsbevis valgte vi å benytte oss av to ulike datakilder: observasjon (videoopptak) og elevbesvarelser. Den siste deloppgaven av undervisningsopplegget var en diskusjonsoppgave, og for å få et bedre innblikk i elevenes forståelse av målkunnskapen, hadde vi planlagt at læreren skulle stille elevene spørsmål knyttet til oppgaven i denne avsluttende deloppgaven. Dette kan sees på som et mindre gruppeintervju, som ifølge Postholm og Jacobsen (2018), kan bidra til en bedre helhetsforståelse av området som studeres. Datainnsamlingen besto av følgende instrumenter: det materielle miljøet, fire videoopptakere og fire lydopptakere. Disse ble brukt til å observere og dokumentere elevenes aktiviteter og kommunikasjon under oppgaveløsningen. Denne kombinasjonen av datakilder kunne gi oss forskere en bredere og mer nyansert forståelse av det vi ønsket å finne svar på, nemlig hvordan elevene forholder seg til målkunnskapen og hvordan opplegget fungerte som en introduksjon til induksjonsbevis (Postholm & Jacobsen, 2018).

Undervisningsøkten, som var på 90 minutter, startet med en felles introduksjon av oppgaven for hele klassen, før elevene ble delt inn i fire grupper på tre elever. To av gruppene ble flyttet til et annet klasserom når de skulle arbeide med oppgaven. Før datainnsamlingen startet hadde vi satt sammen bord og stoler på en bestemt måte, og plassert videokameraer slik at alle gruppemedlemmene, tårnet og bordplaten elevene satt ved, var synlige. Lyd- og videoopptak ble tatt av alle fire gruppene, og den avsluttende helklassesamtale ble også tatt opp med to videokameraer, ett vendt mot tavlen og ett mot elevene. Før elevene ble samlet i helklassesamtalen, ble oppgavene og notatene fra alle gruppene samlet inn. Kun to av gruppene gjennomførte den siste deloppgaven i undervisningsopplegget, og det var derfor kun disse gruppene som hadde en samtale med læreren om gyldigheten til det gjennomførte beviset. Datamaterialet inkluderte derfor to sekvenser hvor læreren stilte spørsmål til de to gruppene. Spørsmålene var knyttet til oppgaveteksten og prinsippet bak induksjonsbevis, som var det tiltenkte målet med undervisningsopplegget. Disse små «gruppeintervjuene» gjorde at vi fikk et tydeligere bilde på hvordan gruppene forstod og anvendte prinsippet bak induksjonsbevis, samt deres refleksjoner rundt gyldigheten til deres eget bevis.

3.5 Analysemetode

Analyseprosessen startet ved at vi først transkriberte alle videoopptakene fra realiseringen. For å fordele arbeidsbyrden transkriberte vi selv opptakene av de to gruppene vi var med under gjennomføringen av undervisningsopplegget. Vi hadde på forhånd bestemt oss for å bruke Balacheff (1988a) sine nivåer av bevis som et analyseverktøy, samt et verktøy basert på ferdighetskategorier utviklet av Ernest (1984). Vi leste derfor gjennom datamaterialet flere ganger, men med ulike synsvinkler og markerte relevante funn med fargekoder. Basert på dette ble dataene dermed analysert i to ulike dimensjoner, hvor gruppene ble kategorisert i ulike kategorier tilpasset vårt undervisningsopplegg. Vi analyserte deretter datamaterialet med utgangspunkt i hvordan undervisningsopplegget fungerte. Vi lette etter faktorer som bidro til at elevene klarte å løse de ulike deloppgavene, samt faktorer som skapte utfordringer for elevene. Vi vil beskrive i større detalj hvordan vi valgte å definere disse faktorene i Kapittel 6.

Under dataanalysen gikk vi begge individuelt gjennom dataene, med fokus på de ulike dimensjonene som ble nevnt ovenfor. Et viktig aspekt ved vår tilnærming var at vi som individuelle analytikere dermed kunne undersøke i hvilken grad våre resultater var sammenfallende. Dette ga oss muligheten til å evaluere interrater-relabiliteten i studien, som refererer til hvor godt vurderinger utført av flere personer samsvarer med hverandre (Gwet, 2001). Som nevnt tidligere, består valideringen av forskningsprosjektet av en sammenligning mellom våre forventninger og det faktiske resultatet. Vi valgte derfor ut noen episoder fra undervisningssituasjonen, som senere vil presenteres i analysen, fordi de enten bekreftet våre hypoteser eller avslørte et gap mellom våre antakelser og det faktiske resultatet.

3.6 Etiske betrakninger

Fordi datamaterialet vårt skulle bestå av lyd- og videoopptak av elever var prosjektet vårt meldepliktig til NSD. Søknaden vår ble godkjent 10.12.2022, med referansenummer 947051 (Vedlegg A). Vi introduserte oss selv for klassen, i tillegg til å informere om prosjektet vårt i forkant av datainnsamlingen, både skriftlig og muntlig. Vi presiserte at elevene gjennom forskningsprosjektet ville hjelpe oss forstå i hvilken grad den designede undervisningssituasjonen fungerte som en introduksjonsøkt for et ukjent tema. Da vi informerte om prosjektet la vi vekt på at elevene ikke kom til å bli vurdert etter hvorvidt de løste oppgavene riktig eller ikke, og at det kun var vi som skulle studere datamaterialet. Vi informerte også om at elevene ville bli anonymisert ved at vi skulle ta i bruk pseudonymer i transkriberingen av dataene. Klassen besto av 12 elever, som samtlige gav sitt samtykke til å delta i prosjektet (se samtykkeskjema i Vedlegg B).

3.7 Vår forskerrolle

Vår rolle i forskningsprosjektet har vært å designe et undervisningsopplegg som vi som lærere har gjennomført, og i ettertid analysert og evaluert. I TDS er de forberedende analysene sentrale, og det var derfor hensiktsmessig å gjennomføre opplegget med oss selv i lærerrollen, slik at vi som lærere i størst mulig grad var kjent med målkunnskapen samt forberedt for de ulike didaktiske fasene. Vår aktive deltakelse i det forberedende arbeidet, gjennomføringen og evalueringen av forskningsprosjektet har sannsynligvis gitt oss den beste innsikten i hvordan TDS kan brukes som et verktøy for å konstruere undervisningssituasjoner, som gir elevene mulighet til å oppnå ønsket kunnskap gjennom utforskning arbeid i grupper. Som en følge av at vi har vært ansvarlige for alle aspektene ved prosjektet, har vi forsøkt å være bevisst på våres subjektive meninger gjennom hele prosessen. Siden vi selv gjennomførte det planlagte undervisningsopplegget, var det ingen av elevene som kjente oss som lærere under gjennomføringen. I tillegg til bruk av videokamera og lydopptakere, førte dette til en undervisningssituasjon som avvek fra det elevene var vant til. Da vi studerte datamaterielt var det tydelig at elevene var bevisste på at de ble filmet, siden de enkelte ganger kommenterte på at arbeidet deres skulle brukes i et prosjekt. Dette kan ha påvirket hvordan elevene oppførte seg og samhandlet under realiseringen, noe som videre kan ha påvirket datamaterialet.

4 Forberedende analyse

I de to foregående kapitlene har vi presentert det teoretiske rammeverket TDS og beskrevet metodologien DI som brukes for å designe en didaktisk situasjon. I denne delen vil vi legge frem den forberedende analysen av målkunnskapen $\mathscr{k}$, som er den første analysefasen i DI. Analysen er tredelt og består av en epistemologisk analyse, en didaktisk analyse og en institusjonell analyse, som til sammen vil danne grunnlaget for designet av den didaktiske situasjonen med et problem hvor $\mathscr{k}$ er løsningen (Strømskag, 2020b, s. 71).

4.1 Epistemologisk analyse

I dette kapittelet vil vi legge frem den epistemologiske analysen av målkunnskapen $\mathscr{k}$. Analysen består av å svare på følgende fire spørsmål om $\mathscr{k}$: Hva består $\mathscr{k}$ av (dens natur)? Hva kan $\mathscr{k}$ brukes til (dens funksjon)? Hvor kommer $\mathscr{k}$ fra (dens opprinnelse)? Hvorfor fungerer $\mathscr{k}$ (dens gyldighet)? En epistemologisk analyse vil hjelpe oss med å forstå hvorfor $\mathscr{k}$ er viktig i matematikkundervisning og hvilke aspekter ved $\mathscr{k}$ som er mest sentrale å lære.

4.1.1 Hva består $\mathscr{k}$ av (dens natur) og hva kan den brukes til (dens funksjon)?

4.1.1.1 Definisjon av målkunnskapen $\mathscr{k}$

Dersom vi begynner å telle fra 1 (og vi har ubegrenset med tid), vil vi før eller senere komme frem til ethvert naturlig tall. Denne egenskapen ved de naturlige tallene ligger bak en bevisteknikk som kalles induksjonsbevis (Lorentzen et al., 2003, s. 58). I denne studien ønsker vi å skape en didaktisk situasjon hvor målkunnskapen $\mathscr{k}$ består av induksjonsprinsippet. Vi har valgt å definere målkunnskapen på samme måte som Lorentzen et al. (2003), vist i Figur 4.1. I denne definisjonen betyr $P(n)$ at «n har egenskap P». Induksjonsmetoden går da ut på at hvis $P(1)$ er sann, og $P(n)$ impliserer $P(n+1)$, så er $P(n)$ sann (for alle naturlige tall n). Et induksjonsbevis starter som regel med å sjekke for $n = 1$, men det finnes noen unntak. Et eksempel på et unntak er påstanden om at $2^n < n!$, for alle naturlige tall n. Som vi kan se stemmer ikke denne påstanden for $n = 1,2,3$, men vi ser at det stemmer for $n = 4$. Det samme induksjonsprinsippet gjelder her; vi identifiserer det minste elementet i tallmengden som det stemmer for, i dette tilfelle $n = 4$, og deretter sjekker vi implikasjonspåstanden. Denne studien tar for seg en påstand som gjelder for alle naturlige tall, fra $n = 1$, og vi har derfor valgt å bruke definisjonen i Figur 4.1. Beviset består alltid av to steg: et grunnsteg (i) og et induksjonssteg (ii). I tillegg til å vise at $P(n)$ impliserer $P(n+1)$, innebærer induksjonssteget også å lage en hypotese om at P stemmer for et vilkårlig naturlig tall.

Figur 4.1 *Målkunnskapen k.*

Anta at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi gitt en påstand $P(n)$. Anta videre at vi vet at følgende to krav er oppfylt: (i) $P(1)$ er sann (ii) Dersom $P(k)$ er sann for en $k \in \mathbb{N}$, så er $P(k+1)$ også sann. Da er $P(n)$ sann for alle $n \in \mathbb{N}$

Merknad. Figuren er hentet fra Lorentzen et al. (2003, s. 59).

4.1.1.2 Dominoeffekten

En kjent metafor for hvorfor induksjonsbeviset er gyldig, er en rad av dominobrikker. Dersom vi dytter den første brikken over, vil den falle. Dersom vi dytter en hvilken som helst brikke i dominorekken, vil den falle, og med dette også slå ned den neste brikken i raden. Da vet vi at (1) den første brikken faller når vi dytter den og (2) hvis vi dytter brikke nummer n vil brikke nummer n +1 også falle. Ved å bruke (1) og (2) vet vi at alle brikkene vil falle når vi dytter den første brikken. Kjedereaksjonen som skapes, kjent som dominoeffekten, er sentral ved matematisk induksjon. Vi kan illustrere teknikken matematisk ved å gjennomgå et eksempel: vi vil vise at $3^n - 1$ er et multiplum av 2. Først sjekker vi om det stemmer for $n = 1$:

$$3^1 - 1 = 2$$

Vi ser at det stemmer, siden 2 er et multiplum av 2. Så antar vi at $3^k - 1$ er et multiplum av 2, hvor k er et vilkårlig positivt heltall. Videre vil vi sjekke om antagelsen vår fører til at $3^{k+1} - 1$ er et multiplum av 2. Vi får at:

$$3^{k+1} - 1 = 3 \cdot 3^k - 1 = 2 \cdot 3^k + 1 \cdot 3^k - 1$$

Siden $2 \cdot 3^k$ åpenbart er et multiplum av 2, og basert på antagelsen vår er $3^k - 1$ et multiplum av 2, vet vi at hvis påstanden gjelder for n, så gjelder den også for $n + 1$. Akkurat som med dominobrikkene har vi to oppfylte kriterier: (1) $3^1 - 1$ er et multiplum av 2 og (2) hvis $3^k - 1$ er et multiplum av 2 så er $3^{k+1} - 1$ også det. Da får vi en kjedereaksjon og kan si at påstanden gjelder for alle naturlige tall n.

4.1.1.3 Induksjonsbevisets funksjon

Bevis ved induksjon er en teknikk som brukes til å bevise påstander som er sanne for alle naturlige tall. Induksjonsbeviset anvedendes i mange området innenfor matematikken, blant annet i tallteori, algebra, geometri, analyse og kombinatorikk. I tillegg til å fremme forståelse av bevis og induktiv resonnering, kan arbeid med induksjonsbevis fremme elevers refleksjon over egenskapene ved de naturlige tallene og hvordan de skiller seg fra de reelle tallene (Palla et al., 2012).

4.1.2 Hvor kommer k fra (dens opprinnelse) og hvorfor fungerer k (dens gyldighet)?

På lik linje med mange andre matematiske konsept og metoder, ble ikke bevis ved induksjon oppfunnet av et spesifikt individ på en spesifikk dato. Implisitte versjoner av metoden har blitt funnet i arbeid av både den greske Euklid (300 år fvt.) og den indiske matematikeren Bhaskara (1114–1185) (Cajori, 1918). Euklids arbeid med å bevise at det finnes uendelig mange primtall bruker de samme prinsippene som i et induksjonsbevis (Ernest, 1982). Han beviste at dersom det eksisterer tre primtall, så impliserer det eksistensen av fire primtall. Dette kunne blitt generalisert til at eksistensen av n antall primtall impliserer eksistensen av $n+1$ antall primtall. Siden Euklids bevis tar for seg et konkret eksempel, i stedet for å generalisere det ved hjelp av algebra, er det ikke å regnes som et formelt induksjonsbevis i dag (Ernest, 1982). Gjennom århundrene var det flere matematikere som brukte metoder som kunne minne om induksjon, og på 1600-tallet dukket flere versjoner av beviset opp i arbeidene til blant annet matematikerne Pierre de Fermat (1601–1665), Blaise Pascal (1623–1662) og Jacob Bernouilli (1655–1701) (Cajori, 1918). På 1800-tallet ble induksjon definert som et eget aksiom av Giuseppe Peano (1858–1932), som beskrev egenskapene ved de naturlige tallene. For å få et innblikk i opprinnelsen til induksjonsbeviset, vil vi i dette delkapittelet se på hvordan Fermats uendelige nedstigning, Pascals trekant og Peanos induksjonsaksiom henger sammen med det vi i dag kjenner som et induksjonsbevis.

4.1.2.1 Fermats uendelige nedstigning

Fermat beviste noen av teoremene sine med en metode han kalte uendelig nedstigning (*infinite descent)*, som er en slags omvendt versjon av matematisk induksjon. Beviset baserte seg på at en synkende rekke av positive heltall ikke kan fortsette i det uendelige, fordi det finnes et minste element (Ernest, 1982). Han brukte blant annet metoden til å bevise at det ikke finnes noen kube som kan deles inn i to kuber, altså at det ikke finnes tre positive heltall x, y og z, slik at $x^3 + y^3 = z^3$ (Merzbach et al., 2011). For å illustrere hvordan metoden fungerer, kan vi se på et kjent eksempel – beviset av at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

> Vi antar først at $\sqrt{2} = \frac{k_1}{k_2}$, hvor k_1 og k_2 er to positive heltall. Dette vil senere føre til en motsigelse som beviser at det ikke finnes en slik brøk. Antagelsen betyr at $k_1^2 = 2k_2^2$, så $k_1$er et partall og $k_1 > k_2$. Nå skriver vi $k_1 = 2k_3^2$, slik at $k_2^2 = 2k_3^2$, og vi får da at $\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_3}$. Ved å gjenta denne prosessen, ender vi opp med likningen $\sqrt{2} = \frac{k_n}{k_{n+1}}$, hvor $n \geq 1$, $k_1, k_2, k_3 \ldots$ er positive heltall og $k_1 > k_2 > k_3 \ldots$ På grunn av at en synkende rekke av positive heltall ikke kan være uendelig, vil vi få en motsigelse. (Bather, 1994, s. 11, vår oversettelse)

Fermats metode, av og til kalt for fermatisk induksjon (*fermatian induction*), kan tolkes som en omvendt form av induksjonsbeviset, fordi den betrakter en synkende rekke av naturlige tall, i stedet for en økende (Merzbach et al., 2011). Beviset fungerer på grunn av antakelsen om at en ikke-tom mengde med naturlige tall alltid inneholder et minste element, og det er dette som er likhetstrekket mellom de to bevisteknikkene (Ernest, 1982). Med andre ord, mens matematisk induksjon beveger seg fra et mindre til et større tilfelle, og viser at utsagnet holder for begge, beveger Fermats uendelige nedstigning seg fra et større til et mindre tilfelle, og viser at utsagnet ikke holder for noen av dem.

4.1.2.2 Pascals trekant

I 1656 publiserte Blaise Pascal boka *Le Traité du triangle arithmétique*, hvor han presenterte en rekke matematiske resultater som baserte seg på den aritmetiske trekanten, i dag kjent som Pascals trekant. Trekanten består av rader med tall, hvor binomialkoeffisienten $\binom{n}{r}$ representerer det r-te elementet i den n-te raden. I flere av resultatene han beviste brukte han matematisk induksjon, som for eksempel i beviset av at summen av elementene i rad n er lik 2^n (Merzbach et al., 2011). I Figur 4.2 er den aritmetiske trekanten illustrert med $n = 5$ rader, og vi ser at summen av elementene i hver rad blir 2^n. Dette var kanskje den første gangen den moderne versjonen av induksjonsbeviset ble sett i et arbeid.

Figur 4.2 *Pascals trekant.*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Merknad. Trekanten består av $n = 5$ rader, hvor element nr. r i rad nr. n kan uttrykkes som binomialkoeffisienten $\binom{n}{r}$.

4.1.2.3 Peanos induksjonsaksiom

Giuseppe Peano (1858–1932) var en italiensk matematiker og er i dag mest kjent for sine fem aksiomer (*Peano axioms*) som definerer de aritmetiske egenskapene til naturlige tall. De fem aksiomene er beskrevet i Figur 4.3. Det siste og femte aksiomet tar for seg en mengde M bestående av naturlige tall, som også inneholder 0, og lyder som følger: dersom $n \in M$ fører til at $n + 1 \in M$, vil alle naturlige tall være i M. Etter at disse aksiomene ble innført av Peano i 1889, har det blitt betraktet som en av byggesteinene til hele aritmetikken (Merzbach et al., 2011). Fendel og Resek (1990) beskriver Peanos induksjonsaksiom med en metafor: Vi kan tenke på aksiomet som en lampeånd som deler ut garantiattester for bevis av teoremer; vi gir lampeånden et bevis på at en viss tallmengde inneholder 1 og er induktiv, og lampeånden gir oss en attest på at mengden vår inneholder alle naturlige tall.

Figur 4.3 *Peanos aksiomer.*

I. 0 er et naturlig tall.
II. Hvis a er et naturlig tall, så er etterfølgeren til a et naturlig tall.
III. 0 er ikke etterfølgeren til noen naturlig tall.
IV. To naturlige tall hvor deres etterfølger er like, er i seg selv like.
V. Hvis en mengde S av naturlige tall består av 0 og alle etterfølgerne til tallene i S, så er alle naturlige tall i S.

Merknad. Figuren viser Peanos fem aksiomer om naturlige tall, hvorav det femte aksiomet, kjent som induksjonsaksiomet, beskriver induksjonsprinsippet. Figuren er tilpasset Merzbach et al. (2011, s. 524).

4.2 Didaktisk analyse

I dette kapittelet vil vi se nærmere på resultater fra tidligere forskning, om undervisning og læring av målkunnskapen $\mathscr{k}$. Dette vil kunne gi oss et innblikk i hvilke deler av målkunnskapen som kan skape utfordringer hos elevene, og dermed gi oss en indikasjon på hva som er viktig å tenke over i designutviklingen.

4.2.1 Utfordringer i læring av induksjonsbevis

Fra tidligere forskning vet vi at mange elever synes induksjonsbevis er vanskelig (Ernest, 1984; Ron & Dreyfus, 2004). En barriere for mange elever er blant annet redselen for induksjonssteget, nemlig å konstruere beviset på grunnlag av en antagelse som man ikke enda vet om er sann. Selv høyt presterende elever har vanskelig for å forstå hvordan vi kan bevise at $P(k+1)$ er sann, før vi i det hele tatt vet om $P(k)$ er sann (Ron & Dreyfus, 2004). For mange elever er det intuitivt uakseptabelt å godta at sannhetene om $P(k)$ og $P(k+1)$ er irrelevante i beviset. En konsekvens av dette er at elevene tilegner seg gale holdninger, som for eksempel at «gyldigheten av grunnsteget bekrefter induksjonshypotesen» eller at «gyldigheten av induksjonssteget bekrefter induksjonshypotesen» (Ron & Dreyfus, 2004).

Movshovitz-Hadar (1993) trekker frem utfordringen med *sirkulær resonnering* i arbeid med induksjonsbevis. Mange elever tror at induksjonshypotesen innebærer å anta at P gjelder for alle naturlige tall, i stedet for ett vilkårlig naturlig tall, og oppfatter med dette at man antar det man skal bevise, som er definisjonen på sirkulær resonnering. Dette skaper i mange tilfeller en kognitiv konflikt hos eleven: de klarer å utføre beviset på riktig måte, men de skjønner ikke hvorfor det er gyldig (Movshovitz-Hadar, 1993). En annen barriere i læringen av induksjonsbevis er forsømmelsen av grunnsteget, altså verifiseringen av $P(1)$ (Palla et al., 2012). Elevene ser ofte ikke nødvendigheten med dette steget, og gjør det kun fordi det er del av prosedyren. De ser på grunnsteget og induksjonssteget som to isolerte bevis, i stedet for et helhetlig bevis. I Baker (1996) identifiseres kognitive utfordringer knyttet til induksjonsbevis hos elever på videregående skole, og studien viser at operasjoner med symboler og algebraiske prosedyrer er en stor utfordring i arbeid med induksjonsoppgaver. Mer spesifikt trekker de frem at elevene hadde utfordringer på grunn av feilaktige beregninger, gale tolkninger av algebraiske uttrykk og manglende evne til å følge algebraiske steg. Davis et al. (2009) trekker også frem at manglende algebraiske ferdigheter kan være et hinder i overgangen fra hypotesen $P(k)$, til induksjonssteget $P(k+1)$, fordi mange synes det er vanskelig å manipulere uttrykket.

