Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Bjørn Eggan

Matematisk resonnering i norske lærebøker i matematikk for 7.– og 8. trinn

En kvalitativ dokumentanalyse

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.–7. trinn
Veileder: Solomon Abedom Tesfamicael
Mai 2023

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Bjørn Eggan

Matematisk resonnering i norske lærebøker i matematikk for 7.– og 8. trinn

En kvalitativ dokumentanalyse

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.–7. trinn
Veileder: Solomon Abedom Tesfamicael
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppdaven i matematikkdidaktikk utgjør avslutningen av mitt studieløp på master i grunnskolelærerutdanning 1.– 7. trinn ved NTNU i Trondheim. Studien er en kvalitativ dokumentanalyse av fire lærebøker i matematikk for 7.– og 8. trinn innen temaene brøk og algebra. Hensikten med studien er å undersøke hvilke typer matematisk resonnering som brukes i lærebøkene. Dette ble gjort gjennom å svare på følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke typer matematisk resonnering brukes i temaene brøk og algebra i et utvalg lærebøker i matematikk for 7. trinn og 8. trinn?
2. I hvilken grad samsvarer funnene med beskrivelsen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK20, som sier at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser?
3. Hvilke forskjeller finnes det mellom temaene brøk og algebra knyttet til matematisk resonnering?
4. Hvilke forskjeller finnes det mellom lærebøkene for 7. trinn og 8 trinn knyttet til matematisk resonnering?

Hovedfokuset i avhandlingen er de to første forskningsspørsmålene. De to neste forskningsspørsmålene vil også undersøkes, men disse kommer som et naturlig biprodukt av de to første.

Det finnes relativt lite forskning på lærebøker i matematikk, til tross for at faget har tradisjon for å være drevet av lærebøker. Jeg ønsker derfor å bidra til økt kunnskap med denne studien. Matematisk resonnering anses som en viktig del av matematikkfaget, både av forskere, og slik som det er beskrevet i læreplanen i matematikk, der det er en del av kjerneelementene i faget. Temaene brøk og algebra er utfordrende tema for elever, og ble derfor ansett som interessante tema å inkludere i studien.

Det ble funnet at lærebøkene brukte varierende typer resonnering, og det ble funnet forklaringer av alle de sju typene forklaringer i rammeverket som ble brukt. 31% av forklaringene var deduktive. 36% av forklaringene var empiriske. 33% av forklaringene kom med påstander eller regler uten å gå i dybden og uten begrunne påstanden. En så stor andel forklaringer av denne typen samsvarer i liten grad med innholdet i LK20. En implikasjon av dette er at lærerens rolle blir desto viktigere for at målet i læreplanen om at elever skal forstå at matematiske regler og resultater har klare begrunnelser skal oppnås. Det var flere deduktive forklaringer i 8. trinnbøkene sammenlignet med 7. trinnbøkene. Det var flere deduktive forklaringer i temaet algebra sammenlignet med brøk. Det var flere forklaringer som kom med påstander uten videre begrunnelser i temaet algebra enn i temaet brøk. Det ble funnet at det var en høy andel forklaringer av typen som refererer til autoriteter i de to mest grunnleggende deltemaene, sammenlignet med de andre. Disse deltemaene hadde også få deduktive forklaringer sammenlignet med de andre.

Abstract

This master thesis in mathematics didactics is the final step in my master study in primary and lower secondary teacher education for years 1-7 at NTNU in Trondheim. The study is a qualitative content analysis of four textbooks in mathematics for 7th and 8th grade within the mathematical domains of fractions and algebra. The purpose of the study is to find what types of mathematical reasoning are used in the textbooks. This is done through answering the following research questions:

1. What types of mathematical reasoning are used in the mathematical domains of fractions and algebra in some selected textbooks in mathematics for 7th and 8th grade?
2. To what extent does the findings correspond to the description of the core element *reasoning and argumentation* in LK20, that states that pupils should understand that mathematical rules and results are not random, but have distinct reasons?
3. What differences can be found between the two mathematical domains fractions and algebra regarding mathematical reasoning?
4. What differences can be found between the textbooks for 7th and 8th grade regarding mathematical reasoning?

The main focus will be the first two research questions. The last two will also be answered, but these are a biproduct of the first two.

There is not much research on textbooks in mathematics, despite the subject being known for to be severely influenced the textbook. Therefore, I want to contribute with more knowledge to the field of research with this study. Mathematical reasoning is defined as a crucial part of mathematic, both by researchers, and by the Norwegian curriculum, where it is one of the core elements in the subject of mathematics. Both fractions and algebra are considered as problematic for pupils and was therefore considered as interesting to include in the study.

It was found that the textbooks used a broad scope of types of reasoning, and it was found explanations of all the seven types of reasoning from the framework that was used. 31% of the explanations was deductive. 36% of the explanations was empirical. 33% of the explanations provided mathematical assertions or rules with only shallow – or no explanation at all. A such large proportion of explanations of this type do not correspond well to the content in LK20. An implication of this is that the teacher's role becomes even more important if the goal in the curriculum, stating that pupils should understand that mathematical rules and results are not random, but have distinct reasons, is to be reached. It was found more deductive explanations in the 8th grade books, compared to the 7th grade books. It was more deductive explanations in algebra, compared to fractions. It was more explanations that provided mathematical assertions or rules with only shallow or no explanation at all in algebra, compared to fractions. In the most basic sub-domains of fractions and algebra, it was found a larger proportion of the explanations that referred to authority, compared to the other sub-domains. These sub-domains also had few deductive explanations.

Til Aga

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser/symboler

DGT	Deduksjon ved bruk av et generelt tilfelle
DM	Deduksjon ved bruk av en modell
DST	Deduksjon ved bruk av et spesifikt tilfelle
ED	Eksperimentell demonstrasjon
KA	Kvalitativ analogi
LK20	Kunnskapsløftet 2020
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
ORM	Overenstemmelse med en regel og en modell
RA	Referere til autoriteter
TIMSS	Trends in Mathematics and Science Study

1 Innledning

Hensikten med denne masteravhandlingen er å undersøke hvilke typer matematisk resonnering som brukes i norske lærebøker i matematikk. Dette vil gjøres ved å analysere forklaringer fra fire lærebøker for 7. og 8. trinn. I denne oppgaven brukes begrepet matematisk resonnering som et overordnet begrep som dekker både det å argumentere for og bevise en matematisk påstand. Disse begrepene vil bli forklart og definert i kapittel 2.1. Innledningen starter med en redegjørelse for valg av tema. Deretter presenteres forskningsspørsmålene og oppgavens avgrensninger. Til slutt presenteres oppgavens struktur.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

I dette avsnittet vil jeg redegjøre for bakgrunnen for valg av tema. Jeg vil starte med å redegjøre for bakgrunnen i en personlig kontekst, altså hvorfor dette er interessant og relevant for meg som snart ferdigutdannet lærer. Etterpå vil jeg redegjøre for den teoretiske bakgrunnen.

1.1.1 Personlig bakgrunn

Som elev på nitti– og totusentallet var matematikk for meg et fag som først og fremst besto av pugging og innprenting av matematiske teoremer og regler. Jeg husker innholdet i lærebøkene som repetitive oppgaver der jeg skulle følge algoritmer for å finne svaret. Personlig var dette noe jeg likte og mestret. Konsise instruksjoner som skulle følges for å komme i mål. Jeg var ikke særlig opptatt av hvorfor, og slik jeg husker det, var det lite fokus på dette både i undervisningen og i lærebøkene. «I matematikken er det slik at vi må bare akseptere at slik er det» er noe både mine lærere og foreldre har sagt til meg utallige ganger.

Mitt første møte med en annen måte å tenke og undervise i matematikk på var da jeg startet på lærerutdanningen på Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Der måtte vi lære oss å tenke annerledes – vi skulle lære oss selv og elevene hvordan og hvorfor matematikken hang sammen. I matematikkdidaktikken lærte vi forskjellige strategier for å kunne resonnere oss fram til hvorfor matematiske regler er som de er. Dagens elever har ikke den samme matematikkundervisningen som på nitti– og totusentallet, ei heller de samme lærebøkene. Både undervisningen og lærebøkene skal gi elevene en forståelse av hvorfor matematiske prosedyrer, påstander og regler er slik som de er. Gjennom erfaring fra praksis og arbeid i skolen har jeg møtt elever som er undrende, spørrende og nysgjerrige på hvorfor og hvordan matematikken fungerer og henger sammen.

Da jeg for to år siden tok fatt på et vikariat som matematikklærer, ble det en omstilling for meg å skulle sette ut det jeg hadde lært i praksis, og elevene fikk en god blanding av den tradisjonelle og den moderne tilnærmingen. I ettertid har jeg utviklet meg som lærer, og fått både teoretisk og praktisk påfyll gjennom lærerstudiet på NTNU. Det er derimot stadig en indre konflikt i meg mellom denne tradisjonelle matematikkundervisningen som jeg selv ble utsatt for og likte, og den moderne praksisen som jeg er ment til å gjennomføre som lærer i 2023. Dette har fasinert meg, og jeg har derfor hatt lyst til å forske på noe som har med hvordan matematikken blir formidlet til elevene. Valget falt på å forske på matematisk resonnering i lærebøker.

1.1.2 Teoretisk bakgrunn

Remillard (2005) beskriver at matematikkfaget, i større grad enn andre fag, har tradisjon for å være drevet av lærebøker (s. 214). Dette henger blant annet sammen med læreres syn på faget – mange føler seg ikke komfortable med å undervise i matematikk. Dermed er en konsekvens at endring i matematikkundervisningen er avhengig av endring av lærebøkene (Ball & Cohen, 1996, sitert i Remilard, 2005, s. 214). Resultater fra undersøkelsen Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) viser at flertallet av lærere internasjonalt bruker lærebøker som hovedgrunnlaget for matematikkundervisningen, og at dette er en økende trend (Askew et al., 2010; Horsley & Sikorová, 2015). Disse betraktningene reflekterer også min erfaring fra egen praksis og arbeid i skoleverket. Som lærer grunnskolen har man ofte travle dager. De gangene man ikke får tid til å planlegge den undervisningen man ønsker, er lærebøkene til stor hjelp. Det er lærebøkene som ligger framfor elevene når de skal gjøre lekser, og det er lærebøkene elevene ser i når de skal ta igjen arbeid etter fraværsdager, repetere eller øve til prøver. Det kan dermed argumenteres for at lærebøker er en viktig faktor for elevers læring i matematikk. Otten et al. (2014) argumenterer for at lærebøkene påvirker hva lærerne gjør i klasserommet, og mener derfor det er rimelig å anta at lærebøkene påvirker elevenes erfaringer med resonnering og bevisføring.

Resonering og argumentasjon er sammen et av kjerneelementene i matematikkfaget i henhold til Kunnskapsløftet 2020 (LK20): «Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser.» (Kunnskapsdepartementet, 2019b). Kjerneelementer i et fag defineres som «det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget» (UDIR, 2020b). Det er dermed tydelig at LK20 vektlegger matematisk resonnering, og at dette skal være gjennomgående i all matematikkundervisning i grunnskolen, ettersom dette er en del av kjerneelementene i faget. I Norge fikk man ny læreplan i matematikk med LK20, som ble innført i august 2020. Kort oppsummert kan det sies at endringen fra LK06 til LK20 i matematikkfaget handler om en endring fra arbeid med algoritmer som skulle utvikle instrumentell forståelse, til utforskende og undersøkende arbeidsmetoder slik at elevene skal oppdage sammenhenger som skal legge til rette for dybdelæring og økt forståelse i matematikkfaget (UDIR, 2020a). Som et resultat av den nye læreplanen, kom det også nye lærebøker i matematikkfaget.

Mange forskere mener at bevis og bevisføring bør være sentralt allerede på barneskolen (Ball & Bass, 2003; Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; Carpenter Franke, & Levi, 2003; Hanna, 1995, 2000; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994; Yac & Hanna, 2003, sitert i Stylianides, 2007). På lignende måte som at LK20 definerer resonnering og argumentasjon som et kjerneelement, noe elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget, mener disse forskerne at bevis og bevisføring er avgjørende for å utvikle matematisk kunnskap. Selv om bevisføring og alt det innebærer kan virke fremmed og unaturlig for en nybegynner, er det essensielt for å fremme matematisk forståelse i klasserommet (Hanna & Jahnke, 1996, s. 877).

Det er relativt lite forskning på lærebøker i matematikk, og forskningen som finnes består av spredte studier som i liten grad er sammenkoblet (Rezat & Sträßer, 2015, s. 248). Kongelf (2015) beskriver hvordan det siden år 2000 har vært lite forskning på grunnskolebøker i matematikk, også i Norge. Jeg har ikke lykkes i å finne forskning som analyserer matematisk resonnering i norske lærebøker i matematikk, og ettersom både læreplanen og lærebøkene som er utviklet som et resultat av læreplanen nylig har blitt tatt i bruk, er dette trolig spørsmål som står ubesvarte i norsk sammenheng. Lærebokanalyser er et viktig steg for å kartlegge, og bedre kunne legge til rette for at matematisk resonnering og bevisføring skal være gjennomgående, også i lærebøkene (Otten et al., 2014).

1.2 Forskningsspørsmål og avgrensning

Læreboken spiller altså en viktig rolle i matematikkfaget. Videre viser forskning at bevis og bevisføring er avgjørende for å utvikle matematisk kunnskap, og LK20 definerer resonnering og argumentasjon som noe elevene må lære for å kunne mestre å anvende matematikk. Det er et behov for mer forskning på lærebøker i matematikk, både internasjonalt og i Norge. På bakgrunn av dette vil jeg derfor undersøke hvilke typer matematisk resonnering som brukes i forklaringer i norske lærebøker i matematikk gjennom å svare på følgende forskningsspørsmål:

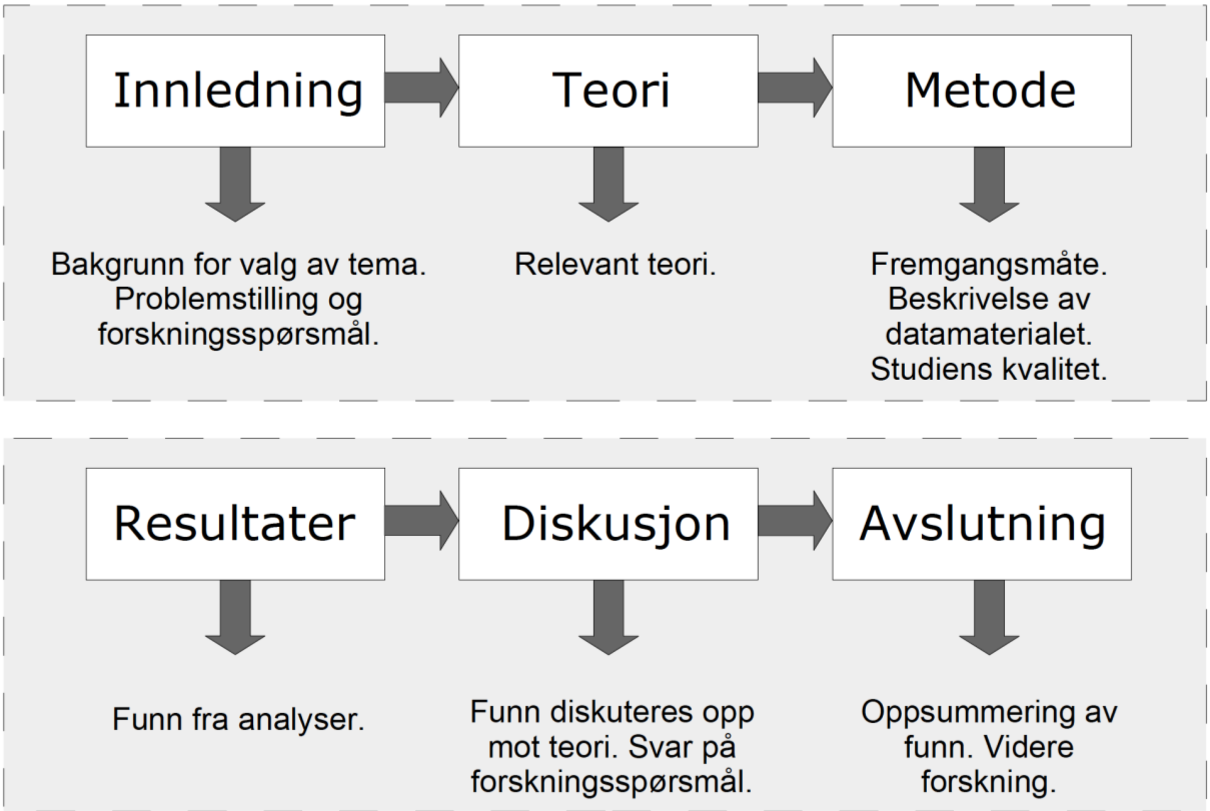
1. Hvilke typer matematisk resonnering brukes i temaene brøk og algebra i et utvalg lærebøker i matematikk for 7. trinn og 8. trinn?
2. I hvilken grad samsvarer funnene med beskrivelsen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK20, som sier at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser?
3. Hvilke forskjeller finnes det mellom temaene brøk og algebra knyttet til matematisk resonnering?
4. Hvilke forskjeller finnes det mellom lærebøkene for 7. trinn og 8 trinn knyttet til matematisk resonnering?

Hovedfokuset i avhandlingen er de to første forskningsspørsmålene. De to neste forskningsspørsmålene vil også undersøkes, men disse kommer som et naturlig biprodukt av de to første. Forskningsspørsmålene avgrenser oppgaven til et omfang passende for en masteroppgave. 7. trinn er valgt grunnet mitt studieløp på grunnskolelærer 1.- 7.-trinn. Jeg har valgt å også analysere 8. trinnbøker, og vil sammenligne funnene fra 7. trinn og 8. trinn. Det å også inkludere 8. trinnbøker kan gi meg økt horisontkunnskap i faget. Horisontkunnskap er kunnskap om hvordan matematiske tema henger sammen gjennom hele læreplanen og utdanningsløpet, og er et av seks hovedelementer som beskriver hvilken kompetanse som er nødvendig for å undervise i matematikk (Ball, 2008).

For å kunne svare på forskningsspørsmålene har jeg gjennomført en kvalitativ dokumentanalyse av forklaringer i lærebøkene. Analysen baserer seg på et rammeverk av Stacey og Vincent (2009) som ble utviklet gjennom forskning på lærebøker i matematikk i Australia. Studien til Stacey og Vincent (2009) har vært viktig for min studie, og har inspirert meg til å gjennomføre lignende forskning på norske lærebøker.

1.3 Oppgavens struktur

Denne masteravhandlingen er strukturert i henhold til figur 1.



Figur 1: Oppgavens struktur

Oppgavens første del består av en innledning, et teorikapittel og et metodekapittel. Innledningen har tatt for seg bakgrunnen for valg av tema, problemstilling og forskningsspørsmål samt en beskrivelse av oppgavens struktur. I teorikapittelet vil det bli presentert relevant teori og tidligere forskning. Videre følger metodekapittelet, hvor framgangsmåten for forskningen og en beskrivelse av datamaterialet blir presentert. Til slutt i metodekapittelet diskuteres studiens kvalitet og etiske vurderinger. Oppgavens andre del består av resultater, diskusjon og en avslutning. I resultatkapittelet presenteres funnene som er gjort. I diskusjonskapittelet diskuteres disse funnene opp mot teori, og det svares på forskningsspørsmålene som ble stilt. I avslutningen oppsummeres funnene fra studien, og jeg kommer med noen betraktninger om hva som kunne vært interessant og forsket videre på. Helt til slutt i oppgaven finnes vedlegg som hovedsakelig består av tabeller som legger grunnlaget for det som er presentert i resultatkapittelet.

2 Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere teori som er relevant til min forskning. Kapittelet starter med en redegjørelse for begrepene matematisk resonnering, argumentasjon og bevis. Deretter vil jeg presentere teori om de to temaene algebra og brøk. Videre vil jeg redegjøre for lærebøker – hvilken posisjon de har i Norge, i matematikkfaget og sammenhengen mellom læreplan og lærebok. Deretter presenteres det tidligere forskning som er relevant for temaet i denne studien. Til slutt beskrives det teoretiske rammeverket som brukes som utgangspunkt for analysene. Rammeverket blir presentert og forklart i detalj. Det blir vist eksempler slik at hver type matematisk resonnering skal være forståelig.

2.1 Resonnering, argumentasjon og bevis

Bevis, argumentasjon og resonnering er begrep som henger sammen, og som ofte brukes om hverandre. Som det ble beskrevet i kapittel 1.1.2, er resonnering og argumentasjon et av kjerneelementene i LK20, og defineres på følgende måte:

> Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige. (Kunnskapsdepartementet, 2019b).

