Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Andrea Vinje Tøsse og Pia Hapnes Rege

Integrere undervisning og læring av statistikk med puslebasert læring: en kommognitiv studie

En mixed methods studie om hvordan 9.trinnselever deltar i og opplever arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og statistiske diagrammer.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Farzad Radmehr
Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Andrea Vinje Tøsse og Pia Hapnes Rege

Integrere undervisning og læring av statistikk med puslebasert læring: en kommognitiv studie

En mixed methods studie om hvordan 9.trinnselever deltar i og opplever arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og statistiske diagrammer.

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Farzad Radmehr
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien undersøker 9.trinnselevers deltakelse og opplevelse i arbeid med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og statistiske diagrammer.

I studien har vi benyttet tilnærmingen mixed methods ved å ta lydopptak av elevenes gruppearbeid med sophism- og paradoxoppgaver, administrert spørreskjema blant elevene og intervjuet seks elever med ulik deltakelse i arbeidet med oppgavene. 13 elever arbeidet i grupper med fire sophism- og paradoxoppgaver, før de svarte på et individuelt spørreskjema designet for å undersøke deres opplevelse i arbeidet med oppgavene. Spørreskjemaet besto av 14 Likert-skala elementer og fire åpne spørsmål. I tillegg ble seks elever plukket ut til et mer utdypende intervju. Tilnærmingen vi brukte for å analysere datamaterialet var en induktiv innholdsanalyse. Vi tok også utgangspunkt i Sfards (2008) teori om kommognisjon for å tolke elevenes deltakelse i arbeidet samt tidligere forskning på kommognisjon som læringsteori, puslebasert læring som undervisningsmetode og undervisning og læring av statistikk.

Studiens resultat viser at noen elever i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene etterlignet de fiktive elevenes rutine og derfor hadde disse elevene en mer rituell deltakelse i diskursen. Samtidig indikerer studiens funn noen endringer i enkelte elevers deritualiseringsprosesser. Disse elevene bevegde seg derfor mot en mer utforskende deltakelse i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Dessuten indikerer studiens funn at elevene opplevde sophism- og paradoxoppgavene som underholdende, artige og utfordrende. I tillegg foreslår resultat fra studien at sophism- og paradoxoppgavene kan bidra med å utvikle elevenes forståelse av gyldige og ugyldige argument, og dermed fremme læring på metanivå.

Abstract

This study examines 9th grade pupils' participation and experience in working with sophism and paradox tasks related to central tendency measures and statistical diagrams.

In the study, we used a mixed methods approach by recording pupils' group work on the sophism and paradox tasks, administering questionnaire among pupils, and interviewing six of them with different performance on the tasks. Thirteen pupils worked in groups with four sophism and paradox tasks, before they answered an individually a questionnaire designed to explore their perceptions of engaging with these task types. The questionnaire consisted of 14 Likert-scale items and four open-ended questions. Furthermore, six pupils were selected for a more in-depth interview. The data was analyzed using an inductive content analysis approach. We also used Sfard's (2008) theory of commognition to interpret the pupils' participation in the tasks as well as previous research on commognition as learning theory, puzzle-based learning as a teaching method and learning and teaching of statistics.

The results of the study show that some pupils, when they engaged in sophism and paradox tasks, imitated the fictional students' routine, and therefore participated more ritually in the discourse. At the same time, the study's findings indicated some changes in pupils' deritualizationprocesses. These pupils were therefore moving towards a more exploratory participation when they engaged in sophism and paradox tasks. Furthermore, the findings indicate that the pupils experienced sophism and paradox tasks as entertaining, fun, and challenging. Moreover, the findings suggest that sophism and paradox tasks can contribute to developing students' understanding of valid and invalid arguments, and thus promote meta-level learning.

Forord

Masteroppgaven markerer nå slutten,
ja, det er bare å fyre av salutten.
Hvem hadde trodd fem år skulle gå så fort,
men vipps så var utdanninga gjort.

I skriveprosessen har vi fått knekken,
men heldigvis hjalp veiledningen med Farzad Radmehr oss over sprekken.
Takk for all kaffe, kjeks og ikke minst mange gode råd,
takket være deg har oppgaven en rød tråd.

Takk til Trondheims beste venninner,
dere har fått masterskrivingen til å gå på skinner.
Hva hadde tiden uten den gode gjengen vært,
vi har skapt minner vi alltid vil ha oss nært.

Familien vår fortjener også en takk,
alle telefonsamtaler hjem har holdt humøret i sjakk.
De har også masteroppgaven lest,
og det er ikke noe for folk flest.

Aller mest vil vi hverandre takke,
uten samarbeidet ville arbeidet føltes som en evig motbakke.
Sammen har det vært aller mest latter og gøy,
og wow som tiden plutselig bare fløy.

Trondheim, mai 2023
Andrea Vinje Tøsse og Pia Hapnes Rege

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

Forkortelser

FoU	Forskning og utvikling
KRLE	Kristendom, religion, livssyn og etikk
NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Pa	Paradox
So	Sophism

1.0 Innledning

I dette kapittelet presenterer vi temaet som utforskes i studien og begrunnelsen for å utforske det (Delkapittel 1.1). I Delkapittel 1.2 beskriver vi vår bakgrunn for studien og statistikk i læreplanen for den norske grunnskolen. I tillegg presenterer vi studiens forskningsspørsmål (Delkapittel 1.3) og oppgavens struktur (Delkapittel 1.4).

1.1 Introduksjon og begrunnelse

Mange har en ide om at matematikk kan være regler og algoritmer som skal følges steg for steg og helst læres utenat (Nosrati & Wæge, 2015). Selv minnes vi slik matematikkundervisning, som bare besto av regning med standardalgoritmer hvor målet var å sette to streker under svaret. Det er vanlig at studenter jobber individuelt med å reprodusere memorerte algoritmer for å finne det riktige svaret (Radmehr & Vos, 2020). Elever som utfører steg for steg algoritmer jobber på et lavt kognitivt nivå (Stein et al., 2000). Når elever arbeider med oppgaver som krever høyere kognitive krav kan de utvikle bedre forståelse for begreper og ulike representasjoner, og sammenhenger mellom dem (Stein et al., 2000). Samtidig utfordrer dette elevenes matematiske tenking (Stein et al., 2000). Elevene kan også ta i bruk relevant forkunnskap og finne en ny måte å bruke denne på (Stein et al., 2000). Wæge og Nosrati (2018) mener at ved å la elever arbeide med kognitivt krevende oppgaver kan det bidra til å fremme problemløsning og økt matematisk forståelse.

Puslebasert læring er en underholdene og engasjerende undervisningsmetode (Badger et al., 2012). I arbeid med puslebaserte oppgaver finnes ingen forhåndsbestemte regler eller algoritmer å følge, hvor slik læring kan utvikle studenters problemløsningsferdigheter, evne til kritisk tenkning og evne til å tenke «utenfor boksen» (Klymchuk, 2017). Målet er at studenter, gjennom arbeid med puslebaserte oppgaver, kan bli gode problemløsere også i samfunnet (Falkner et al., 2010). Det er tre ulike typer puslebaserte problem: sophism, paradox og puzzle. *Sophism* er et matematisk argument som inneholder et ugyldig utsagn som virker korrekt (Klymchuk, 2017). *Paradox* er et gyldig argument, men utsagnet fremstår kontraintuitivt (Klymchuk, 2017). *Puzzle* er et ustrukturert argument presentert på en underholdende måte (Klymchuk, 2017). Læringsmetoden er lite brukt i den norske grunnskolen, og forskning gir oss et innblikk i hvordan den blir brukt i undervisningen av matematikk til ingeniørstudenter (Klymchuk, 2017; Rezvanifard et al., 2022). Puslebasert læring kan ha en positiv effekt på studenters samarbeidsevner og matematiske forståelse i undervisningen av matematikk til ingeniørstudenter (Rezvanifard et al., 2022). Forskning viser også at undervisningen ble mer kreativ og variert (Rezvanifard et al., 2022). Det kan være interessant å undersøke bruken av puslebasert læring i den norske grunnskolen for å utforske muligheten med å integrere puslebaserte oppgaver i undervisning og læring av matematikk og statistikk. I studien undersøker vi 9.trinnselevers arbeid med sophism- og paradoxoppgaver. Vi ønsket å gi elevene to oppgaver av hver type, og syntes derfor at seks oppgaver ble for mange med tanke på tidsbruk og elevenes motivasjon for arbeidet. Derfor falt valget på to sophismoppgaver og to paradoxoppgaver.

Forskning på statistikkundervisning viser at flere studenter opplevde vanskeligheter og misoppfatninger[1] i arbeid med temaet (Boels et al., 2019; delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). Statistikk er et tema hvor elevene skal forstå de matematiske konseptene for å diskutere og argumentere for ulike mål og fremstillinger (Kunnskapsdepartementet, 2019). En vanlig misoppfatning i elevers arbeid med median er at verdiene ikke blir sortert i stigende rekkefølge fra minst til størst verdi (Van de Walle et al., 2015). For å forklare gjennomsnitt bruker flere utsagnet: «gjennomsnittet er når jeg adderer alle tallene i datasettet og dividerer summen med antall verdier i datasettet» (Van de Walle et al., 2015). Dette er ikke hva gjennomsnitt er, men hvordan gjennomsnittet regnes (Van de Walle et al., 2015). Forskning viser at flere studenter hadde vansker med å tolke og forstå grafiske fremstillinger (f.eks. delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). Histogram blir spesielt trukket frem som et diagram hvor flere studenter hadde vansker med å tolke sentralmålene median og gjennomsnitt (Boels et al., 2019; Kaplan et al., 2017). Tidligere forskning har identifisert at flere studenter forvekslet stolpediagram og histogram (delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). Med bakgrunn i dette ønsker vi, i denne studien, å legge fokus på to sentralmål, median og gjennomsnitt, og to typer diagrammer, histogram og stolpediagram.

Å lære matematikk er en sosial prosess (Sfard, 2020) og kommognisjon har vist seg å være et egnet rammeverk for å utforske læring på ulike nivå; grunnskolen (f.eks. Valenta & Enge, 2022), videregående skole (f.eks. Ärlebäck & Frejd, 2013) og universitet (f.eks. Remillard, 2014). Kommognisjon er ikke før blitt brukt for å undersøke elevers deltakelse og opplevelse i arbeid med puslebaserte oppgaver i statistikkundervisningen. Mangelen på tidligere forskning gjorde oss derfor interessert i å undersøke dette fra et kommognitivt perspektiv.

1.2 Studiens kontekst

I denne delen beskriver vi vår bakgrunn for studien og statistikk i læreplanen for den norske grunnskolen.

1.2.1 Forskernes bakgrunn

Vi presenterer vår bakgrunn for å begrunne vår motivasjon for å gjennomføre studien. I tillegg er deler av forskningen kvalitativ og det er derfor nødvendig å presentere vår bakgrunn for å øke studiens validitet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi går siste året på grunnskolelærerutdanningen 5.-10. Tidligere i vår utdanning har vi skrevet en FoU-oppgave. Her utførte vi kvalitativ forskning i fagene naturfag og KRLE. Nå ønsker vi å utvikle vår forskningserfaring og få mer kunnskap om kvalitative og kvantitative metoder. Vi har også gjennomført flere perioder med praksis, hvor vi har fått erfaring med matematikkundervisning. Dette påvirket oss til å skrive vår masteroppgave i matematikkdidaktikk. I vår siste praksisperiode underviste vi 9.trinnselever i statistikk. Det var her vi oppdaget elevenes vansker i arbeidet med statistikk og fikk interesse for å undersøke dette nærmere. Elevene på praksisskolen hadde vansker med å forstå og tolke medianen og gjennomsnittets betydning i datamaterialet. Vi observerte spesielt at elevene hadde utfordringer i arbeidet med å regne ut medianen og gjennomsnittet når datamaterialet

[1] Misoppfatninger er ikke et mye brukt begrep i Sfards (2008) teori kommognisjon, men vi bruker begrepet når vi referer til tidligere forskning på undervisning og læring av statistikk.

ble fremstilt i histogram og stolpediagram. Oppgavens fokus er derfor lagt på sentralmålene median og gjennomsnitt, og diagrammene histogram og stolpediagram.

Vi synes det er viktig at elever skal få utforske matematikken, og gå bort fra standardprosedyrer. Som fremtidige lærere ønsker vi å gi elevene oppgaver som bidrar til utforskning og problemløsning i matematikklasserommet. Vi synes derfor det er interessant å undersøke hvordan bruken av puslebaserte oppgaver påvirker elevenes deltakelse, læring og engasjement for matematikkfaget. Puslebaserte oppgaver er lite brukt i norsk skole og vi håper dette gir oss, og andre matematikklærere, inspirasjon til å bruke de i matematikkundervisningen.

1.2.2 Statistikk i læreplanen for den norske grunnskolen

I læreplanen i matematikk står det at «matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling og gi dem kompetanse i utforskning og problemløsning» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Elevene skal gjennom undervisningen utvikle kritisk tenkning slik at de kan vurdere egne og andres argumenter. Dette skal «ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). I LK20 står det at elevene skal kunne finne og diskutere sentralmål og spredningsmål i datasett og kunne argumentere for hvordan ulike fremstillinger påvirker tall og data (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er gjennom kommunikasjon, argumentasjon, utforskning og problemløsning elevene skal kunne tenke, resonnere og løse matematiske problemer på en selvstendig måte (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette kommer tydelig frem i fagets kjerneelementer hvor det står at elevene gjennom matematikkundervisningen skal bli gode problemløsere (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Elevenes motivasjon for skolearbeidet faller med alderen og skolen har som mål å skape motiverende og varierende skolehverdager slik at elevene opplever fagene som givende og relevante (Meld. St. 22 (2010-2011)). Forskning viser at elevenes motivasjon for faget påvirkes av hvilke oppgaver de arbeider med (Valenta, 2016). For å øke elevenes forståelse og motivasjon i statistikk kan det være aktuelt å teste ut nye oppgaver som krever høyere kognitive krav og som hjelper elevene å utvikle problemløsningsferdigheter sammen med medelever.

1.3 Studiens forskningsspørsmål

Som oppgavens sentrale læringsteori har vi valgt kommognisjon (Sfard, 2008). Sentralt i Sfards (2008) teori om kommognisjon er begrepet diskurs. Den matematiske diskursen inneholder fire unike egenskaper: matematiske ord (f.eks. «tre», «trekant»), visuelle mediatorer (f.eks. tall, algebraiske symboler eller grafer), narrativ (f.eks. matematiske definisjoner, teorem eller bevis) og rutiner (f.eks. hvordan integrere en polynomfunksjon) (Sfard, 2008). For å bli deltaker i diskursen må elevene kunne kommunisere matematisk (Sfard, 2008, 2020). Vi har i denne studien valgt å legge fokus på sentralmålene gjennomsnitt og median, og to typer diagram, histogram og stolpediagram, fordi vi selv har observert vanskeligheter i elevers arbeid med dette. Samtidig viser tidligere forskning at flere studenter opplevde misoppfatninger i arbeid med statistikk (delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). Innenfor forskning i matematikkdidaktikk kan man se på vår studie som en nyhet på minst to områder. Det virker som at vår studie er første forsøk på å undersøke elevers arbeid med puslebaserte problemer med kommognisjon som sentral læringsteori. I tillegg virker det som tidligere empirisk forskning på bruk av puslebasert læring i undervisning og i læring av matematikk bare gjennomført utenfor Norge og på universitetsnivå (f.eks. Rezvanifard et al., 2022; 2023). Ved å utforske 9.trinnselevers arbeid med puslebaserte oppgaver i statistikkundervisning fra et kommognitivt perspektiv, kan vi undersøke hvordan læring skjer i en sosial prosess og hvordan elevene tar del i den matematiske diskursen. Dette kan være interessant for å få et innblikk i hva puslebasert læring kan bidra med i matematikkundervisningen i den norske grunnskolen. For å bidra til mer kunnskap om elevers arbeid med puslebaserte oppgaver i statistikk fra et kommognitivt perspektiv har vi formulert to forskningsspørsmål:

Hvordan deltar 9.trinnselever i arbeid med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og diagrammer?

Hvordan opplever 9.trinnselever arbeid med sophism- og paradoxoppgaver relatert sentralmål og diagrammer?

I studien er de valgte sentralmålene median og gjennomsnitt og de valgte diagrammene er histogram og stolpediagram.

1.4 Studiens struktur

Studien er inndelt i seks kapittel. I det første kapittelet ble det gitt en introduksjon til studien med bakgrunn for valg av tema og presentasjon av forskningsspørsmålene. I Kapittel 2.0 beskriver vi Sfards (2008) læringsteori kommognisjon, relevant teori om puslebasert læring og sentrale begreper i statistikk. Dette for å kunne besvare forskningsspørsmålene. Videre presenterer vi, i Kapittel 3.0, tidligere forskning på bruk av kommognisjon som læringsteori for å analysere elevers arbeid i matematikk. Vi redegjør også for tidligere forskning på puslebasert læring og statistikkundervisning. I Kapittel 4.0 redegjør vi for det vitenskapelige paradigme som ligger til grunn for oppgaven og deretter beskrives studiens forskningsmetodikk og tilnærmingen brukt til dataanalyse. Resultatet fra datamaterialet presenteres i Kapittel 5.0 før vi i Kapittel 6.0 gir en oversikt over studien og diskuterer relevante funn i samsvar med teori og tidligere forskning for å besvare forskningsspørsmålene. I Kapittel 6.0 avslutter vi med didaktiske implikasjoner, studiens begrensninger, innspill til videre forskning og noen avsluttende ord.

2.0 Teori

I dette kapittelet presenterer vi oppgavens teoretiske rammeverk. Vi tar først for oss Sfards (2008, 2020) teori om kommognisjon som er oppgavens sentrale læringsteori (Delkapittel 2.1). Deretter, i Delkapittel 2.2, presenterer vi undervisningsmetoden, puslebasert læring, og hvordan puslebaserte oppgaver, spesielt sophism og paradox, kan bli designet. Til slutt definerer vi noen sentrale begreper innenfor statistikk som er relevant for oppgavens tema (Delkapittel 2.3).

2.1 Kommognisjon

Mennesker kan både tenke og kommunisere, og det er dette som gjør oss mennesker spesielle. Sfard (2008) kobler menneskers tanker og kommunikasjon og danner en ny teori: kommognisjon. Å tenke er en individualisert aktivitet av kommunikasjon (Sfard, 2008). Tankene er med på å informere, argumentere, stille spørsmål og gi svar (Sfard, 2008). Sfards (2008, 2020) teori om kommognisjon kommer av våre individuelle tanker og kommunikasjon med andre.

Kommognisjon kan knyttes til det sosiokulturelle perspektivet. Sfard (2020) har hentet inspirasjon om at læring skjer i en sosial prosess fra både Vygotsky (1987) og Wittgenstein (2001). Læring skjer ut fra menneskets individuelle tanker som ligger til grunn for kommunikasjon med andre, og ifølge Sfard (2020) blir læring dermed en sosial prosess. Likevel skiller Sfards (2008, 2020) rammeverk seg fra de typiske sosiokulturelle perspektivene ved sin bruk av diskursbegrepet.

2.1.1 Matematisk diskurs

Diskurs er forskjellige typer kommunikasjon som bringer noen mennesker sammen og ekskluderer andre (Sfard, 2008). Ethvert menneskelig samfunn deles inn i diskursfelleskap. For å bli medlem av en diskurs må du delta i kommunikasjon med fellesskapet som praktiserer den gitte diskursen (Sfard, 2020). Matematikk er en spesiell type diskurs. For å bli deltaker i den matematiske diskursen må eleven kunne kommunisere matematisk med andre og tenke matematisk. I følge Sfard (2008, 2020) skjer dette i en gradvis overgang fra å gjennomføre oppgaver i et kollektiv til å klare å løse matematiske problemer på egenhånd og på sin unike måte.

Den matematiske diskursen skiller seg fra andre ved dens spesielle egenskaper: matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. *Matematiske ord* er spesielle ord innenfor matematikken som kan relateres til mengde og form (f.eks. «tre», «trekant» eller «funksjon») (Sfard, 2020). I vår studie kan eksempler på dette være ord på statistiske diagram, stolpediagram eller histogram. I andre diskurser kan det bli kalt en illustrasjon, men innenfor den matematiske diskursen blir det spesielle ord. Sfard (2008) har definert *visuelle mediatorer* som et hjelpemiddel for kommunikasjon som brukes av medlemmene i diskursen (f.eks. tall, algebraiske symboler eller grafer). Konkreter eller modeller deltakeren av diskursen bruker for å identifisere objektene de kommuniserer om, kan være eksempler på visuelle mediatorer. Et eksempel knyttet til vår studie kan være bruk av grafer. *Narrativer* er enhver tekst, muntlig eller skriftlig, som gir en beskrivelse av et objekt, relasjoner mellom objektene eller aktiviteter med objektene (Sfard, 2008). Sfard (2008) har definert et objekt som narrativt ved at det må være godkjent innenfor det gitte fellesskapet. I den matematiske diskursen kan det være matematiske definisjoner, bevis og teorem (Sfard, 2008). I vår studie kan et narrativ være definisjonen eleven bruker for å regne ut gjennomsnittet eller medianen. *Rutiner* er gjentakende handlingsmønster i en spesiell diskurs (Sfard, 2008). Hvis eleven vet hvordan man skal reagere på en gitt handling, er det fordi eleven har blitt utsatt for en lignende situasjon før og nå er i stand til å gjennomføre handlingen (Sfard, 2008). Knyttet til vår studie kan den gitte handlingen være en elev som skal regne ut gjennomsnittet av antall timer mobilbruk i løpet av en dag. Eleven utvikler en rutine fra tidligere erfaringer introdusert av en ekspert (Lavie et al., 2019).

2.1.2 Rutiner

Rutiner møter oss i alt vi gjør, både i hverdagslivet og i matematikken. Det er gjentakende mønster av våre handlinger (Lavie et al., 2019). Enhver diskurs har sin helt spesielle måte å gjøre ting på, sine egne rutiner (Lavie & Sfard, 2019). Både i hverdagslivet og i matematikklasserommet møter vi situasjoner vi håndterer på lignede måter som vi selv eller andre har gjort tidligere (f.eks. en lærer eller medelev) (Lavie et al., 2019). Dette gjelder alt fra å vinke til en bekjent på gata, bake boller eller møte en matematikkoppgave slik du husker lærerens gjennomgang på tavla. Rutiner gjør det mulig for oss å fungere i samfunnet vi lever i (Lavie et al., 2019). Samtidig er rutinene i kontinuerlig endring, fordi det vi observerer fra andre blir brukt og kombinert på nye måter (Lavie et al., 2019). Det kan variere hvordan tidligere hendelser blir tolket og videreført i nye rutiner, og blant elever finnes det stor variasjon, både hvordan de utføres og hvilke situasjoner som gjør at en rutine blir utført. Elevene har ulike vilkår for rutinen. Noen elever kan være fornøyd med å bare regne ut gjennomsnittet av datamaterialet fremstilt i et stolpediagram, mens andre elever kan sjekke at svaret gir mening ut fra de gitte verdiene i stolpediagrammet.

Sfard (2020) har definert oppgavesituasjoner hvor elevene føler at de må handle. Elevene handler med rutiner innenfor den matematiske diskursen ved å kopiere det andre har gjort før i lignende situasjoner. En slik oppgavesituasjon kan bli gitt av en oppgavesetter som en invitasjon til en type handling (Lavie et al., 2019). Hvis eleven er i stand til å handle i en oppgavesituasjon er det på bakgrunn av tidligere erfaringer. Eleven tolker tidligere hendelser og oppgavesituasjoner som er mer eller mindre lik oppgavesituasjonen eleven nå står ovenfor og gjentar det som da ble gjort (Lavie et al., 2019). Tidligere hendelser knyttes ofte opp mot stedet hvor det skjedde. I et matematikklasserom er det hendelser som har skjedd i det klasserommet elevene knytter oppgavesituasjonen tilbake til (Lavie et al., 2019). Elevene identifiserer oppgavene ut fra oppgavesituasjonen de befinner seg i og hvordan den kan tolkes ut fra tidligere oppgavesituasjoner. Etter å ha identifisert oppgaven kan eleven velge å gjenskape tidligere hendelser og erfaringer. Eleven står ovenfor en prosess, som beskriver handlingen i den gitte oppgavesituasjon av både tidligere og nåværende handlinger (Sfard, 2020). Elevens handling i den gitte oppgavesituasjonen avhenger av elevens tolkning av oppgaven, og prosessen blir påvirket av elevens respons fra tidligere oppgavesituasjoner (Lavie et al., 2019).

Vi kan skille mellom praktiske og diskursive rutiner. En rutine er praktisk hvis en person tolker at oppgavesituasjonen har behov for endring, omorganisering eller omplassering av objekter (Lavie et al., 2019). Noen eksempler på en slik praktisk rutine er å sykle eller å lage frokost, hvor det skjer en fysisk endring i miljøet (Lavie et al., 2019). Dersom en person tolker at oppgavesituasjonen krever en kommunikasjonshandling, er det en diskursiv rutine (f.eks. når noen inngår ekteskap eller når to bekjente hilser) (Lavie et al., 2019). En diskursiv rutine er mønster vi følger mens vi kommuniserer med andre eller med oss selv (Lavie et al., 2019). Knyttet til statistikkoppgaver kan et eksempel på en diskursiv rutine være hvordan to elever diskuterer for å løse en oppgave.

Lavie et al. (2019) skilte mellom prosessorientert og produktorientert rutine. Den prosessorienterte rutinen kan være et ritual en elev følger. Ritual er rutiner som utføres av hensyn til sosial belønning eller i et forsøk på å unngå straff (Lavie et al., 2019). Eleven forstår i dette tilfellet ikke hvilken hensikt oppgaven har og velger derfor å løse oppgaven ved å følge et ritual observert i en lignende situasjon. Oppgaven løses uten mål og mening, og dermed ikke for produktet. I en produktorientert rutine er ikke eleven ute etter fremgangsmåten, men ønsker å undersøke produktet av oppgaven (Lavie et al., 2019). Eleven forstår nå hensikten med oppgaven og beveger seg mot en utforskende deltakelse. Prosessen med å utvikle deltakelsen fra rituell til utforskende, også kalt deritualisering, kan være gradvis, langsom og sjeldent fullført i løpet av elevers skolegang (Lavie et al., 2019). I en deritualisering skjer en utvikling av elevenes rutiner (Lavie et al., 2019). Det er likevel slik at en endring telles som et steg i deritualiseringen hvis den viser at oppmerksomheten har flyttet seg fra prosessen til produktet. Hvis elevene velger å løse en oppgave bare for å tilfredsstille læreren blir deltakelsen rituell. Likevel er det viktig å vite at deltakelsen kan være utforskende samtidig som eleven ønsker å tilfredsstille læreren (Lavie et al., 2019). Å utføre ritualer er likevel viktig for å skape et springbrett til nye diskurser, som skaper utforskende deltakelse hos elevene (Lavie et al., 2019). Hvis en elev løser et matematisk problem på sin helt egen måte, uavhengig av andre, deltar eleven utforskende.

En observert endring er et trinn i deritualiseringsprosessen (Lavie et al., 2019). Lavie et al. (2019) har presentert en liste med endringer som kan skje hos elever: fleksibilitet, binding, anvendelighet, utøveren som agent, objektivering av diskursen og begrunnelse. Vi presenterer disse her.

Fleksibilitet. I arbeid med en oppgave kan det finnes ulike rutiner å bruke for å løse oppgaven. Fleksibilitet i rutinen oppnås når en elev innser at en oppgave kan løses på flere, uavhengige måter og fortsatt gi samme utfall (Lavie et al., 2019). Når et barn kan svare på spørsmålet om hvilken boks som inneholder flest klosser ved å sammenligne haugene i boksene eller ved å bygge tårn og sammenligne tårnene, har barnet oppnådd fleksibilitet i rutinen (Lavie et al., 2019). Knyttet til vår studie kan et eksempel på fleksibilitet være når en elev kan regne ut medianen av datamaterialet fremstilt i et diagram, både ved å skrive opp alle verdiene og ved å vurdere søylenes ulike verdier.

Binding. I et ritual etterligner eleven eksperten og det er ikke sikkert eleven forstår sammenhengen mellom de ulike stegene i rutinen (Lavie et al., 2019). Binding handler om å kunne binde de neste stegene på de tidligere og forstå at stegene bygger videre på hverandre (Lavie et al., 2019). I forskningen gjennomført av Lavie et al. (2019) fikk et barn spørsmål om å velge en tilfeldig boks med klosser og valgte boksen med færrest klosser. Barnet lærte etter hvert å velge boksen med flest klosser og har da bundet stegene fra tidligere erfaringer (Lavie et al., 2019). Et eksempel i statistikk kan være en elev som kan regne ut gjennomsnittet av et gitt antall verdier. Etter hvert lærer eleven å regne ut gjennomsnittet når verdiene er fremstilt i et diagram og binder da sammen stegene fra tidligere erfaringer.

Anvendelighet. Rutinens anvendelighet vurderes for å sjekke potensielle, fremtidige anvendelser (Lavie et al., 2019). I et ritual er anvendeligheten smal fordi det bare kan brukes til en prosess i et gitt miljø og fremkalles bare hvis miljøet er nesten det samme (f.eks. hos elever som tidligere har vist kunnskap om brøk og at de kan plassere brøk på tallinja, men som senere ikke tar i bruk denne kunnskapen for å forklare hvor et punkt på tallinja er) (Lavie et al., 2019). I bevegelsen mot en utforskende deltakelse er rutinens anvendelighet større fordi flere prosesser kan bygges på hverandre for å komme frem til produktet (Lavie et al., 2019). Anvendeligheten til en elevs rutine er smal dersom eleven bare kan regne ut medianen av tallverdier oppstilt i stigende rekkefølge. Rutinens anvendelighet blir større dersom eleven kan regne ut medianen når verdiene er fremstilt i et diagram eller tabell i en avisartikkel om månedslønn. Dette fordi eleven klarer å ta i bruk rutinen i et nytt miljø.

Utøveren som agent. I et ritual er prosessen bestemt, og eleven tar ikke valg om hva eller hvordan prosessen skal utføres. Eleven er derfor avhengig av en ekspert for å kunne løse oppgaven. Eleven må kopiere andres rutine for å vite hva neste steg er og når oppgaven er løst. Utøveren som agent viser til en elev som tar egne valg i prosessen for å komme frem til produktet, og dette kan observeres basert på antall valg eleven selv klarer å ta (Lavie et al., 2019). Knyttet til vår studie, kan et eksempel på at en elev beveger seg mot en utforskende deltakelse være når eleven blir uavhengig av ekspertens fremgangsmåte og selv klarer å hente de riktige verdiene fra et stolpediagram for å regne ut gjennomsnittet.

Objektivering av diskursen. Når en hendelse løses basert på elevenes erfaringer fra tidligere situasjoner, utføres en rutine. Etter hvert som elevens rutine utvikles, tar eleven avstand fra det konkrete objektet og forteller en matematisk fortelling (Lavie et al., 2019). Diskursive objekter kan, ifølge Sfard (2008), oppstå på følgende måter: saming, innkapsling og reifisering. Å bruke ett felles navn på forskjellige ting som kan betraktes som likeverdige, men som ikke har blitt ansett som likeverdige, i enkelte sammenhenger er *saming* (f.eks. ett nytt diskursivt objekt utvikles når betegnelsen brøk tilordnes alle symbol på formen $\frac{a}{b}$) (Sfard, 2008). *Innkapsling* refererer til å gi navn til et sett med objekter og bruke det navnet i entall når vi snakker om egenskapene til alle objektene (f.eks. når det snakkes om en kvadratisk funksjon innkapsles tallpar som $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$) (Sfard, 2008). *Reifisering*, eller tingliggjøring, handler om å erstatte snakk om handlinger med snakk om objekter (f.eks. når $\frac{5}{7}$ introduseres med «jeg delte hele med 7 og tok 5 av delene» senere blir til «jeg har $\frac{5}{7}$ av helheten») (Sfard, 2008). Dette er tegn på at eleven utvikler objektivering av diskursen og dermed beveger seg mot en utforskende deltakelse. I vår masteroppgave kan vi se objektivering hos en elev som ikke fokuserer på den gitte oppgaveløsningen og dens konkrete data; i stedet fokuserer eleven på hva gjennomsnitt og median betyr som matematiske objekter og hvordan histogram og søylediagrammer som visuelle mediatorer kan brukes til å rapportere data og hvordan diagrammene kan tolkes.

Begrunnelse. En elev som bare fokuserer på prosessen har ikke mulighet til å vurdere egen ytelse opp mot ekspertens rutine (Lavie et al., 2019). En elev som fokuserer på prosessen argumenterer for svaret på en ligning ved å gjenta handlingene og vise at de ble utført riktig (Lavie et al., 2019). For at eleven skal kunne jobbe mot en utforskende deltakelse er det hensiktsmessig at eleven begrunner utfallet (Lavie et al. 2019). En elev begrunner løsningen når eleven erstatter den ukjente i en ligning for å sette prøve på svaret (Lavie et al., 2019).

Knyttet til vår studie kan en elev som fokuserer på prosessen begrunne svaret ved å vise til egen utregning. En elev som begrunner at medianen samsvarer med datamaterialet og histogrammet beveger seg mot en utforskende deltakelse.

2.1.3 Læring i matematikk

Sfard (2008) mener det skjer læring i matematikk når elevenes diskurser endres eller utvides. Det er en forutsetning at elevene først må bli deltakere av den matematiske diskursen. Å bli deltaker i den matematiske diskursen skjer gradvis fra at elevene løser oppgavene i et kollektiv til at eleven klarer å løse oppgavene på sin unike måte (Lavie et al., 2019). Underveis i prosessen individualiserer eleven de kollektive tenkemåtene og arbeidsmåtene til sine egne slik at eleven blir i stand til å tenke selv for å løse ulike problem (Sfard, 2008). Når en elev lærer om median og gjennomsnitt, kan eleven etter hvert utvide og endre diskursen, og senere løse matematiske problemer på sin egen måte. I følge Sfard (2008) oppstår de mest meningsfulle mulighetene for læring når det skjer en konflikt i elevenes kommunikasjon. Dette skjer når det er en forskjell på kollektivets og elevens egne samtalemåter, for eksempel ved bruk av andre ord, nye måter å se mediatorer på eller ulike forståelser av narrativer (Sfard, 2008). Da får eleven mulighet til å individualisere kollektivets tenkemåter til sine egne for å klare å løse problemene.

Læring kan skje på to nivå: objektnivå og metanivå (Sfard, 2020). Når det skjer læring på objektnivå, skjer en utvikling av den allerede eksisterende diskursen gjennom utvidelse av språk, rutiner eller nye godkjente narrativer (Sfard, 2020). Dette kan oppnås uten en ekspert (Sfard, 2020). På metanivå skjer det endringer i diskursens meta-regler (Sfard, 2020). Et eksempel fra Sfard (2020) er at et godkjent narrativ, om at multiplikasjon alltid er større, forsvinner når elevens gamle diskurs om bare heltall blir innordnet i diskursen om rasjonale tall. Da endres diskursens meta-regler fordi det godkjente narrativet i den gamle diskursen kan være en misoppfatning i den nye diskursen (Sfard, 2020). Å lære å bevise kan være læring på metanivå (Sfard, 2008). Dette innebærer å forstå hvordan et bevis utvikles: hvordan elever kan gå frem, hva som kan være et gyldig resonnement og hvordan et bevis presenteres (Sfard, 2008). I motsetning til læring på objektnivå har læreren en betydelig rolle for at det skal kunne skje læring på metanivå (Sfard, 2020). Den eneste måten en elev kan bli medlem av en ny diskurs er ved å imitere lærerens prestasjoner (Sfard, 2020). Samtidig er det læreren som må motivere elevene til å bli deltakere i den matematiske diskursen (Sfard, 2020). For å oppnå læring på metanivå introduseres elevene for et ritual, og ved støtte fra læreren kan elevene bevege seg fra en rituell mot en utforskende deltakelse (Sfard, 2020).

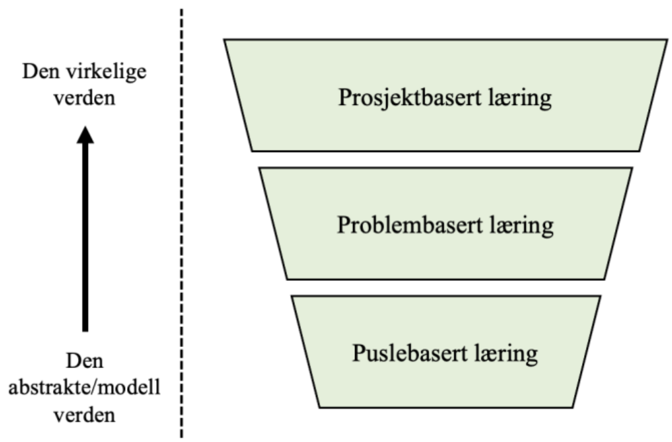
Faktorer som kultur, identitet og læreren er med på å påvirke elevenes læring i matematikk (Sfard, 2020). Undervisning av den matematiske diskursen i ulike kulturer gir ulike læringsprosesser (Sfard, 2020). Det kan også oppstå en subjektiv diskurs utenfor den matematiske diskursen hvor individene blir snakket om. Først og fremst kan dette redusere deltakelsen i den matematiske diskursen og dermed skjer mindre læring (Sfard, 2020). Samtidig kan det, ifølge Sfard (2020), sette merkelapper på elevene og påvirke deres selvfølelse i arbeidet med den matematiske diskursen. De sterke elevene kan ha større tro på seg selv og dermed større sannsynlighet for å mestre i motsetning til de svake elevene. Det er gjennom matematikkundervisning at elevene får invitasjonen til den matematiske diskursen, og vi som lærere må stille oss spørsmålet om elevene får mulighet til å utforske diskursen eller bare godta ritualene (Sfard, 2020).

2.2 Puslebasert læring

Målet med puslebasert læring er å legge et grunnlag slik at studenter blir gode problemløsere i samfunnet (Falkner et al., 2010). I den virkelige verden kan man dele problemløsning inn i tre kategorier: prosjektbasert, problembasert og puslebasert læring (Falkner et al., 2010). I Figur 1 illustreres forholdet mellom puslebasert læring og de veletablerte læringsmetodene prosjektbasert og problembasert læring (Falkner et al., 2010; Klymchuck, 2017).

***Figur 1**.*

Illustrerer forholdet mellom puslebasert læring, problembasert læring og prosjektbasert læring. Oversatt fra Puzzle-based Learning for Engineering and Computer Science, Falkner et al., 2010, IEEE Computer.



Som Figur 1 viser er prosjektbasert læring nært knyttet til den virkelige verden (Falkner et al., 2010). I prosjektbasert læring håndteres komplekse situasjoner (Falkner et al., 2010). Det finnes ofte ikke en bestemt eller korrekt løsning på problemet (Falkner et al., 2010). Et eksempel kan være å finne den beste lokasjonen til en ny flyplass (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). For å finne den beste løsningen arbeides det i grupper hvor medlemmene har ulik bakgrunn og ferdigheter (Falkner et al., 2010). Ettersom problemene er nært knyttet til den virkelige verden kan det gjøre at gruppen må ta usikre og skiftende forhold i betraktning (Falkner et al., 2010).

Det neste nivået i Figur 1 er problembasert læring. I motsetning til prosjektbasert læring kan det i problembasert læring kreves mer kunnskap knyttet til et bestemt fagfelt (Falkner et al., 2010). Det som kjennetegner problembasert læring er at problemene kan stimulere til læring og være et redskap for utvikling av problemløsningsferdigheter (Barrow, 1996). For at dette kan skje bør problemet presenteres slik det er i den virkelige verden (Barrow, 1996). I problembasert læring tar studentene ansvar for egen læring ved å identifisere og forstå problemet, i tillegg til å jobbe i små grupper med forskjellige mennesker (Barrow, 1996). Gjennom disse kjennetegnene forventes det at studentene kan tilegne seg ny informasjon gjennom selvstyrt læring. Studentene jobber sammen, diskuterer, sammenligner og vurderer det de har lært (Barrow, 1996). I både prosjektbasert og problembasert læring må studentene vurdere kunnskapen de har og kunnskapen de trenger for å løse problemet (Falkner et al., 2010). I puslebasert læring legges det vekt på å forbedre studenters læring gjennom utvikling av kritisk tenking og anvendelse av generelle problemløsningsstrategier (Falkner et al., 2010). Et puslebasert problem er ustrukturert og det er ingen forhåndsbestemte steg eller standardalgoritmer å følge (Klymchuk, 2017). Gjennom puslebaserte problem engasjeres studenters følelser, kreativitet og nysgjerrighet (Klymchuk, 2017).

Puslebaserte problemer kjennetegnes av fire kriterier: enkelhet, generalitet, underholdende og eureka-faktoren (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008; Klymchuk, 2017; Radmehr & Vos, 2020). Det er foreslått at problemene kan være enkle å angi og huske (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008: Radmehr & Vos, 2020). Dette øker sannsynligheten for at studentene husker fremgangsmåten til senere situasjoner (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). Generalitet handler om at problemene kan hjelpe studentene å utvikle sine problemløsningsferdigheter. Dette skjer ikke alene bare ved å løse problemer, men det kan støttes av strategier fra en lærer (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). Problemene kan kunne relateres til studentenes forkunnskaper og erfaring, og være underholdende for å øke studentenes engasjement (Radmehr & Vos, 2020). At problemene er underholdende, henger ofte sammen med problemets eureka-faktor. De kan være krevende slik at studentene på et tidspunkt opplever frustrasjon knyttet til problemløsningen. Når studentene finner en riktig løsningsmetode, kan de få en følelse av tilfredshet og det såkalte eureka-øyeblikket (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). For å oppnå dette øyeblikket bør ikke løsningen på problemet være åpenbar og enkel (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). En puslebasert oppgave inneholder nødvendigvis ikke alle de fire kriteriene, for eksempel kan noen oppgaver ha mange detaljer som gjør de vanskelige å huske (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008).

Innenfor puslebasert læring kan puslebaserte problem kategoriseres i: sophism, paradox og puzzle. *Sophism* er et matematisk argument som inneholder et ugyldig utsagn som virker korrekt (Klymchuk, 2017). I arbeid med sophism må studentene analysere argumentet for å finne en ugyldig begrunnelse, og kan dermed få en dypere forståelse for de matematiske konseptene (Klymchuk & Staples, 2013). Eureka-øyeblikket kan komme når studentene oppdager feller i det som for de virker som et riktig argument (Klymchuk & Staples, 2013). Et *paradox* er et gyldig argument, men utsagnet kan være kontraintuitivt (Klymchuk, 2017). Et slikt argument kan være med på å hjelpe studenter å forstå at deres intuisjon og første tanke om et matematisk konsept kan være feil (Klymchuk & Staples, 2013). Dette kan være med å skape nysgjerrighet, diskusjon og motivasjon. Et *puzzle* er et ustrukturert spørsmål presentert på en underholdende måte (Klymchuk, 2017). Puzzle krever ofte mye analysering, og det kan derfor være vanskelig for studenter å strukturere informasjonen og finne en god fremgangsmåte (Radmehr & Vos, 2020). I vår studie fokuseres det på sophism- og paradoxoppgaver. De er med på å skape diskusjon i matematikklasserommet. Sophism og paradox kan vise studenter at det ikke er uvanlig med feil i argumenter innenfor matematikken og at det er helt menneskelig å feile (Rezvanifard et al., 2022).

2.3 Statistikk

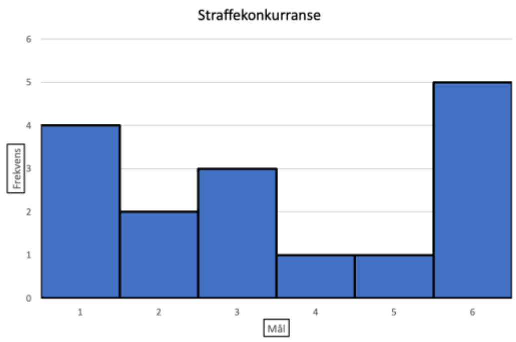
Vi har designet fire puslebaserte oppgaver innenfor temaet statistikk på 9.trinn. I oppgavene har vi valgt å fokusere på stolpediagram, histogram, og sentralmålene gjennomsnitt og median. Dette er sentrale begreper innenfor statistikkundervisning.

Sentralmål og spredningsmål forteller oss begge noe om datamaterialets resultater. Spredningsmålet sier noe om variasjonen i et datasett og gjør det mulig å sammenligne verdifordelinger i ulike datasett (Bryman, 2012). Sentralmål gir oss innblikk i verdifordelingen i et datasett (Bryman, 2012). Sentralmålene er gjennomsnitt, median og typetall. Vi fokuserer på gjennomsnitt og median. Gjennomsnitt kan forstås på to ulike måter (Van de Walle et al., 2015). Blant statistikere forteller gjennomsnittet hva det sentrale balansepunktet i datasettet er (Van de Walle et al., 2015). Det representerer også hva alle verdiene i datamaterialet hadde vært om de hadde blitt utjevnet (Van de Walle et al., 2015). Ved å forstå gjennomsnittet som balansepunktet kan det illustrere at ulike datasett kan ha samme gjennomsnitt (Van de Walle et al., 2015). Vi regner gjennomsnitt ved å finne den totale summen av et sett verdier, og dividerer med antall verdier (Clark et al., 2021). I en matematisk formel blir det slik: $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ der x_1, x_2 til x_n er verdiene og n er antall verdier. Median er midtpunktet i et datasett relatert til en variabel (Clark et al., 2021). For å finne midtpunktet må verdiene stilles i stigende rekkefølge, og i et datasett med oddetall verdier er det den midterste verdien. For å kunne bruke en matematisk formel må alle verdiene i datasettet få et nummer i rekkefølgen, n. Deretter kan vi finne den midterste verdien ved formelen $verdi\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Da finner vi hvilket nummer verdien har i rekkefølgen. I et datasett med partall verdier er medianen middelverdien av de to midterste verdiene. Medianen regner vi ut slik $\tilde{x} = \frac{\left(verdi\left(\frac{n}{2}\right)+verdi\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)}{2}$. Konteksten er med å påvirke hvilket sentralmål, av gjennomsnitt og median, som er det mest hensiktsmessige å bruke. Medianen påvirkes ikke av en eller flere ekstreme verdier, såkalte outliers, utenfor resten av datasettet, noe gjennomsnittet gjør (Van de Walle et al., 2015). I små datasett kan ekstreme verdier ha stor påvirkning på gjennomsnittet (Van de Walle et al., 2015). Elevene har behov for å kunne forstå hvordan datamaterialets ekstreme verdier kan påvirke valg av sentralmål (Van de Walle et al., 2015).

I statistikk brukes diagram for å presentere kvantitativ data. Diagram gjør dataen enkel å forstå (Bryman, 2012). Statistiske grafer viser ofte analyser av data og det er en måte å kommunisere resultatene på (Van det Walle et al., 2015). Samtidig kan statistikk misbrukes ved at det fremstilles for å overdrive funn i mediene, og derfor bør statistiske begrep arbeides med i skolematematikken (Van de Walle et al., 2015). Det finnes mange ulike diagram, men vi fokuserer på stolpediagram og histogram. Et stolpediagram (Figur 2) er en visuell representasjon av data som bruker stolper for å representere antall, prosent eller fordeling av verdier (Clark et al., 2021). Et stolpediagram brukes vanligvis hvis det arbeides med nominale eller ordinale variabler (Bryman, 2012). Hver søyle i Figur 2 viser antall personer som faller innenfor hver kategori, i dette tilfellet antall mål scoret. Det viser derimot ikke antallet i hver stolpe i forhold til det totale antallet (Bryman, 2012).

Figur 2.

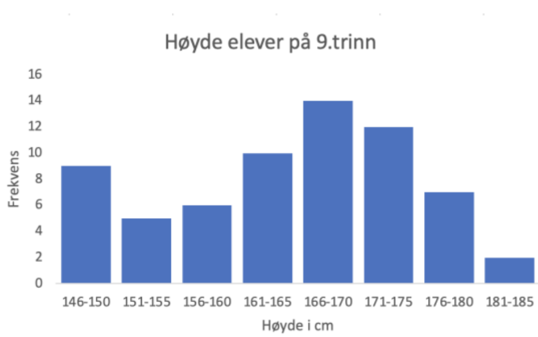
Eksempel på et stolpediagram.



Et histogram (Figur 3) er en visuell representasjon av data som bruker søyler for å representere kontinuerlige variabler (Clark et al., 2021). I et histogram blir data om enkeltindivider eller mindre grupper slått sammen til større grupper, og derfor gir diagrammet redusert informasjon (Boels et al., 2019). Variabelen som brukes i et histogram er enten et intervall eller forholdstall (Bryman, 2012). Hver søyle i Figur 3 representerer den relative størrelsen som faller innenfor hvert høydeintervall. Et histogram kan derfor være nyttig når det er en større mengde data og mange ulike tall som skal presenteres (Van de Walle et al., 2015). Når verdiene er gruppert, kan det være utfordrende å telle antall verdier innenfor de ulike intervallene (Van de Walle et al., 2015).

Figur 3.

Eksempel på et histogram.



3.0 Tidligere forskning

I dette kapittelet presenterer vi relevant forskning som isolert gir informasjon om henholdsvis: kommognisjon (Delkapittel 3.1), puslebasert læring (Delkapittel 3.2) og undervisning og læring av statistikk (Delkapittel 3.3).

3.1 Kommognisjon

I forarbeidet med denne studien ble det gjort søk i kjente vitenskapelige tidsskrifter om matematikkutdanning for å finne tidligere forskning innenfor undervisning og læring av statistikk med kommognisjon som sentral læringsteori. Mangelen på tidligere forskning på dette temaet gjorde oss derfor interessert i å bruke kommognisjon som rammeverk for å analysere elevers arbeid med puslebaserte problemer innenfor statistikk. Tidligere forskning viser at kommognisjon har blitt brukt som rammeverk for å undersøke læring i matematikk på ulike nivå (Valenta & Enge, 2022; Remillard, 2014; Shinno & Fujita, 2021; Ärleback & Frejd, 2013). Det er undersøkt på grunnskolenivå (Valenta & Enge, 2022; Shinno & Fujita, 2021), videregåendenivå (Ärleback & Frejd, 2013) og universitetsnivå (Remillard, 2014). Tidligere forskning viser at kommognisjon er en bred teori som kan brukes som en nyttig linse i ulike matematiske rom for å fremheve den matematiske diskursen innenfor flere områder (Presmeg, 2016). Med bakgrunn i Presmegs (2016) forskning er det interessant å bruke kommognisjon som linse for å analysere elevers arbeid med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og diagrammer.

Flere studier har brukt kommognisjon som et rammeverk for å utforske læring av matematiske bevis (Shinno & Fujita, 2021; Remillard, 2014; Valenta & Enge, 2022). Valenta og Enge (2022) undersøkte, i sin studie, hvordan elever lærer å bevise. I studien kommer det frem at å lære å bevise kan være læring på metanivå (Valenta & Enge, 2022). Studien rapporterer både elevenes og lærerens handlinger i arbeidet med bevis (Valenta & Enge, 2022). Valenta og Enge (2022) vektla å «forklare hvorfor» i arbeidet med argumentasjon og bevis fordi tidligere studier har vist at det kunne være en effektiv måte å introdusere bevis for studenter. De mener at å «forklare hvorfor» kan hjelpe elevene å tolke oppgavesituasjonen mer i samsvar med den bevisende diskursen. I studien har Valenta og Enge (2022) også identifisert ord i oppgavesituasjonene som kan invitere til en ny diskurs. Å skille mellom «alltid, noen ganger og aldri» kan gi elevene mulighet til å forstå eksemplenes rolle i et bevis (Valenta & Enge, 2022). Studiens funn viser at ordene, «alltid, noen ganger og aldri», er sentrale når læreren skal formidle begrensninger med å bruke empiriske argumenter for å bevise generelle utsagn (Valenta & Enge, 2022). Ordene peker på et klart skille i matematikk med å vite at et utsagn er gyldig noen ganger eller alltid gyldig. I studien initieres endringene i diskursen av oppgaven elevene jobber med og hvordan undervisningspraksisen kan fremme læring på metanivå blir formidlet implisitt til elevene, mens de arbeider med oppgaven. Det ble, i undervisningspraksisen, tatt i bruk flere rutiner når det gjaldt bevis: hvordan gå fram, skillet mellom alltid og noen ganger og hvordan gjøre eksplisitte begrunnelser (Valenta & Enge, 2022). Dette gjorde, ifølge Valenta og Enge (2022), undervisningen og læringen utfordrende. Læring på metanivå ble formidlet til elevene gjennom arbeidet med oppgavene (Valenta & Enge, 2022). I studien fikk elevene i oppgave å begrunne hvorfor et utsagn var gyldig (Valenta & Enge, 2022). Studiens funn viser at elevene begrunnet utsagnet som gyldig med å bruke generiske eksempler, men med støtte fra læreren kommuniserte elevene begrunnelsen mer generelt. Dessuten viser funnene at elevene i arbeidet med oppgavene deltok utforskende ved hjelp av lærerens støtte (Valenta & Enge, 2022). Lærerens rolle var med på å endre elevenes tolkning av oppgavesituasjonen og hjalp dem med å forstå hvordan de skulle gå fram for å begrunne et gyldig utsagn (Valenta & Enge, 2022).

Flere studier viser at støtte fra en ekspert, læreren, var nødvendig for at elevene skulle oppnå læring på metanivå (Cooper & Lavie, 2021; Nachlieli & Elbaum-Cohen, 2021; Nachlieli & Tabach, 2012, 2019; Valenta & Enge, 2022). Cooper og Lavie (2021) foreslo, basert på studien til Nachlieli og Tabach (2012), at overgangen til en ny diskurs oppsto ved å gi elevene utforskende oppgaver. Studiens funn viser at utforskende oppgaver ga elevene muligheten til å bruke rutiner i utforskende deltakelse (Cooper & Lavie, 2021). Tidligere forskning viser at selv om elevene hadde en rituell deltakelse kunne læreren være med på å oppmuntre elevene til mer undersøkende tenkning (Nachlieli & Elbaum-Cohen, 2021). Dette ved at læreren forklarte resonnementene og de underliggende kravene som måtte aksepteres for at nye metaregler kunne oppstå (Nachlieli & Elbaum-Cohen, 2021).

Lavie et al. (2019) fokuserte, i sin studie, på videreutvikling av rutinebegrepet, som vi har beskrevet i Delkapittel 2.1.2. Nachlieli og Tabach (2022) har tatt i bruk Lavie et als. (2019) videreutvikling av rutinebegrep for å undersøke hvordan læring kan oppstå i klasseromsdiskusjoner. Ved å bruke deritualisering til å undersøke elevenes læring i en klasseromsdiskusjon fant Nachlieli og Tabach (2022) at elevene først brukte en bestemt prosedyre for å svare på spørsmålene. Funnene viser at da elevene fikk hjelp og støtte av læreren og medelever ble deltakelsen gradvis mer utforskende, noe de fant ved å undersøke stegene i deritualiseringsprosessen (Nachlieli & Tabach, 2022).