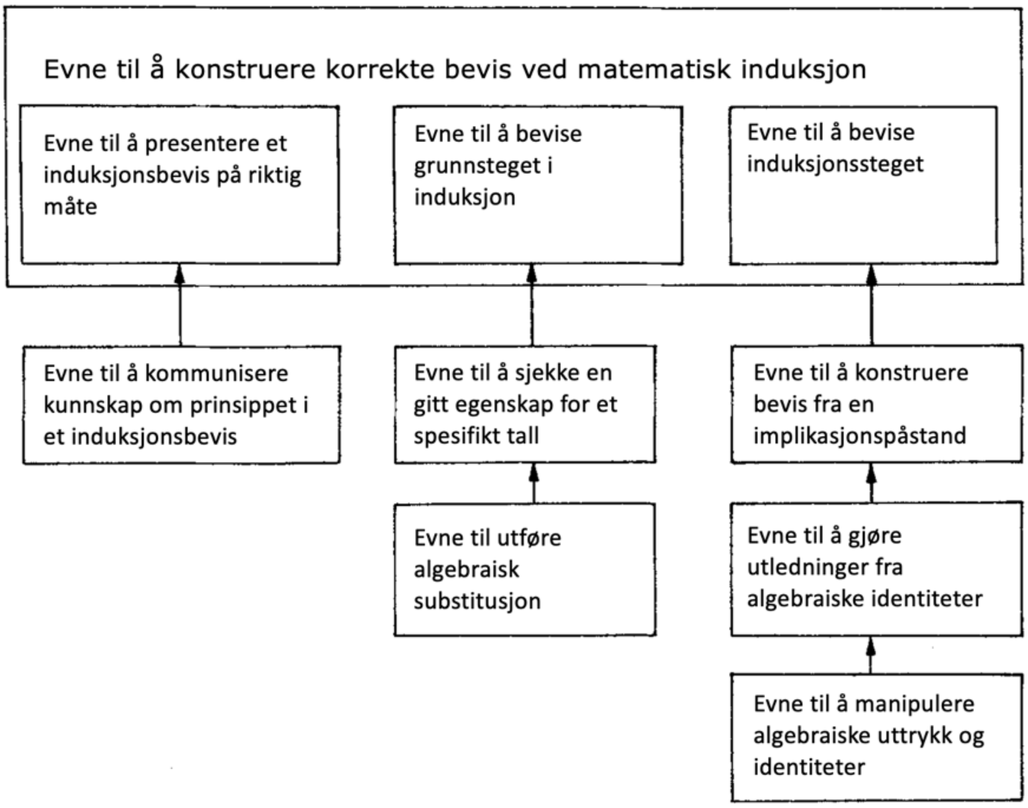
4.2.2 Ferdigheter

For å forstå hvorfor elever møter mostand i arbeid med induksjonsbevis, kan det være nyttig å se på hvilke matematiske ferdigheter som må ligge til grunn for å mestre det. Ernest (1984) har lagt frem en analyse hvor forskerspørsmålet han svarer på er «Hvilken kompetanse må en elev ha for å kunne uføre et korrekt bevis ved induksjon?». Svaret på dette vil naturligvis avhenge av hvilke teoremer elevene må bevise, ettersom vanskelighetsgraden varierer i stor grad fra bevis til bevis. Denne analysen konsentrerer seg kun om bevis av algebraiske identiteter som elevene skal være kjent med fra før (Ernest, 1984). Som nevnt i den epistemologiske analysen, er induksjonsbeviset todelt: vi har grunnsteget ($P(1)$) og induksjonssteget ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$). Eleven må altså ha ferdigheter til å gjennomføre begge disse delbevisene, samt til å kunne forstå og kommunisere til andre hvorfor dette er et gyldig bevis. Modellen til Ernest (1984) viser hvilke ferdigheter som kreves for å kunne utføre et korrekt induksjonsbevis, i tre likeverdige deler:

(a) Evne til å bevise grunnsteget. Det innebærer å kunne sjekke om en gitt numerisk egenskap stemmer for $n = 1$. Ferdigheten som ligger til grunn her, er å kunne utføre substitusjon i algebraiske uttrykk på én enkelt variabel.
(b) Evne til å bevise induksjonssteget. Det innebærer evnen til å bevise en implikasjonspåstand ved å utlede en konklusjon fra en hypotese. For å klare dette må eleven evne å utlede algebraiske identiteter, som igjen bygger på evnen til å manipulere algebraiske uttrykk.
(c) Evne til å presentere beviset på riktig måte. Dette innebærer å kunne kommunisere kunnskap om induksjonsprinsippet på en eller annen måte, enten verbalt, skriftlig eller skjematisk.

En skjematisk representasjon av denne analysen presenteres i Figur 4.4. For at elevene skal ha evnen til å konstruere et korrekt induksjonsbevis, må eleven inneha ferdigheter til å oppfylle alle de tre hovedboksene. Når det er sagt, er det også fullt mulig at eleven eier noen av ferdighetene som kreves, og derfor vil klare deler av induksjonsbeviset. I vår analyse senere i denne studien, vil vi bruke Ernest (1984) som en inspirasjon til å utforme vårt eget analyseverktøy, som er tilpasset vårt spesifikke induksjonsbevis. Dette vil bli presentert i Kapittel 6.3.

Figur 4.4 *Ferdigheter til å utføre et induksjonsbevis*



Merknad. Figuren viser hvilke ferdigheter som kreves for å utføre et korrekt induksjonsbevis. Den er tilpasset etter Ernest (1984, s. 177).

I en studie av Avital og Libeskind (1978) om matematisk induksjon i klasserommet, legges det frem to viktige aspekter ved læring av induksjonsbevis. Det første er å gjøre elevene kjent med betydning av begrepet *implikasjon*. Det er essensielt at elevene forstår at i påstanden $p \Rightarrow q$, er det ikke nødvendig å vite at p er sann, bare at dersom p er sann, så følger det at q er sann. Dette er nyttig, både for å klare å gjennomføre et bevis, men også for å forstå dets gyldighet. Det andre poenget de trekker frem er å la elevene bli vant til overgangen fra $P(k)$ til $P(k+1)$. Elevene kan bli forvirret av «hoppet» fra sannheten for $n = 1$, til overgangen fra $n = k$ til $n = k + 1$. Dette skjer spesielt dersom oppgaven blir introdusert på følgende måte: «Bevis ved induksjon at …», i stedet for å la elevene utforske og komme frem til sine egne antagelser (Avital & Libeskind, 1978). En måte å hjelpe elevene med å håndtere dette «hoppet» på, er å introdusere matematisk induksjon ved en «naive» tilnærming. Med dette menes å sjekke sannheten til en påstand for noen påfølgende verdier av n, og faktisk vise at sannheten for $n = 2$ følger av sannheten for $n = 1$, og sannheten for $n = 3$ fra $n = 2$ osv. På den måten vil elevene bli overbevist om at sannheten for påstanden for en verdi n følger fra sannheten om den forrige (Avital & Libeskind, 1978).

Blooms taksonomimodell kan brukes for å klassifisere elevers kognitive ferdigheter på tvers av fag (Bloom et al., 1956). Rammeverket består av seks hierarkisk ordnede nivåer, som kort kan beskrives slik: (1) *kunnskap,* som innebærer å kunne huske fakta og gjengi kunnskap; (2) *forståelse* går ut på å kunne plukke ut relevant fagstoff og beskrive det den har lært med egne ord; (3) *anvendelse* innebærer å kunne bruke og anvende kunnskap; for eksempel å anvende en regel på ulike problemer; (4) *analyse* handler om å kunne se og forstå sammenhenger; (5) *syntese* vil si å kunne trekke egne slutninger og utlede abstrakte relasjoner, og til slutt har vi nivå; (6) *evaluering* som innebærer å kunne gjennomføre vurdering basert på ulike kriterier (Bloom et al., 1956). Bevisoppgaver blir generelt betraktet som kognitivt krevende, og blir ofte plassert i et av de høyeste nivåene i modellen. For å utføre et bevis må elevene blant annet kunne anvende matematiske regler (3), trekke slutninger og utlede relasjoner (5) og kunne vurdere beviset gyldighet (6). Siden induksjonsbeviset følger en bestemt metode, kan det argumenteres for at oppgaver som starter med «bevis ved induksjons at ...» også kan plasseres i de lavere klassene (Darlington, 2013). Dersom en elev har sett 20 induksjonsbevis på algebraiske identiteter, kan det være mulig å gjennomføre et lignende bevis basert på hukommelse og gjengivelse av kunnskap (1). I vår studie vil elevene jobbe med induksjonsbevis for første gang, og det vil derfor ikke være aktuelt at de får til oppgavene basert på hukommelse.

4.3 Institusjonell analyse

Før vi gjennomførte den planlagte undervisningssituasjonen, kontaktet vi læreren i 1T-klassen, for å få mer informasjon om hvilke temaer elevene hadde gjennomgått og hva slags undervisningsmetoder de var vant til. Læreren informerte oss om at elevene hadde vært gjennom følgende temaer: tall og algebra, likninger, funksjoner, likningssystemer og ulikheter, trigonometri, samt noen økter med programmering. Skolen benyttet seg av læreboken Matematikk 1T (Borge et al., 2020), og læreren hadde i hovedsak anvendt en tradisjonell undervisningsmetode, med tavlegjennomgang etterfulgt av at elevene jobbet med oppgaver. Læreren hadde også tatt i bruk Liljedahls (2021) vertikale tavler, og informerte oss om at elevene var vant til å jobbe i tilfeldige grupper. Vi fikk også vite at elevene hadde vært stille og deltatt lite verbalt i begynnelsen av skoleåret, men at dette gradvis hadde forbedret seg etter hvert som elevene ble mer komfortable med hverandre.

5 A priori-analyse

I forrige kapittel la vi frem den forberedende analysen av målkunnskapen $\mathscr{k}$, hvor vi studerte målkunnskapen fra et epistemologisk og didaktisk perspektiv. Vi la også kort frem noen av forutsetningene til klassen som skal gjennomføre undervisningsopplegget hvor $\mathscr{k}$ er målkunnskapen. Basert på den forberedende analysen, vil vi i dette kapittelet presentere en *a priori*-analyse, som beskriver hvordan vi har designet den didaktiske situasjonen og begrunner valgene vi har tatt i utformingen av oppgaven. Før dette vil vi presentere den valgte epistemologiske modellen, forklare dens opprinnelse og beskrive hvordan den kan knyttes til målkunnskapen. Videre i kapittelet presenteres de ulike fasene i den didaktiske situasjonen, som baserer seg på den forberedende analysen og våre forventinger.

5.1 Epistemologisk modell

5.1.1 Modell av målkunnskapen - Hanois tårn

Det klassiske spillet «Tårnet i Hanoi» ble utviklet av den franske matematikeren François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) i 1882, som han, under pseudonymet Professor N. Claus (de Siam), ga navnet *La Tour D'Hano*ï (Hinz et al., 2013). Spillet baserer seg på myten om tårnet i Benares, som den franske forfatteren Henri de Parville (1838–1909) forlenget til en mer eventyrlig fabel. Oversatt til norsk lyder myten som følger:

> I det store tempelet i Benares, under kuppelen som markerer verdens sentrum, hviler en messingplate hvor det er festet tre diamantnåler, hver en alen høy og like tykk som kroppen til en bie. Ved skapelsen plasserte Gud 64 skiver rent gull på en av disse nålene, hvor den største skiven hvilte på messingplaten, og de 63 andre platene ble mindre og mindre opp til den øverste. Dette er Bramah-tårnet. Uten opphør overfører prester, dag og natt, skivene fra en diamantnål til en annen, i henhold til de uforanderlige lovene til Bramah, som krever at presten ikke må flytte mer enn én skive om gangen, og at han må plassere denne på en nål hvor det ikke er en mindre skive under. Når de 64 skivene har blitt overført fra nålen Gud plasserte dem på til en av de andre nålene, vil både tårnet, tempelet og brahminer smuldre til støv, og med et tordenskrall vil verden forsvinne. (Hinz et al., 2013, s. 1–2, vår oversettelse)

I dag er det ingen som vet om det var Lucas som selv fant opp myten, eller om han ble inspirert av noen andre. Uavhengig av dette finnes det ingen bevis på at et slikt tårn noen gang har eksistert, og myten ble trolig oppfunnet for å skape en mystisk atmosfære rundt selve spillet. Tar man turen til *Musée des arts et métiers* i Paris, kan man se det originale spillet, og i Figur 5.1 vises dekselet til boksen som spillet står i (Hinz et al., 2013).

Figur 5.1 *Dekselet til originalspillet Hanois tårn.*

Merknad. Figuren er hentet fra *The Tower of Hanoi – Myths and Maths* (Hinz et al., 2013, s. 10) og viser dekselet til originalspillet laget av François Édouard Anatole Lucas.

Lucas var en respektert tallteoretiker, og dedikerte mesteparten av sitt korte liv til å studere naturlige tall og det binære tallsystemet (Hinz et al., 2013). Han var medlem av en kommisjon som studerte det innsamlede arbeidet til Fermat. I denne anledning ble han sendt til et bibliotek i Roma, og Hinz et al. (2013) spekulerer i om det var på denne reisen han utviklet det omtalte spillet. På fremsiden av den publiserte artikkelen til Lucas, *La Tour D'Hanoï* (1883), beskrives motivasjonen bak spillet til pseudonymet Professor N. Claus. Det står at professoren tilbyr en enorm sum av penger til den personen som klarer å løse spillet for hånd, som vil si å flytte et tårn med 64 ringer til en av de to andre nålene. I artikkelen avsløre han hvor mange forflytninger dette krever, nemlig

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Dersom man gjør ett trekk per sekund vil dette ta omtrent 600 billioner år, som ifølge myten betyr at universet vil gå under i år $13{,}8 \cdot 10^9$ (Hinz et al., 2013). Videre i det publiserte arbeidet om tårnene i Hanoi presenterer Lucas den berømte rekursive løsningen til spillet, som gjelder for et vilkårlig antall ringer. Han demonstrer løsningen ved å bruke følgende eksempel: dersom man kan løse spillet med ni ringer kan man først flytte de øverste åtte ringene til en annen stolpe, deretter flytte den største ringen til den ledige stolpen, og til slutt flytte tårnet med de åtte ringene over til den samme stolpen. Dette betyr at dersom man øker antall ringer med én vil antallet flytt dobles pluss én forflytning for å flytte den største ringen (Hinz et al., 2013, s. 11). Dersom vi definerer funksjonen $f(n)$ som minst antall flytt når tårnet består av n ringer, er den rekursive løsningen gitt ved formelen;

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) - 1 \qquad (1)$$

Basert på denne løsningen av spillet beskriver Lucas hvordan det binære tallsystemet nå blir åpenbart. Siden den rekursive løsningsmetoden følger det samme mønsteret som det vi i dag definerer som det binære tallsystemet, definerte han alle naturlige tall slik:

> *Alle naturlige tall $N \neq 0$ kan skrives på formen $(N_{K-1} \dots N_1 N_0)_2$*, slik at $N = \sum_{k=0}^{K-1} N_k \cdot 2^k$ *med $K \in \mathbb{N}$, $N_k \in \{0,1\}$ og $N_{K-1} = 1$.*

Man kan også løse spillet ved å la hver posisjon i det binære tallet representere ringene i stigene rekkefølge (Hinz et al., 2013). Antall flytt, $f(n)$, vil derfor være gitt ved likningen;

$$f(n) = (1 \dots 1)_2(n\ bits) = 2^n - 1$$

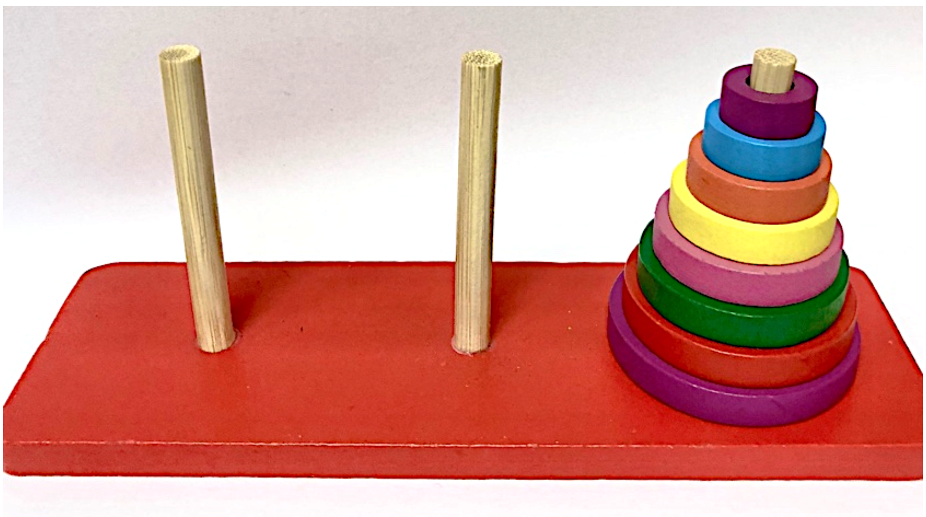
I årene etter Lucas publiserte spillet ble det utviklet utallige varianter med ulike spilleregler som kan knyttes til flere grener innenfor matematikk, blant annet til mønster, algoritmer og kjente sekvenser som Mersenne- og Fibonacci-sekvensen (Hinz et al., 2013). Trolig på grunn av alle de matematiske konseptene som kan knyttes til Hanois tårn, er det originalspillet som har fått mest oppmerksomhet i senere tid. I dag kan spillet blant annet brukes som et verktøy i matematikkundervisning. Det har spesielt blitt tatt i bruk i undervisning av induksjonsbevis, fordi det kan hjelpe å illustrere dominoeffekten av en rekursiv formel (Merrotsy, 2015; Ron & Dreyfus, 2004).

Vi valgte å bruke Hanois tårn da vi skulle designe en introduksjonsøkt til induksjonsbevis, fordi det kan illustrere de to trinnene i induksjonsprinsippet, som bevismetoden avhenger av. Som beskrevet i den epistemologiske analysen (Kapittel 4.1), baserer induksjonsbevis seg på å ta i bruk det rekursive forholdet mellom to påfølgende funksjonsverdier. Vi ønsket dermed at elevene skulle bruke tårnet til å observere, at dersom man vet hvor mange flytt man bruker for å flytte et tårn av n ringer, kan man finne ut hvor mange flytt det kreves for å flytte et tårn av $n+1$ ringer, også videre. Tårnet kan også illustrere viktigheten av grunnsteget i et induksjonsbevis, ved at dersom man ikke vet noen verdier av $F(n)$, kan man ikke finne den neste. Man kan dermed knytte Hanois tårn til de to prinsippene som den aktuelle målkunnskapen består av.

5.1.2 Problem hvor $\mathscr{k}$ er en meningsfull og optimal løsning

Basert på den epistemologiske analysen og modellen av målkunnskapen har vi designet et problem hvor det er tenkt at $\mathscr{k}$ er en optimal løsning. Elevene skulle få utdelt Hanois tårn, som vist i Figur 5.2. Dette skulle bestå av en planke med tre loddrette pinner, hvor det var bygget et tårn av 8 skiver i forskjellige størrelser på en av pinnene. Oppgaven ville så gå ut på å bevise at det finnes en formel for minst antall flytt, avhengig av hvor mange skiver tårnet besto av.

Figur 5.2 *Modell av målkunnskapen.*



Merknad. Figuren viser Hanois tårn med 8 ringer, som er modellen vi bruker i den didaktiske situasjonen. Privat bilde.

Vi delte opplegget inn i tre deloppgaver (Vedlegg C). I den første delen skulle elevene prøve å finne minst antall flytt, av et tårn som besto av henholdsvis 3, 2 og 1 ring. I den andre delen skulle elevene finne minst mulig flytt for et tårn med 4 skiver, basert på det de visste fra å ha flyttet et tårn med 3 ringer. Deretter skulle de finne en rekursiv formel for minst antall flytt av et tårn bestående av n ringer. I den siste delen skulle elevene få presentert en hypotese, om at minst mulig flytt kan uttrykke med en annen formel, som ikke er rekursiv. Etter at vi hadde gjennomført pilotundersøkelsen, valgte vi å inkludere en forklaring på hvorfor denne formelen var nyttig, fordi vi opplevde at denne formelen kom litt ut av det blå for, og dermed kunne skape forvirring hos elevene. Første deloppgave var at elevene måtte sjekke om denne hypotesen stemte for $n = 1$. Deretter fikk elevene beskjed om å anta at hypotesen stemte for et vilkårlig tall $n - 1$, og oppgaven deres ville bli å bevise at den da stemmer for n. Vi valgte disse to uttrykkene, i stedet for n og $n + 1$ som er mest vanlig, fordi det gjorde den algebraiske delen av beviset lettere. Den rekursive formelen elevene skulle komme frem til i oppgave 2, (Likning 1 i Kapittel 5.1.1), inneholder utrykket $F(n-1)$, og ikke $F(n+1)$, og det blir derfor lettere for elevene å gjenkjenne det riktige leddet de skal substituere i induksjonssteget. Basert på pilotundersøkelsen la vi også til en avsluttende oppgave, hvor elevene ble bedt om å diskutere hvorfor det gjennomførte beviset var gyldig. Vi la til denne oppgaven fordi vi tenkte det kunne gi oss bedre innsikt i hvilken grad elevene hadde oppnådd målkunnskapen.

5.1.3 Miljø for aksjon, formulering og validering

I Figur 5.3 vises hvilke deler av oppgavearket (Vedlegg C) som tilhører de ulike fasene: aksjonsfasen, formuleringsfasen og valideringsfasen. Oppgave 1, 2 og 3 skulle bli utdelt separat, i den rekkefølgen, siden det finnes hint til Oppgave 1 i Oppgave 3.

Figur 5.3 *De adidaktiske fasene i undervisningsopplegget.*

Oppgave 1

a) Start med et tårn av $n = 3$ ringer. Prøv dere frem og se om dere kan finne $F(3)$.
b) Prøv nå med et tårn av $n = 2$ ringer. Hva er $F(2)$? Hva er $F(1)$?

Oppgave 2

a) Lag et tårn av $n = 4$ ringer. Flytt et tårn av de 3 øverste ringene over til en annen pinne, slik at den største ringen i det opprinnelige tårnet står alene (med minst mulig flytt). Hvor mange flytt bruker dere?
b) Bruk svaret i oppgave a til å finne $F(4)$ uten å flytte mer på ringene.
c) Kan dere skrive en formel for $F(4)$ med $F(3)$
d) Kan dere nå bruke $F(4)$ til å finne $F(5)$?

e) Klarer dere å lage en rekursiv formel som finner $F(n)$?

En rekursiv formel uttrykker et ledd i en tallfølge ved foregående ledd.

Oppgave 3

Den rekursive formelen er nyttig hvis vi vet hvor mange flytt vi brukte på tårnet med en mindre skive. Dersom tårnet består av mange ringer, vil det ta lang tid og regne seg frem til minst antall flytt med den rekursive formelen. Vi ønsker derfor en formel som gir oss raskere svar. Tabellen nedenfor viser $F(n)$ for n antall ringer fra $n = 1$ til $n = 7$. Ut ifra tabellen kan det se ut som at man kan finne minst antall flytt ved formelen $2^n - 1$. Vi lager en hypotese om at dette stemmer for alle n.

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\boldsymbol{F(n)}$	1	3	7	15	31	63	127	...

a) Stemmer denne hypotesen med den rekursive formelen $F(n)$, for $n = 1$?
b) Anta at $F(n-1) = 2^{(n-1)} - 1$. Kan dere bevise at den stemmer for $F(n)$?
c) Diskuter hvordan oppgave a og b til sammen utgjør et bevis?

Merknad. Figuren viser oppgavearket elevene fikk utdelt, som er delt inn i de tre fasene: aksjonsfase, formuleringsfase og valideringsfase.

Aksjonsfasen

De to første oppgaven i opplegget utgjør aksjonsfasen i den adidaktiske situasjonen, hvor det var tenkt at elevene skulle konstruere implisitte løsninger på problemet, og at læreren skulle fungere som observatør. I Oppgave 1 skulle de komme frem til $F(n)$ for spesifikke verdier av n. Her hadde vi valgt å legge inn en relativt enkel oppgave i starten, for at elevene skulle bli kjent med Hanois tårn og spillereglene. De forhåndsgitte reglene besto av noen matematiske symboler, som ville være avgjørende for elevene å forstå, for å løse problemet hvor $\mathscr{k}$ var en optimal løsning. Vi tenkte derfor at det var lurt å la elevene få en naiv tilnærming, til det de senere skulle bevise generisk. Det materielle miljøet i denne fasen skulle bestå av Hanois tårn, oppgavearket og en penn. Andre bestanddeler av miljøet ville være den didaktiske kontrakten, elevenes matematiske forkunnskaper og eventuell tidligere erfaring med spillet. Det kunne ha vært at noen av elevene hadde sett spillet før, og husket hvordan man måtte flytte ringene, og det ville naturligvis ha påvirket hvordan elevene hadde angrepet oppgaven. Det var tenkt at tårnet, sammen med gruppesamspillet, ville ha adidaktisk potensial, slik at elevene fikk en objektiv feedback på om deres handlinger og resonnementer var hensiktsmessige eller ikke. Dersom to elever på gruppa hadde prøvd hver sin gang, og hadde funnet forskjellige tall for $F(3)$, ville de visst at en av dem tok feil og at de måtte prøve igjen. Aksjonsfasen fortsetter videre i Oppgave 2a, hvor elevene skulle bruke Hanois tårn til å finne minst antall flytt med 4 ringer. I Oppgavene 2b–d skjer det en overgang fra aksjonsfase til formuleringsfase, fordi her skulle elevene konstruere implisitte, rekursive formler for $F(n)$, for spesifikke verdier av n.

Formuleringsfasen

Formuleringsfasen starter i Oppgave 2d, hvor elevene skulle konstruere en generell formel for $F(n)$. Her tenkte vi at den etablerte kunnskapen deres om rekursjon, ville bli en viktig del av miljøet. Den rekursive formelen de skulle konstruere kan brukes til å finne antall minst mulig flytt for et tårn, dersom man vet hvor mange flytt som er nødvendig for tårnet med en mindre skive. Formuleringsfasen fortsetter i Oppgave 3, hvor elevene skulle få tildelt en tabell med verdier av n, med tilhørende $F(n)$ –verdi. I tillegg ville de få presentert formelen $2^n - 1$, som representerer antall minst mulig flytt. På bakgrunn av observasjonene våre under pilotundersøkelsen, valgte vi å introdusere Oppgave 3 med en forklarende tekst, siden den nye formelen fremstod som litt uventet for elevene. Vi vurderte om vi skulle la elevene komme frem til denne formelen selv, ved å studere verditabellen. Vi kom derimot frem til at dette kunne bli tidkrevende, og at det ikke var så relevant for vårt forskningsspørsmål, og bestemte oss for å gi dem formelen i stedet. I Oppgave 3a skulle elevene teste om den rekursive formelen de hadde kommet frem til i Oppgave 2, stemte overens med hypotesen for den spesifikke verdien $n = 1$. Tabellen og den nye formelen er viktige deler av miljøet i formuleringsfasen, fordi eventuelle feil i tidligere oppgaver kan bli avslørt. Dersom elevene ikke hadde kommet frem til en korrekt rekursiv formel i Oppgave 2, ville den mest sannsynlig ikke stemme med hypoteseformelen. På denne måten ville tårnet fungere som et adidaktisk element, og gi objektiv feedback til elevene.

Valideringsfasen

Selve problemet, hvor $\mathscr{k}$ er en optimal løsning, finner vi i valideringsfasen, som består av Oppgave 3b og c. Her skulle elevene bevise at den rekursive formelen de hadde kommet frem til, var lik $2^n - 1$ for alle n. Det vil si uansett hvor mange ringer et tårn hadde bestått av, så kunne de finne minst antall flytt fra en pinne til en annen, med begge formlene. Siden Hanois tårn alltid består av et positivt, heltall med ringer, ville formlene de jobber med (bevisst eller ubevisst) gjelde de naturlige tallene. Valideringen skulle skje gradvis i

Oppgave 3b, men den skulle komme tydeligst frem i Oppgave 3c, hvor elevene skulle diskutere og begrunne hvorfor løsningen fungerte. De tidligere fasene skulle bygge opp til valideringsfasen, som i dette tilfelle er situasjonen hvor målkunnskapen brukes for å løse problemet. Vanligvis i et induksjonsbevis vil man i det andre steget anta at en påstand stemmer for et tall n, og deretter sjekke om det impliserer at påstanden stemmer for $n + 1$. I vårt tilfelle, som tidligere forklart, valgte vi å anta at påstanden stemmer for $n - 1$, og la elevene bevise at den stemmer for n.

5.2 Implementering

I dette delkapittelet vil vi gjøre rede for hvilke forventinger vi hadde før (*a priori*) realiseringen av den didaktiske situasjonen. Dette innebærer en beskrivelse av de tiltenkte rollene vi som lærere skulle ha i de didaktiske fasene (devolusjon og institusjonalisering), samt hvilke reguleringer vi antok at vi måtte gjøre underveis i den adidaktiske situasjonen. *A priori*-analysen vil senere sammenlignes med en a *posteriori*-analyse.

5.2.1 Devolusjon

I devolusjonen skulle vi gi ansvaret for å løse problemet, over til elevene. Denne fasen skulle ha som formål å lede elevene inn i den adidaktiske situasjonen, slik at de i samspill med miljøet, i høyest mulig grad, kunne løse problemet uten hjelp fra oss. Vi ønsket derfor å starte undervisningsøkten med å forklare hvordan vi så for oss at opplegget skulle gjennomføres, samt tydeliggjøre hvordan de didaktiske variablene var satt (tidsrammer, gruppesammensetning, osv.). På denne måten skulle vi introdusere elevene for den didaktiske kontrakten, som gjennom respons og spørsmål fra elevene forhåpentligvis skulle skape gjensidige forpliktelser. Vi antok at deler av den didaktiske kontrakten ville bli introdusert til elevene dagen før selve datainnsamlingen, siden vi da skulle komme og presentere oss selv, informere om prosjekt, i tillegg til å få samtykke av elevene til å gjøre videoopptak. De resterende delene av den didaktiske kontrakten tenkte vi ville dannes implisitt gjennom den første deloppgaven, siden reglene i spillet skulle stå forklart der. For å unngå forvirring rundt Hanois tårn, bestemte vi oss likevel for å også forklare spillet til hele klassen i devolusjonen. På denne måten så vi for oss at en større andel av elevene ville forstå spillereglene, og at vi dermed kunne unngå at elevene mistet progresjon på grunn av misforståelser knyttet til spillet. Før vi skulle overlevere ansvaret til elevene, planla vi å informere om at de kunne stille oss spørsmål underveis dersom noe var uklart i oppgavene, selv om de i utgangspunktet skulle løse oppgavene gjennom samarbeid og bruk av det materielle miljøet.

5.2.2 Regulering

I de adidaktiske fasene (aksjons-, formulerings- og valideringsfasen) skal læreren sørge for at kunnskapen som elevene skal bruke, utvikler seg fra å være en implisitt løsning til å bli en eksplisitt løsning (Strømskag, 2020b). For å oppnå dette var vi klar over at vi mest sannsynlig måtte gjøre noen reguleringer underveis. I aksjonsfasen forventet vi at de adidaktiske elementene, nemlig gruppeoppgavene og Hanois tårn, inneholdt nok akademisk potensial til å gi elevene tilstrekkelig med feedback slik at de klarte å løse de første deloppgavene uten innblanding fra oss. Videre i formuleringsfasen var vi, basert på pilotundersøkelsen, bevisst på at begrepet rekursiv formel kunne være ukjent for elevene. Vi hadde derfor forberedt et informasjonssprang, hvor vi med et eksempel skulle forklare begrepet til elevene. I valideringsfasen så vi for oss at gruppene ville ta i bruk ulike resonneringsmetoder for å bevise det aktuelle utsagnet. Vi planla derfor at vi skulle ha ansvar for to grupper hver, slik at vi kunne bruke mer tid hos disse gruppene. Basert på pilotundersøkelsen og tidligere forskning, antok vi at valideringsfasen ville være den mest utfordrende fasen. Vi var derfor klar over at vi sannsynligvis var nødt til å komme med noen spesifiseringer av hva som skulle bevises, og muligens måtte peke på svar fra tidligere oppgaver som elevene kunne bruke. I den siste fasen planla vi å legge til rette for at gruppene avslutningsvis kunne dele sine løsninger og begrunnelser for dem, hvor rollen vår skulle være å synliggjøre disse i en helklassesamtale.

Resultater fra pilotundersøkelsen viste at det, i tillegg til utfordringer knyttet til gjennomføring av beviset, også kunne oppstå algebraiske utfordringer underveis i den adidaktiske situasjonen. Siden disse utfordringer ikke direkte er knyttet til målkunnskapen, så vi for oss å kunne gi elevene matematiske hint dersom slike utfordringer skulle oppstå.

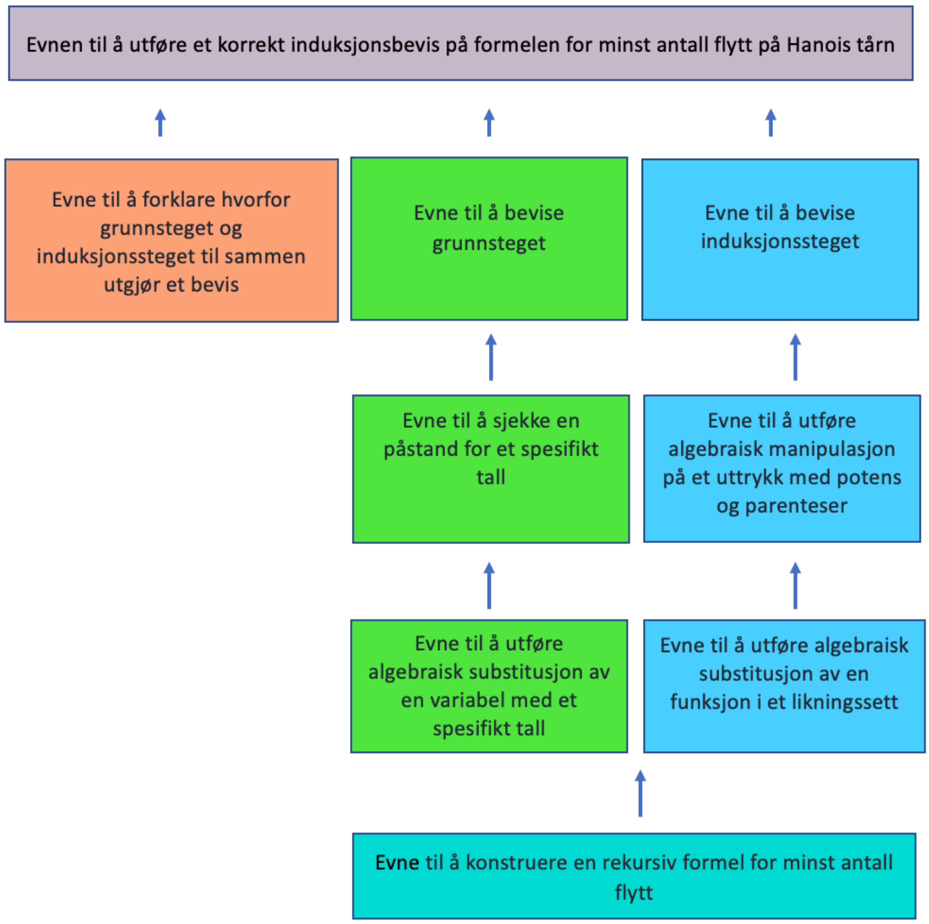
5.2.3 Institusjonalisering

Målet med institusjonaliseringen er at målkunnskapen skal generaliseres slik at elevene kan anvende målkunnskapen i nye situasjoner. For å oppnå dette, så vi for oss å bygge videre på resultatene og innspillene til de ulike gruppene fra valideringsfasen. Etter at alle gruppene hadde fullført oppgavene, skulle vi derfor samle elevene til en klasseromsdiskusjon rundt bevisets gyldighet. Gruppene hadde muligens anvendt ulike bevismetoder gjennom arbeidet med oppgaven, som vi så for oss at vi i felleskap skulle diskutere validiteten til. Etter en diskusjon rundt selve beviset i oppgaven, hadde vi planlagt å dekontekstualisere målkunnskapen, ved å introdusere elevene for det ukjente begrepet induksjonsbevis. Intensjonen vår var å beskrive prinsippet bak denne typen bevis, uavhengig av situasjon, slik at elevene kunne få et innblikk i hvilke situasjoner bevisteknikken kan brukes. For å forklare prinsippet bak induksjonsbevis, så vi for oss å bruke dominobrikker som et imaginært eksempel. Vi tenkte at ved å definere målkunnskapen på slutten av undervisningstimen, fikk elevene en «begrepsknagg» å henge den matematiske kunnskapen på. I tillegg kunne dekontekstualiseringen føre til at elevene i større grad satt igjen med en oppfatning av hva som skulle være målet med undervisningssituasjonen. På forhånd av realiseringen, i den forberedende analysen, var vi klar over hvilke deler av et induksjonsbevis som kunne være utfordrende og skape misoppfatninger blant elevene. Vi ønsket derfor, i institusjonaliseringen, å legge spesielt vekt på disse aspektene ved induksjonsbevis, for å forhindre forvirring og misforståelser hos elevene.

5.2.4 Utvikling av analyseverktøy

Vi har utviklet et analyseverktøy basert på Ernest (1984), for å vurdere elevenes ferdigheter til å gjennomføre et induksjonsbevis. Mens modellen til Ernest tar for seg ferdigheter som er grunnleggende for å utføre induksjonsbevis generelt, så fokuserer vår modell på den spesifikke oppgaven vi har designet. Vi lagde først en utgave av verktøyet basert på hva vi trodde elevene måtte kunne for å klare oppgaven. Etter pilotundersøkelsen ble det gjort noen endringer på modellen, basert på observasjonene av hvordan elevene jobbet med oppgaven. Selv om det også ble gjort noen mindre justeringer i modellen etter datainnsamlingen, vil vi fremheve at analyseverktøyet i hovedsak ble utviklet før datainnsamlingen fant sted. Den endelige modellen, som er presentert i Figur 5.4, består av tre hovedkategorier: evnen til å bevise grunnsteget (grønn i Figur 5.4), evne til å bevise induksjonssteget (blå i Figur 5.4) og evne til å forklare hvorfor grunnsteget og induksjonssteget til sammen utgjør et bevis (rosa i Figur 5.4). Vi har også kategorisert noen underliggende ferdigheter til grønn og blå (i Figur 5.4), som vi mener er sentrale for å klare beviset. Evnen til å konstruere en rekursiv formel (turkis i Figur 5.4) er også inkludert i modellen, fordi dette var en sentral forutsetning for å gjennomføre bevisoppgaven. I modellen er det tenkt at de mest grunnleggende ferdighetene ligger i bunn, og så bygger det seg oppover til de mer overordna ferdighetene. Grunnen til at vi har valgt å plassere rosa i en egen kategori, og ikke som en ferdighet som bygger på grønn og blå, er fordi vi tenker at det går an å forstå prinsippet bak et induksjonsbevis uten å få til grønn og blå. Det er mulig at en elev som ikke har gjennomført hele beviset, for eksempel på grunn av manglende algebraiske ferdigheter, likevel kan forstå dominoprinsippet ved induksjon. For å oppfylle kriteriene om å klare induksjonsbeviset, måtte hver gruppe vise at de til sammen oppfylte alle de tre ferdighetene. Vi har valgt å evaluere elevenes ferdigheter ved hjelp av dette verktøyet, fordi det gjør det mulig for oss å beskrive og sammenligne de ulike gruppenes fremgang i opplegget. Hensikten med modellen er ikke å vurdere om gruppene var vellykkede i oppgaveløsningen eller ikke, men heller å kartlegge de observerte ferdighetene.

Figur 5.4 *Analyseverktøy for elevens ferdigheter*



Merknad. Figuren viser ferdighetene som kreves for å utføre både deler av, og hele, induksjonsbeviset i det spesifikkest tilfellet for oppgaven med Hanois tårn. Modellen er utviklet med inspirasjon fra *Mathematical induction: a pedagogical discussion* (Ernest, 1984, s. 177).

6 *A posteriori*-analyse

I dette kapittelet vil vi presentere interessante funn fra gjennomføringen av TDS-opplegget, og legge frem vår analyse av resultatene. Vi vil starte resultatkapittelet med å gi et innblikk i hvordan realiseringen av undervisningsopplegget gikk, med utgangspunkt i de ulike fasene i Figur 5.3. Deretter vil vi legge frem vår *a posteriori*-analyse, hvor vi analyserer datamaterialet ved å bruke to forskjellige analyseverktøy, tilpasset etter Balacheff (1988) sine ulike bevisnivå og etter Ernest (1984) sin ferdighetsanalyse. Som beskrevet i Kapittel 3.3, var det til sammen fire grupper som gjennomførte opplegget. I dette resultat- og analysekapittelet vil vi presentere funn fra de ulike gruppene, ved å vise til sitater fra dialogen mellom elevene, og de skriftlige besvarelsene fra hver enkelt gruppe. For å gjøre dialogen mellom elevene oversiktlig, har vi valgt å gi hver elev et oppdiktet navn. Tabell 6.1 viser en oversikt over de fire gruppene og hvilke elever de bestod av.

Tabell 6.1 *Oversikt over elevene på de ulike gruppene*

Gruppe 1	Ida, Jonas, Grete
Gruppe 2	Oda, Mari, Per
Gruppe 3	Nils, Alex, Dina
Gruppe 4	Maia, Guro, Helle

Merknad. Navnene på gruppene er oppdiktet og derfor anonymisert.

6.1 Realisering i klasserommet – kort oversikt

I dette delkapittelet vil vi presentere et sammendrag av realiseringen i klasserommet, hvor vi i korte trekk vil beskrive de største forskjellene mellom *a priori*-analysen og realiseringen av undervisningsopplegget.

6.1.1 Devolusjon, reguleringer og institusjonalisering

I devolusjonen ble elevene introdusert for den didaktiske kontrakten, som ble overholdt gjennom hele undervisningssituasjonen. Det var noen av elevene som forstod spillet på bakgrunn av forklaringen i plenum, som dermed presiserte reglene til de andre gruppemedlemmene da de gikk over i den adidaktiske fasen. For å sikre elevenes progresjon i å oppnå målkunnskapen, ble det nødvendig å komme med noen reguleringer underveis i den adidaktiske situasjonen. Dette vil vi diskutere nærmere i Delkapittel 6.4.1.4. Institusjonaliseringen gikk i stor grad slik som vi hadde planlagt på forhånd. Ved bruk av innspill fra de ulike gruppene, gikk vi gjennom hvordan Oppgave 3 utgjorde et induksjonsbevis, prinsippet bak metoden, i tillegg til å avslutningsvis poengtere vanlige misoppfatninger knyttet til bevismetoden.

6.1.2 Adidaktisk situasjon

I aksjonsfasen ble elevene kjent med spillereglene for Hanois tårn, samt hvordan n og $F(n)$ var definert. Gruppene brukte lengre tid enn forventet på å forstå sistnevnte, og for noen av gruppene oppstod det underveis en usikkerhet rundt disse to begrepene. Det var ingen av elevene som var kjent med Hanois tårn på forhånd, og det var heller ingen av elevene som umiddelbart kom opp med løsninger for å løse spillet. Alle elevene forsøkte fysisk å flytte på ringene, og løste med dette de første oppgavene i samspill med hverandre og tårnet. Da Gruppe 2 forsøkte å løse den aller første oppgaven (finne $F(3)$) var en av elevene allerede inne på tanken om å formulere en generell formel for minst antall flytt. Dette ble ikke etterspurt før i Oppgave 2e, som elevene på dette tidspunktet enda ikke hadde fått utdelt. Denne gruppen beveget seg følgelig over i formuleringsfasen i den første oppgaven, som vi på forhånd hadde definerte som aksjonsfasen.

Etter varierende grad av veiledning fra læreren, kom alle de fire gruppene frem til den ønskelige rekursive formelen i formuleringsfasen. I denne fasen anvendte gruppene flere ulike strategier, som vi ikke hadde forutsett på forhånd. Gruppe 4 nærmet seg eksempelvis den generelle formelen for minst antall flytt, som de skulle bli presentert for og bevise i Oppgave 3. Gruppe 2 forsøkte først å bruke regresjonsanalyse, men kom i likhet med Gruppe 3 frem til den rekursive formelen ved å lete etter mønster basert på svar for ulike verdier av $F(n)$. Gruppe 1 og 3 formulerte derimot formelen ved å studere selve spillet og svarene på Oppgave 2a–d, som var metoden vi på forhånd antok at elevene ville bruke. Det var kun hos en av gruppene at læreren måtte forklare hva en rekursiv formel var, og det virket derfor som at elevene var kjent med denne typen formler.

Elevene brukte lengre tid på å gjennomføre de ulike deloppgavene enn vi hadde forutsett, basert på pilotundersøkelsen. I tillegg til utfordringer knyttet til å løse selve beviset, førte dette til at det kun var Gruppe 1 og 2 som gjennomførte den planlagte valideringsfasen. Alle gruppene startet valideringen ved å sjekke formlene for én spesifikk verdi for n, og tre av gruppene klarte, ved bruk av reguleringer, å komme frem til formelen de skulle bevise. Det var kun Gruppe 1 og 2 som, sammen med læreren, diskuterte hvorfor det de hadde gjort betydde at formelen gjaldt for alle naturlig tall. Det var derfor kun disse gruppene som undersøkte gyldigheten til induksjonsbeviset, som vi på forhånd anså som den største delen av valideringsfasen.

6.2 Ulike nivå av bevis

I dette delkapittelet vil vi presentere en analyse av nivået på gruppenes besvarelse på siste oppgave, hvor elevene skulle bevise formelen $2^n - 1$ for minst antall flytt av et tårn med n ringer. Dataene vil her bli analysert i lys av Balacheff (1988a) sine kategorier for ulike bevismetoder, som ble presentert i Kapitel 2.3.1.

I Tabell 6.2 finnes en oversikt over hvordan vi har valgt å kategorisere de ulike nivåene av bevis, basert på det utformede undervisningsopplegget, samt hvilke grupper som gjennomførte de ulike nivåene. I de påfølgende avsnittene vil vi presentere og forklare ulike eksempler fra realiseringen som førte til kategoriseringen av gruppene.

Tabell 6.2 *Gruppenes nivå av bevis.*

Nivå av bevis	Kategorisering	Grupper
Naiv empirisme	Elevene satt inn ulike verdier for n i formlene.	Gruppe 1, Gruppe 2, Gruppe 3 og Gruppe 4
Avgjørende eksempel	Elevene brukte et spesifikt eksempel til å avgjøre om formlene gjaldt for alle naturlige tall.	Gruppe 1 og Gruppe 2
Generende eksempel	Elevene så etter et generelt mønster basert på ulike verdier for $\mathrm{F}(n)$.	
Tankeeksperiment	Elevene beviste formelen algebraisk, og klarte å forklare hvorfor det var et gyldig bevis.	Gruppe 1 og Gruppe 2 Gruppe 4 (kun algebraisk del)

Merknad. Analyse av hvilket nivå gruppene gjennomførte induksjonsbeviset basert på Balacheff (1988a).

Før elevene fikk utdelt den tredje og siste oppgaven, hadde alle de fire gruppene kommet frem til den rekursive formelen: $F(n) = 2 \cdot F(n-1) + 1$. I Oppgave 3 ble elevene introdusert for formelen $2^n - 1$, som ble antatt å være en annen formel for minst antall flytt. Oppgaven til elevene var å bevise denne formelen, ved å bruke den rekursive formelen de selv hadde formulert, og antagelsen $F(n-1) = 2^{n-1} - 1$, som ble gitt i oppgaveteksten. Første deloppgave var å sjekke at formlene stemte for $n = 1$ (grunnsteget), som samtlige av gruppene mestret. I neste oppgave ba vi elevene bevise at formelen stemte for $F(n)$. Her startet alle gruppene med det Balacheff (1988a) kategoriserer som *naiv empirisme*. Hver gruppe satt ett spesifikt tall (forskjellig fra 1) inn for n i formlene, og sjekket at de ga samme verdi. Gruppe 1, 3 og 4 antok at de med denne metoden hadde bevist formelen, som blant annet kommer til uttrykk i Sitat 6.1 fra Gruppe 1.

I sitatene vi presenterer i Kapittel 6 og 7 symboliserer «...» en kort pause, som et komma, og «.» representerer full stopp av en setning, som et punktum. Det som står i slike parenteser: [], representerer handlinger som ikke kommer verbalt til uttrykk.

Jonas:	[leser oppgave] Anta $F(n-1) = 2^{(n-1)} - 1$. Kan dere bevise at den stemmer for $F(n)$? Oi oi oi. Skal vi bare prøve å putte inn da? Hvis vi skriver F av ... skal vi bare bruke 4 da?
Ida:	Ja ... $4 - 1$ ... da blir det 3 ... skal jeg bare skrive 3?
Jonas:	Ja
Ida:	$F(3)$ er lik ... 2 ... 4 ... -1... $2^3 - 1$ ... er det det de mener?
Jonas:	Ja
Ida:	Så da må vi bare regne ... $F(3)$ var jo 7 ... $2^{(3)}$ er 2 ... 4 ... 8 ... -1 ... 7 ... ja ... er lik 7.
Jonas:	7 er jo lik 7 ... så det burde jo stemme det. Nå har vi jo putta inn ... så da har vi vel gjort det riktig ... men vi har jo forkortet litt nå ... vi har jo ikke skrevet en formel akkurat. Skal vi skrive uttrykket og? Eller skal vi bare gå videre?

Ida: Vi går videre.

Sitat 6.1, Gruppe 1

Gruppe 1, i likhet med Gruppe 3 og 4, gikk videre til neste deloppgaven hvor de skulle diskutere hvordan Oppgave 3a og b til sammen utgjorde et bevis. De tre gruppene, argumenterte alle for gyldigheten til beviset på grunnlag av at formlene ga samme verdi, for den utvalgte verdien av n. Bevismetoden elevene brukte, kan derfor også knyttes til kategorien avgjørende eksempel, fordi elevene valgte ut et spesifikt eksempel og ut ifra resultatet av dette, avgjorde om formelen var gyldig for alle naturlige tall eller ikke. Eksempelvis konkluderte Gruppe 4 som vist i Sitat 6.2.

Maia: Sånn. Diskuter hvordan oppgave a og b til sammen utgjør et bevis ... liksom ... hvordan ... det vi har fått i oppgavene beviser at begge formlene er rett.

Guro: Er det ikke bare å gå baklengs da? Nei ... jeg vet ikke.

Maia: Jeg vet ikke jeg ... du får jo begge to svarene ... du får jo samme svar.

Helle: Ja ... vi har jo sjekket at formelen er liksom rett.

Maia: Du får liksom samme svar ... på begge to ... av formlene ... så ja ... det er jo et bevis på at det stemmer.

Sitat 6.2, Gruppe 4

Som vi kan se i Sitat 6.2 startet elevene med å gjennomføre et pragmatisk bevis, siden de ikke løsrev seg fra konkrete tilfeller. Elevene hevder at formelen er bevist ved å betrakte noen få tilfeller hvor formlene stemmer overens. Gruppe 2 startet også med å sette inn ulike verdier for n, men innså på egenhånd at dette ikke var nok for å bevise formelen generelt. Gruppen startet derfor med å utføre ulike algebraiske manipulasjoner på formlene for å undersøke om dette kunne lede dem til formelen de ønsket å bevise. Etter at læreren informerte elevene om at de skulle bevise formelen for en vilkårlig n, og ikke bare for spesifikke verdier, forsøkte også Gruppe 1 og 3 å gjøre om på formlene. Disse gruppene beveget seg da mer over til en konseptuell bevisform, da de ikke lenger behandlet konkrete tilfeller. Sitat 6.3 er en kommentar fra Ida på Gruppe 1, som viser startfasen i beviset for en vilkårlig n.

Ida: Jo da ... det går an. Jeg skjønner ikke hva dette gir oss. Vi skal bevise formelen uten å sette inn en verdi ... vi skal bevise at denne stemmer [peker på formel som skal bevises] med å bruke vår formel ... tror jeg ... den vi lagde.

Sitat 6.3, Gruppe 1

Ved å bruke antagelsen, den rekursive formelen og hint fra læreren, kom Gruppe 1, 2 og 4 frem til formelen som skulle bevises. Gruppe 3 tok derimot kun i bruk *naiv empirisme*, og gjennomførte dermed ikke de to siste deloppgavene. På grunn av tidsrammen var det kun Gruppe 1 og 2 som fikk tid til å gjennomføre siste del av Oppgave 3, som var diskusjon rundt gyldigheten til det gjennomførte beviset. Gruppe 2 argumenterte for gyldigheten til deres bevis som vist i Sitat 6.4.

Oda: Den stemmer når det er én ring. På b så fant vi ut av at den formelen vår ... hvis vi la inn den som likningsett ... hvis vi tenkte at de snakka om samme n ... og brukte de i lag som likningsett var det vel?

Mari: Vi har vel egentlig bare bevist formelen?

Oda: Ja ... sånn bevist ... formelen er et bevis

Mari: Ja ... vi har bevist noe i hvert fall ... og da er det et bevis.

Oda: Ja

Mari: For vi fant jo det som var likt i formlene ... som var $F(n-1)$ ... putta det inn og [avbrutt].

Oda: Vi brukte den nye formelen som et uttrykk for $F(n-1)$ i vår formel.

Sitat 6.4, Gruppe 2

Elevene diskuterer her hva de konkret har gjort, men de forklarer ikke hvorfor formelen gjelder for alle naturlige tall større enn tallet de sjekket i Oppgave 3*a*. I den avsluttende oppgaven engasjerte derfor læreren seg i diskusjonen, og stilte elevene ledende spørsmål for å undersøke om de forstod prinsippet bak bevismetoden. I de to separate gruppesamtalene kom det frem at flere av elevene forstod gyldigheten av beviset de hadde gjennomført, når læreren tydeliggjorde hva de hadde vist i de ulike deloppgavene. Dette kan vi se i et utdrag fra diskusjonen i Gruppe 2, som vist i Sitat 6.5.

Lærer: Og at i oppgave b antar vi kun at denne stemmer (peker på antagelsen) og at då stemmer den for? Vi antar at den stemmer for når n er én mindre ... også viste dere at da stemmer den også for?

Oda: Når n er det n er.

Lærer: Ja når n er?

Mari: Neste.

Lærer: Og da ... siden dere i a sjekka?

Mari: At den stemmer for $n = 1$?

Lærer: Da vet dere at?

Mari: At den stemmer for resten.

Oda: At den stemmer for 2.

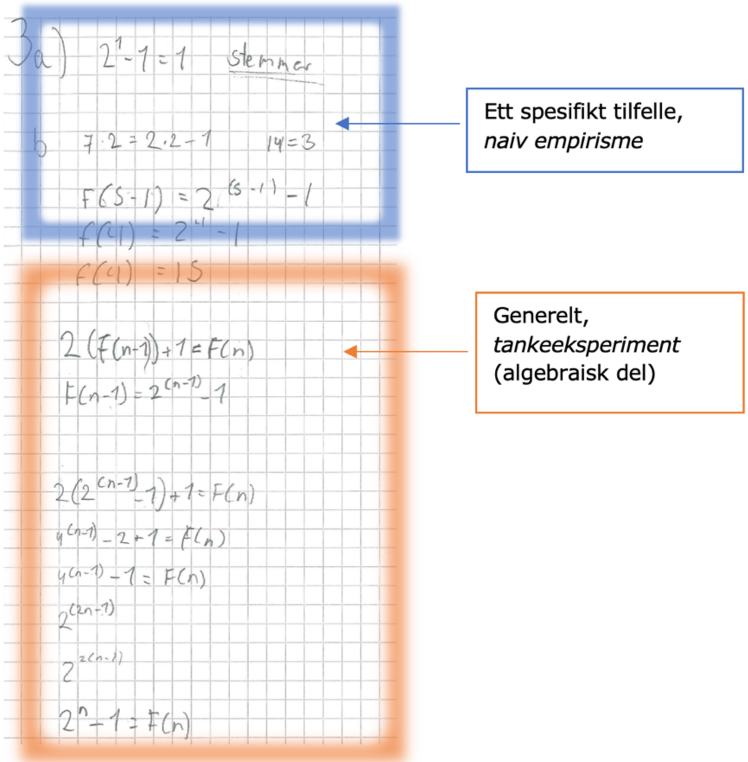
Lærer: Ja og hvorfor stemmer den da for resten?

Oda: Fordi hvis den stemmer for 2 stemmer den for 3 og hvis den stemmer for 3 stemmer den for 4 og så videre.

Sitat 6.5, Gruppe 2

De elevene som deltok aktivt i diskusjonen i Gruppe 1 og 2, gled dermed mer over i kategorien *tankeeksperiment,* som vi i vårt tilfelle har valgt å kategorisere med at de evnet å komme frem til formelen de skulle bevise (algebraisk del), samt sette ord på sammenhengen mellom grunnsteget og induksjonsstedet (forklarende del). I Sitat 6.5 ovenfor kan vi se at elevene evnet å forklare egenskapene bak et induksjonsbevis, uavhengig av et pragmatisk argument. I tillegg til dette førte elevene beviset på en generell måte, som vi også kan se i elevbesvarelsen til Gruppe 2 i Figur 6.1 nedenfor.

Figur 6.1 *Gruppe 3 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 3.*



Merknad: Gruppe 2 sin besvarelse på Oppgave 3a og b, med blå ramme (naiv empirisme) og oransje ramme (tankeeksperiment).

I Figur 6.1 ovenfor kan vi se hvordan Gruppe 2 startet med å teste et spesifikt eksempel, *naiv empirisme* (blå ramme), som var den formen for bevis som gikk igjen hos alle gruppene. Etter veiledning fra læreren, beveget som sagt, tre av gruppene seg mer over til den bevisformen som ifølge Balacheff (1988), er den eneste som regnes som et fullverdig matematisk bevis, nemlig tankeeksperiment (oransje ramme). Dette kunne vi også se tegn til i institusjonaliseringen, som ble ledet av læreren. I denne fasen ble målkunnskapen dekontekstualisert, og ut ifra innspillene til elevene kunne det virke som at flere av elevene forstod hvordan grunnsteget, sammen med induksjonssteget, førte til at formelen gjaldt for alle naturlige tall. I Sitat 6.6 kan vi se hva Jonas og Oda (i henholdsvis Gruppe 1 og 2) responderte da vi stilte spørsmål om hvorfor grunnsteget var en sentral del av beviset.

Jonas:	[rekker opp handa] Fordi du må vite et bestemt tall og ikke bare det forrige på en måte.
Lærer 2:	Ja du må ha en bestemt verdi slik at man <u>vet</u> at det er en verdi det stemmer for.

Jonas: Ja.

Lærer 2: For hvis dere gjør slik som dere gjorde å sjekka for $n = 1$ ... hva vet dere når dere har gjort oppgave b?

Oda: At den stemmer for $n = 2$ og.

Lærer 1: At det stemmer for $n = 2$.

Lærer 2: Og hva vet dere når det stemmer for $n = 2$?

Oda: At det stemmer for $n = 3$ ... og så videre.

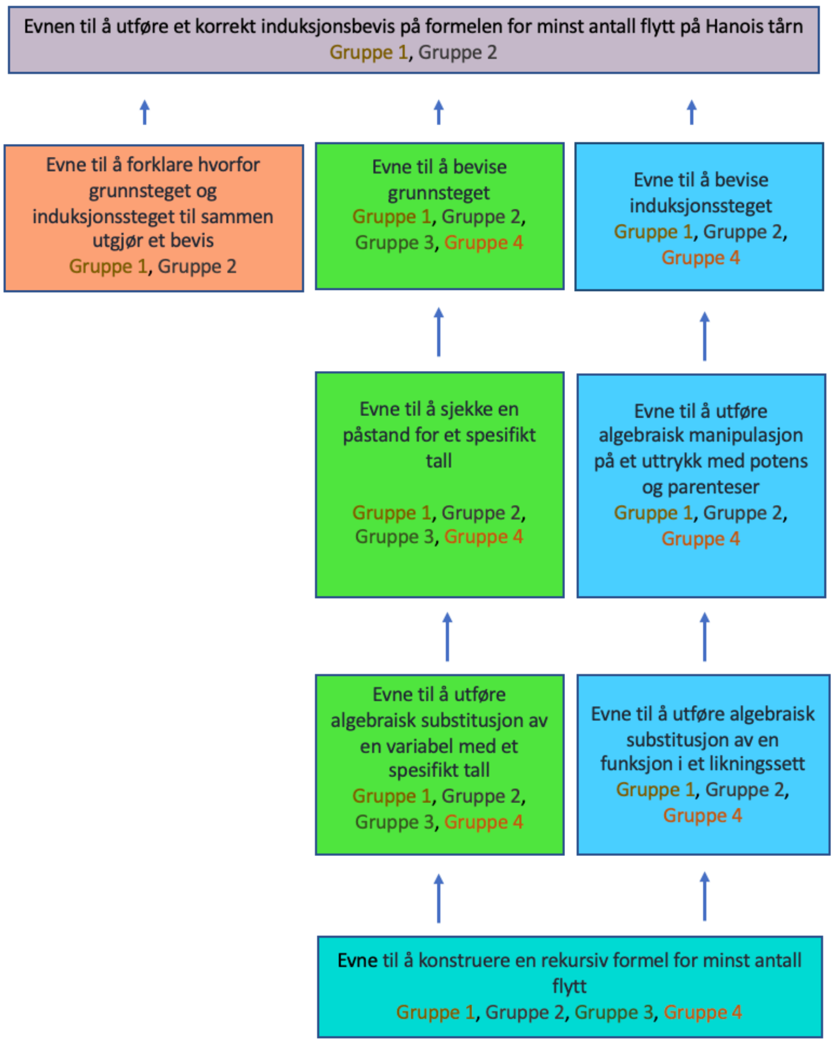
Sitat 6.6, institusjonalisering

Basert på den avsluttende helklassesamtalen, var det flere av elevene som gjennomførte et tankeeksperiment siden de både evnet å komme frem til likningen algebraisk, i tillegg til å sette ord på hvordan beviset var gyldig. Det kunne dermed virke som at flere av elevene forstod prinsippet bak induksjonsbevis, uavhengig av konkrete tilfeller, og dermed anvendte en bevisform som i større grad var matematisk riktig. Dette vil likevel kun være antagelser da vi ikke har testet hvilke kunnskaper elevene satt igjen med etter institusjonaliseringen.

6.3 Elevenes ferdigheter

I dette kapittelet vil vi presentere resultater av hvilke ferdigheter som ble observert i de fire ulike gruppene, ved å bruke analyseverktøyet beskrevet i Kapittel 5.4. I Figur 6.2 presenteres en oversikt over hvilke grupper som oppfylte kriteriene til de forskjellige boksene. Vi vil understreke at hensikten med analyseverktøyet ikke er å plassere gruppene i en av kategoriene suksess eller ikke-suksess, men å bruke det som et verktøy for å kartlegge hvilke deler av opplegget elevene mestret og hvilke deler de hadde utfordringer med.

Figur 6.2 *Gruppenes ferdigheter til å gjennomføre et induksjonsbevis*



Merknad. Analyseverktøy for elevenes ferdigheter, basert på Ernest (1984).

6.3.1 Evne til å konstruere en rekursiv formel for minst antall flytt

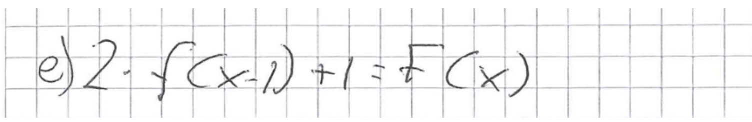
Helt i bunnen av Figur 6.2 er evnen til å konstruere en rekursiv formel (turkis). Vi har identifisert denne ferdigheten som sentral i oppgaven, fordi den rekursive formelen er avgjørende for å bygge videre på beviset. Kriteriet for å oppfylle denne ferdigheten, var at gruppa til sammen skulle komme frem til formelen $F(n) = 2 \cdot F(n-1) + 1$, for minst antall flytt med n skiver. Vi opplevde at alle gruppene klarte dette, selv om noen grupper trengte litt mer veiledning enn andre. Det var flere av gruppene som tidlig var inne på riktig tanke, fordi de observerte et mønster da de startet å flytte på tårnet i Oppgave 1. I Sitat 6.7 forklarer Ida til resten av Gruppe 1 hvordan hun tenker at man kan uttrykke $F(4)$ med $F(3)$.

Ida:	Hvis du skjønner … men jeg vet ikke helt hvordan.
Lærer:	Du kan vise med tårnet.
Ida:	Ja [viser med tårnet] fordi disse her 3 … bare flytte de over på 7 trekk … det vet vi jo … så må vi bare flytte den … så da blir det pluss 1 … og så 7 til for å flytte de tilbake igjen … forstår du? Tilbake igjen … så da blir det 7 og flytte de av … 1 for å flytte de bort … og 7 for å flytte de tilbake.

Sitat 6.7, Gruppe 1

I Figur 6.3 kan vi se Gruppe 1 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 2e, som inneholder deres forsøk på å konstruere den rekursive formelen. Vi kan observere at de har brukt x i stedet for n som variabel til funksjonen. Dette kan skyldes at elevene forbinder funksjoner med variabelen x, siden dette er den bokstaven som brukes oftest når man jobber med funksjonsuttrykk på videregående. Uavhengig av hvilken bokstav de utrykker antall skiver med, viser de at de har klart oppgaven: å konstruere en rekursiv formel for å finne minst antall flytt. Vi kan også observere i den samme figuren at denne gruppa har brukt to ulike symboler for minst antall flytt, nemlig liten f og stor F. Vi kan ikke vite sikkert hva det betyr, men det kan tyde på at elevene oppfatter at $F(\mathrm{x}-1)$ og $F(\mathrm{x})$ er to ulike funksjoner, som i så fall ville vært en misoppfatning.

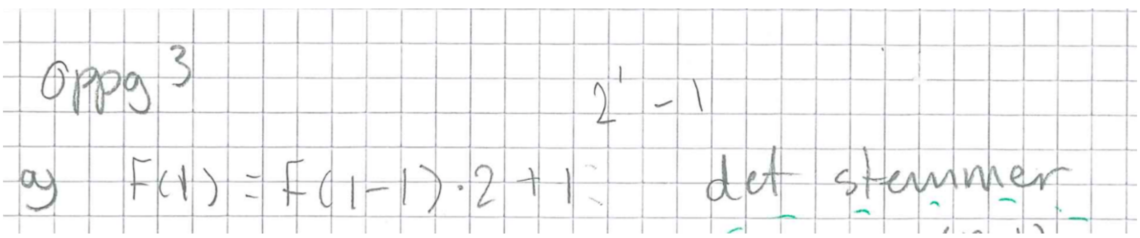
Figur 6.3 *Gruppe 1 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 2e.*



6.3.2 Evne til å bevise grunnsteget

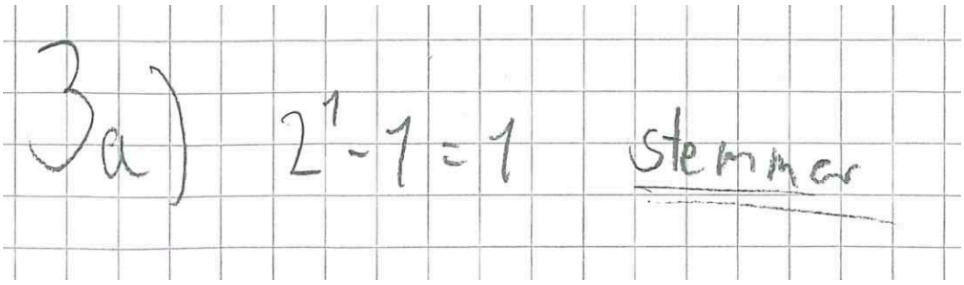
Som vist i Figur 6.2 har vi identifisert to underliggende ferdigheter som fører til beviset av grunnsteget. Den ene er evnen til å sjekke om en påstand stemmer for ett spesifikt tall, som i dette tilfellet var når $n = 1$. Det innebærer å forstå at de måtte sjekke om den rekursive formelen samsvarte med hypotesen, da de satt inn 1 i stedet for n. For å kunne klare dette trengte de den andre definerte ferdigheten, som er evnen til å utføre algebraisk substitusjon av en variabel med et spesifikt tall. Denne ferdigheten kunne observeres i Oppgave 3a. I Figur 6.4 ser vi et eksempel på et svar fra Gruppe 4 som demonstrerer oppfyllelsen av de grønne boksene i Figur 6.2. Alle de fire gruppene oppfylte denne ferdigheten.

Figur 6.4 *Gruppe 4 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 3a.*



Ikke alle gruppene fikk ned skriftlig på papir at de sjekket for både hypotese-formelen ($2^n - 1$) og den rekursive formelen ($F(n) = 2 \cdot F(n-1) + 1$). Gruppe 2 sjekket for eksempel kun for hypoteseformelen. Til tross for dette, mener vi de definerte (grønne) ferdighetene ble oppfylt, fordi de allerede visste fra en tidligere oppgave at den rekursive formelen ville gi svaret $F(1) = 1$. Så da de sjekket at $2^1 - 1$ ble 1 og konkluderte med at det stemte, indikerte dette at de forstod hva det innebar å sjekke om påstanden var sann for $n = 1$. I Figur 6.5 vises besvarelsen til Gruppe 2, etterfulgt av en kommentar fra Mari i Sitat 6.8.

Figur 6.5 *Gruppe 2 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 3a.*



Mari:	Da blir det 2 opphøyd i 1 minus 1 ... og det blir jo 1 ... Det stemmer jo ... så da kan du sikkert bare skrive det stemmer eller noe ... [Oda skriver ned].

Sitat 6.8, Gruppe 2

I kommentaren «og det blir jo 1 ... det stemmer jo» mangler vi informasjon om hvorfor det stemmer eller hva det stemmer med, men vi kan anta at Mari her refererer til den rekursive formelen.

6.3.3 Evne til å bevise induksjonssteget

Under denne hovedkategorien (blå) har vi indentifiser tre underliggende ferdigheter. Den mest grunnleggende ferdigheten er her å ha evnen til å utføre algebraisk substitusjon av en funksjon i et likningsett. For å bevise at $F(n) = 2^n - 1$, var de nødt til å betrakte antagelsen ($F(n-1) = 2^{n-1} - 1$) og den rekursive formelen ($F(n) = 2 \cdot F(n-1) + 1$) som et likningssystem, og sette inn den ene likningen i den ande. Ingen av gruppene skjønte at det var dette de skulle gjøre uten veiledning fra læreren. Til tross for dette var det 3 av 4 grupper som fikk til å utføre den algebraiske substitusjonen etter å ha mottatt et hint fra læreren om å betrakte det som et likningsett (eller sette de to likningene opp under hverandre). Sitat 6.9 viser et eksempel (fra Gruppe 1) på hvordan læreren veiledet gruppene til å klare dette første steget.

Jonas:	Du sa noe om at de to er like [peker på $F(n-1)$].
Lærer:	Ja hva kan man gjøre da ... når man tar utgangspunkt i den rekursive formelen ... og man vet at det som står her [peker på antagelsen] er dette?
Jonas:	Det der er likt det der [peker på $F(n-1)$ i begge ligningene].
Lærer:	Ja ... det her er likt det her [peker på $F(n-1)$ i begge ligningene] ... Vi har antatt at $F(n-1) = 2^{(n-1)} - 1$ ... og her har vi også et uttrykk for $F(n-1)$ ... da kan vi bytte det ut med?
Ida:	Med det der? 2 og 1 [peker på antagelse] ... eller?

Lærer: Dere har jo at $F(n-1)$ er lik dette [peker på antagelse] ... bytt det inn.

Ida: Ja så hvis vi skriver det opp som 2 ganger 2^{n-1}... minus 1.

Lærer: Ja! Bare pass på parentesene nå ... Så må man ikke glemme det siste leddet.

Ida: Pluss 1?

Lærer: Ja.

Sitat 6.9, Gruppe 1

For å komme videre med beviset, var det deretter nødvendig med ferdigheter knyttet til algebraisk manipulasjon. Vi har definert at en gruppe oppfylte denne ferdigheten dersom de klarte å manipulere likningen: $F(n) = 2 \cdot (2^{(n-1)} - 1) + 1$, til å bli $F(n) = 2^n - 1$. For å klare dette krevde det at elevene kunne løse opp parenteser og slå sammen potenser. Dette klarte Gruppe 1, 2 og 4 med litt veiledning fra lærer. Vi kan se hvordan denne ferdigheten kommer frem i Sitat 6.10 i Gruppe 2. I Figur 6.6 vises besvarelsen til den samme gruppa.

Lærer: Ja du ganger de ... men hva med potensene?

Mari: Da plusser du jo når du ganger ... så da får du jo ... da går den i null ... så da får du fjernet ... du får pluss 1 og minus 1 og det går i null ... så da står du jo igjen med kun n.

Oda: Åja sånn ja ... jo ... jo ... det kan absolutt gi mening ... [skriver ned] $2^n - 1$ ... da blir det?

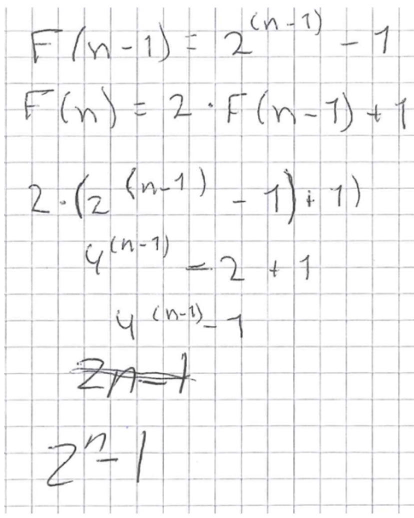
Mari: Minus 1 ... det stemmer jo med den da [peker på formel som skal bevises].

...

Oda: Jo selvfølgelig ... ja [skriver ned].

Sitat 6.10, Gruppe 2

Figur 6.6 *Gruppe 2 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 3b.*



Som vi kan se i Figur 6.2, er ikke Gruppe 3 med i noen av de blå boksene. Denne gruppen brukte mye tid på å konstruere den rekursive formelen i Oppgave 2, og det ble derfor for liten tid til å prøve seg frem med induksjonssteget. Vi kan ikke utelukke at gruppen hadde ferdighetene til å klare det, fordi det kan være at tidspresset var den begrensende faktoren. De tre andre gruppene, som vi mener viste disse ferdighetene, bruke også lang tid på Oppgave 3 og trengte veiledning fra læreren.

6.3.4 Evne til å forklare hvorfor grunnsteget og induksjonssteget til sammen utgjør et bevis

For å fullføre induksjonsbeviset var det nødvendig for gruppene å diskutere hvorfor grunnsteget og induksjonssteget sammen utgjorde et bevis, og hvorfor de to trinnene ikke utgjorde beviset isolert sett. I denne delen av oppgaven var det planlagt at læreren skulle ta en mer aktiv rolle enn tidligere i opplegget, for å få ut så mye som mulig av hva elevene forstod av bevisets prinsipp. Som beskrevet tidligere, kom ikke Gruppe 3 i mål med induksjonssteget, mest sannsynlig på grunn av tidspress. På grunn av dette, manglet de kunnskap om en viktig del av beviset, som gjorde det vanskelig å skulle diskutere bevisets gyldighet. Gruppe 4 gjennomførte heller ikke diskusjons-oppgaven. Ved å betrakte videoopptaket av denne gruppen, kan det tyde på at de manglet motivasjon mot slutten av økten. Både kroppsspråket deres og denne kommentaren fra Guro: «kan vi ikke bare si oss ferdige? Jeg orker faktisk ikke mer» indikerer dette. I institusjonaliseringsfasen, som var en helklassesamtale på slutten av timen, gikk vi gjennom elevenes løsninger og diskuterte hvorfor grunnsteget og induksjonssteget sammen utgjorde et fullverdig bevis. På denne måten kunne vi i større gard sikre at alle gruppene fikk med seg målkunnskapen, som var prinsippet i et induksjonsbevis.

For å avgjøre om en gruppe hadde evnen til å forklare hvorfor grunnsteget og induksjonssteget til sammen utgjorde et gyldig bevis, måtte vi bestemme et kriterium som måtte være oppfylt. Siden dette var en introduksjonstime, og elevene hadde lite erfaring med bevis generelt, har vi valgt et kriterium som vi mener er realistisk. Det hadde ikke vært realistisk å forvente at elevene skulle ha en dyp forståelse av hvordan man fører et induksjonsbevis og hvorfor det er gyldig, etter kun én time. Vi bestemte derfor at dersom en gruppe kunne forklare den såkalte dominoeffekten ved et induksjonsbevis, oppfylte de ferdigheten (rosa i figur 5.4). I Figur 6.2. kan vi se at vi har plassert både Gruppe 1 og 2 i denne ferdighetsboksen, fordi vi mener de uttrykte forståelse for domino-prinsippet. Sitat 6.11 viser hvordan Gruppe 1 diskuterer Oppgave 3c, med veiledning fra lærer, som vi har definert som å oppfylle denne ferdigheten.

Lærer:	Den neste ... Når dere vet at den gjelder for $n = 1$ ... vet dere at den også gjelder for?
Jonas:	Den neste ... $n = 2$.
Lærer:	Og når dere vet at den stemmer for $n = 2$?
Ida:	Så vet vi at den stemmer for $n = 3$ ... så for $n = 4$ ... så for $n = 5$ ... også videre.

Sitat 6.11, Gruppe 1

For å undersøke om elevene skjønte hvorfor Oppgave 3a var viktig i beviset, spurte læreren om Oppgave 3b hadde vært et gyldig bevis alene. Som vi ser i Sitat 6.12, forklarer

Jonas at det ikke kunne bli regnet som et bevis, fordi vi ikke hadde hatt en start-verdi. Denne kommentaren til Jonas tyder på at han har tilegnet seg en viss forståelse av viktigheten med grunnsteget.

Jonas:	Da hadde vi ikke bevist at det funker.
Lærer:	Fordi?
Jonas:	Fordi vi ikke har kommet med et konkret eksempel ... holdt jeg på å si.

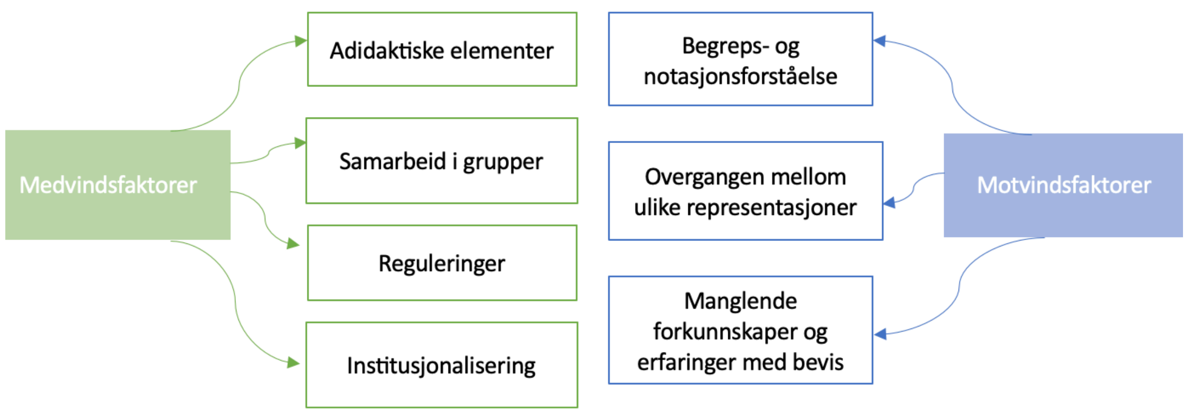
Sitat 6.12, Gruppe 1

7 Medvind- og motvindsfaktorer

I dette kapittelet vil vi legge frem vår analyse av det designede undervisningsopplegget, og forklare hvordan ulike faktorer ved opplegget påvirket elevenes læring av induksjonsbevis. Vi har valgt å presentere denne analysen i et eget kapittel, fordi den både beskriver resultater og diskuterer funnene. En annen grunn til dette er at denne delen av analysen er knyttet til vår subjektive opplevelse av gjennomføringen av opplegget.

Vi har valgt å skille mellom medvind- og motvindsfaktorer ved TDS-opplegget. Faktorer som representerer *medvind,* innebærer i denne konteksten de elementene i undervisningssituasjonen som vi anser bidro til at elevene oppnådde den tilsiktede målkunnskapen. Faktorer som representerer *motvind,* innebærer på den andre siden elementer som vi mener skapte utforinger for elevene i å oppnå målkunnskapen. Vi har valgt å bruke denne vind-metaforen, fordi den beskriver hvordan de ulike faktorene påvirket elevenes arbeid: selv om en faktor enten hjelper eller hindrer elevenes arbeid, på samme måte som med- eller motvind gjør det lettere eller vanskeligere å komme frem til en destinasjon, så kan man nå målet til slutt. I dette tilfellet representerer målkunnskapen den destinasjonen vi ønsket at elevene skulle komme frem til. Vi ønsker å presisere at selv om vi identifiserer en faktor som motvind, betyr ikke det at denne faktoren representerer noe negativt ved opplegget, det betyr bare at denne faktoren førte til utfordringer for elevene. De ulike med- og motvindsfaktorene er presentert i Figur 7.1.

Figur 7.1 *Oversikt over medvind- og motvindsfaktorer*



7.1 Medvind

I dette delkapitlet vil vi presentere faktorer som vi har identifisert som medvindsfaktorer, som er definert basert på funn i datamaterialet. Siden faktorene er identifisert uten en kontrollgruppe, som løste oppgaven uten disse, kan vi ikke si med sikkerhet i hvilken grad de bidro til at elevene tilegnet seg målkunnskapen. Vi har likevel valgt å utforske disse faktorene nærmere, fordi vi mener datamaterialet indikerer at de spilte en positiv rolle for at elevene klarte å løse oppgavene.

7.1.1 Adidaktiske elementer

Et av funnene vi ønsker å fremheve som en medvindsfaktor, er den objektive feedbacken fra det materielle miljøet, som inkluderer de adidaktiske elementene i undervisningssituasjonen. Disse elementene, som beskrevet i Kapittel 2.1, ga elevene muligheten til å vurdere om deres handlinger og løsninger var hensiktsmessige eller ikke.

Elevene fikk i de adidaktiske fasene muligheten til å gjennomføre oppgavene knyttet til Hanois tårn, fysisk. Ved å sammenligne med hverandre og det de hadde kommet frem til skriftlig, kunne tårnet gi dem en indikasjon på om fremgangsmåten deres var riktige eller ikke. Det materielle miljøet kan dermed ses på som en medvindsfaktor, siden det ledet elevene videre i oppgavesettet, og mot den ønskede målkunnskapen. Hvordan feedback fra selve spillet ga elevene medvind når de skulle løse de ulike oppgavene, kommer eksempelvis frem i utdraget fra samtalen i Gruppe 2, hvor elevene forsøker å finne ut hvor mange trekk de bruker på å flytte et tårn av tre ringer (Oppgave 1):

Mari: Ja … men nå har jo jeg flyttet hver gang … jeg kommer jo til å måtte gjøre det samme hver gang … så Per bare prøv å flytt slik som du føler er nøytralt.

Per: [flytter tårnet]

Mari: 1 … 2 … 3 … 4 … 5 … 6 … 7.

Per: Åtte [tuller med å flytte en ring ett trekk for mye].

Mari: Det ble 7 da.

Oda: Ja jeg kommer ikke på en annen måte jeg heller … så.

Mari: Nei da er sikkert 7 det minste vi fikk til vertfall.

Oda: Ja … men [flytter tårnet] … 1 … 2 … 3 … 4 … 5 … 6 … 7.

Mari: Ja okei … da sier vi 7 da.

Sitat 7.1, Gruppe 2

Alle på gruppa brukte syv trekk på å flytte tårnet, og gruppa konkluderte derfor med at dette måtte være det riktige svaret. På denne måten hadde det fysiske tårnet adidaktisk potensial, og ga feedback til elevene om at løsningen deres var gyldig.

I siste del av Oppgave 2 skulle elevene formulere en rekursiv formel for minst antall flytt, basert på svar på tidligere oppgaver. I Figur 7.2 kan vi se oppgaven elevene ble tildelt.

Figur 7.2 *Oppgave 2.*

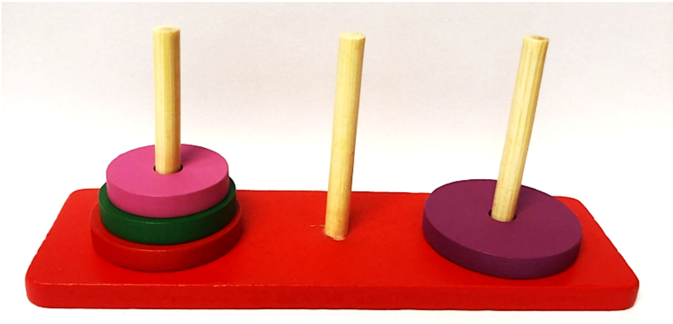
Oppgave 2

a) Lag et tårn av $n = 4$ ringer. Flytt et tårn av de 3 øverste ringene over til en annen pinne, slik at den største ringen i det opprinnelige tårnet står alene (med minst mulig flytt).
Hvor mange flytt bruker dere?
b) Bruk svaret i oppgave a til å finne $F(4)$ uten å flytte mer på ringene.
c) Kan dere skrive en formel for $F(4)$ med $F(3)$
d) Kan dere nå bruke $F(4)$ til å finne $F(5)$?
e) Klarer dere å lage en rekursiv formel som finner $F(n)$?

En rekursiv formel uttrykker et ledd i en tallfølge ved foregående ledd.

Merknad. Oppgave 2 som elevene ble tildelt etter gjennomføring av Oppgave 1.

Figur 7.3 *Oppsett av tårnet i Oppgave 2b.*



Merknad. Figuren viser hvordan tårnet skulle se ut etter man har fullført Oppgave 2b. Privat bilde.

Hensikten med Oppgave 2a og b, var å gi elevene et hint om hvor mange trekk som manglet i flyttingen av et tårn med $n = 4$ ringer, når et tårn av $n = 3$ ringer allerede var flyttet over på en pinne, slik som vist i Figur 7.3. Dette oppsettet ga elevene feedback i arbeidet med å formulere den rekursive formelen, fordi formelen kunne knyttes til det visuelle arrangementet av ringene. Ved å betrakte denne fordelingen, kunne elevene observere at for å flytte et tårn av n ringer, måtte man flytte et tårn av $n - 1$ ringer, to ganger, og legge til 1. Det var to av gruppene som klarte å se sammenhengen mellom hvordan de hadde flyttet ringene på selve tårnet og formuleringen av den rekursive formelen. Uten det fysiske spillet ville det trolig vært vanskeligere å se denne sammenhengen, og vi har derfor valgt å kategorisere det fysiske spillet som en medvindsfaktor, for at elevene skulle komme frem til den ønskelige rekursive formelen. To utdrag som indikerer dette, fra Gruppe 1 og Gruppe 4, vises henholdsvis i Sitat 7.2 og 7.3. Deler av Sitat 7.3 ble presentert i et tidligere delkapittel, men her ser vi på det i sammenheng med hvordan elevene anvendte tårnet i oppgaveløsningen.

Ida:	Det er jo bare å flytte de samme tre … på en måte … pluss 1 for den må flyttes bort [peker på den største ringen] … fordi det er et tårn av tre … så den nederste … så flytta de tre … og så pluss 1 på en måte for å flytte den store et hakk bort.
Jonas:	Åja ja.
Ida:	Hvis du skjønner … men jeg vet ikke helt hvordan [avbrutt av Lærer]: du kan vise tårnet. Ja [viser med tårnet] … fordi disse her tre … bare flytte de over på 7 trekk … det vet vi jo … så må vi bare flytte den … så då blir det pluss 1 … også 7 til for å flytte de tilbake igjen. Forstår du? Tilbake igjen … så då blir det 7 for å flytte de av … 1 for å flytte de bort … og 7 for å flytte de tilbake.

Sitat 7.2, Gruppe 1

Helle:	Ja … men når du skal liksom flytte den over … så må du jo først … uansett … hvis du hadde hatt … 4 ringer … så måtte vi har gjort det på samme måten … og så flyttet den [peker på den største ringen om står alene] over der [peker på ledig pinne] … og så.
Guro:	Tatt oppå alt igjen … men jeg forstår ikke hvordan vi skal kunne finne ut av det bare ved å se på oppgave a.

Maia: Det gjør ikke jeg heller faktisk.

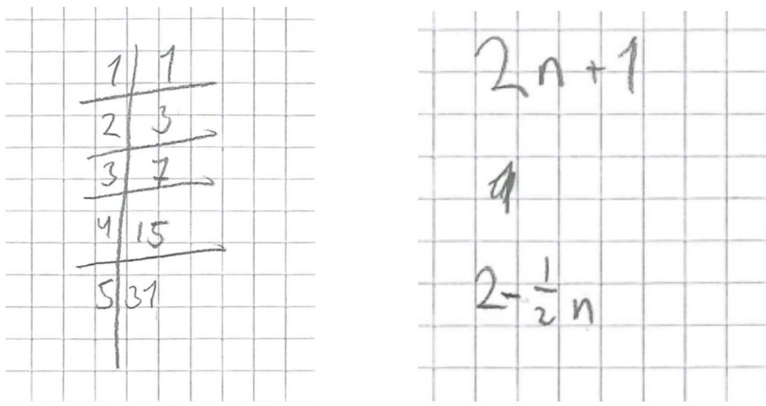
Helle: Jo ... får vi brukte jo 7 trekk på den [peker på tårnet av 3] ... og så måtte vi ha brukt 1 trekk på å flytte den over [peker på den største skiva som står alene] ... og så sikkert 7 trekk på å flytte den [peker på tårnet av 3] over der igjen.

Sitat 7.3, Gruppe 4

Disse to gruppene anvendte dermed det adidaktiske potensialet i det fysiske tårnet til å formulere den rekursive formelen, som var intensjonen da vi designet oppgaven. De to resterende gruppene kom derimot frem til formelen ved å lete etter mønster basert på svar på tidligere oppgaver, som også er et adidaktisk element som vi vil se nærmere på i neste avsnitt.

I Oppgave 1 skrev elevene ned svarene sine for $F(1)$, $F(2)$ og $F(3)$. Disse svarene brukte flere av gruppene til å undersøke om den rekursive formelen de kom frem til i neste fase, kunne være riktig. De tidligere svarene kan dermed også betraktes som adidaktiske elementer, da de ga elevene en indikasjon på om den formulerte formelen deres var riktig. Som nevnt ovenfor, brukte både Gruppe 2 og 4 svarene fra Oppgave 1, da de skulle formulere den rekursive formelen. Gruppe 2 var ivrig etter å finne et mønster i antall flytt når antall ringer økte, og brukte svarene for ulike verdier av $F(n)$ hyppig.

Figur 7.4 *Utklipp av kladdeark til Gruppe 2 på Oppgave 1.*



I Figur 7.4 ser man at elevene i denne gruppen lagde en tabell over antall ringer og korresponderende antall flytt, som ble brukt i forsøk på å finne en formel for minst antall flytt. Elevene anvendte dermed de tidligere svarene til å validere de ulike formlene de kom opp med. Resultater fra tidligere oppgaver ble også brukt av elevene i Oppgave 3, hvor de skulle gjennomføre selve beviset. Det var flere av elevene som undersøkte om den nye formelen de ble presentert, ga samme resultat som de hadde kommet frem til tidligere.

Basert på de nevnte observasjonene ovenfor, har vi valgt å kategorisere de ulike adidaktiske elementene som medvindsfaktorer, siden vi ut ifra datamaterialet kan se at elevene stadig anvendte selve tårnet og svar på tidligere oppgaver for å komme frem til løsninger.

7.1.2 Samarbeid i grupper

Et annet funn vi gjorde da vi analyserte datamaterialet, var at elevsamarbeid fungerte som en medvind i gjennomføringen av opplegget. I flere tilfeller observerte vi at samspillet mellom elevene førte til at de klarte å løse oppgavene. Ved flere anledninger bygget elevene videre på innspill fra hverandre, som resulterte i gode problemløsninger, som kan knyttes til et sosiokulturelt syn på læring (Ringnes & Mark, 2020). Da Gruppe 2 forsøkte å bruke den rekursive formelen og antagelsen, til å komme frem til likningen som skulle bevises, kan vi observere i Sitat 7.4, at de kom frem til løsningen ved å bygge videre på hverandres kunnskap.

Mari:	Okei hva om vi tenker som et likningsett liksom.
Oda:	Det ... det er ikke det dummeste jeg har hørt.
Mari:	Takk. Hvis vi bytter ledd.
Oda:	Ja ... For her har vi jo et uttrykk av $F(n-1)$ [peker på antagelse].
Mari:	Her har vi et uttrykk for $F(n)$ [peker på rekursiv formel].
Oda:	Sånn i teorien kan vi sette inn slik at det blir 2 gange parentes F av 2 opphøyd i $n-1$... -1 ... istedenfor å skrive ... $n-1$ ... men jeg føler det er lite vits ... og så skrive $n-1-1+1$ ... for å få ... nei.
Mari:	Hvis vi bare prøver som et likningsett da ... og skriver ... den der er lik den der liksom [peker på antagelsen og den rekursive formelen].

Sitat 7.4, Gruppe 2

I tillegg til å bygge videre på hverandres innspill og argumenter, førte gruppearbeidet til at elevene sammenlignet svarene sine med hverandre når de arbeidet med selve tårnet. Det var klassens faglærer som hadde satt sammen gruppene på forhånd, og vi opplevde at elevene i de etablerte gruppene var trygge på hverandre og vant til å arbeide sammen. En konsekvens av denne sammensetningen var at de turte å dele sine ideer og meninger, og bygge videre på disse. Dersom elevene hadde arbeidet individuelt, ville disse tankeutvekslingene uteblitt, og gruppearbeid blir derfor definert som en medvindsfaktor i oppgaveløsningen.

7.1.3 Reguleringer

Underveis i den adidaktiske situasjonen oppstod det noen utfordringer hos gruppene, som førte til at vi som lærere måtte gripe inn, for å sikre progresjon av målkunnskapen hos elevene. Disse reguleringene kan sees på som brudd på den didaktiske kontrakten, og kan ha ført til at elevene i mindre grad forstod ting selv. På grunn av tidsrammene rundt realiseringen har vi likevel valgt å definere disse om en medvindsfaktor, da elevene trolig ikke ville tatt i bruk målkunnskapen uten dem. Sitat 7.5 viser en situasjon hvor Gruppe 2 hadde klart å uttrykke $F(4)$ ved å bruke $F(3)$, men ikke kom videre i formuleringen av en generell likning.

Lærer:	Jeg kan jo si at det dere har gjort her er riktig [peker på riktig formel (oppgave d) som er skrevet ned]. Den formelen her ... så hvis dere prøver å skrive den rekursive formelen ut ifra dette her. Hvis dere ikke bruker 3 og 4 ... men en generell n. Hvordan ville den formelen sett ut?
Mari:	Ja okei. Det gir jo forså vidt mening.
Oda:	[skriver ned] så $2 \cdot F$ av ... så ikke 3 men?
Mari:	Blir det n då?

Oda: $F(n)$ ... 1 ... og så n 2 (mener å skille mellom to ulike verdier for n).

Mari: Hæ?

Oda: Siden vi kan jo ikke skrive n begge plassene.

Lærer: Hva er forskjellen her og her [peker på likning]?

Oda: Det er at antall ringer har økt med 1.

Lærer: Ja.

Oda: Ja! [skriver ned] $2 \cdot F(n) + 1 = F(n+1)$... sånn ... blir ikke det?

Sitat 7.5, Gruppe 2

Som vi kan se i Sitat 7.5 ovenfor, kom gruppen frem til den rekursive likningen ved å ta i bruk informasjonsspranget som læreren ga dem. For noen av gruppene ble det også presisert hvordan n og $F(n)$ var definert. Dette var informasjon som stod beskrevet på oppgavearket, og disse reguleringene regnes derfor ikke som brudd på den didaktiske kontrakten. På samme måte kom vi også med noen reguleringer når gruppene arbeidet med Oppgave 3. Det var tydelig at det oppstod en del forvirring rundt hva de skulle bevise, og hva de skulle bruke for å gjøre det. Det ble derfor tydeliggjort for alle gruppene hvilke likninger de kunne bruke, og hvilken likning de skulle komme frem til. Dette var reguleringer som ledet Gruppe 1, 2 og 4 til å løse beviset algebraisk. Selv om disse reguleringene bryter med de adidaktiske fasene, har vi valgt å karakterisere disse reguleringene som en medvindsfaktor, fordi elevene trolig ikke ville avdekket målkunnskapen uten dem.

Da vi gikk gjennom datamaterialet, kom det tydelig frem at Oppgave 3c, hvor elevene skulle diskutere hvordan Oppgave 3a og b til sammen utgjorde et gyldig bevis, var utfordrende. Basert på pilotundersøkelsen, og det faktum at elevene ikke hadde arbeidet med induksjonsbevis før, var dette noe vi hadde forventet. Som nevnt i *a priori*-analysen var vi forberedt på at vi mest sannsynlig var nødt til å delta i diskusjonen, for å bedre kunne forstå i hvilken grad elevene anvendte målkunnskapen. Under datainnsamlingen ble gruppene som forsøkte å svare på den siste deloppgaven, gitt et informasjonssprang. Læreren forklarte hva de hadde vist i Oppgave 3b (induksjonssteget), slik at de lettere kunne forstå hvorfor det de gjorde i Oppgave 3a (grunnsteget) var nødvendig for å bevise formelen for alle naturlige tall. Informasjonsspranget som ble gitt til Gruppe 2 er vist i Sitat 7.6.

Lærer: Ja der testet dere at den stemte for én verdi. I neste oppgave antar man at formelen stemmer for $n-1$ ... altså at den stemmer for én verdi mindre enn n. og vi ønsker da å vise at den stemmer for neste verdi ... sant? Her antar vi at den stemmer for når n er én mindre ... også skal dere vise at den stemmer når n øker med 1. Dere kom jo frem til den formelen da [peker på formel som skal bevises] ... så hvordan ... det at dere sjekka for én verdi og det at dere viser at dersom den stemmer for den forrige stemmer den også for den neste. Hvordan utgjør de to tingene til sammen et bevis?

Sitat 7.6, Gruppe 2

Etter at læreren hadde presisert for elevene hva de hadde vist i Oppgave 3b, tyder datamaterialet på at de til en viss grad evnet å se sammenhengen mellom grunnsteget og induksjonssteget. Dette var avgjørende for at elevene skulle oppnå den tilsiktede målkunnskapen. De gruppene som ikke fullførte hele oppgavesettet ble forklart disse nødvendige konseptene i den siste fasen av undervisningssituasjonen.

7.1.4 Institusjonalisering

I den avsluttende fasen av undervisningssituasjonen, institusjonaliseringen, samlet vi alle gruppene i ett klasserom. I en helklassesamtale gikk vi sammen gjennom Oppgave 3, samt beskrev prinsippet bak induksjonsbevis og pekte på vanlige misoppfatninger knyttet til målkunnskapen. Basert på selve gjennomføringen av opplegget og funn i datamaterialet, har vi valgt å kategorisere denne fasen som en medvindsfaktor. Årsaken til dette er at målkunnskapen ble tydelig forklart i denne fasen, og basert på elevenes respons og bidrag virket det som om de i større grad forstod målkunnskapen i denne fasen. Vi gikk gjennom hvordan de ulike deloppgavene til sammen beviste formelen for alle naturlige tall, som vi kan se i Sitat 7.7.

Lærer 2:	For hvis dere gjør slik som dere gjorde å sjekka for $n = 1$ ... hva vet dere når dere har gjort oppgave b?
Oda:	At den stemmer for $n = 2$ og.
Lærer 2:	Yes.
Lærer 1:	At det stemmer for $n = 2$.
Lærer 2:	Og hva vet dere når det stemmer for $n = 2$?
Oda:	At det stemmer for $n = 3$.
Lærer 2:	Ja ... veldig bra ... da får du en dominoeffekt ... fordi du har vist i b at dersom ... du antar at den stemmer for den forrige ... og da vist at den stemmer for den neste ... men vi vet jo ikke om den stemmer ... men i oppgave a har vi jo sjekket én verdi og at den faktisk stemmer. Så uten a vil det ikke være et fullverdig bevis ... og det vil jo bli slik som du sa ... at hvis den stemmer for 2 stemmer det for 3 ... hvis det stemmer for 3 stemmer det for 4 .... det vil jo bli en dominoeffekt.
Lærer 1:	Så oppgave a og oppgave b utgjør ikke isolert sett et bevis ... men til sammen så utgjør det et bevis ... siden man får denne dominoeffekten.
Lærer 2:	Og dette er en bevisform som dere kommer til å lære mer om senere ... og det kalles induksjonsbevis.

Sitat 7.7, institusjonalisering

I utdraget ovenfor ble elevene forklart hvordan de ulike stegene til sammen beviste formelen, og vi tror en slik forklaring styrket elevens evne til å betrakte det matematiske konseptet som et objekt (en metode som kan anvendes til å bevise påstander) og ikke kun som en prosess (de ulike stegne i et induksjonsbevis). To av gruppene gjennomførte ikke siste deloppgave, og uten den avsluttende fasen ville de ikke fått en tydelig forklaring av målkunnskapen. Å bli forklart selve prinsippet bak induksjonsbeviset kan ha ført til en mer relasjonell forståelse av målkunnskapen, som er hensikten bak en undervisningssituasjon designet ved bruk av TDS.

En annen grunn til at vi har valgt å karakterisere institusjonaliseringen som en medvindsfaktor, er fordi målkunnskapen i denne fasen ble dekontekstualisert. Vi forsøkte å koble arbeidet til de ulike gruppene med betydningen og anvendbarheten til målkunnskapen. Slik som i Sitat 7.7 ovenfor, ble prinsippet bak induksjonsbevis generalisert, med forhåpning om at det i ettertid kunne brukes i nye situasjoner, og at elevene i større grad kunne utvikle det Piaget (1976) referer til som operasjonell kunnskap.

7.2 Motvind

I dette delkapittelet vil vi presentere motvindsfaktorene, som er faktorer vi mener skapte utfordringer for elevene i deres arbeid for å oppnå målkunnskapen. Selv om vi ikke kan vite nøyaktig hvordan realiseringen hadde blitt påvirket dersom disse faktorene hadde blitt endret, har vi valgt å definere dem som motvindsfaktorer fordi det var tydelig at de hindret elevenes progresjon til en viss grad.

7.2.1 Begreps- og notasjonsforståelse

Bevisoppgaver i skolen blir oftest brukt for å fremme en dyp forståelse av en matematisk kunnskap. Selv om formålet med disse oppgavene er å øve elevene på resonnering og logisk tenking, kommer vi ikke unna en del bruk av formell notasjon, syntaks og regler for manipulering (Hanna & Villier, 2008). Siden vår studie omfatter en introduksjonsoppgave av én type bevis, hadde vi ikke store forventinger om at elevene skulle konstruere veldig formelle bevis. Når det er sagt, hadde vi forventet at elevene ville forstå notasjonen i oppgaveteksten, siden vi bevisst hadde tilpasset den det vi antok, basert på lærerplanen og pensumbøker, tilsvarte et 1T-nivå. Elevene skulle jobbe med en enkel funksjon, med én variabel, nemlig $F(n)$. Til tross for dette opplevde vi at manglende erfaring med matematiske begreper og notasjon ble en barriere i opplegget for noen av gruppene. Gruppe 4 trodde gjennom store deler av opplegget at funksjonen F stod for enten formel eller figur, i stedet for minst antall flytt, som beskrevet i oppgaveteksten. Denne misforståelsen kan tyde på at elevene ikke er trygge på bruk av funksjoner i nye læringssituasjoner, som ifølge Skemp (1978) er et kjennetegn på en instrumentell forståelse av kunnskapen. Det står tydelig i oppgaveteksten at «Målet med spillet er å flytte tårnet over til en annen pinne med minst mulig flytt, som er gitt ved $F(n)$». Vi kan se i Sitat 7.8 at elevene på gruppa er uenige om hva F står for. Nils hevder at F står for formel, mens Alex tror F står for figur, altså har ingen av dem fått med seg at F står for minst antall flytt. Det er vanskelig å peke på den nøyaktige årsaken til hvorfor de har oppfattet at F står for formel eller figur, men en teori er at de baserer det på tidligere erfaringer med funksjonsoppgaver. Det er sannsynlig at elevene oftere har jobbet med begrepene formel og figur, enn begrepet flytt. Når de da ser bokstaven F i en matematisk kontekst, vil de mest sannsynlig tenke på begreper de er kjent med fra tidligere, som begynner på denne bokstaven. Uavhengig av grunnen til misoppfatningen knyttet til F, så tror vi at dette indikerer en usikkerhet knyttet til funksjonsbegrepet i Gruppe 3.

Nils:	Er det ikke … nei … jeg vet ikke [latter] … men er det ikke sånn … F står jo for formel … formel 4.
Alex:	Er det ikke figurer det står for? F står jo for figur … gjør det ikke?
Nils:	Figur 2 er lik 3? Skal vi spørre om hjelp?

…

Alex: Ja den formelen … den kommer jeg aldri til å klare å skrive. F står for figur … er det ikke det? Eller hva?

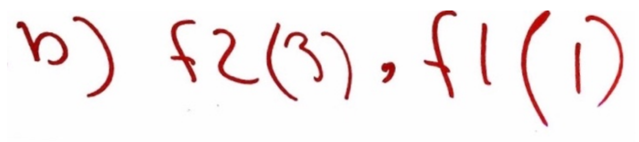
Lærer: Les [peker på oppgavearket hvor reglene står] … her står det.

Nils: Flytt … F står for flytt.

Sitat 7.8, Gruppe 3

I Oppgave 1b brukte Gruppe 3 en uforventet notasjon for å formulere $F(2)$ og $F(1)$. Vi vet at gruppa hadde forstått den praktiske oppgaven, fordi de flyttet et tårn med to skiver og konkluderte muntlig med at de brukte 3 flytt totalt. Da de formulerte svaret skriftlig, ble det uttrykt som $F2(3)$ og $F1(1)$, som vi kan se i Figur 7.5. Her er vi ganske sikre på at de egentlig mente å skriftlig formulere: $F(2) = 3$ og $F(1) = 1$, basert på videoopptaket og dialogen. Dette svaret tyder på usikkerhet knyttet til bokstavenes roller, altså hva som var funksjonen F og hva som var variabelen n. Denne feilen ble raskt rettet opp i med litt veiledning fra læreren, som vi kan se i Sitat 7.9.

Figur 7.5 *Gruppe 3 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 1b.*



Lærer: Den notasjonen du bruker på tavla nå … vil du prøve å bruke den vi har brukt her [peker på oppgavearket hvor funksjonen $F(n)$ er beskrevet].

Nils: Åja ja … F… 2 i parentes er lik 3 da?

Lærer: Mhm.

Sitat 7.9, Gruppe 3

Gruppe 3 og 4 opplevde noen utfordringer knyttet til å uttrykke den rekursive formelen skriftlig. De var usikre på om det var $F(n)$ eller n som var variabelen i formelen. Figur 7.6 viser Gruppe 3 sitt første forsøk på å formulere den rekursive formelen, hvor vi ser at de har brukt n i stedet for $F(n)$. Da de prøvde å sjekke om formelen stemte med de kjente verdiene fra tidligere oppgaver, fant de ut at den ikke var riktig. De visste blant annet fra Oppgave 1b at $F(2) = 3$, men med deres rekursive formel ville det da blitt $F(2) = 5$. Disse verdiene ser vi at ikke samsvarer, og elevene ble da nødt til å revurdere formelen de hadde kommet frem til. I Gruppe 4 kunne vi observere gjennom dialogen mellom elevene at selv om de skrev $n - 1$, så snakket de om egenskapene til $F(n - 1)$. I disse tilfellene ble elevene veiledet av læreren til å korrigere formelen slik at den ble riktig, som vi kan se i Sitat 7.10 fra Gruppe 4.

Figur 7.6 *Gruppe 3 sin besvarelse på Oppgave 2e.*

$$F(n) = n \cdot 2 + 1$$

Guro: Så bare skrive $n - 1$ da? ... hæ ... hva [legger fra seg blyanten].

Lærer: Hvis du tenker at du har 4 ringer da ... n er lik 4.

Guro: Ja ... da skriver jeg jo bare $n - 1$ [skriver ned svaret].

Lærer: Er dere andre enig?

Helle: Nei ... jeg tror du må skrive $F(n-1)$.

Maia: Ja ... det tror jeg og ... $F(n-1)$.

...

Lærer: Hvis dere ser på denne her da ... er det n eller $F(n)$ dere bruker?

Guro: $F(n)$.

Lærer: Ja.

Sitat 7.10, Gruppe 4

I Oppgave 3b observerte vi at Gruppe 1 hadde brukt to forskjellige symboler for minst antall flytt. Som vist i Figur 7.7 bruker de en stor F for minst antall flytt med den rekursive formelen, mens de bruker en liten f for minst antall flytt med hypoteseformelen. Dette kan tyde på at elevene ikke oppfattet at disse to funksjonene representerte det samme, og er en interessant observasjon, fordi vi ser en motsigelse mellom elevsamtalen og den skriftlige besvarelsen. Gjennom dialogen mellom elevene får vi et sterkt inntrykk av at elevene har forstått at de skal prøve å vise at de to formlene er like. De to forskjellige symbolene gjorde det trolig vanskeligere for elevene å se at de kunne sette inn den ene likningen i den andre, og skapte dermed en barriere for progresjonen i beviset. Da læreren ga dem et hint om å bruke samme bokstav, så de umiddelbart hva de skulle gjøre videre.

Figur 7.7 *Utklipp av Gruppe 1 sin skriftlige besvarelse på Oppgave 3b.*

$$F(n-1) = 2^{(n-1)} - 1$$
$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$$

7.2.2 Overgang mellom representasjoner

En annen motvindsfaktor som vi har identifisert, er overgangen mellom ulike representasjoner. Da elevene jobbet med det fysiske tårnet, var det ingen tvil om hva som var antall ringer og hva som var antall flytt. Da de deretter skulle formulere resultatene sine skriftlig, var det mange som synes dette var vanskelig. Elevene arbeidet med en ikke-diskursiv representasjon da de forsøkte å løse oppgavene ved å flytte på ringene. Da de skulle svare skiftelig på oppgavene, måtte de derfor gjøre en konvertering over til en diskursiv representasjon, siden disse svarene inneholdt beregninger samt bruk av notasjon. Da vi så gjennom videoopptakene var det tydelig at elevene løste de første deloppgavene riktig, men som vi kan se i Figur 7.5 og 7.6, oppsto det problemer da de skulle formulere svarene sine skriftlig ved bruk av matematisk notasjon. Slik som Duval (2006) poengterer i sitt arbeid, er gjennomføring av slike konverteringer ofte utfordrende for elever, men det er også disse som bidrar til å oppnå en høyere grad av forståelse.

Gruppe 1 og 2 forsøkte i Oppgave 3c å forklare hvordan de tidligere oppgavene til sammen beviste formelen for alle naturlige tall. Basert på datamaterialet var det tydelig at det var utfordrende for elevene å se sammenhengen mellom grunnsteget og induksjonssteget, og at det var vanskelig å sette ord på prinsippet muntlig. Å forklare prinsippet bak det gjennomførte beviset, krever en konvertering fra et monofunksjonelt register til et multifunksjonelt register, som vil si at elevene må evne å forklare hvordan beviset er gyldig, basert på deres skriftlige utregninger. I likhet med konverteringen nevnt ovenfor, var også denne transformasjonen utfordrende for elevene. Vi har derfor valgt å kategorisere disse overgangene mellom ulike representasjoner som en motvindsfaktor, selv om de muligens også kan ha ført til en dypere forståelse av målkunnskapen.

7.2.3 Algebraiske forkunnskaper og erfaring med bevis

Oppgave 3b gikk ut på å gjøre induksjonssteget, som krevde algebraiske ferdigheter. Etter at gruppene hadde fått oppklart av læreren at det ikke holdt å vise at formlene stemte for én verdi (naiv empirisme), skjønte Gruppe 1, 2 og 4 at de måtte prøve å manipulere uttrykkene for å få det ønskede uttrykket for $F(n)$. Gruppe 1 prøvde først å utføre algebraiske operasjoner på likningene for å få dem til å bli like. I Sitat 7.11 kan vi se et utdrag fra denne prosessen, og i Figur 7.8 kan vi se den tilhørende besvarelsen. Vi ser her at operasjonene de utfører på likningene ikke er lovlige, for eksempel fra linjen markert i blått til linjen markert i grønt. De deler på 2 på begge sider av likhetstegnet, og i samme prosess flyttes eksponenten på høyre side ned, og $F(n-1)$ på venstre side blir til $F(n)$. Gruppa holdt på ganske lenge med å prøve seg frem med slike manipulasjoner, og ble på den måten sittende fast i en sirkel av prøving og feiling. Vi har kategorisert manglende algebraiske forkunnskaper som en motvindsfaktor, fordi vi opplevde at elevene brukte mye tid på å utføre ulovlige regneoperasjoner, som hindret dem i å komme videre med beviset. Dersom elevene hadde hatt mer solide forkunnskaper, ville de visst at det ikke går an å flytte en eksponent ned på den måten. Denne prosessen kan minne litt om en gjettelek, siden de prøvde seg frem uten å stille seg kritiske til om manipuleringene deres var lovlige eller ikke. På den ene siden tyder dette på en instrumentell forståelse av regneoperasjoner, fordi de prøver noe som ligner på det de har gjort før. Kanskje har elevene jobbet med logaritmer, hvor de har flyttet ned eksponenten på lovlig vis, og dermed husker at dette «trekket» er lovlig når man jobber med potenser. På den andre siden ser vi også verdien i at elevene ukritisk prøver seg frem med algebraisk manipulasjon. Å utforske egenskapene til brøk- og likhetstegnet gjennom algebraisk manipulasjon, kan bidra til at elevene forstår hvorfor reglene er som de er, og ikke tar valg basert på memorerte handlinger (Bell et al., 1993). Vi kan se en sammenheng mellom våre resultater og resultater fra tidligere forskning, fra blant annet Baker (1996), som viser at algebraiske ferdigheter er en vanlig utfordring i induksjonsbevis.

Ida: Okei vår formel er denne ... også har vi denne. Okei. $2 \cdot F(n-1)$ ... det her er vertfall $n-1$ ... det har vi der ... også har vi 2 her ... hva står her ... -1. Så her har vi $+1$ istedenfor -1. Så det er jo på en måte. Går det an å flytte og bytte og se om vi får samme greia? Eller?

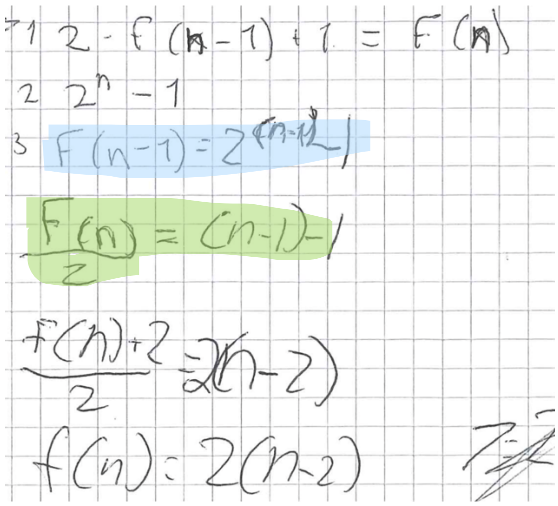
Jonas: Vi kan prøve.

...

Jonas: Vi kan dele på 2 ... eller du må dele på 2 hvis du skal flytte den. Da blir det $n-1$ ... minus 2 over 1.

Sitat 7.11, Gruppe 1

Figur 7.8 *Gruppe 1 sin besvarelse på Oppgave 2b.*



Merknad. Fra den blå linjen til den grønne linjen i figuren gjøres det en ukorrekt matematisk operasjon.

Lite erfaring med bevis blir naturligvis kategorisert som en motvindsfaktor i denne undervisningssituasjonen. På et 1T-nivå har ikke elevene jobbet mye med bevis før, og de har aldri hørt om induksjonsbevis. En av utfordringene vi observerte gjennom opplegget, var at elevene manglet erfaring og kunnskap om validiteten i bevis. Som nevnt tidligere, gjorde alle gruppene først et naivt empirisk forsøk da de skulle vise induksjonssteget, og tenkte at de hadde utført et gyldig bevis. Læreren måtte veilede alle gruppene til å vise påstanden for et vilkårlig tall, i stedet for en kjent verdi. Selv om dette var en utfordring med opplegget, vil vi også understreke at dette samsvarte i stor grad med våre forventinger. Å prøve ut en induksjonsbevisoppgave i en 1T-klasse var et eksperiment, fordi vi ga elevene en litt vanskeligere oppgave enn det som er forventet at de skal klare.

8 Oppsummering av funn

Hensikten med denne studien har vært å undersøke hvordan en oppgave med en praktisk tilnærming, utviklet av oss, kan føre til læring av induksjonsbevis. Ved å studere datamaterialet har vi forsøkt å finne svar på følgende problemstilling: *Hvordan kan en TDS-basert undervisningssituasjon, knyttet til Hanois tårn, fungere som introduksjon til induksjonsbevis i en 1T-klasse?* I lys av Balacheff (1988) sine ulike typer bevis, viser datamaterialet at samtlige av gruppene først prøvde å bevise påstanden med naiv empirisme. Videre funn viser at da læreren oppmuntret elevene til å beskrive sine tankeprosesser, nærmet besvarelsene seg det Balacheff definerer som et tankeeksperiment. Elevenes ferdigheter til å utføre beviset ble analysert gjennom et egenutviklet flytskjema, inspirert av Ernest (1984). Hovedfunnene på dette området var at alle gruppene hadde ferdigheter til å utføre grunnsteget, og at manglende algebraiske ferdigheter gjorde induksjonssteget mer utfordrende. Resultatene våre tydeliggjorde at algebraiske ferdigheter i denne undervisningssituasjonen var en viktig forutsetning i arbeid med bevis. Dersom elevene blir mer øvet i å utføre algebraiske regneoperasjoner, vil dette sannsynligvis føre til at de i større grad kan mestre flere kognitivt krevende oppgaver, i både bevis og andre matematiske områder. En annen viktig observasjon var at halvparten av gruppene viste at de evnet å forklare hvordan de to stegene utgjorde et bevis. De to resterende gruppene fikk ikke vist denne kompetansen, men det er mulig at de forstod mer av induksjonsprinsippet da dette ble gjennomgått i institusjonaliseringen. Undervisningsoppleggets design ble også analysert basert på gjennomføringen i klasserommet. Vi drøftet hvordan opplegget fungerte ved å definere med- og motvindsfaktorer, som ble presentert og diskutert i forrige kapittel. Vi identifiserte fire medvindsfaktorer: adidaktiske elementer, samarbeid i grupper, reguleringer og institusjonalisering, og tre motvindsfaktorer: begreps- og notasjonsforståelse, overgangen mellom ulike representasjoner, algebraiske ferdigheter og erfaring med bevis.

9 Diskusjon

I dette kapittelet vil vi legge frem noen didaktiske refleksjoner rundt funnene i studien, som tar for seg både induksjonsbevisets plass i pensum og bruken av TDS som didaktisk verktøy i undervisningsplanlegging. I tillegg vil vi sammenligne våre resultater med funn i tidligere forsking. Til slutt vil vi drøfte sentrale styrker og begrensinger ved studien.

9.1 Didaktisk refleksjoner

I denne studien har vi svart på problemstillingen: *Hvordan kan et TDS-basert undervisningsopplegg, knyttet til Hanois tårn, fungere som introduksjon til induksjonsbevis?* Vi utfordret en 1T-klasse med en oppgave hvor den matematiske målkunnskapen var ukjent. Vi mener det var en utfordrende oppgave, fordi den krevde at elevene anvendte matematiske forkunnskaper på en ny måte, samt logisk tenking og resonnering. En annen indikasjon på at denne oppgaven kan oppleves som krevende for denne elevgruppen, er at induksjonsbeviset ofte ikke blir undervist før i R2-faget. Som nevnt tidligere, underbygger også forskningslitteraturen at dette er et utfordrende tema for mange elever og studenter. Til tross for dette, tyder våre resultater på at oppgaven var overkommelig for 1T-klassen. Hovedmålet med undervisningsopplegget var å øke elevenes forståelse av induksjonsprinsippet, altså å forstå hvorfor grunnsteget og induksjonssteget til sammen danner et gyldig bevis. Andre aspekter ved opplegget, som føring av bevis og korrekt bruk av matematisk språk, har vi ansett som mindre viktig. Slik som Hanna (2000) påpeker, brukes bevis i skolen først og fremst for å fremme forståelse.

9.1.1 Bevis og induksjonsbevis i læreplanen

Arbeid med bevis er med på å utvikle elevenes logiske tenking, resonnering og analytiske ferdigheter (Hanna, 2000). I bevisoppgaver er elevene i stor grad nødt til å reflektere over handlingene de gjør og konklusjonene de tar, slik som de gjorde i den siste deloppgaven i undervisningssituasjonen. Ved å introdusere bevis tidligere i skoleløpet, får elevene muligheten til å utvikle sine kognitive og logiske ferdigheter på et tidligere tidspunkt, som vi tror vil føre til at de får bedre tid til å bygge opp en solid forståelse. Basert på egne og medstudenters erfaringer, tror vi at å øke vektleggingen av bevis i matematikkundervisningen på videgående, vil føre til en lettere overgang for de elevene som ønsker å studere matematikk på et høyere nivå. Videre mener vi også at en tidligere introduksjon av bevis kan bidra til å motvirke det vanlige fenomenet i matematikkundervisningen, nemlig "memorering uten forståelse", som defineres av Skemp (1976) som instrumentell forståelse. Mange elever lærer ofte å pugge matematiske regler og prosedyrer, uten å forstå hvorfor de fungerer eller hvordan de oppstår. Arbeid med bevis kan bryte denne syklusen ved å oppmuntre elevene til å oppnå en mer relasjonell forståelse, og dermed bygge et solid fundament for videre læring. Vi tror også at tidligere eksponering for bevis kan bidra til å øke elevenes interesse og engasjement i matematikk. Bevisføring er en utfordrende, men givende aktivitet som kan stimulere elevenes nysgjerrighet og utforskertrang.

I den gamle læreplanen (LK06) var et av kompetansemålene i R2-faget direkte relatert til induksjonsbevis, og lød som følger: eleven skal kunne gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis. I dagens læreplan er kompetansemålene imidlertid mer åpne, og vi finner få spesifikke læringsmål, slik som tidligere. Som beskrevet i innledningen, finner vi nå kompetansemål om bevis i både 1T og R2, i tillegg til kjerneelementene resonering og argumentasjon som gjelder for alle matematikkfag. Siden det ikke er spesifisert hva slags type bevis elevene skal kunne, er det nå opp til læreren å bestemme hvilke bevisoppgaver som skal inkluderes i pensum. I denne studien har vi undersøkt både de teoretiske og didaktiske aspektene ved induksjonsbeviset, og vi har funnet ut at induksjonsbeviset har et stort potensial i matematikkundervisningen. I vår undervisningssituasjon har vi sett at induksjonsbevis kan knyttes til flere temaer, som algebra, rekursjon og resonnering. Vi har også sett i *a priori*-analysen at det finnes flere interessante observasjoner knyttet til Hanois tårn, som for eksempel koblingen til det binære tallsystemet. I en undervisningssammenheng kan dette igjen overføres til oppgaver med programmering, som også er svært relevant i dagens læreplan. Induksjonsbevisoppgaver gir også elevene mulighet til å reflektere over de naturlige tallene, og hvordan disse skiller seg fra de reelle tallene. Med andre ord har induksjonsbeviset et stort faglig og didaktisk potensial, fordi de kan utfordre elevene på mange faglige områder.

Vi vil også understreke at vi tror at valg av undervisningsdesign spiller en avgjørende rolle for at bevisoppgaver skal være nyttig. Klassiske oppgaver med induksjonsbevis, som starter med «bevis ved induksjons at ...» tror vi kan ha en lav læringsverdi for mange elever, fordi de slipper unna med å lære seg en oppskrift, uten å reflektere over hvorfor det de gjør er riktig. I slike tilfeller vil det være fare for at elevene kun tilegner seg instrumentell forståelse av målkunnskapen. I likhet med Ron og Dreyfus (2004) tror vi at det å bruke modeller, som Hanois tårn, kan være effektivt å inkludere i undervisningen av matematisk induksjon. Ved hjelp av modeller kan elevene knytte den teoretiske kunnskapen de skal lære til noe de kan manipulere fysisk og visuelt se for seg. Å gi elevene en kontekst når de arbeider med teoretisk vanskelige læringsmål, mener vi kan være svært nyttig, fordi elevene da kan forstå hva kunnskapen kan brukes til.

9.1.2 TDS som didaktisk verktøy

I løpet av denne studien har vi reflekter over bruken av TDS som didaktisk verktøy i matematikkundervisning. Vi ser en stor styrke ved TDS-basert undervisning, nemlig den epistemologiske og didaktiske analysen, som ligger til grunn for utformingen av oppgaver. Ved å gjøre en grundig analyse av målkunnskapens natur, opprinnelse og funksjon, samt å studere tidligere forskning, har læreren mange muligheter når det gjelder design og utvikling av oppgaver. Den forberedende analysen kan gjøre læreren mer øvet i å forutse hvilke retninger en læringssituasjon kan ta, og dermed være forberedt på elevenes varierte løsninger på oppgavene og eventuelle utfordringer som kan oppstå. En annen styrke ved TDS er at det tilbyr en systematisk måte å designe undervisningen på, og muligheten til å validere opplegget etter å ha prøvd det ut i praksis. Ved å sammenligne *a priori*- og *a posteriori*-analysen, kan læreren få innsikt i hva som fungerte bra og hva som burde videreutvikles til neste gang.

Vi mener at måten en TDS-basert undervisningssituasjon er bygget opp på, i stor grad samsvarer med dagens læreplan i matematikk. Oppgavedesignet gir elevene muligheten til å utforske den matematiske kunnskapen på egenhånd, som kan føre til en bedre forståelse og økt mestringsfølelse i matematikkfaget. Strømskag (2020b) understreker i sitt forskningsprosjekt at TDS gir elevene muligheten til å lære gjennom å utforske selv og til å ta kontroll over sin egen læring. Vi mener at TDS er et svært nyttig didaktisk verktøy som alle matematikklærere burde ha, siden rammeverket bidrar til å øke bevisstheten om de didaktiske valgene vi tar i undervisningsplanleggingen, og hvordan de kan påvirke læringen til elevene.

TDS-basert undervisning inkluderer ofte samarbeid og oppfordrer til matematiske samtaler, noe som også vektlegges i læreplanen. Gjennom dialog kan elevene utveksle ideer og forklare sine resonnementer, og på denne måten utvikle en dypere forståelse for matematiske konsepter. Muntlige ferdigheter er en av de grunnleggende ferdighetene som er inkludert i læreplanen for videregående matematikk. Dette innebærer at elevene skal være i stand til å kommunisere ideer og diskutere matematiske problemer, strategier og løsninger med andre (Utdanningsdirektoratet, 2020). Ved å samarbeide i grupper kan elevene øve på disse ferdighetene og få stimulert behovet for matematiske diskusjoner og samtaler. På denne måten kan TDS brukes til å variere undervisningsmetoder, hvor elevene i samspill med hverandre kan komme frem til løsninger.

Det grundige forarbeidet som kreves for TDS-basert undervisning kan imidlertid være tidkrevende i en travel lærerhverdag, og man har ikke kapasitet til å gjøre en forberedende analyse før enhver undervisningstime. Dette betyr derimot ikke at man aldri har tid til å prøve det ut i praksis. Vi tror at det er overkommelig for matematikklærere å bruke TDS som didaktisk verktøy en gang iblant. Når man først har utviklet et opplegg, er det lett å bruke det igjen og gjøre små justeringer basert på erfaringene fra tidligere undervisning. Dette gjør opplegget stadig bedre for hver gang det blir brukt.

9.1.3 Refleksjoner knyttet til læringsteori

Hensikten med den designede undervisningssituasjonen var at elevene skulle delta i en kollektiv utforskning, hvor de aktivt skulle konstruere ny kunnskap gjennom samspill med hverandre. Målet var å oppnå dette ved å stimulere elevene til å aktivt bygge videre på hverandres ideer, og engasjere seg i praktisk arbeid med Hanois tårn. I trå med TDS illustrerer dette en kombinasjon av konstruktivistisk og sosiokulturelt læringssyn, hvor elevene ikke passivt tar til seg kunnskap, men aktivt bygger sin egen forståelse gjennom interaksjon med omgivelsene og andre mennesker. Dette perspektivet støttes av både Piagets (1976) definisjon av operasjonell kunnskap og Sfard (1991) sin teori om strukturell oppfatning. Vi ønsket at elevene skulle tilegne seg en strukturell oppfatning av målkunnskapen, slik at de ikke bare lærte reglene og fremgangsmåtene for induksjonsbevis, men også kunne gjenkjenne selve ideen bak bevismetoden. Gjennom å realisere dette kunne elevenes operasjonelle kunnskap om induksjonsbevis styrkes, slik at de ble i stand til å anvende målkunnskapen i nye og ukjente situasjoner. Basert på funnene i datamaterialet antar vi at flere av elevene, gjennom aktiviteten med Hanois tårn og samspillet med hverandre, konstruerte sin egen rasjonelle forståelse av målkunnskapen. Det er imidlertid viktig å presisere at vi ikke har gjennomført noen form for tester, som vurderer hvilken kunnskap elevene tilegnet seg under realiseringen. Antagelsene er derfor basert på teorien vi anvendte i utviklingen av undervisningsopplegget, samt vår tolkning av datamaterialet.

9.2 Sammenligning med tidligere forskning

9.2.1 Utfordringer relatert til induksjonsbevis

Basert på vår didaktiske analyse, hadde vi noen forventinger om hvordan elevene ville arbeide med oppgaven, samt hvilke deler som kunne bli utfordrende for dem. I dette kapittelet vil vi sammenligne og drøfte våre resultater i lys av tidligere forskning. Resultatene våre viste tydelig at utfordringer knyttet til algebraiske ferdigheter i stor grad samsvarer med tidligere forskning. Som Davis et al. (2009) og Baker (1996) også påpekte, så vi at manglende algebraiske ferdigheter, spesielt i overgangen fra hypotesen til induksjonssteget, var en hindrende faktor. Vi har sett at det var utfordrende for elevene å utføre algebraisk substitusjon og algebraiske manipulasjon for å få det ønskede uttrykket for $F(n)$. Mangel på algebraiske ferdigheter ble også definert som en motvind i forrige kapittel, fordi det fungerte som en hindring på veien mot målkunnskapen. En annen forventing vi hadde til oppgaveløsningen, var at elevene ville ha flere konseptuelle utfordringer. Som Ron og Dreyfus (2004) påpeker, kan overgangen i implikasjonspåstanden, som i vårt tilfelle vil si overgangen fra $F(n-1)$ til $F(n)$, oppleves kontraintuitivt for elevene, fordi det innebærer å bevise en påstand basert på en antakelse som man ikke vet om stemmer. I motsetning til hva som fremkommer i denne forskningslitteraturen, viser våre resultater at elevene ikke stilte spørsmålstegn ved denne overgangen. En mulig grunn til det kan være at elevene ikke er vant til å jobbe med bevis, og derfor ikke har en klar forståelse av begrepet antagelse. Elevene har sikkert hørt ordene antagelse og hypotese før, men var muligens ikke kjent med hva disse konseptene faktisk innebærer. For å kjenne på det kontraintuitive ved å bevise noe basert på en usann antagelse, er det kanskje en forutsetning å ha litt erfaring med bevisoppgaver. Vi antar at misoppfatninger rundt et matematisk tema oftest oppstår over tid, og nødvendigvis ikke i en introduksjonstime.

I etterkant av datainnsamlingen har vi reflektert over en mangel ved opplegget vårt. Vi har lagt merke til at oppgaveteksten til Oppgave 3b ikke presiserer at n er et vilkårlig tall, og i stedet kun inneholder informasjonen «Anta at $F(n-1) = 2^{n-1} - 1$». Dersom elevene tolket denne antagelsen som om den gjaldt for alle naturlige tall, og ikke én vilkårlig n, ville det de antok vært det samme som det de skulle bevise. Dette fenomenet, kjent som sirkulær resonnering, er en vanlig misoppfatning ved induksjonsbevis (Movshovitz-Hadar, 1993). Som beskrevet i Movshovitz-Hadar (1993), om elevers usikkerheter knyttet til induksjonsbevis, kan denne misoppfatningen skape en kognitiv konflikt og føre til at elevene utfører beviset uten å forstå hvorfor det er gyldig. Siden vi ikke har full tilgang på elevenes tankeprosesser mens de jobbet med oppgaven, er det vanskelig å si om denne misoppfatningen fant sted eller ikke. Vi tror uansett at misoppfatninger knyttet til overgangen fra antagelsen til beviset er et viktig aspekt ved induksjonsbevis, som læreren må ta hensyn til i planleggingen av undervisning. Vi tror det kan være en styrke å la elevene utforske og bli kjent med begrepene antagelse og bevis tidligere i skoleløpet, slik at de er bedre forberedt når problemene de skal løse blir mer komplekse senere i løpet. En mulig forklaring på at ingen av elevene i vår studie uttrykte forvirring rundt disse begrepene, er at de ikke var trygge nok på betydningen av dem, på grunn av manglende erfaring. Dette kan minne litt om den velkjente Dunning-Kruger effekten[3], som i dette tilfellet vil si at elevenes manglende kunnskap om bevis hindrer dem i å identifisere hva de er usikre på (Yani et al., 2019).

Siden undervisningssituasjonen vi har designet er en introduksjonsøkt til et nytt tema, mener vi det var en styrke å velge ut noen få viktige elementer. Da vi i Oppgave 3c ba elevene om å diskutere hvorfor beviset var gyldig, var det spesielt forståelse av dominoeffekten vi la vekt på. Det vil si at vi la vekt på hvorfor grunnsteget og induksjonssteget til sammen utgjorde et gyldig bevis. I Sitatene 6.11, 6.12 og 6.20, ble det i stor grad tatt opp med elevene, gjennom både diskusjonsoppgaven og

[3] Dunning-Kruger effekten beskriver fenomenet hvor folk med lite kompetanse/ lave ferdigheter på et område vurderer seg selv urealistisk positivt. Effekten forklarer at lav kompetanse ledsages av en sviktende ferdighet i å innse egen inkompetanse (Svartdal, 2022).

institusjonaliseringen, hvorfor grunnsteget var avgjørende for bevisets gyldighet. Målet med dette fokuset var å forhindre den vanlige misoppfatningen som er knyttet til forsømmelse av grunnsteget, som fører til at elevene utfører et bevis uten å vite hvorfor det stemmer (Palla et al., 2012). Dominoeffekten er selve prinsippet bak et induksjonsbevis, og vi hevder at dette er det første elevene bør lære. En annen svært viktig egenskap ved induksjonsbeviset, er at det kun brukes til å bevise påstander som er sanne for alle naturlige tall. Denne egenskapen ble nevnt i den forberedende analysen og reflektert over i *a priori*-analysen. I etterkant av realiseringen har vi innsett at denne egenskapen ikke kom tydelig frem i undervisningsopplegget. Siden Hanois tårn alltid består av et positivt heltall ringer, ble ikke dette prinsippet problematisert, fordi elevene kun jobbet med en gyldig tallmengde. Vi mener denne egenskapen er en sentral del av å forstå induksjonsbevis. Selv om det ble nevnt i institusjonaliseringen at metoden kun gjelder naturlige tall, anser vi dette som et forbedringspotensial ved opplegget. Som Hanna (2000) påpeker har bevis liten verdi for en matematiker før det fører til en dypere forståelse av et konsept. Vi tror derfor at elevene får mest læring gjennom å først forstå hvorfor beviset fungerer, og deretter trene på å utføre dem med ulike algebraiske verktøy. Vi mener at ved å begrense læringsmålene til det vi betrakter som det mest sentrale i induksjonsbeviset, nemlig dominoeffekten, unngikk vi at elevene ble sittende igjen som store spørsmåltegn, som ofte kan være tilfellet når det undervises i dette temaet.

9.2.2 Rekursjonsbegrepet

Basert på både pilotundersøkelsen og tidligere forskning, forventet vi at elevene ville møte utfordringer når de skulle løse oppgavene knyttet til rekursjon i løpet av den adidaktiske situasjonen. Under pilotundersøkelsen var vi nødt til å bruke eksempler for å forklare rekursjonsbegrepet for begge gruppene, og som beskrevet i Kapittel 2.4, har tidligere forskning vist at dette kan være et vanskelig konsept for elever å forstå og erkjenne (Haberman & Averbuch, 2002; Kilpatrick, 1985; Soorimurthi, 2001). Imidlertid viste det seg under realiseringen at ingen av gruppene stilte spørsmål, hverken til læreren eller hverandre, knyttet til begrepet rekursjon. Dataene indikerte dermed at elevene ikke hadde betydelige problemer med å bruke en tidligere funksjonsverdi i uttrykket for den neste. Som vist i Sitat 7.2 og 7.3, brukte to av gruppene det fysiske tårnet, som en visuell representasjon av rekursjon, for å komme frem til den rekursive formelen. Dette støtter funn fra George (2000) som hevder at visuelle representasjoner kan hjelpe elevene med å forstå konseptet, ved at elevene i større grad betrakter rekursjon som en kopimodell. Som nevnt i Kapittel 2.5.1, understreket Sooriamurthi (2001) at funksjonell abstraksjon også er viktig for elevers forståelse av rekursjon. Når elevene skulle formulere den rekursive formelen, endret fokuset seg fra hvordan funksjonen fant en verdi, til hvilken verdi den fant. På denne måten anvendte elevene funksjonell abstraksjon for å komme frem til den ønskede formelen. På grunnlag av tidligere forskning og våre egne funn, konkluderer vi med at bruken av Hanois tårn som visuell representasjon, sammen med konkrete eksempler som Oppgave 2c (finne $F(4)$ uttrykt med $F(3)$), var avgjørende for at arbeidet med rekursjon ikke ble definert som en motvind i den designede undervisningssituasjonen.

9.3 Styrker og bergensninger ved studien

I dette kapittelet vil vi presentere og diskutere de viktigste styrkene og begrensningene ved studien. Som nevnt innledningsvis er resonnering og argumentasjon kjerneelementer i dagens læreplan for matematikk. Studien vår har tatt for seg hvordan man kan introdusere induksjonsbevis ved å bruke Hanois tårn som verktøy, med mål om at elevene skulle oppnå en relasjonell forståelse av induksjonsbeviset. De siste årene har det vært mye fokus på at elevene skal lære gjennom utforskning, og få muligheten til å være aktive deltakere i sin egen læring. Dette konseptet, kjent som konstruktivistisk læring, har blitt en populær tilnærming i utdanning. Vi mener derfor at en styrke ved vår studie er at den tar opp en relevant problemstilling, som kan anvendes både i praksis og i videre forskning. Med dette mener vi at resultatene fra studien, som inkluderer et velutviklet undervisningsdesign samt funn på at elevene tilegnet seg ny kunnskap, kan brukes og utvikles videre i klasserommet.

Vi ser det teoretiske rammeverket TDS som en sentral styrke ved studien. Ved å bruke dette verktøyet har vi fått økt kunnskap om induksjonsbeviset, både epistemologisk og didaktisk. I tillegg har det veiledet oss i utviklingen av undervisningsopplegget, som hele studien baserer seg på. Den forberedende analysen av målkunnskapen har gitt oss innsikt i ulike aspekter ved bevis og resonnering, og i hvilke ferdigheter som kreves for et gyldig induksjonsbevis. Rammeverket har også gitt oss som fremtidige lærere, de verktøyene vi trenger for å implementere, analysere og evaluere undervisningssituasjonen, og kan følgelig sees på som en ressurs for utvikling innenfor vår egen undervisningspraksis.

Datamaterialet vårt ble analysert gjennom tre ulike dimensjoner, og en forutsetning for dette er at vi har vært to personer som har samarbeidet. Vi analyserte elevenes bevisnivå gjennom en modell tilpasset etter Balacheff (1988), elevenes algebraiske og resonnerende ferdigheter gjennom en modell tilpasset etter Ernest (1984) og vi analyserte selve undervisningsopplegget gjennom våre egnedefinerte med- og motvindskategorier. Sammenlignet med andre masteroppgaver om TDS-basert undervisning, har vi gjennomført en analyse som er sterkt forankret i teori. En bred analyse som inkluderer mange aspekter, gjør svaret på problemstillingen mer troverdig. Våre individuelle analyser av dataene viste en betydelig grad av samsvar i resultatene, noe som understreker en høy grad av interrater-reliabilitet i studien. Hvis vi kun hadde vært én forsker, ville vi ikke hatt muligheten til å undersøke denne reliabiliteten på samme måte. Vi mener at samarbeidet vårt har vært en styrke gjennom hele studiet, fordi det har løftet kvaliteten på innholdet. Det å alltid være to individer med ulike meninger og perspektiver har vært en kvalitetssikkerhet gjennom hele prosjektet, spesielt i utviklingen av undervisningsopplegget og i analysen. Muligheten vi har fått til å diskutere idéer og usikkerheter underveis, har vært utelukkende positivt for resultatet av denne masteroppgaven.

Ettersom vår studie er begrenset til én enkelt klasse, kan resultatene i begrenset grad generaliseres til andre kontekster, som vi anser som en svakhet ved studien. Selv om studiens funn kun gjelder for en spesifikk gruppe av elever, har de likevel relevans for å besvare forskningsspørsmålet vårt knyttet til effekten av det designede undervisningsopplegget om induksjonsbevis. Det begrensede forskningsprosjektet gir oss muligheten til å teste undervisningsopplegget på flere klasser i fremtiden, samt utforske mulige forbedringer. Som fremtidige lærere kan dette hjelpe oss å videreutvikle vår undervisningspraksis og bidra til å forbedre elevenes læring.

En annen begrensning i forskningsprosjekt vårt var at kun to av de fire gruppene gjennomførte diskusjonsoppgaven, hvor lærerenstilte elevene spørsmål om bevisets gyldighet. Målet var å få innsikt i elevenes forståelse av prinsippet bak induksjonsbeviset. Siden to av gruppene ikke kom i mål med den siste oppgaven, førte det til at diskusjonsoppgaven på disse gruppene uteble. Det var denne oppgaven som i størst grad målte om elevene hadde tilegnet seg målkunnskapen, og fører derfor til at det er vanskelig å konkludere med hvilken kunnskap de to gruppene, som ikke gjennomførte denne oppgaven, satt igjen med. Selv om prinsippet ble forklart i den avsluttende fasen, institusjonaliseringen, kan vi ikke være sikre på hva elevene faktisk lærte. For å håndtere denne begrensningen, ville det vært interessant å gi elevene en annen bevisoppgave som anvender induksjon etter realisering av undervisningsopplegget. Deretter kunne vi undersøkt i hvilken grad elevene klarte å anvende kunnskapen i en ny situasjon, som er en god måte å teste om elevene har oppnådd relasjonell forståelse.

10 Avsluttende refleksjoner

Denne studien har tatt for seg et eksperiment hvor vi har gjennomført en egen designet undervisningssituasjon knyttet til induksjonsbevis i en 1T-klasse. Resultatene fra studien kan være verdifulle for andre lærere som søker inspirasjon og innsikt i hvordan man kan bruke både TDS og Hanois tårn i undervisning om induksjonsbevis og rekursjon. Vi har sett at det finnes andre sammenhenger mellom Hanois tårn og matematikk, som blant annet det binære tallsystemet og rekursjon, som det kunne vært interessant å la elevene utforske videre. Dette er også temaer som er nært knyttet til programmering, som gir mulighet for at opplegget kan bli et større, tverrfaglig prosjekt. Vi mener at opplegget har et stort didaktisk potensial, og at det kanskje kan vekke interessen hos lærere til å prøve ut alternative metoder i undervisning av teoretiske læringsmål. I denne oppgaven har vi lagt frem forskning som har undersøkt hvordan man kan introdusere elever for induksjonsbevis, og hvilke misoppfatninger som kan oppstå. Det hadde vært interessant å studere hvordan man kan anvende TDS til å øke elevers forståelse om bevis generelt, og funn fra vår studie kan på den måten bidra til videre forskning på dette feltet.

For oss har dette masterprosjektet vært svært lærerikt på flere plan. Det har blant annet gitt oss ny kunnskap og erfaring i å forske i klasserommet, ved å observere og analysere elevene som arbeider med en oppgave. I en vanlig lærerhverdag er det umulig å få med seg alt elevene sier og gjør, som betyr at verdifulle observasjoner av elevene kan utebli for læreren. En lærdom vi tar med oss fra denne studien er at bruk av lydopptak, for å få innsikt i elevenes tankeprosesser, kan være svært nyttig. Som fremtidige lærere er dette et verktøy vi ser for oss at vi kommer til å bruke, både for å avdekke misoppfatninger hos elevene og i formativ vurdering. Gjennom arbeidet med studien har vi også fått innsikt i hvordan en grundig analyse av målkunnskapen, både fra et epistemologisk og didaktisk perspektiv, kan fungere som et didaktisk verktøy for å legge til rette for elevenes læring. Gjennom den epistemologiske analysen styrket vi vår egen trygghet og kompetanse i målkunnskapen, og i den didaktiske analysen fikk innsikt i de mulige utfordringene elevene kunne møte på, og hvordan vi kunne tilpasse undervisningen basert på deres respons. Til slutt vil vi trekke frem samarbeid som en viktig erfaring vi tar med oss fra dette prosjektet. I læreryrket står man ikke alene, men er en del av et profesjonsfelleskap som skal dele kunnskap og lære av hverandre. Etter denne masteroppgaven sitter vi igjen med en oppfatning om at et godt faglig samarbeid mellom lærerne kan øke kvaliteten på undervisningen, som er noe vi tar med oss inn i læreryrket.

Referanser

Alnes, J. H. (2023, 20.januar). Deduktiv metode. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/.versionview/1738271

Artigue, M., Haspekian, M., & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 47–65). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_4

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research. The case of didactical engineering. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (s. 467–496). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_17

Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: Didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics, 9(4)*, 429–438.

Baker, J. D. (1996). *Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction* (ED 396 931). Education Resources Information Center. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED396931.pdf

Balacheff, N. (1988a). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–230). Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1988b). A study of students' proving processes at the junior high school level. Proceeding form the *2th* UCSMP international conference on mathematics education. Chicago: NCTM.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. I A. Watson & M. Othani (Red.), *Task Design In Mathematics Education* (s. 249–272). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Bell, A., Macgreggor, M. & Stacey, K. (1993). Algebraic manipulations: actions, rules rationales. *Contexts on mathematical education: Proceeding from the 16th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Astralasia (*s. 101–109). Brisbane: MERGA.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals*. Longman.

Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* John Whiley & Sons.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). Matematikk 1T (4. utgave). Aschehoug.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V.

Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Cajori, F. (1918). Origin of the Name "Mathematical Induction". *The American Mathematical Monthly*, *25*(5), 197–201. https://doi.org/10.1080/00029890.1918.11998417

Darlington, E. (2013). The use of Bloom's taxonomy in advanced mathematics questions. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *33*(1), 7–12.

Davis, M., Grassl, R., Hauk, S., Mendoza-Spencer, B., & Yestness, N. (2009). Learning proof by mathematical induction. I M. Zandieh (Red.), *Proceedings of the 12th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, 26. februar-1. mars 2009.* North Carolina: SIGMAA on RUME.

Dubinsky, E. (1989). Teaching mathematical induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, *8*(3), 285–304.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ernest, P. (1982). Mathematical induction: A recurring theme. *The Mathematical Gazette*, *66*(436), 120–125.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173–189. https://doi.org/10.1007/BF00305895

Fendel, D. & Resek, D. (1990). *Foundations of higher mathematics: exploration and proof*. Pearson.

George, C. E. (2000). Experiences with novices: The importance of graphical representations in supporting mental mode. *Psychology of Programming Interest Group*, *12*, 33–44.

Gwet, K. (2001). *Handbook of inter-rater reliability: The definitive guide to measuring the extent of agreement among rates* (5. utgave). Advanced Analytics, LLC.

Haberman, B., & Averbuch, H. (2002). The case of base cases: Why are they so difficult to recognize? Student difficulties with recursion. *Proceedings of the 7th annual conference on innovation and technology in computer science education* (s. 84–88). Aarhus: ITICSE. https://doi.org/10.1145/544414.544441

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*, 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM mathematic education*, *40*, 329–336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4

Hinz, A. M., Klavžar, S. & Petr, C. (2013). *The tower of Hanoi-myths and maths* (2. utgave). Birkhäuser.

Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 1–26. https://doi.org/10.1007/BF00354880

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i Matematikk T (MAT09-01)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat09-01/kompetansemaal-og-vurdering/kv42?lang=nob

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning.* Thousand Oaks: SAGE Publications. https://ebookcentral.proquest.com/lib/ntnu/detail.action?docID=6358633

Lin, F., Yan, K., Lo, J., Tsamir, P., Triosh, D. & Gabriel Stylianides (2012). Teachers's Professional Learning of Teaching Proof and Proving. I G. Hanna & M. de Villiers (Red). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study (*s. 327–346). Springer.

Lorentzen, Hole, A., & Lindstrøm, T. L. (2003). *Kalkulus - med én og flere variable*. Universitetsforlaget.

Lyngnes, Rismark, M., & Keeping, D. (2020). *Didaktisk arbeid* (4. utgave). Gyldendal.

Merrotsy, P. (2015). The tower of Hanoi and inductive logic. *Australian Senior Mathematics Journal*, *29*(1), 16–24.

Merzbach, C. U. & Boyer B. C. (2011). *A history of mathematics* (3. utgave). Wiley.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*(3), 253–268.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studie: Den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-på-god-læring-og-undervisning-i-matematikk

Palla, M., Potari, D., & Spyrou, P. (2012). Secondary school students' understanding of mathematical induction: structural characteristics and the process of proof construction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1023–1045. https://doi.org/10.1007/s10763-011-9311-2

Piaget, J. (1976). Piaget's theory. I B. Inhelder & H. H. Chipman (Red.), *Piaget and His School* (s. 11–23). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46323-5_2

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for materstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm AS.

Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings* (4. utgave). Wiley.

Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The Use of Models in Teaching Proof by Mathematical Induction. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 113–120.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20–26.

Skott, J., Hansen, H. & Jess, K. (2008). *Delta: fagdidaktik* (1. utgave). Forlaget Samfundslitteratur.

Sooriamurthi, R. (2001). Problems in comprehending recursion and suggested solutions. *ACM SIGCSE Bulletin*, *33*(3), 25–28. https://doi.org/10.1145/507758.377458

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction, *Educational Studies in Mathematics, 61,* 133–162. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Strømskag, H. (2020a). Didaktisk ingeniørvirksomhet i matematikk: Multiplikasjon som modell for situasjoner på 3.trinn. I V. Nilssen & S.-M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 81–119). Fagbokforlaget.

Strømskag, H. (2020b). Teorien for didaktiske situasjoner i matematikk: Et systemisk rammeverk for å utvikle og studere matematikkundervisning. I V. Nilssen & S.-M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 25–80). Fagbokforlaget.

Strømskag, H. (2017). A methodology for instructional design in mathematics - with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM Mathematics Education, 49*, 909–921. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0882-4

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 145–166. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z

Stylianides, G. J., Sandefur, J. & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. *The Journal of Mathematical Behavior, 43*, 20–34. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.04.002

Svartdal, F. (2022, 13.juni). Dunning-kruger-effekten. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/.versionview/1607066

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. I G. Hanna & M. de Villiers (Red.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study (*s. 327–346). Springer.

Tranøy, K. E. (2021, 22. mars). Induktive metoder. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/.versionview/1759234

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i Matematikk R (MAT03-02)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv294

Watumull, J., Hauser, M. D., Roberts, I. G., & Hornstein, N. (2014). On recursion. *Frontiers in Psychology*, *4*(1017), 1–7. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.01017

Yandell, B. H. (2001). *The honors class: Hilbert's problems and their solvers*. CRC Press.

Yani, B., Harding, A., & Engelbrecht, J. (2019). Academic maturity of students in an extended programme in mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology*, *50*(7), 1037-1049.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. I G. Hanna & M. de Villiers (Red.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study (*s. 215–229). Springer. 215–229.

Vedlegg A

Sikt

[Meldeskjema](#) / [Hanois tårn - introduksjon til induksjonsbevis i en 1t-klasse](#) / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	**Vurderingstype**	**Dato**
947051	Automatisk	10.12.2022

Prosjekttittel
Hanois tårn - introduksjon til induksjonsbevis i en 1t-klasse

Behandlingsansvarlig institusjon
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk (IE) / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig
Silvie Yael Girlani Fleischmann

Student
Ingrid Fodstad

Prosjektperiode
01.01.2023 - 01.06.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 01.06.2023.

[Meldeskjema](#)

Grunnlag for automatisk vurdering
Meldeskjemaet har fått en automatisk vurdering. Det vil si at vurderingen er foretatt maskinelt, basert på informasjonen som er fylt inn i meldeskjemaet. Kun behandling av personopplysninger med lav personvernulempe og risiko får automatisk vurdering. Sentrale kriterier er:

- De registrerte er over 15 år
- Behandlingen omfatter ikke særlige kategorier personopplysninger;
  - Rasemessig eller etnisk opprinnelse
  - Politisk, religiøs eller filosofisk overbevisning
  - Fagforeningsmedlemskap
  - Genetiske data
  - Biometriske data for å entydig identifisere et individ
  - Helseopplysninger
  - Seksuelle forhold eller seksuell orientering
- Behandlingen omfatter ikke opplysninger om straffedommer og lovovertredelser
- Personopplysningene skal ikke behandles utenfor EU/EØS-området, og ingen som befinner seg utenfor EU/EØS skal ha tilgang til personopplysningene
- De registrerte mottar informasjon på forhånd om behandlingen av personopplysningene.

Informasjon til de registrerte (utvalgene) om behandlingen må inneholde

- Den behandlingsansvarliges identitet og kontaktopplysninger
- Kontaktopplysninger til personvernombudet (hvis relevant)
- Formålet med behandlingen av personopplysningene
- Det vitenskapelige formålet (formålet med studien)
- Det lovlige grunnlaget for behandlingen av personopplysningene
- Hvilke personopplysninger som vil bli behandlet, og hvordan de samles inn, eller hvor de hentes fra
- Hvem som vil få tilgang til personopplysningene (kategorier mottakere)

Vedlegg B

Liva Barka & Ingrid Fodstad
NTNU, Trondheim
livabar@ntnu.no & ingrifod@ntnu.no

Til elever på 1.trinn som tar 1T-matematikk ved Strand videregående skole.

Anmodning om tillatelse til filmopptak, lydopptak av intervju og innsamling av elevbesvarelser.

Vi er studenter på lektorprogrammet i realfag ved NTNU, som skriver master våren 2023. Hensikten med dette prosjektet er å undersøke 1t-elevers læringsutbytte av å jobbe med en praktisk oppgave.

Dere (elevene) skal jobbe med et oppgaveark og en fysisk modell av Hanois tårn. Dere skal jobbe dere gjennom oppgavearket i grupper på 3, og dere skal jobbe så selvstendig som mulig. For å kunne analysere resultatene av undersøkelsen er det ønskelig å filme timen, slik at vi kan få med oss alle argumentene dere kommer med og strategien dere bruker i oppgaveløsningen. Filmopptaket kommer til å bli transkribert og anonymisert. Dere må også skrive ned svar underveis på et ark, som vi kommer til å samle inn på slutten. Hvis noe er uklart i enten den skriftlige besvarelsen eller i filmopptaket, er det ønskelig å følge opp enkeltelever med et intervju. Dette intervjuet vil bli brukt til å forstå hvordan dere har tenkt da dere løste den praktiske oppgaven. Intervjuet vil i så fall bli tatt opp, transkribert og anonymisert. Vi ber med dette om tillatelse til å kunne ta film- og lydopptak, samt samle inn materiale produsert av elever. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern. Det er helt frivillig å delta og dere kan til enhver tid trekke dere fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Filmopptaket og lydopptaket vil kun bli sett og hørt av oss (Liva og Ingrid). I det som presenteres fra prosjektet vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 01.10.23. Dere har rett til innsyn, retting, sletting, begrensning og dataportabilitet av dataene vi samler inn, og dere har rett til å klage til Datatilsynet.

Hvis du vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med oss på telefon eller epost (se øverst på første side for detaljer).

Faglig ansvarlig ved NTNU er Yael Fleischmann: tlf. 96732597; epost yael.fleischmann@ntnu.no
NTNUs personvernombud er Thomas Helgesen: tlf. 93079038; epost thomas.helgesen@ntnu.no.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Vi håper du synes denne forskningen er av verdi, og at du er villig til å være med på den. Vi ber om at svarslippen på neste side fylles ut om hvorvidt du gir eller ikke gir tillatelse til deltakelse i prosjektet.

På forhånd takk!
Vennlig hilsen Ingrid Fodstad og Liva Barka

Tillatelse

Som del av prosjektet ber vi om tillatelse til lydopptak av intervju og bruke besvarelser som du har produsert.

Forutsetningen for tillatelsen er at besvarelser og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss i ruta dersom du samtykker:

☐ Jeg (eleven) gir tillatelse (dersom eleven er over 15 år)

Dato: 20.02.23

Elevens fornavn og etternavn:

………………………………………………………………………………………………

Underskrift av eleven (dersom han/hun er over 15 år):

………………………………………………………………………………………………

Vedlegg C

Hanois tårn

Dere har fått utdelt et spill som heter «Hanois tårn». Tårnet består av n ringer. Målet med spillet er å flytte tårnet over til en annen pinne med minst mulig flytt, som er gitt ved $F(n)$.

Regler:

- Det er kun lov til å flytte en ring om gangen.
- Det er ikke lov til å legge en større ring på en mindre ring.

Oppgave 1

a) Start med et tårn av $n = 3$ ringer. Prøv dere frem og se om dere kan finne $F(3)$.
b) Prøv nå med et tårn av $n = 2$ ringer. Hva er $F(2)$? Hva er $F(1)$?

Oppgave 2

a) Lag et tårn av $n = 4$ ringer. Flytt et tårn av de 3 øverste ringene over til en annen pinne, slik at den største ringen i det opprinnelige tårnet står alene (med minst mulig flytt).
Hvor mange flytt bruker dere?
b) Bruk svaret i oppgave a til å finne $F(4)$ uten å flytte mer på ringene.
c) Kan dere skrive en formel for $F(4)$ med $F(3)$
d) Kan dere nå bruke $F(4)$ til å finne $F(5)$?
e) Klarer dere å lage en rekursiv formel som finner $F(n)$?

En rekursiv formel uttrykker et ledd i en tallfølge ved foregående ledd.

Oppgave 3

Den rekursive formelen er nyttig hvis vi vet hvor mange flytt vi brukte på tårnet med en mindre skive. Dersom tårnet består av mange ringer, vil det ta lang tid og regne seg frem til minst antall flytt med den rekursive formelen. Vi ønsker derfor en formel som gir oss raskere svar. Tabellen nedenfor viser $F(n)$ for n antall ringer fra $n = 1$ til $n = 7$. Ut ifra tabellen kan det se ut som at man kan finne minst antall flytt ved formelen $2^n - 1$. Vi lager en hypotese om at dette stemmer for alle n.

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\boldsymbol{F(n)}$	1	3	7	15	31	63	127	...

a) Stemmer denne hypotesen med den rekursive formelen $F(n)$, for $n = 1$?
b) Anta at $F(n-1) = 2^{(n-1)} - 1$. Kan dere bevise at den stemmer for $F(n)$?
c) Diskuter hvordan oppgave a og b til sammen utgjør et bevis?

NTNU

Kunnskap for en bedre verden