I denne avhandlingen vil jeg bruke begrepet matematisk resonnering på samme måte som Valenta og Enge (2020) og Jeannotte og Kieran (2017), nemlig som et overordet begrep som dekker både det og argumentere og bevise. Et matematisk argument og et matematisk bevis har det samme målet om å validere en matematisk påstand, men det stilles flere krav til et matematisk bevis sammenlignet med et argument (Valenta & Enge, 2020). For eksempel kan et argument for at summen av to påfølgende oddetall alltid blir et multiplum av fire være at 1+3=4, som er i 4-gangen, 3+5=8, som er i 4-gangen, og 5+7=12, som også er i 4-gangen. Denne argumentasjonen går under det Balacheff (1988) kaller naiv empirisme, som innebærer å bruke empiri og anse en påstand som bevist dersom den er vist å stemme for noen eksempler. Dette er en metode som er hyppig brukt av elever på barneskolen. Argumentasjonen når målet om å bidra til validering av den matematiske påstanden, men kan ikke anses som et matematisk bevis. Når det i denne avhandlingen brukes uttrykket empirisk resonnering, er det snakk om resonnering av typen som ble beskrevet ovenfor, der man bruker empiri til å argumentere for at en påstand er sann. Et matematisk bevis skal være matematisk gyldig, og innebærer større grad av deduksjon (Valenta & Enge, 2020). Deduksjon i forbindelse med matematisk resonnering innebærer å trekke logiske slutninger ut fra gitte premisser (som kan være etablert kunnskap i form av matematiske definisjoner), hvor hvert steg er logisk utledet fra det forrige, for så og konkludere. Resultatet av konklusjonen kan da være et matematisk teorem eller en formel. Et matematisk bevis for at summen av to påfølgende oddetall alltid blir et multiplum av fire kan for eksempel innebære å definere et oddetall som et tall som kan skrives som 2n+1, der n er et heltall. Videre defineres et multiplum av fire som et tall på formen 4k, der k er et heltall.

Summen av to oddetall kan dermed uttrykkes som $(2n+1)+(2n+1+2)=4n+4=4\,(n+1)$. $4\,(n+1)$ er fire ganger et heltall, altså 4k. Da har man vist at $(2n+1+2)+(2n+1+2)$ (som er summen av to påfølgende oddetall) $=4k$ (som er et multiplum av fire), og dermed bevist at summen av to påfølgende oddetall alltid er et multiplum av 4. Stylianides (2007) definerer et bevis som et matematisk argument, en sammenkoblet sekvens av utsagn for eller mot en matematisk påstand, som inneholder følgende egenskaper:

1. **Aksepterte sannheter**: Det brukes sanne påstander som er akseptert av klasserommets deltakere og er tilgjengelige for dem uten videre forklaring.
2. **Typer argumentasjon**: Det anvendes typer resonnering som er gyldige og kjent for, eller innen rekkevidde for deltakerne.
3. **Hvordan argumentasjonen representeres:** Det kommuniseres med uttrykk og representasjoner som er passende og kjent for, eller innen rekkevidde for deltakerne.

(Stylianides, 2007, s. 291, egen oversettelse)

Stylianides (2007) hevder at denne definisjonen er passende for bruk i skolematematikken, ettersom den tar hensyn til både matematikk som en disiplin og elevene som skal lære det, den bidrar til en konsistent betydning av bevis gjennom alle trinnene, den aksepterer ikke empiriske argument som bevis og den støtter analyser av undervisning knyttet til bevis (s. 293-294). Aksepterte sannheter regnes altså som aksepterte når elevene i det aktuelle klasserommet anser påstanden som korrekt og selvsagt. Aksepterte sannheter kan innebære definisjoner, aksiomer og teoremer (Stylianides, 2007, s.292). Hva som er akseptert vil naturligvis variere mellom ulike klasser og trinn. En akseptert sannhet i en andreklasse kan være at en sirkel er rund, og en akseptert sannhet i en åttendeklasse kan være at arealet av en sirkel kan finnes med formelen $A=\pi\times r^2$. Typer resonnering kan for eksempel innebære riktig bruk av definisjoner, deduktiv resonnering med logiske slutninger og det å bruke moteksempler til å motbevise en påstand (Stylianides, 2007, s. 292). Elever på ungdomsskolen vil gjerne bruke deduktiv resonnering i større grad enn elever på småtrinnet. Hvordan argumentasjonen representeres kan variere mellom muntlig språk, illustrasjoner, tabeller og symboler (Stylianides, 2007, s. 292). En tredjeklasse som ser på et figurmønster vil kunne si at det øker med en og bruke en tegning av figurmønsteret som støtte, mens en åttendeklasse vil kunne beskrive dette algebraisk som $f_n=f_{n-1}+1$ med støtte av en tabell som viser antallet i de forskjellige figurene. En typisk barneskoleelev sitt forsøk på å bevise en matematisk påstand vil med andre ord være et godt stykke fra å kunne kalles et bevis. Slik det ble beskrevet i innledningen er både LK20 og forskning tydelig på at bevis og bevisføring bør være sentralt allerede på barneskolen, men tradisjonelt har elever først og fremst møtt på bevis og bevisføring på ungdomsskolen (Stylianides, 2007, s. 289). Det er lite forskning med fokus på hvordan man kan ta i bruk bevis og bevisføring i undervisningen på barneskolen, og en definisjon av matematiske bevis som er passende for barneskolen er sjeldent gitt i litteratur om matematikkundervisning (Stylianides, 2007, s. 290).

2.2 Algebra

Algebra er vanskelig å definere, ettersom det er mange ulike tolkninger. Videre er det stor forskjell på algebraen som undervises på grunnskolen sammenlignet med universitetsnivå. I denne masteroppgaven er begrepet algebra sentralt da det er et av temaene som analyseres, og jeg vil derfor belyse begrepet algebra og de tilhørende begrepene skolealgebra og algebraisk tenking.

Usiskin (1988) bruker uttrykket skolealgebra som noe som har med forståelsen av bokstaver i form av variabler og operasjoner på disse variablene. Usiskin (1988) deler algebra opp i *algebra som generalisert aritmetikk, algebra som studie av prosedyrer for å løse bestemte typer problemer, algebra som studie av forholdet mellom mengder* og *algebra som studie av strukturer.* I hver av disse har variablene ulike hensikter. I A*lgebra som generalisert aritmetikk* er hensikten til variablene å generalisere mønster. Et eksempel på dette er i uttrykket $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, hvor variablene som hensikt å generalisere multiplikasjon av potenser der grunntallet i begge faktorene er like. *Algebra som studie av prosedyrer for å løse bestemte typer problemer* handler om å løse et problem ved hjelp av algebra. For eksempel kan problemet «Et tall multiplisert med fire er fem mindre enn 21» oversettes algebraisk til likningen 4x = 21-5 og deretter løses. Her fungerer variablene som enten ukjente eller konstanter, og de skal brukes til å forenkle og løse problemet. *Algebra som studie av forholdet mellom mengder* handler om forholdet mellom flere variabler. Eksempelvis er formelen for arealet til et rektangel $A = l \cdot b$. Her skal ikke formelen løses, ettersom ingen av variablene er kjent. Formelen generaliserer heller ikke tall. Hensikten til variablene er med å beskrive forholdet mellom nettopp variablene. Arealet er avhengig av lengden og bredden (som vil variere). Variablene har dermed samme hensikt som i funksjoner. I *algebra som studie av strukturer* handler det om å utlede et uttrykk fra et annet. Her fungerer variablene som et symbol uten verdi som skal manipuleres. Et uttrykk som $2x^2 + 3ax - 14a$ kan faktoriseres til $(x - 2a) \cdot (2x + 7a)$, hvor det siste uttrykket er utledet fra det første.

Kieran (2004a, s. 22-24) har en lignende inndeling, som deler opp aktivitetene som inngår i skolealgebra i *genererende aktiviteter*, *transformerende aktiviteter* og *aktiviteter på global/meta-nivå*. *Genererende aktiviteter* innebærer å generere algebraiske uttrykk og likninger. Dette kan være uttrykk som representerer kvantitative problemer, uttrykk som representerer generalisering av figur- eller tallmønster eller uttrykk som representerer ulike regler som bestemmer numeriske sammenhenger. *Transformerende aktiviteter* innebærer å manipulere uttrykk, for eksempel ved å forenkle uttrykk, utvide parenteser og løse likninger. *Global/meta-nivå aktiviteter* innebærer å bruke algebra som et verktøy for problemløsning, modellering, generalisering og bevisføring. Kierans (2004a) *genererende aktiviteter* har fellestrekk med Usikins (1988) *algebra som generalisert aritmetikk* og *algebra som studie av prosedyrer for å løse bestemte typer problemer.* Kierans (2004a) *aktiviteter på global/meta-nivå* har likheter med Usikins (1988) *algebra som studie av prosedyrer for å løse bestemte typer problemer*. Kierans (2004a) *transformerende aktiviteter* har likhetstrekk med Usikins (1988) *algebra som studie av prosedyrer for å løse bestemte typer problemer* og *algebra som studie av strukturer*.

Algebra beskrives som et av det matematiske kunnskapsområdene i LK20. Abstraksjon og generalisering er sammen et av kjerneelementene i faget, og beskrives på følgende måte:

> Abstraksjon i matematikk innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer. Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Det vil si at elevene kan utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner. (Kunnskapsdepartementet, 2019b)

Under matematikkfagets kjerneelementer defineres algebra som noe som «handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk» (Kunnskapsdepartementet, 2019b). Dermed har beskrivelsen av algebra i LK20 flere likhetstrekk med beskrivelsen til Usiskin (1988) og Kieran (2004a). Mønstre, strukturer, sammenhenger, generalisering og modellering er elementer som er sentrale.

Tidlig algebra eller algebraisk tenking, er også et uttrykk som er sentralt i forbindelse med algebra i skolen. Lins og Kaput (2004) beskriver at tidlig algebra kan forstås på to måter (s. 48-49). Den ene måten er det første møte elevene har med algebra, typisk i en alder som tilsvarer 7. – 8. klasse i Norge. Den andre måten forstår tidlig algebra som det å introdusere elever til å kunne resonnere på lignende måter som man gjør i algebra, allerede på småtrinnet. Kieran (2004b) definerer algebraisk tenking på småtrinnet som:

> Utvikling av måter å tenke på innen aktiviteter der bokstavsymbolsk algebra kan brukes som et verktøy, men som ikke er begrenset til algebra, og som kan brukes uten å bruke noen form for bokstavsymbolsk algebra i det hele tatt. For eksempel det å analysere forhold mellom mengder, oppdage strukturer, studere endringer, generalisering, problemløsing, modellering, argumentasjon, bevisføring og det å forutsi resultater. (Kieran, 2004b, s. 149, egen oversettelse)

Algebraisk tenking kan altså forstås som det å kunne bruke måter å tenke på som vi kjenner igjen fra algebra, uten å nødvendigvis bruke bokstaver som symboler. Derfor er det naturligvis flere likhetstrekk mellom elementene i Kierans (2004b) definisjon av algebraisk tenking på småtrinnet og Usiskin (1988) sin beskrivelse av algebra. I LK20 er algebra og generalisering beskrevet under fagets kjerneelementer, slik som beskrevet ovenfor. I kompetansemålene blir algebra først nevnt i kompetansemålene etter 8. trinn. Man kan derimot gjenkjenne elementer fra algebraisk tenking allerede i kompetansemålene etter 2. trinn. Eksempler er «kjenne igjen og beskrive repeterende enheter i mønstre og lage egne mønstre», «utforske den kommutative og den assosiative egenskapen ved addisjon og bruke dette i hoderegning» og «utforske og beskrive generelle egenskaper ved partall og oddetall» (Kunnskapsdepartementet, 2019a). I alle disse kompetansemålene krever det at elevene anvender tenkemåter som vi kjenner fra algebra.

Stacey og Chick (2004) beskriver algebra som et problematisk tema i matematikkundervisningen, og beskriver tre faktorer som gjør temaet problematisk (s. 1-3). For det første kan algebra oppfattes som lite relevant. Hvis man tolker algebra kun som symbolsk manipulasjon av uttrykk, slik som i Usiskins (1988) algebra som studie av strukturer og Kierans (2004a) transformerende aktiviteter, vil dette være lite relevant for elevenes hverdagsliv. En oppfattelse som begrenser seg til symbolsk manipulasjon vil også gjøre at algebra føles lite meningsfylt ut, som er den andre faktoren. En viktig jobb læreren har er derfor å vise elevene at algebra er mer enn bare symbolsk manipulasjon. Den tredje faktoren handler om at algebra er et vanskelig tema. Algebra er vanskelig ettersom det krever høy grad av abstraksjon, det har mange ulike koblinger til tidligere aritmetisk læring og det krever at man blir flytende i symbolsk manipulasjon. (Stacey og Chick, 2004, s. 1-3).

2.3 Brøk

Brøk er et komplekst konsept, og kan tolkes på mange ulike måter. I denne masteroppgaven er brøk et av to tema som analyseres. Derfor vil jeg i dette avsnittet beskrive de ulike tolkningene av brøk, og hvordan brøk beskrives i LK20.

Brøk kan tolkes som en del av en hel, som måling, som kvotient, som operator og som proposisjon (Solem et al., 2017, s.221-222). Solem et al. (2017) beskriver hvordan brøk kan forstås som en del av en hel i den forstand at en helhet blir oppdelt i like deler, og brøken angir forholdet mellom delene og helheten. Brøk som måling kan for eksempel være avstand på en tallinje eller en klokke. Brøk som kvotient er når man deler noe likt, for eksempel fem kakestykker delt likt på tre personer, og kvotienten blir brøken, i dette tilfellet $\frac{3}{5}$. Brøk som operator handler om sammenligning mellom to størrelser hvor brøken fungerer som en faktor som må multipliseres med et annet tall, for eksempel for å finne $\frac{3}{5}$ av 50 kroner kan man multiplisere brøken med 50. I brøk som proposisjon fungerer brøken som en målestokk, typisk brukt i kart.

De ulike tolkningene av brøk kan være en av grunnene til at det er brei enighet om at brøk er et utfordrende tema i matematikkundervisningen. Streefland (1991) går så lang som å si at «Brøk er uten tvil det mest problematiske området i matematikkundervisning.» (s. 6). Videre kan brøk representeres på en rekke måter. Typiske representasjoner er arealmodeller, tallinjer og mengdemodeller. Forskning understreker viktigheten av å gi elevene varierte og ulike representasjoner (Enge & Valenta, 2013; Lamon, 2006). Dette kan gjøre det lettere å for elevene å forstå konseptet brøk og alle de ulike tolkningene. I LK20 går brøk innunder det matematiske kunnskapsområdet tall og tallforståelse som er definert i fagets kjerneelementer (Kunnskapsdepartementet, 2019b). I kompetansemålene i faget omtales brøk i kompetansemålene etter 5.- til og med 8. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019a). I denne avhandlingen er målene for 7. – og 8. trinn de mest relevante:

Mål for opplæringen er at elevene skal kunne:

- utvikle og bruke hensiktsmessige strategier i regning med brøk, desimaltall og prosent og forklare tenkemåtene sine
- representere og bruke brøk, desimaltall og prosent på ulike måter og utforske de matematiske sammenhengene mellom disse representasjonsformene
- utforske og beskrive primtallsfaktorisering og bruke det i brøkregning

(Kunnskapsdepartementet, 2019a)

2.4 Lærebøker

I denne studien analyseres lærebøker i matematikk. Derfor er det nødvendig å avklare hva som menes med begrepet lærebok, og hvordan dette vil bli brukt videre. Oppfattelsen av hva en lærebok er har endret seg med tiden. Tidligere betydde en lærebok bokstavelig talt selve læreboken, mens det i dag ofte innebærer alle de forskjellige læringsressursene knyttet til boken (Pepin et al., 2013). Pepin et al. (2013) definerer læringsressurser som alle ressursene som finnes og brukes av lærere og elever. Eksempler på slike tilleggsressurser kan være parallellbøker for elever med leseskrivevansker, digitale ressurser med videoer og oppgaver samt lærerveiledninger. Når det i denne oppgaven refereres til lærebøker menes de tradisjonelle fysiske lærebøkene.

2.4.1 Lærebøker i Norge

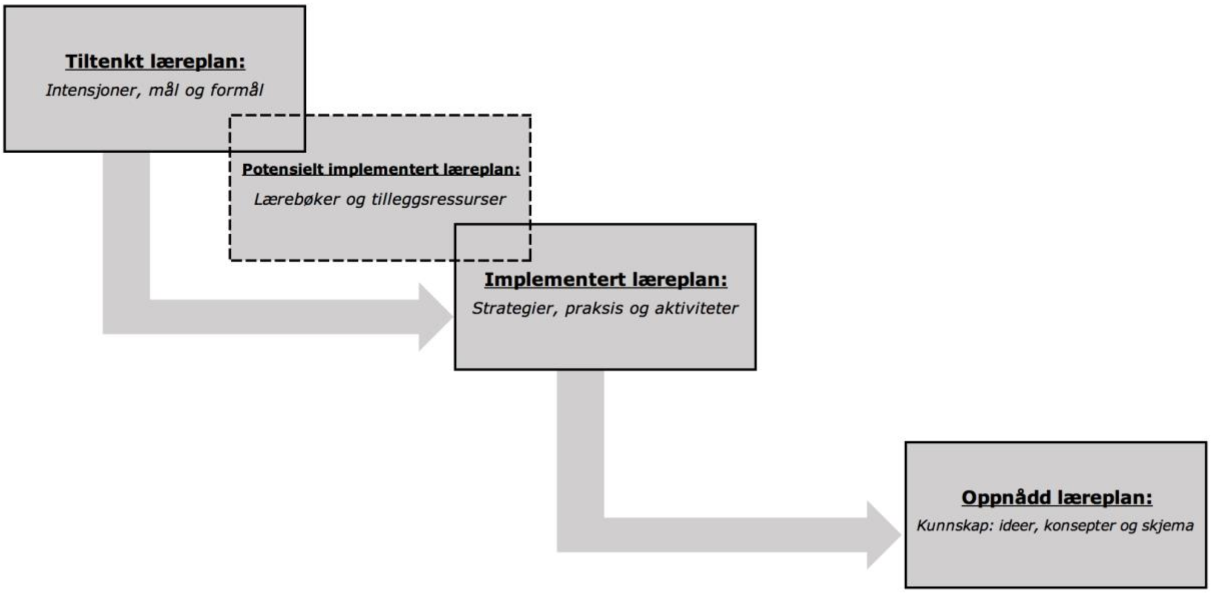
I denne avhandlingen er det norske lærebøker som analyseres. Derfor er det relevant å gi bakgrunnsinformasjon om lærebøker i Norge. I Norge har elevene lovfestet rett til gratis offentlig grunnskoleopplæring, noe som også inkluderer undervisningsmateriell (Opplæringslova, 1998, § 2-15). Dette gjør at elever på grunnskolen (1.- 10. trinn) i Norge har tilgang til gratis lærebøker i alle fag. Det er derimot stor variasjon fra skole til skole. Nye skoler får midler til å kjøpe nye lærebøker. Skoler med trang økonomi kan ha eldre lærebøker som følger gamle læreplaner. En undersøkelse gjennomført av Utdanningsforbundet i 2021 viser at 76 % av de tillitsvalgte i grunnskolen oppgir at skolen de er ansatt på i liten grad har midler til å fornye læremidlene i henhold til LK20 (Vik, 2021). Noen skoler velger å satse på digitale læreverk. Noen skoler har en lærebok til hver elev, som gjør at elevene kan ta med seg lærebøkene hjem. På andre skoler er det færre lærebøker per elev, som gjør at lærebøkene må bli på skolen etter skoledagen er over. Det er den enkelte skole som avgjør hvilke læreverk som skal velges i de forskjellige fagene. Det er de tre største forlagene i landet som dominerer markedet for lærebøker i Norge. Dette vil bli beskrevet i detalj i kapittel 3.6.

2.4.2 Lærebøker i matematikk

Det er flere faktorer som vil påvirke elevenes læring, der aspekter ved læreren og læringsmiljøet er de viktigste (Hattie, 2008), men som det ble beskrevet i innledningen, har matematikkfaget i større grad enn andre fag tradisjon for å være drevet av lærebøker (Remillard, 2005). I Norge utgjør undervisningen der læreren forklarer til hele klassen en forholdsvis liten del sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet, og norske elever arbeider mye alene med oppgaver i lærebøkene (Kongelf, 2015). Det gjør at det kan argumenteres for at lærebøkene i matematikk er en viktig faktor for norske elevers læring av matematikk.

2.4.3 Sammenhengen mellom lærebok og læreplan

Valverde et al. (2002) har utviklet en modell som viser sammenhengen mellom læreplan, lærebøker, bruk av læreplan og elevers læringsutbytte. Modellen, som kan ses i figur 2, inneholder fire stadier: *tiltenkt læreplan, potensielt implementert læreplan, implementert læreplan* og *oppnådd kunnskap* (Valverde et al., 2002, s. 13).



Figur 2: Læreplan, lærebøker, bruk av læreplan og læringssutbytte (Valverde et al., 2002, s. 13, egen oversettelse)

Tiltenkt læreplan er selve læreplanen i faget, som i Norge er LK20. *Implementert læreplan* er hvordan læreplanen i faget blir tatt i bruk i klasserommet, altså hvordan læreplanen blir implementert i undervisningen. Dette inkluderer strategier, praksiser og forskjellige aktiviteter som gjøres for å oppnå læreplanmålene. *Oppnådd kunnskap* er den kunnskapen elevene sitter igjen med etter undervisningen. I tillegg har Valverde et al. (2002) inkludert *potensielt implementert læreplan,* som er lærebøkene og tilhørende tilleggsressurser. Lærebøker er et av verktøyene lærere bruker i undervisningen, og ved å inkludere dette stadiet i modellen understreker Valverde et al. (2002) viktigheten av å forske på lærebøker.

2.5 Tidligere forskning

I dette delkapittelet vil jeg beskrive tidligere forskning som er relevant til temaet i denne masteroppgaven. Det finnes forskning på norske lærebøker i matematikk (Alseth et al., 2003; Kongelf, 2011; Kongelf, 2015; Valenta & Enga, 2020), men jeg har ikke lyktes i å finne forskning på matematisk resonnering og bevis i norske lærebøker. Derfor vil jeg presentere internasjonal forskning på resonnering og bevis i lærebøker, med fokus på de teoretiske rammeverkene som er brukt og de delene av resultatene som er relevante for temaet i denne masteroppgaven. De ulike forskningsartiklene med tilhørende tema er oppsummert i tabell 1.

Tema	Forfatter	Land
Elevers oppfatninger av bevis	Balacheff (1988)	England
Resonnering og bevis i lærebøker for 7. trinn i algebra og geometri	Silerman og Even (2015)	Israel
Resonnering og bevis i lærebøker for ungdomstrinnet	Stylianides (2009)	USA
Resonnering og bevis i lærebøker for 8. trinn.	Stacey og Vincent (2009)	Australia
Analyse av lærebøker i matematikk innen temaer som utforsking, lek og spill	Alseth et al. (2003)	Norge
Problemløsningsmetoder i norske lærebøker for ungdomstrinnet.	Kongelf (2011)	Norge
Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet	Kongelf (2015)	Norge
Bevisrelaterte kompetanser i LK20	Valenta og Enge (2020)	Norge

Tabell 1: Oversikt over tidligere forskning

Stylianides (2009) har forsket på hvordan oppgaver i den mest populære lærebokserien i matematikk for ungdomstrinnet i USA legger til rette for at elevene kan arbeide med resonnering og bevis. Analysen inkluderte nærmere 5000 oppgaver. Stylianides (2009) bruker begrepet *reasoning and proving* (resonnering og bevisføring) som et samlebegrep for aktivitet som innebærer aktivitetene som brukes i prosessen i å gi mening til det å etablere matematisk kunnskap: identifisere mønstre, lage formodninger, bevise ikke-beviselige argumenter og bevise beviser (s. 259). Begrepet ligner dermed på begrepet matematisk resonnering som jeg anvender i denne oppgaven, et overordnet begrep som dekker både det å argumentere og bevise. Resultater fra studien viser at 40 % av oppgavene som ble analysert var designet for å gi elevene minst en mulighet for resonnering og bevisføring. Prosentandelen av oppgaver som ga mulighet for resonnering og bevis var lavest i temaet algebra i det som tilsvarer 8. trinn i Norge (26 %).

Stacey og Vincent (2009) har forsket på resonnering og bevis innen sju tema i ni australske lærebøker for 8. trinn. Stacey og Vincent (2009) identifiserte syv typer resonnering, og brukte dette til å lage en klassifisering av forskjellige typer matematisk resonnering. Det er dette rammeverket som jeg anvender i analysen i min studie. Rammeverket vil bli forklart i kapittel 2.6. Resultatet av studien viste at de fleste lærebøkene ga forklaringer, fremfor å bare presentere regler. Hver lærebok ga deduktive eller empiriske forklaringer i minst to tredeler av temaene. Et av de sju deltemaene som ble analysert var divisjon av brøk. Dette var deltemaet med lavest andel av forklaringer som var deduktive (17 %). Til sammenligning var 42 % og 83 % av forklaringene i deltemaene distributiv lov og multiplikasjon av potenser deduktive. Stacey og Vincent (2009) mener at hovedformålet til forklaringene stort sett var å utlede regler for å forberede elevene til å gjøre oppgaver, i motsetning til å gi forklaringer som kunne bli brukt som kognitive verktøy.

Silverman og Even (2015) har undersøkt hvordan israelske lærebøker i matematikk for 7. trinn beviser, forklarer og begrunner ulike matematiske utsagn innen temaene geometri og algebra. Studien brukte Stacey og Vincents (2009) sitt rammeverk. Resultatene fra studien viste at 197 av 200 forklaringer var enten deduktiv eller empirisk, altså at påstander eller regler faktisk ble forklart. Videre ble det funnet at påstander innen temaet algebra typisk ble forklart gjennom deduktiv resonnering, og påstander innen temaet geometri typisk ble forklart gjennom både deduktiv og empirisk resonnering. Eksperimentell demonstrasjon var hyppigere brukt i geometri sammenlignet med algebra. Deduksjon ved bruk av en modell var hyppigere i brukt i algebra sammenlignet med geometri.

2.6 Teoretisk rammeverk

I denne masteroppgaven vil jeg bruke det teoretiske rammeverket til Stacey og Vincent (2009) som utgangspunkt for analysene. Stacey og Vincent (2009) har i sin forskning på resonnering i australske lærebøker i matematikk utviklet et teoretisk rammeverk. På samme måte som analysene i denne avhandlingen, er fokuset på forklaringene som blir presentert til elevene. Rammeverket deler opp resonnering i sju forskjellige typer:

- Deduksjon ved hjelp av et generelt tilfelle (DGT)
- Deduksjon ved bruk av et spesifikt tilfelle (DST)
- Deduksjon ved bruk av en modell (DM)
- Overenstemmelse med en regel og en modell (ORM)
- Eksperimentell demonstrasjon (ED)
- Referere til autoriteter (RA)
- Kvalitativ analogi (KA)

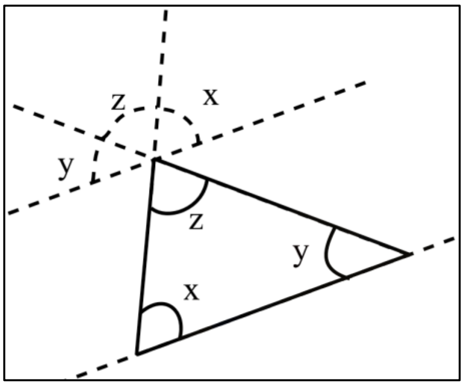
(Stacey & Vincent, 2009, s. 278, egen oversettelse)

Stacey og Vincent (2009) bygget videre på en studie av Harel og Sowder (2007), og har knytet de sju typene resonnering opp mot Harel og Sowder (2007) sin oppdeling av elevers bevis, som skiller mellom empirisk og deduktiv resonnering. Forskjellen mellom empirisk og deduktiv resonnering ble forklart i kapittel 2.1. De tre første typene er forklaringer som innebærer deduktiv resonnering. De to neste typene innebærer empirisk resonnering. Det å referere til autoriteter bruker ingen form for resonering annet enn ekstern overbevisning. Forklaringer som bruker en kvalitativ analogi, er hverken klassifisert som empirisk eller deduktiv resonnering. En forklaring av denne typen skraper på overflaten av et matematisk konsept, og vil bli omtalt videre i kapittel 2.6.7.

I neste delkapittel vil jeg forklare de ulike typene matematisk resonnering i henhold til Stacey og Vincent (2009), og vise med eksempler. Noen av eksemplene er hentet fra Stacey og Vincents artikkel, mens andre er hentet fra forklaringene som analyseres i denne masteroppgaven.

2.6.1 Deduksjon ved bruk av et generelt tilfelle (DGT)

En forklaring i av denne typen er deduktiv i den betydning at det gis en rekke med resonnement som er støttet av gitte premisser, for eksempel tidligere etablert kunnskap og definisjoner. Hvert steg er logisk utledet fra det forrige, som leder til en konklusjon. Forklaringer av denne typen er generelle da det brukes et generelt tilfelle og resultatene kan generaliseres til å gjelde alle tilfeller (eventuelt alle tilfeller innenfor samme tema). Et eksempel på en slik forklaring kan være en forklaring på hvorfor summen av alle vinklene i en trekant blir 180 grader. Man tar utgangspunkt i etablert kunnskap om parallelle linjer og samsvarende vinkler. Man konstruerer en vilkårlig trekant, utvider alle sidekantene, og konstruerer en parallell til det nederste linjestykket. Deretter benytter man seg av kunnskap om at det skapes samsvarende vinkler som er like store når det ene vinkelbeinet skjærer to parallelle linjer.



Figur 3: Eksempel deduksjon ved bruk av generelt tilfelle

Slik vil det dannes samsvarende vinkler til de opprinnelige vinklene i trekanten. Da kan man enkelt se at alle vinklene i trekanten til sammen blir 180 grader, eller en rett linje om man vil. Forklaringen er generell da den tar utgangspunkt i en generell trekant med vilkårlige vinkler, og dermed er gyldig for alle trekanter.

2.6.2 Deduksjon ved bruk av et spesifikt tilfelle (DST)

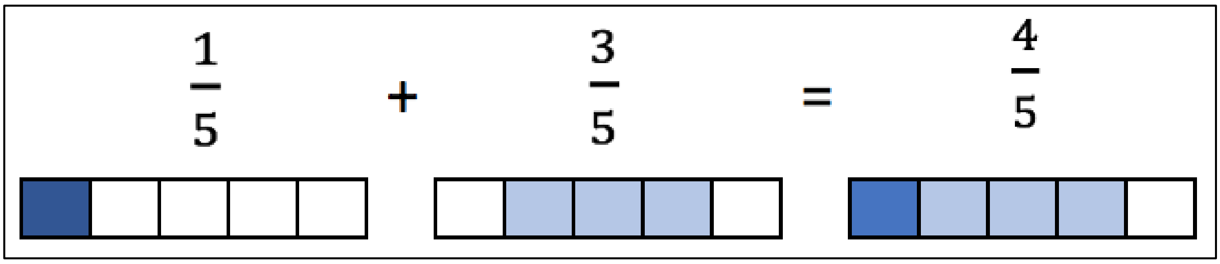
En forklaring av denne typen er deduktiv på samme måte som i den forrige. Forskjellen er at forklaringen bruker et spesifikt tilfelle, for eksempel et regnestykke med bestemte tall. Det bemerkes ikke at man kan behandle lignende tilfeller på samme måte, eller gjøre det samme med alle slike tilfeller. Forklaringen i figur 3 kunne blitt kategorisert som DST hvis den i stedet for å ha en vilkårlig trekant hadde tallfestet vinklene og sidekantene.

2.6.3 Deduksjon ved bruk av en modell (DM)

En slik forklaring er deduktiv, og det tas utgangspunkt i en modell for å forklare. Det kreves at det skal være sammenheng mellom tall og operasjoner, og strukturell likhet mellom modellen og kalkuleringene som gjøres. Videre skal det være mulig å bruke modellen til å forutsi resultatet av kalkuleringene. Et eksempel som brukes av Stacey og Vincent (2009) er hvordan en lærebok ønsker å forklare hvorfor produktet av to negative tall blir et positivt tall (s. 284). Det ble brukt en modell med et tog som kan reise østover (positiv fart) og vestover (negativ fart) langs en tallinje som er nummerert med hensyn på tid. Tiden i fortiden som negativ, og tiden i framtiden som positiv. Ved å starte på null hver gang, ble posisjonen til toget bestemt av farten multiplisert med tiden. Dermed ville et tog som reiser vestover i en fart på 10 km/t to timer tidligere ha vært ved $-10 \times -2 = +20$.

2.6.4 Overenstemmelse med en regel og en modell (ORM)

En forklaring av denne typen modellerer et utvalgt problem, løser problemet ved hjelp av modellen, for å deretter demonstrere at regelen man ønsker å forklare gir samme resultat. Modellen brukes dermed til å argumentere for hvorfor regelen eller påstanden stemmer for et eller noen tilfeller, men det gis ikke mening til hvorfor det stemmer. Et eksempel på en slik forklaring kan være hvis man skal forklare at man kan addere og subtrahere tellere og beholde nevnerne i brøker der nevnerne er like store. Påstanden blir gitt, og $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ modelleres ved hjelp av kvadrater som fargelegges.



Figur 4: Eksempel overenstemmelse med en regel og en modell

Deretter løses problemet numerisk ved hjelp av å bruke regelen man ønsket å forklare. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$. Man får det samme resultatet ($\frac{4}{5}$) ved den numeriske utregningen som da man brukte modellen.

2.6.5 Eksperimentell demonstrasjon (ED)

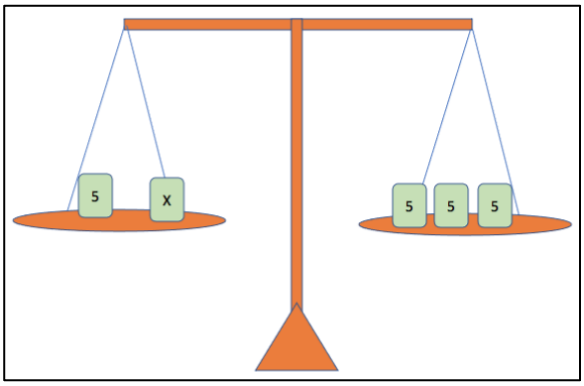
En eksperimentell demonstrasjon i denne sammenhengen innebærer å engasjere elevene til en aktivitet der de selv er med å etablere en regel, enten i form av fysiske eller numeriske tilfeller. Resultatet blir vist å stemme med et spesifikt tilfelle. Stacey og Vincent (2009) bruker et eksempel der man oppfordrer elevene til å klippe ut hjørnene fra trekanter og sortere dem slik at de danner en rett linje for å vise at summen av vinklene i en trekant er 180 grader (s. 280).

2.6.6 Referere til autoriteter (RA)

Denne typen forklaringer innebærer ingen form for forklaring eller bevis annet enn en referanse til seg selv eller andre som stadfester at slik er det. Ingen andre grunner gis for at påstanden er sann utover uttalelsen. For eksempel har en av lærebøkene som analyseres i denne masteroppgaven en forklaring som lyder «Når vi skal addere eller subtrahere brøker med ulike nevnere, må vi først gjøre nevnerne like store». Deretter vises det et eksempel hvordan man utvider brøkene til å bli like store, uten videre forklaring etterpå.

2.6.7 Kvalitativ analogi (KA)

I en kvalitativ analogi gis det en analogi som brukes til å forklare et konsept. Denne er gjerne kvalitativ (uten tall). Analogien inneholder ikke en forklaring av sammenhengen mellom eventuelle tall og operasjoner, noe som kreves for å være en modell. Videre kan den ikke (i motsetning til en modell i en forklaring av typen *deduksjon ved bruk av en modell)* brukes til å forutsi resultatet av kalkuleringer. En modell i forklaringer av typen RA skraper på overflaten av et matematisk konsept, og kan ikke brukes til å validere kalkuleringer. Et eksempel på en slik kvalitativ analogi som brukes av flere av lærebøkene som analyseres i denne masteroppgaven er bruken av en skålvekt til å forklare hvordan likninger fungerer, slik som i figur 5.



Figur 5: Eksempel kvalitativ analogi

Det kan da forklares at en i en likning må verdien på venstre side alltid være lik verdien på høyre side, hvis ikke er ikke likningen i balanse. Vektskålen brukes til å forklare konseptet likninger, og selv om den inneholder tall, kan den ikke brukes alene til å regne ut noe. Den gir mening til hvorfor man alltid må gjøre like endringer på begge sidene (fordi hvis ikke er ikke vekten i balanse), uten at den brukes som en modell til å regne ut et resultat.

3 Metode

Dette kapittelet inneholder en redegjørelse for de metodiske valgene som er tatt i denne masteroppgaven. Først gjøres det rede for verdenssyn og forskningsdesign. Deretter beskrives bakgrunnen for valg av datamaterialet og en beskrivelse av datamaterialet. Videre forklares datainnsamlings- og analysemetode. Til slutt drøftes studiens kvalitet og etiske perspektiver.

3.1 Verdenssyn

Creswell (2009) bruker begrepet verdenssyn om en forskers generelle oppfatning av verden og forskningens natur (s. 24). Dette verdensbildet påvirker valgene til en forsker, inkludert valg av metode (Creswell, 2009, s. 24). Et verdenssyn er pragmatisme, hvor forskeren legger vekt på forskningsspørsmålene, og bruker alle tilgjengelige tilnærminger for å svare på disse (Creswell, 2009, s. 28-29). Jeg vil plassere denne masteroppgaven inn under pragmatisme, ettersom jeg har fokusert på å svare på forskningsspørsmålene, og tatt i bruk både kvalitative og kvantitative metoder for å kunne gjøre dette. Studier som bruker kombinasjon av kvalitative og kvantitative metoder plasseres ofte innen et slikt pragmatisk verdenssyn (Creswell, 2009, s. 29).

3.2 Kvalitativ og kvantitativ metode

I praksis vil mange kvalitative forskningsopplegg også ha innslag av kvantitative elementer, og omvendt (Grønmo, 2016, s. 24). Mixed methods er en forskningsmetode som kombinerer både kvalitative og kvantitative forskningsmetoder. Studier som bruker mixed methods kan bidra til en mer samlet og helhetlig forståelse av det som studeres (Grønmo, 2016; Creswell, 2009). Det kan argumenteres for at denne studien faller inn under mixed methods. Det er gjennomført kvalitative analyser av tekstutdrag i lærebøkene. Forklaringene ble deretter kategorisert i henhold til rammeverket. Resultatene var i kvantitativ form, og ble sortert i tabeller, omgjort til prosentvis andel og presentert i form av tabeller og diagrammer. Hvordan denne studien plasseres med tanke på kvalitativ og kvantitativ metode vil bli diskutert videre i kapittel 3.5.1.

3.3 Induktiv og deduktiv forskningsopplegg

Det skilles mellom induktive og deduktive forskningsopplegg. Deduktive forskningsopplegg tar utgangspunkt i teori og rammeverk fra tidligere forskning. Induktive opplegg forsøker å bygge opp en teoretisk forståelse ut fra analysen, det vil si at resultatet fra forskningen kan bli et teoretisk rammeverk med kategorier. Deduktive opplegg kan fungere godt på forskningsområder som er mye forsket på fra før, men induktive opplegg er mer hensiktsmessige når man skal undersøke noe som ikke har vært forsket på tidligere (Grønmo, 2016, s. 51). Denne studien er deduktiv, da det teoretiske rammeverket er definert på forhånd, og forskningsspørsmålene blir besvart med utgangspunkt i å analysere data ved bruk av rammeverket.

3.4 Komparative studier

Ettersom to av forskningsspørsmålene spør om forskjeller mellom ulike trinn og tema, vil denne studien inneholde elementer fra komparative studier. Komparative studier handler om å analysere det samme fenomenet i ulike kontekster, for å deretter sammenligne funnene (Grønmo, 2016, s. 403). I denne studien har jeg analysert matematisk resonnering i forskjellige lærebøker, fra forskjellige trinn og i forskjellige matematiske emner. Jeg har deretter sammenlignet funnene for å se om det var store forskjeller mellom 7. og 8. trinn eller mellom brøk og algebra. Hensikten med dette var å belyse hvorvidt resonneringen som er brukt er generelle på tvers av trinn og tema, eller om de er kontekstspesifikke.

3.5 Metoder i forskning på lærebøker

Både forskningsmetoder og teoretisk rammeverk må være tilpasset problemstilling og fenomenet som studeres (Rezat & Sträßer, 2015, s. 249). I denne avhandlingen ønsket jeg å forske på lærebøker i matematikk. Rezat og Sträßer (2015) har laget en oversikt over metoder som brukes innen forskning på lærebøker i matematikk i nordiske land, basert på 24 studier. Det ble funnet tre hovedgrupper innen lærebokforskning: *forskning på utvikling og påvirkning av lærebøker, forskning på innholdet i selve lærebøkene og forskning på bruken av og virkningen av lærebøker* (Rezat & Sträßer, 2015, s. 250-258). Denne masteroppgaven kan plasseres innen den andre kategorien, da den innebærer forskning på innholdet i lærebøkene. Rezat og Sträßer (2015) fant at alle studiene innenfor denne kategorien baserte seg på dokumentanalyse som viktigste forskningsmetode (s. 251), noe som også er tilfelle for denne studien.

3.5.1 Dokumentanalyse

En av de viktigste forskningstemaene innen dokumentanalyse av lærebøker i matematikk er analyse av oppgaver (Howson, 2013), og flere studier har hatt dette som tema (Brändström, 2005; Jakobsson-Åhl, 2008; Tesfamicael et al., 2022). Denne studien har derimot fokus på forklaringene av matematiske påstander i lærebøker. Dokumentanalyse er innsamling og analyse av data med dokumenter som kilde (Grønmo, 2016, s. 175). I en dokumentanalyse blir innholdet i dokumentene analysert systematisk, med hensikt om å finne informasjon som er relevant til studien som gjennomføres (Grønmo, 2016, s. 175). Uavhengig av hvilken tilnærming man har til dokumentanalyse, hvilket fenomen som undersøkes og hvilket teoretisk rammeverk man bruker, vil dokumentanalyser være begrenset til å avsløre muligheter til å lære. Det kan ikke gjøres noen konklusjoner om den faktiske innvirkningen læreboken har på undervisningen eller kompetansen til elevene, da dette krever at man tar i bruk andre metoder i tillegg (Rezat & Sträßer, 2015, s. 253-254). Denne studien vil, i likhet med andre dokumentanalyser, ikke kunne konkludere noe om hvordan lærebøkene påvirker undervisningen eller hvordan elevene påvirkes av lærebøkene.

Det skilles mellom kvantitativ og kvalitativ dokumentanalyse. Generelt vil en kvalitativ dokumentanalyse innebære systematisering av utvalgt innhold (i dette tilfellet matematiske forklaringer) med mål om å belyse spesifikke problemstillinger (Grønmo, 2016, s. 142). Kvantitativ dokumentanalyse handler også om å systematisere deler av innholdet i dokumenter, men her blir dokumentets innhold vurdert opp mot et strukturert kodeskjema (Grønmo, 2016, s. 143). I kvalitativ dokumentanalyse er typisk utvikling av kategorier et resultat av analysen, men i kvantitativ dokumentanalyse er variablene og kategoriene spesifisert og kodeskjemaet ferdig utviklet før gjennomgangen av innholdet starter (Grønmo, 2016, s. 143). Ut fra denne forklaringen av kvalitativ og kvantitativ dokumentanalyse kan det virke riktig å kalle denne studien en kvantitativ dokumentanalyse. Jeg har analysert forklaringer i lærebøkene systematisk og kategorisert disse i henhold til Stacey og Vincent (2009) sitt rammeverk for resonnering.

Kategoriene var dermed ferdig definert før analysen startet. Jeg har derimot ikke brukt et strukturert kodeskjema, og selv om rammeverket jeg brukte var bestemt på forhånd, var det ikke bestående av enkle variabler som man kunne krysse av for. Kategoriene var forankret i teori, og det måtte tas en subjektiv (men kvalifisert) vurdering på om innholdet i tekstutdragene skulle kategoriseres som en type eller en annen. En forklaring var gjerne sammensatt av tekst og illustrasjoner, og det var ingen spesielle ord eller symboler som gjorde at jeg automatisk kunne plassere forklaringen i en kategori. Dermed mener jeg det er riktig å si at denne studien har noen elementer fra kvantitativ dokumentanalyse, men først og fremst er en deduktiv kvalitativ dokumentanalyse der det teoretiske rammeverket er definert på forhånd. Resultatene av studien er kvantitative, men ikke selve metoden.

3.6 Utvalg

I en dokumentanalyse må det gjøres en vurdering av hvilke tekster som er relevante og hensiktsmessige å analysere (Grønmo, 2016, s. 175). I denne masteroppgaven har jeg valgt å analysere lærebøker fra de to største forlagene i Norge. Dette er gjort da disse har en dominerende markedsandel, med over 70 prosent på tvers av alle fag i grunnskolen i 2021 (Den Norske Forleggerforening, 2021, s. 65). I 2013 hadde Gyldendals lærebøker i matematikk alene en markedsandel på over 60 prosent på barnetrinnet (Hagesæther, 2013). Min erfaring som lærerstudent og ansatt i skoleverket styrker inntrykket av at disse lærebøkene er de mest brukte. Jeg har erfaring fra sju forskjellige skoler i tre forskjellige kommuner, og alle disse skolene har brukt lærebøkene i matematikk fra disse to forlagene. På bakgrunn av dette ble det vurdert at de utvalgte lærebøkene var relevante for problemstillingen og forskningsspørsmålene. En annen grunn til at jeg valgte disse lærebøkene var tilgjengeligheten til bøkene. Disse bøkene var mulig for meg å få tak i og låne over lengre perioder, både via bibliotek og arbeidsgiver. De utvalgte lærebøkene vises i tabell 2 nedenfor.

Tittel	Utgave	Forlag	Forfattere	Utgivelsesår
Multi 7A og 7B	3.	Gyldendal	Arnås et al., Alseth et al.	2022
Matematikk 7	1.	Cappelen Damm	Gulbrandsen et al.	2021
Maximum 8	2.	Gyldendal	Tofteberg et al.	2020
Matematikk 8	1.	Cappelen Damm	Hjardar & Pedersen	2020

Tabell 2: Utvalgte lærebøker (Arnås et al., 2022; Gulbrandsen et al., 2021; Tofteberg et al., 2020; Hjaldar & Pedersen et al., 2020)

Det er grunnbøkene som er analysert. I tillegg til disse finnes det også lærerveiledere, oppgavebøker, parallelbøker, digitale ressurser med mere. Disse er ikke analysert, da disse ressursene brukes forskjellig og i varierende grad fra skole til skole. Alle skoler bruker derimot grunnboken. I Multi 7 er de forskjellige kapitlene fordelt på to bøker. Det skilles ikke mellom disse bøkene i denne avhandlingen. De resterende bøkene er enkeltbøker. Denne oppgaven har ikke som hensikt å se på kvaliteten av læreverkene, eller sammenligne dette. Lærebøkene har gjort forskjellige valg i oppbyggingen av bøkene, der det har blitt tatt hensyn til langt flere aspekter enn det som analyseres i denne avhandlingen. Videre antyder studier at læreren er den som formidler og kontrollerer hvordan lærebøkene skal styre undervisningen, men at dette ikke skjer på den måten forfatterne av lærebøkene hadde tenkt (Johnsen, 1993; Van Dormolen, 1986). Når lærebøkene analyseres i denne oppgaven, er ikke hensikten å rangere bøkene, men heller å bemerke forskjeller mellom 7.– og 8. trinnbøkene og temaene brøk og algebra. Derfor vil bøkene heretter ikke omtales med navn, men med kodene A, B, C og D.

Utdragene som ble analysert inkluderer tekst, figurer og illustrasjoner som sammen utgjør forklaringer i lærebøkene. Ettersom dette er data som ikke er uttrykt ved noen form for mengdetermer, er dette å regne som kvalitative data (Grønmo, 2016, s. 137). Forklaringene som ble inkludert handler om hvorfor man kan utføre prosedyrer eller hvorfor matematiske ideer er gyldige. Kriteriet for å inkludere en forklaring var at det måtte ligge en matematisk påstand i grunn, og at påstanden kan bevises. For eksempel ble et utdrag som forklarte hvorfor man kan multiplisere teller med teller og nevner med nevner inkludert. En tekst som forklarte hvordan man skal føre et slikt regnestykke med korrekt notasjon, ble ikke inkludert, da denne forklaringen ikke har en matematisk påstand i grunn, men er en forklaring av metoden for å føre et slikt regnestykke. Allikevel ble det inkludert flere forklaringer som handler om hvordan en matematisk prosedyre skal gjennomføres. Dette fordi det i disse forklaringene lå en matematisk påstand i grunn, enten eksplisitt eller implisitt. For eksempel er en forklaring av hvordan man utvider brøker inkludert. Selv om den i utgangspunktet viser hvordan man utvider en brøk, ligger det en implisitt en matematisk påstand i grunn om at utviding av brøk gir likeverdige brøker, og denne forklaringen gir mening til hvorfor to brøker kan ha lik verdi.

Bakgrunnen for valget av de to temaene brøk og algebra todelt. For det første var brøk et tema som var felles i alle lærebøkene. Dette var ønskelig for å få tilstrekkelig med datagrunnlag, i tillegg til at det ville det gjøre det mulig å sammenligne resultatene på tvers av lærebøkene. Av samme grunn ble også algebra vurdert som et hensiktsmessig tema å inkludere i analysen. I kapittel 2 ble det beskrevet hvordan brøk og algebra anses som problematiske tema i matematikkundervisningen. Dette gjorde at jeg anså disse temaene som spesielt interessante sett i lys av forskningsspørsmålene. Jeg anså det som mer interessant å analysere resonneringen i lærebøkene i temaer som regnes som problematiske temaer i læring av matematikk. Slik det ble beskrevet i kapittel 1.1.2, er matematikkfaget i større grad enn andre fag drevet av lærebøker ettersom mange lærere ikke føler seg komfortable med å undervise i matematikk (Remilard, 2005), og det kan tenkes at lærebøkene blir desto mer førende i tema som er utfordrende.

Temaet brøk inkluderer 15 ulike deltema. Disse omfatter blant annet regning med de fire regneartene både med blandede tall og brøker, likeverdige brøker og utviding og forkorting av brøk. Alle delemner kan ses i tabell 3.

Algebra
Regnerekkefølge sammensatte uttrykk:
Multiplikasjon og divisjon
Potenser
Parenteser
Regneregler
Addisjon og subtraksjon
Distributiv lov
Assosiativ lov
Mult. og div. av algebraiske uttrykk
Potenser
Likninger
Likevekt generelt
Likevekt addisjon og subtraksjon
Likevekt divisjon
Likevekt multiplikasjon
Mult. med f.n. i likninger med to brøker
Ulikheter
Motsatte regneoperasjoner
Addisjon og subtraksjon
Multiplikasjon og divisjon

Brøk
Addisjon og subtraksjon med brøk
Addisjon brøk med lik nevner
Subtraksjon brøk med lik nevner
Addisjon blandede tall
Subtraksjon blandede tall
Addisjon og subtraksjon brøk med ulik nevner
Multiplikasjon med brøk
Multiplikasjon heltall og brøk
Multiplikasjon brøk
Multiplikasjon blandet tall og brøk
Divisjon med brøk
Divisjon heltall og brøk
Divisjon av brøk
Annet
Utviding brøk
Forkorting brøk
Brøk til heltall
Likeverdige brøker
Fellesnevner

Tabell 3: Deltema i algebra og brøk

Temaet algebra inkluderer regnerekkefølge for sammensatte regneuttrykk, algebraiske regneregler, likninger og motsatte regneoperasjoner. Disse er igjen delt opp i delemner. Alle delemnene kan ses i tabell 3. Hva som ble inkludert i temaet algebra var først og fremst avhengig av innholdet i lærebøkene som ble analysert. Deretter ble det tatt hensyn til at forklaringene som skulle analyseres måtte ha en matematisk påstand i bunn. På grunn av dette ble ikke forklaringer der elevene skulle utforske algebraiske mønstre inkludert. Disse forklaringene inneholdte elementer fra algebraisk tenking, men det var ingen matematiske påstander som ble eller kunne ha blitt bevist. Det ble valgt å inkludere regnerekkefølge i sammensatte regneuttrykk. Selv om dette delemnet i utgangspunktet er aritmetikk, er det med å legge grunnlaget for videre arbeid med algebra. Elevene vil ikke lære å løse algebraiske uttrykk uten å ha kunnskap om regnerekkefølgen i sammensatte uttrykk. Dette blir omtalt av Linchevski (1995), som beskriver regnerekkefølge og parenteser som en del av tidlig algebra (s. 116). I en av lærebøkene er også sammensatte regneuttrykk en del av algebrakapittelet. På samme grunnlag er også motsatte regneoperasjoner inkludert, men dette delemnet er kun omtalt i en av lærebøkene.

3.7 Dataanalyse

I dette delkapittelet vil jeg beskrive hvordan dataanalysen ble gjennomført. Dataanalysen i denne studien kan deles opp i det Charalambous et al. (2010) beskriver som horisontal og vertikal analyse. Charalambous et al. (2010) påpeker viktigheten av at en analyse av lærebøker bør inneholde både en horisontal og en vertikal analyse, for å bedre kunne avsløre egenskaper ved lærebøker som ellers ville ha gått tapt (s. 120). Den horisontale delen av rammeverket beskriver lærebøkenes struktur og bakgrunnsinformasjon (Charalambous et al., 2010). Dette gjøres for å forstå innholdet i lærebøkene, hvordan de er bygd opp og presentere dette til leseren. I denne masteroppgaven er dette presentert i kapittel 3.6 , hvor jeg presenterte lærebøkenes tittel, utgave, forfatter, utgiver, utgivelsesår samt hvilke deler av bøkene som ble inkludert. Den vertikale dimensjonen går mer i dybden, og inneholder analyse av tre dimensjoner: *kommunisert til elever, krav til elever* og *sammenhenger* (Charalambous et al., 2010, s. 123, egen oversettelse). Den første dimensjonen handler om hvordan matematikken formidles til elever gjennom eksempler, regler og teori. Den andre dimensjonen handler om hvilke kognitive krav det stilles til elevene i de forskjellige oppgavene og forklaringene. Den tredje dimensjoner omhandler hvordan det matematiske henger sammen med situasjoner utenfor klasserommet. I denne masteroppgaven er det matematiske forklaringer i lærebøkene som er analysert, som faller under dimensjonen *kommunisert til elever*.

3.7.1 Det teorietiske rammeverket

I kapittel 2.6 ble det teoretiske rammeverket til Stacey og Vincent (2009) beskrevet i detalj. Nedenfor følger en oppsummerende tabell som viser de ulike typene matematisk resonnering og kodene som er brukt i dataanalysen. De sju typene resonnering ble gitt koder som ble brukt gjennom hele analysen.

Type resonnering	Kode	Grad av forklaring
Deduksjon ved bruk av et generelt tilfelle	DGT	Deduksjon
Deduksjon ved bruk av et spesifikt tilfelle	DST	Deduksjon
Deduksjon ved bruk av en modell	DM	Deduksjon
Overensstemmelse med en regel og en modell	ORM	Empirisk
Eksperimentell demonstrasjon	ED	Empirisk
Referere til autoriteter	RA	Ekstern overbevisning
Kvalitativ analogi	KA	Skraper i overflaten

Tabell 4: Typer matematisk resonnering i rammeverket

3.7.2 Pilotprosjekt

Som en initierende del av dataanalysen ble det gjennomført et pilotprosjekt. Et pilotprosjekt er en studie med lite omfang som gjøres for å teste ut potensielle forskningsdesign eller metoder for kommende prosjekt (Giangregorio & Thabane, 2015). Det var to grunner til at jeg valgte å kjøre et pilotprosjekt. For det første for å forsikre meg om lærebøkenes relevans; at det var mulig å svare på forskningsspørsmålene ved å analysere de lærebøkene jeg vurderte å bruke. For det andre for å teste ut om det teoretiske rammeverket jeg vurderte var passende for å analysere lærebøkene. Etter pilotprosjektet ville jeg sitte igjen med svar på om det var tilstrekkelig med datagrunnlag i form av matematiske påstander i lærebøkene. Videre ville jeg kunne vurdere om jeg fikk til å bruke det teoretiske rammeverket, og om forklaringene jeg analyserte fordelte seg utover flere typer matematisk resonnering som finnes i rammeverket. Dersom pilotprosjektet resulterte i at det var mulig å analysere lærebøkene for å få svar på problemstillingen, kunne analysen bli en del av hovedstudien. I pilotprosjektet brukte jeg

Stacey og Vincents (2009) rammeverk for resonnering til å analysere matematiske påstander i temaet brøk i to forskjellige lærebøker.

Første steg i pilotprosjektet var å undersøke hvilke matematiske tema som var felles i de aktuelle lærebøkene. Det var ønskelig med et tema som var felles i alle lærebøkene for å få et tilstrekkelig datagrunnlag, og for å forsikre meg om at det var mulig å sammenligne lærebøkene for 7.– og 8. trinn med hverandre på et senere tidspunkt, i henhold til forskningsspørsmålene. Et tema som var felles i alle bøkene var brøk. Det var viktig å komme i gang med pilotprosjektet så fort som mulig for å få svar på om datagrunnlaget var tilstrekkelig og om rammeverket var passende. Det var kun to bøker for 8. trinn som var tilgjengelige for meg på daværende tidspunkt, derfor ble disse valgt som datagrunnlag i pilotprosjektet. Neste steg var å lese gjennom kapitlene i de aktuelle bøkene. Dette ble gjort for å få forståelse for datamaterialet. Etter noen gjennomlesninger startet jeg med analysen. Jeg valgte å opprette et dokument der jeg beskrev hver forklaring fra lærebøkene detaljert. I tillegg skrev jeg ned mine argumenter for å kategorisere forklaringene som en gitt type. Tanken var at jo bedre kjent jeg ble med datamaterialet og rammeverket, desto bedre avgjørelser ville jeg kunne ta i analysen. Ved å skrive ned detaljerte beskrivelser av både datamaterialet og analyser ville det bli det lettere for meg å gå tilbake og justere, som igjen ville gi mer presise og konsistente resultater. Denne fremgangsmåten brukte jeg gjennom hele analysen, også etter pilotprosjektet. Dokumentet med dataanalyse fulgte følgende struktur:

Hva	Eksempel
Tittel på lærebok	Maximum 8 fra Gyldendal
Tema	Brøk
Deltema	Divisjon av brøk
Sidetall	Fra s. 47
Påstand – beskrivelse av den matematiske påstanden i forklaringen	Påstand: «Å dele på en brøk er det samme som å gange med den omvendte brøken»
Kode – for hvilken type matematisk resonnering påstanden ble plassert	RA
Argumentasjon for hvorfor forklaringen ble plassert i den typen	Det gis ingen forklaring annet en at «å dele på en brøk er det samme som å gange med den omvendte brøken» for å forklare denne regelen. Denne klassifiseres dermed som å referere til autoriteter.

Tabell 5: Struktur dataanalyse

I pilotprosjektet ble det analysert 18 forklaringer i de to lærebøkene, fordelt på ni delemner innen brøk. Forklaringene ble analysert og kategorisert i henhold til rammeverket, fordelt på fire av totalt sju typer matematisk resonnering. På grunnlag av et tilstrekkelig antall forklaringer som kunne kategoriseres innen flere av typene i rammeverket, ble det vurdert at både lærebøkene, temaet brøk og det teoretiske rammeverket som ble testet ut i pilotprosjektet var hensiktsmessige å gå videre med.

3.7.3 Videre dataanalyse

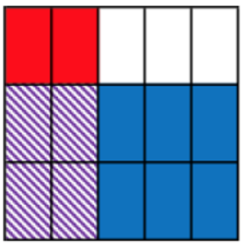
Etter pilotprosjektet fortsatte analysen av de to gjenværende lærebøkene i temaet brøk, samt analyse av alle fire lærebøkene i temaet algebra. Jeg brukte samme fremgangsmåte som i pilotprosjektet, med å skrive ned både forklaringene og mine argumenter for kategoriseringen. Når et tema var ferdig analysert, leste jeg gjennom alle analysene, og delte opp de forskjellige forklaringene i hensiktsmessige deltema. Deretter skrev jeg ned alle deltemaene fra hver lærebokbok i en tabell, og identifiserte de deltemaene som var felles i alle bøkene. Noen deltema var ikke felles i alle lærebøkene. For eksempel hadde bøkene for 7. trinn forklaringer på multiplikasjon av heltall og brøk, i motsetning til bøkene for 8. trinn. Jeg gikk stadig tilbake i analysene mine og gjorde justeringer. Etter hvert som jeg analyserte flere og flere forklaringer, ble nyansene i rammeverket mer og mer tydelig for meg. Da analysen var ferdig lagde jeg tabeller som kunne brukes til å lage diagram som presenterte resultatene på en hensiktsmessig måte. Jeg lagde en tabeller som viste antall forekomster og prosentvis fordeling av hver type matematisk resonnering, både innen temaet brøk og algebra. Jeg lagde også tabeller der resultatene var delt opp i henhold til om det var 7. trinn- eller 8. trinnbøker, samt tabeller som delte opp resultatene i henhold til om forklaringene var deduktive eller empiriske.

3.7.4 Eksempler på dataanalyse

I dette avsnittet vil jeg komme med to eksempler på hvordan jeg analyserte forklaringene i lærebøkene. Dette gjøres for at det skal være tydelig hva som ligger til grunn for resultatene. Jeg har valgt å ta med to eksempler som forklarer nokså like matematiske tema, og som bruker det som ved første øyekast kan se ut som nokså like forklaringer. Dette er gjort for å vise at selv om forklaringene kan se like ut, er det vesentlige forskjeller. Dette kan være med å gi klarhet i hvordan jeg har tenkt og gått fram i analysen av datamaterialet, og nyansere forskjeller som ikke er tydelige ved første øyekast.

Forklaring 1

Når vi skal multiplisere en brøk med en brøk kan det forklares med en arealmodell. Vi har et kvadrat som er delt inn i 5 ulike deler den ene veien, og 3 like deler den andre veien.



Den skraverte delen har sidekantene $\frac{2}{5}$ og $\frac{2}{3}$. Arealet av den skraverte delen må da være $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$. Hvis vi teller brøkdeler, ser vi at arealet av den skraverte delen er $\frac{4}{15}$.

Forklar hvordan vi regner brøk ganger brøk når vi ser at $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

Lag en regel.

Figur 6: Egen gjenskapelse av forklaring 1

Det første jeg gjorde i møte med en forklaring var å vurdere om forklaringen møtte kriteriene jeg hadde satt for å at en forklaring skulle bli inkludert i analysen. Det måtte ligge en matematisk påstand som gjelder generelt i grunn, og påstanden skulle være mulig å bevise. I denne forklaringen ønskes det å forklare hvorfor man kan multiplisere teller med teller og nevner med nevner for å finne produktet av to brøker. Algebraisk kan dette skrives som $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. Dette er en matematisk påstand som kan bevises, og dermed ble forklaringen inkludert i analysen.

Neste steg var å analysere forklaringen for å kunne kategorisere den i henhold til rammeverket til Stacey og Vincent (2009). I denne forklaringen tas det utgangspunkt i en arealmodell. Forklaringen kan ikke regnes som DGT, ettersom det ikke brukes et generelt tilfelle. Det presiseres derimot at «Vi har et kvadrat som er delt i 5 like deler den ene veien og 3 like deler den andre veien».

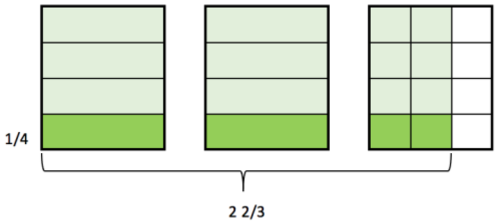
Ettersom det brukes en modell, indikerer det at forklaringen kan passe inn under typene DM eller ORM. I arealmodellen som brukes i denne forklaringen er det sammenheng mellom tall og operasjoner, og disse forklares tydelig: «Den skraverte delen har sidekantene $\frac{2}{5}$ og $\frac{2}{3}$ ». Forklaringen bygger på elevenes forkunnskaper om utregning av areal, det at arealet av et rektangel er produktet av sidekantene. Det presiseres at «Arealet av den skraverte delen må da være $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ ». Videre kan modellen enkelt brukes til å forutsi resultatet av kalkuleringene som gjøres, og dette presisseres også ved hjelp av tekst: «Hvis vi teller brøkdeler, ser vi nå at arealet av den skraverte delen er $\frac{4}{15}$». Forklaringen er deduktiv, ettersom hver av de fire stegene i forklaringen (i tillegg til selve arealmodellen) er logisk utledet fra det forrige. Det at den skraverte delen har sidekantene $\frac{2}{5}$ og $\frac{2}{3}$ er logisk utledet fra modellen. Det at arealet av den skraverte delen må være $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ er utledet fra modellen og premisset om at arealet av et rektangel regnes ut ved å multiplisere sidekantene. Det at arealet av den skraverte delen er $\frac{4}{15}$ er utledet fra modellen. Forklaringen er dermed en deduktiv forklaring, som bruker en modell som utgangspunkt til å forklare påstanden, og ble derfor kategorisert som DM.

Etter jeg hadde kategorisert en forklaring, tok jeg alltid en vurdering på om forklaringen kunne ha blitt plassert innenfor en av de andre typene matematisk resonnering. Det ble vurdert om denne forklaringen skulle kategoriseres som ED, der elevene engasjeres i en aktivitet med mål om å etablere en regel. Dette fordi elevene blir oppfordret til å lage en regel på slutten av forklaringen. Ettersom aktiviteten her er utelukkende å lage en regel, og resonneringen allerede er gjort for elevene på forhånd, ble det ikke vurdert som riktig å plassere forklaringen under ED. Det kan også diskuteres om forklaringen er generell og kunne blitt kategorisert som DGT, ettersom den spør til slutt om «Forklar hvordan vi regner brøk ganger brøk når vi ser at $\mathbf{\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}}$. Lag en regel.». Det etterspørres en generell regel, men ettersom forklaringen hovedsakelig baserer seg på en modell som drivkraften i resonneringen, ble det vurdert at DM var riktig.

Forklaring 2

$\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3}$

Vi kan multiplisere $\frac{1}{4}$ med det hele tallet og brøken hver for seg.



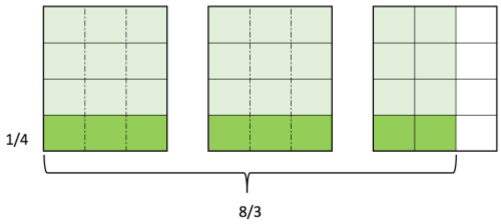
$\frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Vi kan gjøre om til uekte brøk:

$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

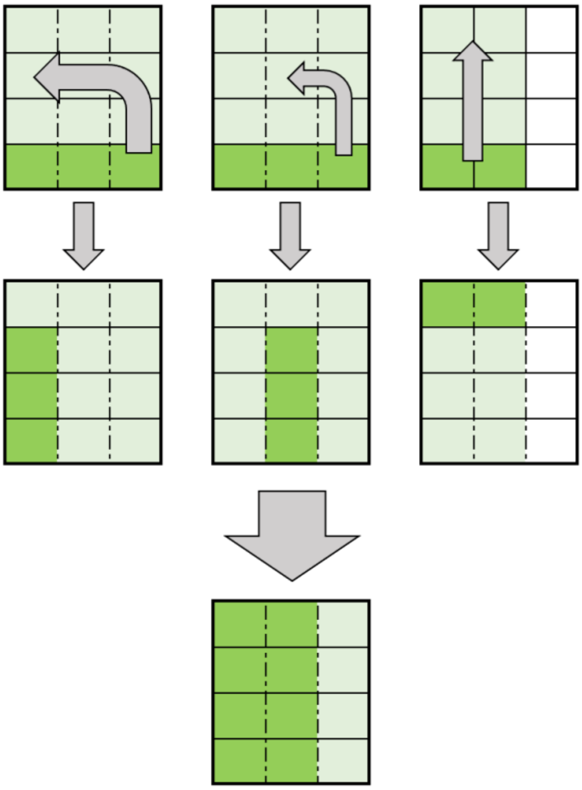


$\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{1 \times 8}{4 \times 3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Figur 7: Egen gjenskapelse av forklaring 2

I denne forklaringen ønskes det å forklare hvorfor man kan multiplisere brøken med det hele tallet og brøken hver for seg når man skal finne produktet av et blandet tall og en brøk. Algebraisk kan dette skrives som $\frac{a}{b} \times c\frac{d}{e} = \frac{a}{b} \times c + \frac{a}{b} \times \frac{d}{e}$. Dette er en matematisk påstand som kan bevises, og dermed ble forklaringen inkludert i analysen.

Her tas det utgangspunkt i et spesifikt regnestykke. Det forklares ikke at regelen gjelder generelt. Dermed kan ikke forklaringen sies å være generell. I likhet med den forrige forklaringen, brukes det også her en modell. Tidligere i kapittelet i denne læreboken ble det forklart hvordan multiplikasjon av brøker kan forstås som hvor stor del den første faktoren er av den andre faktoren. Jeg tolker det slik at forfatterne har tenkt at dette nå er etablert kunnskap, og at resonneringen i denne forklaringen bygger videre på dette til og også inkludere heltall. Slik kan en brøk multiplisert med et blandet tall kan forstås på samme måte. Slik vil elevene kunne forstå regnestykket $\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3}$ som $\frac{1}{4}$ av $2\frac{2}{3}$. Slik gir også modellen mening, og man kan se ut fra modellen at resultatet vil måtte bli $\frac{2}{3}$. Elevene kan for eksempel tenke slik som det er vist i figur 8 for å se dette.



Figur 8: Tenkemåte for å se resultatet i modellen fra forklaring 2

I denne forklaringen brukes modellen på en annen måte enn i forklaring 1. Denne forklaringen har en struktur der problemet $\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3}$ modelleres, løses ved hjelp av modellen, før det deretter demonstreres at man får det samme resultatet om man anvender regelen man ønsker å forklare. Først modelleres problemet ved hjelp av modellen. I modellen er det markert med farger, slik at man kan se ved hjelp av å tenke slik som i figur 8 ovenfor at resultatet blir $\frac{2}{3}$. Til slutt gjøres det en numerisk utregning der man multipliserer $\frac{1}{4}$ med 2 og $\frac{2}{3}$ hver for seg, og får det samme resultatet. På bakgrunn av dette ble forklaringen kategorisert som ORM.

Det ble vurdert om også denne forklaringen skulle kategoriseres som DM. Det ble derimot vurdert at den ikke har høy nok grad av deduktiv resonnering. Modellen brukes til å argumentere for hvorfor regelen stemmer for dette tilfellet, men det gis ingen forklaring til hvorfor. Det er også lav grad av strukturell likhet mellom modellen og kalkuleringene som gjøres. Det er ingen forklarende tekst som hjelper med å se sammenhengen mellom modellen og utregningene. Videre kreves det at elevene har forstått og husker at multiplikasjon av brøk kan forstås som hvor mye den første faktoren er av den andre.

Det kan diskuteres om forklaringen følger en struktur som gjør at den burde kategoriseres som ORM eller ikke, ettersom at det aldri spesifiseres eksplisitt at resultatet ved å bruke modellen blir $\frac{2}{3}$. Jeg har vurdert det slik at det er dette forfatterne ønsker å få frem med modellen, og har forklart i figur 8 hvordan elevene kan tenke for å se det. Dermed mener jeg at den følger den strukturen som kjennetegner en forklaring innen typen ORM.

3.8 Studiens kvalitet

I denne delen vil jeg drøfte studiens kvalitet. Resultatene av en studie er mer pålitelige dersom kvaliteten på studien er vurdert (Grønmo, 2016). Dette kan man gjøre ved å se på studiens validitet og reliabilitet (Postholm & Jackobsen, 2018, s. 222). Ifølge Grønmo (2016) er reliabilitet og validitet to overordnede kriterier for vurderinger kvaliteten en studie som kan sies å utfylle hverandre (s. 243). Begge refererer til ulike forutsetninger for god kvalitet, samtidig som de er delvis overlappende, først og fremst i den forstand at høy reliabilitet er en forutsetning for høy validitet.

3.8.1 Reliabilitet

Reliabilitet handler om studiens pålitelighet, og høy relabilitet er når studien gir pålitelige data (Grønmo, 2016, s. 240). Med andre ord handler reliabilitet om funnene fra en studie er til å stole på. Grønmo (2016) skiller mellom stabilitet og ekvivalens som to hovedtyper av reliabilitet (s. 242-243). Stabilitet handler om i hvor stor grad data som er samlet inn samsvarer med data funnet ved å bruke samme metode, men på et annet tidspunkt (Grønmo, 2016, s. 242). Med andre ord handler stabilitet om samsvar mellom datainnsamling på ulike tidspunkt. For eksempel vil høy grad av stabilitet i denne studien være hvis man hadde brukt samme metode for å undersøke det samme fenomenet i lærebøker om et par år, og hatt stort samsvar mellom dataene man hadde samlet inn på de ulike tidspunktene. I denne studien er det tatt i bruk et fast rammeverk, som gjør at stabiliteten er styrket. Lærebøkene som er datagrunnlaget, vil ikke endre seg før eventuelle nye utgaver. Nye utgaver vil trolig ikke innebære store endringer, og derfor vil ikke datamaterialet endre seg betydelig før det kommer nye læreplaner og nye tilhørende læreverk. Det kan derfor argumenteres for at denne studien har høy grad av stabilitet, frem til det kommer en ny læreplan og nye lærebøker. Ekvivalens handler om samsvar mellom innbyrdes uavhengige datainnsamlinger på samme tidspunkt (Grønmo, 2016, s. 243). Høy grad av ekvivalens er hvis man får de samme resultatene uavhengig av hvem som gjennomfører datainnsamlingen. Grunnet rammene til denne masteravhandlingen, er det kun meg som har gjennomført datainnsamling og analyse. Noe som svekker ekvivalensen til denne studien, er at rammeverket gir rom for tolkning. Slik det ble diskutert i kapittel 3.7.4, fantes det argumenter for at en forklaring kunne kategoriseres som ulike typer matematisk resonnering. En annen person kunne dermed ha vurdert annerledes og plassert en forklaring innen en annen type. I kapittel 3.6 definerte jeg hva som måtte ligge til grunn for at en forklaring skulle tas med i analysen. Hvis en annen person skulle ha gjennomført studien på nytt, kunne denne personen ha gjort andre vurderinger enn meg på om en forklaring skulle blitt inkludert. Det kan argumenteres for at dette svekker ekvivalensen i studien. Et tiltak som kunne ha blitt gjort for å øke ekvivalensen er en form for triangulering der jeg hadde involvert en annen person til å støtte meg i datainnsamling og analyse. Grunnet oppgavens omfang og omstendigheter var ikke dette mulig. Et tiltak som ble gjort for å øke ekvivalensen var å beskrive hvordan jeg anvendte det teoretiske rammeverket, og komme med eksempler som var illustrerende for hvordan jeg tok det i bruk.

3.8.2 Validitet

Validitet handler om hvorvidt datamaterialet er gyldig med hensyn til de problemstillingene som skal belyses, og høy validitet forutsetter at enheter og begrep er systematisk definert og at valget av metode for utvelging av enheter og datainnsamling er godt tilpasset disse definisjonene (Grønmo, 2016, s. 251-257). For å vurdere validiteten i denne studien har jeg tatt utgangspunkt i begrepene intern og ekstern validitet.

Intern validitet handler om studiet er gjennomført på en tilfredsstillende måte, slik at konklusjonene som trekkes er gyldige ut ifra det som er studert (Grønmo, 2016, s. 253). Postholm og Jacobsen (2018) kaller dette indre validitet. Indre validitet handler om funnene fra studien samsvarer med virkeligheten, og kan vurderes ved å vurdere om datamaterialet er relevant for problemstillingen (Postholm & Jacobsen, 2018, s.223). I denne studien ville jeg undersøke hvilke typer resonnering som ble brukt i forklaringene i norske lærebøker i matematikk for 7. og 8. trinn innen temaene brøk og algebra. I kapittel 3.6 beskrev jeg hvordan de utvalgte lærebøkene utgjør en betydelig del av det norske markedet av lærebøker i matematikk, og det kan dermed argumenteres for at datamaterialet er relevant for fenomenet som jeg undersøker. Videre beskriver Postholm og Jacobsen (2018) begrepsvaliditet som et forhold som påvirker intern validitet (s. 229). Begrepsvaliditet handler om det som studeres samsvarer med begreper og teori som er benyttet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229). I denne studien har jeg benyttet meg av rammeverk og begrep som er forankret i tidligere forskning. Rammeverket til Stacey og Vincent (2016) som ble brukt til å kategorisere forklaringene er godt beskrevet og tidligere tatt i bruk i forskning på resonnering i lærebøker (Stacey & Vincent, 2016; Silverman & Even, 2015). Jeg har tatt i bruk begreper som matematisk resonnering, argumentasjon og bevis som er nøye beskrevet i henhold til tidligere forskning og læreplanverket.

Ekstern validitet handler om resultatene av en studie er realistiske og kan generaliseres (Grønmo, 2016, s. 253). Postholm og Jacobsen (2016) kaller dette ytre validitet, og beskriver det som i hvor stor grad funnene er generaliserbare (s. 238). I denne studien kan dette knyttes til om funnene er generaliserbare til å også være gyldige for de lærebøkene som ikke ble inkludert, til de temaene som ikke ble inkludert, til andre trinn og til tilleggsressurser som hører til lærebøkene. Det blir spekulativt om jeg skal anta noe om lærebøker jeg ikke har analysert, og derfor er det vanskelig å svare på om resultatene er overførbare til disse. Trolig vil man få andre resultater for andre lærebøker, trinn og tema. Det som kan sies er at gjennom å studere de mest brukte lærebøkene, er det grunnlag for å si at resultatene i stor grad dekker de norske lærebøker som brukes i de fleste norske klasserom.

3.9 Etikk

Ettersom denne studien baserer seg på en dokumentanalyse av lærebøker, har jeg ikke brukt elever, lærere eller andre informanter som datagrunnlag. Derfor er det mange etiske vurderinger som typisk må tas som ikke er relevante. Det er derimot noen etiske vurderinger som er tatt. Norsk forskningsetikk tar utgangspunkt i tre grunnleggende krav: informert samtykke, krav på privatliv og krav på å bli riktig gjengitt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 246-252). I denne oppgaven har jeg analysert lærebøker i matematikk. Jeg har stor respekt for det arbeidet forfatterne av disse lærebøkene har lagt ned, og har forsøkt å gjennomføre analysene og presentert funnene både upartisk og nøyaktig. Slik det ble beskrevet i kapittel 3.6, har ikke denne studien som hensikt å rangere lærebøkene. Derfor ble lærebøkene presentert i form av koder i resultatene. For å kunne forklare gangen i dataanalysen har jeg gjengitt to forklaringer fra lærebøkene. Jeg har da gjengitt teksten nøyaktig slik som de står i lærebøkene, men produsert egne figurer og illustrasjoner. Generelt gjennom hele oppgaven har jeg henvist til all litteratur som er brukt på en nøyaktig måte i henhold til APA 7. Dette er med å øke troverdigheten til forskningen. Ved direkte sitat, eller ved henvisning til lengre tekster, har jeg gjort slik det er anbefalt i henhold til APA 7, og referert til nøyaktig sidetall i den aktuelle litteraturen. Slik blir det lettere for leseren og slå opp på riktig plass.

4 Resultater

I dette kapittelet vil jeg presentere funnene som er gjort. Jeg har lagt ned mye arbeid i å lage tabeller og diagram for å kunne presentere funnene så konsist som mulig, uten unødvendig tekst. Datanalysen ble gjort for å svare på forskningsspørsmålene:

1. Hvilke typer matematisk resonnering brukes i temaene brøk og algebra i et utvalg lærebøker i matematikk for 7. trinn og 8. trinn?
2. I hvilken grad samsvarer funnene med beskrivelsen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK20, som sier at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser?
3. Hvilke forskjeller finnes det mellom temaene brøk og algebra knyttet til matematisk resonnering?
4. Hvilke forskjeller finnes det mellom lærebøkene for 7. trinn og 8 trinn knyttet til matematisk resonnering?

Hver forklaring er kategorisert i henhold til Stacey og Vincent (2009) sitt rammeverk, slik som det ble forklart i metodekapittelet. De ulike typene matematisk resonnering med tilhørende koder er presentert i tabell 6 nedenfor, slik at det blir mulig å lese resultatene uten å bla tilbake til metodekapittelet.

Type resonnering	Kode	Grad av forklaring
Deduksjon ved bruk av et generelt tilfelle	DGT	Deduksjon
Deduksjon ved bruk av et spesifikt tilfelle	DST	Deduksjon
Deduksjon ved bruk av en modell	DM	Deduksjon
Overensstemmelse med en regel og en modell	ORM	Empirisk
Eksperimentell demonstrasjon	ED	Empirisk
Referere til autoriteter	RA	Ekstern overbevisning
Kvalitativ analogi	KA	Skraper i overflaten

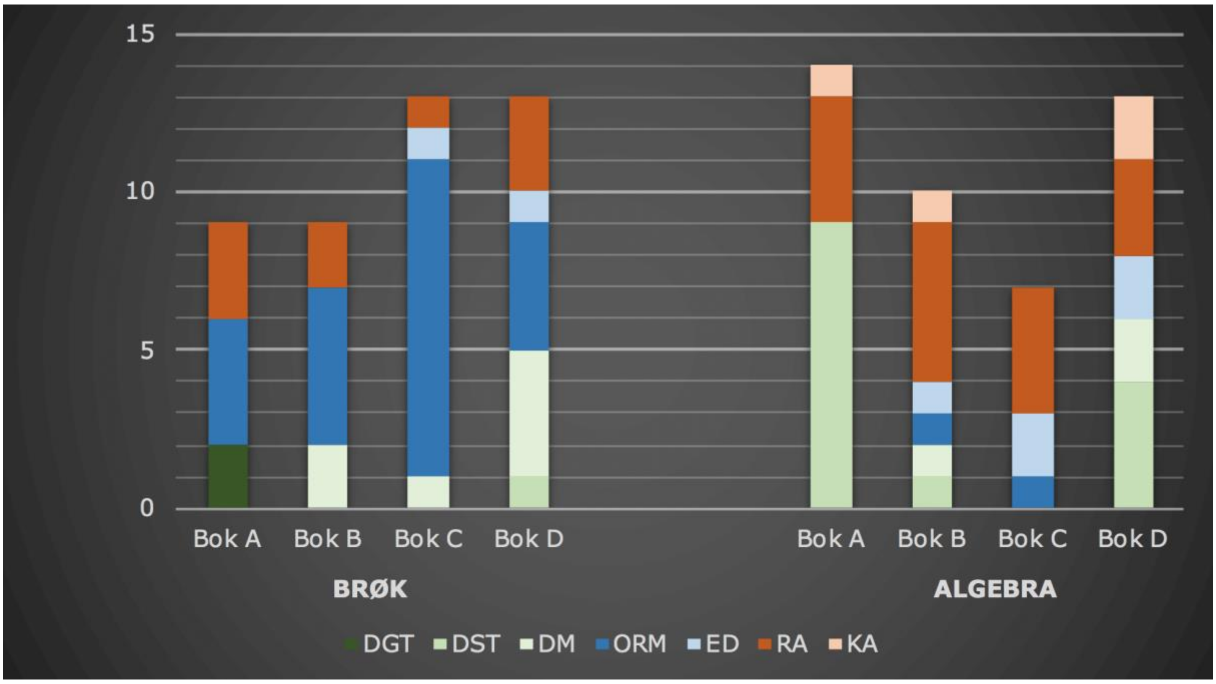
Tabell 6: Typer matematisk resonnering i rammeverket

Resultatene blir presentert i form av tabeller og diagram. Detaljerte resultat er presentert i form av tabeller som vedlegg. Vedlegg 1 legger grunnlaget for alle resultatene som blir presentert. I noen av diagrammene er typene matematisk resonnering gitt fargekoder i henhold til om forklaringene er deduktive, empiriske eller bruker ekstern overbevisning. Grønne farger er deduktive forklaringer, blå empiriske forklaringer, brun er forklaringer som bruker ekstern overbevisning og beige er kvalitativ analogi. Det vil bli presentert resultater som er eksplisitt sortert etter dette senere i kapittelet. Tabell 7 viser antall forekomster av hver type resonnering i de forskjellige bøkene. Bok C og D er de to 7. trinnbøkene. Bok A og B er de to 8. trinnbøkene.

	BRØK						ALGEBRA				
	Bok A	Bok B	Bok C	Bok D	**SUM**		Bok A	Bok B	Bok C	Bok D	**SUM**
DGT	2	0	0	0	**2**	**DGT**	0	0	0	0	**0**
DST	0	0	0	1	**1**	**DST**	9	1	0	4	**14**
DM	0	2	1	4	**7**	**DM**	0	1	0	2	**3**
ORM	4	5	10	4	**23**	**ORM**	0	1	1	0	**2**
ED	0	0	1	1	**2**	**ED**	0	1	2	2	**5**
RA	3	2	1	3	**9**	**RA**	4	5	4	3	**16**
KA	0	0	0	0	**0**	**KA**	1	1	0	2	**4**
SUM	**9**	**9**	**13**	**13**	**44**	**SUM**	**14**	**10**	**7**	**13**	**44**

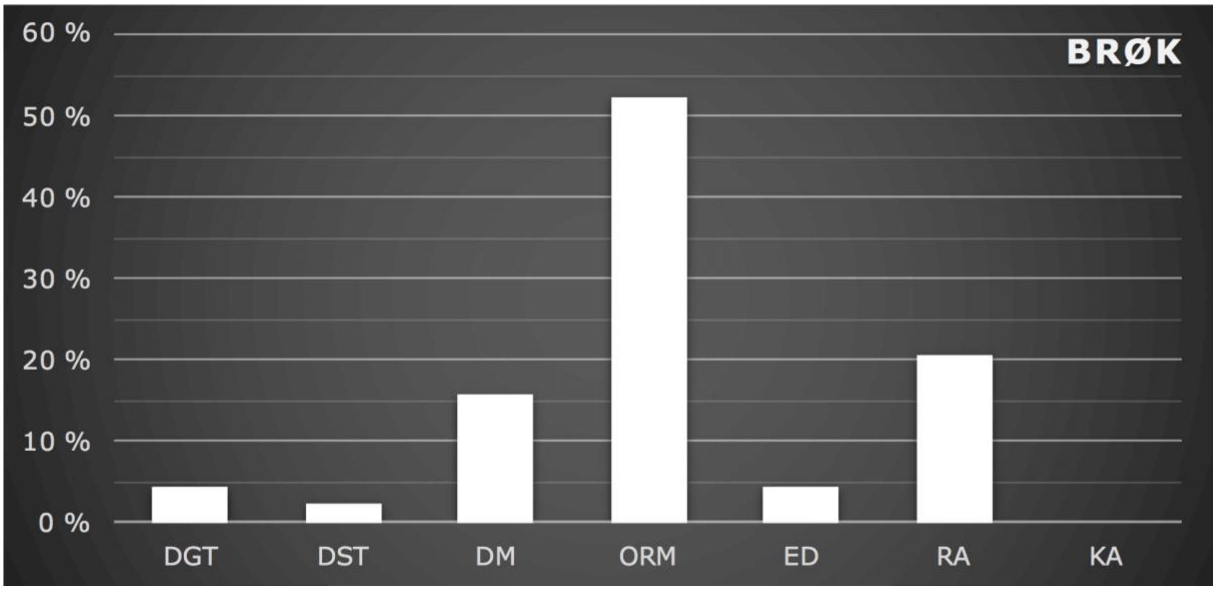
Tabell 7: Antall forekomster av typer resonnering i de forskjellige lærebøkene i brøk og algebra

Det ble analysert 44 forklaringer i hvert av temaene, til sammen 88 forklaringer. Det var ikke bestemt på forhånd at det skulle være et likt antall i de to temaene, dette var tilfeldig. Figur 9 nedenfor viser en grafisk framstilling av funnene i tabell 7.



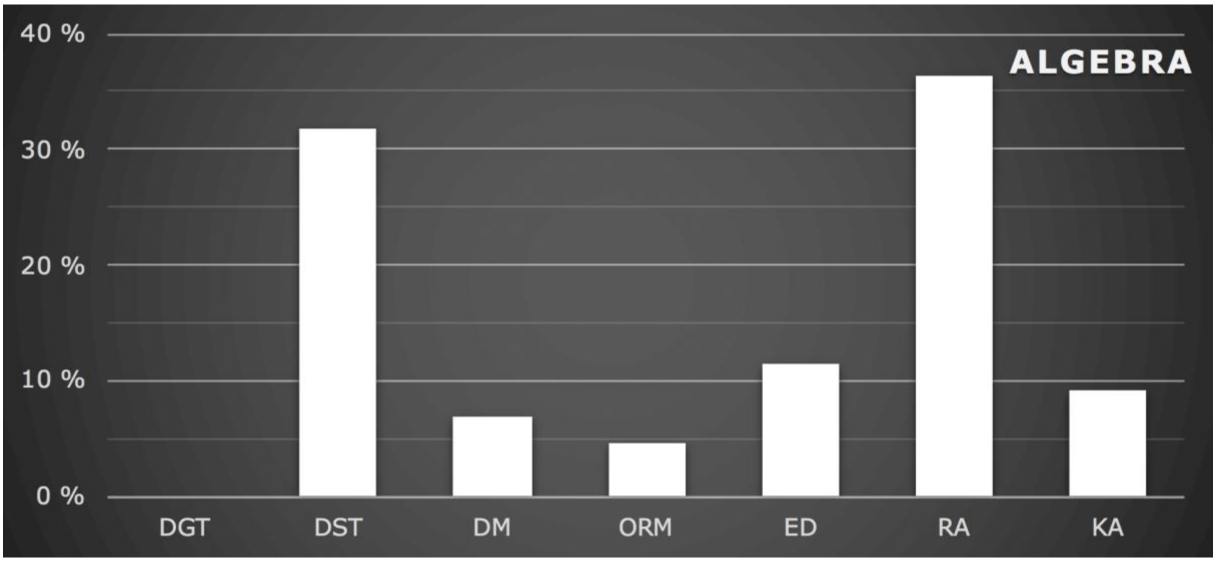
Figur 9: Antall forekomster av typer resonnering i de forskjellige lærebøkene i de to temaene brøk og algebra

Man kan se at det fantes forklaringer av alle de sju typene resonnering i lærebøkene. Bok A og B hadde kun tre typer i temaet brøk, og bok A og C hadde kun tre typer i temaet algebra.



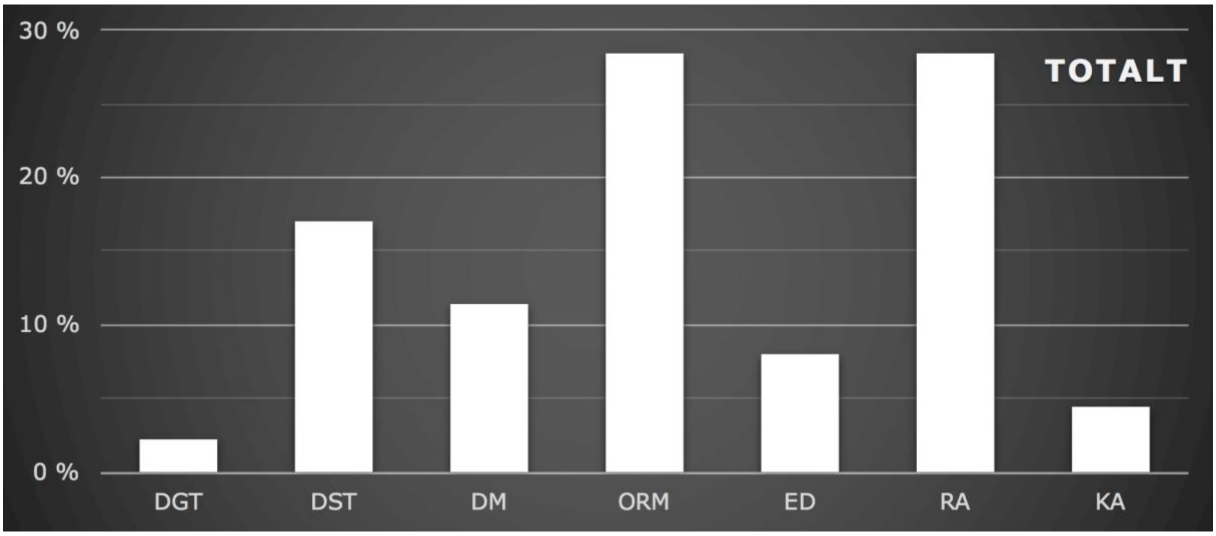
Figur 10: Prosentvis andel av typer resonnering i temaet brøk

ORM (52%) var den dominerende typen resonnering i temaet brøk. Det var ingen tilfeller av KA i temaet brøk.



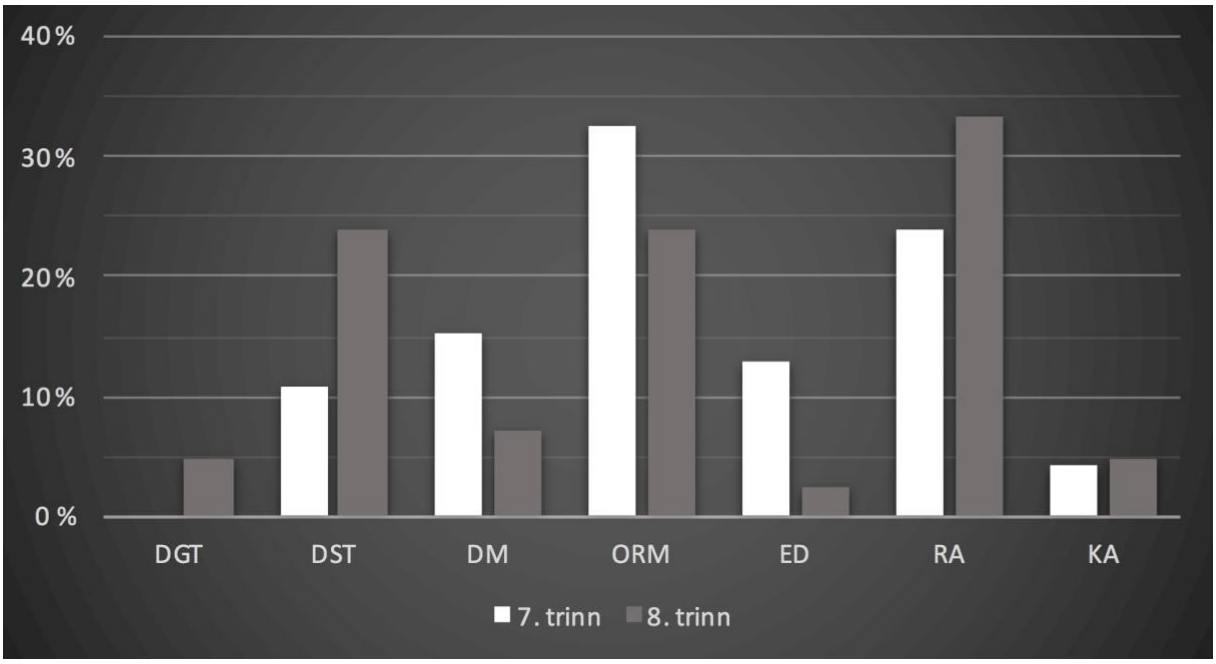
Figur 11: Prosentvis andel av typer resonnering i temaet algebra

I temaet algebra var RA (36%) og DST (32%) de hyppigste typene. Det var ingen tilfeller av DGT i temaet algebra.



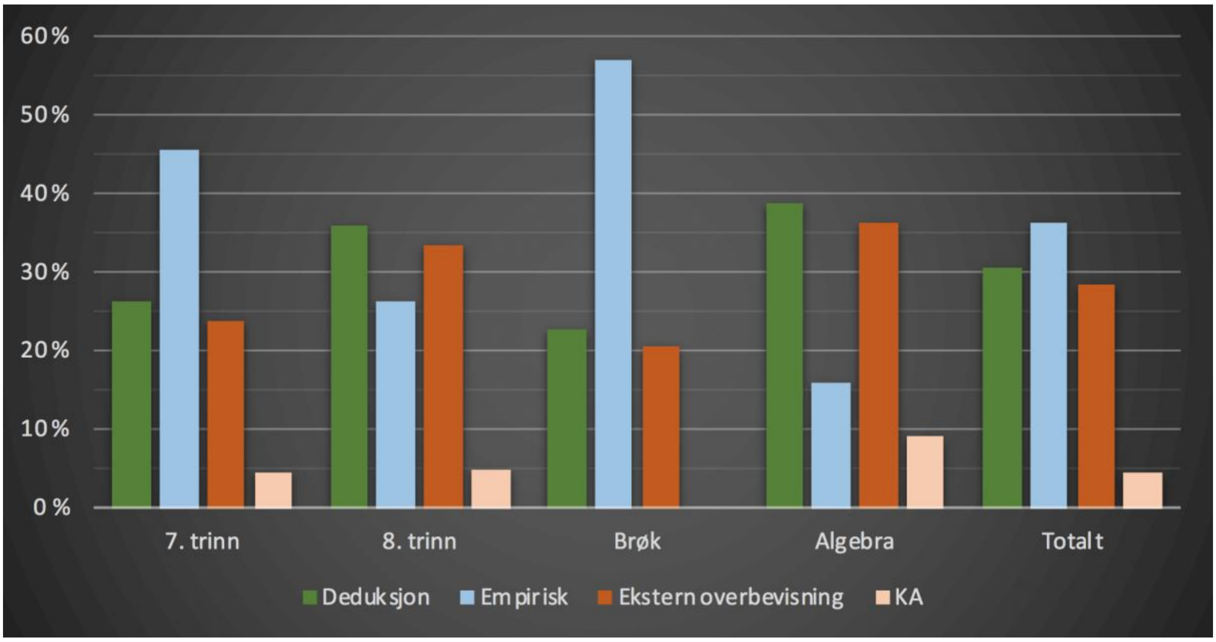
Figur 12: Prosentvis andel av typer resonnering totalt i begge tema

Samlet over begge tema var forklaringer av typen ORM (28%) og RA (28%) hyppigst. Det var færrest forklaringer av typen DGT (2%) og KA (5%). Resultatene i figur 10, 11 og 12 finnes i tabellform i vedlegg 2.



Figur 13: Prosentvis andel av typer resonnering i 7.- og 8. trinnbøker

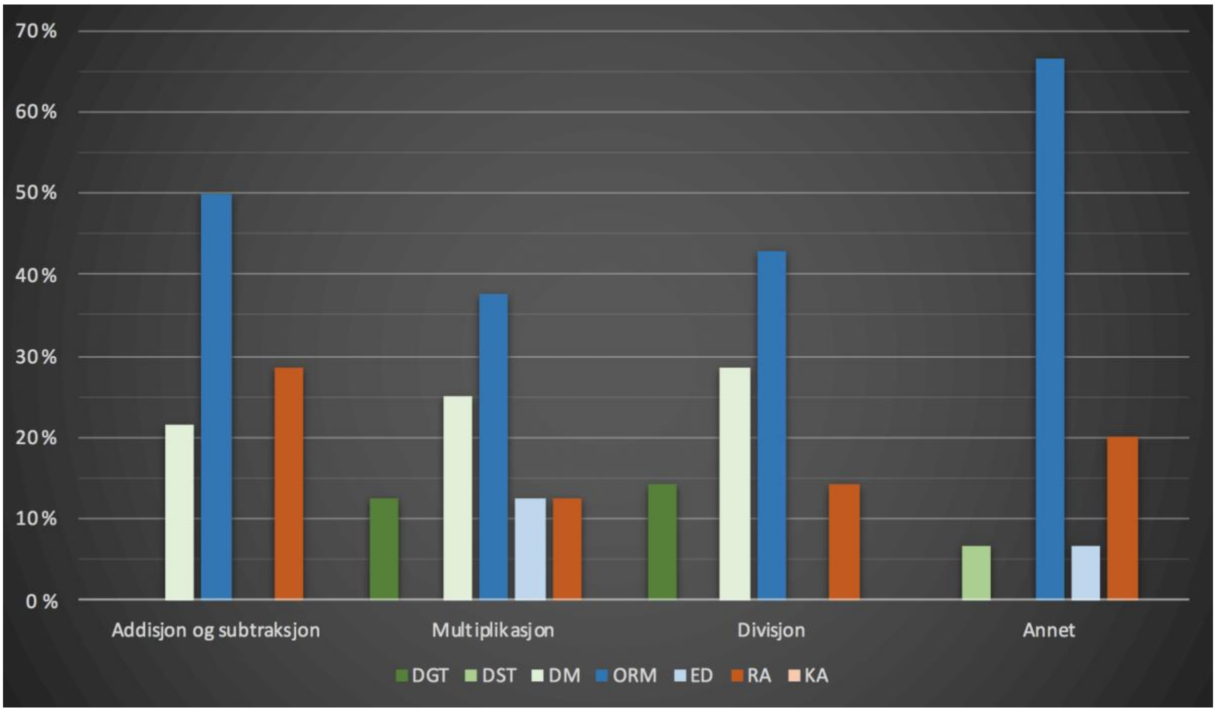
7. trinnbøkene hadde ingen forklaringer av typen DGT, til forskjell fra 8. trinnbøkene der 5% av forklaringene var av denne typen. Resultatene i figur 13 finnes i tabellform i vedlegg 3.



Figur 14: Prosentvis andel av forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi

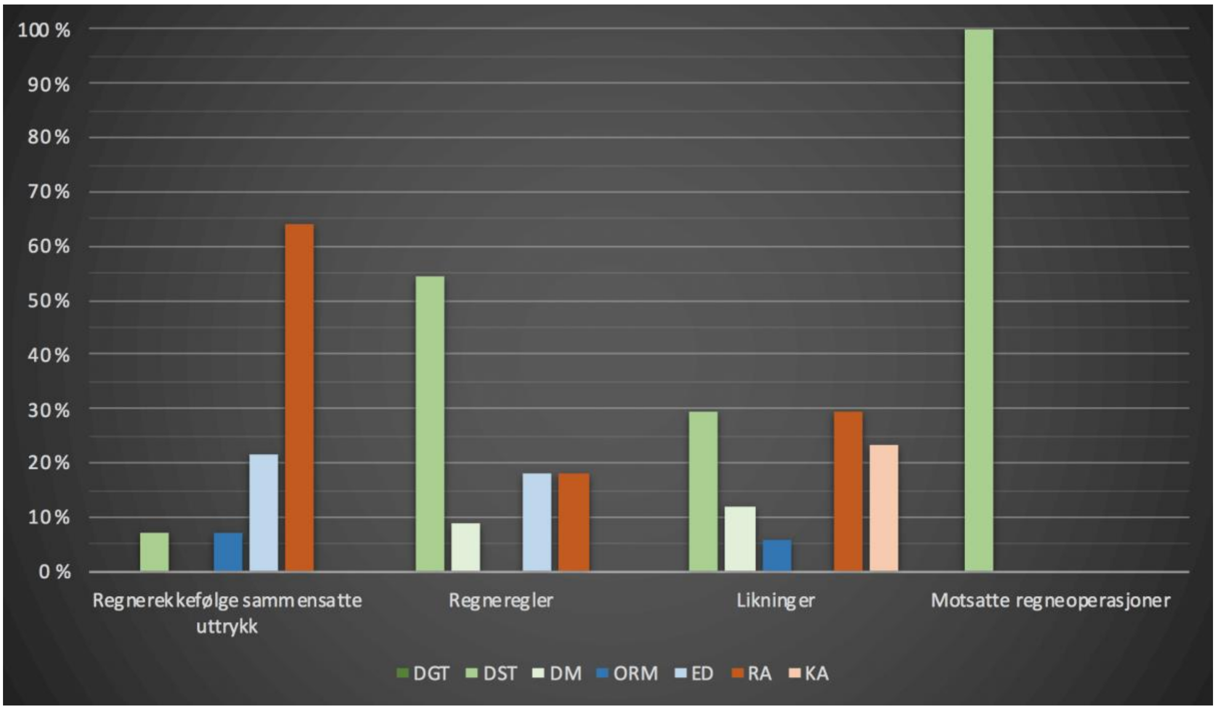
Totalt sett var det relativt jevnt fordelt mellom empiriske forklaringer (36%), deduktive forklaringer (31%) og forklaringer som brukte ekstern overbevisning (28%). En større andel av forklaringene var deduktive i bøkene for 8. trinn (36%) sammenlignet med bøkene for 7. trinn (26%). I 7. trinnbøkene var nesten halvparten (46%) av forklaringene empiriske, i 8. trinnbøkene var en fjerdedel (26%) empiriske. Det var flere forklaringer som brukte ekstern overbevisning i 8. trinnbøkene (33%) sammenlignet med 7. trinnbøkene (24%). En større andel av forklaringene var deduktive i temaet algebra (39%) sammenlignet med brøk (23%). I temaet brøk var det en mye større andel av empiriske forklaringer (57%) sammenlignet med algebra (16%). Resultatene i figur 14 finnes i tabellform i vedlegg 4.

Figur 15 og 16 viser prosentvis andel av typer resonnering innad i et og et deltema. Resultatene i disse diagrammene finnes i tabellform i vedlegg 6 og vedlegg 7. En beskrivelse av innholdet i disse deltemaene er beskrevet i kapittel 3.6.



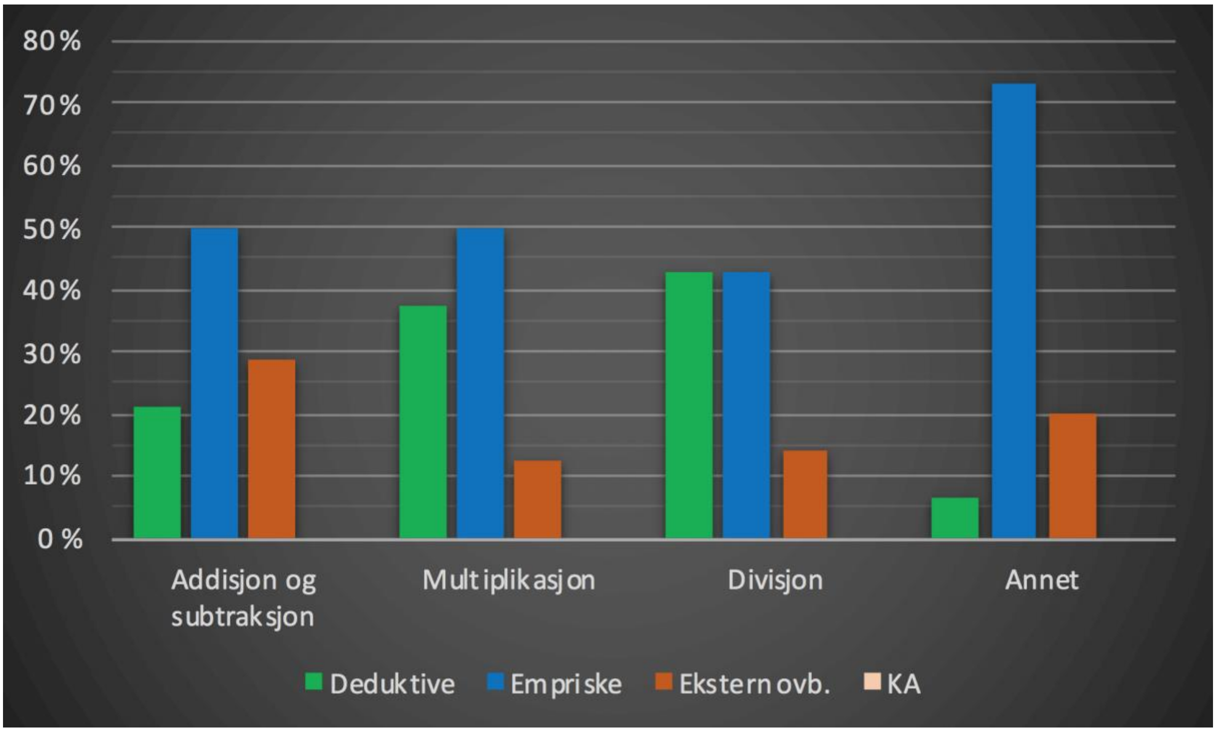
Figur 15: Prosentvis andel av typer resonnering innad i de forskjellige deltemaene i temaet brøk

I deltemaet addisjon og subtraksjon av brøk var 29% av forklaringene av typen RA, en høyere andel enn i noen av de andre deltemaene. Multiplikasjon av brøk var deltemaet der det var brukt flest forskjellige typer forklaringer (fem forskjellige).



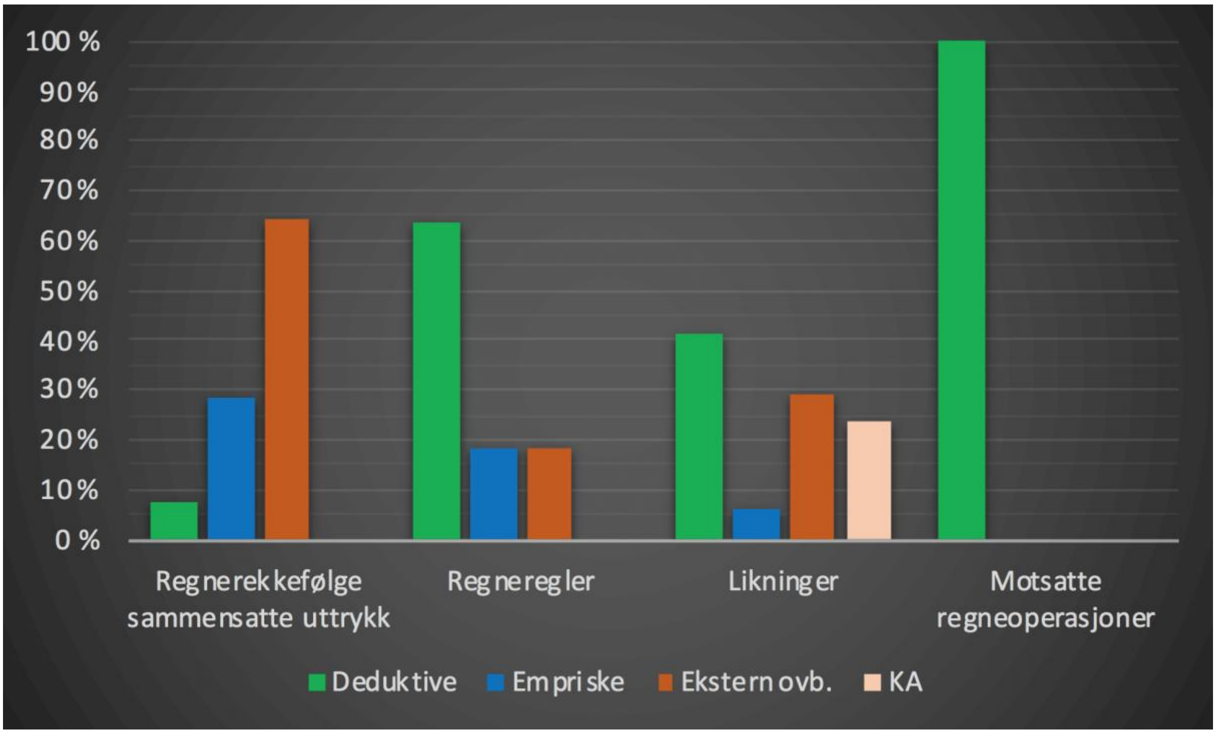
Figur 16: Prosentvis andel av typer resonnering innad i de forskjellige deltemaene i temaet algebra

Deltemaet regnerekkefølge sammensatte uttrykk hadde høyest andel forklaringer av typen RA (64%). Likninger var deltemaet der det var brukt flest forskjellige typer forklaringer (fem forskjellige). I temaet motsatte regneoperasjoner var alle forklaringene av typen DST, men det var bare to forklaringer i dette deltemaet.



Figur 17:: Prosentvis andel av forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi innad i de ulike deltemaene i temaet brøk

I deltemaet annet var 7% av forklaringene deduktive. I deltemaet addisjon og subtraksjon av brøk var 21% av forklaringene deduktive. Resultatene i figur 17 og 18 finnes i tabellform i vedlegg 8.



Figur 18: Prosentvis andel av forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi innad i de ulike deltemaene i temaet algebra

I deltemaet regnerekkefølge sammensatte uttrykk var 7% av forklaringene deduktive, som er en lav andel sammenlignet med de andre temaene. Alle tilfellene av kvalitativ analogi er i deltemaet likninger. Slik det ble beskrevet i kapittel 2.6.7 er kvalitativ analogi en analogi som brukes til å forklare et konsept. I forklaringene som er analysert i denne studien er det brukt denne typen resonnering til å forklare konseptet likninger.

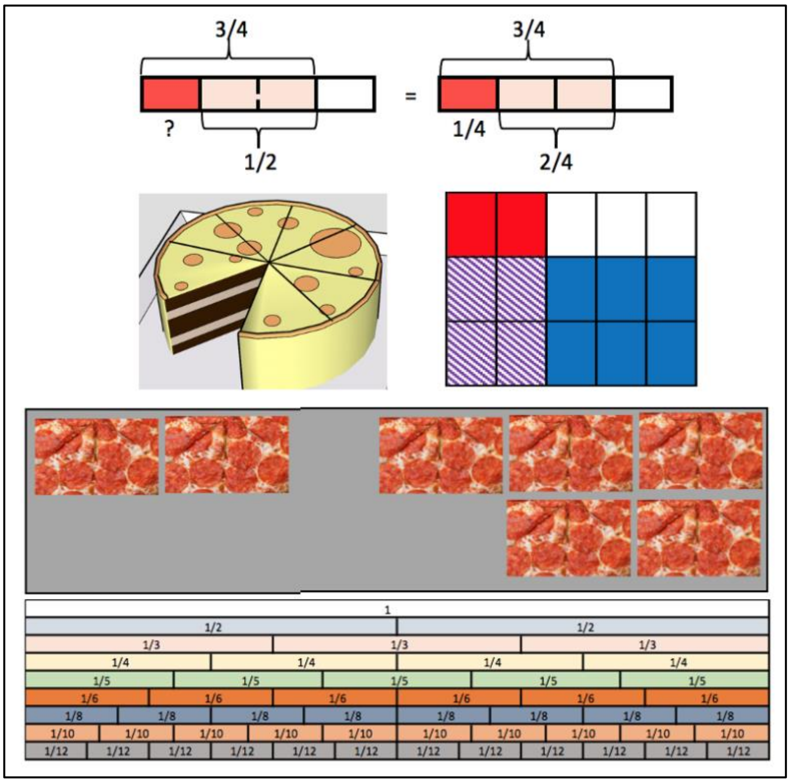
5 Diskusjon

I denne masteroppgaven ønsket jeg å undersøke hvilke typer resonnering som brukes i et utvalg lærebøker i matematikk for 7. – og 8. trinn i temaene brøk og algebra. Videre ville jeg se hvordan funnene samsvarer med LK20, der det heter at «elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser» (Kunnskapsdepartementet, 2019b). I tillegg ville jeg se på forskjeller mellom temaene brøk og algebra og bøkene for 7. trinn og 8. trinn. I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene som er gjort opp mot teori for å svare på forskningsspørsmålene. Til slutt i kapittelet vil jeg se på funnene i denne studien opp mot funn fra lignende studier.

5.1 Typer resonnering

Det første forskningsspørsmålet i denne avhandlingen var «Hvilke typer resonnering brukes i temaene brøk og algebra i et utvalgt lærebøker i matematikk for 7. trinn og 8. trinn?». Dette forskningsspørsmålet var det første jeg tok for meg, og resultatet av analysene svarer direkte på dette spørsmålet. Funnene viser at lærebøkene inneholdt alle typer av resonnering i rammeverket til Stacey og Vincent (2009). Det var flest av typene ORM (28%) og RA (28%). Det var svært få forklaringer av typen DGT (2%) og KA (5%). DGT er den av de sju typene resonnering som har flest fellestrekk med et fullverdig matematisk bevis. Forklaringer av denne typen innebærer høy grad av deduksjon, som inngår i både Valenta og Enge (2020) og Stylianides (2007) sin definisjon av et matematisk bevis, i tillegg til at de er generelle. Slik det ble beskrevet i teoridelen har bevis og bevisføring tradisjonelt vært noe elevene møter først på ungdomsskolen (Stylianides, 2007, s. 289). Nyere forskning vektlegger derimot viktigheten av bevis og bevisføring allerede på barneskolen. Det er derfor interessant at funnene viser at det er så få forklaringer som er av typen DGT, typen som ligner mest på et matematisk bevis, og at de to tilfellene er i 8. trinnbøker. Det kan være at forfatterne bevisst har unngått forklaringer av denne typen, ettersom bevisføring tradisjonelt sett har vært ungdomsskolepensum (Styliandies, 2007, s. 289). En annen årsak kan være mangelen på forskning på bevis i en barneskolekontekst som blir beskrevet av Styliandies (2007, s. 290). Det er naturlig at forfattere av lærebøker vil basere seg på forskning, men det er mangel på forskning på feltet og mangel på definisjoner av bevis som passer i konteksten bøkene skal skrives til.

Resultatene viser at det alle typene resonnering er representert i lærebøkene, og at kun forklaringer av typene DGT (2%), KA (5%) og ED (8%) utgjør under 10%. Det kan dermed sies å være varierende typer forklaringer i lærebøkene. Det kan ha vært et bevisst valg av forfatterne av lærebøkene, i et forsøk på å gi varierte forklaringer som kan passe for flest mulig av elevene. Det må nevnes at to forklaringer som er av samme type i henhold til rammeverket kan være forskjellige i innhold. Dette ser man spesielt i temaet brøk, der det ved første øyekast kan virke som at det er mindre variasjon sammenlignet med algebra. Hele 52% av forklaringene er av typen ORM i temaet brøk. En forklaring av denne typen modellerer et utvalgt problem og løser problemet ved hjelp av modellen, og bruker dette som argument for at påstanden man ønsker å forklare er sann. Forklaringer av typen DM, som også er forklaringer tar utgangspunkt i en modell, er og mer representert i temaet brøk (16%) sammenlignet med algebra (7%). Disse funnene kan henge sammen med at forskning understreker viktigheten av å gi elever varierte og ulike representasjoner i temaet brøk (Enge & Valenta, 2013; Lamon, 2006), som det ble skrevet om i kapittel 2.3. Ettersom brøk er et utfordrende tema i matematikkundervisningen, kan det være at forfatterne ønsket å gi varierte representasjoner for å gjøre det lettere for elever å forstå konseptet brøk og alle ulike tolkninger av brøk. Det som i utgangspunktet kan tolkes som mindre variasjon av typer forklaringer i temaet brøk, er i realiteten en stor andel av forklaringer av typen ORM og DM med mange forskjellige modeller innad i disse forklaringene. Det ble for eksempel brukt arealmodeller, modeller med kvadrater og rektangler, modeller med kaker og pizza og tabeller som viser størrelsesforhold. De ulike modellene representerte ulike tolkninger av brøk, som ble beskrevet i teorikapittelet. Et utvalg av eksempler på forskjellige typer modeller som er brukt er illustrert i figur 19.



Figur 19: Eksempler på varierte modeller innad i forklaringer av typen ORM og DM.

Det var en større andel av forklaringer av typen RA (som er ekstern overbevisning) i temaet algebra (36%) sammenlignet med i brøk (20%). Dette er verd å merke seg, sett i lys av årsakene til at algebra er et problematisk tema. I teorikapittelet ble det beskrevet at hvis man tolker algebra som kun symbolsk manipulasjon av uttrykk vil gjøre det lite meningsfylt og relevant for elevene (Stacey & Chick, 2004, s. 1-3). Det kan argumenteres for at forklaringer som slår fast en regel uten videre forklaring bidrar til et slikt syn på algebra. Læreren vil være den som har størst påvirkning på elevenes læring av matematikkfaget, men slik det har blitt diskutert tidligere, spiller lærebøker i matematikk en viktig rolle. Dermed kan det tenkes at en konsekvens av at lærebøkene har en så stor andel forklaringer av typen RA i temaet algebra er at dette bidrar til at algebra blir tolket som kun symbolsk manipulasjon av elevene, som er en av årsakene til at temaet er problematisk. Uten videre forskning med andre metoder enn dokumentanalyse er det ikke mulig for meg å konkludere med dette, men det hviler i det minste et stort ansvar på læreren for å vise at algebra er mye mer.

I figur 15 og figur 16 ble det presentert resultater der typene forklaringer var sortert i henhold til de ulike deltemaene i temaene brøk og algebra. Det mest interessante med disse funnene var fordelingen av forklaringer som refererte til autoriteter (RA). Slik som med regning med vanlige tall, er det også i regning med brøk naturlig å starte med addisjon og subtraksjon, før multiplikasjon og divisjon. Dette er også rekkefølgen som følges i lærebøkene. Dette fordi addisjon og subtraksjon grunnleggende regnearter, som legger grunnlaget for multiplikasjon og divisjon. For eksempel er kan man se på multiplikasjon som gjentatt addisjon. Det er derfor interessant at det er i nettopp addisjon og subtraksjon av brøk det er høyest andel av forklaringer av typen RA (29%), sammenlignet med de andre deltemaene i brøk. Det er i nettopp dette grunnleggende deltemaet det er høyest andel av forklaringer av en type som ikke gir noen forklaring annet enn å stadfeste en påstand eller regel. I temaet algebra er det lignende funn. I kapittel 3.6 ble det beskrevet hvordan sammensatte regneuttrykk ble inkludert i analysen, ettersom det er en del av tidlig algebra, som legger grunnlaget for videre arbeid med algebra. Dette deltemaet er det deltemaet med klart høyest andel forklaringer av typen RA (64%). Hvis man ser på resultatene i figur 17 og figur 18 ser man også at andelen forklaringer som er deduktive i disse to deltemaene er lav sammenlignet med de andre deltemaene. Som pedagog tenker jeg at det er i beste fall risikabelt å unnlate å forklare det mest grunnleggende i et tema, da det tross alt er dette som legger grunnlaget for det som skal læres videre. En årsak til denne trenden kan være at bøkene er laget for 7. – og 8. trinnelever, og forfatterne av lærebøkene har tenkt at innholdet i disse deltemaene bør være etablert kunnskap, og har inkludert de som repetisjon. Min erfaring fra klasserommet er derimot at det er et stort spenn innad i en elevgruppe. Det som noen elever har lært i 5. trinn kan være utenfor rekkevidde for andre elever på det tidspunktet, og det vil oppleves som helt nytt da dette kommer igjen i 7. trinn. Videre har jeg erfart at mange elever ikke bare kan hente opp det de har lært et år tidligere, men trenger grundige forklaringer og tid til å sette seg inn i temaet på nytt. En implikasjon av disse funnene vil derfor være at læreren må være ekstra bevisst på disse to grunnleggende temaene, og sørge for å gi grundige forklaringer som legger et godt grunnlag for videre arbeid i temaet, utover de forklaringene som finnes i lærebøkene. Denne masteroppgaven er begrenset til temaene brøk og algebra, men hvis dette er en trend også i de andre temaene, vil dette gjelde for alle de grunnleggende deltemaene i matematikken.

5.2 Funn sett i lys av LK20

Som det ble forklart i kapittel 2.6, bygger Stacey og Vincent (2009) sitt rammeverk videre på en studie fra Harel og Sowder (2007) som skiller mellom empirisk og deduktiv resonnering. Forklaringer av typene KA og RA er hverken empiriske eller deduktive, men presenterer påstander eller regler som skraper i overflaten, uten videre forklaring. Jeg presenterte resultater der forklaringene var delt opp i henhold til om de var empiriske forklaringer, deduktive forklaringer, forklaringer som bruker ekstern overbevisning eller forklaringer som bruker kvalitativ analogi i figur 14. Funnene i min studie viser at 28% av forklaringene bruker ekstern overbevisning og 5% er av typen kvalitativ analogi. Det vil si at hele 33% prosent av forklaringene i lærebøkene som var analysert kommer med påstander eller regler uten å gå i dybden eller å forklare hvorfor. Dette er oppsiktsvekkende funn, da LK20 har definert resonnering og bevis som et av kjerneelementene i faget. I kjerneelementene i LK20 heter det at «elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser» (Kunnskapsdepartementet, 2019b). Et av forskningsspørsmålene i denne studien var hvordan funnene samsvarer med nettopp dette innholdet i LK20. Størsteparten av forklaringene (67%) kommer med en forklaring, men sammenlignet med lignende forskning fra andre land er dette en lav andel (Silverman & Even, 2015; Stacey og Vincent, 2009). Jeg mener at når en så stor andel av forklaringene ikke gir begrunnelser eller kun skraper i overflaten på det som skal forklares, så er det grunnlag for å si at funnene ikke samsvarer med beskrivelsen i LK20. Ser man nærmere på de forklaringene som er av typen RA gis det heller ingen indikasjoner til elevene på at det finnes årsaker til hvorfor dette er utelatt. Det er dermed ikke nærliggende for elevene å tro at det egentlig finnes en klare begrunnelser, men at disse er utelatt fra boken av diverse årsaker. På samme måte som det ble diskutert i forbindelse med å vise elevene at algebra er mye mer en symbolsk manipulasjon, så hviler det også her et stort ansvar på læreren. Man kan se dette i sammenheng med Valverde et al. (2002) sin modell for sammenhengen mellom læreplan, lærebøker, bruk av læreplan og elevers læringsutbytte, som ble omtalt i teoridelen (figur 2). I modellen er lærebøkene et verktøy lærere bruker i undervisningen, for å implementere læreplanen i undervisningen, slik at elevene skal oppnå den kunnskapen som er fastslått i nettopp læreplanen. Lærebøkene er med andre ord et bindeledd mellom læreplanen og implementering av læreplanen. Funnene i denne studien antyder derimot at lærebøkene ikke samsvarer med målet i læreplanen om at «elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser» (Kunnskapsdepartementet, 2019b). Dermed blir strategiene, praksisen og aktivitetene læreren utfører desto viktigere for at den oppnådde læreplanen faktisk oppnår det som var tiltenkt.

31% av forklaringene deduktive. Slik det ble beskrevet i metodekapittelet, kan man ikke konkludere noe om påvirkningen læreboken har på kompetansen til elevene basert på en dokumentanalyse uten å bruke andre metoder i tillegg (Rezat & Sträßer, 2015, s. 253-254). Jeg mener derimot at det er relevant å diskutere mulighetene for at når så få av forklaringene i lærebøkene forklarer matematiske påstander og regler på en måte som ligner på et matematisk bevis, så vil det kunne påvirke hvordan elever oppfatter hva et bevis er og hvordan de selv skal bevise en matematisk påstand, uten at jeg kan konkludere noe om dette. Det at matematikkfaget har tradisjon for å være drevet av lærebøkene (Remillard, 2005) og at norske elever arbeider mye alene i lærebøkene (Kongelf, 2015) forteller en historie om at lærebøkene er en viktig faktor for elevenes læring i faget, også for bevis og bevisføring, noe som underbygges av Otten et al. (2004). LK20 ble innført så nylig som høsten 2020, og disse lærebøkene er de første lærebøkene som er laget i henhold til den nye læreplanen. Dermed kan det være at forfattere av lærebøker trenger mer tid for å få implementert alle aspektene ved den nye læreplanen, også matematisk resonnering og bevisføring. I innledningen ble det beskrevet hvordan en endring i matematikkundervisningen er avhengig av en endring av lærebøkene (Ball og Cohen, 1996, sitert i Remilard, 2005). Det er derfor viktig at hvis læreplanens nye mål om at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige skal nås, må også lærebøkene formidle dette til elevene gjennom å gi forklaringer som begrunner matematiske påstander på en systematisk og deduktiv måte.

5.3 Brøk, algebra og trinn

Hvis man sammenligner resultatene for de to temaene brøk og algebra ser man at det er en høyere andel deduktive forklaringer i temaet algebra (39%) sammenlignet med brøk (23%). En stor andel av forklaringene i temaet brøk var av typen ORM, som er empiriske forklaringer. Årsaken til dette kan slik som det ble diskutert tidligere i kapittelet være at forfatterne ønsket å gi varierte representasjoner for å gjøre det lettere for elever å forstå konseptet brøk og alle ulike tolkninger av brøk. Det ble analysert flere forklaringer i temaet brøk i 7. trinnbøkene sammenlignet med 8. trinnbøkene. Dermed vil det høye antallet av forklaringer av typen ORM gjøre at andelen empiriske forklaringer vil bli høyere i 7. trinn bøkene sammenlignet med 8. trinnbøkene. Totalt sett var det høyere andel deduktive forklaringer i 8. trinnbøkene enn i 7. trinnbøkene. Dette kan ses i tabell 8. Antall forekomster av de forskjellige forklaringene finnes i vedlegg 5.

	Totalt		Kun algebra	
	7. trinn	8. trinn	7. trinn	8. trinn
Deduktive	26 %	36 %	30 %	46 %
Empriske	46 %	26 %	25 %	8 %
Ekstern ovb.	24 %	33 %	35 %	38 %
KA	4 %	5 %	10 %	8 %

Tabell 8: Prosentvis andel av forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi totalt og for temaet algebra alene

Ser man på resultatene for kun algebra, er trenden det samme. Det kan dermed slås fast at andelen deduktive forklaringer er høyere i 8. trinnbøkene sammenlignet med 7. trinnbøkene, selv om man utelater resultatene som er preget av et høyt antall empiriske forklaringer av typen ORM i temaet brøk.

5.4 Sammenligning med tidligere forskning

I kapittel 2.5 ble det presentert tidligere forskning på temaet. Både Silverman og Even (2015) og Stacey og Vincent (2009) har forsket på resonnering og bevis i lærebøker for henholdsvis 7.– og 8. trinn. Funnene i min studie viser at 67% av forklaringene var enten deduktive eller empiriske. Det vil si at hele 33% av forklaringene kom med påstander eller regler uten å gå i dybden eller forklare hvorfor. Dette er flere enn i både Stacey og Vincents (2009) studie der 17% var hverken deduktive eller empiriske og Silverman og Evens (2015) der 99% var deduktive eller empiriske. Dette kan skyldes forskjeller i lærebøkene mellom de tre landene Australia, Israel og Norge. Det kan også skyldes hvordan de ulike forskerne (meg selv inkludert) har tolket rammeverket og analysert forklaringene. En annen årsak kan være temaene som ble analysert. Silverman og Even (2009) analyserte forklaringer i temaene algebra og geometri, Stacey og Vincent analyserte forklaringer i temaene brøk, aritmetikk og geometri, og jeg analyserte som kjent forklaringer i temaene brøk og algebra.

6 Avslutning

I dette kapittelet vil jeg først oppsummere hva som har blitt gjort i denne masteravhandlingen. Deretter vil jeg oppsummere svarene på forskningsspørsmålene som ble diskutert i kapittel 5. Til slutt vil jeg presentere mine tanker om veien videre, der jeg diskuterer videre forskning, hva jeg har lært og hva jeg kan ta med meg videre i jobben som lærer etter å ha arbeidet med denne masteravhandlingen.

6.1 Tilbakeblikk på prosessen

I denne masteroppgaven har jeg undersøkt hvilke typer matematisk resonnering som brukes i norske lærebøker i matematikk. Dette ble gjort ved å gjennomføre en kvalitativ dokumentanalyse av fire lærebøker i temaene brøk og algebra. Det var utdrag fra to bøker for 7. trinn og to bøker for 8. trinn som ble analysert. Utdragene som ble analysert var forklaringer der det lå en matematisk påstand eller regel i grunn. For å kategorisere forklaringene i ulike typer anvendte jeg Stacey og Vincent (2009) sitt teoretiske rammeverk for matematisk resonnering. På samme måte som Stacey og Vincent, knyttet jeg de forskjellige typene opp mot Harel og Sowder (2007) sin oppdeling av bevis.

6.2 Svar på forskningsspørsmål

I dette delkapittelet vil jeg oppsummere svarene på forskningsspørsmålene, som ble diskutert i kapittel 5. Det ble stilt fire forskningsspørsmål:

1. Hvilke typer matematisk resonnering brukes i temaene brøk og algebra i et utvalg lærebøker i matematikk for 7. trinn og 8. trinn?
2. I hvilken grad samsvarer funnene med beskrivelsen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK20, som sier at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser?
3. Hvilke forskjeller finnes det mellom temaene brøk og algebra knyttet til matematisk resonnering?
4. Hvilke forskjeller finnes det mellom lærebøkene for 7. trinn og 8 trinn knyttet til matematisk resonnering?

Det ble funnet at lærebøkene brukte varierende typer forklaringer, noe som kan ha vært et bevisst valg fra forfatterne for å treffe flest mulig elever. Det ble funnet forklaringer av alle typene i rammeverket. 31% av forklaringene var deduktive. 36% av forklaringene var empiriske. 33% av forklaringene kom med påstander eller regler uten å gå i dybden og uten begrunne påstanden. En så stor andel forklaringer av denne typen samsvarer i liten grad med innholdet i LK20, og lærerens rolle blir desto viktigere for at målet om at elever skal forstå at matematiske regler og resultater har klare begrunnelser skal oppnås. Det var svært få forklaringer av typen DGT, som er typen forklaring som ligner mest på et matematisk bevis. Det ble diskutert hvordan dette kan henge sammen med at bevis og bevisføring tradisjonelt sett har vært noe elevene først møter på ungdomsskolen, eller mangelen på forskning på bevis i en barneskolekontekst. Under hver tredje forklaring var deduktiv, noe som kan ha en påvirkning på elevenes forståelse av bevis og bevisføring, uten at jeg kan konkludere med dette. Med kunnskapen om lærebøkenes viktige rolle i matematikkfaget i bakhodet er det viktig at lærebøkene formidler budskapet om at matematiske påstander og regler har klare begrunnelser gjennom å gi forklaringer som begrunner matematiske påstander på en systematisk og deduktiv måte. Det var flere deduktive forklaringer i 8. trinnbøkene sammenlignet med 7. trinnbøkene. Det var flere deduktive forklaringer i temaet algebra sammenlignet med brøk. Det var flere forklaringer som kom med påstander uten videre begrunnelser i temaet algebra enn i temaet brøk. Det ble funnet at det var en høy andel forklaringer av typen som refererer til autoriteter i de to mest grunnleggende deltemaene, sammenlignet med de andre. Disse deltemaene hadde også få deduktive forklaringer sammenlignet med de andre.

6.3 Videre forskning

Slik det har blitt diskutert, kan jeg ikke trekke konklusjoner om lærebøkenes påvirkning på undervisningen og elevers læring, ettersom jeg har brukt dokumentanalyse som metode. Jeg har diskutert hvordan det kan tenkes at funnene kan påvirke blant annet elevenes oppfattelse av bevis og bevisføring, uten å kunne konkludere. Derfor hadde det vært interessant å forske videre med andre forskningsmetoder for å finne ut av hvordan forklaringene i lærebøkene påvirker undervisningen, lærere og elever. Dette kunne ha blitt gjort ved hjelp av intervju av elever og lærere og observasjon i klasserommet. Det hadde også vært interessant å forske på andre matematiske tema og alderstrinn, for å få et mer helhetlig bilde av norske lærebøker i matematikk. Det ble gjort funn som viste at de mest grunnleggende deltemaene i brøk og algebra hadde en høy andel av forklaringer som refererte til autoriteter uten videre forklaring. Det hadde derfor vært interessant å forske på om dette også er tilfelle i de andre temaene. Videre ble det diskutert om dette kunne være på grunn av at innholdet var ment som repetisjon for 7.– og 8. trinnelever. På småtrinnet er ikke repetisjon veldig aktuelt, da alt er nytt for elevene. Vil man finne tilsvarende høy grad av forklaringer som refererer til autoriteter også her? Et siste aspekt som hadde vært interessant å fått svar på er hvordan forklaringene i lærebøkene har endret seg over tid. Er det slik at de nyere lærebøkene forklarer matematiske påstander i større grad enn lærebøkene som var laget i henhold til den forrige læreplanen? Det er presentert teori som sier at en endring av matematikkfaget er avhengig av en endring i lærebøkene, og det hadde derfor vært interessant å se om det faktisk har vært en endring i lærebøkene med hensyn på hvilke typer matematisk resonnering som brukes i forklaringene.

Etter denne masteravhandlingen er levert vil jeg fortsette min lærerprofesjon, nå endelig som ferdigutdannet. Gjennom å skrive denne masteravhandlingen har jeg fått et grundig innblikk i innholdet i norske lærebøker i matematikk. Ikke bare de bøkene som til slutt ble inkludert i analysen, men også i de bøkene som jeg vurderte å inkludere. Det vil gjøre det lettere for meg å navigere i de ulike læreverkene i årene som kommer. Det vil også kunne gjøre at jeg kan bidra positivt inn i det profesjonelle læringsfellesskapet på arbeidsplassen, ettersom jeg har kunnskap om de ulike læreverkene og kan gi mine meninger om hvilke læreverk som egner seg best i ulike situasjoner. Jeg har også tilegnet med horisontkunnskap i den forstand at jeg har analysert bøker for 8. trinn. Slik vet jeg mer om hva som venter elevene når jeg sender dem videre til ungdomsskolen, og kan dermed forsøke å gjøre dem bedre rustet til deres videre læring av matematikkfaget. Jeg har tilegnet meg kunnskap om bevis og bevisføring, et felt det er mangel på forskning i en barneskolekontekst. Dette gjør at jeg står bedre rustet til å gi elevene den kunnskapen og de verktøyene de trenger for å mestre denne viktige delen av matematikkfaget.

Jeg håper at min masteroppgave kan være til inspirasjon for fremtidige studenter og forskere, slik at vi får økt kunnskap om både lærebøker, matematisk resonnering, bevis og bevisføring. Jeg håper lærere som eventuelt leser denne avhandlingen vil bli bevisstgjort på hvor viktig rolle de har som formidler av matematikkfaget, og at selv om læreverkene er et viktig verktøy, er det viktig at vi som lærere er beviste på innholdet og hvordan det kan påvirke oss selv og elevene.

Referanser

Alseth, B., Arnås, A-C., Røsseland, M., Nordberg, G. (2022). *Multi 7B: Elevbok* (3. utg.). Gyldendal

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering-matematikkfaget som kasus*. Telemarksforsking.

Arnås, A-C., Røsseland, M., Nordberg, G., Alseth, B. (2022). *Multi 7A: Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S & Bretscher, N. (2010). *Values and variables. Mathematics education in high-performing countries.* Nuffield foundation.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–235). Hodder & Stoughton.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks. An analysis of the levels of difficulty*. Luleå tekniska universitet. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:991116/FULLTEXT01.pdf

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 117-151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Creswell, J. W. (2009). Research design: *qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3. utg.). Sage.

Den Norske Forleggerforening (2021). *Bokmarkedet 2021*. https://forleggerforeningen.no/wp-content/uploads/2022/06/Bransjestatistikk_2022_Web.pdf

Enge, O., & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 24 (1), 8-46.

Giangregorio, L. & Thabane, L. (2015). Pilot studies and feasibility studies for complex interventions: an introduction. I D. A. Richards & I. R. Hallberg (Red.), *Complex interventions in Health: An overview of research methods.* (s. 127−135). Routledge.

Grønmo, S. (2016). Samfunnsvitenskapelige metoder (2. utg.). Fagbokforlaget.

Gulbrandsen, J.E., Løchsen, R., Måleng, K., & Olsen, V. S. (2021). *Matematikk 7 fra Cappelen Damm: Grunnbok* (1. utg.). Cappelen Damm.

Hagesæther, P. V. (2013, 29.01). *Dette er Norges mest populære skolebøker*. https://www.aftenposten.no/norge/i/9vBQp/dette-er-norges-mest-populaere-skoleboeker

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics* *education* (s. 877-908). Kluwer Academic Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (805-842). National Council of Teachers of Mathematics.

Hattie, J. (2008). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203887332

Hjardar, E., Pedersen, J.-E., & Sidorowicz, M. (2020). *Matematikk 8 fra Cappelen Damm: Grunnbok* (1. utg.). Cappelen Damm.

Horsley, M., & Sikorová, Z. (2015). Classroom teaching and learning resources: International comparisons from TIMSS‒ A preliminary review. Orbis scholae, 8(2), 43-60. https://doi.org/10.14712/23363177.2015.65

Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective. ZDM, 45(5), 647–658. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0511-9

Jakobsson-Åhl, T. (2008). Word problems in upper secondary algebra in Sweden over the years 1960–2000. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13 (1), 7–27. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/13_1_007028_jakobsson-ahl.pdf

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 91(6), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Johnsen, E. B. (1993). *Textbooks in the Kaleidoscope. A Critical Survey of Literature and Research on Educational Texts*. Scandinavian University Press.

Kieran, C. (2004a). The core of algebra: Reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 21–33). Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_2

Kieran, C. (2004b). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. *Nordic Studies in Mathematics. Education*, 16(4), 5-44.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 83-109.

Kunnskapsdepartementet (2019a). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Kunnskapsdepartementet (2019b). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05) Om faget. Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/omfaget/kjerneelementer?lang=nob

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding* (3. utg). Routledge.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 113-120. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study.* (s. 47-70). Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_4

Opplæringslova (1998). Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M., & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 51-79. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.857802

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, 45(7), 929-943. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0534-2

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm AS.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of educational research*, 75(2), 211-246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Reasearch in Nordic and Baltic countries* (s. 495-514). Cappelen Damm Akademisk.

Silverman, B., & Even, R. (2015, February). Textbook explanations: Modes of reasoning in 7th grade Israeli mathematics textbooks. I *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 205-212).

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E., & Paiam, V. (2017). Tall og tanke 2: Matematikkundervisning på 5. til 7. trinn. Gyldendal akademisk.

Stacey, K. & Chick, H. (2004). Solving the Problem with Algebra. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study.* (s. 1-20). Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_1

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, 72(3), 271-288. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9193-1

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3168-1

Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. https://www.jstor.org/stable/30034869

Stylianides, G. J. (2009) Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Tesfamicael, S. A., Lundeby, Ø. A., Getie, B., & Soforon, O. G. B. (2022). Problem posing in mathematics education: a comparative study of textbooks in Ethiopia, South Sudan and Norway. *Bringing Nordic mathematics education into the future*, 20, 225. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1207710.pdf

Tofteberg, G. T., Tangen, J., Bråthe, L. T., Stedøy, I., & Alseth, B. (2020). *Maximum 8* (2. utg.). Gyldendal.

UDIR (2020a, 03. september). *Hva er nytt i matematikk?.* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

UDIR (2020b, 18. november). *Hva er kjerneelementer?.* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. I Coxford, A.F. & Schulte, A. P. (Red.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook*. (s. 7-13). National Council of Teachers of Mathematics

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. Acta Didactica Norden, 14(3). https://doi.org/10.5617/adno.8195

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Science & Business Media.

Van Dormolen, J. (1986). Textual Analysis. I Christiansen, B., Howson, A.G., Otte, M. (Red.) Perspectives on Mathematics Education. Mathematics Education Library, vol 2. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3_4

Vik, M. G. (2021, 22. november). Nye læreplaner, gamle læremidler. Utdanningsforbundet. https://www.utdanningsforbundet.no/nyheter/2021/nye-lareplaner-gamle-laremidler/

Vedlegg

Vedlagt ligger vedlegg 1-8.

Vedlegg 1

Fordeling av typer resonnering i de forskjellige lærebøkene i brøk og algebra. Dette er tabellen jeg fylte inn i under analysen, og er legger grunnlaget for alle resultatene som ble presentert.

	DGT				DST				DM				ORM				ED				RA				KA			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
Addisjon og subtraksjon med brøk																												
Addisjon brøk med lik nevner													X	X	X													
Subtraksjon brøk med lik nevner															X						X	X						
Addisjon blandede tall												X																
Subtraksjon blandede tall												X																
Addisjon og subtraksjon brøk med ulik nevner												X		X	2X						X			X				
Multiplikasjon med brøk																												
Multiplikasjon heltall og brøk															X									X				
Multiplikasjon brøk	X									X		X			X					X								
Multiplikasjon blandet tall og brøk																X												
Divisjon med brøk																												
Divisjon heltall og brøk											X					3X												
Divisjon av brøk	X									X												X						
Annet																												
Utviding brøk								X					X	X	X								X					
Forkorting brøk													X	X	X				X					X				
Brøk til heltall															X													
Likeverdige brøker													X	X	X													
Fellesnevner																					X							

	DGT				DST				DM				ORM				ED				RA				KA			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
Regnerekkefølge sammensatte uttrykk:																												
Multiplikasjon og divisjon					X														2X	X	X	X		X				
Potenser																					X	X						
Parenteser															X						X	X		2X				
Regneregler																												
Addisjon og subtraksjon					X	X																						
Distributiv lov					X			X				X						X										
Assosiativ lov								X												X								
Mult. og div. av algebraiske uttrykk																					X	X						
Potenser					X																							
Likninger																												
Likevekt generelt																							X		X	X		X
Likevekt addisjon og subtraksjon					X					X		X											X					
Likevekt divisjon					X									X									X					
Likevekt multiplikasjon					2X																	X	X					
Mult. med f.n. i likninger med to brøker					X																							
Ulikheter																												X
Motsatte regneoperasjoner																												
Addisjon og subtraksjon								X																				
Multiplikasjon og divisjon								X																				

Vedlegg 2

Prosentvis andel av typer resonnering i brøk og algebra. Tabellene er datagrunnlag for figur 10, figur 11 og figur 12.

Brøk					
	Bok A	Bok B	Bok C	Bok D	Totalt av brøk
DGT	22 %	0 %	0 %	22 %	5 %
DST	0 %	0 %	0 %	0 %	2 %
DM	0 %	22 %	8 %	0 %	16 %
ORM	44 %	56 %	77 %	44 %	52 %
ED	0 %	0 %	8 %	0 %	5 %
RA	33 %	22 %	8 %	33 %	20 %
KA	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

	Bok A	Bok B	Bok C	Bok D	Totalt av algebra	Totalt av alt
DGT	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	2 %
DST	64 %	10 %	0 %	31 %	32 %	17 %
DM	0 %	10 %	0 %	15 %	7 %	11 %
ORM	0 %	10 %	14 %	0 %	5 %	28 %
ED	0 %	10 %	29 %	15 %	11 %	8 %
RA	29 %	50 %	57 %	23 %	36 %	28 %
KA	7 %	10 %	0 %	15 %	9 %	5 %

Vedlegg 3

Antall forekomster og prosentvis andel av typer resonnering i 7. – og 8. trinnbøker. Tabellene er datagrunnlag for figur 13.

	7. trinn	8. trinn
DGT	0	2
DST	5	10
DM	7	3
ORM	15	10
ED	6	1
RA	11	14
KA	2	2

	7. trinn	8. trinn
DGT	0 %	5 %
DST	11 %	24 %
DM	15 %	7 %
ORM	33 %	24 %
ED	13 %	2 %
RA	24 %	33 %
KA	4 %	5 %

Vedlegg 4

Antall forekomster og prosentvis andel forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi for 7. trinnbøker, 8. trinnbøker, brøk, algebra og totalt. Tabellene er datagrunnlag for figur 14.

	7. trinn	8. trinn	Brøk	Algebra	Totalt
Deduksjon	12	15	10	17	27
Empirisk	21	11	25	7	32
Ekstern ovb.	11	14	9	16	25
KA	2	2	0	4	4

	7. trinn	8. trinn	Brøk	Algebra	Totalt
Deduksjon	26 %	36 %	23 %	39 %	31 %
Empirisk	46 %	26 %	57 %	16 %	36 %
Ekstern ovb.	24 %	33 %	20 %	36 %	28 %
KA	4 %	5 %	0 %	9 %	5 %

Vedlegg 5

Antall forekomster og prosentvis andel forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi for 7. trinnbøker og 8. trinnbøker kun i temaet algebra. Disse resultatene ble diskutert i diskusjonskapittelet og er grunnlaget for tabell 8.

KUN ALGEBRA	Antall		Prosent	
	7. trinn	8. trinn	7. trinn	8. trinn
Deduktive	6	11	30 %	46 %
Empriske	5	2	25 %	8 %
Ekstern ovb.	7	9	35 %	38 %
KA	2	2	10 %	8 %

Vedlegg 6

Antall forekomster av typer resonnering i de forskjellige deltemaene i brøk og algebra. Er grunnlaget for figur 15 ogfigur 16.

	DGT	DST	DM	ORM	ED	RA	KA
Addisjon og subtraksjon	0	0	3	7	0	4	0
Multiplikasjon	1	0	2	3	1	1	0
Divisjon	1	0	2	3	0	1	0
Annet	0	1	0	10	1	3	0

	DGT	DST	DM	ORM	ED	RA	KA
Regnerekkefølge sammensatte uttrykk:	0	1	0	1	3	9	0
Regneregler	0	6	1	0	2	2	0
Likninger	0	5	2	1	0	5	4
Motsatte regneoperasjoner	0	2	0	0	0	0	0

Vedlegg 7

Prosentvis andel av typer resonnering innad i de forskjellige deltemaene i temaet brøk og innad i temaet algebra. Er grunnlaget for figur 15 ogfigur 16.

	DGT	DST	DM	ORM	ED	RA	KA
Addisjon og subtraksjon	0 %	0 %	21 %	50 %	0 %	29 %	0 %
Multiplikasjon	13 %	0 %	25 %	38 %	13 %	13 %	0 %
Divisjon	14 %	0 %	29 %	43 %	0 %	14 %	0 %
Annet	0 %	7 %	0 %	67 %	7 %	20 %	0 %

	DGT	DST	DM	ORM	ED	RA	KA
Regnerekkefølge sammensatte uttrykk	0 %	7 %	0 %	7 %	21 %	64 %	0 %
Regneregler	0 %	55 %	9 %	0 %	18 %	18 %	0 %
Likninger	0 %	29 %	12 %	6 %	0 %	29 %	24 %
Motsatte regneoperasjoner	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Vedlegg 8

Prosentvis andel av forklaringer som er deduktive, empiriske, bruker ekstern overbevisning og kvalitativ analogi innad i de ulike deltemaene i temaet brøk og innad i de ulike deltemaene i temaet algebra. Er grunnlaget for figur 17 og figur 18.

	Addisjon og subtraksjon	Multiplikasjon	Divisjon	Annet
Deduktive	21 %	38 %	43 %	7 %
Empriske	50 %	50 %	43 %	73 %
Ekstern ovb.	29 %	13 %	14 %	20 %
KA	0 %	0 %	0 %	0 %

	Regnerekkefølge sammensatte uttrykk	Regneregler	Likninger	Motsatte regneoperasjoner
Deduktive	7 %	64 %	41 %	100 %
Empriske	29 %	18 %	6 %	0 %
Ekstern ovb.	64 %	18 %	29 %	0 %
KA	0 %	0 %	24 %	0 %

NTNU

Kunnskap for en bedre verden