3.2 Puslebasert læring

Det meste av forskningen gjennomført innenfor puslebasert læring er gjort blant ingeniørstudenter på universitetsnivå (Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017; Parhami 2008; Rezvanifard et al., 2022, 2023; Thomas et al., 2015). Studier viser at flere studenter, som arbeidet med puslebaserte oppgaver, opplevde at de utviklet tenkeferdigheter (Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017; Rezvanifard et al., 2022, 2023), evne til å «tenke utenfor boksen» (Klymchuk, 2017), problemløsningsevner (Klymchuk, 2017; Rezvanifard et al., 2022, 2023) og matematisk forståelse (Rezvanifard et al., 2022, 2023). Dette gjelder nødvendigvis ikke bare for studenter på ingeniørstudiet, og det kan derfor tenkes at elever på ungdomstrinnet også kan utvikle tenkeferdigheter, problemløsningsferdigheter og evne til «å tenke utenfor boksen». På ingeniørstudier kan det forventes at studentene allerede har en viss kunnskap og interesse for matematikk, mens klassene i grunnskolen består av ulike forkunnskaper og interesse for faget.

Tidligere forskning rapporterer at noen studenter opplevde arbeidet med puslebaserte oppgaver som en frihet, mens andre opplevde det som en «snublestein» (Falkner et al., 2010). Siden dette er oppgaver elever på ungdomstrinnet ikke er kjent med fra før kan det hende noen av elevene kjenner på en lignende følelse i arbeidet. Studenters arbeid med puslebaserte oppgaver viste også at det ikke bare var de beste studentene som klarte å løse oppgavene (Klymchuk, 2017). Rezvanifard et al. (2023) beskrev i sin studie at arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver kan ha hjulpet elever som strevde med å identifisere egne misoppfatninger og støtte utviklingen av deres forståelse. Disse funnene gjør det interessant å undersøke om bruken av puslebaserte oppgaver kan hjelpe elever på 9.trinn å identifisere egne vansker i statistikk.

En av intensjonene med å inkludere puslebaserte oppgaver i undervisning har vært for å undersøke om det kan påvirke studentenes følelser, kreativitet og nysgjerrighet (Klymchuk, 2017). Flere ingeniørstudenter likte å delta i arbeid med puslebaserte oppgaver (Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017; Parhami 2008; Rezvanifard et al., 2022, 2023; Thomas et al., 2015). Tidligere forskning viser at ingeniørstudenter opplevede puslebaserte oppgaver som underholdende og morsomme (Rezvanifard et al., 2022, 2023) og at oppgavene bidro til mer variert og kreativ undervisning (Rezvanifard et al., 2023). Forskning foreslår at å inkludere puslebaserte oppgaver i undervisning skaper motivasjon og engasjement hos studenter på ingeniørstudier (Falkner et al., 2010; Parhami, 2008). Rezvanifard et al. (2023) rapportere også at studenter opplevde at deres samarbeidsferdigheter ble forbedret som et resultat av å delta i arbeid med puslebaserte oppgaver.

Rezvanifard et al. (2023) fikk også positive tilbakemeldinger fra forelesere på bruken av puslebaserte oppgaver i undervisning av differensiallikninger til ingeniørstudenter. Den positive bruken av puslebaserte oppgaver i undervisningen av matematikk til ingeniørstudier gjør det interessant å undersøke om de også kan brukes på et lavere nivå, ungdomstrinnet. Det er også spennende å undersøke hvordan denne formen for oppgaver fungerer i en norsk skole, da det ikke er gjort noe tidligere forskning på temaet. Mangelen på tidligere forskning gjør det interessant å undersøke om elever på 9. trinn opplever utvikling av tenkeferdigheter, problemløsningsevner og matematisk forståelse. Samtidig håper vi puslebaserte oppgaver kan gjøre statistikkundervisningen mer engasjerende og kreativ for elevene. Her kan det være vi får et annet resultat med tanke på elevenes faglige kunnskap og interesse.

3.3 Undervisning og læring av statistikk

Flere studier har undersøkt studenters tolkning og forståelse av statistiske grafiske fremstillinger (Boels et al., 2019; delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). Tidligere forskning har identifisert flere misoppfatninger i arbeid med histogram, både blant universitetsstudenter (delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016) og blant elever på videregående skole (delMas et al., 2005). I tillegg er det gjennomført en litteraturgjennomgang av 86 publikasjoner som rapporterer om, eller inneholder misoppfatninger knyttet til studenters, læreres, forskeres eller andres arbeid med histogram (Boels et al., 2019). I arbeidet med histogram hadde studenter vanskeligheter med å lese korrekt av histogrammet (delMas et al., 2005), identifisere antall variabler som var avbildet (Boels et al., 2019) og tolke sentralmålene median og gjennomsnitt (Boels et al., 2019; Kaplan et al., 2017). Kaplan et al. (2017) undersøkte fire misoppfatninger, hentet fra tidligere forskning, i arbeidet med histogram. Misoppfatningene de undersøkte var: (1) studenter forstår ikke forskjellen på søylediagram og et histogram, (2) studentene bruker feil akser når de skal rapportere om sentralmål, (3) studentene mener at flatere histogram betyr mindre variasjon og (4) studenter tolker diagrammet slik at verdiene til venstre fant sted tidligere i tid. Resultatene til Kaplan et als. (2017) undersøkelse underbygget eksistensen av tre av misoppfatningene (1, 3, 4) blant universitetsstudentene. Studentene som deltok i studien viste disse misoppfatningene før statistikkundervisning var gjennomført og etter undervisningen vedvarte misoppfatningene (Kaplan et al., 2017).

Flere studier viser at stolpediagram ble benyttet for å argumentere hos elever i grunnskolen (Bakker & Gravemeijer, 2004), videregående elever og universitetsstudenter (delMas et al., 2005). Bakker og Gravemeijer (2004) rapporterte i sin studie om elever på mellomtrinnet som klarte å bruke stolpediagram til støtte i statistiske argumenter og regne ut gjennomsnittet når datamaterialet var fremstilt i et stolpediagram. Flere studier trakk frem at studenter forvekslet stolpediagram og histogram (delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). delMas et al. (2005) fant i deres undersøkelser at dette trolig kommer av at studenter tidlig har blitt introdusert for stolpediagram og senere forvekslet histogram med stolpediagram. De rapporterte at studenter generelt foretrakk grafer hvor en stolpe representerte en enkel verdi i stedet for en frekvens (delMas et al., 2005). Dermed konkluderte studenter ofte med at enhver graf som brukte stolper for å representere data var et stolpediagram (delMas et al., 2005). Tidligere forskning har identifisert flest misoppfatninger blant studenters arbeid med histogram, og dette gir oss grunnlag for å undersøke ungdomsskoleelevers arbeid fordi det kan tenkes at studentenes misoppfatninger kommer fra grunnskolen. Vår studie kan bidra med oppgaver som enda ikke er undersøkt i statistikkundervisning og som kan hjelpe elevene å oppdage sine egne styrker og svakheter.

Tidligere forskning viser at studenter har vanskeligheter med å identifisere sentralmålene median og gjennomsnitt i et histogram (Boels et al., 2019; Cooper & Shore, 2017a; Kaplan et al., 2017). Flere studenter forsto i arbeidet med histogram at medianen var «midten», men de hadde vanskeligheter med å identifisere hvilken middelverdi de måtte regne ut når datamaterialet var fremstilt i et histogram (Cooper & Shore, 2017a). Forskning viser at den vanligste misoppfatningen i arbeid med median var at elevene ikke sorterte verdiene i stigende rekkefølge fra minst til størst verdi (Van de Walle et al., 2015). Det samme gjaldt for studentene når de skulle regne gjennomsnittet av datamaterialet, men også da hadde vansker med å bruke de riktige verdiene i utregningen «adder og del på antall verdier» (Cooper & Shore, 2017a).

Tidligere forskning har identifisert flere vanskeligheter med å undervise studenter i statistikk (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Koparan, 2014). I intervju med flere lærere identifiserte Koparan (2014) flere vanskeligheter i undervisning av statistikk, blant annet vanskeligheter med datarepresentasjon og sentralmål. Andre utfordringer i statistikkundervisning inkluderer at emnet er komplekst og dermed er det vanskelig å motivere studenter til å engasjere seg i arbeidet, vanskeligheter med den underliggende matematikken og at de er ukomfortable med uorganisert data og flere mulige tolkninger av data (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Selv etter endt statistikkundervisning oppfattet grunnskoleelever faget som vanskelig (Koparan, 2014).

Histogram trekkes frem som vanskelig for flere studenter å forstå (Cooper & Shore, 2017b; delMas et al., 2005; Kaplan et al., 2017; Kukliansky, 2016). For studenter på universitet kan fakultetet ta utgangspunkt i at studentene allerede har forståelse for histogram og derfor reduserer tiden i undervisning på arbeid med histogrammer (Kaplan et al., 2017). Forskning viser derimot at tiden brukt på arbeid med histogrammer ikke burde reduseres og at det kan være hensiktsmessig med diskusjon av histogrammer og hvordan det forholder seg til numeriske verdier (Kaplan et al., 2017). Cooper og Shore (2017b) presenterte i sin studie, hvor målet var å gjøre læreren oppmerksom på ulike metoder å vurdere variasjon i søylediagrammer og histogrammer, at læreren kan gi studenter mulighet til å identifisere hvilke dataverdier de henter ut av den grafiske representasjonen. Dette for å øke studentenes oppmerksomhet til dataens kontekst (Cooper & Shore, 2017b). Forskning viser at studentene gikk tilbake til å bruke en standardalgoritme uten de korrekte dataverdiene hvis de ikke først identifiserte dataverdiene (Cooper & Shore, 2017b).

3.4 Vårt bidrag

Forskningsartiklene som er presentert i dette kapittelet er med på å skape et helhetlig bilde av kommognisjon som læringsteori, puslebasert læring og undervisning og læring av statistikk. Det er ulikt hovedfokus på de ulike forskningsartiklene som er presentert og som tidligere nevnt er det ingen tidligere studier som har undersøkt bruken av kommognisjon for å analysere elevers arbeid med puslebaserte oppgaver i statistikk i den norske grunnskolen. Dette er en av årsakene til at vi har valgt å gjennomføre vår studie med puslebasert læring på ungdomsskolen. De studiene som har forsket på puslebasert læring har undersøkt ingeniørstudenters arbeid (Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017; Parhami, 2008; Rezvanifard et al., 2022, 2023; Thomas et al., 2015). Forskning gjort med kommognisjon som sentral læringsteori har ikke undersøkt elevers arbeid med puslebaserte oppgaver. Kommognisjon er et mye brukt teoretisk rammeverk (f.eks. Cooper & Lavie, 2021; Valenta & Enge, 2022; Nachlieli & Tabach, 2022; Presmeg, 2016) og kan derfor være interessant å bruke i vår studie. Studien kan være et utfyllende supplement til forskning på puslebasert læring i den norske grunnskolen, i temaet statistikk og med bruken av kommognisjon som sentral læringsteori.

4.0 Forskningsdesign

I dette kapittelet beskriver vi først oppgavens vitenskapelige paradigme (Delkapittel 4.1) og valg av forskningsmetodikk i Delkapittel 4.2. Så beskriver vi, i Delkapittel 4.3 instrumentene, i Delkapittel 4.4 utvalget, i Delkapittel 4.5 oppgavene som ble gitt til elevene og i Delkapittel 4.6 analyseprosessen. Vi avslutter med å gjøre rede for oppgavens troverdighet i Delkapittel 4.7 og etiske vurderinger (Delkapittel 4.8).

4.1 Vitenskapelig paradigme

I denne studien har vi valgt en pragmatisk tilnærming (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). En slik tilnærming lar oss som forskere ta i bruk både kvalitative og kvantitative metoder for å besvare forskningsspørsmålet. En pragmatisk tilnærming er ikke knyttet til en bestemt filosofi eller realitet og dermed kan kunnskap komme fra både kvantitative og kvalitative metoder (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018).

Som pragmatikere har vi som forskere større frihet og flere valgmuligheter til hvordan studien kan utformes. Det er større frihet for å velge metoder og teknikker som best passer behovet og hensikten med studien (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Forskningsspørsmålene våre omhandler 9.trinnselevers deltakelse i arbeid med sophism- og paradoxoppgaver i statistikkundervisningen. Forskningsproblemet i en pragmatisk tilnærming bør fokuseres i en samfunnsvitenskapelig forskning (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Samtidig bør det brukes ulike fremgangsmåter og metoder for å få kunnskap om problemet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Elevene i studien har løst sophism- og paradoxoppgaver i mindre grupper og svart på spørreskjema. Seks av elevene deltok i et mer utdypende intervju. På denne måten ble det brukt ulike fremgangsmåter for å besvare forskningsspørsmålene. Dette ble gjort for at vi som forskere skulle få den beste forståelsen (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018), og derfor så vi det nødvendig å bruke både kvantitative og kvalitative metoder. Dette støttes i en pragmatisk tilnærming da de ikke forstår verden som en enhet, og det trengs derfor flere ulike måter å analysere verden på for å finne hensiktsmessig kunnskap (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018).

Det er viktig at vi som pragmatiske forskere begrunner hvorfor vi blander ulike metoder for å besvare forskningsproblemet vårt (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi velger å trekke frem hvorfor de andre hovedparadigmene: postpositivisme, konstruktivisme og transformativ, er avvisende for denne studien. Et post-positivistisk verdensbilde mener det bare er én sannhet om virkeligheten, og de prøver å besvare spørsmål knyttet til å bestemme og forklare sammenhenger mellom variabler og teorier (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Samtidig er de forsiktige med å bestemme noe fast når studien er knyttet til mennesker og deres atferd og handlinger (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). I en konstruktivistisk tilnærming er det flere realiteter som er konstruert sosialt, og i en slik tilnærming godtar de flere mulige tolkninger (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Konstruktivistene bruker intervjuer for å undersøke individuelle holdninger og tolkninger, og på denne måten kan ikke studien generaliseres, men bare fortelle noe om den spesifikke konteksten (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Et transformativt verdensbilde oppsto fordi de ikke følte det post-positivistiske verdensbilde passet til marginaliserte individer i samfunnet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Forskeren i et transformativt verdenssyn tar opp problemstillinger som omhandler dagsaktuelle samfunnsspørsmål og fletter sammen politikk og politisk handling for å bli kvitt sosial undertrykkelse (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). For å undersøke elevers deltakelse i arbeid med sophism- og paradoxoppgaver i statistikkundervisningen trenger vi ulike forståelser av virkeligheten. Vi ønsker å kunne forklare sammenhenger mellom puslebasert læring i statistikkundervisning og elevenes deltakelse, læring og engasjement. Samtidig ønsker vi å utdype resultatene for å få et dypere innblikk i elevenes deltakelse og opplevelse. Et post-positivistisk eller konstruktivistisk verdensbilde er ikke passende, fordi vi ønsker å kunne forklare sammenhenger og individuelle handlinger og tolkninger. Studien tar ikke utgangspunkt i marginaliserte individer eller dagsaktuelle samfunnsspørsmål og derfor er ikke en transformativ tilnærming hensiktsmessig å benytte.

4.2 Valg av forskningsmetodikk

Mixed methods er en forskningsmetodikk hvor det blir brukt både kvantitativ og kvalitativ data (Clark et al., 2021). Hensikten med å blande de to metodene er at dette gir en bedre og mer fullstendig forståelse for forskningsproblemet (Clark et al., 2021). Når mixed methods blir brukt er det viktig at det begrunnes hvorfor det er nødvendig å bruke både kvantitativ og kvalitativ metode (Clark et al., 2021). Clark et al. (2021) diskuterte ulike grunner til å bruke en mixed methods tilnærming, som for eksempel: triangulering, fullstendighet og sampling. *Triangulering* handler om å sammenligne funnene fra den kvantitative og kvalitative dataen for så å kunne styrke funnene (Clark et al., 2021). De to metodene bidrar til *fullstendighet* ved å gi et komplett svar på forskningsproblemet (Clark et al., 2021). *Sampling* handler om at funnene fra den kvantitative undersøkelsen brukes til å velge informanter å studere videre i kvalitativ metode (Clark et al., 2021). Ifølge Clark et al. (2021) finnes det tre ulike typer mixed methods. Vi har valgt et convergent design til vår studie. I et convergent design samles kvantitativ og kvalitativ data samtidig, og det spiller ingen rolle hvilken data som samles inn først fordi de ikke påvirker hverandre (Clark et al., 2021). En slik tilnærming innenfor mixed methods blir ofte brukt for å utnytte styrken til begge metodene (Clark et al., 2021). For å undersøke våre forskningsspørsmål tok vi lydopptak av elevers arbeid med fire oppgaver, to sophismoppgaver og to paradoxoppgaver. Deretter samlet vi inn kvantitativ data i form av et spørreskjema. Spørreskjemaet har gitt oss et innblikk i elevenes opplevelse i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Deretter utførte vi seks utdypende semistrukturerte intervjuer. Vi valgte fem elever som besvarte oppgavene på et begynnende, grunnleggende og høyt nivå og én elev med lav deltakelse i gruppearbeidet. Slik kunne vi få en spredning av ulik deltakelse og dermed også ulik opplevelse av arbeidet med de fire puslebaserte oppgavene.

4.3 Instrumentene

I denne delen beskriver vi hvordan spørreskjemaet og intervjuguiden ble utviklet.

4.3.1 Spørreskjema

Utformingen av spørreskjemaet (Tabell 1) ble basert på relevant litteratur om puslebasert læring (Klymchuk, 2017; Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008; Rezvanifard et al., 2023) og ble strukturert i fire kategorier.

Tabell 1.

Spørreskjema om elevenes opplevelse i arbeid med sophism- og paradoxoppgavene.

Kategori	Spørsmål
Affektive aspekt	1. Å arbeide med oppgavene gjør at jeg bedre liker statistikk.
	2. Jeg liker å delta i aktiviteter med oppgavene.
	3. Utfordringene jeg møter i arbeidet med oppgavene motiverer meg til å løse andre problemer i statistikk.
	4. Å arbeide med oppgavene øker min selvtillit i statistikk.
Utvikling av forståelse i statistikk og problemløsnings ferdigheter	5. Å arbeide med oppgavene hjelper meg å utvikle min forståelse i statistikk.
	6. Å arbeide med oppgavene hjelper meg å se mine styrker og svakheter i statistikk.
	7. Å arbeide med oppgavene hjelper meg å utvikle mine problemløsningsferdigheter i statistikk.
	8. Å arbeide med oppgavene gjør at jeg ser sammenhenger mellom matematikk og den virkelige verden.
	9. Å arbeide med oppgavene gjør at jeg tenker mer kritisk i arbeid med statistikk.
	10. Jeg prøver å løse oppgavene med ulike fremgangsmåter
	11. For å lykkes med å løse oppgavene, må jeg se på oppgaven fra ulike perspektiver.
	12. Å arbeide med oppgavene får meg til å tenke mer på statistiske begrep.
Sosial utvikling	13. Å arbeide med oppgavene blir bedre når jeg får samarbeide med andre.
	14. Å arbeide med oppgavene hjelper meg å utvikle mine sosiale ferdigheter.
Åpne spørsmål	15. Hvordan tror du å arbeide med oppgavene vil påvirke din læring i statistikk? Begrunn svaret ditt.
	16. Hvilke utfordringer møtte du i arbeid med oppgavene? Hvordan håndterte du utfordringene?
	17. Hvordan påvirker ditt arbeid med oppgavene dine personlige og sosiale ferdigheter? Begrunn svaret ditt.
	18. Vil du ha mer av slike typer oppgaver i statistikkundervisningen? Begrunn svaret ditt.

De fire første spørsmålene, i kategorien affektive aspekt, ble designet for å undersøke elevenes følelser til sophism- og paradoxoppgavene i statistikk. Vi kategoriserte de fire første spørsmålene som affektive aspekt fordi Klymchuk (2017) har rapportert at puslebaserte oppgaver engasjerer studenters følelser. De undersøker også om arbeidet med puslebaserte oppgaver kan ha påvirket elevenes motivasjon og selvtillit i statistikk da flere studier (Falkner et al., 2010; Parhami, 2008) viser til økt motivasjon og selvtillit blant flere av studentene som deltok. De åtte neste spørsmålene, i kategorien utvikling av forståelse i statistikk og problemløsningsferdigheter, ble utviklet for å undersøke utviklingen av elevenes forståelse i statistikk etter arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Denne kategorien ble utviklet med bakgrunn i funnene til Rezvanifard et al., (2022, 2023), som viser at flere studenter utviklet sin forståelse i arbeidet med puslebaserte oppgaver. De åtte spørsmålene skulle også undersøke om arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene kan ha utviklet elevenes problemløsningsferdigheter noe flere studier (Klymchuk, 2017; Rezvanifard et al., 2023) har rapportert at studenter hadde utviklet i arbeidet med puslebaserte oppgaver. I kategorien sosiale aspekt ble det designet to spørsmål knyttet til elevenes opplevelse av samarbeidet og om arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene har bidratt til utvikling av elevenes sosiale ferdigheter. Spørsmålene knyttet til det sosiale aspektet ble utviklet med bakgrunn i tidligere forskning (Rezvanifard et al. 2022, 2023) som viser at flere studenter opplevde forbedring av deres samarbeidsevner i arbeidet med puslebaserte oppgaver. Det ble også utformet fire åpne spørsmål slik at elevene skulle få mulighet til å utdype sine opplevelser knyttet til læring, utfordringer og ferdigheter i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Her ble de også spurt om de ønsket flere sophism- og paradoxoppgaver i undervisningen.

4.3.2 Intervjuguide

Målet med det utdypende intervjuet var å berike funnene, fra spørreskjemaet, om elevenes opplevelse med de puslebaserte oppgavene og utforske dette videre. Spørsmålene (Tabell 2) til det utdypende intervjuet ble utviklet basert på spørreskjemaet. Intervjuene var semistrukturerte. Intervjuet med elevene tok mellom 20-30 minutter og det ble tatt lydopptak.

Tabell 2.

Utdypende intervjuspørsmål.

Nr.	Spørsmål
1	Hvilke utfordringer møtte dere på?
2	Prøvde dere å løse sophism på ulike måter? Hva med paradox?
3	Hva synes du om å jobbe med sophism? Hva med paradox?
4	Hva var det som gjorde at du likte eller mislikte arbeidet med sophism? Hva med paradox?
5	Hvordan påvirket arbeidet med sophism din selvtillit eller mestringsfølelse? Hva med paradox?
6	På hvilke måter påvirker ditt arbeid med sophism dine sosiale ferdigheter? Hva med paradox?
7	Ville du foretrukket å løse sophism alene eller sammen i gruppe? Hva med paradox?
8	Hvordan var det å arbeide med sophism i forhold til andre typer oppgaver dere arbeider med i statistikk? Hva med paradox?
9	Lærte du mer eller mindre av å arbeide med sophism? Hva med paradox?
10	På hvilke måter hjelper eller hjelper ikke sophism deg med å se dine styrker og svakheter i matematikk? Hva med paradox?

4.4 Utvalg

Vi var i praksis på en ungdomsskole i Trøndelag og valget falt derfor på denne skolen, elevene og 9.trinn. Utvalget er et bekvemmelighetsutvalg, et utvalg som er lett tilgjengelig for forskeren (Bryman, 2012). På grunn av dette kan ikke svarene generaliseres, men bidra til videre forskning (Bryman, 2012). Vi informerte praksislæreren vår om prosjektet og hun videreformidlet dette til elevene på trinnet. Vi ønsket at hele klassen skulle bli presentert for prosjektet for å få flest mulig deltakere på ulikt faglig nivå i matematikk. Det var 13 elever som takket ja til å delta. Sammen med læreren delte vi disse elevene i fem tilfeldige grupper, uavhengig av elevenes faglige nivå i matematikk, som skulle samarbeide med oppgavene. Til intervjuene valgt vi fem elever på ulikt matematisk nivå. Av de 13 elevene utmerket kun én elev seg på høyt nivå, mens det var seks elever på et grunnleggende nivå og fire elever på lavt nivå. Til intervjuene valgte vi Stian på høyt nivå, Marit og Tomas på grunnleggende nivå og Linda og Kurt på et lavt nivå. To elever deltok mindre i gruppearbeidet med de fire oppgavene, og vi kan derfor ikke si noe om deres matematiske nivå. Vi valgte å intervjue Jens, som var en elev med lav deltakelse i gruppearbeidet, for å undersøke hans opplevelser av arbeidet. På bakgrunn av det ble det ulikt antall elever på de ulike nivåene.

4.5 Oppgavene til elevene

For å studere elevenes arbeid med puslebaserte oppgaver designet vi to sophismoppgaver og to paradoxoppgaver til elevene. Puslebaserte oppgaver er ikke brukt i den norske grunnskolen eller innenfor statistikk. For å utforme oppgavene tok vi utgangspunkt i de fire kriteriene på puslebaserte oppgaver: enkelhet, generalitet, underholdende og eureka-faktoren (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008; Klymchuk, 2017; Radmehr & Vos, 2020). I tillegg fant vi inspirasjon fra statistikkoppgaver i matematikkbøker. Oppgavene vi utformet var enkle i form av at de er kort formulert, slik at de blir enkle for elevene å forstå og huske til senere. Dette betyr nødvendigvis ikke at oppgavene er enkle å løse, men at elevene på et senere tidspunkt kan huske fremgangsmåten (Michalewizc, Z. & Michalewizc, M., 2008). Oppgavene gir ikke elevene en steg-for-steg-fremgangsmåte og elevene blir derfor problemløsere i arbeidet. Vi har designet oppgaver med bakgrunn i elevenes interesser slik at de kan være underholdende og engasjerende å arbeide med. Hvis elevene klarer å identifisere rett eller galt i løsningen kan de oppleve det såkalte eureka-øyeblikket.

Utformingen av oppgavene, med mål om kvalitetssikring, var en tidkrevende prosess. Vi fikk god hjelp og veiledning av vår masterveileder som tidligere har gjennomført forskning i relasjon til puslebasert læring (Radmehr & Vos, 2020; Rezvanifard et al., 2022, 2023). I tillegg utførte vi en pilotundersøkelse på to grunnskolelærerstudenter med mastergrad i spesialpedagogikk. Vi valgte disse studentene fordi det var flere år siden de studerte matematikk og derfor kan nivået være likt elevene i studien. Det var ingen 9.trinnselever tilgjengelig for å delta i pilotundersøkelsen og valget falt derfor på grunnskolelærerstudenter.

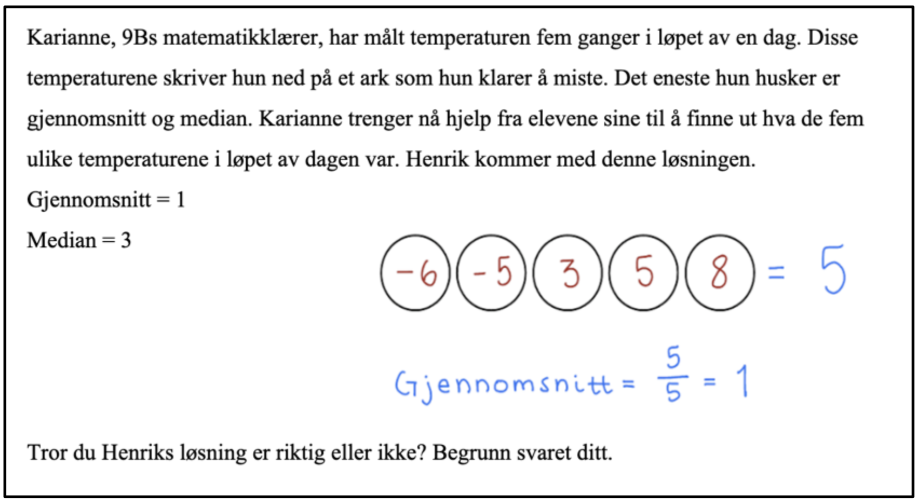
4.5.1 Paradoxoppgavene

Et paradox er et gyldig argument, men utsagnet kan være kontraintuitivt (Klymchuck, 2017). Paradox oppgaver kan hjelpe studenter å forstå at deres intuisjon og første tanke om et matematisk konsept kan være feil (Klymchuk & Staples, 2013).

I første paradoxoppgave (Figur 4) har vi vektlagt gjennomsnitt og median. Elevene har ikke arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver tidligere og vi valgte derfor et lavere kognitivt nivå på første oppgave. I oppgaven skal ikke elevene regne ut gjennomsnitt og median, men finne ut hvilke temperaturer som har vært i løpet av en dag. Dette skal de gjøre ut fra temperaturenes gjennomsnitt og median. Fra praksis har vi observert at elevene hadde vansker med å forstå hva gjennomsnitt og median betydde i en kontekst, og i denne oppgaven blir elevene bedt om å tolke gjennomsnitt og median for temperaturene. Det er en paradoxoppgave fordi elevene ved første øyekast kanskje ikke tror at gjennomsnittet er 1, fordi elever kan tenke at gjennomsnittet må være en av verdiene i datasettet eller at 1 virker lite sannsynlig med tanke på datasettets verdier.

Figur 4.

Oppgave 1, den første paradoxoppgaven.


Karianne, 9Bs matematikklærer, har målt temperaturen fem ganger i løpet av en dag. Disse temperaturene skriver hun ned på et ark som hun klarer å miste. Det eneste hun husker er gjennomsnitt og median. Karianne trenger nå hjelp fra elevene sine til å finne ut hva de fem ulike temperaturene i løpet av dagen var. Henrik kommer med denne løsningen.

Gjennomsnitt = 1

Median = 3

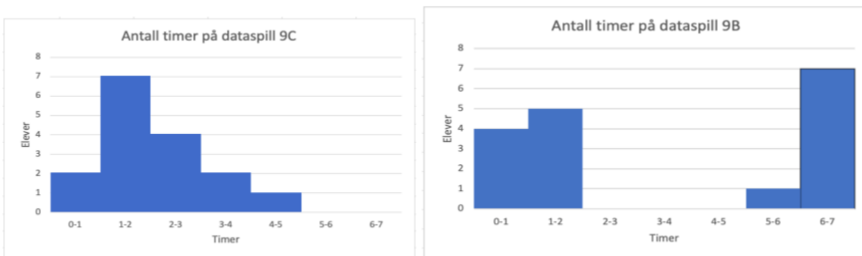
Tror du Henriks løsning er riktig eller ikke? Begrunn svaret ditt.

I den andre paradoxoppgaven (Figur 5) er fokuset å regne ut og sammenligne medianen i to ulike histogrammer. Denne oppgaven er en paradoxoppgave fordi histogrammene er såpass ulike at det ikke virker som de har den samme medianen. Tidligere forskning indikerer at studenter har vanskelig for å identifisere sentralmål i arbeid med histogram (f.eks. Boels et al., 2019; Kaplan et al., 2017). Vi har også opplevd at mange elever brukte argumentet «det tallet som er i midten» for å regne ut medianen. I denne oppgaven må elevene hente ut de riktige verdiene fra histogrammene for å regne ut medianen.

Figur 5.

Oppgave 4, den andre paradoxoppgaven.

Vi har spurt elevene på 9.trinn hvor mange timer de daglig bruker på å spille dataspill. Dette har vi fremstilt i to diagrammer som viser antall timer elevene i 9B og 9C bruker på dataspill.



Oda har funnet at medianen i de to ulike datasettene er den samme og at medianen er 1-2 timer med dataspilling.
Har Oda funnet riktig median? Hvorfor?

4.5.2 Sophismoppgavene

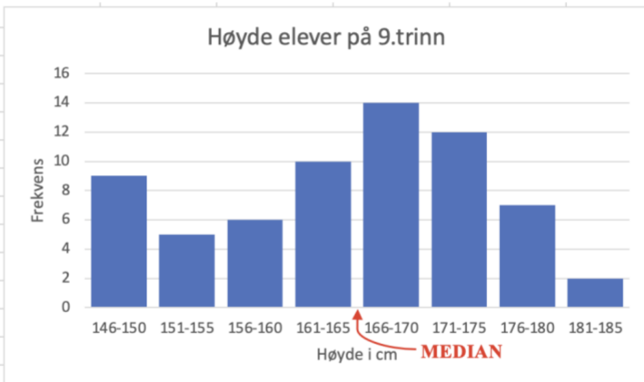
Sophism er et matematisk argument som inneholder et ugyldig utsagn som virker korrekt (Klymchuk, 2017). Studenter kan få en dypere forståelse for de matematiske konseptene ved at de må analysere argumentet for å finne en ugyldig begrunnelse (Klymchuk & Staples, 2013).

I den første sophismoppgaven (Figur 6) skal elevene finne ut om Helene har regnet ut riktig median i histogrammet. Det er en sophismoppgave fordi det kan for elevene virke logisk å plassere medianen i midten av stolpene, selv om dette ikke stemmer. Det er ulikt antall verdier på hver side av medianen Helene har markert, noe som kan være vanskelig å oppdage med en gang. Tidligere forskning viser at flere studenter har vansker med å identifisere middelverdien fra datasett fremstilt i histogram (f.eks. Boels et al., 2019; Cooper & Shore, 2017a; Kaplan et al., 2017). I denne oppgaven blir elevene utfordret til å vurdere sin løsning opp mot Helenes løsning, og må da regne ut medianen i histogrammet og tolke den.

Figur 6.

Oppgave 2, den første sophismoppgaven.

Alle elevene på 9.trinn ble spurt om høyden sin. Denne har blitt fremstilt i et histogram. Helene har funnet medianen blant elevenes høyde, den har hun markert i diagrammet.



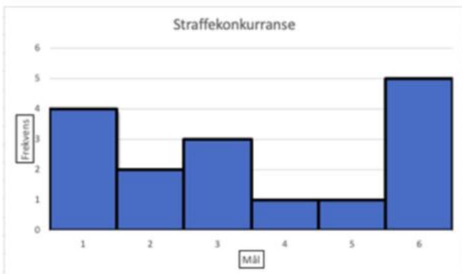
Har Helene markert riktig median i histogrammet? Begrunn svaret deres.

I den andre sophismoppgaven (Figur 7) skal elevene undersøke om gjennomsnittet er regnet riktig. Cooper og Shore (2017a) har indentifisert at flere studenter hadde vansker med å identifisere gjennomsnitt i et histogram fordi de ikke brukte riktige verdier i utregning. Vi ønsker å undersøke om elever på ungdomstrinnet har de samme vanskene i arbeid med stolpediagram som forskning viser at studenter hadde i arbeidet med histogram. I oppgaven må elevene ta stilling til om Harald har hentet de riktige verdiene fra stolpediagrammet og om hans fremgangsmåte for å regne ut gjennomsnittet er riktig. Dette er en sophismoppgave fordi Haralds fremgangsmåte i utregningen av gjennomsnittet er et ugyldig utsagn. Elevene kan anta utsagnet som gyldig fordi det virker som at Harald har addert sammen antall mål scoret og dividert på antall skudd. Hvis elevene undersøker diagrammet kan de oppdage at Harald har hentet feil verdier fra stolpediagrammet fordi 16 elever totalt scoret 56 mål og derfor stemmer ikke hans utregning av gjennomsnittet.

Figur 7.

Oppgave 3, den andre sophismoppgaven.

I en kroppsøvingstime på en ungdomsskole trener elevene i 9B til fotballkamp. Hver person som deltok i kroppsøvingstimen, fikk totalt 6 skudd mot mål. Elevene i klassen lurer på deres gjennomsnittlige scoringer. Elevene fremstilte antall treff mot mål i stolpediagrammet som er vist under.



Harald har funnet gjennomsnittet slik:

$4 + 2 + 3 + 1 + 1 + 5$

$\rightarrow$ **16**

$\frac{16}{6}$

$\approx$ **2.67**

Har Harald regnet gjennomsnittet riktig? Begrunn svaret deres.

4.6 Dataanalyse

I vår studie har vi brukt en induktiv innholdsanalyse for å analysere datamaterialet av elevenes arbeid med sophism- og paradoxoppgavene og intervjuene. I en induktiv analyse er teori resultatet av forskningen og en alternativ måte å koble teori og forskning (Clark et al., 2021). En induktiv tilnærming kan inneholde elementer fra en deduktiv tilnærming (Clark et al., 2021). Målet var å være fri fra teori, men vi har basert forskningsspørsmålene våre på Sfards (2008) teori om kommognisjon og teori på puslebasert læring (f.eks. Klymchuk, 2017; Rezvanifard et al., 2022). Vi er derfor ikke helt frigjort fra det teoretiske rammeverket, men vi kan hevde at kommognisjon hovedsakelig brukes i studien for å tolke funnene. Dette har derfor påvirket oss når vi analyserte gruppearbeidet og intervjuene. I en innholdsanalyse er målet å beskrive egenskapene til datamaterialets innhold ved å undersøke hvem som sier hva og til hvilken effekt (Vaismoradi et al., 2013). Ved å bruke en innholdsanalyse får vi mulighet til å kvantifisere vårt kvalitative datamateriale (Vaismoradi et al., 2013).

Det første steget i analyseprosessen er å organisere og forberede datamaterialet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Etter at vi hadde samlet inn lydopptak av gruppenes arbeid med oppgavene, elevenes individuelle svar på spørreskjemaet og hatt seks intervjuer, begynte vi å organisere og forberede datamaterialet for analyse. Vi begynte med å transkribere lydopptakene fra gruppearbeid og de seks intervjuene. Vi skannet gruppenes oppgaveark for å undersøke fremgangsmåtene de brukte i arbeidet med å løse de fire oppgavene. Det neste steget er å lese og få oversikt over datamaterialet (J. W. Creswell & J.

D. Creswell, 2018). Vi diskuterte interessante funn og tanker vi hadde gjort oss opp. Samtidig så vi over transkriberingen av de ulike intervjuene og diskuterte enkelte elementer vi hadde lagt ekstra merke til.

Steg tre er å kode datamaterialet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Å kode betyr å organisere datamaterialet i kategorier som representerer interessante funn fra datamaterialet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Innholdsanalyse bruker en beskrivende tilnærming i kodingen av datamaterialet (Vaismoradi et al., 2013). Vi startet med å analysere gruppenes arbeid med sophism- og paradoxoppgavene. Dette innebar å lese transkripsjonene fra lydopptakene og oppgavearkene. Vi undersøkte gruppenes ulike fremgangsmåter og prøvde å kategorisere disse og finne ut om noen hadde brukt samme fremgangsmåte i arbeidet med de fire oppgavene. Fra lydopptakene observerte vi hvordan elevene kommuniserte sine tanker og fremgangsmåter med hverandre. Vi har blitt påvirket av Sfards (2008) teori om kommognisjon og har derfor sett noen sammenhenger mellom Sfards begreper og elevenes arbeid og ulike fremgangsmåter.

Vi analyserte så det kvantitative spørreskjemaet. På grunn av lav utvalgsstørrelse kunne ikke inferensielle statistiske analyser, for eksempel Fishers eksakte tekst, gjennomføres. Vi ønsket å bruke Fishers eksakte test for å undersøke om det var signifikant forskjell på elevenes svar knyttet til sophism- og paradoxoppgavene. Vi har derfor gjennomført en beskrivende sammenligning av svarene fra spørreskjemaet. Elevenes svar på spørreskjemaet har vi presentert i en tabell som forteller hva elevene har svart på de ulike spørsmålene. Spørreskjemaet besto av 14 Likert-skala elementer fra helt enig til helt uenig. Det besto også av fire åpne spørsmål. Tilnærmingen vi har brukt for å analysere de åpne spørsmålene er en induktiv innholdsanalyse. Vi samlet elevenes svar knyttet til sophism- og paradoxoppgavene og utviklet fem fordelskategorier. Videre analyserte vi elevenes opplevelser i arbeidet med oppgavene ut fra intervjuene, med bruk av samme tilnærming (f.eks. en induktiv innholdsanalyse). Vi utviklet seks kategorier som ble knyttet til fordeler med sophism- og paradoxoppgavene. I tillegg undersøkte vi elevenes utfordringer i arbeidet med oppgavene og i denne forbindelse utviklet vi tre kategorier. Kategoriene som ble utviklet blir presentert i resultatkapittelet.

4.7 Validitet og reliabilitet

Tilnærmingen brukt i denne studien er mixed methods og derfor må vi undersøke reliabiliteten og validiteten til funnene fra både kvantitative og kvalitative perspektiver. I Delkapittel 4.7.1 undersøker vi validiteten og reliabiliteten til de kvalitative funnene, både de åpne spørsmålene i spørreskjemaet og intervjuene. I Delkapittel 4.7.2 undersøker vi reliabiliteten og validiteten til den kvantitative delen av spørreskjemaet (dvs. de 14 Likert-skala elementene).

4.7.1 Validiteten og reliabiliteten til de kvalitative funnene

Validitet handler om gyldighet, og hvor gyldige studiens funn er fra forskerens, deltakernes eller leserens standpunkt (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). I følge J. W. Creswell & J. D. Creswell (2018) finnes det ulike strategier for å adressere validitet i kvalitative studier. Vi beskriver de følgende: triangulere data, rik beskrivelse, forskerens partiskhet, negativ informasjon, lengre tid og veiledning, for å vurdere studiens validitet. For å få en god forståelse av forskningsproblemet har vi *triangulert forskjellig data,* både spørreskjema (som består av 14 Likert-skala elementer og fire åpne spørsmål) og utdypende intervju (J. W.

Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi ga også en *rik beskrivelse* av hele prosessen og funnene. Dette gjør også at beskrivelsene blir mer realistiske for leseren, noe som kan være med på å styrke validiteten (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi har også gitt en god beskrivelse av oss som forskere for å avdekke *partiskhet* knyttet til studien, for å skape ærlighet og åpenhet for leseren (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). I en kvalitativ studie kan vi ikke utelukke at vi som forskere påvirker resultatene (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi beskriver vår bakgrunn som forskere og vårt grunnlag for å forske på puslebasert læring. For å øke studiens validitet presenterer vi alle funn, også de som gir *negativ informasjon*, for å best kunne beskrive virkeligheten (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Multivokal forskning inkluderer flere stemmer i den kvalitative analysen (Tracy, 2010). For å øke studiens validitet har vi brukt multivokalitet gjennom å intervjue elever på ulikt matematisk nivå. Dette gir rom for ulike meninger og kan bidra til å ivareta flere synspunkt (Tracy, 2010). Vi fant elevene som deltok i studien gjennom tre ukers praksis, og vi har derfor brukt en *rimelig tid* i felt. Dette gjør at vi som forskere får en dypere forståelse av det vi undersøker (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Gjennom grunnskolelærerutdanningen har vi også fått tildelt en *veileder* som leser gjennom og stiller kritiske spørsmål til arbeidet vi gjør. En veileder styrker studiens validitet ved å være en kritisk venn (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). De puslebaserte oppgavene ble designet i tett samarbeid med veilederen som vurderte dem med et kritisk blikk. Som tidligere nevnt løste medstudenter oppgavene i designprosessen, noe som også er med på å styrke studiens validitet.

Reliabilitet går ut på hvor pålitelig og stabilt datamaterialet i forskningen er (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). For å forsikre oss at datamaterialet i forskningen er pålitelig har vi i metodekapittelet gått grundig gjennom de ulike stegene i forskningen (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi kodet datamaterialet hver for oss, før vi sammenlignet funnene. Underveis i prosessen har vi diskutert funnene. For å øke studiens reliabilitet er det viktig at kodene er stabile og at meningen ikke endres underveis (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Ved å ha diskutert sammen, og med veileder, har vi kunnet kryssjekke kodene for å forsikre at de betyr det samme og inneholder samme del av datamaterialet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi har også gjennomgått transkripsjonene nøye. Dette for å sjekke at informasjonen er gjengitt korrekt og at det ikke er åpenbare feil i transkripsjonene (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Vi er to som transkriberer og har derfor sjekket hverandres transkripsjoner samtidig som vi hørte gjennom lydopptakene. Dette er med på å styrke studiens reliabilitet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018).

4.7.2 Validiteten og reliabiliteten til de kvantitative funnene

Validitet i kvantitativ forskning sjekker om vi som forskere måler det vi har til hensikt å måle (Clark et al., 2021). Det finnes flere ulike måter å måle validitet på, vi bruker overflatevaliditet og konvergent gyldighet. Overflatevaliditet bør være et minimum når vi som forskere utvikler et spørreskjema (Clark et al., 2021). Dette gjøres for å sjekke at spørreskjemaet reflekterer innholdet i temaet som utforskes (Clark et al., 2021). For å sjekke overflatevaliditet får vi som forskere andre til å gjennomgå spørreskjemaet, helst en ekspert eller en erfaren innen feltet og temaet (Clark et al., 2021). Vi har utviklet spørreskjemaet i tett samarbeid med veileder som tidligere har hatt erfaring med å forske på puslebasert læring (f.eks. Radmehr & Vos, 2020; Rezvanifard et al., 2023). Dette for å forsikre oss at spørsmålene dekker områdene vi ønsker å undersøke videre. Vi måler også konvergent gyldighet. Dette handler om å sammenligne målene med andre mål, utviklet av ulike metoder, på det samme temaet

(Clark et al., 2021). Dette for å vise at svarene er relatert til hverandre (Clark et al., 2021). I tillegg til det kvantitative spørreskjemaet har vi et kvalitativt intervju som undersøker elevenes opplevelse i arbeidet med oppgavene mer utdypende. For å måle spørreskjemaets validitet var vi interessert i å bruke faktor analyse. Det er en statistisk teknikk for å gruppere elementer i vanlige faktorer (Parsian & AM, 2009). Hver faktor tolkes i henhold til elementene og oppsummerer elementene i et lite antall faktorer (Parsian & AM, 2009). På grunn av lav utvalgsstørrelse kunne vi ikke gjennomføre en faktor analyse.

I kvantitativ forskning handler reliabilitet om konsistensen av målene (Clark et al., 2021). Det finnes ulike mål på reliabilitet og i vår studie måler vi reliabilitet med intern konsistens (Clark et al., 2021). Vi har brukt Cronbachs alfa for å sjekke den interne reliabiliteten (Bryman, 2012). Alfa koeffisienten vil variere mellom 1, perfekt intern reliabilitet, og 0, ingen intern reliabilitet (Bryman, 2012). For svarene på spørsmålene knyttet til sophismoppgavene var alfa koeffisienten 0,79 og for spørsmålene knyttet til paradoxoppgavene var koeffisienten 0,83, som begge er innenfor det akseptable området. Den interne reliabiliteten sjekker om indikatorene som utgjør skalaen er konsistente (Bryman, 2012). Dette handler om respondentenes poengsum på en indikator kan relateres til deres poengsum på andre indikatorer (Bryman, 2012). I et spørreskjema med flere elementer hvor hver respondents svar på hvert spørsmål danner en samlet poengsum, kan det alltid være en mulighet for at elementene ikke er relatert til samme tema (Clark et al., 2021). Vi må være sikre på at alle elementene relateres til hverandre hvis ikke kan dataen være mindre pålitelig (Clark et al., 2021).

4.8 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

Gjennom hele forskningsprosessen må vi som forskere foreta etiske beslutninger og følge etiske retningslinjer. Dette for at forskningen vi gjør ikke skal komme til skade for deltakerne (Clark et al., 2021; De nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Som forskere har vi et ansvar overfor deltakerne i studien og vi må respektere dem (Clark et al., 2021; De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Dette betyr at deltakerne skal være informert og samtykke til å delta i forskningen, samtidig som de har krav på privatliv (De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021).

Før studien har vi som forskere innhentet informert samtykke til å delta i forskningen fra deltakerne. Dette gjelder selv om det ikke hentes sensitive opplysninger (De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Et informert samtykke skal være frivillig, informert og utvetydig, noe som betyr at det ikke skal være noe ytre press, for eksempel belønning eller konsekvenser for å delta i forskningen (De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). I tillegg skal deltakerne få informasjon om hva det innebærer å delta i studien (De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Alle elevene på 9.trinn fikk i forkant utdelt informert samtykkeskjema (Vedlegg 1) der prosjektet ble introdusert og de fikk informasjon om at deltakelsen var frivillig. Vi hentet samtykke fra elevenes foresatte, samtidig som det var frivillig for elevene å delta og de måtte selv samtykke.

Vi brukte to undervisningsøkter i matematikk til å gjennomføre studien. Alle elevene ble inkludert, selv om ikke alle hadde takket ja til å delta i studien. Dette fordi oppgavene elevene skulle jobbe med er relevante og kan bidra til å utvikle problemløsningsferdigheter, samarbeid og forståelse i statistikk. Det var også et ønske fra læreren at opplegget kunne gjennomføres for alle. Elevene som skulle delta i studien ble plassert på grupperom da de jobbet med oppgavene slik at forstyrrelsene skulle bli minst mulig. Elevene hadde allerede hatt om statistikk tidligere i skoleåret og vi trengte derfor bare å repetere temaet. Vi brukte litt tid felles til å gjennomgå sentrale begreper før elevene fikk jobbe i mindre grupper med oppgavene.

Prosjektet ble meldt til NSD – Norsk senter for forskningsdata. Meldeskjemaet 795340 ble godkjent 14.12.2022 (Vedlegg 2). Vi tok da kontakt med praksislæreren slik at hun kunne informere elevene og dele ut samtykkeskjema. Elevene ble også informert om behandling av personopplysninger og deres rettigheter underveis i prosessen, både før undervisningen og før lydopptakene startet.

Deltakerne i studien har også krav til privatliv, og dette gjøres ved at deltakerne anonymiseres (Clark et al., 2021; De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Det betyr at dataen blir anonymisert etter at den er hentet inn, og det gjør at man ikke kan spore opplysninger tilbake til individet (De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Å anonymisere deltakerne helt er en stor utfordring hvis de ikke skal kunne gjenkjennes av noen (Clark et al., 2021; De Nasjonale forskningsetiske komiteer, 2021). Deltakerne i studien kan kunne gjenkjennes av medelever eller ansatte på skolen og full anonymitet er derfor ikke mulig å opprettholde. Elevene blir derfor pseudonymisert (Clark et al., 2021).

5.0 Resultater

Dette kapittelet er tredelt, hvor vi i Delkapittel 5.1 presenterer funnene fra elevenes arbeid med oppgavene. I Delkapittel 5.2 presenterer vi funnene fra spørreskjemaet som gir oss et innblikk i elevenes opplevelser i arbeidet. Til slutt, i Delkapittel 5.3, presenterer vi funnene fra intervjuene som gir oss utdypende informasjon om elevenes opplevelser.

Tilnærmingen vi har brukt for å analysere datamaterialet er en induktiv innholdsanalyse. Målet var å være fri fra teori, men vi har basert forskningsspørsmålene og derfor også datainnsamlingen på Sfards (2008) læringsteori kommognisjon og teori om puslebasert læring (f.eks. Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017). Vi har undersøkt elevenes arbeid med de fire oppgavene og analysert ved hjelp av begreper fra kommognisjon. Ut fra funnene på spørreskjemaet og i intervjuene utviklet vi kategorier knyttet til elevenes opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Det var 13 elever som svarte på spørreskjemaet og seks elever som deltok i intervjuet, noe som har ført til ulik prosentandel i de ulike instrumentene. I resultatkapittelet, og videre i Kapittel 6.0 kommer det tydelig frem om prosentandelen representerer resultat fra spørreskjema eller intervju.

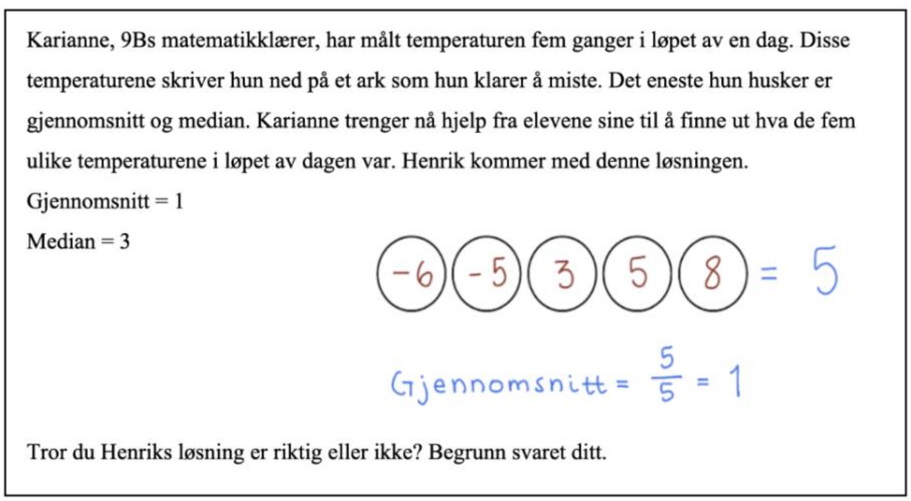
5.1 Elevenes arbeid med sophism- og paradoxoppgavene

I denne delen beskrives gruppenes bruk av ulike rutiner, visuelle mediatorer og narrativer i arbeidet med de fire puslebaserte oppgavene.

5.1.1 Oppgave 1

Figur 8.

Den første paradoxoppgaven (Gjentas for å hjelpe leserne med å få en bedre forbindelse med funnene).


Karianne, 9Bs matematikklærer, har målt temperaturen fem ganger i løpet av en dag. Disse temperaturene skriver hun ned på et ark som hun klarer å miste. Det eneste hun husker er gjennomsnitt og median. Karianne trenger nå hjelp fra elevene sine til å finne ut hva de fem ulike temperaturene i løpet av dagen var. Henrik kommer med denne løsningen.

Gjennomsnitt = 1

Median = 3

Tror du Henriks løsning er riktig eller ikke? Begrunn svaret ditt.

I arbeidet med Oppgave 1 (Figur 8) brukte fire av fem grupper (G1-4)[2] den samme rutinen for å regne ut gjennomsnittet og medianen. For å regne ut gjennomsnittet sa Martine «da skal vi jo legge sammen alt det der og dele på 5». Lotta og Tomas startet også med å si at Henrik må ha lagt sammen alle verdiene og dividert på antall verdier. Dette kan være et godkjent narrativ, fordi det gir en beskrivelse av gjennomsnittet. Selv om ikke alle gruppene

[2] Brukes som en forkortelse på hvilke grupper som deltar blant Gruppe 1, 2, 3, 4 og 5.

eksplisitt trakk frem dette narrativet, kan det virke som at disse gruppene (G1-4) tok i bruk dette da de arbeidet med oppgaven om gjennomsnittet. Tre grupper (G2-4) kom frem til at Henrik hadde satt inn de riktige temperaturene og regnet gjennomsnittet riktig. Nedenfor vises et utdrag fra Gruppe 4 med et eksempel på rutinen fire grupper (G1-4) brukte for å regne ut gjennomsnittet.

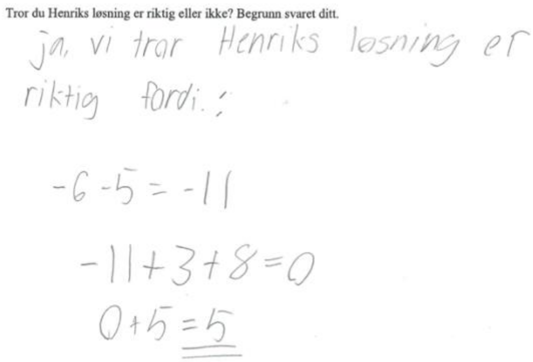
Lotta:	Men da må jo han ha plusset alle de her også delt de på [avbrutt av Tomas].
Tomas:	Antall ja.
...	
Lotta:	-6 pluss -5 pluss 3 pluss 5 pluss 8. Hva er det da?
Tomas:	-6 minus 5 det er -11 pluss 3 det blir -8, pluss 5 er -3 og pluss 8 det blir 5 da.
Lotta:	Da er det riktig, da er gjennomsnittet 5.
...	
Lotta:	Vent, vent! Vi må jo dele 5 delt på 5, det er jo 1, og gjennomsnittet er jo 1, ja, ja, er riktig.

Elevene adderte de ulike temperaturene og dividerte på antall verdier for å regne ut gjennomsnittet. Fire grupper (G1-4) regnet ut gjennomsnittet med den samme rutinen. Ettersom gruppene visste hvordan de skulle regne gjennomsnittet og medianen, kan det virke som at de tidligere har håndtert situasjoner på lignende måter. Elevene i tre grupper (G2-4) var mer prosessorienterte i sine rutiner fordi de gjentok Henriks handlinger og begrunnet løsning ved å vise at Henriks handlinger ble utført riktig.

Gruppe 5 kom frem til at Henriks løsning var riktig og begrunnet det med å regne ut gjennomsnittet (Figur 8). Kurt sa «så gjennomsnittet er 5 og medianen er 3. 3 er det midterste». Figur 8 viser Gruppe 5 sin utregning for gjennomsnittet.

Figur 9.

Gruppe 5 sin utregning av gjennomsnitt i Oppgave 1.


Tror du Henriks løsning er riktig eller ikke? Begrunn svaret ditt.

ja, vi tror Henriks løsning er riktig fordi.:

$-6-5=-11$

$-11+3+8=0$

$0+5=\underline{\underline{5}}$

Gruppe 5 svarte at Henriks løsning var riktig, men begrunnet det med at gjennomsnittet var 5, noe som ikke stemte overens med Henriks svar. Bak temperaturene står «$= 5$», noe som kan ha vært forvirrende for elevene og gjort at de tenkte at det var gjennomsnittet. Gruppe 5 sin rutine kan derfor ha vært mer prosessorientert fordi de stoppet utregningen uten å vurdere produktet. Oppgave 1 er et paradox, et gyldig argument, men utsagnet virker kontraintuitivt (Klymchuck, 2017). Ved første øyekast kan det være rart for elevene at gjennomsnittet var 1 fordi sifferet ikke er med i datamaterialet og det kan virke lite sannsynlig på grunn av datamaterialets verdier. Dette kan også være en mulig grunn til at Gruppe 5 stoppet utregningen før de var helt ferdige. Det er mulig den visuelle mediatoren, Henriks forslag til temperaturer og utregningen av gjennomsnitt, kan ha påvirket Gruppe 5, fordi de tenkte 5 var et mer logisk gjennomsnitt enn 1. Deres forståelse av den visuelle mediatoren kan ha gjort at de ikke fullførte utregningen.

Gruppe 2 trakk også frem et godkjent narrativ i arbeidet med oppgaven om medianen. Etter spørsmål fra Linda om «Hvordan regner man ut en median egentlig?» svarte Martine: «Husker du det de fortalte er at du setter opp alle tallene i stigende rekkefølge også krysser du ut i hver sin ende til du får det tallet i midten». Selv om det bare var Gruppe 2 som nevnte dette godkjente narrativet, kan det virke som at alle gruppene tok i bruk dette i sine rutiner for å løse oppgaven relatert til medianen.

Selv om Gruppe 1 brukte den samme rutinen for å regne ut gjennomsnittet og medianen som tre grupper (G2-4), skilte de seg ut fordi Stian uttrykket usikkerhet knyttet til Henriks rutine. Stian var enig med Lisbeth i at Henriks utregning av gjennomsnittet og medianen var riktig. Han mente derimot Henrik kanskje hadde tippet på tallene, fordi hvis andre tall ble satt inn kunne fortsatt gjennomsnittet være det samme. Stian brukte lang tid på å forklare og overbevise Lisbeth om at Henrik kunne ha tippet på tallene. Et lite utdrag fra samtalen er tatt med nedenfor.

Stian:	Okei, men tror vi løsningen hans er riktig, for nå har han bare satt inn [antallet i hver søyle] … fordi vi har bare gjennomsnitt og median så må vi finne ut om det her er riktig.
Lisbeth:	Jeg fant nettopp ut at det var riktig

Stian: Ja det er riktig regnet, men det kan være at det er andre tall her [temperaturer som kan gjøre at gjennomsnittet blir lik 1].

…

Stian: Ja, men hvis jeg bytter ut -6 med -5 og 8 med 7, så er det akkurat samme svar.

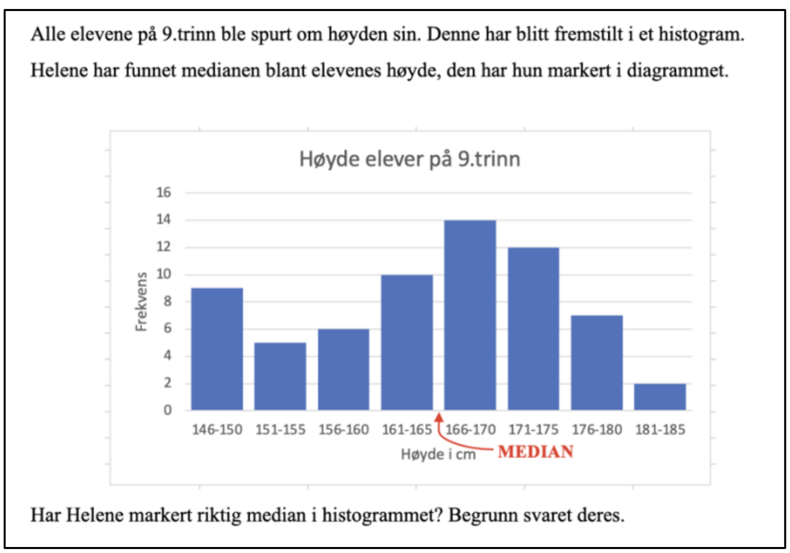
I Gruppe 1 skilte Stian og Lisbeths deltakelse i diskursen seg fra hverandre fordi Stians rutine var mer produktorientert, mens Lisbeths rutine var mer prosessorientert. Stian ønsket å undersøke produktet av oppgaven, mens Lisbeth flere ganger sa de hadde funnet løsningen. Stian var mer kritisk til Henriks løsning og sa også under intervjuet «Det er riktig, men det kan være flere løsninger». Dette kan være en observert endring i Stians deritualiseringsprosess. Som utdraget viser prøvde Stian å forklare Lisbeth at de kunne sette inn andre tall og fortsatt få samme gjennomsnitt. Han viste fleksibilitet i rutinen fordi han forsto at oppgaven kunne løses med flere rutiner og fortsatt gi samme utfall. Totalt virker det som Stian beveget seg mot en utforskende deltakelse.

Stian ble heller ikke lurt av at utsagnet i paradoxoppgaven er kontraintuitivt. Samtidig mente han at det ikke var sikkert at Henrik hadde funnet de riktige temperaturene. Stian var den eneste eleven som faktisk begrunnet Henriks valg av temperaturer. Begrunnelsen hans kan også observeres som en endring og et trinn i deritualiseringsprosessen.

5.1.2 Oppgave 2

Figur 10.

Den første sophismoppgaven (Gjentas for å hjelpe leserne med å få en bedre forbindelse med funnene).



I Oppgave 2 (Figur 10) brukte gruppene ulike rutiner for å undersøke om Helene hadde markert riktig median i histogrammet. I arbeidet med denne oppgaven var det tre grupper (G1-2, 4) som klarte å løse den riktig. To grupper (G1, 4) kom frem til at Helene hadde markert medianen feil ved å skrive verdiene fra datamaterialet i stigende rekkefølge og krysse ut for å finne midten. Gruppe 1 diskuterte litt før de kom frem til hvordan de skulle løse oppgaven, men Stian visste hvilken rutine han skulle bruke basert på den korte gjennomgangen i klasserommet.

Stian: Ja, det er den i midten, men vi skal sette det opp i rekkefølge etter hvor mange elever det er på hvilke sånn greie, sånn som de gjorde i klasserommet tidligere.

…

Stian: Det betyr at Helene har markert riktig median.

Lisbeth: Nei, hun har ikke det.

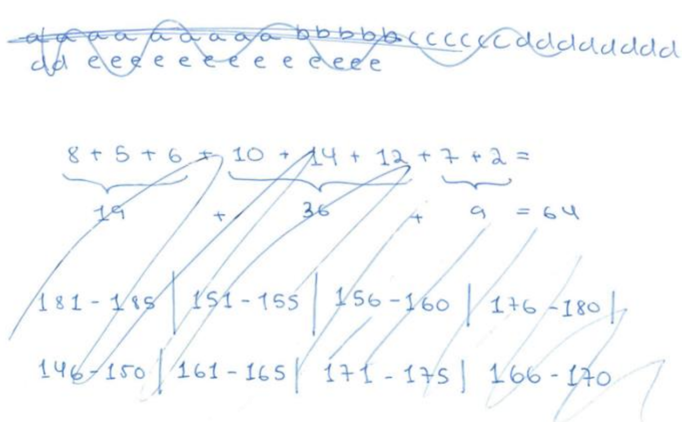
Stian: Nei, for hun har markert mellom 165 og 166.

Gruppe 1 handlet slik de hadde gjort i lignende situasjoner i arbeidet med Oppgave 2. Stian handlet basert på hvordan han hadde sett læreren, en ekspert, handle i arbeidet med en lignende oppgave i klasserommet. Stian kan dermed ha utviklet en rutine basert på tidligere erfaringer og handlinger i lignende situasjoner. Samtidig viste Stian at han forsto handlingen og forklarte Lisbeth ved å gjenfortelle et narrativ. Lisbeth spurte Stian om han visste hva medianen var, og Stian svarte at det er midten, men at de måtte stille opp alle verdiene i hver søyle. Lisbeth var raskt enig i dette, noe som kan tyde på at dette er et godkjent narrativ for Stian og Lisbeth.

Gruppe 4 løste også oppgaven ved å følge den samme rutinen som Gruppe 1, men de hadde større problemer med å bestemme seg for hvilken rutine de skulle følge. Figur 9 viser et utklipp fra Gruppe 4 sitt arbeid med Oppgave 2.

Figur 11.

Gruppe 4 sine forskjellige rutiner på Oppgave 2.



Lotta foreslo at de skulle skrive opp antallet i hver søyle for så å finne midten. Tomas var enig i dette og de begynte å skrive opp. De kalte hver søyle for en bokstav og skrev den gitte bokstaven like mange ganger som søylens verdi i histogrammet. Etter en kort stund sa Lotta at det må være en enklere måte å gjøre det på og dermed stoppet de med denne rutinen. Lotta foreslo så at de kunne legge sammen verdien til alle søylene og finne midten. Figur 11 viser at ved å legge sammen søylenes verdier fikk de totalt 64 og Lotta sa at de må finne

«Midten av 64, 64 delt på 2». Tomas dividerte summen av søylenes verdi og fikk 32. Han konkluderte raskt med at dette var svaret. Lotta innså at det var noe feil og foreslo om det ikke var gjennomsnittet de nå hadde funnet. De refererte tilbake til det godkjente narrativet og Tomas sa «Er ikke det bare å stille det [verdiene] opp fra minst til størst». Gruppe 4 begynte nå å bli usikre på hvilke verdier de skulle stille i stigende rekkefølge. For å finne den minste sa Tomas «Men det blir liksom minst fordi det er minst folk som har det [den gitte høyden]». Gruppe 4 begynte dermed å stille verdien på søylens høyde i stigende rekkefølge. Den nederste rutinen på Figur 11 viser hvordan elevene til slutt stilte verdiene i stigende rekkefølge. De fikk ikke dette til å stemme og dermed bestemte de seg for å gjøre ferdig de andre oppgavene først for så å komme tilbake til Oppgave 2. Etter å ha arbeidet med Oppgave 4, som også omhandlet median i histogram, løste Gruppe 4 Oppgave 2 uten problemer. De bestemte seg raskt for å begynne med den første rutinen igjen og satte opp alle verdiene i datamaterialet og krysset ut for å finne midtverdien. Til slutt regnet Gruppe 4 ut at medianen var $166-170$.

Oppgave 2 er en sophismoppgave og inneholder et ugyldig utsagn som virker korrekt (Klymchuk, 2017). I arbeidet med Oppgave 2 var det forventet at elevene skulle bli utfordret til å måtte vurdere sitt svar opp mot Helenes svar. Lisbeth sa raskt at Helene hadde markert feil, noe som kan tyde på at hun var sikker i gruppas fremgangsmåte. Lisbeths begrunnelse kan vurderes som en endring i deritualiseringsprosessen og hun beveget seg mot en mer utforskende deltakelse. Helene kan, i elevenes perspektiv, bli betraktet som en ekspert og lurer elevene til å tro at hun har løst oppgaven riktig. Stian og Lisbeth løste oppgaven og vurderte sin egen besvarelse opp mot Helenes. De tok egne valg og ble agenter i arbeidet med oppgaven. Dette kan tyde på at de beveget seg mot en mer utforskende deltakelse. Det samme gjelder Gruppe 4, som hadde problemer med å forstå hvordan de skulle løse oppgaven. Det kan tenkes at de var usikre på om Helene hadde markert riktig eller feil og derfor var ivrige etter å kunne løse oppgaven selv for å sjekke Helenes svar. Underveis i de ulike rutinene kom Gruppe 4 frem til forskjellige svar, men de konkluderte ikke med at noen av disse var riktige. Lotta og Tomas opplevde gjentatte ganger å få feil svar i arbeidet med Oppgave 2. I en prosessorientert rutine løses oppgaven uten mål og mening (Lavie et al., 2019). Gruppe 4 fortsatte å jobbe med oppgaven til de fikk undersøkt produktet og Lotta og Tomas kan derfor ha hatt en mer produktorientert rutine i arbeidet.

Gruppe 2 løste også oppgaven riktig, men brukte en annen rutine enn Gruppe 1 og 4. Martine foreslo først at de skulle skrive opp alle tallene og krysse ut fra hver side, slik de to andre gruppene (G1, 4) løste oppgaven. Etter hvert virker det som at Martine synes det tok for lang tid og begynte derfor å sammenligne søylene i diagrammet. Hun tok antall elever i den første søylen og trakk fra søylene for $181-185$ og $176-180$ i diagrammet.

Martine: Men hvis vi bare tar 9 der [søyle $146-150$] også minus 9 her [søyle $176-180$ og søyle $181-185$] så går det [søylene] bort, ja det er perfekt. Da er den [søyle $146-150$] borte og de [søyle $176-180$ og søyle $181-185$] er borte og da har vi 5 [søyle $151-155$] også 12 [søyle $171-175$]. 12 minus 5 det blir 7, 7 minus 6 [søyle $156-160$ har verdi 6] er 1 og den [søyle $156-160$] er borte … da har vi 8 [verdier på venstre side] og 13 [verdier på høyre side].

Dette fortsatte hun med til hun sto igjen med 8 verdier på venstre side og 13 verdier i søylen $166 - 170$. Dette gjorde at Martine så at medianen var $166 - 170$. Det er derimot usikkert om resten av gruppen hennes forsto rutinen. Det virker som at Martines deltakelse beveget seg mot utforskende på grunn av rutinens fleksibilitet da hun deltok i diskursen om median. Martine begynte å løse oppgaven med å stille opp alle verdiene, men byttet ut denne rutinen etter hvert. Dette kan vise at hun hadde fleksibilitet i rutinene fordi hun forsto at rutinene ga det samme utfallet. Til slutt kom hun frem til at det var 8 verdier på venstre side og 13 verdier på høyre side og stilte disse opp for å krysse ut. Martine bandt sammen stegene og det kan virke som at hun forsto sammenhengen mellom stegene. Vi kan derfor konkludere med at Martine beveget seg mot en utforskende deltakelse. Martines rutine ble også støttet av histogrammet som en visuell mediator, fordi hun brukte histogrammet til å regne ut medianen og forklare til Linda og Jørgen hvordan hun løste oppgaven. Histogrammet ble en modell Martine tok i bruk for å regne ut medianen.

Martine ble derimot usikker da hun skulle markere medianen i histogrammet og vurdere Helenes pil. Hun uttrykket stor usikkerhet rundt hva Helene mente med pila hun hadde markert og klarte ikke forstå om Helenes pil var riktig eller ikke. Linda prøvde å hjelpe Martine med å forklare hva Helene hadde gjort, men det er usikkert om Martine forsto forklaringen. Nedenfor er et utdrag fra samtalen mellom Martine og Linda for å forklare situasjonen.

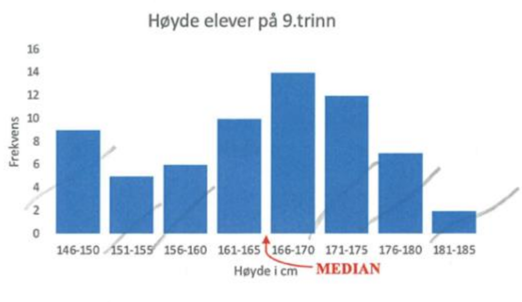
Martine:	Jeg skjønner ikke hvor den skal med pila.
Linda:	Kanskje hun bare har tatt bort en fra hver side sånn ... at hun bare har tenkt feil da.
Martine:	Ja ... nei ... medianen må jo stemme da ... jeg skjønner ikke hva hun mener med pila.
Linda:	Jeg tror bare hun ikke ... jeg tror bare hun har gjort sånn også har det blitt igjen to også har hun gjort sånn og da var det ikke igjen noen så da tok hun den [pila] mellom dem.
Martine:	Men jeg tror egentlig medianen stemmer fordi den [pila] peker jo der hvor midten er.

Martine tok ledelsen på gruppa og konkluderte da med at Helenes pil var riktig, noe Linda uttrykte usikkerhet rundt. Martine var bestemt på at det var midten og prøvde å forklare til Linda at begge søylene var en del av midten. Selv om Linda ikke så ut til å henge med på Martines resonnement for å regne ut medianen, virker det som at hun forsto hvor medianen skulle være. Martine vurderte ikke sin egen besvarelse opp mot Helenes og det virker som at hun enkelt godtok Helenes pil. En sophismoppgave inneholder et ugyldig utsagn som virker korrekt, noe som kan ha lurt Martine fordi hun flere ganger i arbeidet med Oppgave 2 sa at hun ikke forsto hvor Helenes pil var markert. Selv om det er usikkert om Linda forsto Martines fremgangsmåte for å regne ut medianen, virket det som om Linda stolte på at Martine hadde funnet den riktige medianen. Det er usikkert om Linda hadde klart å løse oppgaven uten Martine som ekspert, og vi kan derfor konkludere med at Linda hadde en mer rituell deltakelse i arbeidet med oppgaven.

De to resterende gruppene (G3, 5) fikk ikke til denne oppgaven, og løste den på to ulike måter. Gruppe 5 løste den med å stryke søyler (Figur 12), addere sammen de to søylene i midten for så å dividere på 2 (Figur 13).

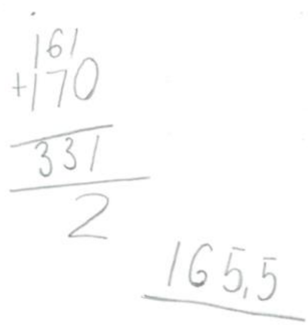
Figur 12.

Gruppe 5 sitt arbeid med diagrammet.



Figur 13.

Gruppe 5 sitt arbeid med medianen.



Dette foreslo også Jørgen fra Gruppe 2, men ble stoppet fordi Martine visste hvordan hun skulle løse oppgaven. Da Kurt adderte de to søylene, tok han $161 + 170$ og dividerte på 2 (Figur 13). Dette ga han verdien $165{,}5$ og de konkluderte med at Helenes pil var markert riktig. Gruppe 5 brukte det samme godkjente narrativet som ble brukt i Oppgave 1 hvor denne rutinen fungerte. Elevene klarte ikke å binde sammen stegene i prosessen og det virker som at de hadde en mer rituell deltakelse.

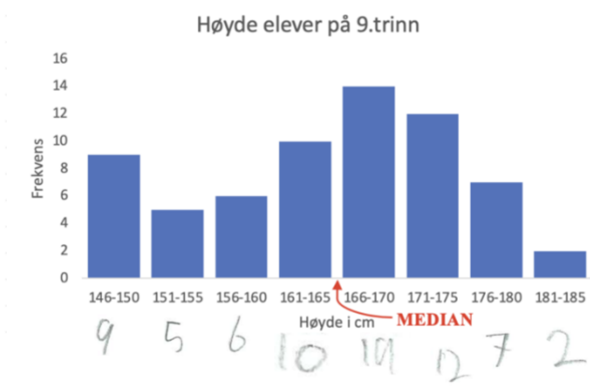
Gruppe 3 hadde også vansker i arbeidet med Oppgave 2, men de brukte en annen rutine enn Gruppe 5. For å stille datamaterialet i stigende rekkefølge så de på verdien til hver søyle. Denne rutinen tilsvarer rutinen Gruppe 4 også begynte med, men senere gikk bort fra da de innså at det ikke kunne være riktig. Bare to elever hadde høyden $181 - 185$ og denne ble derfor stilt først da søylene skulle stilles i stigende rekkefølge. De vurderte så høyden til de resterende søylene og stilte disse opp deretter. Figur 14 viser hvordan Magne og Marit vurderte søylenes høyde. I stigende rekkefølge så dette slik ut: $2 - 5 - 6 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12$. Magne og Marit fikk dermed at medianen skulle ligge mellom søylene med verdi 7 og 9, altså søylene $176 - 180$ og $146 - 150$.

Figur 14.

Gruppe 3 sin løsning på Oppgave 2.

Alle elevene på 9.trinn ble spurt om høyden sin. Denne har blitt fremstilt i et histogram.

Helene har funnet medianen blant elevenes høyde, den har hun markert i diagrammet.



Har Helene markert riktig median i histogrammet? Begrunn svaret deres.

Magne:	Da er 7 og 9 i midten så da tar vi og plusser dem to og deler på 2?
Marit:	Mhm ja!
Magne:	7 pluss 9 delt på 2, det er 8 … nei, nei! … Har Helene markert riktig i histogrammet?
Marit:	Hvordan … [stopper]
Magne:	Vent nå … 2 var jo $181 - 185$ og 5 var $151 - 155$ så vi hadde 7 og 9 som er $176 - 180$ og $146 - 150$ … [stopper]

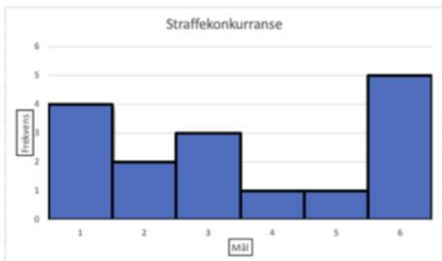
Gruppe 3 stoppet med oppgaven og gikk videre til Oppgave 3 da de ikke forsto svaret de hadde kommet frem til. Det virker som at de forsto noe var galt fordi de ikke fullførte oppgaven eller fortsatte å prøve andre rutiner. Elevene hadde derfor en mer rituell deltakelse i arbeidet med Oppgave 2.

5.1.3 Oppgave 3

Figur 15.

Den andre sophismoppgaven (Gjentas for å hjelpe leserne med å få en bedre forbindelse med funnene).

I en kroppsøvingstime på en ungdomsskole trener elevene i 9B til fotballkamp. Hver person som deltok i kroppsøvingstimen, fikk totalt 6 skudd mot mål. Elevene i klassen lurer på deres gjennomsnittlige scoringer. Elevene fremstilte antall treff mot mål i stolpediagrammet som er vist under.



Harald har funnet gjennomsnittet slik:

$4+2+3+1+1+5$

$\rightarrow$ **16**

$\frac{16}{6}$

$\approx$ **2.67**

Har Harald regnet gjennomsnittet riktig? Begrunn svaret deres.

I arbeidet med Oppgave 3 (Figur 15) fikk alle gruppene (G2-5) bortsett fra Gruppe 1 samme svar som Harald. Disse fire gruppene (G2-5) sjekket Haralds fremgangsmåte ved å regne sammen tallene til Harald. De stilte ingen spørsmål til hvilket tall Harald brukte for å regne gjennomsnittet. Disse gruppene var mest opptatt av om Harald hadde regnet $\frac{16}{6}$ riktig. Figur 16 er et eksempel på rutinen de brukte i arbeidet med Oppgave 3.

Figur 16.

Gruppe 2 sin utregning av gjennomsnitt i Oppgave 3.

Harald har funnet riktig svar, som ble 2,67.

16 : 6
12 | 2
4 | 0,67
0 | = 2,67

Gruppene (G2-5) fulgte Haralds steg og rutine, og viste derfor ingen indikasjon av å være agenter i arbeidet med gjennomsnittet. Samlet sett hadde disse gruppene (G2-5) en mer rituell deltakelse i arbeidet med Oppgave 3. Deres rutine var mer prosessorientert.

I arbeidet med Oppgave 3 var det ingen som nevnte et narrativ om gjennomsnitt. Likevel virket det som at gruppene hadde en felles forståelse for rutinen for å regne ut gjennomsnittet av et antall verdier. En form for godkjent narrativ kan vi finne da Kurt fra Gruppe 5 sa «Han tar jo alt til sammen og deler det på antall hvor mye det er». Ali sa seg enig med Kurt, noe som kan bekrefte at de to hadde en felles forståelse for dette narrativet. Et siste poeng å fremheve om disse gruppene (G2-5) er at de ikke utviklet rutinen for hvordan de brukte og tolket informasjonen fra den visuelle mediatoren (stolpediagrammet og Haralds utregning). De klarte bare å lese av den visuelle mediatoren, men brukte den ikke i arbeidet med oppgaven. En gruppe som skilte seg fra de andre gruppene i arbeidet med Oppgave 3 var Gruppe 1. Lisbeth tenkte først at Haralds utregning av gjennomsnittet var riktig, men Stian mente utregningen var feil. Stian forklarte for Lisbeth at fremgangsmåten var feil ved å referere tilbake til det en ekspert gjorde i klasserommet tidligere. Da Stian og Lisbeth skulle løse oppgaven gikk de bort fra Haralds fremgangsmåte og leste av stolpediagrammet for å sjekke antall mål som ble scoret. De fant ut at Haralds verdier var feil, og brukte de avleste verdiene for å regne gjennomsnittet.

Lisbeth:	Er ikke det [antall som scoret ett mål] 4 da.
Stian:	Nei for vi må ta 4 enere, det har han gjort. Men så må vi ta 2 ganger 2 fordi det er 2 toere [2 elever som scoret 2 mål hver], det er 4. Så da har han tatt feil.
Lisbeth:	Ja 4, og der er det 3 ganger 3 som er 9 [3 elever som scoret 3 mål hver].
Stian:	Ja, men han har tatt 3.
Lisbeth:	Ja og her er 4 gange 1, så da blir det 4 [1 elev som scoret 4 mål].
Stian:	4.
Lisbeth:	Her er det 5 [1 elev som scoret 5 mål], her er det 6 gange 5 [5 elever som scoret 6 mål hver], det er …
Stian:	30
...	
Stian:	Harald har ikke regnet riktig.
Lisbeth:	Fordi gjennomsnittet er som følger.
…	
Stian:	Han plusset sammen bare antall elever og ikke antall mål dem scoret.

Stian forklarte rutinen til Lisbeth. Etter Stians første forklaring, på hvordan de skulle finne de riktige verdiene, uttrykte Lisbeth sin forståelse med å fortsette utregningen. Dette kan være en form for utvikling i Lisbeths rutine fordi hun først ønsket å løse oppgaven på samme måte som Harald, men klarte ved hjelp av Stian å regne gjennomsnittet. For at elever skal utvikle sin rutine fra tidligere erfaringer trenger de en ekspert som introduserer rutinen, noe Stian kan ha vært for Lisbeth. Det kan først virke som at Lisbeth bare etterlignet Stian, men ettersom Lisbeth uttrykte sin forståelse og bandt sammen de neste stegene viser det at

Lisbeth forsto sammenhengen i prosessen og beveget seg mot en utforskende deltakelse. Samtidig viste Lisbeth da de skulle begrunne svaret at hennes rutine var mer prosessorientert. Lisbeth ønsket å begrunne at Harald hadde regnet feil med å vise hvilket gjennomsnittet Gruppe 1 fant. Lisbeth argumenterte for svaret ved å vise til prosessen.

For å forklare Lisbeth hvordan de skulle løse Oppgave 3 trakk Stian frem fremgangsmåten som ble vist av en ekspert i klasserommet før de begynte å arbeide med oppgavene. Ved å ta utgangspunkt i dette kan vi konkludere med at det skjedde en utvikling i Stians rutine ettersom han tok flere egne valg i prosessen, og klarte å binde sammen stegene fra en tidligere situasjon og bygget videre på stegene. Dette indikerer at Stian var agent i arbeidet med Oppgave 3. Som tidligere nevnt er Oppgave 3 en sophismoppgave hvor Haralds fremgangsmåte er feil. I motsetning til de andre elevene klarte Stian å begrunne utfallet ved å forklare hva Harald hadde gjort feil og han ble ikke påvirket av Haralds fremgangsmåte. Dette kan vise at Stian beveget seg mot en mer utforskende deltakelse.

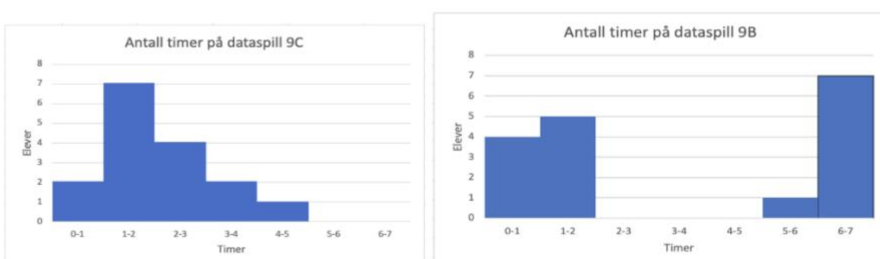
Stolpediagrammet i Oppgave 3 er en visuell mediator, som Sfard (2008) definerer som et hjelpemiddel for kommunikasjon i den matematiske diskursen. Selv om tre grupper (G2-3, 5) ikke stilte noen spørsmål til verdiene Harald brukte, diskuterte de hva stolpediagrammet viste. Et eksempel på dette er Magne fra Gruppe 3 som blant annet sa: «så det er 4 personer som har klart 1 [mål], 2 som har klart 2 [mål], 3 som har klart 3 [mål], 1 som har klart 4 [mål], 1 som har klart 5 [mål] og så er det 5 som har klart 6 [mål]». Det virker som at elevene klarte å bruke stolpediagrammet som et hjelpemiddel for kommunikasjon, fordi de klarte å lese av diagrammet.

5.1.4 Oppgave 4

Figur 17.

Den andre paradoxoppgaven (Gjentas for å hjelpe leserne med å få en bedre forbindelse med funnene).

Vi har spurt elevene på 9.trinn hvor mange timer de daglig bruker på å spille dataspill. Dette har vi fremstilt i to diagrammer som viser antall timer elevene i 9B og 9C bruker på dataspill.



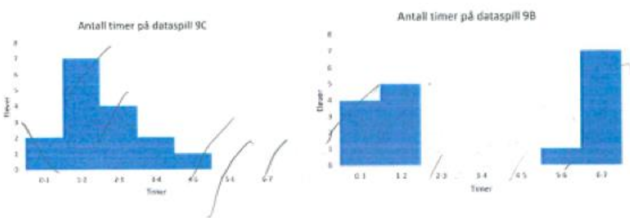
Oda har funnet at medianen i de to ulike datasettene er den samme og at medianen er 1-2 timer med dataspilling.

Har Oda funnet riktig median? Hvorfor?

I arbeidet med den siste oppgaven (Figur 17) identifiserte vi fire ulike rutiner blant gruppene. Gruppe 5 valgt å løse Oppgave 4 på samme måte som Oppgave 2. Kurt sa i Oppgave 1 at medianen var det midterste og det virker som at han i arbeidet med Oppgave 4 prøvde å bruke dette godkjente narrativet. Figur 18 og utdraget under viser hvordan Kurt prøvde å finne den midterste verdien. Dette fungerte i Oppgave 1, men i Oppgave 2 og 4 var ikke alle verdiene satt i stigende rekkefølge og rutinen passet derfor ikke i denne situasjonen.

Figur 18.

Gruppe 5 sin rutine på Oppgave 4.



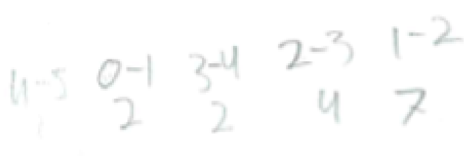
Kurt: Vi tar vekk den [søyle $0-1$], den [søyle $6-7$], den [søyle $1-2$, den [søyle $5-6$], den [søyle $2-3$], den [$4-5$]. Da ser vi at det er 3 til 4 timer [som er medianen], ser det ut som, jeg tror det. 3 til 4 timer her. Også her tar vi den [søyle $0-1$], den [søyle $6-7$], den [søyle $1-2$], den [søyle $5-6$] ... det går jo ikke da. Hvis det er ingen som spiller her da, så. ehh, ja vi bare skriv nei ... fordi vi fikk ikke det som svar. Okei.

Da Gruppe 5 fikk at medianen i 9B var $3-4$ timer sa Kurt «det går jo ikke da. Hvis det er ingen som spiller her da, så ...», men skrev likevel dette som median. Kurts avgjørelse om at medianen var $3-4$ timer indikerer at han brukte en prosessorientert rutine i utførelsen av oppgaven. Rutinen Kurt brukte fungerte bare i en oppgave hvor alle verdiene allerede var satt i stigende rekkefølge. Med bakgrunn i dette kan det være vanskelig å konkludere om noen form for endring i Kurts deritualiseringsprosess, og dermed hadde han en mer rituell deltakelse i arbeidet med å regne ut medianen da datamaterialet var presentert i histogram.

I arbeidet med Oppgave 4 fikk Marit umiddelbart en tanke om at medianen Oda hadde funnet ikke kunne stemme. Oppgave 4 er en paradoxoppgave hvor argumentet er gyldig, men utsagnet virker kontraintuitivt. Ettersom histogrammene er såpass ulike kan det gjøre det vanskelig for elevene å forstå at medianen er den samme, noe Marit tenkte om Odas løsning. Gruppe 3 brukte samme rutine i Oppgave 4 som i Oppgave 2. De så på verdien til hver søyle og stilte de i stigende rekkefølge. Dette gjorde de først med histogrammet for 9C (Figur 19) og så for histogrammet i 9B (Figur 20). Figur 19 og 20 viser at Gruppe 3 stilte søylene i stigende rekkefølge etter hvor mange elever som falt innenfor de ulike søylene.

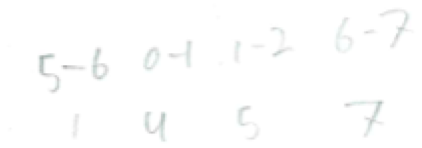
Figur 19.

Gruppe 3 sin løsning på 9C i Oppgave 3.



Figur 20.

Gruppe 3 sin løsning på 9B i Oppgave 3.



Gruppe 3 diskuterte mye frem og tilbake om hva de skulle gjøre med de tomme søylene. Da de fant medianen til 9C tok de med de tomme søylene, mens de for 9B valgte å ikke ha med de tomme søylene. Dette gjorde at de fikk medianen $0-1$ timer i 9C, mens de fikk søylene $0-1$ og $1-2$ timer i midten i 9B. Magne mente da at medianen for 9B var 1 time siden det var tallet i midten. Marit responderte med å si at hun forsto tankegangen. Gruppe 3 diskuterte ikke mer og bestemte seg for å skrive at Oda hadde funnet feil median fordi de fikk en annen. Under vises et eksempel av Magne og Marit sitt arbeide med Oppgave 4.

Marit: At hun Oda har tatt feil mener du?

Magne: Mhm, eller ... det kommer an på ... hvis vi hadde hatt med $5-6$ og $6-7$ der det ikke er noen folk da.

Marit: Det hadde fortsatt ikke vært $1-2$ timer.

Magne: Nei det hadde det ikke.

Marit: Nei det hadde ikke det ... det ville være $1-2$ ... eller skal vi ha med de det er ingen på.

Magne: Hvis vi hadde gjort det sånn da hadde vi fått sånn og sånn.

Marit: Aa, hadde vi fått $0-1$.

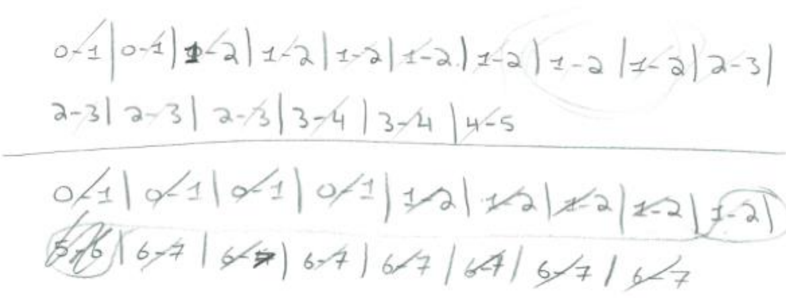
Magne: Ja $0-1$ da vil jeg si hun har tatt feil.

Gruppe 3 prøvde å følge en rutine de trodde ga den riktige medianen. Det var en prosessorientert rutine og de prøvde å følge et ritual de hadde observert fra en lignende situasjon. Gruppe 3 klarte å lese av de ulike verdiene i histogrammet, men de klarte likevel ikke å binde de neste stegene sammen og vi kan derfor ikke konkludere med om de beveget seg mot en utforskende deltakelse. I motsetning til Gruppe 3 og 5, klarte tre grupper (G1-2, 4) å løse Oppgave 4 riktig. De tre gruppene (G1-2, 4) tok i bruk histogrammet for å løse oppgaven. Det ble en visuell mediator de brukte som et hjelpemiddel i rutinen. Gruppe 1 og 4 utførte oppgaven med den samme rutinen. Gruppe 1 forsto tidlig at de skulle bruke den samme rutinen som i arbeidet med Oppgave 2. Lisbeth sa til Stian at de måtte skrive det opp slik de hadde gjort tidligere. Ved å gjøre det på denne måten fant de ut at Oda hadde funnet riktig median i de to histogrammene.

Gruppe 4 brukte den samme rutinen som Gruppe 1, men spurte først læreren om hjelp ettersom de ikke visste hvordan de skulle løse den. Gruppen fikk ikke hjelp og måtte derfor prøve å løse Oppgave 4 selv. Lotta begynte å skrive alle verdiene fremstilt i histogrammene og introduserte rutinen til Tomas og Mathilde. Tomas viste forståelse til Lottas rutine og deltok med å lese av antall verdier fra hver søyle. Etter å ha skrevet alle verdiene begynte de å krysse ut fra hver sin side til de fant den midterste verdien. Figur 21 viser Gruppe 4 sin fremgangsmåte.

Figur 21.

Gruppe 4 sin rutine på Oppgave 4.



Gruppe 4 og Gruppe 1 klarte å finne en rutine uten en ekspert til stede. De bandt sammen stegene noe Lavie et al. (2019) beskriver som et steg i deritualiseringsprosessen. Lisbeth, Stian og Lotta beveget seg mot en mer utforskende deltakelse. Hvorvidt Tomas hadde klart å utføre Oppgave 4 alene er vanskelig å konkludere med fordi han ble veiledet gjennom rutinen av Lotta. Han etterlignet Lotta og fulgte dermed et ritual. Det blir derfor vanskelig å konkludere med om Tomas beveget seg mot en utforskende deltakelse. Lotta tok flere egne valg i prosessen, noe som førte gruppen hennes frem til det riktige produktet. Siden Lotta tok disse valgene selv, var hun agent i arbeidet med oppgaven, noe som også kan indikere at Lotta beveget seg mot en mer utforskende deltakelse. I arbeidet med Oppgave 4 tok Lisbeth styringen for hvilken rutine Gruppe 1 skulle bruke. Hun refererte tilbake til rutinen de brukte i arbeidet med Oppgave 2, hvor hun var avhengig av å følge Stians rutine. I arbeidet med Oppgave 4 tok Lisbeth flere egne valg i prosessen og arbeidet dermed mot en utforskende deltakelse.

Gruppe 2 løste Oppgave 4 med den samme rutinen de brukte i arbeidet med Oppgave 2. Linda og Jørgen var ikke delaktige i denne rutinen hvor Martine styrte store deler av samtalen. Martine sammenlignet verdiene på de ulike søylene for å finne den midterste verdien. Sitatet under viser et eksempel på Martines rutine.

Martine: Jeg tror det blir $1-2$ timer der og. Den [søyle $1-2$] vinner med 1 fordi da tar du 4 er [søyle $0-1$] minus 4 der [søyle $6-7$] da har du 3 igjen her [søyle $6-7$] pluss 1 [søyle $5-6$] det blir 4, ja den [søyle $1-2$] vinner med 1 hvis du plasserer den [søyle $1-2$] inni der [søyle $5-6$ og $6-7$] så vinner den [søyle $1-2$] med 1.

Martine tok flere egne valg i prosessen for å komme frem til produktet. Hun var derfor ikke avhengig av en ekspert for å løse oppgaven og kan fremstå som agent i prosessen. Martine beveget seg mot en utforskende deltakelse. Det kan være vanskelig å vite om Linda og Jørgen forsto Martines rutine ettersom de ikke deltok i hennes resonnement. Derfor er det vanskelig å komme med en konklusjon om deres deltakelse i arbeidet med Oppgave 4.

5.2 Elevenes opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene: Funnene fra spørreskjemaet

I denne delen beskrives elevenes opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene fra spørreskjemaet. De åpne spørsmålene på spørreskjemaet er beskrevet detaljert i Delkapittel 5.4.2. I Tabell 3 er resultatene fra spørreskjemaet fremstilt i prosent.

Tabell 3.

Resultatene fra spørreskjemaet fremstilt i prosent.

Kategori	Spørsmål	Oppgave	Helt enig	Enig	Verken enig eller uenig	Uenig	Helt uenig	Vet ikke	Antall
Affektive aspekt	1.	Sophism		8	54	38			13
		Paradox		31	46	23			13
	2.	Sophism	8	23	38	23		8	13
		Paradox	8	46	15	23		8	13
	3.	Sophism		23	38	38			13
		Paradox		23	31	46			13
	4.	Sophism	8	15	46	23		8	13
		Paradox	8	31	31	23		8	13
Utvikling av forståelse i statistikk og problemløsnings ferdigheter	5.	Sophism	8	31	38	8		15	13
		Paradox	8	38	31	8		15	13
	6.	Sophism	38	38	15	8			13
		Paradox	38	38	8	15			13
	7.	Sophism	8	38	38	8		8	13
		Paradox	8	38	31	15		8	13
	8.	Sophism		31	38	23		8	13
		Paradox		31	38	23		8	13
	9.	Sophism	8	31	31	23		8	13
		Paradox	8	31	31	23		8	13
	10.	Sophism	15	54	15	8		8	13
		Paradox	23	46	23			8	13
	11.	Sophism	15	31	31			23	13
		Paradox	23	31	23			23	13
	12.	Sophism	8	38	31	8	8	8	13
		Paradox	8	46	23	8	8	8	13
Sosial utvikling	13.	Sophism	54	31	15				13
		Paradox	54	31	15				13
	14.	Sophism	15	31	23	23		8	13
		Paradox	15	31	23	23		8	13

5.2.1 Elevenes affekter i arbeid med sophism- og paradoxoppgavene

Elevene ble spurt om arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene gjorde at de likte statistikk bedre. I elevenes svar var det stor forskjell på sophism- og paradoxoppgavene. Det var én elev (8%) som oppfattet at å arbeide med sophismoppgavene gjorde at eleven bedre likte statistikk, mens det var fire elever (31%) som oppfattet det samme i arbeidet med paradoxoppgavene. Det var fire elever (31%) som sa seg enig i at de likte å delta i aktiviteter med sophismoppgavene, og det var syv elever (54%) som sa det samme om paradoxoppgavene. Tre elever (23%) oppfattet at å arbeide med sophismoppgavene økte deres selvtillit i statistikk, og fem elever (38%) sa seg enig i arbeidet med paradoxoppgavene. Det var tre elever (23%) som sa seg enig i at utfordringene de møtte i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene motiverte dem til å løse andre problemer i statistikk.

5.2.2 Elevenes utvikling av forståelse i statistikk og problemløsningsferdigheter

På spørsmål 5 var det fem elever (38%) som oppfattet at arbeidet med sophismoppgavene utviklet deres forståelse i statistikk, mens det var seks elever (46%) som oppfattet at arbeidet med paradoxoppgaven utviklet deres forståelse i statistikk. På spørsmål 6 var det ti elever (77%) av elevene som oppfattet at å arbeide med både sophism- og paradoxoppgavene hjalp dem med å se sine styrker og svakheter i statistikk. Det var seks elever (46%) som oppfattet at oppgavene hjalp dem med å utvikle deres problemløsningsferdigheter i statistikk. På spørsmål 8 var det fire elever (31%) som så sammenhenger mellom matematikk og den virkelige verden og tre elever (23%) som ikke så sammenhenger. På spørsmål 9 var det fem elever (38%) som oppfattet at de tenkte mer kritisk i arbeidet med statistikk da de arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Det var også tre elever (23%) som sa seg uenig i dette. Det var ni elever (69%) som sa seg enig i spørsmål 10 og som oppfattet at de i arbeidet med både sophism- og paradoxoppgavene måtte løse oppgavene med ulike fremgangsmåter. På spørsmål 10 var det én elev (8%) som sa seg uenig i dette knyttet til sophismoppgavene. Det var seks elever (46%) som oppfattet at de måtte se på sophismoppgavene fra ulike perspektiv for å lykkes, mens det var syv elever (54%) som oppfattet det samme om paradoxoppgavene. På spørsmål 12 var det seks elever (46%) som oppfattet at de tenkte mer på statistiske begrep i arbeid med sophismoppgavene. Det var syv elever (54%) som oppfattet det samme i arbeidet med paradoxoppgavene.

5.2.3 Sosial utvikling

Det var 11 elever (85%) som oppfattet at det var bedre å arbeide med oppgavene da de fikk samarbeide med andre. Det var ingen av elevene som sa seg uenig i dette. Samtidig var det seks elever (46%) som sa seg enig i at oppgavene hjalp dem til å utvikle deres sosiale ferdigheter.

5.2.4 Åpne spørsmål

Fire åpne spørsmål ble brukt for å få en bedre forståelse av elevenes opplevelse i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. På det første åpne spørsmålet svarte fem elever (38%) at verken arbeidet med sophism- eller paradoxoppgavene påvirket deres læring i statistikk. På det andre åpne spørsmålet svarte fire elever (31%) at de opplevde arbeidet med sophismoppgavene vanskelig fordi de manglet forståelse for hvordan de skulle løse oppgavene, én elev (8%) svarte det samme knyttet til paradoxoppgavene. Tre elever (31%) oppfattet derimot at paradoxoppgavene var lettere enn sophismoppgavene og opplevde dermed ikke så mange utfordringer i arbeidet med paradoxoppgavene. På det tredje åpne spørsmålet var det seks elever (46%) som ikke opplevde å bli påvirket i arbeidet med sophismoppgavene og fem elever (38%) opplevde det samme i arbeidet med paradoxoppgavene. På det fjerde, og siste, åpne spørsmålet svarte fire elever (31%) at de ikke ønsket mer sophismoppgaver i statistikkundervisningen uten å gi noen begrunnelse for hvorfor. Det var tre elever (23%) som sa det samme om paradoxoppgaver, hvor én elev (8%) begrunnet dette med at han ble lurt av paradoxoppgavene. Svarene til elevene som opplevde fordeler med å arbeide med sophism- og paradoxoppgavene er kodet og blir presentert i Tabell 4.

Tabell 4.

Fordelene ved å inkludere sophism- og paradoxoppgaver i statistikk: Funnene fra de åpne spørsmålene.

Kategori	Underkategori	So		Pa		Eksempel
		N	%	N	%	
Utvikling av elevenes samarbeidsferdigheter		9	69	9	69	«Blir bedre til å løse problemer med andre.» (Tomas)
Utvikling av elevenes forståelse i statistikk		6	46	7	54	«Jeg kan bli veldig god på dette [statistikk] hvis vi får flere slike typer [paradoxoppgaver] oppgaver.» (Tomas)
Underholdende aktiviteter		3	23	4	31	«Det er gøy med variering [av oppgavetyper].» (Ali)
Utvikling av elevenes tenkeferdigheter	Utvikling av elevenes kreativitet	3	23	3	23	«Jeg måtte vinkle [paradox] oppgavene fra forskjellige sider og prøve ut alle ideer [på gruppa] for å se om det [svaret] var riktig.» (Tomas)
	Utvikling av elevenes kritiske tenkeferdigheter	2	15	2	15	«Vurdere statistikkene bedre og at jeg klarer å se på statistikkene på en mer kritisk måte.» (Stian)
Utvikling av elevenes problemløsnings-ferdigheter		3	23	2	15	«Jeg har lært at jeg må være mer oversiktlig [strukturert] på de neste oppgavene [i matematikk].» (Martine)

Kodingen av elevenes svar på de fire åpne spørsmålene førte frem til fem ulike fordelskategorier: utvikling av elevenes forståelse i statistikk, utvikling av elevenes problemløsningsferdigheter, utvikling av elevenes tenkeferdigheter, utvikling av elevenes samarbeidsferdigheter og underholdende aktiviteter (Tabell 4). Disse kategoriene presenterer fordelene elevene opplevde i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene i statistikkundervisningen. Noen elever ga mer enn én fordel med sophism- og paradoxoppgavene, og som et resultat er N over 13. Gjennomgående fra elevenes svar var at ni elever (69%) så på samarbeid som en fordel i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene og at det ble bedre da de fikk løse oppgavene sammen med andre. At læring skjer i en sosial prosess, er sentralt i Sfards (2008) læringsteori om kommognisjon. Seks elever (46%) trakk frem at de utviklet sin forståelse i arbeidet med sophismoppgavene og syv elever (54%) opplevde det samme i arbeidet med paradoxoppgavene. Et av kriteriene for puslebaserte oppgaver er at de kan være underholdende og engasjerende for elevene. Tre elever (23%) opplevde sophismoppgavene som underholdende og fire elever (31%) opplevde paradoxoppgavene som underholdende. De puslebaserte oppgavene kan også utvikle elevenes evne til kritisk tenkning, noe to elever (15%) trakk frem at de utviklet i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Tre elever (23%) opplevde også at deres kreativitet ble utviklet fordi de måtte se sophism- og paradoxoppgavene fra ulike perspektiver og på ulike måter. I puslebasert læring legges det vekt på å forbedre elevenes læring gjennom utvikling av deres problemløsningsstrategier. Tre elever (23%) opplevde at de i arbeidet med sophismoppgavene ble mer strukturert og oversiktlig, og to elever (15%) opplevde det samme knyttet til paradoxoppgavene.

5.3 Elevers opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene: Funnene fra de utdypende intervjuene

I denne delen beskrives resultatene fra de utdypende intervjuene om elevenes opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Det var totalt seks elever som deltok i de utdypende intervjuene.

5.3.1 Fordeler ved å inkludere sophism- og paradoxoppgaver i statistikkundervisning

Et semistrukturert intervju ble brukt for å få mer utdypende informasjon om elevenes positive og negative opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Tre elever (50%) var negative til å arbeide med sophism- og paradoxoppgavene. De samme tre elevene (50%) uttrykte også i intervjuene at de ikke opplevde at arbeidet med oppgavene hadde noe påvirkning på deres mestringsfølelse eller selvtillit i statistikk. Funnene fra elevenes arbeid med oppgavene viser at elevene hadde en mer rituell deltakelse og rutinen var mer prosessorientert. Ritual utføres gjerne bare for å unngå straff eller for å oppnå sosial belønning (Lavie et al., 2019), og det kan tenkes at elevenes negativitet til oppgavene har en sammenheng med hvordan de arbeidet. De tre elevene som var negative til sophism- og paradoxoppgavene var blant de elevene som brukte prosessorienterte rutiner i arbeidet.

I kodingen av de seks elevintervjuene ble det utarbeidet seks fordelskategorier: utvikling av elevenes samarbeidsferdigheter, utvikling av elevenes tenkeferdigheter, utvikling av elevenes mestringsfølelse og selvtillit i statistikk, utvikling av elevenes problemløsningsferdigheter, utvikling av elevenes forståelse i statistikk og underholdende aktiviteter (Tabell 5). I likhet med Tabell 4 presenterer disse kategoriene fordelene elevene opplevde i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene i statistikk. Ettersom funnene er hentet fra et utdypende intervju gir elevenes svar mer utdypende informasjon om deres opplevelse. Noen elever opplevde flere fordeler i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene, og som et resultat er N over seks.

Tabell 5.

Fordelene ved å inkludere sophism- og paradoxoppgaver i statistikk: Funnene fra intervjuene.

Kategori	Underkategori	So		Pa		Eksempel
		N	%	N	%	
Utvikling av elevenes samarbeids-ferdigheter		6	100	6	100	«det var vanskelig nok, så vi måtte snakke sammen og jobbe som en gruppe.» (Stian)
Utvikling av elevenes tenkeferdigheter	Utvikling av elevenes kritiske tenkeferdigheter	3	50	2	33	«litt mer kritisk til dem diagrammene, på å se om de er feil eller ikke da.» (Stian)
	Utvikling av elevenes kreativitet	4	67	3	50	«vi har forskjellige ideer alle sammen ... og da ser vi det fra forskjellige perspektiv.» (Tomas)
Utvikling av elevenes mestringsfølelse og selvtillit i statistikk		3	50	3	50	«det var jo vanskelige nok oppgaver ... da får du mestringsfølelse når du får det til.» (Stian) «høyere [selvtillit] siden nå har jeg litt mer forståelse.» (Kurt)
Utvikling av elevenes problemløsnings-ferdigheter		3	50	2	33	«Nå kan jeg metodene til å løse de [sophism- og paradoxoppgavene] så det blir lettere [å arbeide med oppgaver].» (Kurt)
Utvikling av elevenes forståelse i statistikk	Utvikling av elevenes forståelse i statistikk	1	17	1	17	«Lærte mer med de her [sophism- og paradoxoppgavene] eller i vertfall etter vi hadde løst de når vi fikk svarene tilbake [gjennomgang i klasserommet].» (Kurt)
	Hjelper elevene å forstå sine svakheter i statistikk	2	33	3	50	«Jeg er ikke så flink i statistikk så jeg visste [i arbeidet med oppgavene] at jeg må sikkert øve mer [på statistikk].» (Jens)
Underholdende aktiviteter		1	17	2	33	«ganske artig da egentlig ... det er mer variasjon.» (Stian)

I intervjuet uttrykte alle seks elevene (100%) at samarbeidet med de andre på gruppen var nødvendig for å kunne klare å løse både sophism- og paradoxoppgavene. Elevene kan utvikle en rutine ved å etterligne tidligere erfaringer fra en ekspert (Lavie et al., 2019). I følge Sfard (2008) skjer læring i en sosial prosess. I samarbeidet kunne elevene observere rutinene fra hverandre og dermed utvikle sine egne rutiner. I arbeidet med sophismoppgavene var det tre elever (50%) som trakk frem at de ble mer kritiske i arbeidet, mens det var to elever (33%) som var kritiske i arbeidet med paradoxoppgavene. Fire elever (67%) opplevde at de utviklet kreativiteten sin ved å måtte se på sophismoppgavene fra forskjellige perspektiv, mens tre elever (50%) opplevde dette i arbeidet med paradoxoppgavene. Det var tre elever (50%) som opplevde mestringsfølelse og selvtillit i statistikk i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Én elev (17%) følte at han hadde utviklet sin forståelse i statistikk ved å arbeide med sophism- og paradoxoppgavene. To elever (33%) ble mer bevisst på sine svakheter i statistikk da de arbeidet med sophismoppgavene, og tre elever (50%) ble mer bevisst på sine svakheter i statistikk i arbeid med paradoxoppgavene. Én elev (17%) opplevde sophismoppgavene som underholdende og to elever (33%) opplevde paradoxoppgavene som underholdende.

5.3.2 Utfordringer elevene møtte på i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene

Under de utdypende intervjuene ble det trukket frem ulike utfordringer elevene møtte i arbeidet med oppgavene. Utfordringene elevene møtte er delt i tre kategorier: vansker med å vurdere nøyaktigheten til statistiske påstander, krevende oppgaver og manglende forståelse av oppgavene (Tabell 6).

Tabell 6.

Utfordringer elevene møtte på i arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver: Funnene fra intervjuene.

Kategori	So		Pa		Eksempel
	N	%	N	%	
Vansker med å vurdere nøyaktigheten til statistiske påstander	5	83	1	17	«De [sophismoppgavene] ser riktig ut hvis du ser oppgavene med en gang, så du kan liksom bli finta veldig fort da.» (Stian)
Krevende oppgaver	4	67	3	50	«Vanskelig fordi vi måtte tenkte litt for å finne svarene.» (Stian)
Manglende forståelse av oppgavene	1	17	3	50	«Jeg forsto den [paradoxoppgaven] ikke så godt.» (Linda)

Noen elever møtte mer enn én utfordring i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene, og som et resultat er N over seks. Det var tre elever (23%) som opplevde at arbeidet med paradoxoppgavene var lettere enn arbeidet med sophismoppgavene og som dermed ikke møtte noen utfordringer i arbeidet med paradoxoppgavene. I arbeidet med sophismoppgaven uttrykte fem elever (83%) at de hadde vanskeligheter med å vurdere nøyaktigheten til påstanden. Elevene uttrykte at sophismoppgavene «var luringer» (Tomas) og at de var vanskelig fordi «de ser riktig ut hvis du ser de med en gang» (Stian). Én elev (17%) opplevde at dette var en utfordring også i arbeidet med paradoxoppgaven. En annen utfordring elevene møtte på var at oppgavene var krevende. Fire elever (67%) opplevde dette i arbeidet med sophismoppgavene og tre elever (50%) opplevde dette i arbeidet med paradoxoppgavene. Puslebaserte oppgaver kan være krevende for elevene, noe Stian trakk frem da han sa at «vi måtte tenke litt for å finne svarene». En siste utfordring elevene opplevde var at de manglet forståelse for oppgavene. Én elev (17%) opplevde i arbeidet med sophismoppgavene at hun ikke forsto oppgaven og tre elever (50%) opplevde det samme i arbeidet med paradoxoppgavene.

6.0 Diskusjon og konklusjon

I dette kapittelet presenteres først en oversikt over studien i Delkapittel 6.1. Vi diskuterer så våre hovedfunn knyttet til det første forskningsspørsmålet i Delkapittel 6.2 og det andre forskningsspørsmålet i Delkapittel 6.3. Dette diskuterer vi i lys av teori og tidligere forskning. I Delkapittel 6.4 gir vi en beskrivelse av didaktiske implikasjoner, etterfulgt av studiens svakheter i Delkapittel 6.5. Avslutningsvis gir vi retningslinjer til videre forskning i Delkapittel 6.6 og i Delkapittel 6.7 kommer vi med avsluttende ord.

6.1 Oversikt over studien

I denne studien ble det brukt et convergent design som en mixed methods for å undersøke 9.trinnselevers deltakelse og opplevelser i arbeidet med puslebaserte oppgaver, sophism og paradox, som omhandlet median, gjennomsnitt, histogram og stolpediagram. Studien besto av 13 elever på 9.trinn som deltok i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene og svarte på et spørreskjema. Seks elever deltok i et individuelt semistrukturert intervju. Det ble tatt lydopptak av gruppenes (G1-5) arbeid med de puslebaserte oppgavene og av de seks intervjuene for å få en bedre forståelse av deres deltakelse.

Studien har brukt kommognisjon (Sfard, 2008) som sentral læringsteori for å utforske elevenes deltakelse og opplevelse i arbeidet med puslebaserte oppgaver. I tillegg er det diskutert relevant teori om puslebasert læring (f.eks. Klymchuk, 2017; Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008; Radmehr & Vos, 2020) og statistikk (f.eks. Van de Walle et al., 2015) for å undersøke dette. Vi undersøkte elevers arbeid med puslebaserte oppgaver fra et kommognitivt perspektiv. Kommognisjon (Sfard, 2008, 2020) har vist seg å være et egnet rammeverk i ulike matematiske rom og til å fremheve den matematiske diskursen (Presmeg, 2016). Å bruke dette kan gi oss en bedre forståelse av læring som en sosial prosess og hvordan elevene tar del i den matematiske diskursen. Dette kan gi forskere og lærere innblikk i hva puslebasert læring kan bidra med i matematikkundervisning og læring i den norske grunnskolen.

6.2 Elevenes deltakelse i arbeid med sophism- og paradoxoppgavene

I dette delkapittelet diskuterer vi det første forskningsspørsmålet: *Hvordan deltar 9.trinnselever i arbeid med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og diagrammer?* Med utgangspunkt i de presenterte funnene fra Kapittel 5.0 diskuterer vi mulige årsaker til elevenes bruk av ritual i deltakelsen og observerte endringer i deritualiseringsprosessene. Vi diskuterer også årsaker til elevenes samarbeid og hvordan dette henger sammen med Sfards (2008) læringsteori om kommognisjon og puslebasert læring.

I arbeidet med de fire puslebaserte oppgavene måtte elevene vurdere om argumentene til de fiktive elevene var gyldige. Dette henger sammen med at sophismoppgavene er ugyldige argument, og studenter må analysere argumentene for å finne en ugyldig begrunnelse (Klymchuk & Staples, 2013). Det samme gjelder i arbeidet med paradoxoppgavene hvor studenter må forstå at deres første intuisjon om et matematisk argument kan være feil (Klymchuk & Staples, 2013). Å forstå hvordan et bevis utvikles kan relateres til læring på metanivå (Sfard, 2008). Tidligere forskning viser at læring på metanivå kan formidles gjennom oppgaver hvor elevene arbeidet med å «forklare hvorfor» et utsagn var gyldig (Valenta & Enge, 2022). Elevene i vår studie deltok i arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver hvor de fikk mulighet til å lære hva som kan være et matematisk gyldig resonnement i en statistisk diskurs. Puslebaserte oppgaver kan derfor ha potensialet til å fremme elevenes læring på metanivå. Studiens funn viste at Stian i arbeidet med oppgavene begrunnet de fiktive elevenes gyldige eller ugyldige argumenter. Det virket som at Stian forsto hva et gyldig matematisk argument innebar, at det kan være matematiske argument som virker gyldig, men som er ugyldige og motsatt. Puslebaserte oppgaver kan derfor bidra med å utvikle elevenes forståelse av gyldige og ugyldige argument, og dermed fremme deres læring på metanivå.

Fra studiens funn virket det som at elevenes deltakelse i diskursen endret seg til en mer utforskende deltakelse ettersom det var indikasjoner av deritualisering i Stian, Lisbeth, Martine og Lottas deltakelse. Endringene observert hos elevene var: fleksibilitet, binding, utøveren som agent og begrunnelse. Studiens funn viste at elevene løste oppgavene med ulike rutiner, bandt ulike steg sammen og tok egne valg for å komme frem til riktig produkt. Puslebaserte oppgaver kan være ustrukturerte og har ingen forhåndsbestemte steg å følge (Klymchuk, 2017). Med bakgrunn i funnene virker det som at de puslebaserte oppgavene påvirket disse elevenes arbeid. Puslebaserte oppgaver kan være med på å utvikle studenters problemløsningsferdigheter, kreative tenkemåter og kritiske tenkning (Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017). I arbeidet med oppgavene var Stian og Martine fleksible og Stian, Lisbeth og Lotta bandt ulike steg sammen. Det virker derfor som at disse elevene utviklet sine problemløsningsferdigheter og kreative tenkemåter. Samtidig var Stian, Lisbeth, Martine og Lotta agenter i arbeidet noe som kan ha påvirket deres utvikling av kritisk tenking i statistikk. Studiens funn i relasjon til hensikten med puslebaserte oppgaver (Falkner et al., 2010; Klymchuk, 2017) kan avsløre at arbeidet med de puslebaserte oppgavene påvirket elevenes deritualisering og deres bevegelse mot en utforskende deltakelse. Samtidig viste funnene hvordan disse elevene kan ha utviklet forståelse for hva som kan være et gyldig og ugyldig argument, fordi de klarte å ta egne valg ved å bruke en annen rutine enn den som ble brukt av den fiktive eleven. Å forstå hva som kan være et gyldig resonnement kan, ifølge Sfard (2008), være læring på metanivå. Studiens funn kan foreslå at puslebaserte oppgaver fremmet Stian, Lisbeth, Martine og Lottas læring på metanivå.

Et av studiens hovedfunn viste at fire grupper (G2-5) brukte en prosessorientert rutine i løpet av arbeidet med de puslebaserte oppgavene. Elever som er prosessorientert velger å løse oppgaven ved å følge et ritual observert i en lignende situasjon (Lavie et al., 2019). Studiens funn viste at elevene i de fire gruppene (G2-5) brukte samme rutine som de fiktive elevene i oppgavene. I et ritual etterligner eleven en ekspert (Lavie et al., 2019). Med bakgrunn i dette virker det som at elevene opplevde de fiktive elevene som eksperter da de fulgte deres ritual for å argumentere for oppgavenes løsninger. Elevenes bruk av en prosessorientert rutine kan indikere at elevene var mindre kritiske i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Dette kan støttes av at studenter i arbeid med sophismoppgaver må identifisere et ugyldig argument og i arbeid med paradoxoppgavene forstår at deres første intuisjon kan være feil (Klymchuk & Staples, 2013), noe elevene som brukte en prosessorientert rutine ikke gjorde. Tidligere forskning viser at lærerens støtte var nødvendig for at elevene skulle oppnå læring på metanivå (f.eks. Cooper & Lavie, 2021; Valenta & Enge, 2022). Forskning viser at selv om elevene hadde en rituell deltakelse, kan læreren oppmuntre elevene til mer undersøkende tenkning ved å forklare resonnementet og de underliggende kravene som må aksepteres for at nye metaregler kan oppstå (Nachlieli & Elbaum-Cohen, 2021). Dette kan indikere at elevene som brukte en prosessorientert rutine hadde behov for støtte fra en lærer for å oppnå læring på metanivå. I puslebasert læring legges det vekt på å forbedre studenters læring gjennom utvikling av kritisk tenking (Falkner et al., 2010). Etter elevenes arbeid med oppgavene var det en felles gjennomgang i klasserommet. Elevene ble gjort oppmerksomme på at matematiske argument kan være ugyldige og at deres første intuisjon kan være feil. Kurt trakk, i intervjuet, frem at han lærte mer av sophism- og paradoxoppgavene «vertfall etter vi hadde løst de når vi fikk svarene tilbake [gjennomgang i klasserommet]». Med grunnlag i dette kan det virke som at elevene som fulgte et ritual likevel beveger seg mot utvikling av sine kritiske tenkeferdigheter på grunn av lærerens gjennomgang av ulike rutiner. I LK20 trekkes det frem at elevene må utvikle evne til kritisk tenkning for å ta stilling til valg i eget liv og i samfunnet (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dermed blir utviklingen av elevenes kritiske tenkeferdigheter viktig, ikke bare i arbeid med statistikkoppgaver, men også når de møter oppgaver i hverdagslivet og i samfunnet.

I elevenes arbeid med de puslebaserte oppgavene viste funnene at fire grupper (G2-5) hadde vanskeligheter da de deltok rituelt i diskursen. Funnene, fra Delkapittel 5.1, viste at gruppenes bruk av et godkjent narrativ for medianen ikke var suksessfullt for å løse oppgaven. For gruppene som tok utgangspunkt i det godkjente narrativet oppsto det vanskeligheter med å finne den riktige medianen i histogrammene. En mulig årsak til dette kan være at det godkjente narrativet ikke var suksessfullt for å løse oppgaven før de hadde satt de riktige verdiene i stigende rekkefølge. Tidligere forskning rapporterer at mange studenter, i arbeidet med oppgaver som involverte utregning av medianen, ikke sorterte verdiene i stigende rekkefølge fra minst til størst (Cooper & Shore, 2017a; Van de Walle et al., 2015). Resultatene kan foreslå at elevene opplevde de samme vanskelighetene med utregning av medianen i arbeidet med Oppgave 2 og 4, som er i tråd med tidligere forskning i statistikk (f.eks. Cooper & Shore, 2017a; Van de Walle et al., 2015). Funnene viste at fire grupper (G2-5) brukte et godkjent narrativ i sin prosessorienterte rutine i utregning av gjennomsnittet. Elevene opplevde vansker med å bruke det godkjente narrativet til å løse oppgaven da datamaterialet var fremstilt i et stolpediagram. En mulig årsak kan være at det godkjente narrativet ikke var suksessfullt for å løse oppgaven før de brukte de riktige verdiene fra datamaterialet til å regne gjennomsnittet. Tidligere forskning viser at elever på mellomtrinnet klarte å regne ut gjennomsnittet når datamaterialet var fremstilt i et stolpediagram (Bakker & Gravemeijer, 2004). Forskningen gjort av Bakker og Gravemeijer (2004) samsvarer ikke med våre funn, da det bare var en gruppe som klarte å regne ut gjennomsnittet når datamaterialet var fremstilt i et stolpediagram. Tidligere forskning viser at studenter i arbeid med å regne ut gjennomsnittet når verdiene var fremstilt i histogram hadde vansker med å bruke de riktige verdiene i utregningen «adder og del på antall verdier» (Cooper & Shore, 2017a). Studiens funn viser den samme vansken i disse studentenes forsøk på å regne ut gjennomsnittet når verdiene var fremstilt i et stolpediagram. I en rituell deltakelse løses oppgaven uten mål og mening (Lavie et al., 2019) og det kan derfor tenkes at elevens vansker henger sammen med deres rituelle deltakelse i arbeidet med å regne ut medianen i histogrammene og gjennomsnittet i stolpediagram.

Funn viste at syv elever (54%) i arbeidet med oppgavene henvendte seg til hverandre for hjelp eller forklaring på rutinen som ble brukt. Puslebaserte oppgaver kan være så krevende at studenter opplever frustrasjon i problemløsningsprosessen (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). Samtidig mener Wæge og Nosrati (2018) at kognitivt krevende oppgaver kan bidra til å fremme elevenes problemløsningsferdigheter. Det virker som at den totale kunnskapen i gruppa var med å utvikle elevenes individuelle problemløsningsferdigheter fordi ulike rutiner ble presentert i gruppenes arbeid med oppgavene. Å bli deltaker i den matematiske diskursen skjer gradvis fra at elevene løser oppgaver i et kollektiv til at elevene klarer å løse oppgaver på sin unike måte (Lavie et al., 2019). Å samarbeide med puslebaserte oppgaver kan derfor støttes i et kommognitivt perspektiv ved at elevene fikk mulighet til å individualisere kollektive tenkemåter og dermed utvikle sine problemløsningsferdigheter. Samtidig viste funn fra intervjuet at tre elever (50%) opplevde at de i arbeidet med sophismoppgavene utviklet sine problemløsningsferdigheter, noe to elever (33%) opplevde at de utviklet i arbeidet med paradoxoppgavene. Matematikkfaget skal være med å utvikle elevenes problemløsningsferdigheter slik at elevene blir forberedt på et samfunn i stadig utvikling (Kunnskapsdepartementet, 2019). Studiens funn kan indikere at å arbeide med sophism- og paradoxoppgaver i statistikk, påvirker elevenes evne til å senere løse problemer i samfunnet.

6.3 Elevenes opplevelse i arbeid med sophism- og paradoxoppgavene

I dette delkapittelet diskuterer vi det andre forskningsspørsmålet: *Hvordan opplever 9.trinnselever arbeid med sophism- og paradoxoppgaver relatert til sentralmål og diagrammer?* Med utgangspunkt i de presenterte funnene fra Kapittel 5.0 diskuterer vi mulige årsaker til elevenes ulike opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Vi diskuterer også årsaker til at elevene opplevde utfordringer i arbeidet. For å diskutere elevenes opplevelser bruker vi relevant teori fra Kapittel 2.0 og tidligere forskning fra Kapittel 3.0.

Funnene fra spørreskjema viste at ni elever (69%) opplevde behov for å samarbeide med de fire oppgavene. Samtidig utdypet alle de intervjuede elevene (100%) at oppgavene var utfordrende og at de snakket sammen for å løse oppgavene. Tidligere forskning indikerer at puslebasert læring, hadde en positiv effekt på studentenes samarbeidsevner (Rezvanifard et al., 2022, 2023). Kurt opplevde at han ble «... bedre til å løse problemer med andre», og det virker derfor som at de elevene som opplevde behov for å samarbeide utviklet deres samarbeidsferdigheter i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. For å bli medlem av den matematiske diskursen må elevene kunne kommunisere matematisk med seg selv og andre (Sfard, 2020). På bakgrunn av funn fra spørreskjemaene og intervjuene kan puslebaserte oppgaver ha påvirket elevenes deltakelse i den matematiske diskursen fordi de kommuniserte med hverandre og opplevede et behov for å samarbeide for å løse oppgavene. Samtidig opplevde fire elever (67%) at en utfordring med sophismoppgavene var at de var krevende, noe tre elever (50%) også sa om arbeidet med paradoxoppgavene. Problemet kan være krevende slik at studentene opplever frustrasjon i arbeidet (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). Når studentene finner den riktige løsningsmetoden kan de oppnå det såkalte eureka-øyeblikket (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). Funn fra intervjuene viste at tre elever (50%) opplevde mestringsfølelse i arbeidet med oppgavene. Stian påpekte at «det var jo vanskelige nok oppgaver ... da får du mestringsfølelse når du får det til». Det kan tyde på at elevene i arbeidet med oppgavene opplevde det såkalte eureka-øyeblikket og slik påvirket arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene deres mestringsfølelse og selvtillit i statistikk.

Funn fra studiens spørreskjema viste at fem elever (38%) oppfattet at arbeidet med sophismoppgavene utviklet deres forståelse i statistikk, noe seks elever (46%) oppfattet i arbeidet med paradoxoppgavene. I tillegg bekrefter funnene fra intervjuene dette. I intervjuene fremhevet to elever (33%) at arbeidet med sophismoppgavene hjalp dem med å forstå deres svakheter i statistikk, noe tre elever (50%) også opplevde i arbeidet med paradoxoppgavene. På den ene siden viser studier at studenter som har arbeidet med puslebaserte oppgaver opplevde at de utviklet den matematiske forståelsen (Rezvanifard et al., 2022, 2023) og arbeidet hjalp studentene som strevde med å identifisere sine misoppfatninger (Rezvanifard et al., 2023). På den andre siden er sophism- og paradoxoppgavene ustrukturerte (Klymchuk, 2017) og de kan bidra til at studenter får en dypere forståelse for matematiske konsepter og forstår at deres intuisjon kan være feil (Klymchuk & Staples, 2013). Tidligere forskning viser også at arbeid med kognitivt krevende oppgaver kan øke elevers matematiske forståelse (Wæge & Nosrati, 2018). Dette kan indikere at sophism- og paradoxoppgaver bidrar til utvikling av elevenes forståelse i statistikk fordi de i arbeidet med oppgavene må analysere argumenter og dermed ikke bare kan følge standardalgoritmer. I følge Sfard (2008) skjer læring i matematikk når elevenes diskurs endres eller utvides. Det virket derfor som at elevene, som opplevde at arbeidet utviklet deres forståelse, utvidet eller endret sin statistiske diskurs. Når diskursens meta-regler endres skjer det læring på metanivå (Sfard, 2020). Tidligere forskning har undersøkt hvordan læring på metanivå kan formidles gjennom arbeid med oppgaver hvor ordene «alltid, noen ganger og aldri» i oppgavesituasjonen inviterer til en ny diskurs (Valenta & Enge, 2022). I en oppgavesituasjon handler elevene med rutiner ved å kopiere det andre har gjort før i lignende situasjoner (Sfard, 2020). De puslebaserte oppgavene ber elevene om å finne ut om de fiktive elevene regnet riktig eller ikke. Oppgavesituasjonene sophism- og paradoxoppgavene skaper kan gjøre at elevene utviklet forståelse for hva som kjennetegner et gyldig eller ugyldig resonnement. Basert på elevenes opplevelse, av å ha utviklet sin forståelse i statistikk etter arbeidet med de puslebaserte oppgavene, virket det som at oppgavesituasjonene som ble skapt inviterte elevene til å endre eller utvide sin diskurs.

Puslebaserte oppgaver kan være underholdende for å øke studenters engasjement (Radmehr & Vos, 2020). Funn fra spørreskjemaets åpne spørsmål viste at tre elever (23%), Lisbeth, Linda og Ali, oppfattet at sophismoppgavene var underholdende og fire elever (31%), Lisbeth, Linda, Tomas og Ali, opplevde det samme i arbeidet med paradoxoppgavene. Stian (17%) trakk også frem, i intervjuet, sophismoppgavene som underholdende, noe Stian og Kurt (33%) også trakk frem i arbeidet med paradoxoppgavene. Puslebaserte oppgaver har gjerne ingen forhåndsbestemte steg eller algoritmer å følge (Klymchuk, 2017). Det virker som at elevene opplevde arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene som underholdende fordi oppgavene ikke hadde forhåndsbestemte steg å følge. Det kan også tenkes at disse elevene opplevde arbeidet med oppgavene som underholdende fordi det var nye oppgaver de ikke hadde arbeidet med tidligere i statistikkundervisning. Funn fra elevenes arbeid med oppgavene viste at elevene som opplevde arbeidet med sophismoppgavene som underholdende opplevde dette uavhengig av om de hadde en mer rituell eller utforskende deltakelse. Det samme gjelder elevene som opplevde arbeidet med paradoxoppgavene som underholdende. Dette kan indikere at sophism- og paradoxoppgaver kan være underholdende både for de elevene som fulgte ulike ritualer og hos de elevene som beveget seg mot en mer utforskende deltakelse. Samtidig viste funnene fra intervjuene at fire elever (67%) opplevde at de i arbeidet med sophismoppgavene utviklet deres kreativitet og tre elever (50%) opplevde det samme i arbeidet med paradoxoppgavene. Disse funnene kan bekreftes av Klymchuk (2017) som har definert puslebasert læring som en underholdende undervisningsmetode som kan engasjere studenters kreativitet. Dette kan også støttes av at skolen har som mål å skape motiverende og varierende skolehverdager for elevene, fordi undersøkelser har vist at elevenes motivasjon for skolearbeidet faller med alderen (Meld. St. 22 (2010-2011)). Resultatene kan derfor foreslå at det å bruke puslebasert læring som undervisningsmetode er med på å skape underholdende matematikkundervisning for elevene og lar elevene utvikle kreativ tenkning i matematikk.

Funnene fra spørreskjemaets åpne spørsmål viste derimot at seks elever (46%) oppfattet at arbeidet med sophismoppgavene ikke hadde påvirket deres sosiale ferdigheter og fem elever (38%) oppfattet det samme i arbeidet med paradoxoppgavene. Sfard (2008) påstår det kan bli utviklet en subjektiv diskurs som fører til at de svakeste elevene reduserer deltakelsen og dermed ikke blir invitert inn i den matematiske diskursen. Funn fra intervjuene viste at tre (50%) av de seks elevene, som ikke opplevde noe påvirkning på deres sosiale ferdigheter, også var negative til arbeidet med oppgavene. De samme tre elevene (50%), Jens, Linda og Marit, opplevde at arbeidet med oppgavene ikke påvirket deres selvtillit eller mestringsfølelse. Funn fra arbeidet med de fire oppgaven viste at Jens, Linda og Marit også hadde en rituell deltakelse i arbeidet med oppgavene. Resultatene kan derfor forstås som at de tre elevene (50%) reduserte egen deltakelse i gruppearbeidet med de puslebaserte oppgavene. Elevene har ikke arbeidet med sophism- og paradoxoppgaver før og deres manglende erfaringer med oppgavene kan derfor ha påvirket deres opplevelse av utviklingen av sosiale ferdigheter. Funn fra tidligere forskning viser at puslebaserte oppgaver ikke bare er for de sterkeste studentene (Klymchuk, 2017). I arbeidet med puslebaserte oppgaver kan studenter innse at det ikke er uvanlig med feil innenfor matematikken (Rezvanifard et al., 2022, 2023). Med bakgrunn i tidligere forskning (f.eks. Rezvanifard et al., 2022, 2023) kan det hende elevene i videre arbeid med matematikkoppgaver tar med seg erfaringene om at matematiske argumenter kan være ugyldige. Dette kan påvirke elevene slik at de i videre arbeid ikke reduserer egen deltakelse.

Funn fra intervjuene viste at tre elever (50%) opplevde at paradoxoppgavene var lettere enn sophismoppgavene. I Delkapittel 6.2 presenterte vi funn fra elevenes arbeid med oppgavene og sammen med funnene presentert fra intervjuene viste dette en mulig sammenheng mellom Tomas og Marits rituelle deltakelse og at de også opplevde paradoxoppgavene som lettere enn sophismoppgavene. En mulig årsak til dette kan være at et paradox er et gyldig argument som kan virke kontraintuitivt (Klymchuk, 2017). Vi har tidligere nevnt at elevene i fire grupper (G2-5) kan ha sett på den fiktive eleven som en ekspert og i arbeidet med paradoxoppgavene kan derfor den gitte løsningsmetoden være et ritual elevene etterlignet fra eksperten og fulgte. I sophismoppgavene er ikke rutinen, presentert av en fiktiv elev, gyldig. På bakgrunn av dette kan det tenkes at elevene som synes paradoxoppgavene var lettere opplevde dette fordi ritualet de fulgte ga riktig svar. Funn fra intervjuene viste også fem elever (83%) som hadde vansker med å vurdere nøyaktigheten til matematiske påstander i sophismoppgavene og én elev (17%) opplevde samme utfordring i arbeidet med paradoxoppgavene. I arbeidet med sophismoppgavene må studentene identifisere et ugyldig argument (Klymchuk &

Staples, 2013). Disse resultatene kan bekrefte at elevene som fulgte et ritual hadde større vansker med å vurdere nøyaktigheten til statistiske påstander hvor argumentet er ugyldig.

6.4 Didaktiske implikasjoner

Hvordan sophism- og paradoxoppgaver kan bli brukt i statistikkundervisning på ungdomstrinnet har ikke blitt forsket på tidligere. Vi kunne heller ikke finne noen studier som beskrev elevers arbeid med sophism- og paradoxoppgaver i et kommognitivt perspektiv. Studien vår gir derfor et bidrag til litteraturen om puslebasert læring i elevers statistikkundervisning på ungdomstrinnet. Den gir også et bidrag til bruken av kommognisjon som læringsteori for å undersøke elevers deltakelse og opplevelse i arbeidet med statistikkoppgaver.

I arbeid med sophismoppgavene viste vår studie at elever har vansker med å identifisere ugyldige argument. Å implementere sophismoppgaver i statistikkundervisningen kan derfor bidra til å gi læreren et større innblikk i hva elevene opplever som vanskelig i statistikk. Samtidig kan sophismoppgavene være med på å utvikle elevenes kritiske tenkning fordi de må vurdere hvorfor argumentet er ugyldig. Denne ferdigheten kan de senere få bruk for i hverdagslivets oppgaver og matematikkoppgaver. Denne studien bidrar derfor med inspirasjon til å ta i bruk oppgaver som kan utvikle elevenes kritiske tenkeferdigheter. Studiens funn viste at elevene i arbeidet med paradoxoppgavene opplevde at deres intuisjon kan være feil. Å implementere paradoxoppgaver i statistikkundervisningen kan bidra til at elevene lærer hva som er et gyldig resonnement, noe som kan gjøre elevene mer observante i videre arbeid med oppgaver. Å implementere puslebaserte oppgaver kan derfor gi muligheter til å fremme læring på metanivå.

Implikasjonen av dette bidraget kan skape muligheter for en ny undervisningsmetode i statistikkundervisning på ungdomstrinnet. I tillegg kan studien hjelpe lærere, lærebokforfattere og forskere å involvere puslebasert læring i matematikkfaget også på grunnskolen, for å gi elevene mulighet til å lære gjennom å utvikle kritisk tenkning og problemløsningsferdigheter. Matematikkfaget består av mer enn bare å følge formler og standardalgoritmer. Studien gir derfor ideer til hvordan puslebaserte oppgaver kan brukes på ungdomstrinnet for å utvikle elevenes problemløsningsferdigheter, deltakelse og tenkeferdigheter i statistikk. Dette er kompetanse som står sentralt i matematikkfagets kjerneelementer i LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Puslebaserte oppgaver kan også være mer underholdende og engasjerende for elever. Tidligere forskning viste at forelesere har vansker med å undervise studenter i statistikk (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Koparan, 2014). Dette fordi faget er komplekst og dermed er det vanskelig å motivere studenter til å engasjere seg i arbeidet (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Derfor kan implikasjonen av puslebaserte oppgaver i statistikkundervisning bidra til at emnet blir mer underholdende og engasjerende å arbeide med.

Å bruke et kommognitivt perspektiv til å undersøke elevenes deltakelse og opplevelse kan hjelpe lærere å forstå hvordan de kan bidra til at elevene blir mer kompetente deltakere i den matematiske diskursen. Dette både ved å gi elevene oppgaver som lar elevene bevege seg mot en mer utforskende deltakelse, men også ved å forstå elevenes vansker i arbeid med de puslebaserte oppgavene. I læreplanen står det at elevene skal utvikle kritisk tenkning slik at de kan vurdere egne og andres argument (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vår studie bidrar med oppgavetyper hvor elevene kan bli utfordret i å vurdere sin egen intuisjon om et matematisk argument og hvor de også må identifisere et ugyldig argument. Å implementere denne undervisningsmetoden i statistikkundervisning kan derfor bidra til å utvikle elevenes kritiske tenkning. I følge Sfard (2008) kan å lære å utvikle bevis, og forstå hva som skiller et gyldig og ugyldig bevis, være læring på metanivå. Det å implementere sophism- og paradoxoppgaver i undervisningen kan derfor bidra til å utvikle elevenes læring. Samtidig kan oppgavene bidra til at flere elever arbeider mot en mer utforskende deltakelse ved at elevene får mulighet til å begrunne, binde steg, være fleksible og være agenter i rutinene de bruker i arbeidet med de puslebaserte oppgavene. Samtidig skal elevene kunne diskutere sentralmål og spredningsmål i datasett (Kunnskapsdepartementet, 2019). Tidligere forskning (f.eks. Boels et al., 2019; delMas et al., 2005; Koparan, 2014) har vist at studenter hadde vanskeligheter med sentralmål i diagrammer. Implikasjonen av vårt bidrag kan derfor være med på å introdusere sophism- og paradoxoppgaver og gi inspirasjon til en ny undervisningsmetode hvor elevene får mulighet til å utvikle sin forståelse i statistikk.

6.5 Begrensninger med studien

For første gang gjør denne studien en presentasjon av puslebasert læring fra et kommognitivt perspektiv. I tillegg viser studien hvordan puslebaserte oppgaver kan brukes i statistikkundervisning i den norske grunnskolen. Det er derimot noen begrensninger med studien.

I denne studien utforskes elevers deltakelse og opplevelse med puslebaserte oppgaver i statistikk, basert på svarene til 13 9.trinnselever fra samme ungdomsskole. Det kan derfor hende at resultatene ikke representerer alle 9.trinnselevers deltakelse og opplevelse i arbeidet med puslebaserte oppgaver. Utvalget var et bekvemmelighetsutvalg og derfor kan det hende at funnene ikke gjelder for elever fra andre ungdomsskoler. Basert på våre funn hadde det vært interessant å benytte en casestudie, for å sammenligne elevers deltakelse og opplevelse fra ulike skoler, eller hvordan elever på ulike trinn deltar og opplever arbeidet med puslebaserte oppgaver.

I denne studien ble det brukt én undervisningstime for å samle inn data. Dette ga oss et begrenset datamateriale. Det kan derfor tenkes at elevenes deltakelse og opplevelse kunne vært annerledes dersom de hadde arbeidet med oppgavene i flere undervisningstimer. Samtidig kunne dette også gitt oss som forskere et bedre innblikk i elevenes deltakelse og opplevelse av arbeidet. Én undervisningstime kan også ha påvirket elevenes opplevelse og vurdering av oppgavene fordi de ikke hadde erfaring med puslebasert læring som undervisningsmetode.

Gruppene ble delt i fem tilfeldige grupper uavhengig av deres faglige nivå. Denne inndelingen kan ha hatt en påvirkning av resultatene, og det kan derfor være at resultatet hadde blitt et annet dersom gruppene var satt sammen etter elevenes kognitive nivå. Det kan også tenkes at resultatet hadde vært et annet dersom medlemmene på gruppen hadde like matematiske ferdigheter og var på samme kognitive nivå.

I spørreskjemaet og i intervjuene får vi innblikk i elevenes positive og negative opplevelser i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. I en slik undersøkelse hadde det vært interessant å også få lærerens perspektiv av undervisningstimen. Læreren har bedre kjennskap til elevenes styrker og svakheter. Dette kan gi en informasjon om elevenes deltakelse vi som forskere ikke har kjennskap til. Samtidig er man ikke like konstruktiv som elev, og forstår kanskje ikke alltid poenget med oppgavene på samme måte som en lærer gjør. Lærerens perspektiv kan derfor gi en annen informasjon om bruken av sophism- og paradoxoppgaver i statistikkundervisningen.

I undersøkelsesforskning er sosial ønskelighet et stort problem (Franzen & Mader, 2019). Den sosiale ønskelighetseffekten viser til at respondentenes svar kan være relatert til deres oppfatning av det som er sosialt ønskelig at de skal svare (Bryman, 2012). I elevenes svar på spørreskjema og intervju kan det derfor tenkes at enkelte svar inneholder svar de tror er sosialt ønskelige, fremfor deres opprinnelige mening. Det kan også tenkes at elevene responderte raskt og tilfeldig på noen av spørsmålene fordi de ønsket å distansere seg fra svarene.

6.6 Videre forskning

Denne studien har brukt kommognisjon for å undersøke elevers deltakelse og opplevelse i arbeidet med puslebaserte oppgaver i statistikkundervisning. Kommognisjon (Sfard, 2008) er et komplekst rammeverk og det kan derfor brukes til mer enn å undersøke elevers deltakelse. Ytterligere forskning over lengre tid kan være interessant for å få flere muligheter til å observere endringer i elevenes deritualiseringsprosess i den statistiske diskursen. Det kan være interessant å se mer på elevenes muligheter til å fremme læring på metanivå i arbeidet med puslebaserte oppgaver. Flere studier har undersøkt puslebasert læring blant ingeniørstudenter (f.eks. Klymchuk, 2017; Radmehr & Vos, 2020; Rezvanifard et al., 2022, 2023). I vår studie er det undersøkt puslebasert læring hos elever i grunnskolen, noe som ikke har blitt forsket på tidligere. Mangelen på tidligere forskning og vår masteroppgave kan være en motivasjon til at flere ønsker å forske på bruken av puslebasert læring i den norske grunnskolen. Vi har funnet at puslebaserte oppgaver har bidratt til å utvikle elevenes tenkeferdigheter og problemløsningsferdigheter (Kapittel 5.0), noe som står sentralt i LK20. Det kan derfor være nødvendig med mer forskning innenfor dette feltet.

Denne studien tar utgangspunkt i elevenes deltakelse og opplevelse i arbeidet med puslebaserte oppgaver. Ytterligere forskning kan være nødvendig for å undersøke lærerens engasjement i puslebaserte læringsaktiviteter. For å utvikle elevenes deltakelse mot en mer utforskende deltakelse er læreren viktig (Lavie et al., 2019). I følge Sfard (2020) er lærerens støtte viktig for at læring på metanivå kan skje. Dette viser også tidligere forskning, at en ekspert, læreren, er nødvendig for at elevene skal kunne oppnå læring på metanivå (Cooper & Lavie, 2021; Nachlieli & Elbaum-Cohen, 2021; Nachlieli & Tabach, 2012, 2019; Valenta & Enge, 2022). Forskning på lærerens perspektiv kan derfor være interessant for å undersøke deres påvirkning på elevenes deltakelse i den statistiske diskursen. Videre er også lærerens rolle sentral i utvikling av problemløsningsferdigheter i studenters arbeid med puslebaserte oppgaver (Z. Michalewicz & M. Michalewicz, 2008). På bakgrunn av dette virker det nødvendig med videre forskning for å undersøke lærerens rolle i arbeidet med puslebasert læring som undervisningsmetode.

6.7 Avsluttende ord

Vårt litteratursøk indikerer at det er ikke er forskning på bruken av sophism- og paradoxoppgaver i statistikkundervisning i den norske grunnskolen. Kommognisjon er heller ikke blitt benyttet som rammeverk for å analysere elevers deltakelse og opplevelse i arbeidet med sophism- og paradoxoppgavene. Studiens funn viser at puslebaserte læring er en nyttig undervisningsmetode for å utvikle elevenes kritiske tenking, problemløsningsferdigheter, matematiske forståelse og samarbeidsevner. Samtidig opplevde flere elever sophism- og paradoxoppgavene som varierende, artige og utfordrende. Derfor kan lærere vurdere å implementere sophism- og paradoxoppgaver i sin statistikkundervisning. Funnene viser at kommognisjon var et nyttig verktøy for å utforske elevenes læring. I arbeidet med de puslebaserte oppgavene kunne vi identifisere endringer hos elevene som beveget seg mot en mer utforskende deltakelse i den statistiske diskursen. Implikasjonen av dette bidraget gir informasjon om hvordan vi som lærere kan få et bedre innblikk i elevenes læring av statistikk. Alle mulighetene vårt bidrag gir kan være med på å forbedre statistikkundervisning og gjøre den mer underholdende og engasjerende. Vi håper vår studie inspirerer og motiverer lærere til å integrere sophism- og paradoxoppgaver i sin matematikk- og statistikkundervisning.

7.0 Litteraturliste

Badger, M., Sangwin, C. J., Ventura-Medina, E. & Thomas, C. R. (2012). *A guide to puzzle-based learning in STEM subjects.* University of Birmingham. https://www.maths.ed.ac.uk/~csangwin/Publications/GuideToPuzzleBasedLearningInSTEM.pdf

Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2004). Learning to Reason About Distribution. I Ben-Zvi & Garfield, *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (s. 147 – 168). Springer Dordrecht.

Barrow, H.S. (1996). Problem-based leaning in medicine and beyond: A brief overview. *New Directions for Teaching and Learning, 1996*(68), 3 – 12. https://doi.org/10.1002/tl.37219966804

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking; Goals, Definitions and Challenges. I Ben-Zvi & Garfield, *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (s. 147 – 168). Springer Dordrecht.

Boels, L., Bakker, A., Van Dooren, W. & Drijvers, P. (2019). Conceptual difficulties when interpreting histograms: A review. *Educational Research R*eview, 28. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.100291

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4. Utg.). Oxford University Press.

Clark, T., Foster, L., Sloan, L. & Bryman, A. (2021). *Bryman's social research methods (6. utg).* Oxford University Press.

Cooper, J. & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses – A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *Journal of Mathematical Behavior, 61*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100822

Cooper, L. L. & Shore, F. S. (2017a). Students' Misconceptions in Interpreting Center and Variability of Data Represented via Histograms and Stem-and-Leaf Plots. *Journal of Statistics Education, 16(2).* https://doi.org/10.1080/10691898.2008.11889559

Cooper, L. L. & Shore, F. S. (2017b). The Effects of Data and Graph Type on Concepts and Visualizations of Variability. *Journal of Statistics Education, 18*(2). https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889487

Creswell, J. W. & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative & mixed methods approaches (5th edition)*. Sage publications.

De Nasjonale forskningsetiske komiteer. (2021). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH).

delMas, R., Garfield, J. & Ooms, A. (2005). Using Assessment Items to Study Students' Difficulty with Reading and Interpreting Graphical Representations of Distributions. I Makar, K. (Red.), *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Thinking, and Literacy.* Auckland, New Zealand: University of Auckland.

Falkner, N., Sooriamurthi, R. & Michalewicz, Z. (2010). Puzzle-based Learning for Engineering and Computer Science. *IEEE Computer, 43*(4), 20 – 28. https://doi.org/10.1109/MC.2010.113

Franzen, A. & Mader, S. (2019). Do Phantom Questions Measure Social Desirability? *methods, data, analyses (mda), 13*(1), 37 – 57. https://doi.org/10.12758/mda.2019.01

Kaplan, J. J., Gabrosek, J. G., Curtiss, P. & Malone, C. (2017). Investigating student understanding of histograms. *Journal of Statistics Education, 22*(2). https://doi.org/10.1080/10691898.2014.11889701

Klymchuk, S. (2017). Puzzle-based learning in engineering mathematics: students' attitudes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(7), 1006 – 1119. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1327088

Klymchuk, S. & Staples, S. (2013). *Paradoxes and Sophisms in Calculus*. Mathematical Association of America.

Koparan, T. (2014). Difficulties in learning and teaching statistics: teacher views. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(1), 94 – 104. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941425

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1-10 (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift av Kunnskapsdepartementet. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Kukliansky, I. (2016). Student's Conceptions in Statistical Graph's Interpretation. *International Journal of Higher Education, 5*(4), 262 – 267. http://dx.doi.org/10.5430/ijhe.v5n4p262

Lavie, I. & Sfard, A. (2019). How children individualize numerical routines: elements of a discursive theory in making. *Journal of the Learning Sciences, 28*(4-5), 419 – 461. https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 153 – 176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Meld. St. 22 (2010-2011). *Motivasjon – Mestring – Muligheter — Ungdomstrinnet.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-22-2010--2011/id641251/

Michalewicz, Z. & Michalewicz, M. (2008). *Puzzle-based Learning: An introduction to critical thinkning, mathematics, and problem solving*. Hybrid Publishers.

Nachlieli, T. & Elbaum-Cohen, A. (2021). Teaching practices aimed at promoting meta-level learning: The case of complex numbers. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100872

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 10 – 27. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.007

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2019). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 253 – 271. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9848-x

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2022). Classroom learning as a deritualization process: The case of prospective teachers learning to solve arithmetic questions. *Journal of Mathematical Behavior, 65*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100930

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Matematikksenteret.*

Parhami, B. (2008). A puzzle-based seminar for computer engineering freshmen. *Computer Science Education, 18*(4), 261 – 277. https://doi.org/10.1080/08993400802594089

Parsian, N. & AM, T. (2009). Developing and Validating a Questionnaire to Measure Spirituality: A Psychometric Process. *Global Journal of Health Science, 1*(1). https://doi.org/10.5539/gjhs.v1n1p2

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational studies in Mathematics, 91*(3), 423 – 430. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9676-1

Radmehr, F. & Vos, P. (2020). Issues and challenges of 21st Century assessment in mathematics education. I Leite, L., Oldham, E., Afonso, A. S., Viseu, F., Dourado & Martinho, H. (Red.), *Science and mathematics education for 21st century citizens: challenges and ways forward* (s. 437 – 462). New York: Nova Science Publishers.

Remillard, K. S. (2014). Identifying discursive entry points in paired-novice discourse as a first step in penetrating the paradox of learning mathematical proof. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 99 – 113. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.02.002

Rezvanifard, F., Radmehr, F., & Rogovchenko, Y. (2022). Advancing engineering students' conceptual understanding through puzzle-based learning: a case study with exact differential equations. Teaching Mathematics and its Applications: *An international Journal of the IMA, 1*(24). https://doi.org/10.1093/teamat/hrac005

Rezvanifard, F., Radmehr, F. & Drake, M. (2023). Perceptions of Lectures and Engineering Students of Sophism and Paradox: The Case of Differential Equations. *Education sciences, 13*(4), 1 – 22. https://doi.org/10.3390/educsci13040354

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communication: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Sfard, A. (2020). Commognition. I Lerman, S. (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 95 – 101). Springer International Publishing.

Shinno, Y. & Fujita, T. (2021). Characterizing how and when a way of proving develops in a primary mathematics classroom: a commognitive approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(12), 3326 – 3351. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941365

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A case book for professional development.* Teachers College Press.

Thomas, C., Badger, M., Ventura-Medina, E. & Sangwin, C. (2015). Puzzle-based Learning of Mathematics in Engineering. *Engineering Education, 8*(1), 122 – 134. https://doi.org/10.11120/ened.2013.00005

Tracy, J. S. (2010). Qualitative Quality: Eight «Big-Tent» Criteria for Excellent Qualitative Research. *Qualitative Inquiry, 16*(10). https://doi.org/10.1177/1077800410383121

Valenta, A. (2016). Kognitive krav i matematikkoppgaver. *Matematikksenteret.*

Valenta, A. & Enge, O. (2022). Teaching practices promoting meta-level learning in work on exploration-requiring proving tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 67.* https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100997

Van de Walle, A. J., Karp, S. K. & Bay-Williams, M. J. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (9.utg). Pearson Education.

Vaismoradi, M., Turunen, H. & Bondas, T. (2013). Content analysis and thematic analysis: Implications for conducting a qualitative descriptive study. *Nursing & Health Sciences, 15*(3), 398 – 405. https://doi.org/10.1111/nhs.12048

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In: Rieber, R. W & Carton A. C. (red), *The collected works of L. S. Vygotsky* (s. 39 – 285). Plum Press.

Wittgenstein, L. (2001). *Philosophical investigations: the German text, with a revised English translation* (3. utg). Blackwell Publishing.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Universitetsforlaget.

Ärlebäck, J. B. & Frejd, P. (2013). Modelling from the Perspective of Commognition – An Emerging Framework. I G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, J. Brown (Red.) *Teaching*

Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice (s. 47 – 56). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_3

Vedlegg

Vedlegg 1. Informert samtykkeskjema

Vedlegg 2. Vurdering av behandling av personopplysninger

Vedlegg 3. Prosessdokument

Vedlegg 1. Informert samtykke

Vil du delta i forskningsprosjektet
«Hvordan arbeider elever med statistikkoppgaver»?

Dette er et spørsmål til deg som forelder/foresatt og/på vegne av ditt barn om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers arbeid innenfor temaet statistikk i matematikkundervisningen. I dette skrivet gir vi deg og ditt barn informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelsen vil innebære for ditt barn.

Formål

Formålet med prosjektet er å undersøke elevers arbeid to ulike oppgavetyper innenfor statistikkundervisningen på 9.trinn. Det er gjort lite forskning på elevers forståelse og arbeid i statistikk og vi lurer derfor på om noen oppgaver kan påvirke ungdomsskoleelevers arbeid i matematikk innenfor temaet statistikk. Opplysningene vi henter inn skal bli brukt i en masteroppgave på Grunnskolelærerutdanningen 5-10.trinn på NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Veileder Farzad Radmehr og studentene Pia Hapnes Rege og Andrea Vinje Tøsse ved Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Ditt barn får spørsmål om å delta fordi vi er praksisstudenter ved ungdomsskolen barnet er elev på. Vi velger å bruke barn som går på 9.trinn fordi vi kjenner dem og har undervist i statistikk. Alle elevene på 9.trinn vil få henvendelse om å delta i studien.

Hva innebærer det for deg å delta?

I en matematikktime vil ditt barn samarbeide med medelever i mindre grupper om to ulike oppgavetyper. Etterpå vil de måtte svare på et individuelt spørreskjema. Vi kommer til å bruke to matematikkøkter på 45 min i uke 2 til å arbeide med oppgavene og svare på spørreskjemaet. Spørreskjemaet inneholder spørsmål knyttet til oppgavene de har arbeidet med. 3-6 elever vil også bli valgt ut til et mer utdypende intervju som vil ta 25-30 minutter, disse vil foregå i løpet av en skoledag i uke 2.

I arbeidet med oppgavene vil det bli tatt lydopptak av 3-6 grupper, dette for at vi skal kunne få med oss hvordan dere arbeider med oppgavene i grupper. I tillegg vil det bli tatt lydopptak av de elevene som senere blir valgt ut til et mer utdypende intervju.

Foreldre og foresatte kan få tilgang til oppgavene, spørreskjema og intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan de når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis de ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil ikke påvirke vurderingen i matematikkfaget.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det vil være vi studenter, Pia Hapnes Rege og Andrea Vinje Tøsse, og vår veileder ved NTNU, Farzad Radmehr, som har tilgang på oppgaveark, spørreskjema og lydopptak. For å koble sammen oppgaver og spørreskjema må ha navn i starten av prosessen, men dette vil vi erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. I utgangspunktet vil du ikke kunne gjenkjennes i masteroppgaven, ettersom navnet ditt vil pseudonymiseres. Dette betyr at vi vil avidentifisere personopplysninger om deg slik at de ikke kan knyttes til deg uten bruk av tilleggsopplysninger, her kode for navn, som vil bli lagret adskilt og sikkert.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Lydopptak vil bli slettet når masteroppgaven leveres i mai 2023. Transkripsjoner og øvrig data vil etter planen avsluttes 07.2025. Dine personopplysninger slettes, og øvrig data som blir tatt vare på for videre forskning vil bli anonymisert.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved Farzad Radmehr, tlf: 73591897, e-post: farzad.radmehr@ntnu.no
- Pia Hapnes Rege tlf: 90709173, e-post: piahr@stud.ntnu.no
- Andrea Vinje Tøsse, tlf: 90238544, e-post: andreavt@stud.ntnu.no
- NTNUs personvernombud: Thomas Helgesen, tlf: 93079038, mail: thomas.helgesen@ntnu.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen
Pia Hapnes Rege, Andrea Vinje Tøsse & Farzad Radmehr.
(Masterstudenter og veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet elevers arbeid med statistikkoppgaver, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- å delta i arbeid med oppgaver og spørreskjema

- å delta i intervju
- at oppgaveark, spørreskjema og lydopptak kan gi opplysninger om meg til prosjektet
- at lydopptak av intervju kan gi opplysninger om meg til prosjektet
- at opplysninger om meg publiseres slik at jeg kan gjenkjennes av medelever, opplysningene vil bli pseudonymisert

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foreldre/foresatte, dato)

Vedlegg 2. Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer

795340

Vurderingstype

Standard

Dato

14.12.2022

Prosjekttittel

Master i matematikk

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig

Farzad Radmehr

Student

Andrea Vinje Tøsse & Pia Hapnes Rege

Prosjektperiode

30.08.2022 - 25.07.2025

Kategorier personopplysninger

- Alminnelige

Lovlig grunnlag

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 25.07.2025.

Kommentar

OM VURDERINGEN

Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket. Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG

Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

DEL PROSJEKTET MED PROSJEKTANSVARLIG

Det er obligatorisk for studenter å dele meldeskjemaet med prosjektansvarlig (veileder). Det gjøres ved å trykke på "Del prosjekt" i meldeskjemaet. Om prosjektansvarlig ikke svarer på invitasjonen innen en uke må han/hun inviteres på nytt.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 25.07.2025.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art.

20). Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med. For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Kontaktperson hos oss: Janniche Linde

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3. Prosessdokument

Samarbeidet har gjennom hele masterskrivingen bestått av et strukturert og godt arbeid. Fra studiestart har vi vært gode venner og samarbeidet med flere gruppeoppgaver i matematikk. Vi er begge pliktoppfyllende og ønsker å gjøre et grundig arbeid, noe som har kommet godt med i skriveprosessen. Dette var egenskaper vi kjente godt til hos hverandre og vi var derfor klar over hverandres forventninger til arbeidet.

I mai 2022 ble vi enige om å skrive masteroppgaven sammen og fant raskt et tema begge to syntes virket spennende. Vi ønsket å komme raskt i gang med arbeidet og tok kontakt med veileder tidlig høsten 2022. Vi opprettet tidlig en felles mappe i NTNU OneDrive hvor vi delte alle dokumenter slik at begge kunne redigere og ha tilgang til masteroppgavens innhold. Høsten 2022 var vi på samme praksisgruppe og begynte allerede da å observere elevers vanskeligheter i matematikk. Dette tok vi med oss inn i videre planlegging av masteroppgaven. Etter praksis ble vi enige om at det matematiske temaet for de puslebaserte oppgavene skulle være statistikk og vi begynte da å designe oppgaver og utvikle de ulike instrumentene for datainnsamlingen. I desember var instrumentene ferdig utviklet, og oppgavene var godt kvalitetssjekket og vi søkte til NSD. Dette gjorde at vi allerede andre skoleuke i januar 2023 var klar til å samle inn datamaterialet.

I arbeidet med masteroppgaven har det vært viktig med god planlegging, en fast rutine og dialog oss imellom. Derfor opprettet vi en felles timeplan hvor vi la inn veiledningsmøter, frister og delmål vi hadde. Vi har begge hatt deltidsjobb ved siden av masterskrivingen og timeplanen har derfor vært viktig. Vi ønsket å arbeide med oppgaven mest mulig sammen og har derfor prøvd å samsvare arbeidsdagene med deltidsjobb. Timeplanen ble derfor brukt mye til å dele hvilke dager vi skulle arbeide med masteroppgaven og når det var satt av tid til deltidsjobb eller andre hendelser. Dette har fungert godt for oss og har gjort at vi gjennom hele prosessen har møttes jevnlig og hatt god oversikt over avtaler, mål og frister. Vi avtalte å arbeide med masteroppgaven på skolen fra kl. 09-16, med mindre noe annet var avtalt. Dette har gjort at arbeidet har vært strukturert og at vi har hatt gode dager med mye samarbeid. Det har vært godt å alltid vite at den andre møter på skolen og at vi sammen har diskutert og jobbet med det som har vært utfordrende.

Vi samarbeidet med å transkribere. Vi fordelte lydopptakene og transkriberte like masse, og etterpå lyttet vi til lydopptakene og leste over hverandres transkripsjoner. Dette slik at det skulle bli så nøyaktig som mulig. Arbeidsfordelingen har vært likt fordelt gjennom hele prosessen, og vi har gjort det meste av arbeidet sammen. Dette for at begge skulle få en god forståelse for artikler vi leste, relevant teori og datamaterialet. Samtidig har samarbeidet gjort at vi alltid har kunnet diskutere og spørre hverandre om hjelp fordi vi vet at begge har oversikt over oppgaven. Gjennom hele arbeidet har vi støttet hverandre og gitt konstruktive tilbakemeldinger til hverandres arbeid. Vi har diskutert mye faglig for at innholdet skal være et resultat av begges betraktninger. Mot slutten av arbeidet brukte vi også mye tid på revidering, noe som resulterte i et felles språk gjennom oppgaven.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden