Margrethe Hollund og Oda Hovda Ottesen

Argumentasjon og representasjon

En kvalitativ studie av sammenhengen mellom elevers bruk av matematiske representasjoner og type argumentasjon

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk (5-10)
Veileder: Heidi Dahl
Mai 2023

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Margrethe Hollund og Oda Hovda Ottesen

Argumentasjon og representasjon

En kvalitativ studie av sammenhengen mellom elevers bruk av matematiske representasjoner og type argumentasjon

Masteroppgave i Matematikkdidaktikk (5-10)
Veileder: Heidi Dahl
Mai 2023

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

SAMMENDRAG

I denne studien undersøkes elevers bruk av matematiske representasjoner når de skal argumentere for gyldigheten til to matematiske påstander. Formålet med studien var å se om det fantes en sammenheng mellom måten elevene tok i bruk representasjonen, og hvordan de argumenterte for en påstand. I dette arbeidet ønsket vi å studere om representasjonen fungerte som et nyttig verktøy i elevenes argumentasjon. Med denne studien ønsket vi å bidra til forskningsfeltet med å se på hva som kjennetegner elevenes argumentasjon, samt hva som kan være viktige faktorer i arbeidet deres. Studiens forskningsspørsmål er: *Hvilke sammenhenger kan identifiseres mellom elevenes bruk av matematiske representasjoner og elevenes type argumentasjon?*

Studien er basert på kvalitative metoder gjennom observasjon av en undervisningsøkt på 7. trinn, hvor elevene skulle argumentere for gyldigheten til to matematiske påstander. Vi observerte 14 elever, som var fordelt på fire grupper. Datamaterialet ble samlet inn av forskningsprosjektet ProPrimEd. Materialet består av transkripsjoner fra tre av gruppenes arbeid//diskusjoner, transkripsjoner av oppstart og oppsummering av timen, samt elevenes skriftlige besvarelser. Analysen av datamaterialet var deduktiv, og elevens argumentasjon ble kategorisert etter G. Stylianides (2008) sine argumentasjonstyper. De matematiske representasjonene ble sortert ut fra Duval (2006) sitt semiotiske representasjonssystem. I analysen ble elevenes besvarelser og argumentasjon kategorisert med utgangspunkt i representasjonstypene elevene brukte.

Resultatene fra studien viser at det kan finnes en sammenheng mellom hvordan elevene tar i bruk representasjoner, og hvilket argument de presenterer. Studien viser at de fleste elevene argumenterer empirisk for å bekrefte påstandens gyldighet, men at aktiv bruk av representasjonene kan øke potensialet i argumentene. Vi fant også at elever som tok utgangspunkt i strukturen i påstandene da de utformet representasjoner, kom nærmere et generisk eksempel enn elever som ikke gjorde dette. I tillegg er et viktig funn i studien at elever med støtte og veiledning fra lærer, og gjennom diskusjon med hverandre, kom frem til et gyldig bevis.

ABSTRACT

This study examines how students use mathematical representations when they argue for the validity of two mathematical statements. The purpose of the study was to see if there was a connection between the way students used the representations, and how they argued for å claim. We wanted to examine whether the representations functioned as a useful tool in the students' argumentation. With this study, we wanted to contribute to the research field by looking at what characterizes the students' argumentation, as well as what may be important factors in their work. The research question of this study is: *What connections can be identified between the students' use of mathematical representations and the students' type of argumentation?*

The study is based on qualitative methods through observation of a teaching session in the 7th grade, where the students were supposed to argue for the validity of two mathematical statements. We observed 14 students who were divided into four groups. The data material was collected by the research project ProPrimEd and consists of transcriptions from three of the groups' discussions, transcriptions from the joint start and end of the lesson, as well as the students' written answers. The analysis of the data material was deductive, and the student's argumentation was categorized according to G. Stylianides' (2008) argumentation types. The mathematical representations were sorted according to Duval's (2006) semiotic representation system. In the analysis, the students' answers and arguments were categorized based on the types of representation they used.

The results of the study show that there can be a connection between how students use representations and the arguments they present. The study shows that most students argue empirically to confirm the validity of the claim, but that active use of the representations can increase the potential of the arguments. In addition, we found that students who based the representation on the structure of the claim, came closer to a generic example, than students who did not take the structure into consideration. An important finding in this study is that discussions with other students, and support and guidance from a teacher helped some students produce a valid proof.

FORORD

Denne masteroppgaven markerer slutten på vår fem år lange grunnskolelærerutdanning. Det gjør oss både vemodig og stolt. Studietiden har gitt oss mange gode opplevelser, erfaringer, og vennskap som vi vil ta med oss videre i livet.

I løpet av studietiden har vi fått en interesse for både argumentasjon i matematikk og matematiske representasjoner. Interessen for representasjoner har oppstått gjennom egne erfaringer i praksis på studiet. Der har vi erfart at ulike representasjonsformer kan være et nyttig verktøy i problemløsning, men at elevenes bruk av representasjoner ofte er begrenset. Ønske om å lære mer om argumentasjon oppstod da det var tema i et av emnene på studiet. Der fikk vi et innblikk i hvor viktig arbeid med argumentasjon kan være, samtidig som vi forstod at det også er et tema vi tror kan være utfordrende å innlemme i matematikkundervisningen. Denne studien har gitt oss muligheten til å fordype oss innen to tema vi syns er både viktig og spennende.

Arbeidet med masteroppgaven har vært preget av både opptur og nedturer. I den sammenheng ønsker vi å takke noen av de som har støttet oss underveis.

Takk til vår veileder Heidi Dahl. Du har vært en viktig del av hele denne prosessen, med gode veiledningsmøter preget av engasjement og konstruktive tilbakemeldinger. Denne oppgaven hadde ikke blitt det samme uten dine kloke innspill. Takk for at du alltid har vært tilgjengelig for spørsmål og veiledning. Det har vi satt stor pris på!

Takk til våre nære og kjære for god støtte. Spesielt denne våren, men også gjennom hele studietiden. Det har vært godt å ha en stor heiagjeng som har vært både interessert og tidvis til god hjelp, både i studiesammenheng og ellers i livet. Den viktigste og største takken går til hverandre, for et godt samarbeid! Samarbeidet har gjort masterskrivingen mer motiverende, lærerik og artig. Å skrive denne masteroppgaven sammen var et godt valg!

Trondheim, mai 2023
Margrethe Hollund og Oda Hovda Ottesen

INNHOLDSFORTEGNELSE

Figurer

Tabeller

1 INNLEDNING

Tema for denne masteroppgaven er argumentasjon og bevis i skolen. Argumentasjon handler om å kunne begrunne og forklare fremgangsmåter (Kunnskapsdepartementet, 2019), og blir av flere forskere innenfor matematikkdidaktikk ansett som grunnleggende i skolematematikken (Ball & Bass, 2003; A. Stylianides, 2007). Det har de siste årene blitt et økt fokus på argumentasjon og bevis i skolen internasjonalt (Valenta & Enge, 2020), en tendens vi også ser i den norske læreplanen. Ved innføringen av Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20) ble *Resonnering og argumentasjon* fastsatt som et kjerneelement i matematikkfaget. Argumentasjon skal nå inkluderes på alle trinn og i alle emner, og blir ansett som sentralt for elevenes mestring av matematikkfaget. Innføringen av kjerneelementet gjør det tydelig at argumentasjon og bevis har inntatt en sentral og fundamental plass i skolematematikken. Resonnering, argumentasjon og bevis er begreper som ofte settes i sammenheng, men det finnes et vidt spekter av hvordan matematikere og forskere definerer begrepene og tar dem i bruk (Jeannotte & Kieran, 2017). I denne studien har vi sett på argumentasjon og bevis i sammenheng. Det gjør vi med utgangspunkt i A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, hvor argumentet regnes som et gyldig bevis dersom det oppfyller noen gitte krav. I teorikapitlet vil vi grundigere gjøre rede for hvordan begrepene argumentasjon og bevis blir brukt i denne studien.

Selv om det er stor enighet blant forskere om at argumentasjon og bevis er essensielt i skolematematikken, trekker forskere frem ulike årsaker til hvorfor dette arbeidet er viktig. Noen viser til at det er avgjørende for elevenes matematiske forståelse (se f.eks. Ball & Bass, 2003; A. Stylianides, 2016), og at det legger til rette for at elevene er aktive deltakere i egen læring (A. Stylianides, 2016). Nonukawa (2010) argumenterer for at arbeid med bevis legger vekt på utforsking og forståelse, noe som er positivt med tanke på å se matematiske sammenhenger. Andre forskere viser til matematikkens natur, og at bevis er sentralt innenfor matematikk som fagfelt (Ball & Bass, 2003). Selv om arbeid med bevis er anerkjent som en sentral del av skolematematikken, viser flere studier til at lærere og elever opplever arbeidet med bevisaktiviteter som utfordrende (Balacheff, 1988; Healy & Hoyles, 2000; A. Stylianides, 2007; G. Stylianides, 2008). Det kan skyldes en for sen introduksjon av argumentasjon i matematikkundervisningen, og for lite vektlegging av bevisaktiviteter i opplæringen (A. Stylianides, 2016). Stylianides et al. (2013) peker på lærernes manglende forståelse og kompetanse innenfor resonnering og argumentasjon som en mulig årsak til utfordringene. Begrepene defineres i tillegg svært ulikt (Jeannotte & Kieran, 2017), noe som kan gjøre det utfordrende å vite hvilken tilnærming en skal ha til temaet.

I A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, finnes to sentrale kriterier: argumentasjonsmåten må være gyldig og den skal forekomme med en egnet representasjonsmåte. I denne studien ønsker vi å se nærmere på sammenhengen mellom disse to aspektene i elevenes argumentasjon. Representasjoner brukes til å fremstille matematiske objekter og konsepter, i tillegg til å uttrykke tankerekker (Duval, 2006). Stylianou (2013) fant i sin forskning at elevers bruk av matematiske representasjoner kan ha en innvirkning på elevenes argumentasjon. Bruken av representasjoner kan også skape en dypere forståelse for matematiske konsepter, i tillegg kan de påvirke hvordan elever former generalisering og rettferdiggjør eget arbeid (Greeno & Hall, 1997). På denne måten kan de matematiske representasjonene påvirke utviklingen av argumenter (Stylianou, 2013). I arbeid med oppgaver kan representasjonene fungere som verktøy for å forstå og utforske problemer, eller som kommunikasjonsverktøy for å beskrive og presentere fremgangsmåter og løsninger (Stylianou, 2011).

Vi vet at argumentasjon og bevis tidligere er behandlet som en isolert prosess i skolematematikken (G. Stylianides, 2008). Dette problematiseres da elevene får en begrenset forståelse, kun tilknyttet enkelte tema i matematikken. Endringene i læreplanverket, som inkluderer et økt fokus på argumentasjon, vil kreve en endring i skolens matematikkundervisning. Læreplanen legger noen føringer for hva arbeid med argumentasjon og bevis skal inkludere. Samtidig vet vi at det tradisjonelt finnes store variasjoner i forståelsen av hva dette arbeidet innebærer (Jeannotte & Kieran, 2017; A. Stylianides, 2007). Det er gjort en del forskning knyttet til arbeid med argumentasjon og bevis i skolen, men det finnes fremdeles lite forskning knyttet til argumentasjon på mellomtrinnet (A. Stylianides, 2016). Mer forskning på denne aldersgruppen kan bidra med mer kunnskap knyttet til hvordan elever argumenterer, hva som er utfordringer innen temaet, og hvorfor både lærere og elever opplever arbeid med argumentasjon og bevis som utfordrende. Det finnes i tillegg begrenset forskning på hvorvidt representasjoner kan brukes som verktøy i elevenes argumentasjon, og om bruken av representasjoner kan påvirke argumentasjonen (Stylianou, 2013). På bakgrunn av den manglende forskningen, samt usikkerhet blant elever og lærere knyttet til arbeid med argumentasjon, er forskningsspørsmålet vi ønsker å besvare i denne oppgaven: *Hvilke sammenhenger kan identifiseres mellom elevenes bruk av matematiske representasjoner og elevenes type argumentasjon?* Med sammenhenger, mener vi om elevenes bruk av ulike representasjonsformer vil kunne være av betydning for hvilken argumentasjonstype de presenterer.

For å svare på problemstillingen har vi sett på og analysert en undervisningstime i matematikk. Vi har studert 14 elever på 7. trinn som argumenterte for to matematiske påstander; *er summen av tre påfølgende tall aldri, noen ganger eller alltid delelig med tre*, og *er summen av fire påfølgende tall aldri, noen ganger eller alltid delelig med fire*. Innsamlingen av datamaterialet ble gjennomført som en del av et større forskningsprosjekt av ProPrimEd, en forskningsgruppe ved NTNU. I vår oppgave benyttet vi oss av video og transkripsjoner fra undervisningen, i tillegg til elevenes skriftlige besvarelser.

Først vil vi presentere det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for oppgaven vår. Vi starter med A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, et argument som må oppfylle tre krav. Det finnes mange oppfatninger og ulike definisjoner av bevis i skolematematikken. Vi argumenterer for hvorfor vi har valgt å ta i bruk A. Stylianides (2007) sin definisjon for vår oppgave. Videre vil vi beskrive G. Stylianides (2008) sitt analytiske rammeverk. Her fokuserer vi hovedsakelig på de fire argumentasjonstypene han presenterer. A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis ligger til grunn for hvordan vi har tolket G. Stylianides (2008) sitt rammeverk. I denne studien ønsket vi å se på hvordan noen elever bruker matematiske representasjoner når de argumenterer. For å undersøke forskningsspørsmålet vårt har vi tatt i bruk en kvalitativ forskningsmetode, i form av observasjon. I analysekapittelet har vi kategorisert og analysert elevenes argumenter i lys av G. Stylianides (2008) sine argumentasjonstyper, og Duval (2006) sin kategorisering av representasjonsmåter. Videre har vi sett på noen sammenhenger mellom bruk av representasjoner og hvilke typer argument som ble presentert. I diskusjonskapittelet har vi diskutert våre funn opp mot tidligere forskning. I tillegg ser vi på hvilke didaktiske implikasjoner våre funn har, og hva det eventuelt kan være interessant å forske videre på.

2 TEORI

I denne studien skal vi undersøke hvordan noen elever på 7. trinn bruker matematiske representasjoner når de argumenterer i matematikk, og om dette påvirker deres type argumentasjon. I teorikapittelet vil vi vise til hvordan argumentasjon og bevis er omtalt og definert tidligere, og argumentere for hvorfor A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis som et argument er en god tilnærming for vår studie. Videre vil vi presentere G. Stylianides (2008) sitt rammeverk for resonnering og bevis. Duval (2006) har satt opp en klassifisering av fire representasjonssystemer, som vi har tatt i bruk for å kategorisere og analysere elevenes representasjonsbruk. Tidligere forskning som er relevant for vår studie vil bli presentert mot slutten av dette kapittelet.

2.1 Studiens læringsperspektiv

Det finnes flere perspektiver på læring, og hvordan en best tilegner seg kunnskap. I denne studien plasserer vi oss innenfor et sosiokulturelt læringsperspektiv, hvor samhandling med andre er sentralt. Læring i sosiokulturell teori skjer gjennom interaksjoner mellom mennesker, miljøet en befinner seg i og ved bruk av redskaper, ikke primært gjennom individuelle prosesser (Vygotsky, 1978). Sosial aktivitet og samarbeid blir sett på som grunnleggende for læringsprosessen, og klassefellesskapet vil ha stor innvirkning på elevenes læring. I de sosiale prosessene blir det tydelig at språket er viktig for sosiokulturell læringsteori. Kommunikasjon skjer gjennom ulike former for språk, blant annet muntlig, skriftlig, symboler og figurer. Gjennom en slik språklig interaksjon med andre, kan indre utviklingsprosesser hos individet starte, og læring skje (Säljö, 2016).

Det sosiokulturelle perspektivet på læring passer godt sammen med vår studie. Vi går inn i et klassefellesskap for å studere hvordan elevene argumenterer. Dette gjør vi gjennom observasjon av elevenes gruppearbeid, og det er gjennom samhandling vi får et innblikk i elevenes tankerekker knyttet til argumentasjonen deres. I likhet med den sosiokulturelle teorien er også A. Stylianides (2007) i sin definisjon av bevis, opptatt av hvordan en gjennom språket formidler et argument. I studien ønsket vi i tillegg å undersøke hvordan elevene benytter representasjoner i arbeidet sitt. Vi tar utgangspunkt i Duval (2006) sitt representasjonssystem hvor både muntlig og skriftlig språk, i tillegg til figurer, tegninger og symboler blir ansett som representasjoner. En ser her likheter mellom Duval (2006) sin representasjonsteori og det sosiokulturelle perspektivet på språk.

2.2 Argumentasjon og bevis

Argumentasjon i matematikk handler om å forklare og begrunne fremgangsmåter og løsninger, og samtidig vise til at disse er gyldige (Kunnskapsdepartementet, 2019). Jeannotte og Kieran (2017) beskriver argumentasjon som en del av en resonneringsprosess, hvor det å argumentere handler om å avgjøre om en matematisk påstand er gyldig eller ikke. Det er ikke all argumentasjon som er matematisk gyldig. Argumentene som er matematisk gyldige kommer vi til å omtale som bevis. Det finnes ingen entydig oppfatning eller definisjon på hva et bevis er. Flere har definert begrepet bevis, men med noen variasjoner (se f.eks. Balacheff, 1988; Jeannotte & Kieran, 2017; Reid, 2005; A. Stylianides, 2007). Noe av det forskere er uenige om, og som skiller rammeverkene fra hverandre, er hva som kvalifiserer til et gyldig bevis. Forskere har likevel en felles forståelse om at bevis burde være en sentral del av matematikken, og at elever i skolen burde bli introdusert for bevis-aktiviteter fra tidlig alder (Healy & Hoyles, 2000; Kilpatrick et al., 2001; G. Stylianides, 2008). Det å utarbeide et matematisk bevis anses som fundamentalt for å tilegne seg, utvikle og kommunisere matematisk kunnskap (G. Stylianides, 2008). Når bevisaktiviteter ikke innføres før på høyere trinn, kan det oppleves fremmed for elevene, heller enn som en naturlig del av matematikkopplæringen (A. Stylianides, 2016).

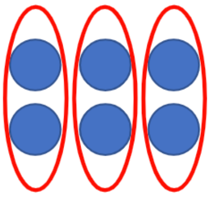
2.2.1 Definisjon av bevis

For vår masteroppgave, har vi valgt å benytte A. Stylianides (2007) sin definisjon av hva et bevis er. Målet med definisjonen er å konseptualisere meningen av bevis i matematikkundervisning i grunnskolen. Det er viktig at forståelsen av bevis, også skulle gi mening helt ned til småtrinnene. I denne sammenhengen presenterte han en definisjon av bevis, som er egnet for en klasseromskontekst. A. Stylianides (2007) definerer bevis som et matematisk argument, en sammenhengende rekke av formodninger for eller mot en påstand. A. Stylianides (2007) beskriver argumentasjonsrekken som en gyldig argumentasjon, men vi omtaler det som et gyldig bevis. For at argumentet skal telle som et gyldig bevis, må det oppfylle tre kriterier (A. Stylianides, 2007, s. 291, vår oversettelse):

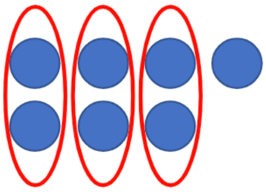
1. Argumentet benytter *et sett med aksepterte utsagn*
2. Argumentet benytter *argumentasjonsmåter* som er godkjent i klassefellesskapet
3. Det kommuniseres ved bruk av *representasjonsmåter for argumentasjon* som er godkjent i klassefellesskapet.

Det første kriteriet omtales som *et sett med aksepterte utsagn*. Det handler om at de matematiske prosessene kun kan inneholde utsagn som er aksepterte sannheter og kjente fenomen i klassefellesskapet. Det betyr at utsagnene kan brukes uten videre forklaring. Aksepterte sannheter kan blant annet være definisjoner og teoremer. Eksempelvis at en definerer partall som; tall som kan deles i par, uten at man sitter igjen med noe til overs. Oddetall kan defineres som; tall som ikke kan deles i par, da det alltid vil være en til overs. Dette er illustrert i *Figur 1* og *Figur 2*.

Figur 1:
Illustrasjon av partall.



Figur 2:
Illustrasjon av oddetall.



Et viktig punkt med A. Stylianides (2007) sin definisjon er at aksepterte sannheter vil variere mellom klasser og trinn. I noen tilfeller vil teoremer aksepteres som aksiomer på lavere trinn. Teoremet omtales da som et lokalt aksiom (A. Stylianides, 2007). At vinkelsummen i en trekant alltid er $180°$, kan være et eksempel på et lokalt aksiom i en klasse på mellomtrinnet. Når elevene møter det igjen på senere årstrinn, kreves det gjerne at de kan argumentere for teoremet.

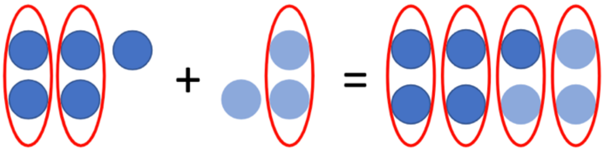
Det andre kriteriet i A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, er knyttet til argumentasjonsmåter. Kriteriet handler om at måten argumentet legges frem på må være gyldig og på en måte som er kjent og forståelig for deltakerne i klassefellesskapet. Argumentet er i tillegg godkjent som bevis dersom argumentasjonsmåten er tilgjengelig med støtte fra en lærer. Hva som vil være en gyldig og egnet argumentasjonsmåte vil variere ut fra hva slags påstand en skal argumentere for, og om den stemmer eller ikke. Argumentasjonsmåten vil variere ut fra om en skal argumentere for et konkret tilfelle, et endelig antall tilfeller, eller uendelig antall tilfeller. Noen ulike former for argumentasjonsmåter kan være å benytte definisjoner til å trekke generelle slutninger, eller gjennom konstruksjon av et moteksempel. En kan fremstille et moteksempel for å vise at påstanden «alle tall i seksgangen er nabotall med et primtall» ikke er sann. Dersom en starter på $6 \cdot 0$ og arbeider seg oppover, vil denne påstanden stemme langt på vei. Når en kommer til $6 \cdot 20 = 120$, stopper det derimot. Nabotallene 119 og 121 er ikke primtall, da $7 \cdot 17 = 119$ og $11 \cdot 11 = 121$. En har her vist et eksempel hvor hypotesen ikke stemmer, og en kan konkludere med at hypotesen ikke er sann. Dersom denne argumentasjonen skal være gyldig innenfor et klassefellesskap, forutsetter det at elevene er kjent med multiplikasjon og definisjonen av primtall. I tillegg må elevene godta moteksempel som argumentasjonsmåte for hvorfor noe ikke alltid stemmer.

Det tredje kriteriet er knyttet til *representasjonsmåter for argumentasjon*. Argumentet skal kommuniseres på en måte som er passende og kjent for klassefellesskapet. Det forutsetter at argumentasjonsmåten og tilhørende representasjoner er kjente. Dette inkluderer språket som blir brukt, i tillegg til representasjoner i form av diagrammer, bilder, algebraisk notasjon og tabeller. I likhet med de andre kriteriene vil dette variere mellom klasser og trinn (A. Stylianides, 2007). Eksempelvis kan algebraisk notasjon benyttes på ungdomsskolen, mens en på lavere trinn må finne andre måter for å representere argumentet. Dette kan illustreres med påstanden: «Summen av to oddetall er alltid et partall». På ungdomsskolen kan en med utgangspunkt i definisjonen om at oddetall ikke kan deles på to, skrive det som $2k + 1$. Regnestykket oddetall + oddetall, kan da skrives som:

$$(2k + 1) + (2m + 1) = 2k + 2m + 2 = 2\,(k + m + 1)$$

Faktoriseringen viser at summen er delelig med to, noe som (med utgangspunkt i definisjonen av partall) bekrefter at det er et partall. På lavere trinn vil ikke algebraisk notasjon være tilgjengelig for elevene. En kan da gå tilbake til definisjonene og de tilhørende illustrasjonene av partall og oddetall, i figur 1 og 2, når en argumenterer for påstanden. I figur 3 viser vi til ett eksempel og tar utgangspunkt i de to oddetallene 3 og 5, for å illustrere regnestykket $5 + 3 = 8$. Illustrasjonen viser at de to «til overs» i oddetallene sammen danner et par, og at summen dermed er et partall. I illustrasjonen i figur 3, kommer de matematiske strukturene ved partall og oddetall tydelig frem, samtidig som representasjonen er tilpasset elever på mellomtrinnet.

Figur 3:
Illustrasjon av oddetall + oddetall = partall.



I tabell 1 presenterer vi en oversikt med eksempler for de tre kriteriene i A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis.

Tabell 1:
Eksempler på de tre komponentene i et gyldig argument (A. Stylianides, 2007, s. 291-292, vår oversettelse).

Komponent i argument	**Eksempler**
Sett med aksepterte utsagn	Definisjoner, teoremer, aksiomer, etc.
Argumentasjonsmåter	Generelle slutninger basert på definisjoner, konstruksjon av moteksempel, systematisk gjennomgang av alle tilfeller, resonnement som ender i selvmotsigelse, etc.
Representasjonsmåter for argumentasjon	Språklige (muntlig og skriftlig), fysisk, tabeller, diagrammer, symbolsk/algebraisk, etc.

A. Stylianides (2007) trekker frem et viktig poeng knyttet til sin definisjon, og hva han legger i begrepet «kjent innenfor klassefellesskapet». Det at noe er kjent i fellesskapet, trenger ikke bety at det må være kjent kunnskap for alle elevene i klassen. Det betyr at det blir brukt i klasserommet og undervisning uten videre forklaringer. Dette kan innebære begreper, notasjoner og representasjoner som har blitt undervist om tidligere, og ligger innenfor elevenes kognitive rekkevidde. Klassefellesskapet består i hovedsak av elevene.

Vi mener A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis er en nyttig definisjon å benytte i skolesammenheng. Kravene i definisjonen, og det å omtale bevis som et argument, stemmer overens med hvordan bevis og argumentasjon omtales i den norske læreplanen. Argumenter handler ifølge læreplanen om å begrunne fremgangsmåter, resonnementer og løsninger. I tillegg skal en bevise at argumentene er gyldige (Kunnskapsdepartementet, 2019). I kravene til gyldig argumentasjon er A. Stylianides (2007) opptatt av resonnementer og argumentasjonsrekker, og at fremgangsmåten skal være matematisk korrekt. Dersom argumentasjonen oppfyller kravene for gyldig argumentasjon, anses argumentasjonen som et bevis. A. Stylianides (2007) trekker selv frem fire karakteristikker ved definisjonen som gjør at den egner seg for bruk i skolematematikk. Karakteristikkene viser til at en med denne definisjonen (1) anser matematikk både som en disiplin, og elevene som matematiske elever. Det kreves at matematikken som utøves skal være matematisk korrekt, og tilpasset deltakerne; (2) en konsekvent betydning av bevis, som passer for alle trinn og er gjennomgående i opplæringen. Definisjonen legger opp til at viktige matematiske prinsipper bevares, samtidig som en hele tiden kan utvikle og justere argumentasjonen til det gitte klassefellesskapet; (3) forhindrer at empiriske argument blir ansett som bevis; (4) støtter analyser av undervisning relatert til bevis, og hvilken rolle læreren har som veileder i bevisaktiviteter. Ved å bruke de tre kravene til bevis, kan lærere identifisere og vurdere elevenes argumentasjon

2.3 G. Stylianides sitt rammeverk om resonnering og bevis

G. Stylianides (2008) utviklet det analytiske rammeverket etter at lærere og elever hadde uttrykt at de opplevde utfordringer i arbeid med bevis i skolen. Han ønsket et rammeverk som kunne fungere som et verktøy for å utføre analyser av elevers arbeid, med fokus på resonnering og bevis, og på denne måten bidra til å innhente kunnskap om bevisarbeid i skolen. Vi valgte å ta utgangspunkt i deler av dette rammeverket da vi undersøkte hvordan elever på 7. trinn argumenterte for en matematisk påstand.

***Tabell 2**:*
Analytisk rammeverk (G. Stylianides, 2008, s. 10, vår oversettelse).

<table>
<tr><th colspan="5">Resonnering og Bevis</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Matematisk komponent</td><td colspan="2">Generalisering</td><td colspan="2">Argumentasjon</td></tr>
<tr><td>Identifisering av mønster</td><td>Utforme en generell hypotese</td><td>Fremskaffe bevis</td><td>Fremskaffe et ugyldig bevis</td></tr>
<tr><td>- plausible mønster
- bestemte mønster</td><td>hypotese</td><td>- generisk eksempel
- demonstrasjon</td><td>- empirisk argument
- redegjørelse</td></tr>
<tr><td>Psykologisk komponent</td><td colspan="4">Hvilken oppfatning eleven har om naturens matematiske mønster/hypotese/bevis/ugyldig bevis?</td></tr>
<tr><td>Pedagogisk komponent</td><td colspan="4">Hvordan elevenes oppfatning av mønster/ hypotese/bevis/ugyldig bevis sammenliknet med matematikkens natur?
Hvordan kan naturens matematiske mønster/ hypotese/bevis/ugyldig bevis synliggjøres for elevene?</td></tr>
</table>

Det analytiske rammeverket som vi ser i tabell 2, er delt inn i tre komponenter, *den matematiske, den psykologiske* og *den pedagogiske*. *Den psykologiske komponenten* handler om hvilken oppfatning eleven har av matematikk og eget arbeid. Innenfor denne komponenten studeres elevens evne til å vurdere sine egne hypoteser og bevis som gyldige eller ikke (G. Stylianides, 2008). Elevene kan anse sitt eget argument som et gyldig bevis, selv om det fra en matematikers standpunkt kun er et empirisk eksempel, et ugyldig bevis. *Den pedagogiske komponenten* knytter sammen den matematiske og den psykologiske komponenten. Den tar hensyn til hvordan elevene oppfatter de matematiske komponentene sammenliknet med matematikkens natur. Med matematikkens natur menes hva som er allment akseptert innenfor fagfeltet. Det er et mål at elevenes oppfatning av et matematisk objekt skal samsvare med matematikkens natur (G. Stylianides, 2008). Dette henger sammen med A. Stylianides (2007) sitt krav om argumentasjonsmåter. For å oppnå et gyldig bevis må argumentasjonsmåten være matematisk korrekt og samsvare med matematikkens natur. Det krever at læreren identifiserer avvik mellom elevens oppfatning av de matematiske komponentene og matematikkens natur, for deretter å ta hensiktsmessige pedagogiske valg i matematikkundervisningen (G. Stylianides, 2008).

I tabell 2 kommer det frem at *den matematiske komponenten* inkluderer fire aktiviteter knyttet til resonnering og bevis; identifisering av mønster, utforme en generell hypotese, fremskaffe bevis og fremskaffe et ugyldig bevis. I tillegg skilles det mellom aktiviteter for generalisering og aktiviteter for argumentasjon. Ut fra vårt forskningsproblem er det hovedsakelig delen om argumentasjon som vil være relevant. For å fremme viktige forskjeller skiller G. Stylianides (2008) mellom fire typer argumentasjon, *empirisk argument, redegjørelse, generisk eksempel* og *demonstrasjon.* Forskjellene handler om hvordan et argument blir presentert og utledet, om en tar utgangspunkt i eksempler eller ikke. I rammeverket er det kun to av argumentasjonstypene som blir regnet som gyldig bevis med utgangspunkt i A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis (G. Stylianides, 2008).

2.3.1 Empirisk argument

Et empirisk argument regnes som et ugyldig bevis for en matematisk påstand (G. Stylianides, 2008). Dersom en elev konkluderer med at en påstand er sann etter kun å ha sjekket ut enkelte tilfeller, blir argumentet regnet som empirisk. Utfra enkelttilfellene regner eleven det som sannsynlig at påstanden vil gjelde for alle andre tilfeller. Argumentet blir i tillegg regnet som empirisk dersom eleven konkluderer med at påstanden gjelder for alle tilfeller, men ikke viser til dette. I et empirisk argument blir det ikke trukket frem generelle egenskaper i de konkrete eksemplene. Det blir dermed vanskelig å argumentere for sammenhengen mellom andre tilfeller for påstanden. Det blir heller ikke utdypet hvorfor de utvalgte eksemplene kan være representative for alle tilfeller. Et empirisk argument vil ikke oppfylle A. Stylianides (2007) sitt kriterium om argumentasjonsmåter, fordi det ikke er matematisk korrekt. Det blir dermed ikke sett på som et gyldig bevis.

Et eksempel på et empirisk argument er at en elev konkluderer med at summen av to oddetall alltid blir et partall, etter å ha observert at $1 + 3 = 4$, $5 + 7 = 12$, og $3 + 5 = 8$. Eleven legger merke til et mønster, to oddetall som legges sammen gir en sum som er et partall, og regner med at dette vil gjelde for alle andre tilfeller. Argumentet blir regnet som empirisk da konklusjonen trekkes kun basert på et utvalg eksempler. Eleven fremhever heller ikke noen generelle egenskaper ved eksemplene. Argumentet kan dermed ikke regnes som matematisk korrekt og oppfyller ikke A. Stylianides (2007) sitt kriterium om argumentasjonsmåter. Argumentet blir kategorisert som et ugyldig bevis.

Et annet eksempel på en empirisk argumentasjon er dersom en elev baserer seg på et spesielt tilfelle eller viser til høye tall, for å bestemme påstandens gyldighet. For samme påstand som over, kan en elev kan vise til eksempelet $1001 + 1003 = 1004$, og argumentere med at «siden det gjelder for så høye tall, vil påstanden alltid stemme». Et slikt argument omtaler Balacheff (1988) som et *crucial experiment.*

2.3.2 Redegjørelse

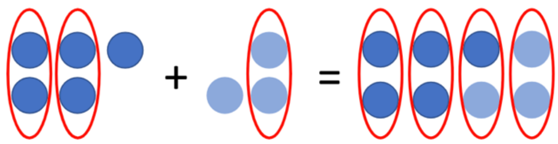
En redegjørelse er et argument som ikke oppfyller kravene for bevis og ikke er basert på empiri (G. Stylianides, 2008). På samme måte som et empirisk argument, blir en redegjørelse regnet som et ugyldig bevis i G. Stylianides (2008) sitt rammeverk. En redegjørelse er et argument som ikke tar hensyn til A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis. Det kan eksempelvis være at eleven som fremmer argumentet bruker påstander eller representasjoner som ikke er akseptert i klasseromsfellesskapet. Et argument blir også regnet som en redegjørelse dersom en hopper over sentrale matematiske faktorer i argumentasjonen. Eksempelvis om en elev argumenterer for påstanden «summen av to oddetall er et partall», uten å definere oddetall og partall. Et argument kunne i denne sammenhengen sett slik ut: «Når en legger sammen to oddetall, vil de to til overs danne et par. Da får vi et partall». Dette argumentet blir regnet som en redegjørelse ettersom argumentasjonen hopper over sentrale matematiske definisjoner knyttet til partall og oddetall. I argumentet gis det ingen definisjon eller forklaring som beskriver hva «de to til overs» representerer. Den manglende definisjonen gjør at argumentet har matematiske mangler og ikke oppfyller A. Stylianides (2007) sitt krav om argumentasjonsmåter. Redegjørelser skiller seg fra et empirisk argument da en ikke viser til et utvalg eksempler.

2.3.3 Generisk eksempel

Generisk eksempel er en av to argumentasjonstyper som blir regnet som et gyldig bevis. Et generisk eksempel er et argument hvor en tar utgangspunkt i et spesifikt eksempel som kan representere det generelle (G. Stylianides, 2008). Selv om en i denne argumentasjonstypen tar utgangspunkt i et eksempel, viser en til de generelle egenskapene ved eksempelet. Det blir også tydeliggjort hvorfor eksempelet kan overføres og dermed er gjeldende for alle andre tilfeller for påstanden. Dette skiller et generisk eksempel fra et empirisk argument.

Dersom en viderefører eksempelet om at summen av to oddetall alltid er partall, kunne en brukt ett av regnestykkene for å argumentere for at hypotesen stemmer for alle tilfeller. Argumentet blir da regnet som et generisk eksempel. Eksempelvis kunne en elev vist til regnestykket $5 + 3 = 8$, og brukt det for å argumentere for alle tilfeller av påstanden. Med utgangspunkt i definisjonen av oddetall kan en vise at både 5 og 3 vil ha en til overs dersom en deler tallene i par. De to som er til overs, vil sammen danne et par når en legger sammen 5 og 3. Dette er illustrert i figur 4.

Figur 4:
Representasjon for påstanden - summen av to oddetall blir alltid partall (gjentakende figur for å informere leser).



Argumentet tar utgangspunkt i at alle partall kan deles i et gitt antall par. Dersom en legger sammen to partall, vil en bare legge til flere par. En vil da sitte igjen med et større antall par, og et større partall. I tillegg baserer argumentet seg på at oddetall alltid vil ha en til overs når det deles i par. Dersom en legger sammen to oddetall vil de to enslige som var til overs danne et nytt par, i tillegg til de eksisterende parene.

Argumentasjonen blir i dette tilfellet regnet som et generisk eksempel da eleven trekker frem generelle aspekter ved partall og oddetall. Det blir da mulig å se hvordan egenskapene i det ene eksempelet kan overføres slik at det kan gjelde for alle andre tilfeller for påstanden. Argumentasjonen oppfyller også A. Stylianides (2007) sine krav til gyldig bevis ettersom argumentasjonen kun inneholder aksepterte utsagn og representasjoner som er tilgjengelig for klassefellesskapet. I tillegg har argumentet ingen matematiske mangler og A. Stylianides (2007) sitt krav om argumentasjonsmåter er oppfylt.

2.3.4 Demonstrasjon

Demonstrasjon er den andre argumentasjonstypen som blir regnet som et gyldig bevis i G. Stylianides (2008) sitt rammeverk. En demonstrasjon tar utgangspunkt i generelle matematiske kjennetegn for å argumentere for en påstand, uten å vise til et konkret talleksempel (G. Stylianides, 2008). I tillegg blir alle kravene i A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis oppfylt. I en demonstrasjon brukes kun utsagn som er kjent og aksepterte i fellesskapet, argumentasjonsmåtene som benyttes er kjent, og representasjonene som blir benyttet er godtatt i klassefellesskapet. Det er innenfor denne generelle argumentasjonstypen matematikere arbeider, og det er den eneste typen argumentasjon også Balacheff (1988) regner som et gyldig bevis.

Eksempelet som ble benyttet for å forklare generisk eksempel, ville blitt en demonstrasjon dersom eleven kun hadde tatt utgangspunkt i de generelle sidene ved partall og oddetall for å argumentere for at hypotesen om at summen av to oddetall alltid er et partall. En kunne i en demonstrasjon benyttet algebraisk notasjon for å vise at påstanden stemte: $(2k+1)+(2m+1)=2k+2m+2=2\,(k+m+1)$. En forutsetning for at notasjonen skal telle som gyldig bevis ifølge A. Stylianides (2007) er at denne representasjonsformen er kjent og akseptert i klassefellesskapet. Andre former for demonstrasjoner kan være gyldige argument ved moteksempel og selvmotsigelse. På ungdomsskolen kunne en demonstrasjon for påstanden «Summen av to etterfølgende oddetall er alltid et tall i firegangen» sett slik ut:

Vi starter med å etablere at alle tall i firegangen er et multiplum av fire, og kan representeres som $4x$. I tillegg vet vi at annet hvert tall i tallrekken er et oddetall. Alle oddetall kan skrives som $2x+1$, som betyr et partall pluss en. To påfølgende oddetall kan en omtale som $2x+1$ og $2x+3$. Dette er utsagn en kan anta at en elev på ungdomsskolen godtar uten ytterligere forklaringer, og kan regnes som aksepterte sannheter i klassefellesskapet. Summen av $2x+1$ og $2x+3$ er $4x+4$. Summen kan en faktorisere til $4(x+1)$. Den er dermed delelig med 4, og er et multiplum av 4. Påstanden stemmer.

Dette er en demonstrasjon da en kun har tatt utgangspunkt i generelle egenskaper og ikke konkrete eksempler. Det blir benyttet sannheter og argumentasjonsmåter en kan anta vil være akseptert på ungdomstrinnet, noe som gjør at kravene til A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis er oppfylt.

2.4 Andre analytiske rammeverk

Det finnes et bredt spekter av forståelser knyttet til argumentasjon, og det finnes flere analytiske rammeverk som kunne vært aktuelle for oss å benytte i denne studien. Et eksempel er Ball og Bass (2003) sitt rammeverk for å analysere elevers arbeid med bevis i skolen. I dette rammeverket vektlegges språket, den matematiske kompetansen innenfor klassefellesskapet, og lærerens pedagogiske valg og innvirkning. I tillegg har Toulmin utviklet en modell som ser på argumentasjon innenfor flere fagområder (Toulmin, 2003). Selv om Toulmin sin modell ikke er spesielt tilpasset matematisk argumentasjon, er den mye brukt innenfor matematikkdidaktisk forskning, for å bryte ned og analysere elevenes argumenter (Knipping, 2008; Krummheuer, 2007). I den enkleste modellen til Toulmin brytes argumentet ned i tre deler: data, claim og warrent (Toulmin, 2003). Et annet rammeverk vi kunne tatt i bruk er Balacheff (1988) sitt rammeverk om elevenes bevisføring. Elevenes argumenter blir analysert og kategorisert i ulike nivå, og likner på G. Stylianides (2008) sitt analytiske rammeverk om resonnering og bevis. En betydelig forskjell er at Balacheff (1988) ikke ser på et generisk eksempel som et gyldig bevis. G. Stylianides (2008) argumenterer derimot for at et generisk eksempel faller under kategorien av gyldige bevis. I denne studien støtter vi G. Stylianides (2008) og har valgt å ta utgangspunkt i hans analytiske rammeverk.

2.5 Matematiske representasjoner

Representasjoner er noe som står for noe annet (Duval, 2006; Goldin, 2002; Kaput, 1985). En representasjon kan være en beskrivelse av, eller en måte å fremstille noe på. Hva «noe» er, varierer og kommer an på situasjon og kontekst. Matematiske representasjoner er en måte å fremstille matematiske konsepter eller matematisk innhold på. Representasjoner innen matematisk tenkning er avgjørende for å kunne fremstille abstrakte matematiske objekter og uttrykke tankerekker. Dette er noe av det som skiller matematisk tenking fra tenking innenfor andre fagområder (Duval, 2006). En kan ikke se, ta eller føle på objektene, og det er kun gjennom tegn og semiotiske representasjoner matematikken blir tilgjengelig for oss.

Et av kravene A. Stylianides (2007) stiller til et gyldig bevis, handler om representasjonsmåter for argumentasjon. Representasjonene må være matematisk korrekte, og tilpasset mottakerne. Representasjonsmåten er sentral for at argumentet skal kunne regnes som et gyldig bevis, men definisjonen sier ikke nok om hva matematiske representasjoner er. Vi har av denne grunn valgt å ta i bruk Duval (2006) sin inndeling av matematiske representasjoner.

Representasjonssystemet til Duval (2006) klassifiserer fire typer semiotiske representasjoner som blir benyttet i ulike matematiske prosesser, *naturlig språk*, *visuelle representasjoner*, *symbolsystemer*, og *diagrammer og grafer*. *Naturlig språk* handler om å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig innenfor matematikk. Det å uttrykke seg muntlig innebærer å gi forklaringer med vanlig språk. Å uttrykke seg skriftlig kan handle om formidlingen av utregninger, teoremer og bevis. Duval (2006) påpeker at overgangen fra muntlig til skriftlig språk kan være omfattende, og at denne overgangen gjerne undervurderes. *Visuelle representasjoner* innebærer tegninger, mønster, geometriske figurer, og andre figurer som kan konstrueres ved hjelp av verktøy. *Symbolsystemer* kjennetegnes gjennom bruk av matematisk notasjon, for eksempel i matematiske utregninger. Det er ikke mulig å presentere disse muntlig på andre måter enn ved å stave. Den siste kategorien er *diagrammer og grafer*.

Duval (2006) retter mye fokus på overgangene mellom ulike representasjoner og skiller mellom to typer; behandling og konvertering. Ved behandling holder en seg innenfor den samme representasjonsformen, mens en ved konvertering beveger seg mellom ulike representasjonsformer. En konvertering blir ansett som en mer kompleks prosess da en må evne å se sammenhengen mellom to representasjonsformer for samme objekt (Duval, 2006). Det kan være å se sammenhengen mellom objektet representert i form av naturlig skriftlig språk og som en visuell representasjon; tre og . Et annet eksempel på en konvertering er når en snakker med muntlig språk, men benytter symbolsk notasjon. Det er en konvertering som skjer hyppig i skolehverdagen, eksempelvis når en i undervisningen snakker om oddetall, men læreren representerer det med symbolene $2x + 1$ på tavlen. Evnen til å mestre slike konverteringer og trekke sammenhenger mellom de ulike representasjonsformene, er nødvendig for å utføre matematiske prosesser og utvikle en dyp matematisk forståelse. Overganger mellom de semiotiske representasjonsformene oppleves likevel som utfordrende og som en kritisk del av læring (Duval, 2006).

En kan trekke paralleller mellom Duval (2006) sitt fokus på konverteringer og A. Stylianides (2007) sin definisjon av bevis. For at beviset skal telle som gyldig legges det vekt på hvordan en formidler argumentasjonen til fellesskapet og hvilke representasjonsmåter som benyttes. Elevenes evne til å bevege seg mellom representasjonsformene, kan ha en innvirkning på deres mulighet for å oppnå et gyldig bevis. Det kan eksempelvis bety å ta i bruk naturlig språk og visuelle representasjoner. Da er det fordelaktig at elevene kan bevege seg gjennom representasjonssystemet og sammenlikne objekter innenfor de ulike representasjonene. I vår studie ønsket vi å undersøke om elevenes bruk av representasjoner kunne henge sammen med måten de argumenterte på. Med Duval (2006) sitt semiotiske representasjonssystem hadde vi et verktøy til å kategorisere elevenes representasjoner. I tillegg fikk vi undersøke elevenes evne til å bevege seg mellom representasjonsformene. Elevenes evne til å konvertere ble avgjørende for hvilken av G. Stylianides (2008) sine fire argumentasjonstyper elevene arbeidet innenfor.

2.6 Tidligere forskning

Vi presenterer her et kort sammendrag av relevant forskning som tidligere er gjort innenfor elevers argumentasjon og elevers bruk av representasjoner. Dette blir grunnlaget for diskusjonen av våre funn i kapittel 5. Det finnes en del forskning knyttet til elevers argumentasjon, men lite som er basert på elever på mellomtrinnet. I tillegg er det gjort lite forskning som ser på sammenhengen mellom elevers type argumentasjon og måten de bruker representasjoner på. Den begrensede forskningen på tema var noe av bakgrunnen og motivasjonen vår for å utføre studien.

2.6.1 Tidligere forskning om elevers argumentasjon

Flere studier viser til at læreren har en avgjørende rolle for elevenes arbeid med bevis (Ball & Bass, 2003; Makar et al. 2015; Mata-Pereira & Ponte, 2017). Ball og Bass (2003) studerte en klasse og så på hvordan elevenes argumentasjonsevne utviklet seg. De fant at selv yngre elever gjennom arbeid med bevis, kan utforske og argumentere for matematiske påstander ved å lete etter sammenhenger og strukturer i påstandene. I tillegg viste forskningen at læreren og klasseromsundervisningen spilte en avgjørende rolle for å fremme elevenes forståelse av bevis (Ball & Bass, 2003). Mata-Pereira og Ponte (2017) sin intervensjonsstudie undersøkte hvordan lærerens handlinger kan fremme elevenes matematiske resonneringsprosess. Studien ser på hvordan argumentasjon og resonneringsprosesser kan dukke opp i klasseromsdiskusjoner. De fant at lærerens engasjement og handlingsmønster vil være av betydning for elevenes resonneringsprosess. Da elevene skulle styrke argumentasjonen sin var hyppig oppfølging og veiledning fra lærer avgjørende (Mata-Pereira & Ponte, 2017).

Resultater fra flere tidligere forskningsprosjekt viser også at elever ofte godtar empirisk argumentasjon som gyldig bevis (Healy & Hoyles, 2000; G. Stylianides et al., 2017; Widjaja et al., 2019). Gjennom utprøving av en rekke eksempler som bekrefter en matematisk påstand, viser litteraturgjennomgangen til G. Stylianides et al. (2017), at elevene godtok empirisk argumentasjon som gyldig bevis. Elevene anså de bekreftende eksemplene som et tilstrekkelig grunnlag til å avgjøre påstandens gyldighet, og at det samme ville gjelde for alle andre tilfeller for påstanden. Healy og Hoyles (2000) fant også i sin studie at de fleste elevene benyttet seg av empirisk argumentasjon. Elevene i denne studien var likevel klar over argumentasjonens begrensninger, og ble i mindre grad overbevist av eksemplene. Widjaja et al. (2019) utførte en case-studie hvor de undersøkte hvordan 80 elever argumenterte, og studerte sammenhengen mellom elevenes argumentasjon og andre resonneringsprosesser. Også Widjaja et al. (2019) fant at store deler av utvalget argumenterte empirisk, 63% av elevene argumenterte med utgangspunkt i eksempler. Selv om elevers bruk av eksempler kan skape en begrensning for argumentasjonen, konkluderte Ozgur et al. (2019) at bruk av eksempler var nyttig i bevisaktiviteter, men i ulik grad. Studien gikk ut på å undersøke hvordan elever fra ulike aldersgrupper, fra mellomtrinnet til bachelorstudenter, brukte eksempler for å fremme et bevis. Resultatet viste at elevene hadde ulik bruk og tilnærming til eksemplene, noe som også skapte forskjeller i argumentasjonen deres.

2.6.2 Tidligere forskning om elevers bruk av matematiske representasjoner

Det finnes lite forskning som ser på sammenhengen mellom elevenes bruk av representasjoner og elevenes type argumentasjon (Stylianou, 2013). En har likevel erfart at bruk av representasjoner kan være nyttig for elevenes utforskning og problemløsning (Arcavi, 2003; Bakar et al. 2016; Greeno & Hall, 1997; Stylianou, 2011; Stylianou, 2013). Stylianou (2011) gjennomførte en studie hvor hun så på elevenes praksis knyttet til matematiske representasjoner, og sammenliknet den med hvordan ekspertmatematikere brukte representasjoner. I studien fant hun at representasjoner kan fungere som et verktøy for å forstå, utforske, og kommunisere et problem. Elevenes bruk av representasjoner var imidlertid begrenset til utvalgte matematiske emner, sammenliknet med eksperters bruk, og hun understreker at det er lærerens ansvar å gi elevene verktøy til å utvide bruken av representasjoner til alle tema. Bakar et al. (2016) har liknende funn i deres studie hvor de undersøkte variasjonen og bruken av representasjoner blant utvalgte elever i en førsteklasse. Resultatene fra forskningen viste at representasjoner kan ha et stort potensial som læringsverktøy, men at det krever tilstrekkelig innføring og veiledning fra en lærer. Det å kunne benytte flere ulike matematiske representasjoner og veksle mellom disse, kan også virke positivt for elevenes matematiske forståelse og evne til utforskning (Heinze et al., 2009; Kilpatrick et al., 2001; Stylianou, 2011). Til tross for denne bemerkelsen, viser forskning at elever opplever store utfordringer med konverteringer (Duval, 2006; Heinze et al., 2009).

Stylianou (2013) undersøkte hvordan bruken av representasjoner og argumentasjon kunne ha en innvirkning på hverandre, i en 6. klasse. Hun fant at det var en nær sammenheng mellom de to, og fant at elevers bruk av representasjoner både kan være nyttig, men også et hinder i utviklingen av et argument. Elevenes bruk av og tilnærming til representasjonene, vil være avgjørende for hvilken rolle representasjonene har for arbeidet. Dette samsvarer med hva Saundry og Nicol (2006) fant i sitt forskningsprosjekt hvor de fulgte en 7. klasse over ett år. De undersøkte hvordan elever gjennom tegning representerte en problemløsningsoppgave. De fant at elever hadde ulike tilnærminger til utviklingen av representasjonen, og kategoriserte tegningene som *tegning av* eller *tegning for* problemet. For elevene som utformet en *tegning for* problemet, ble representasjonen en del av løsningsprosessen og hjalp elevene til å se matematiske sammenhenger og konsept (Saundry & Nicol, 2006).

Kilpatrick et al. (2001) mener at matematiske representasjoner kan være et virkemiddel for å fremme elevenes matematiske resonnering og utforskning, noe som er viktig i utformingen av argumenter. Morais et al. (2018) hadde liknende funn i deres intervensjonsstudie. De fulgte samme elevgruppe over to skoleår og fant gjennom observasjon av gruppearbeid at elevenes representasjoner bygget opp om deres resonnering og utforskning, og motsatt. Både representasjonene og utforskningen var viktig for utviklingen av elevers matematiske forståelse (Morais et al., 2018).

3 METODE

I denne studien har vi valgt å ta i bruk kvalitative metoder for å undersøke hvordan noen elever på 7. trinn argumenterer for en påstand. I dette kapitlet skal vi utdype hvilke metoder vi har benyttet for å svare på forskningsspørsmålet vårt; *Hvordan kjennetegner bruken av de matematiske representasjonene elevenes type argumentasjon?*

Vi starter metodekapitlet med å argumentere for at et konstruktivistisk forskningsparadigme vil passe med vår kvalitative studie. Videre presenterer vi datamaterialet og dets kontekst, som i denne studien er samlet inn gjennom forskningsprosjektet ProPrimEd. Deretter vil en grundig beskrivelse av analyseprosessen bli presentert, hvor det legges vekt på hvordan vi har kategorisert elevens argumentasjon ut fra G. Stylianides (2008) sitt rammeverk om resonnering og bevis. Med utgangspunkt i Duval (2006) sitt representasjonssystem lette vi i tillegg etter korrelasjoner mellom elevenes argumentasjon og bruk av representasjoner. Videre legger vi frem tiltak som er gjort for å øke studiens troverdighet, blant annet ved å se på hvordan vi i analyseprosessen kan ha påvirket resultatene eller hvordan elevene kan ha blitt påvirket i innsamlingsprosessen. I siste del av kapitlet gjør vi rede for etiske betraktninger vi har tatt hensyn til i arbeidet med studien.

3.1 Studiens vitenskapelig paradigme

For denne studien er det valgt et konstruktivistisk forskningsparadigme. Vårt valg av forskningsparadigme var med på å danne grunnlaget for studien vår, og påvirker valg av metodikk, metoder, litteratur og studiedesign. Det er paradigme som avgjør hvordan vi studerer og tolker kunnskap, samt bestemmer forskningens intensjon, motivasjon og forventninger (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Et konstruktivistisk forskningsparadigme underbygges av en subjektivistisk epistemologi. Det betyr at virkeligheten kan forstås ut fra flere historier, perspektiver, narrativ og oppfatninger. En oppfatter verden som sosialt konstruert og virkeligheten fortolkes basert på individets egne erfaringer (Fuyane, 2021). Innenfor konstruktivismen skaper en gjengivelser av objekter, uten at gjengivelsen nødvendigvis samsvarer med hva objektet faktisk er. Virkelighetsforståelsen baseres altså på vår oppfatning av den, ikke virkeligheten i seg selv (Postholm & Jacobsen, 2018). Vi skal i denne studien undersøke sammenhengen mellom elevers argumentasjon og bruken av representasjoner. Med utgangspunkt i et konstruktivistisk forskningsparadigme betyr det at vi gjennom forskning forsøker å få innsikt og forståelse for elevers tankerekker, samt hvordan de ender opp med den type argumentasjonen de gjør. Innenfor dette paradigme blir det ansett som umulig å skille forskere fra fenomenet som blir studert (Fuyane, 2021), og analysen preges av våre fortolkninger. Våre tidligere erfaringer og teoretiske bakgrunn vil altså ha innvirkning på studiens analyse og resultat.

Innenfor det konstruktivistiske perspektivet vil det være avgjørende å oppnå en dybdeforståelse av forskningsobjektet. En ønsker innsikt i den spesifikke konteksten som undersøkes, i tillegg til brede og detaljerte beskrivelser (Fuyane, 2021). For å oppnå den ønskede bredden i datamateriale, er en avhengig av å ta i bruk kvalitative forskningsmetoder. Konstruktivister mener at en best tilegner seg kunnskap gjennom utforskning av sosiale fenomen, og studiene tar som regel for seg prosesser som innebærer interaksjon og samhandling mellom individer (J. W. Creswell, 2014). På bakgrunn av dette valgte vi å ta i bruk kvalitative forskningsmetoder for å studere elevers argumentasjon og bruk av representasjoner.

Som en motsetning til konstruktivismen finnes det et positivistisk forskningsparadigme. En ser her på virkeligheten som konstant og at verden kan forstås fullverdig gjennom vitenskapelige metoder og målbare verdier (Fuyane, 2021). Med dette perspektivet ville vi ikke oppnådd tilstrekkelig dybde og bredde for å besvare forskningsspørsmålet vårt, da det ikke vil kunne besvares kun basert på målbare tallverdier. Et pragmatisk paradigme kunne vært relevant for studien vår. En pragmatisk forsker er ikke knyttet til ett kunnskapssyn, men mener kunnskap både kan tilegnes gjennom studie av sosiale fenomen, samt lete etter variabler og mønster i data (J. W. Creswell, 2014). I vår studie ville det innebære å ta i bruk både kvalitative og kvantitative forskningsmetoder. Den kvantitative delen kunne gitt oss muligheten til å undersøke et større antall elever, men ettersom vi hovedsakelig var interessert i det sosiale aspektet ved forskningen, var det naturlig å ta utgangspunkt i et konstruktivistisk paradigme.

3.2 Kvalitativ metode

Kvalitative forskningsmetoder samler inn informasjon gjennom tekst og språk. Hensikten er å beskrive og forstå spesifikke menneskers handlinger, og bakgrunnen for dem (Postholm & Jacobsen, 2018). I kvalitativ forskning er en interessert i å studere et lite utvalg, for å få et godt nok innblikk og forståelse av individene eller tilfellene som studeres. Dette står i kontrast til den kvantitative forskningen hvor en ofte ønsker et større utvalg, samt å få resultater i form av tallverdier og ikke tekst (J. W. Creswell, 2014). I vår studie ønsker vi å se nærmere på hvordan noen elever på 7. trinn argumenterer, og om det finnes en sammenheng mellom elevenes type argumentasjon og deres bruk av representasjoner. Vi ønsker altså å studere et lite utvalg grundig, og det blir naturlig å svare på forskningsspørsmålet vårt gjennom kvalitative forskningsmetoder. Vi undersøker altså et fenomen, elevenes argumentasjon, og befinner oss dermed innenfor et fenomenologisk studiedesign. Ved en fenomenologisk studie er en opptatt av å beskrive en gruppes felles erfaringer når de opplever et fenomen (J. W. Creswell & Poth, 2018). I en fenomenologisk studie får en mulighet til å forstå deltakernes perspektiver, slik som vi i vår studie ønsker å tolke og forstå bakgrunnen for elevenes type argumentasjon og bruk av representasjoner.

Fordelen med bruk av kvalitative forskningsmetoder er muligheten til å gå i dybden av datamaterialet. En kan oppnå detaljerte beskrivelser som kan fremme og tydeliggjøre sammenhenger og forskjeller i datamaterialet (Postholm & Jacobsen, 2018). Kvalitative metoder egner seg ofte godt som metode for å studere sosiale fenomener, men det finnes utfordringer en må være bevisst på. Spørsmålet om subjektivitet er noe Bryman (2012) trekker frem. På grunn av metodens vide og ustrukturerte form kan forskerens interesser og personlige motiv prege analyseprosessen, og resultatene kan bli subjektive. Den ustrukturerte formen på kvalitativ forskning kan dessuten gjøre det vanskelig å gjenskape studien (Bryman, 2012). Det blir av den grunn viktig for oss å være detaljert i beskrivelsene av datainnsamlingsprosessen, åpen om analyseprosessen og hvordan vi er gått frem for å svare på forskningsproblemet vårt. I kapittel *3.4 Metode for analyseprosessen* beskriver og utdyper vi hva som er fokusert på, og begrunner valg som er tatt i prosessen.

I tillegg kan det være utfordrende å generalisere resultatene til å gjelde en annen gruppe i kvalitativ forskning (Bryman, 2012). Målet med vår studie er ikke å generalisere funnene, men heller gi en større innsikt i elevers argumentasjon og bruk av representasjoner. På denne måten kan resultatene våre sammenlignes med tidligere forskning knyttet til liknende deltakergrupper. En slik sammenlikning kan brukes til å vurdere om funnene i studien samsvarer med tidligere forskning, og diskutere om samlingen av resultater kan danne grunnlag for et nytt forskningsproblem.

3.2.1 Metode for datainnsamling

Vi har valgt å ta i bruk observasjon som metode for å samle inn data. Målet med vår observasjon var å se hvordan elever argumenterte for en matematisk påstand, og hvilke matematiske representasjoner de benyttet seg av. Innen et konstruktivistisk paradigme står den sosiale konteksten sentralt (Fuyane, 2021). Vi mener det å observere elevene når de diskuterer og løser en oppgave i fellesskap vil gi oss et innblikk i denne sosiale konteksten.

Observasjon som metode blir omtalt som fokusert observasjon, der forskeren velger ut gitte tema for sin observasjon (Postholm & Jacobsen, 2018). Å observere er mer enn å bare se. I motsetning til rapportert data, kan observasjoner gi tilgang til førstehåndsdata fra naturlige settinger (Cohen et al., 2018). Det finnes ulike former for observasjon, og observatører kan innta ulike roller. Cohen et al. (2018) omtaler observatørrollen som enten fullstendig eller ufullstendig. En forsker som er fullstendig observatør har observasjonen som sin eneste oppgave, mens en ufullstendig observatør eksempelvis kan ha en aktiv rolle i observasjonssettingen. Da datamaterialet vårt ble samlet inn av ProPrimEd var forskerne ufullstendige observatører. Dette beskriver vi nærmere i kapittel *3.3 Kontekst for datamaterial*e. For oss var observasjon vår primæroppgave. Vi hadde aldri noen påvirkning på situasjonen, og var dermed fullstendige observatører.

Å benytte seg av observasjon som metode kan gi en rik kontekstinformasjon. Samtidig er det viktig å være bevisst på at observasjoner kan være sensitive til kontekst (Cohen et al., 2018). Hva vi observerer kan avhenge av hvem, hva, hvordan og når vi observerer. Eksempelvis kan det faktum at undervisningen filmes påvirke adferden til deltakerne. I vår studie kan det tenkes at elevene ikke blir påvirket av filmingen i så stor grad, da de er filmet ved flere anledninger tidligere. Undervisningen vi observerer er den fjerde økten av totalt fem. Samtidig er det ikke bare deltakerne som påvirkes av kontekst, det gjelder også observatørene. Hva forskere observerer og får med seg avhenger blant annet av erfaringer, utdanning, livssituasjon og dagsform (Bjørndal, 2011).

Vi har observert klasseromsundervisning gjennom video- og lydopptak, og tilhørende transkripsjoner. Bruk av video tilbyr en ufiltrert observasjon av en situasjon (Cohen et al., 2018). En fordel med videoobservasjon er at en kan se den mange ganger, med ulikt fokus. Det å filme vil gi en god oversikt over situasjonen som er observert. Gjennom filmen får en med alt som skjer, og materialet påvirkes ikke av forskerens oppmerksomhet eller prioritering i datainnsamlingen (Cohen et al., 2018). Datamaterialet vårt er samlet inn og transkribert av forskningsprosjektet ProPrimEd. Det at vi har hatt tilgang til videoopptakene er en styrke for oss da vi ikke har transkribert datamaterialet selv. Det kan være vanskelig å få med alle detaljer og få frem hele situasjonsbilde i en transkripsjon. Ved å se på videoopptakene kunne vi sammenligne dem med transkripsjonene, og forsikre oss om at det ikke var gjort åpenbare feil.

3.3 Kontekst for datamaterialet

Datamaterialet vi har analysert i denne studien er samlet inn som en del av et større forskningsprosjekt utført av forskningsgruppen ProPrimEd. Målet med prosjektet er å utvikle læringsressurser som støtter opp om resonnering og bevis i grunnskolen. Forskningsgruppen har i denne sammenheng samarbeidet med tre grunnskolelærere for å utvikle et opplegg til fem undervisningsøkter. Øktene har blitt prøvd ut i lærernes klasser. Episodene vi har analysert er hentet fra den fjerde av fem økter som ble utprøvd i en 7. klasse, med elever i alderen 12-13 år. I alle undervisningsøktene var det inntil tre forskere med, hvorav noen av disse også hadde deltatt i enkelte undervisningsøkter i forkant. Elevene var dermed godt kjent med forskerne på dette tidspunktet.

Undervisningsøkten vi har studert varte i 60 minutter. Utvalget vårt består av 14 elever, i tillegg til at læreren deres og to forskere var til stede. Økten startet med 21 minutter i lyttekrok, ledet av læreren. Her var det en introduksjon hvor de snakket om arbeidet fra de foregående øktene. I diskusjonen kom det frem at de tidligere har arbeidet med hva som kjennetegner god argumentasjon. Videre ble øktens oppgave presentert. Den gikk ut på at elevene skulle argumentere for to matematiske påstander, se figur 5. Læreren gikk gjennom og forklarte begrepene som blir brukt i oppgaven. Dette inkluderte blant annet *påfølgende tall* og *delelig med*. At et tall er delelig, ble gjennom klasseromsdiskusjon definert som et tall som deles på et annet, og at svaret blir et heltall. Læreren påpekte at det kunne være lurt å starte med utprøving av noen eksempler. Dette kom også frem gjennom oppgavearket elevene fikk utdelt, se vedlegg 1. Gjennom undervisningsplanen som læreren fikk, se vedlegg 1, kom det frem at et mål for økten var å benytte passende representasjoner og knytte forklaringen til dem. Læreren påpeker flere ganger i oppstarten at tegning kan være et nyttig verktøy for å overbevise «en kritiker» i tillegg til elevenes skriftlige argumenter.

Etter gjennomgangen av oppgaven, ble elevene delt i grupper og fikk omtrent 25 minutter til å arbeide med og lage argumenter for de to påstandene. De fikk utdelt et svarark de skulle notere på. Arkene ble samlet inn og er en del av datamaterialet vi baserer forskningen vår på. I undervisningsøkten ble tre av gruppene filmet, gruppe 3, 4 og 5. I tillegg ble det tatt videoopptak av den lærerstyrte oppstarten og den oppsummerende avslutningen. I oppsummeringen presenterte gruppe 2 sitt argument, noe som ga oss et større innblikk i deres argumentasjon. Dette gjør at utvalget vårt består av 4 grupper og til sammen 14 elever. Vi ser bort fra gruppe 1 sin argumentasjon, da vi kun har tilgang til deres svarark. Det ble ikke tatt lydopptak av deres gruppearbeid, og de presenterte heller ikke sitt argument for resten av klassen. Både læreren og forskerne veiledet elevene underveis i arbeidet. Vi var hovedsakelig interessert i elevenes argumentasjon og representasjonsmåte, men var bevisst læreren og forskernes interaksjon med elevene ettersom vi tar hensyn til G. Stylianides (2008) sin pedagogiske komponent. Den pedagogiske komponenten understreker at læreren kan være støttende og behjelpelig i elevenes utforming av et gyldig bevis. I datamaterialet er vi ikke opptatt av hvilken rolle veilederne har, og skiller dermed ikke mellom forskere og lærere, men omtaler begge som «læreren».

Elevene arbeidet med følgende oppgave i grupper:

Figur 5:
Oppgaven elevene arbeider med.

Sum av påfølgende tall

Påfølgende tall er tall som kommer etter hverandre i tallrekka. For eksempel:

13, 14 er to påfølgende tall

20, 21, 22, 23 er fire påfølgende tall

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 er sju påfølgende tall

Vi skal se på summen av påfølgende tall. Det er to spørsmål dere skal undersøke, lage hypoteser og argumentere for dem:

1. **Skjer det alltid, aldri eller noen gang at summen av tre påfølgende tall er delelig med 3?**
2. **Skjer det alltid, aldri eller noen gang at summen av fire påfølgende tall er delelig med 4?**

En kan argumentere for at oppgaven elevene får i datamaterialet gir et godt utgangspunkt for å svare på vårt forskningsspørsmål; *Hvilke sammenhenger kan identifiseres mellom elevenes bruk av matematiske representasjoner og elevenes type argumentasjon?* Oppgaven i figur 5, består av to generelle påstander, noe som passer godt sammen med G. Stylianides (2008) sitt rammeverk. De generelle påstandene gir mulighet for at alle de fire argumentasjonstypene til G. Stylianides (2008) blir tatt i bruk. I tillegg er en av påstandene sann, mens den andre ikke er det, noe som potensielt kan gi et rikere datamateriale med mer variasjon i elevenes arbeid.

Vårt datamateriale ble samlet av forskningsgruppen ProPrimEd. At det var samlet inn fra før, ga oss mulighet til å se gjennom materialet før vi startet på masteroppgaven. I vår oppgave ønsket vi å se på hvordan en gruppe elever argumenterte for to matematiske påstander, og hvordan de brukte matematiske representasjoner i dette arbeidet. Vi mener at elevbesvarelsene sammen med opptak av diskusjonene deres og klasseromsdiskusjonene, utgjør et godt grunnlag for å undersøke og analysere elevenes argumentasjon. Oppgaven la opp til at elevene skulle argumentere for to påstander, og presentere argumentene sine på et svarark. På elevenes svarark kunne vi se at det var brukt flere typer matematiske representasjoner. Tilgangen til elevenes muntlige diskusjoner i gruppe, ga oss et dypere innblikk i elevenes tanker rundt påstandene og hvordan de kommer frem til sine argument.

3.4 Metode for analyseprosessen

Analyse av kvalitativt datamateriale handler om å forstå hva som blir beskrevet i en situasjon (Postholm & Moen, 2018), og gjennom koding- og kategoriseringsprosesser ønsket vi å søke etter mønstre og sammenhenger i datamateriale. Målet for vår studie var å undersøke om det fantes en sammenheng mellom elevenes bruk av representasjon og type argumentasjon. For å svare på vårt forskningsspørsmål ble det benyttet en deduktiv analysemetode. Deduktiv analyse handler om at en tar i bruk et eksisterende rammeverk for å kategorisere og kode datamaterialet (Kennedy & Thornberg, 2018). Vi brukte G. Stylianides (2008) sitt rammeverk for å kategorisere elevenes argumentasjon, og Duval (2006) sitt semiotiske representasjonssystem for å kategorisere elevenes bruk av representasjoner.

Vårt datamateriale er samlet inn og transkribert av forskningsprosjektet ProPrimEd. Derfor startet analyseprosessen med å skaffe en oversikt over datamaterialet og dets kontekst. Dette gjorde vi ved å se gjennom videoopptak av timen og gruppearbeid, lese transkripsjonene og se på elevbesvarelsene. I tillegg fikk vi tilgang til videoopptakene fra de tre foregående øktene i prosjektet, som gjorde at vi fikk et større innblikk i klassens sosiale normer og en dypere forståelse av datamaterialets kontekst.

I analysekapitlet viser vi til transkripsjoner og elevbesvarelser som har stått sentralt i vår analyse av datamaterialet. For at utdragene fra transkripsjonen ikke skulle bli for lange, valgte vi bare å trekke frem relevante utsagn, noe som resulterte i at vi enkelte steder hopper over utsagn vi anser er av liten betydning. Dette markerer vi på ulike måter i analysekapitlet. Tre punktum på en egen linje markerer at vi har fjernet en persons fulle utsagn. Dersom vi kun fjerner en del av en persons utsagn, markeres dette med tre punktum inne i en klammeparentes. Nedenfor er et eksempel hentet fra analysekapittelet hvor vi har hoppet over hele eller deler av et utsagn.

Lærer	Det der må dere skrive ned! Pronto!
…	
Lærer	[...] Men, var dere enige om en begrunnelse nå?

I enkelte av utdragene vi henviser til i analysekapitlet, er det også skrevet noe i parentes. Dette er våre beskrivelser av hva vi observerer at elevene gjør. Det kan være bevegelser eller ting elevene gjør knyttet til oppgaven eller samarbeidet i gruppen.

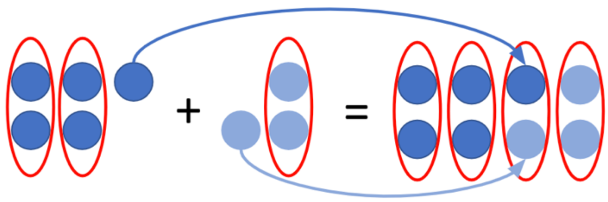
3.4.1 Analyseprosessen

Vi startet analyseprosessen med å gå gjennom transkripsjonen fra alle gruppene, samt transkripsjonen fra klassens oppstart og avslutning. Videre tok vi for oss en og en gruppe og så transkripsjonen i sammenheng med elevbesvarelsene. Her forsøkte vi å trekke ut hvilke av G. Stylianides (2008) sine type argument som var fremtredende i transkripsjonen og på svararket. I vår analyse av datamaterialet fant vi kun argumentasjonstypene empiriske argument og generiske eksempel. Argumenter vi kategoriserte som empiriske var basert på et utvalg konkrete talleksempler. Argumenter vi kategoriserte som generiske eksempel, tok i bruk et konkret eksempel og trakk frem generelle egenskaper som kunne overføres til alle andre tilfeller for påstanden. Samtidig som vi hentet ut elevers argumenter av datamaterialet, lagde vi en oversikt hvor vi koblet hvert argument opp mot Duval (2006) sine representasjonsformer. Et argument som hovedsakelig ble representert med talleksempler, falt under representasjonsformen symbolsystemer. Representasjonen ble kategorisert som visuell dersom elevene tegnet eller utformet en modell. Når elevene diskuterte seg imellom anså vi det som muntlig naturlig språk. Da vi lagde en oversikt over elevenes representasjoner og argumentasjon, så vi at det kunne finnes en sammenheng mellom representasjonen brukt og hvilke typer argumenter elevene oppnådde.

Vi fant at elevene i datamaterialet kom frem til empiriske argument og generiske eksempel, og at de tok i bruk symbolsystem, visuelle representasjoner og naturlig muntlig språk for å argumentere for påstanden. Forskningsspørsmålet vårt for denne oppgaven er: *Hvilke sammenhenger kan identifiseres mellom elevenes bruk av matematiske representasjoner og elevenes type argumentasjon?* For å identifisere disse sammenhengene tok vi utgangspunkt i representasjonsformene vi fant, og sammenliknet elevenes argumenter innenfor samme representasjonsform. I denne prosessen fant vi at representasjonene i noen tilfeller kunne ha en positiv innvirkning på elevenes argumentasjon, mens de andre ganger ikke bidro til å heve argumentet. Vi anså det da som nødvendig å se nærmere på elevenes bruk av representasjonene. En tendens i datamaterialet var at elevene som tok utgangspunkt i representasjonene og brukte disse som en del av argumentasjonen, hadde et større potensial for å nå en generell argumentasjon, enn elever som ikke gjorde det. Dette er grunnlaget for at vi har valgt å skille mellom aktiv og passiv bruk av representasjoner.

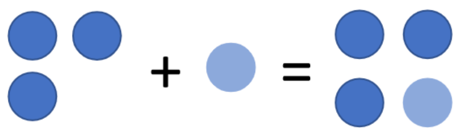
Aktiv bruk av representasjonen kan og beskrives som dynamisk eller fleksibel. Det kjennetegnes av at representasjonen brukes som en aktiv del av argumentasjonen. Elevene viser til hvordan de jobber med og bruker representasjonen. Det gjelder både når de presenterer argumentasjonen, men også for å utforske påstandene de arbeider med. Vår beskrivelse av aktiv bruk av representasjoner er inspirert av det Stylianou (2011) omtaler som *representasjon som en prosess*. Eksempel på aktiv bruk: I teorikapittelet presenterte vi hvordan en kan argumentere for påstanden *summen av to oddetall er et partall*, ved å ta utgangspunkt i at hvert av tallene har *en til overs*. En aktiv bruk av representasjoner til dette argumentet kan ta utgangspunkt i figur 6, og kommentere at tegningen viser med piler hvordan en setter sammen de to som er til overs.

Figur 6:
Illustrasjon av aktiv bruk av representasjoner.



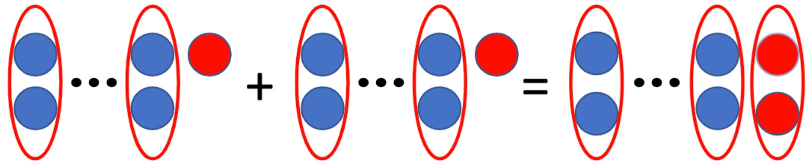
Passiv bruk kjennetegnes ved at en ikke benytter representasjonen til noe mer enn å vise den frem. Den passive bruken er mer statisk enn den aktive. En passiv bruk av representasjon til påstanden om summen av to oddetall, kunne vært å legge ved en representasjon som vist i figur 7. Uten piler og uten en kommentar om hva som skjer når de to oddetallene blir lagt sammen.

Figur 7:
Illustrasjon av passiv bruk av representasjoner.



I datamaterialet fant vi i tillegg at flere grupper brukte tegning som en del av argumentasjonen sin. Det var likevel klare forskjeller mellom gruppenes tilnærming til tegningene. Vi anså det også her som nødvendig å skille mellom to ulike former for visuelle representasjoner, matematiske og ikke-matematiske. Representasjonene vi har kategorisert som matematiske, er tegninger som tar i bruk matematiske strukturer knyttet til påstanden. Figur 8 er et eksempel på en matematisk representasjon til påstanden om at summen av to oddetall er et partall. Alle aspektene ved påstanden er med i den visuelle representasjonen. Det er en representasjon som tar utgangspunkt i strukturen ved oddetall, altså at det vil være en til overs når en danner par. Samtidig kommer det tydelig frem at de to røde kulene, som hver for seg representerer *en til overs*, sammen danner et par i summen. De tre prikkene angir at det vil gjelde for hvilke som helst oddetall.

Figur 8:
Eksempel på en matematisk visuell representasjon.



Vi så at en matematisk tegning kan ha gjort det lettere for elevene å se og skape en forståelse for sammenhenger mellom påstanden og eksemplene. Oppdagelsen og forståelsen av slike sammenhenger vil være avgjørende dersom elevene skal nå et gyldig bevis. Hva vi kategoriserer som en matematisk tegning, kan minne om hva Ott (2017) betegner som *mathematical matching.* I motsetning til matematiske tegninger, tar de ikke-matematiske tegningene ikke utgangspunkt i påstandens matematiske strukturer. En kan se en kobling mellom tegningen og problemet, men uten en strukturell relevans hvor mønster og sammenhenger i påstanden er fremtredende. Figur 9 viser et eksempel på en ikke-matematisk tegning til påstanden om at summen av to oddetall alltid blir et partall. En kan her se en kobling til påstanden da det legges sammen to oddetall, men tegningen trekker ikke frem noen generelle strukturer ved påstanden. Tegningen viser til et konkret tilfelle av påstanden, heller enn å vise til generelle trekk ved partall og oddetall. Det kommer heller ikke tydelig frem at det er summen av to oddetall som er budskapet i tegningen.

Figur 9:
Eksempel på en ikke-matematisk visuell representasjon.

I analysekapittelet vil hovedfunnene våre presenteres gjennom hvilken type representasjon som ble brukt. Blant de empiriske argumentene, så vi mer potensial for utforskning blant gruppene som hadde matematiske tegninger eller aktiv bruk av symbolsystemer, enn elevene som hadde passiv bruk og/eller ikke-matematisk tegning. I tillegg fant vi at det kun var elever som argumenterte muntlig, og sammen med en lærer, som klarte å nå hva A. Stylianides (2007) omtaler som et gyldig bevis.

3.5 Studiens troverdighet

Begrepet troverdighet kan knyttes til om noe er pålitelig, eller til det å ha tillit. Vår studies troverdighet avhenger av at leseren har tillit til arbeidet vi har gjort, og opplever at metodene og innholdet i masteroppgaven vår er pålitelig. Innen forskning bruker en gjerne begrepene reliabilitet og validitet for å beskrive og avgjøre troverdighet. Innen kvalitative studier viser validitet til at forskeren ved bruk av ulike prosedyrer sjekker nøyaktigheten av studiens funn (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Spørsmålet en stiller seg er om funnene speiler datamaterialet. Kvalitativ reliabilitet viser til at forskerens tilnærming er konsistent (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018).

En strategi for å støtte opp om studiens validitet er å gi leseren en omfattende og detaljert beskrivelse av datamaterialet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). I presentasjonen av datamaterialet har vi vært opptatt av at leseren skal få et godt innblikk i situasjonen hvor datamaterialet ble samlet. Dette handler både om å gi en god beskrivelse av innholdet og gangen i undervisningsøkten, hvordan elevene var organisert, hvordan oppgaven ble presentert for elevene, og hvilken rolle læreren og forskerne hadde. Vi har gjennom studien presisert at datamaterialet er hentet fra den fjerde økten som er filmet i samme klasserom. Elevene og læreren er av denne grunn kjent med forskerne, og har fått noe tilvenning i at undervisningen filmes og tas lydopptak av.

Noe annet det er viktig å ta hensyn til er vår bakgrunn og motivasjon for å utføre studien. En slik selvrefleksjon bidrar til at studien er åpen og ærlig (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Samtidig gir det leseren mulighet til å gjøre en selvstendig vurdering i om studien i for stor grad er farget av forskerne. Vi har beskrevet hvordan egne erfaringer og (positive opplevelser av representasjonsbruk) sammen med manglende forskning ligger til grunn for hvorfor vi ønsket å gjennomføre denne studien. En kan derfor tenke at vi gikk inn i studien med en positiv innstilling til bruk av representasjoner. I analyseprosessen har vi forholdt oss objektivt og hatt en metodisk tilnærming til datamateriale, for å unngå at tidligere erfaringer påvirker studien.

Gjennom hele prosessen i arbeidet med masteroppgaven, har vi brukt veilederen vår for innspill og faglig støtte. Å ha en utenforstående person som leser og stiller spørsmål ved den kvalitative forskningen underveis, er et tiltak J. W. Creswell og J. D. Creswell (2018) mener styrker validiteten ved studien. Dette bidrar til at studien oppleves som mer troverdig innen forskningsfeltet.

Reliabilitet handler om forskningens konsistens og stabilitet (J. W. Creswell & J. D. Creswell, 2018). Tjora (2019) omtaler reliabilitet som pålitelighet, og viser til betydningen av å ha en sammenheng gjennom forskningsprosjektet. For å sikre reliabiliteten i vår studie, har vi dokumentert og beskrevet så mange steg i forskningsprosessen som mulig. Vi har gitt en grundig beskrivelse av datamaterialets kontekst, og hvilken rolle de ulike deltakerne hadde i denne prosessen. Videre har vi argumentert for valg av teorigrunnlag, og reflektert over hvordan det kan ha påvirket studien vår. Vår tolkning av rammeverkene og definisjonen vi bruker, kan ha vært med å påvirke resultatet. Dette handler eksempelvis om hvordan vi har kategorisert elevenes argument og representasjoner, og at vi godtar lærerens innspill som en del av elevenes argumentasjon. Andre forskere kunne hatt en annen forståelse av rammeverkene og fokusert på andre deler av datamaterialet, og dermed kommet frem til andre funn. I analysen har vi gått systematisk til verks og dokumentert alle steg underveis. Når det gjelder datamaterialet har vi sett over transkripsjoner opp mot videoene for å være sikre på at det ikke er gjort noen åpenbare feil. Dette ser vi på som spesielt viktig da vi ikke har samlet eller transkribert datamaterialet selv. Vi kodet datamaterialet først hver for oss, før vi sammenlignet, og ble enig om en felles forståelse av hva vi hadde funnet. En slik krysskoding er med på å styrke reliabiliteten i funnene våre, da vi uavhengig av hverandre fant lignende resultat. I arbeidet med å kode datamaterialet, gikk vi hele tiden tilbake til rammeverkene for å sørge for at vi holdt oss innenfor kategoriseringene der. Dette er noen av grepene J. W. Creswell og J. D. Creswell (2018) viser til at en kan gjøre for å sikre reliabiliteten ved et forskningsprosjekt.

3.6 Forskningsetikk

Etiske vurderinger er en viktig del av forskningsprosessen (Clark et al., 2021). Over tid er det utviklet et sett med normer som skal bidra til å sikre god forskningsetikk.

Forskningsetikk består av sannhetsnormen, metodologiske normer og institusjonelle normer. En forutsetning for kvaliteten og påliteligheten til forskningen, er at den er ærlig og sannhetssøkende. De metodologiske normene sikrer at forskningen er gjort på en forsvarlig måte, både med tanke på metode og faglig forankring. Institusjonelle normer viser til at forskningen skal være åpen, uavhengig og kritisk (NESH, 2021). I tillegg må all forskning forholde seg til alminnelige normer og verdier i samfunnet, som respekt, frihet, rettferdighet og beskyttelse mot risiko for skade og belastning. I denne studien har vi tatt hensyn til forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Retningslinjene har fungert veiledende gjennom hele forskningsprosessen, fra planlegging til gjennomføring og presentasjon (NESH, 2021).

I denne masterstudien bruker vi datamateriale som er samlet av ProPrimEd. Alle forskningsprosjekt som skal behandle personopplysninger må søke Norsk senter for forskningsdata (NSD). Vurderingen prosjektet mottok fra NSD var at behandlingen av personopplysninger i prosjektet var i samsvar med personvernlovgivningen. Det er ProPrimEd som har hatt ansvaret for å søke NSD, samle og oppbevare datamaterialet og hente inn samtykke blant deltakerne og deres foresatte, se vedlegg 2. Det er også ProPrimEd som har satt opp ordninger for å gi deltakerne pseudonymer, samt ivaretakelse av deltakernes personvern. Samtidig er det vårt ansvar å forholde oss til og opprettholde den standarden de har satt, i tillegg til å ta hensyn til normene for etisk forskning. I analysen har vi både benyttet oss av videoopptak og tilhørende transkripsjoner fra klasseromsundervisning. I denne sammenheng er vi gjort kjent med fornavn til elever og lærer. Utover dette er vi ikke gjort kjent med noen annen informasjon om deltakerne enn alder. Elevbesvarelser blir bare knyttet til elevenes pseudonymer.

ProPrimEd har utviklet en datahåndteringsplan, som vi har tatt hensyn til gjennom hele studien. Dette omfatter blant annet retningslinjer knyttet til oppbevaring og behandling av datamateriale, med hensyn til personvern. Dette betyr at usensurert materiale ikke blir oppbevart på personlige lagringsenheter, videoopptakene var lagret på en kryptert harddisk vi lånte fra NTNU. Da vi så på videoene gjorde vi dette på en PC lånt fra NTNU, slik at vi aldri hadde videoopptakene på våre private PC-er. Både elever og lærer har fått pseudonymer. Av hensyn til deltakerne er private samtaler, som samtaler om sykdom og vikarbehov, utelatt fra transkripsjonene.

4 ANALYSE

I vår masteroppgave har vi tatt i bruk en kvalitativ forskningsmetode for å svare på problemstillingen: *Hvordan kjennetegner bruk av matematisk representasjoner elevenes type argumentasjon?* For å svare på forskningsspørsmålet har vi studer elever ved 7. trinn som argumenterer for to påstander. Påstandene elevene skulle argumentere for var følgende: «Skjer det alltid, aldri eller noen ganger at summen av tre påfølgende tall er delelig med 3?» og «Skjer det alltid, aldri eller noen ganger at summen av fire påfølgende tall er delelig med 4?»

I analysearbeidet har vi i lys av Duval (2006) sitt representasjonssystem undersøkt hvilke representasjoner elevene har brukt. I lys av A. Stylianides (2007) sine argumentasjonskrav og G. Stylianides (2008) sitt rammeverk, har vi analysert hvilke typer argumenter elevene har presentert. Hovedfunnene våre vil i dette kapittelet presenteres med utgangspunkt i hvilken type representasjon som ble brukt, og hvor vi videre sammenlikner argumentene som er presentert innenfor samme representasjonsform. Vi observerte noen sammenhenger mellom hvilke representasjoner som ble brukt og den typen argumentasjon som ble presentert. Disse sammenhengene har dannet utgangspunktet for hvordan vi har kategorisert datamaterialet. I hver kategori gjør vi rede for sammenhengene vi identifiserer (mellom representasjonsform og type argument), og trekker frem konkrete eksempler fra datamaterialet. Gjennom analysearbeidet ble vi oppmerksomme på at det kan være stor forskjell mellom to argumenter, selv om begge kategoriseres som empiriske. Vi trekker av den grunn frem argumentenes potensial til å nå et gyldig bevis. Det handler om at noen elever kan ha kommet langt i argumentasjonen, selv om de ikke klarer å utforme et gyldig bevis.

Tabellen under er en oversikt over gruppene og deres arbeid. Tabell 3 viser hvilke elever som var på hver av gruppene, hvilke representasjonsformer de tok i bruk, og hvilken type argumentasjon vi fant at gruppene hadde.

Tabell 3:
Oversikt over grupper, representasjoner og argumentasjon.

Gruppe	Navn/deltakere	Representasjon	Argumentasjon
2	Azra, Ina, Olina	Symbolsystemer Visuelle representasjoner	Empirisk argument
3	Marie, Aida, Ozra, Loran	Symbolsystem	Empirisk argument
		Naturlig muntlig språk	Generisk eksempel
		Naturlig skriftlig språk	Empirisk argument
4	Olivia, Asja, Lars	Symbolsystemer Visuelle representasjoner	Empirisk argument
5	Laura, Rasmus, Oskar, Erik	Naturlig muntlig språk	Generisk eksempel
		Symbolsystemer	Empirisk argument

4.1 Symbolsystemer og matematiske utregninger

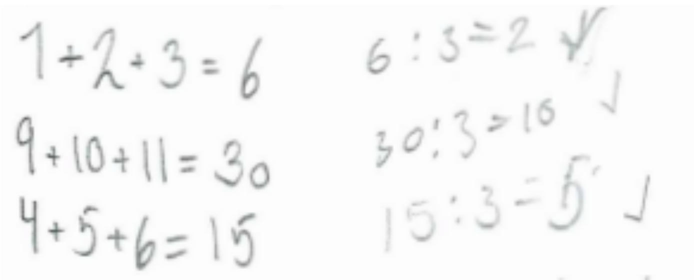
Hvordan elevene bruker symbolsystemer påvirker hvilken type argument de produserer. I datamateriale vårt er symbolsystemer i form av matematiske utregninger fremtredende, og vi finner symbolsystemer på svararket til samtlige av de fem gruppene, se tabell 3. Analysene våre viser at det varierer hvordan elevene bruker denne representasjonsformen i argumentasjonen, og hvilken type argument de oppnår. Vi skiller mellom aktiv og passiv bruk av representasjoner. Som det kommer frem i tabell 3, er en tendens i datamaterialet at elevene som hovedsakelig benytter seg av symbolsystemer som representasjonsform, presenterer et empirisk argument.

4.1.1 Passiv bruk av symbolsystemer og empirisk argumentasjon

Vi fant at elever som brukte symbolsystemer passivt godtar empiriske argument som bevis. For to av gruppene, 3 og 4, ble symbolsystemene kun brukt for å presentere et empirisk argument. Basert på utprøving av noen konkrete eksempler, konkluderte begge gruppene med at påstanden om de tre påfølgende tallene stemmer. Begge gruppene presenterer en rekke bekreftende regnestykker og henviser til disse i argumentasjonen deres. Vi kan derfor kategorisere begge gruppene sin argumentasjon som empirisk. Representasjonene blir ikke benyttet til å utforske hvorfor påstanden stemmer, eller som en aktiv del av prosessen for å komme frem til argumentet, kun til presentasjon av argumentet.

Gruppe 3 presenterer tre bekreftende eksempler for påstanden om at summen av tre påfølgende tall er delelig med tre, se figur 10. Elevene viser at de sitter igjen med et heltall når de deler med tre. I denne gruppen er det en akseptert sannhet at et tall er delelig med et annet, dersom de sitter igjen med et heltall etter å ha dividert det første tallet med det andre. Gruppens definisjon av delelighet samsvarer med hva klassen blir enige om i oppstarten. Denne aksepterte sannheten bruker de som grunnlag for å bestemme om påstandene er sann eller ikke.

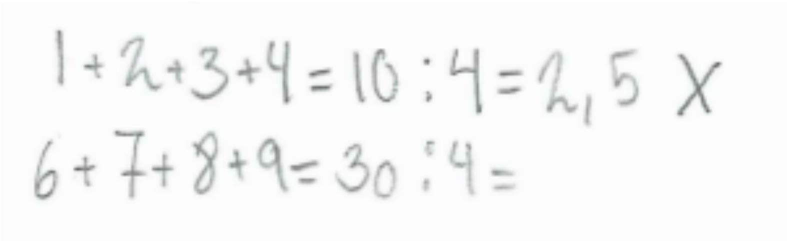
Figur 10:
Gruppe 3 sin fremstilling av tre påfølgende tall ved bruk av symbolsystemer.



Utregningene til gruppe 3 er presentert på en måte hvor de først legger sammen tre påfølgende tall, før de deler summen på tre, se figur 10. Gjennom gruppens fremstilling kan en se at kvotienten er det midterste av de tre påfølgende tallene. Denne sammenhengen kan en bruke som utgangspunkt for videre utforsking for hvorfor påstanden stemmer, for eksempel for å se at det er mulig å danne tre like tall. Selv om elevene ikke kommer lengre enn å presentere et empirisk argument, mener vi det ligger et større potensial i deres fremstilling av argumentet. Med et større potensial mener vi en større mulighet til å nå en generell argumentasjon, og vi anser det som mulig at gruppen med veiledning kunne bygget videre på argumentasjonen og utviklet et gyldig bevis. Denne vurderingen henger også sammen med hva som kom frem i den muntlige diskusjonen deres, noe vi kommer tilbake til i kapittel 4.3.1. Nedenfor er et utdrag hentet fra gruppe 3 sin diskusjon om gyldigheten til påstanden om fire påfølgende tall.

Loran — Seks pluss sju, tretten. Pluss åtte. Blir tjueen. Pluss ni, tretti. Det går ikke.
Marie — Hva blir det da?
Loran — Tretti.
Marie — Ja? Tretti kan ikke deles på fire, kan det det? Nei? Det går ikke opp i firegangen. Tredve. Så det går heller ikke. Men det kan jo være noen ganger? Så vi burde ta noen tilfeldige tall.
…
Marie — Si noen påfølgende tall. Fire tall.
Aida — Fire til åtte
Marie — Nei, noe annet. Over ti, liksom.

Figur 11:
Gruppe 3 sin fremstilling av fire påfølgende tall ved bruk av symbolsystemer.

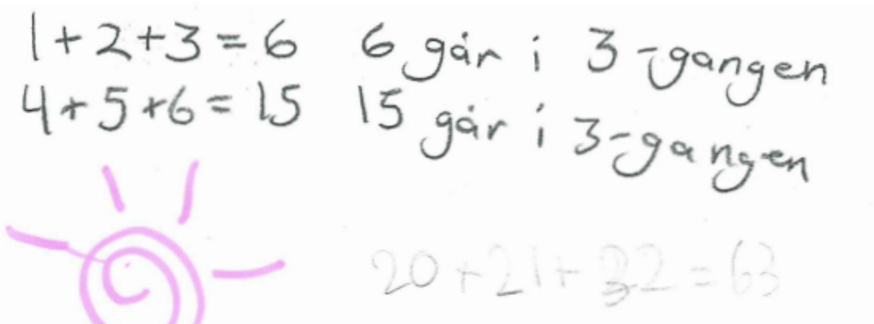


For påstanden om fire påfølgende tall bruker gruppe 3 samme strategi som for påstanden om tre påfølgende tall, se figur 11. De summerer de påfølgende tallene, og deler med antall ledd. Det er en akseptert sannhet i denne gruppen at et tall er delelig med et annet dersom en sitter igjen med et heltall. Da elevene summerte tallene fikk de et desimaltall og satt et kryss bak svaret. Det kan virke som om dette er for å markere at påstanden ikke stemmer. I likhet med den første påstanden, finnes det ingen videre kommentar eller forklaring på hvorfor påstanden ikke stemmer.

Gruppe 4 hadde en annen tilnærming, se figur 12 og tilhørende dialogutdrag. For gruppe 4 er det en akseptert sannhet at et tall er delelig med tre dersom det er i tregangen. Denne definisjonen av hva som er *delelig med,* skiller seg fra hva klassen diskuterte seg frem til ved øktens oppstart. I figur 12 viser gruppen at summen av de tre påfølgende tallene er delelig med tre ved å kommentere at kvotienten er et tall i tregangen. Denne tilnærmingen kan bli utfordrende ved høyere tall hvor summen overstiger 30 og den lille gangetabellen. Vi regner med at de fleste elevene ikke umiddelbart ser om høyere tall er en del av tregangen. Det kan tenkes at dette var problemet elevene møtte da de kom med eksemplet $20 + 21 + 22 = 63$. Regneeksempelet er notert på arket deres, men det er forsøkt visket ut, se figur 12. På arket er det ingen kommentar om at 63 er i tregangen. Sammenlignet med gruppe 3 sin tilnærming, kan en si at denne metoden gir mindre rom for videre utforskning. Det fremkommer ikke et like tydelig system i resultatene deres. Elevene i gruppe 4 kunne funnet et system om de hadde gått systematisk til verks. Hadde de fortsatt med $2 + 3 + 4 = 9$ etter å ha prøvd $1 + 2 + 3$, og fortsatt videre derfra med $3 + 4 + 5 = 12$ og $4 + 5 + 6 = 15$, ville de stegvis beveget seg gjennom tregangen. Elevene i gruppe 4 «hoppet over» to steg. Det kan ha gjort at de gikk glipp av oppdagelsen om at summen, i likhet med tregangen, alltid vokser med tre.

Asja	Du (vendt til Olivia) har ditt eksempel, så trenger vi tre eksempel til. (Elevene presenterer noen flere eksempler)
Asja	Okei, da har vi tre eksempel. Da har vi tre eksempel her. Vi skriver ned eksemplene her først.

Figur 12:
Gruppe 4 sin fremstilling av tre påfølgende tall ved bruk av symbolsystemer.



Både gruppe 3 og 4 er opptatt av delelighet og sum når de arbeider med og argumenterer for påstandene. De er ikke opptatt av strukturen i de tre påfølgende tallene, og bruker stort sett tilfeldige tall. Hvordan de oppfatter begrepet delelighet er noe ulikt. Gruppe 3 ønsker å sitte igjen med et heltall, mens gruppe 4 er opptatt av om kvotienten er en del av gangetabellen til divisoren. Slik vi ser det gir gruppe 3 sin representasjon større rom for videre utforsking og vi ser mer potensial i deres strategi.

Begge gruppene har en passiv bruk av representasjoner. Representasjonene har ikke en annen funksjon enn å presentere et par konkrete regneeksempler, og blir i så måte ikke aktivt brukt i argumentasjonen. I argumentene til de to gruppene presenteres bare enkelttilfeller hvor påstandene enten bekreftes eller avkreftes. Det blir ikke gjort noen generaliseringer, eller trukket linjer til andre eksempler. Dette er typiske trekk ved empirisk argumentasjon. Symbolsystemene elevene bruker er en representasjonsform som er godkjent innad i klassefellesskapet. Utregningene er matematisk korrekt, men det som gjør at det ikke oppfyller A. Stylianides (2007) sitt andre krav til et gyldig bevis er at de trekker konklusjoner for tidlig.

Fra transkripsjonen kommer det frem at Asja fra gruppe 4 mener det er nok med tre til fire bekreftende eksempler, se transkripsjon til figur 12. Å godta en matematisk påstand basert på noen konkrete eksempler, er et tydelig tegn på empirisk argumentasjon. Basert på eksemplene elevene har presentert, konkluderer de med at det alltid vil fungere ved å skrive, «Ja, dette funker alltid! Uansett hva tall man bruker» på svararket.

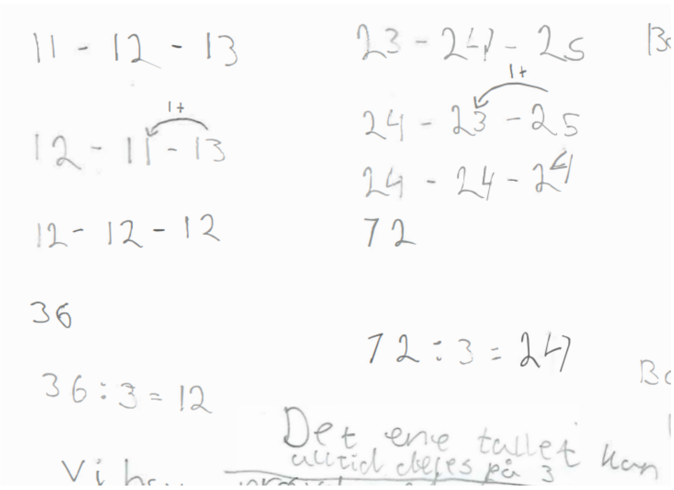
Samtidig som flere elever ser ut til å godta empiriske eksempler som bevis, ser vi at det ikke er alle som godtar dem umiddelbart. Elevene ønsker å utforske høye, avanserte eller tilfeldige eksempler. Denne tilnærmingen kom blant annet frem da elevene på gruppe 3 diskuterte påstanden om fire påfølgende tall. Frem til dette punktet har gruppen bare testet påstanden på lave tall. I transkripsjonen til figur 11 uttrykker Marie «Men det kan jo være noen ganger? Så vi burde ta noen tilfeldige tall». Det viser at elevene ikke er overbevist om at påstanden ikke stemmer, selv om de første eksemplene deres antyder det. Videre ønsker elevene å teste tall som er høyere, noe som kan tyde på at elevene har en tanke om at høye og i deres øyne avanserte tall, gir større validitet. Et eksempel på dette er når Loran foreslår å teste ut eksempelet en million pluss en million og en, pluss en million og to og begrunner det med «Fordi det er vanskeligst å finne ut». Dette kan minne om hva Balacheff (1988) omtaler som *crucial experiment.*

4.1.2 Aktiv bruk av symbolsystemer

Elevene som brukte symbolsystemer aktivt, kom nærmere et gyldig bevis og hadde et større potensial i argumentasjonen sin, enn elevene som brukte symbolsystemer passivt. Gruppe 2 bruker symbolsystemene aktivt i argumentasjonen. Det skiller seg fra gruppe 3 og 4 sin bruk av representasjoner, som kun skrev noen regnestykker for å vise konkrete eksempler. I figur 13 ser vi hvordan elevene i gruppe 2 gjennom to ulike eksempler, danner tre like grupper ved å flytte $+1$ fra det største til det minste tallet. I transkripsjonsutdraget nedenfor forklarer Ina hvordan de har gått frem, og hvordan de med piler har bearbeidet tallene.

Ina	Så vi har valgt for eksempel elleve, tolv og tretten. Så da tok vi tolv, og så flytta vi over en fra tretten til elleve, som betyr at da ble det tolv, tolv, tolv, som blir trettiseks. [...] siden det ene tallet av de tre alltid er delelig på tre så kan du på en måte bruke de to andre og flytte over slik at de blir også delelig på tre de to andre. Så da funker det.

Figur 13:
Gruppe 2 sin fremstilling av tre påfølgende tall ved bruk av symbolsystemer.



I figur 13 ser vi og at elevene har skrevet «Det ene tallet kan alltid deles på 3». Elevene mener at det alltid er et av de tre tallene som er delelig med tre, og at en kan flytte $+1$ mellom de to andre for at de og skal bli delelig med tre.

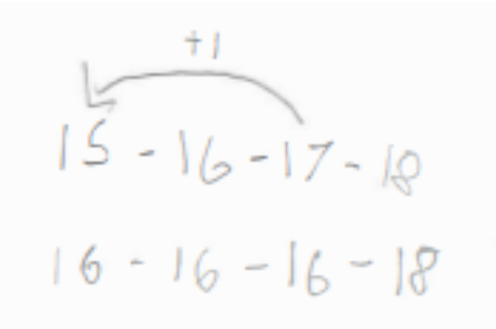
I denne gruppen er det en akseptert sannhet at «dersom hvert av leddene er delelig med tre, er også summen delelig med tre». Det er av denne grunn elevene søker å danne tre tall som er delelig med tre. For begge talleksemplene gruppen presenterer, fungerer denne oppfatningen sammen med strategien om å flytte $+1$ fra det største tallet til det minste. Det fungerte fordi det midterste av de tre påfølgende tallene i disse situasjonene var delelig med tre. Vi skal senere se at elevene fikk problemer med denne påstanden da de ved et annet eksempel satt igjen med tre like tall som ikke er delelig med tre, se kapittel 4.2.2. Selv om elevenes argument ikke gjelder for alle eksempler, kan vi si at de har kommet med et gyldig bevis for en gruppe tall. Argumentet gjelder for alle tre påfølgende tall hvor det midterste er delelig med tre. Samtidig har gruppe 2 etablert en strategi som kan brukes ved et generisk eksempel, men det forutsetter en forståelse av at «tre like tall danner en sum som er delelig med tre». Dette er ikke en akseptert sannhet i denne gruppen.

Den aktive bruken av symbolsystemene fører til at elevene i gruppe 2 arbeider med strukturer ved de tre påfølgende tallene. Elevene finner en strategi de kan bruke ved alle talleksempler, og som de overfører til andre representasjonsformer. Dette er sentrale prosesser for utviklingen av generelle bevis. Vi kan altså si at argumentasjonen til denne gruppen har et større potensial, og er nærmere et godkjent bevis enn gruppe 3 og 4. I kapittel 4.2.2 ser vi nærmere på hvordan elevene bruker samme strategi med visuelle representasjoner.

I påstanden om fire påfølgende tall benytter gruppe 2 seg av samme strategi som tidligere. I transkripsjonsutdraget nedenfor forklarer Ina hvordan gruppen prøvde å gjøre alle tallene om til tall som er delelig med fire.

Ina	Så vi har gjort det samme som i forrige og prøvd å gjøre det om til tall som kan deles på fire. Men det blir seksten, seksten, seksten og atten, og det går altså ikke opp i fire.

Figur 14:
Gruppe 2 sin fremstilling av fire påfølgende tall ved bruk av symbolsystemer.



På lik måte som tidligere viser de med pil at de flytter $+1$ fra 17 til 15, og at de da sitter igjen med tallene $16 - 16 - 16 - 18$, se figur 14. Da elevene presenterte løsningen til klassen kommenterte de at de forsøkte «å gjøre det om til tall som kan deles på fire», men at det ikke gikk. I likhet med tidligere, er det en akseptert sannhet i gruppen at summen er delelig med fire dersom alle leddene er delelig med fire. Elevene konkluderer med at påstanden ikke stemmer og på svararket har gruppen skrevet «Vi har prøvd med flere kombinasjoner, og det går aldri». Gjennom det gruppen har skrevet på svararket blir det klart at elevenes argumentasjon kan kategoriseres som et empirisk eksempel. De viser ikke til en generell forklaring på hvorfor eksempelet deres ikke fungerer. Det gruppen gjør er å si at de ikke har funnet et eksempel hvor påstanden stemmer. Argumentasjonen oppfyller dermed ikke A. Stylianides (2007) sitt krav om argumentasjonsmåter, og kan bli regnet som et ugyldig argument.

4.2 Visuelle representasjoner

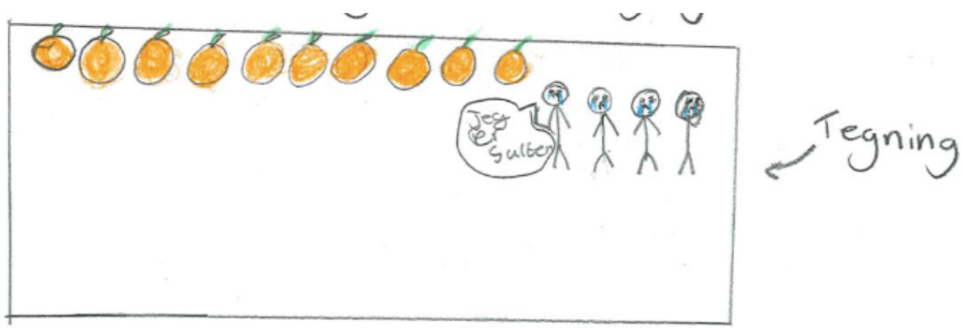
I datamaterialet finner vi at det er to grupper som i form av tegning tar i bruk visuelle representasjoner i argumentasjonen sin. Gruppe 2 og 4 utformet visuelle representasjoner, som de bruker i argumentasjon ved begge påstandene. Vi skiller mellom matematiske og ikke-matematiske visuelle representasjoner. I vårt datamateriale finner vi at matematiske representasjoner i større grad styrker elevenes argumentasjon, enn de ikke-matematiske.

4.2.1 Ikke-matematiske representasjoner i elevenes argumentasjon

I analysen fant vi at visuelle representasjoner som er ikke-matematiske, i liten grad bidro til elevenes argumentasjon. Vi har tidligere argumentert for at gruppe 4 presenterer et empirisk argument for begge påstandene i oppgaven. De bruker både symbolsystemer og visuelle representasjoner for å fremstille dette. Symbolsystemene blir benyttet for å presentere et empirisk argument og vi ser klare sammenhenger med hvordan de tar i bruk de visuelle representasjonene. Gjennom transkripsjonen får vi vite at tegningen utvikles etter at elevene har konkludert med at påstanden om fire påfølgende tall ikke stemmer. Tegningen blir da enda en måte å presentere argumentet deres. Det kommer frem i dialogsutdraget under.

Oliva	Nå kan du lage en liten tegning.
Asja	Ja, men. Hvordan skal vi lage tegning til den?
Olivia	For eksempel hvis du tar en ball, pluss to baller pluss tre baller pluss fire baller er lik tre baller. Og fire baller –.
Asja	Nei, vi tar epler. Vi bare tegner ti epler, Olivia.
Oliva	Og så sier du: fire personer kan ikke dele.

Figur 15:
Gruppe 4 sin fremstilling av fire påfølgende tall ved bruk av en visuell representasjon.



Det at Asja stiller spørsmål om hvordan hun kan «lage en tegning til den» tyder på at hun ikke vet hvordan eksempelet, eller tall, kan fremstilles i en matematisk tegning. Gjennom transkripsjonen blir det tydelig at heller ikke Olivia har en klar visjon om hvordan tegningen skal se ut. Gruppen blir etter hvert enige om å tegne epler, og Olivia legger til «Og så sier du: fire personer kan ikke dele». Tegning blir ikke benyttet som et aktivt verktøy i gruppens argumentasjon for eller mot påstanden.

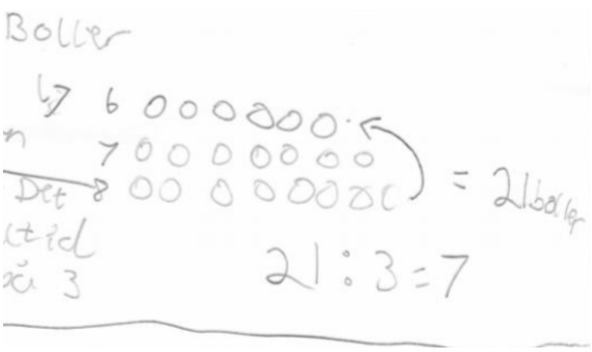
Vi kategoriserer gruppens tegning og deres bruk av den visuelle representasjonen som ikke-matematisk. Årsaken er at tegningen ikke fremstiller matematiske strukturer, sammenhenger eller mønster knyttet til påstanden. I tillegg kommer det ikke frem av tegningen hvorfor påstanden ikke stemmer, se figur 15. Dersom vi ser gruppens tegning i sammenheng med transkripsjonen, forstår en at tegningen er knyttet til ett av eksemplene deres, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. De ti eplene i tegningen representerer summen av tallene, og de fire personene representerer hvor mange summen skal deles på. Det som ikke kommer frem av tegningen er sammenhengen mellom påstanden og eksempelet. Det kommer ikke frem at det handler om fire påfølgende tall. I diskusjonen mellom elevene sier Asja «Vi bare tegner 10 epler», uten å henvise til at 10 er summen av $1 + 2 + 3 + 4$. Tegningen viser fire personer med trist ansiktsuttrykk, samt en snakkeboble hvor det står «jeg er sulten», se figur 15. Vi anser snakkeboblen som gruppas representasjon på at ti ikke er delelig med fire. I tegningen kommer det ikke frem hva som blir gjort, hvorfor summen ikke er delelig eller at påstanden ikke stemmer. Tegningen fremhever ikke noe generelt ved eksempelet som kan overføres til andre tilfeller av påstanden. Ettersom elevenes ikke-matematiske tegning kun er en annen måte å fremstille et konkret eksempel på, bidrar ikke tegningen til å styrke gruppens argumentasjon utover det empiriske argumentet de allerede har presentert med symbolsystemer.

4.2.2 Matematiske representasjoner i elevenes argumentasjon

Vi fant at de matematiske representasjonene var med på å fremme elevenes utforskning, og virket positivt for deres argumentasjon. Gruppe 2 benyttet seg både av symbolsystemer og visuelle representasjoner i argumentasjonen for påstanden om tre påfølgende tall. Gruppen startet med å bruke symbolsystemer for å representere at summen av tre påfølgende tall alltid er delelig med tre. I dette arbeidet fant de et mønster hvor de kunne lage tre like tall, av de tre påfølgende tallene. Gruppen overførte samme strategi til en visuell representasjon vi har kategorisert som matematisk, se figur 16. Utdraget nedenfor er hentet fra gruppens forklaring i gjennomgangen for hele klassen.

Ina	[...] For eksempel, i den der (peker på eksempelet med seks, sju og åtte boller) så liksom blir det jo sju, sju, sju, men sju er jo ikke delelig på tre. Men når du legger det sammen, så blir det et tall som er delelig på tre.

Figur 16:
Gruppe 2 sin fremstilling av tre påfølgende tall ved bruk av en visuell representasjon.

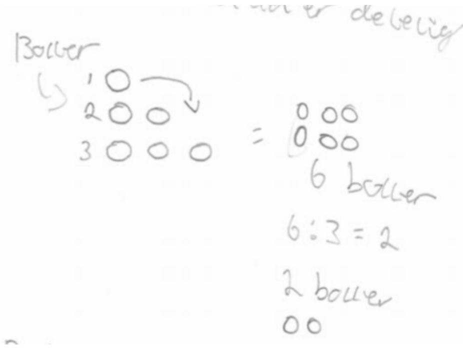


I utdraget ser vi at elevene har funnet en klar struktur og et mønster i eksemplene for påstanden. I figur 16 kan vi se at elevene flytter en bolle fra den største gruppen til den minste, og illustrerer dette med piler. Gruppen viser i tillegg med tallsymboler hva summen blir, og at den er delelig med tre. Gjennom det systematiske oppsettet blir det tydelig at summen består av tre påfølgende tall. Dette skiller seg fra tegningen til gruppe 4, som tegnet ti epler uten å vise til at det representerte regnestykket $1 + 2 + 3 + 4$. Elevene i gruppe 2 bruker tegningen som et aktivt verktøy i argumentasjonen sin, og tegningen er med å bedre kvaliteten i elevenes argumentasjon. Overføringen elevene gjør fra talleksemplene til tegningen, er et trekk ved generell argumentasjon. Tegningen viser at elevene har funnet en metode for å bearbeide tre påfølgende tall som fungerer for alle eksempler.

Et annet tilfelle hvor elevene har brukt tegning av boller, er i eksempelet $1 + 2 + 3$. Elevene viser med en pil at de også i dette eksempelet flytter en bolle for å skape like grupper, se figur 17 nedenfor. I dette eksempelet ender gruppe 2 opp med to like grupper med boller, i stedet for tre. Det skiller seg fra alle andre eksempler gruppen tidligere har presentert.

Tegningen viser at de har to grupper med tre boller. Hadde de fulgt samme strategi som tidligere, ville de endt opp med tre grupper med to boller. Selv om gruppen er opptatt av å lage like grupper, ser vi i figur 17 at elevene fortsatt refererer til summen, for å argumentere for påstandens gyldighet.

Figur 17:
Gruppe 2 sin visuelle representasjon av et eksempel for påstand 1.

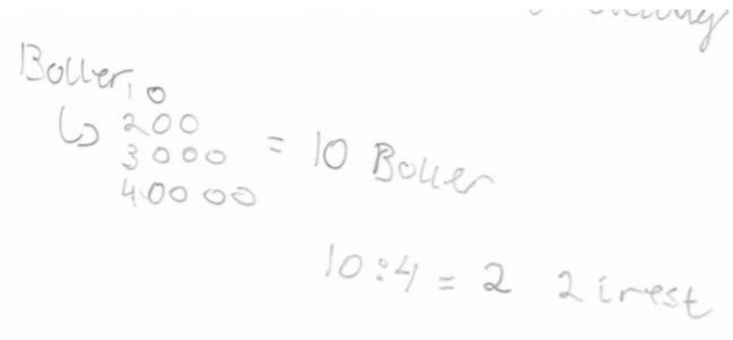


Den måten gruppen har valgt å dele inn boller på, kan ses i sammenheng med hvordan elevene argumenterer i kapittel 4.1.2. Elevene ser at hvert tall er delelig med tre, og bruker dette i argumentasjonen for at påstanden stemmer. Dette er også tilfellet i figur 17, hvert ledd er delelig med tre. Det er likevel verdt å merke seg at vi ikke har tilgang til videoopptak eller transkripsjoner av denne gruppen. Det er kun elevbesvarelsene og samtalene fra oppsummeringen som har vært grunnlaget for vår analyse. Vi vet dermed lite om prosessen og bakgrunnen for gruppens utvikling av eksemplet.

Selv om elevene i gruppe 2 har funnet en generell strategi de kan overføre til alle eksempler, kategoriserer vi argumentet deres som et empirisk argument. De har funnet en representasjonsmåte de kan overføre, men mangler en felles argumentasjonsmåte for alle tilfellene. I eksemplene elevene viser til, kommer det frem at elevene har ulike forklaringer på hvorfor summen er delelig på tre, og at påstanden stemmer. I figur 16 tar gruppen utgangspunkt i summen når de argumenterer for at påstanden stemmer. I talleksemplene fra symbolsystemene og tegningen av boller i figur 17, tar gruppen utgangspunkt i at hvert av tallene er delelig med tre. Elevene bruker ulike forklaringer i argumentasjonen for hvorfor påstanden stemmer, og viser at de ikke har et argument som fungerer for alle eksempler. Gruppen oppfyller altså ikke A. Stylianides (2007) sitt krav om argumentasjonsmåter, og argumentasjonen kan ikke ses på som et gyldig bevis. Som vi kommenterte i kapittel 4.1.2 kan dette henge sammen med en manglende forståelse for at tre like tall gir en sum som er delelig med tre. Det ser vi eksempelvis i figur 16 og tilhørende transkripsjon. Ettersom elevene i utgangspunktet var opptatt av at hvert av de tre tallene skulle være delelig med tre, møtte de på et problem da syv ikke var delelige med tre. De endret argumentasjonen sin og endte opp med å fokusere på summen av de tre tallene. Det at elevene trengte ulike argument for å vise at summen av tre påfølgende tall er delelig med tre, hindrer dem i å skape et generisk eksempel. Hvert av eksemplene blir dermed et konkret eksempel, noe som gjør gruppens argumentasjon empirisk. Vi mener likevel det finnes mye potensial i elevenes argumentasjon da de har funnet ut at det alltid går an å lage tre like grupper av de tre påfølgende tallene.

Gruppe 2 har i tillegg laget en visuell representasjon for påstanden om fire påfølgende tall. Som vi ser i figur 18 har representasjonen tatt utgangspunkt i matematiske strukturer ved påstanden, og vi kategoriserer representasjonen som matematisk.

Figur 18:
Gruppe 2 sin fremstilling av fire påfølgende tall ved bruk av en visuell representasjon.



Elevene har tegnet opp boller som representerer påfølgende tall fra en til fire, se figur 18. I tillegg til bollene viser elevene til summen av de påfølgende tallene og et divisjonsstykke som ikke går opp, for å understreke at påstanden ikke stemmer. Representasjonen blir ikke brukt som et verktøy i argumentasjonen til gruppen. Det skiller seg fra gruppens tegning for påstanden om tre påfølgende tall, hvor de aktivt tar i bruk piler for å peke på strukturer og sammenhenger. Vi mener dermed det finnes mindre potensial for utviklingen av et generelt argument med denne representasjonen, enn for gruppens representasjon til påstand 1.

4.3 Naturlig språk

Alle gruppene benytter naturlig språk for å utvikle sitt argument. Det er likevel kun to grupper vi anser å ha naturlig språk som representasjonsmåte i sin argumentasjon. Felles for disse gruppene er at det er det muntlige språket som er fremtredende i argumentasjonen deres. I utdragene og eksemplene vi trekker frem i dette kapittelet, er det lite nedskrevet på svararket som kan knyttes opp mot den type argumentasjon elevene kommer frem til i den muntlige samtalen. Dette skiller seg fra de andre gruppene. Vi finner at begge gruppene med naturlig språk som hovedrepresentasjon, kommer frem til et generisk eksempel, og dermed et gyldig bevis. Vi finner også at læreren har en sentral rolle i elevenes utvikling av det generiske eksempelet.

4.3.1 I samtale med lærer klarer elevene å legge frem gyldige bevis med naturlig muntlig språk

I samtale med lærer kommer gruppe 3 frem til et argument vi kategoriserer som et generisk eksempel. Elevene har frem til dette punktet presentert et empirisk argument med bruk av symbolsystemer. De viser til flere eksempler for at påstanden om tre påfølgende tall stemmer, men er ikke kommet med en forklaring på hvorfor. Da læreren kom bort til gruppen ble det klart at ikke alle elevene anså det empiriske argumentet deres som et gyldig bevis. Marie kommenterer blant annet at «det forklarer jo ikke hvorfor alle tall funker! [...] Alt vi har skrevet er et regnestykke. Vi forklarer ikke hvordan det blir». Læreren gir gruppen et talleksempel som kan gjøre strukturen i påstanden tydelig, og spør elevene hvordan de ville funnet ut av det, se dialogsutdrag nedenfor:

Lærer	Hvis dere tar nittini pluss hundre pluss hundreogén. Hvordan ville dere funnet ut det?
...	
Lærer	Kan dere tenke veldig smart når jeg sier, liksom, nittini pluss hundre pluss hundreogén. Fordi?

…		
Marie	Du kan flytte over den ene på hundreogén [Lærer: Ja!] til nittini, da har vi hundre,hundre, hundre.
Lærer	Riktig! Og da får du liksom at summen er tre ganger tallet i midten.
…	
Marie	Så egentlig så plusser du alle tall med hverandre. For eksempel, seks, sju, åtte, så flytter du åtte over til seks, så det blir sju, sju, sju.
Lærer	Ja! Og det er derfor det blir delelig med tre.
Loran	Åååååååh!
Marie	Åååååååh!

Læreren ber elevene utforske de tre påfølgende tallene $99+100+101$. I arbeidet med talleksempelet kommer Marie frem til at en «kan flytte over den ene på hundreogen til nittini». Resultatet er at de sitter igjen med tre ganger tallet i midten. Marie brukte det generelle ved dette eksempelet og overførte det til et annet tilfelle. Hun tok med seg strategien om å flytte $+1$ fra det største til det minste tallet for å danne tre like tall, «for eksempel, seks, sju, åtte, så flytter du åtte over til seks, så det blir sju, sju, sju». I samtalen med læreren kom elevene frem til et generisk eksempel. De fant generelle egenskaper ved et eksempel, og overførte det til et annet tilfelle. Argumentet oppfyller alle A. Stylianides (2007) sine krav til gyldig bevis. Det er en akseptert sannhet innad i gruppen at en kan flytte $+1$ fra ett ledd til et annet, uten å endre summen. Argumentasjonsmåten til gruppe 3 går ut på å trekke logiske slutninger basert på den aksepterte sannheten, *tre like grupper utgjør en sum som er delelig med tre*. A. Stylianides (2007) teller argumentet som gyldig dersom argumentasjonsmåten er tilgjengelig med støtte fra lærer. Vi kan derfor si at argumentasjonsmåten er gyldig, selv om det er læreren som kommenterer at «det er derfor det er delelig med tre». Kravet om representasjonsmåter handler om at argumentet skal kommuniseres på en måte som er kjent (A. Stylianides, 2007). Det inkluderer blant annet språket som blir brukt. I denne samtalen brukes et matematisk språk som er tilgjengelig for alle deltakerne i gruppen. De snakker hovedsakelig om sum og delelighet, begreper som begge ble forklart av læreren i oppstarten.

Gruppe 5 er den andre gruppen som oppnår et generisk eksempel. I likhet med gruppe 3 blir det presentert ved bruk av muntlig naturlig språk knyttet til et konkret talleksempel, og det kommer frem i en samtale med en lærer. Se dialogsutdrag nedenfor.

Rasmus	Det skjer alltid, fordi at femten, seksten, sytten, det blir førtiåtte. Og så sytten pluss atten pluss nitten, det blir femtien. Så hvis vi tar ett mer tall uansett enn det vi hadde før så blir det bare plussa på tre hele tida. Det blir..
Lærer	Hvorfor er det viktig at det blir plussa på tre?
Rasmus	Det blir hele tida plussa på tre hvis vi tar ett mer tall, så-
Lærer	Ja, men hvorfor er det viktig, at det blir plussa på tre?
Erik	Fordi da kan det deles på tre.
Rasmus	Fordi da kan det uansett deles på tre, da.
Lærer	Ja, så hvis det første kan deles på tre, så må det neste og kunne deles på tre. [Erik: Åh, sånn, ja!]
Rasmus	Ja, sant. En pluss to pluss tre. [Laura: Ja. Åh!] En pluss to pluss tre, det blir seks. Det er delelig på tre. Og så to pluss tre pluss fire-.

Figur 19:
Talleksempel til gruppe 5.

$15+16+17=48 \quad 16+17+18=51$

Rasmus viser til summen av de påfølgende tallene $15+16+17$ og summen av de neste påfølgende tallene $16+17+18$. Poenget hans er at det alltid blir «plussa på tre». Ved hjelp av disse eksemplene fant Rasmus et system knyttet til summen av tre påfølgende tall. Når han går videre til de «neste» tre påfølgende tallene, så blir summen tre større enn det han hadde fra før.

Vi kategoriserer denne gruppens argument som et generisk eksempel. Argumentet tar utgangspunkt i et konkret talleksempel, og er grunnlaget for den generelle konklusjonen om at summen av de tre påfølgende tallene alltid blir tre større. Rasmus bruker talleksemplene i figur 19 til å vise at hvert tall øker med $+1$ og at summen derfor alltid blir tre mer. Talleksempelet blir utgangspunktet for Rasmus da han påpeker generelle egenskaper ved eksempelet som kan overføres til alle tilfeller for påstanden. I tillegg oppfyller argumentet alle kravene til gyldige bevis. Argumentasjonen baserer seg på kjente matematiske prosesser, og en akseptert sannhet knyttet til at tall som er delelig med tre fortsatt er det dersom en legger til tre. Samtidig er både argumentasjons- og representasjonsmåtene matematisk korrekt og tilgjengelig for alle elevene i gruppen.

I likhet med gruppe 3, har læreren en aktiv rolle i samtalen hvor det generiske eksempelet kommer frem. Det er læreren som utfordrer elevene til å diskutere hvorfor det er viktig at det blir lagt til tre. Lærerens rolle i diskusjonen er med på å fremprovosere Erik sitt utsagn «fordi da kan det deles på tre». Læreren følger opp med å si at «Ja, så hvis det første kan deles på tre, så må det neste og kunne deles på tre». Med denne kommentaren oppsummerer læreren, og hjelper elevene å sette ord på det de prøver å forklare. Rasmus forsøker å vise at det fungerer for alle tall, ved å vise til et annet eksempel, $1+2+3$ og $2+3+4$.

4.3.2 Overgang mellom muntlig og skriftlig språk var utfordrende for elevene

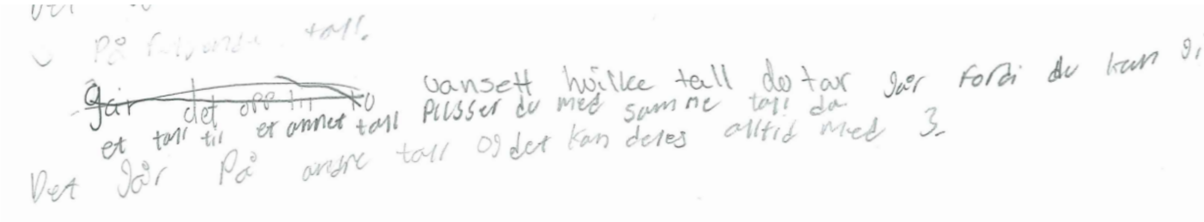
Etter å ha analysert datamaterialet finner vi kun to grupper som har en argumentasjon som ifølge A. Stylianides (2007) og G. Stylianides (2008) sine krav kvalifiserer til et gyldig bevis. Felles for argumentene er at begge skjer i samtaler og gjennom naturlig muntlig språk. Selv om vi har sett ulike nivåer av empirisk argumentasjon i elevenes tegninger og symbolsystemer, er det ingen som ved bruk av disse representasjonsformene når et gyldig bevis.

I datamaterialet finner vi flere eksempler på at elevene har utfordringer med å utrykke argumentene sine skriftlig. Dette kom først frem da vi så nærmere på argumentasjonen til elevene som brukte muntlig naturlig språk som sin representasjonsform. Selv om vi har kategorisert argumentasjonen til gruppe 3 og 5 som generiske eksempel, klarer ingen av gruppene å gi en skriftlig forklaring som oppfyller kravene for et gyldig bevis.

Sammen med lærer kommer gruppe 3 frem til et generisk eksempel. Etter oppfordring fra læreren prøver elevene å notere ned argumentet sitt og hva de er kommet frem til, se figur 20 og transkipsjonsutdrag nedenfor.

Lærer	Okei. Prøv å skrive det argumentet, da. Prøv å skrive et kjempebra argument.

Figur 20:
Gruppe 3 sin skriftlige forklaring på svararket.

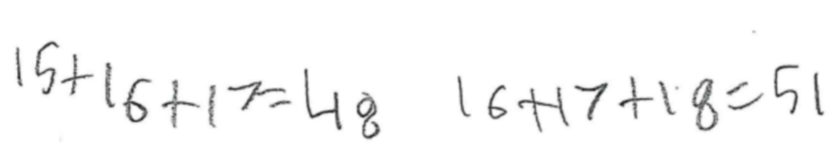


Elevene forsøker å notere ned det som er blitt diskutert, men de klarer ikke tilfredsstille hva G. Stylianides (2008) vil definere som et gyldig bevis på papiret. På svararket skriver elevene «uansett hvilke tall du tar går det fordi du kan gi et tall til et annet tall. Plusser du med samme tall da. Det går på andre tall og det kan deles alltid med 3», se figur 20. Det skriftlige argumentet mangler utfyllende forklaringer og viktig informasjon knyttet til påstanden. Det kommer ikke frem at det dreier seg om påfølgende tall, eller hva som menes med «tallene». Gruppen skriver at en kan «gi ett tall til et annet», men presiserer ikke at det er $+1$ som skal gis fra det største til det minste tallet. Dette forstår en kun ut fra gruppens muntlige diskusjon. De skriver også at strategien vil fungere for andre tall, men viser ikke til hvorfor, eller til noe generelt ved påstanden som gjør det overførbart til alle tilfeller. Det skriftlige argumentet har altså mangler som gjør at det ikke tilfredsstiller et gyldig bevis på samme måte som gruppens muntlige argumentasjon.

Gruppe 5 blir også flere ganger oppfordret av læreren til å skrive ned hva de diskuterer, se dialogutdraget nedenfor. Første gang er når Rasmus skal forklare resten av gruppen hvorfor påstanden om tre påfølgende tall stemmer. Han ender opp med å skrive de to regnestykkene som er utgangspunktet for argumentet hans, se figur 21. Rasmus skriver ikke en mer utfyllende forklaring knyttet til hvorfor regnestykkene kan fungere som et generisk eksempel.

Rasmus	Det blir. Se her. Hvis man tar seksten-
Lærer	Skriv opp! Skriv! Femten, seksten, sytten. Sånn at man ser hva som skjer.

Figur 21:
Talleksempel til gruppe 5 (gjentakende figur for å informere leser).



Rasmus forklarer resten av gruppen hvorfor påstanden stemmer, og læreren oppfordrer gruppen igjen til å skrive ned argumentet sitt. Se transkripsjonen nedenfor. Utdraget er hentet fra slutten av gruppearbeidet og elevene fikk ikke tid til å notere ned et argument.

Lærer	Det der må dere skrive ned! Pronto!
…	
Lærer	[...] Men var dere enige om en begrunnelse nå?
Laura	Ja
Lærer	Skriv opp!

Det er altså ingen av gruppene som skriver ned et fullverdig bevis selv om de muntlig diskuterer seg frem til et gyldig bevis. Gruppe 3 prøver å skrive ned hva de kommer frem til, men får ikke med vesentlige detaljer og sammenhenger for at argumentet skal oppnå A. Stylianides (2007) sine kriterier for et gyldig bevis. Gruppe 5 er i flere situasjoner på vei mot å skrive ned et argument, men det blir aldri skrevet noe ned på svararket.

5 DISKUSJON

I denne studien har vi undersøkt hvordan et utvalg elever bruker matematiske representasjoner når de argumenterer, og om det henger sammen med deres type argumentasjon. I analysen fant vi at elevene som argumenterte med symbolsystemer presenterte empiriske argument. Samtidig var det stor forskjell i potensialet til de ulike fremstillingene av argumentene. Gruppene som tok i bruk visuelle representasjoner i argumentasjonen, presenterte også et empirisk argument. I likhet med hva vi så ved bruk av symbolsystemer, var det også her stor forskjell i potensialet til å nå et gyldig bevis. Det handlet om utformingen av den visuelle representasjonen, og hvordan elevene tok den i bruk. Datamaterialet er lite, og det er derfor begrenset hvor mye vi kan generalisere på bakgrunn av vår studie. Samtidig har vi sett noen tendenser i elevgruppen, og studien fremstiller måter elever kan ta i bruk matematiske representasjoner når de skal argumentere for en påstand. I diskusjonen ser vi på mulige årsaker til funnene våre, og ser våre funn i sammenheng med vårt teorigrunnlag og tidligere forskning.

5.1 Sammenhengen mellom elevenes bruk av symbolsystemer og type argument de presenterer

I de tilfellene hvor elevene argumenterte med passiv bruk av symbolsystemer, fant vi at empiriske argument ble godtatt som gyldig bevis. Elevene i gruppe 3 og 4 presenterte noen regnestykker for å argumentere for at påstanden om tre påfølgende tall stemte. En årsak til at de argumenterte slik, kan være at de selv ble overbevist av de bekreftende eksemplene. Det kan tenkes at de anså empiriske argument som gyldig bevis, og dermed ikke så behovet for å komme med en mer utdypende forklaring. Dette kan vi se i sammenheng med tidligere forskning som konkluderer med at elever ofte godtar empirisk argumentasjon som gyldig bevis (Healy & Hoyles, 2000; G. Stylianides et al., 2017; Widjaja et al., 2019). Den psykologiske komponenten i G. Stylianides (2008) sitt rammeverk, sier at elever kan tro at deres egne argument er gyldige, selv om de ikke er matematisk korrekte. Begge gruppene konkluderte etter å ha undersøkt flere tilfeller for påstanden. Vi vet at enkelte elever blir overbevist av å finne et avgjørende eksempel de ikke anser som for spesielt (Balacheff, 1988). Det kan virke som om dette var tilfelle for enkelte grupper da de anså påstanden som sann etter å ha undersøkt tilfeldige eksempler, og eksempler basert på høye tall. Konklusjonen baserer seg gjerne på en tanke om at «om det gjelder for dette, må det gjelde for alle».

En annen forklaring til sammenhengen vi ser mellom passiv bruk av symbolsystemer og det å godta empirisk argumentasjon, kan være at representasjonen ikke legger opp til videre utforskning. Stylianou (2013) finner i sin forskning at matematiske representasjoner kan ha innvirkning på utviklingen av argumenter, da de påvirker hvordan elever former generaliseringer og rettferdiggjør eget arbeid. Vi har liknende funn i vår studie. Alle gruppene som hovedsakelig brukte symbolsystemer, argumenterte empirisk. Likevel kom vi frem til at det var forskjellig kvalitet på argumentene, og at det hadde en sammenheng med hvordan de brukte representasjonene. Gruppen som hadde en aktiv bruk av symbolsystemer, kom nærmere et gyldig bevis enn gruppene som hadde en passiv bruk.

I analysen fant vi at måten gruppe 3 og 4 brukte symbolsystemer på, ikke la til rette for å se strukturer og sammenhenger i eksemplene de presenterte. Når en ikke klarer å trekke frem generelle egenskaper, blir det vanskelig å argumentere for hvordan konkrete eksempler henger sammen med andre tilfeller for påstanden (G. Stylianides, 2008). Det å se sammenhengen mellom eksempler ved å peke på generelle trekk, er nødvendig for å løfte et empirisk argument til et generisk eksempel. Vi fant at gruppe 2 hadde en aktiv bruk av symbolsystemer, og disse elevene kom nærmere et gyldig bevis, noe som også kan ses i sammenheng med Stylianou (2011) sin forskning. I likhet med andre forskere fant hun at representasjoner kan fungere som et verktøy som fasiliterer for utforskning (Arcavi, 2003; Bakar et al., 2016; Greeno & Hall, 1997; Kilpatrick et al., 2001; Morais et al., 2018). I tillegg fant Stylianou (2011) at fleksibel bruk av representasjoner som tillater manipulering, legger til rette for å oppdage ny informasjon og nye sammenhenger. Det samsvarer med hva som kom frem i vår studie. Elevene i gruppe 2 brukte representasjonen som et verktøy for å utforske strukturer og sammenhenger ved de påfølgende tallene. Det bidro til at de utarbeidet en strategi de kunne benytte for alle tilfeller for påstanden.

5.2 Elevers bruk av visuelle representasjoner kan ha innvirkning på type argumentasjon

Visuelle representasjoner kan være nyttige for elevers utforskning og mulighet til å se sammenhenger (Bakar et al. 2016; Greeno & Hall, 1997; Stylianou, 2011; Stylianou, 2013), men det finnes ingen garanti for at tegningen i seg selv vil føre til utforskning (Arcavi, 2003). I datamaterialet så vi at elevenes utforming og bruk av visuelle representasjoner hadde innvirkning på elevenes type argumentasjon. Vi så også at elever som tok i bruk en matematisk tegning hadde mer potensial for å nå en generell argumentasjon, enn elever som utformet en ikke-matematiske tegning.

Elevene i gruppe 4, som lagde en ikke-matematisk tegning, fikk lite utbytte av den med tanke på hvilken type argumentasjon de oppnådde. Tegningen ble laget på eget initiativ, men utformet etter at elevene hadde konkludert med påstandens gyldighet. En kan hevde at tegningen til gruppe 4 blir hva Saundry og Nicol (2006) omtaler som en *tegning av* problemet og som kun viser overfladisk informasjon. Fra analysen så vi at gruppens tegning hadde matematiske mangler og dermed ikke bidro til utforskning av sammenhenger i påstanden. Dette samsvarer med Saundry og Nicol (2006) sin påstand om at elever som bruker tegning på denne måten går glipp av viktige matematiske poeng i problemet. De matematiske manglene i tegningen viser i tillegg at gruppen ikke mestrer konverteringene. Mye informasjon forsvant da elevene beveget seg fra symbolsystemer til den visuelle representasjonen. Tidligere forskning viser til betydningen av å mestre konverteringer for å utvikle matematisk kompetanse og utforskning (Duval, 2006; Heinze et al., 2009; Kilpatrick et al., 2001; Stylianou, 2011). En kan påstå at gruppens manglende kompetanse og evne til å se sammenhenger i påstanden hindrer dem i å utbedre argumentet sitt når de beveger seg til en ny representasjonsform.

Læreren påpekte ved øktens oppstart at en tegning kan bidra til å styrke argumentasjonen. Dette kom også frem gjennom oppgavearket elevene ble tildelt. Lærerens kommentar kan være en forklaring på hvorfor enkelte elever utformet en tegning etter å ha konkludert med påstandens gyldighet. Det at tegningen kun blir en fremstilling av et konkret eksempel, kan tyde på at elevene er mer opptatt av å presentere et svar, enn å gjøre rede for argumentasjonen sin og hvorfor påstandene stemmer alltid, aldri eller noen ganger. Dette er en utfordring også A. Stylianides (2016) trekker frem, og mener det henger sammen med et for snevert fokus på bevisaktiviteter i matematikkundervisningen. Elevenes bruk av den visuelle representasjonen kan ha sammenheng med hvordan elevene er vant til å arbeide i matematikkundervisningen, og at elevene ikke vet hvordan tegning kan brukes som et verktøy for argumentasjon. Selv om flere studier viser til at tegning kan være et nyttig verktøy for utforskning og problemløsning (Bakar et al., 2016; Stylianou, 2011), påpeker Bakar et al. (2016) at dette forutsetter god veiledning og innføring av læreren.

I analysen fant vi at elever som tok i bruk en matematisk tegning i argumentasjonen sin, hadde større potensial for å nå et gyldig bevis enn de som lagde en ikke-matematisk tegning. Gruppe 2 utformet en tegning som oppfyller A. Stylianides (2007) sine krav om representasjonsmåter, og brukte den som et verktøy for videre utforskning. Strukturen gruppe 2 fremhever i tegningen, gjør at vi anser denne gruppen å ha kommet ett steg nærmere en generell argumentasjon, enn gruppe 4 som hadde en ikke-matematisk tegning. Gruppens representasjon kan kategoriseres som det Saundry og Nicol (2006) omtaler som en *tegning for* problemet. Om en bruker tegning aktivt i prosessen for å utarbeide et argument, kan det øke elevenes forståelse av matematiske sammenhenger og konsept (Greeno & Hall, 1997; Saundry & Nicol, 2006; Stylianou, 2013). Også Morais et al. (2018) peker på at elevers bruk av representasjoner kan bygge opp om elevenes resonneringsprosesser og utforskning. En kan dermed argumentere for at elevene ved å ha brukt tegningen som et verktøy i argumentasjonen og resonneringsprosessen, i større grad har sett sammenhenger og generelle strukturer i påstanden, enn elevene med den ikke-matematiske tegningen. Vårt funn samsvarer med Greeno og Hall (1997), som fant at elever som var delaktige i utviklingen av representasjoner som løsningsverktøy, vil få en dypere matematisk forståelse og innsikt i problemet.

Stylianou (2011) fant i sin forskning fordeler med å ta i bruk flere representasjonsformer og veksle mellom disse. En kan se dette i sammenheng med hva Duval (2006) skriver om overgangene i representasjonssystemet. Det er i konverteringene at kognitive prosesser skjer, forståelsen øker og muligheten til å se sammenhenger oppstår (Duval, 2006). Vi ser at gruppe 2 veksler hyppig mellom representasjonsformene symbolsystemer og tegning, i tillegg til den muntlige diskusjonen gruppen har. Det at gruppen mestrer konverteringene kan være en forklaring på at vi anser dem å ha kommet lenger i argumentasjonen enn eksempelvis gruppe 4 som ikke mestrer overgangene. Dette samsvarer med tidligere forskning (Heinze et al., 2009; Kilpatrick et al., 2001; Stylianou, 2011) som viser til at evnen til å veksle mellom representasjoner er viktig for elevenes matematiske forståelse, kommunikasjon av problemet og evne til utforskning.

5.3 Gjennom samtale med lærer klarer elevene å legge frem gyldig bevis

I analysen fant vi at det var to grupper som presenterte et gyldig bevis i form av et generisk eksempel. Argumentene kom frem i samtale, og lærerens innspill i samtalen var på hver sin måte avgjørende for at det ble formulert et gyldig bevis. Gruppe 3 nådde et generisk eksempel da de fikk et tydelig eksempel fra læreren. Gruppe 5 var derimot avhengig av at læreren stilte oppfølgingsspørsmål om hvorfor ulike detaljer i forklaringen deres var viktig for at argumentasjonen skulle bli generisk.

Duval (2006) definerer at muntlig naturlig språk handler om å forklare med vanlig språk. Ettersom det inngår i hverdagsspråket, kan det oppleves tilgjengelig for elevene. For mange elever kan den muntlige samtalen gjøre det lettere å delta i diskusjonen, da det er en representasjonsmåte og verktøy som er tilgjengelig uavhengig av matematisk nivå. At alle elevene hadde tilgang til, og mulighet til å delta i den faglige samtalen, var en viktig faktor i arbeidet til både gruppe 3 og 5. Dette er viktige aspekter innenfor Vygotskys (1978) sosiokulturelle læringsteori, hvor språket og interaksjonen med andre blir ansett som de viktigste verktøyene for læring. Det at det nettopp var i de muntlige diskusjonene at elevene kom frem til et gyldig bevis, kan dermed ses i sammenheng med det teoretiske grunnlaget denne studien bygger på.

I undervisningsøkten observerte vi ulike kommunikasjonsformer i samtalene mellom elevene. Det virker som om elevenes diskusjoner skapte ulikt potensial i arbeidet og argumentasjonen deres, og at enkelte former for diskusjoner i større grad bidro til læring og utforskning enn andre. I noen grupper så vi at elevene hadde stor tiltro til hverandre, og ukritisk bygget på hverandres utsagn. Det kommer eksempelvis frem når Aida sier «Jeg har en skikkelig bra grunn. Går det opp til ti, så vil det gå opp til nesten alle, eller alle tall» og Loran responderer med «Faktisk sant. Fordi tigangen går opp til alle som har null i seg». Her bygger elevene på hverandres påstander selv om påstandene ikke stemmer. I andre grupper så vi at elevene i større grad stilte seg kritiske til hverandres ideer og forslag, se transkripsjon av samtale mellom Marie, Loran og lærer i kapittel 4.3.1. Vi opplevde at gruppene som utfordret hverandre med kritiske innspill og konstruktive spørsmål førte til mer utforskning og ga en mer generell argumentasjon. Dette stemmer overens med Mercer og Wegerif (1999) sin forskning om utforskende samtaler.

Å ha en utforskende samtale hvor en kommer med innspill og spørsmål, åpner opp for å avklare usikkerheter underveis i arbeidet (Mercer & Wegerif, 1999). På denne måten kan en si at språk og interaksjon med andre kan ha en positiv virkning for læringsprosessen, noe Vygotsky (1978) trekker frem som sentralt i den sosiokulturelle læringsteorien. Dette står i kontrast til det skriftlige språket hvor en må være konkret og tydelig for å sikre at leseren oppfatter budskapet i argumentet. I analysen av gruppe 5 sitt arbeid fant vi lite skriftlig arbeid. Ut fra transkripsjonene kan det virke som om elevene opplever det utfordrende å representere argumentasjonen sin skriftlig, se kapittel 4.4. Gruppen ender opp med å kun skrive ned det konkrete eksempelet Rasmus bruker i forklaringen sin. Elever kan oppleve det utfordrende å bevege seg mellom representasjoner (Duval, 2006, Heinze et al., 2009), og det kan virke som om elevene i denne sammenheng sliter med overgangen fra muntlige til skriftlige representasjoner.

I tillegg til at den muntlige samtalen er tilgjengelig for alle elevene, kan det være en fordel at læreren også har tilgang til den muntlige diskusjonen. Vi fant at innspill og veiledning fra læreren kan være avgjørende for hvor langt elevene kommer i argumentasjonen, og om de klarer å formulere et gyldig bevis. Den pedagogiske komponenten presiserer at det er lærerens oppgave å identifisere avvik mellom elevens oppfatning av matematikk og matematikkens natur (G. Stylianides, 2008). Deretter skal læreren ta hensiktsmessige pedagogiske valg. Når elevene diskuterer seg imellom får læreren innblikk i elevenes tankerekker, og har en mulighet til å veilede dem underveis. I vår analyse anså vi det som en styrke at læreren gjennom spørsmål og kommentarer kunne styre samtalen, samt bekrefte og trekke frem sentrale utsagn fra elevene. Mata-Pereira og Ponte (2017) fant liknende i sin forskning da de så lærerens handlingsmønster og veiledning som avgjørende for at eleven skulle forbedre argumentasjonen sin. Lærerens deltakelse og rolle i diskusjon kan altså være avgjørende for elevenes videre utforskning og type argumentasjon. Tidligere forskning viser også at elever helt ned på barnetrinnet kan gjøre rede for og argumentere for matematiske sammenhenger så lenge de støttes og oppfordres av en lærer (Ball & Bass, 2003). Det at lærere er bevisst dette, og kjenner til påvirkningen de har, mener vi kan være avgjørende for elevers læringsutvikling. Ved å fremheve viktige utsagn blant elevene og gi gode eksempler til utforskning, kan læreren hjelpe elevene uten å gi dem et svar.

5.4 Studiens implikasjoner

Vårt mål ved oppstarten av denne studien var å undersøke om det fantes noen sammenheng mellom hvordan elevene tok i bruk matematiske representasjoner og hvordan de argumenterte for en påstand. Motivasjonen vår var knyttet til egne erfaringer fra klasserom, og eget arbeid hvor vi selv så verdien av å ta i bruk representasjoner for å utforske matematiske problemer. I tillegg fant vi at det er gjort lite forskning av elevers argumentasjon på mellomtrinnet (A. Stylianides, 2016), og lite forskning på sammenhengen mellom elevers argumentasjon og bruken av representasjoner (Saundry & Nicol, 2006; Stylianou, 2013). Ettersom argumentasjon har fått en større plass i læreplanen etter innføringen av LK20, anså vi det som nyttig å bidra til dette forskningsfeltet.

Etter å ha gjennomført studien har vi fått et innblikk i hvordan enkelte elever arbeider med argumentasjon, og hva som kan være nyttig som lærer å ta hensyn til i undervisningen. Argumentasjon er tidligere blitt behandlet som en isolert prosess i undervisningen (G. Stylianides, 2008), men ved innføringen av LK20 skal argumentasjon som kjerneelement inkluderes i alle emner (Kunnskapsdepartementet, 2019). For å utvikle elevenes evne til å argumentere må en skape en endring i hva det blir fokusert på i arbeidet med matematikk. I klasserommet vil det være viktig å utarbeide aktiviteter som legger til rette for argumentasjon og diskusjon blant elevene. For lærere vil det være avgjørende å være bevisst på hvilke arbeidsmåter som blir tatt i bruk for å flytte fokus fra svar til prosess, samt å kunne argumentere for svaret sitt. Utfordringen blir å etablere en ny praksis og måte å arbeide med matematikk på i klasserommet, noe som kan ta tid både for lærere og elever. Dette er utfordringer også Stylianides et al. (2013) pekte på da han undersøkte lærernes undervisning i argumentasjon og bevis. Det at elever blir introdusert for bevisaktiviteter sent i opplæringen blir også sett på som en utfordring (A. Stylianides, 2016). Vi ser likevel at enkelte elever i vårt datamateriale, etter kun fire økter med en ny tilnærming til oppgaveløsning, allerede fokuserer på det å argumentere for svaret. Også Makar et al. (2015) så store endringer i elevenes argumentasjonsevne etter 9 måneders observasjon av en klasse på barnetrinnet. Fra at læreren måtte framprovosere argumentasjon og samtaler mellom elevene, ble argumentasjon en integrert praksis blant elevene i undervisningen og en naturlig del av klasseromsnormen (Makar et al., 2015). En argumenterer for at oppgaver som brukes i dette datamaterialet, kan være nyttig for lærere å ta med seg inn i undervisningspraksisen. Vi anså gruppeoppgaver hvor elevene diskuterte påstanders gyldighet, gjerne med utgangspunkt i eksempler, som en nyttig tilnærming til læring av argumentasjon og bevis. Ozgur et al. (2019) mener også at oppgaver hvor en starter med konkrete eksempler kan være nyttig for utviklingen av et generelt argument i bevisaktiviteter. Vi mener at læringsaktiviteter og arbeidsmåter, sammen med pedagogisk veiledning, vil kunne ha en stor innvirkning på elevenes evne til å argumentere, og er noe lærerne bør være bevisst i undervisning. Dette er aspekter også Ball og Bass (2003) mener er avgjørende for elevenes evne til å argumentere i matematikk.

Gjennom studien har vi i tillegg sett at elevene var bedre til å ordlegge seg muntlig enn skriftlig. Det ble vi oppmerksomme på da vi sammenliknet transkripsjonene av hva elevene hadde diskutert muntlig, og hva som ble notert på svararket. Flere av gruppene diskuterte relevante aspekter ved påstanden som kunne vært nyttige å inkludere i en argumentasjon, uten at det ble skrevet ned. Dette er funn også Widjaja et al. (2019) hadde i sin forskning. Elevene i studien strevde med å uttrykke seg skriftlig, men da de av læreren ble bedt om å utdype svarene, klarte de med muntlig språk eller gjennom representasjoner å begrunne og argumentere for løsningen sin. For lærere vil dette bety at en må være oppmerksom på elevenes arbeid utover det som skjer skriftlig. Det kan foregå mye utforskende arbeid gjennom diskusjoner og samtaler elevene imellom, uten at det blir notert eller at en lærer får det med seg. Betydningen av det muntlige språket i denne studien, kan vi se i sammenheng med språkets rolle i sosiokulturell læringsteori. Samarbeid og diskusjoner mellom elever er i sosiokulturell teori grunnleggende i læringsprosessen, og det er gjennom språklige interaksjoner med andre at utviklingsprosesser og læring skjer (Säljö, 2016). Med bakgrunn i sosiokulturell teori og funnene våre, mener vi det kan være en god tilnærming å arbeide med argumentasjon gjennom diskusjonsoppgaver i grupper.

Tidligere forskning viser at matematiske representasjoner, kan være et nyttig verktøy for elevenes utforskning og argumentasjon (Bakar et al. 2016; Greeno & Hall, 1997; Stylianou, 2011; Stylianou, 2013). Dette stemmer med hva vi kom frem til i vår studie. Vi ser likevel at det finnes store variasjoner mellom elevenes bruk av representasjoner, og at måten elevene benytter seg av dem preger elevenes type argumentasjon. For at representasjoner skal kunne bli et nyttig verktøy for elevene, vil det å gjøre representasjonene tilgjengelig for elevene være viktig. For lærere vil det bety at en må være bevisst måten en selv tar i bruk ulike representasjoner i klasserommet. I tillegg må en sette av tid til å lære elevene hvordan matematiske representasjoner kan fungere som et nyttig verktøy i arbeidet deres. Bakar et al. (2016) og Stylianou (2011) påpeker begge at lærerens veiledning og innføring av representasjoner som et verktøy, er avgjørende for elevenes nytteverdi av representasjoner.

5.5. Studiens begrensninger

Ved bruk av kvalitative forskningsmetoder vil en alltid kunne stille spørsmål til forskernes subjektivitet. Den ustrukturerte formen på kvalitative studier, kan gjøre at forskerens interesser og personlige motivasjon preger analyseprosessen. På denne måten kan en risikere at resultatene blir subjektive (Bryman, 2012). Motivasjonen vår for å skrive denne masteroppgaven var basert på egne erfaringer og positive opplevelser knyttet til bruk av representasjoner. Egen motivasjon kan ha gjort at vi ubevisst har sett etter positive sider ved bruk av representasjoner og dermed preget resultatene våre. Samtidig er dette noe vi har vært bevisst, og med ulike virkemidler har vi arbeidet for at personlige interesser ikke skal ha påvirket studien.

I studien har vi hatt en deduktiv tilnærming, hvor vi har tatt utgangspunkt i G. Stylianides' (2008) rammeverk og Duval (2006) sitt symbolsystem for å analysere datamaterialet. Fordelen med å ta i bruk eksisterende rammeverk, er at en i analysen kan bli oppmerksom på detaljer og nyanser i datamaterialet (Kennedy & Thornberg, 2018). Eksempelvis at vi med Duval (2006) sitt symbolsystem også anser muntlige diskusjoner som en representasjonsform, og at vi med G. Stylianides (2008) sitt rammeverk tar hensyn til den pedagogiske og psykologiske komponenten. Dette er aspekter det er mulig vi med en induktiv metode ikke hadde blitt bevisst. Det finnes likevel utfordringer med å ta i bruk andres rammeverk. Det at vi retter så stort fokus mot teori knyttet til vårt rammeverk, kan gjøre at vi overser annen relevant teori og aspekter ved datamaterialet (Kennedy & Thornberg, 2018). I vår analyse tar vi i bruk G. Stylianides (2008) sine fire argumentasjonstyper for å kategorisere elevenes argumentasjon. Vi opplevde at det fantes et stort spekter innenfor G. Stylianides (2008) sine argumentasjonstyper. Samme kategori kunne inkludere argumenter vi anså som svært ulike. Dette resulterte i at elever vi anså å ha større potensial i å nå et generelt argument, ble kategorisert innenfor samme argumentasjonstype som elever med lite potensial for generalisering. I fremstillingen av analysen kan dette gi et noe misvisende bilde. Med en deduktiv tilnærming kan det tenkes at en tvinger dataen til å passe inn i rammeverket, og at egne kategorier kunne gitt en bedre fremstilling av resultatet.

En annen begrensning ved studien er at vi har basert forskningen på et lite utvalg. Med et utvalg på kun 14 elever, blir det vanskelig å generalisere funnene våre utover den konteksten datamaterialet ble samlet inn. I studien har vi likevel fått en innsikt i hvordan enkelte elever tar i bruk representasjoner når de i grupper argumenterer for en påstand. Dette kommer frem gjennom våre funn i analysen. Slik kan vår studie være et eksempel på hvordan elever på mellomtrinnet benytter representasjoner i argumentasjonen for en matematisk påstand. Vår studie kan bidra med en diskusjon om hvordan representasjoner kan fungere som et verktøy i argumentasjonen til elever, og hvordan dette kan arbeides med i matematikkundervisningen.

5.6 Videre forskning

Denne studien bidrar til å belyse elevenes argumentasjon på mellomtrinnet, og om det finnes en sammenheng mellom elevenes type argumentasjon og deres bruk av representasjoner. Det ville gjennom videre forskning vært interessant å utføre en lignende studie på et større utvalg. På denne måten kunne vi ha sammenlignet funn og i større grad undersøkt om elevenes bruk av representasjoner kan ha en innvirkning på elevenes argumentasjon.

Vi fant i vår studie at det å utvikle visuelle representasjoner som var matematiske, eller å ha en aktiv bruk av representasjoner, hadde en positiv effekt for elevens argumentasjon. Dette er funn som samsvarer med tidligere forskning (Bakar et al., 2016; Kilpatrick et al., 2001; Stylianou, 2011;2013). Samtidig er det er en sammenheng vi mener det kunne vært interessant å undersøke nærmere. Det kan en gjøre i en studie hvor en har et spesielt fokus på aktiv bruk av representasjoner. En kunne undersøkt elevers argumentasjon i en sammenheng hvor de har fått innføring i hvordan representasjoner kan brukes aktivt, og hvor de eksplisitt blir bedt om å bruke representasjoner i argumentasjon. Funnene kunne en sett opp mot tidligere forskning, eller hatt en kontroll-klasse hvor elevene ikke hadde hatt en innføring i bruk av representasjoner som verktøy i argumentasjon.

I studien fant vi også at læreren spilte en avgjørende rolle når det gjaldt å utvikle et gyldig bevis. Det er funn som samsvarer med tidligere forskning (f.eks. Ball & Bass, 2003; Makar et al. 2015; Mata-Pereira & Ponte, 2017). Hovedfokuset i vår studie var likevel elevenes arbeid og argumentasjon. På bakgrunn av vårt funn om lærerens rolle i utviklingen av et gyldig bevis, samt tidligere forskning, ville det vært interessant å gjennomføre en lignende studie hvor en fokuserte på lærerens arbeid. Ved å se på læreren kunne en undersøkt hva en lærer gjør i veiledning av elever, og hvordan veiledningen skjer. Analysen kunne i en slik studie fortalt oss noe om hvilke måter lærere best kan legge til rette for at elevene når et gyldig bevis. I tillegg kunne en gjennomført et oppfølgingsintervju med læreren for å få et inntrykk i bakgrunnen for de pedagogiske valgene som blir tatt i løpet av en undervisningstime. På denne måten kunne resultatene av studien gitt større implikasjoner for lærerens undervisningspraksis.

REFERANSER

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Bakar, K. A., Way, J. & Bobis, J. (2016). Young children's drawings in problem solving. *Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). Hodder and Stoughton.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27-44.

Bjørndal, C. R. P. (2011). *Det vurderende øyet: observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning* (2. utg.). Gyldendal akademisk.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4. utg.). Oxford University Press.

Clark, T., Foster, L., Sloan, L. & Bryman, A. (2021). *Bryman's social research methods* (6. utg.). Oxford University Press.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). Sage publications.

Creswell, J. W. & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage publications.

Creswell, J. W. & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4. utg.). Sage publications.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fuyane, N. (2021). Research methodology choice dilemma: A conceptual note to emerging researchers. *International Journal of Business & Management studies, 2*(2), 29–43.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. I L. English (Red.), *Handbook of research in mathematics education* (s. 197–218). Lawrence Erlbaum.

Greeno, J. G. & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan,* 78, 361–367.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of Proof Conceptions in Algebra. Journal for R*esearch in Mathematics Education, 31*(4). 396-428. https://doi.org/10.2307/749651

Heinze, A., Star, J., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education,* 41, 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 91*(6), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modelling. I E. A. Silver (Red.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (s. 381–398). Lawrence Erlbaum.

Kennedy, B. L., & Thornberg, R. (2018). Deduction, induction, and abduction. I U. Flick (Red.), *The SAGE handbook of qualitative data collection* (s. 49-64). SAGE Publications Ltd.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, *40*(3), 427-441. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60-82. https://doi.org./10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Kunnskapsdepartementet (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT 01-05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 1107-1120. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0732-1

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Mercer, N., & Wegerif, R. (1999). Is exploratory talk productive talk? I K. Littleton & P. C. Light (Red.). *Learning with computers: Analysing productive interaction* (s. 79-101). Routledge.

Morais, C., Serrazina, L. & Ponte, J. P (2018). Mathematical Reasoning fostered by (fostering) Transformations of Rational Number Representations. *Acta Scientiae 20*(4). https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892

NESH. (2021, 16. desember). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora. Forskningsetikk. Hentet fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/

Nunokawa, K. (2010). Proof, mathematical problem-solving, and explanation in mathematics teaching. I G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Red.), *Explanation and proof in mathematics––Philosophical and Educational Perspectives* (s. 223–236). Springer.

Ott, B. (2017, 1.-5. februar). *Children's drawings for word problems-design of a theory and an analysis tool.* CERME 10, Dublin, Ireland. https://hal.science/hal-01950540

Ozgur, Z., Ellis, A. B., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., & Knuth, E. (2019). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 284-303. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.004

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Postholm, M. B. & Moen, T. (2018). Forsknings- og utviklingsarbeid i skolen (2. utg.). Universitetsforlaget.

Reid, D. A. (2005, 17.-21. februar). *The meaning of proof in mathematics education*. CERME 4. Sant Feliu de Guixols, Spain. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/05Automne/CERME4Raid.pdf

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). *Drawing as problem-solving: Young children´s mathematical reasoning through pictures*. I proceedings of the 30th conference of the international group for psychology of mathematics education. International group for psychology of mathematics education, Praha, Tjekkia.

Säljö, R. (2016). *Læring – en introduksjon til perspektiver og metaforer*. Cappelen Damm.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. http://www.jstor.org/stable/30034869

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford, University Press.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics, 28*(1), 9-16. https://www.jstor.org/stable/40248592

Stylianides, G., Stylianides, A., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning and proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1463–1490. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 265–280. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

Stylianou, D. A. (2013). An Examination of Connections in Mathematical Processes in Students' Problem Solving: Connections between Representing and Justifying. *Journal of Education and Learning*, *2*(2). https://doi.org/10.5539/jel.v2n2p23.

Tjora, A. (2019). *Viten skapt: Kvalitativ analyse og teoriutvikling.* Cappelen Damm Akademisk.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge university press.

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden*, *14*(3), 18-sider. https://doi.org/10.5617/adno.8195

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Harvard University Press.

Widjaja, W., Vale, C., Herbert, S., Long, E. Y. K., & Bragg, L. A. (2020). Linking comparing and contrasting, generalizing and justifying: a case study of primary students" levels of justifying. *Mathematics Education Research Journal. 33,* 321–343. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00306-w

VEDLEGG

Vedlegg 1: Undervisningsplan og oppgaveark
Vedlegg 2: Samtykkeskjema
Vedlegg 3: Samskrivnigsdokument

Vedlegg 1: Undervisningsplan og oppgaveark

Økt 4: Argumenter som er tydelige (logiske?)

Mål: Elevene skal bruke passende representasjoner og knytte forklaringene sine til dem. Sette ord på/gå nærmere inn hva det vil si å ha et tydelig skrevet argument (noe som fra før er et av kriteriene for gode argumenter)

Designprinsipper:

- Sammenhenger som tas opp skal handle om noe elever jobber med til vanlig, noe som kan være nyttig for dem tematisk (og ikke bare ut fra måten å tenke på) – multiplikasjon og egenskaper/strategier
- Elever kommer frem til en (generell) hypotese selv gjennom å se etter sammenhenger/mønster
- Det er *elevers* argumenter som diskuteres mot kriteriene
- Sammenhengen/argumentet bør være slik at det er behov for å starte med noe de vet fra før (en definisjon, en egenskap)

Undervisningsplan

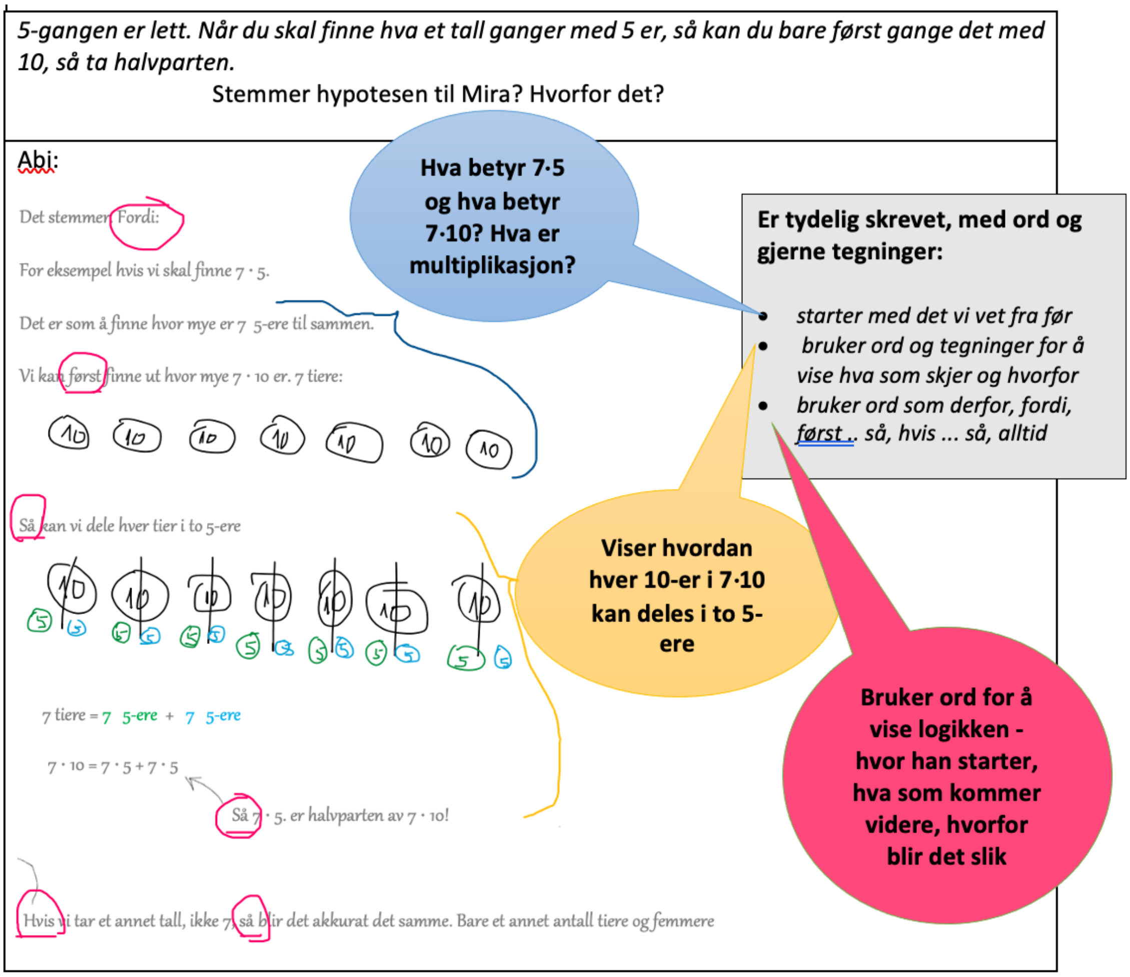
DEL A – felles diskusjon (15 min)

- Vi har snakket før om at gode argumenter:
  - Forklarer *hvorfor* hypotesen stemmer
  - Overbeviser *(deg selv, en venn, men også en skeptiker)* om at hypotesen stemmer
  - **Er tydelig skrevet, med ord og gjerne tegninger**

- Vi skal nå øve mer på å lage argumenter som er gode, som er slik at de tre kriteriene er oppfylt.
- Og mest skal vi se på det siste – hva det kan bety at et argument er tydelig skrevet og hvordan vi kan få det til. (vise de tre punktene under det siste kriteriet)

  Er tydelig skrevet, med ord og gjerne tegninger
  - *starter med det vi vet fra før*
  - *bruker ord og tegninger for å vise hva som skjer og hvorfor*
  - *bruker ord som derfor, fordi, først .. så, hvis ... så, alltid*

- Lese de tre punktene, så vise bildet med Abis løsningsforslag og peke på hva de innebærer der:



- Introdusere dagens oppgave: Undersøke summen av påfølgende tall
- Se først på noen eksempler på påfølgende tall.
- Introdusere gruppeoppgaven. Lese oppgaven. De skal bruke kladdeark, men skrive til slutt på svararket.

DEL B – gruppearbeid (20 min)

Summen av påfølgende tall

Påfølgende tall er tall som kommer etter hverandre i tallrekka. For eksempel:

13, 14 er to påfølgende tall
20, 21, 22, 23 er fire påfølgende tall
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 er sju påfølgende tall

Vi skal se på summen av påfølgende tall. Det er to spørsmål dere skal undersøke, lage hypoteser og argumentere for dem:

1. **Skjer det alltid, aldri eller noen gang at summen av tre påfølgende tall er delelig med 3?**
2. **Skjer det alltid, aldri eller noen gang at summen av fire påfølgende tall er delelig med 4?**

Prøv gjerne først på noen eksempler, lag en hypotese og prøv så å argumentere for det. Hvis dere mener at det gjelder alltid, så prøv å argumentere for at det virkelig skjer *alltid.* Det samme hvis dere mener at det skjer *aldri* eller *noen gang*. Prøv å lage et så bra argument som mulig. Husk kriteriene!

Gode argumenter:

- Forklarer *hvorfor* hypotesen stemmer
- Overbeviser (deg selv, en venn og også en skeptiker) om at hypotesen stemmer
- Er tydelig skrevet, med tegninger og ord:
  - *starter med det vi vet fra før*
  - *bruker ord og tegninger for å vise hva som skjer og hvorfor*
  - *bruker ord som derfor, fordi, først.. så, hvis … så, alltid*

DEL C – felles diskusjon og oppsummering (10-15 min)

- Velge underveis noen elevgrupper som skal presentere, velge ut fra at det er noe bra de gjør. Få frem at
  - det er lurt å starte med det vi vet. – at det er snakk om påfølgende tall og hvordan kan vi tenke på dem «det første tallet, så + 1, så +2 (fra første tallet). Det gjør det lettere å forklare hva som skjer og hvorfor når vi legger sammen slike tall
  - bra å bruke tegninger, men også ord til å si hva tegningene viser og hvordan
  - bra å være tydelig hvor man starter, hva man gjør videre, hvorfor - bruke ord som «derfor», «fordi», «først … så», «alltid» - da blir argumentet mer tydelig og mer overbevisende
- Oppsummere (skrive på tavla og/eller lage en plakat eller en slide som kan tas opp senere) ved å tilføye mer på det siste kriteriet

> Gode argumenter:
>
> - Forklarer *hvorfor* hypotesen stemmer
> - Overbeviser (deg selv, en venn og også en skeptiker) om at hypotesen stemmer
> - Er tydelig skrevet, med tegninger og ord:
>   - *starter med det vi vet fra før*
>   - *bruker ord og tegninger for å vise hva som skjer og hvorfor*
>   - *bruker ord som derfor, fordi, først.. så, hvis … så, alltid*

DEL D – flere oppgaver, hvis tid

Hva med summen av fem påfølgende tall? Kan vi lage en hypotese om den? (den er f.eks. alltid fem multiplisert med det midterste tallet – hvorfor?) Andre summer av et odde antall påfølgende tall?

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet «Resonnering og bevis på barnetrinnet»?

Dette er et spørsmål til deg om barnet ditt vil delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hva som kjennetegner matematisk arbeid på barnetrinnet. Spesielt er vi interessert i matematisk resonnering – i hvilke situasjoner det oppstår og hvordan det foregår. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg og ditt barn.

Formål

Formålet med forskningsprosjektet er mer kunnskap om den matematiske diskursen på barnetrinnet – hva som arbeides med og diskuteres og på hvilken måte. Dette skal resultere i ressurser til bruk i undervisning (undervisningsopplegg m.m.). Resultatene av studien vil publiseres som forskningsartikler i matematikkdidaktiske tidsskrift, på konferanser for lærere og forskere, og i en doktorgradsavhandling. I tillegg vil anonymiserte data (transkripsjon av opptak der navn er byttet ut, bilder av tavle eller elevarbeider uten navn eller andre identifiserende personopplysninger) kunne brukes som undervisningsressurser i lærerutdanning.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Førsteamanuensis Anita Valenta (leder av prosjektet), førsteamanuensis Kristin Krogh Arnesen og førsteamanuensis Ole Enge, alle fra Institutt for lærerutdanning ved NTNU, er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Vi ønsker å samle datamaterialet fra to ulike barneskoler. Matematikklæreren til ditt barn har sagt seg villig til å delta i prosjektet, og derfor spør vi nå deg om barnet ditt er villig til å delta og om du som foresatt gir samtykke til det.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis barnet ditt deltar i prosjektet, innebærer det at noen av forskerne som deltar på prosjektet får mulighet til å ta videoopptak av matematikkundervisning i barnets elevgruppe/klasse i to uker høsten 2020, og et antall matematikkøkter i løpet av våren 2021. I tillegg til videoopptak skal det samles inn elevers skriftlige arbeid. Noen ganger vil det være vanlig undervisning som skal foregå uten påvirkning fra forskere verken før eller underveis i datainnsamlingen, andre ganger er det snakk om undervisning som er planlagt i samarbeid mellom lærere ved skolen og forskere. Noen elever kan i tillegg bli intervjuet av forskerne. Intervjuet vil finne sted på skolen i forbindelse med undervisning, og vil handle om elevenes opplevelse av matematikkundervisning.

Vi vil be deg som er barnets foresatt om å snakke med barnet om det og finne ut om barnet er villig til å være med. Hvis barnet velger å ikke være med, vil matematikklæreren på trinnet sørge for at det får tilsvarende undervisning på en annen måte slik at de ikke taper noe på ikke-deltakelsen i prosjektet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis barnet ditt velger å delta og du gir samtykke til det, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om barnet vil da bli anonymisert. Det vil selvsagt ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller barnet hvis barnet ikke vil delta eller senere velger å trekke seg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om barnet ditt til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Video- og lydopptakene av undervisningen vil transkriberes og anonymiseres innen 31. juli 2024. Opptakene vil deretter bli slettet. Før opptakene slettes vil de oppbevares på NTNUs filområde som er beregnet på fortrolig informasjon, der kun de involverte i prosjektet vil ha tilgang. I tillegg kan opptak lagres midlertidig på en minnepinne som er passordbeskyttet og holdes innelåst, til bruk under transkribering av eksterne personer.
- Elevene som deltar vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner. De eneste personopplysningene som kan publiseres vil være knyttet til kjønn og alder.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes i juli 2024. Video- og lydopptak transkriberes og anonymiseres innen 31. juli 2024, og deretter vil alle opptak bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om barnet ditt,
- å få rettet personopplysninger om barnet ditt,
- få slettet personopplysninger om barnet ditt,
- få utlevert en kopi av barnets personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt/barnets samtykke og i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- NTNU ved Anita Valenta, anita.valenta@ntnu.no.
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen, thomas.helgesen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig
Anita Valenta
Anita.valenta@ntnu.no, 97737661

Samtykkeerklæring (frist: 1. oktober 2020)

Barnets navn: ____________________________

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Resonnering og bevis på barnetrinnet*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at barnet:

- ☐ deltar i observasjon av matematikkundervisning (som beskrevet ovenfor) ved bruk av video- og lydopptak samt innsamling av skriftlig arbeid
- ☐ deltar på intervju (som beskrevet ovenfor)

Jeg samtykker til at opplysninger om barnet mitt behandles frem til prosjektet avsluttes 31. juli 2024.

(Forelder/foresatt, dato)

Vedlegg 3: Samskrivingsdokument

Allerede våren 2022 bestemte vi oss for å skrive masteroppgaven sammen. Gjennom hele studieløpet har vi arbeidet tett sammen, både med eksamenslesing og arbeidskrav, i tillegg til at vi høsten 2021 skrev en eksamensoppgave sammen. Fra det tidligere arbeidet var vi kjent med at vi har en lik arbeidsstil, samt at målsetninger og forventninger samsvarer. Ved semesterstart høsten 2022 opprettet vi en felles disk på Google. Det gjorde vi for at vi skulle ha en felles plattform som begge hadde tilgang til. Her har vi samlet alt som er relevant for oppgaven, alt fra relevant litteratur og oppgaver, til notater fra møter med veileder og produsert tekst. Inne på disken har vi og opprettet en felles kalender. Her har vi notert ukesmål, fremdriftsplaner, møter med veileder og frister for innleveringer. En felles kalender ga oss oversikt over hva vi til enhver tid måtte gjøre, og en forsikring om at vi hele tiden har vært i rute for å komme i mål med masteroppgaven. Ved starten av dette semesteret skrev vi en samarbeidsavtale, hvor vi ble enige om rammene knyttet til arbeidet med oppgaven. Det handlet om arbeidsrutiner, arbeidsfordeling og forventninger til hverandre.

Noe av det første vi måtte gjøre var å finne ut om vi skulle samle data selv, eller bruke det vi hadde tilgang til fra ProPrimEd. Høsten 2022 samarbeidet vi om å se gjennom potensielt datamaterialet, og fant tidlig ut at datamaterialet som var samlet inn av ProPrimEd kunne brukes til å undersøke vårt forskningsproblem.

Vi har tidligere arbeidet tett sammen, og begge har et ønske om å produsere en god oppgave. I tillegg bygger samarbeidet på et godt vennskap. Med dette som utgangspunkt har vi ikke vært redde for å komme med konstruktive tilbakemeldinger, eller å stille spørsmål ved den andres arbeid. Det har vi opplevd som en styrke i vårt arbeid. Vi har diskutert mye underveis i arbeidet, både når det gjelder innhold og formuleringer. Alle delene av oppgaven bærer derfor preg av begge sine innspill, og resultatet er en masteroppgave basert på begge forfatternes faglige og språklige vurderinger.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden