Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Remy Hulegaard Lyng
Anja Olsen

Matematisk modellering på barneskolen

En kvalitativ studie av 4. trinns elevers arbeid med matematisk modellering og bruk av representasjoner i den matematiske kommunikasjonen

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7. trinn
Veileder: Yvonne Grimeland

September 2021

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Remy Hulegaard Lyng
Anja Olsen

Matematisk modellering på barneskolen

En kvalitativ studie av 4. trinns elevers arbeid med matematisk modellering og bruk av representasjoner i den matematiske kommunikasjonen

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7. trinn
Veileder: Yvonne Grimeland
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien har undersøkt hvordan et utvalg elever på 4. trinn løste en modelleringsoppgave ut fra et presentert problem fra virkeligheten. Vi har sett på hvordan elever i en modelleringssyklus bruker representasjoner da de kommuniserte med og om matematikk, i delprosessene matematisering og matematisk arbeid. Studien har undersøkt følgende forskningsspørsmål:

Hvordan utvikler et utvalg 4. trinns elever matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan bruker elevene representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk?

Hensikten med studien har vært å få innsikt i hvordan noen elever utvikler og arbeider med matematiske delprosesser og se hvordan de bruker representasjoner i de ulike prosessene.

Studien har brukt kvalitative metoder med observasjoner, elevarbeid og gruppeintervju. Datamaterialet har blitt analysert ved hjelp av induktive og deduktive analyser. Studien viser hvordan elever kan arbeide med matematisk modellering i barneskolen, noe som kan danne grunnlag for refleksjon om undervisningspraksis innen matematisk modellering. Resultater fra studien har vist at noen elever på 4. trinn har delkompetanse til å utvikle matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid. Elevene utviklet modeller basert på egne målinger og brukte mønstre som tok utgangpunkt i differanser. Da elevene selv måtte identifisere et mønster og ta et valg om hva de skulle ta hensyn til i modellen, utviklet de forskjellige matematiske modeller basert på mønstret fra hele tabellen eller forrige strikklengde. Etter hvert som kompleksiteten i oppgaven økte, ble forskjellene mellom strategiene og modellene større og større. Da elevene kommuniserte om og med matematikk viste funnene at elevene i hovedsak brukte naturlig språk i skriftlig kommunikasjon med og om matematikk. I den muntlige kommunikasjon brukte elevene naturlig språk da de kommuniserte fremgangsmåte og resultat. I beregning av strikker for det store hoppet brukte noen grupper symbolspråk for å beregne antall strikker. Selv om matematisk modellering er en kompleks prosess, indikerer funnene i denne studien at det er mulig å gjennomføre en eller flere deler av en modelleringssyklus i barneskolen.

Nøkkelord: Matematisk modellering, modelleringskompetanse, representasjoner

Abstract

This study has examined how a sample of students in the 4th grade solved a modeling task based on a presented complex real-world problem. We have looked at how students, in a modeling cycle, use representations to communicate mathematically, in the subprocesses mathematising and working mathematical. The study has examined the following research questions:

How do a selection of 4th grade students develop mathematical models in the subprocesses mathematising and working mathematical, and how do students use representations in communication with and about mathematics?

The purpose of the study has been to gain insight into how some students develop and work with mathematical subprocesses and see how they use representations in the different processes.

The study has used qualitative methods with observations, student work and group interviews. The data was analyzed using inductive and deductive analysis. The study shows how students may work with mathematical modelling in the primary school, which may support the basis of reflection in mathematical modelling education. Results from the study has shown that some students in the 4th grade have sub competencies to develop mathematical models in the subprocesses mathematizing and working mathematical. The students developed models based on their own measurements and used patterns which used difference. When the students had to identify a pattern and elicit their own mathematics as they had to decide what to take into account in their model. The students developed different mathematical models based on the pattern from the entire table or the previous length of the rubber band. As the complexity of the task increased, the differences between the strategies and models became larger. When the students communicated about and with mathematics, the findings showed that the students mainly used natural language in written communication with and about mathematics. In the orally communication, the students used natural language when communicating about procedures and results. In computations of rubber bands for the big jump. Some groups used symbolic language to compute the number of rubber bands. Although mathematical modelling is a complex process, the results of this study indicate that it is possible in the primary school to conduct one or more modelling processes in a modeling cycle.

Keywords: Mathematical modelling, modelingcompetence, representations

Forord

Denne studien er gjennomført i studieåret 2020-21 og vi avslutter med det en treårig i masterutdanning som lærerspesialist i matematikkdidaktikk 1.-7. trinn ved NTNU i Trondheim. Utdanningen har vært lærerik og gitt oss en dypere forståelse av den forskningsbaserte matematikk og vår rolle som lærerspesialister i skolen. Gjennom denne studien har vi fått mulighet for å fordype oss i et tema vi mener er både viktig og aktuell, men som vi opplever ikke har blitt nok oppmerksomhet til tross for vi i hverdagen omgir oss med komplekse situasjoner.

Vi ønsker å takke vår veileder Yvonne Grimeland, for tilbakemeldinger og innspill i skriveprosessen.

Vi vil gjerne rette en stor takk til elevene som deltok i denne studien, skolen og læreren som la til rette for at vi kunne gjennomføre dette til tross for pandemi. Det hadde ikke blitt noen studie uten dere.

Stor takk til kommunen fordi de har satset på realfag, Ellen Elise for praktisk hjelp og rektor/avdelingsleder fordi de har innvilget søknader om videreutdanning og lagt til rette for praktisk gjennomføring av studien.

Takk til våre medstudenter for fantastiske diskusjoner i Trondheim og Mari J og Eivind S for å være våre sparringspartnere i oppgaveskrivingen. Til slutt vil vi takke våre nærmeste for støtten underveis i studien og i oppgaveskrivingen. Det hadde ikke vært mulig uten dere.

Ullensaker, september 2021

Anja Olsen og Remy Hulegaard Lyng

Innhold

Figurer xi

Tabeller xi

Forkortelser/symboler xii

1 Innledning 1

1.1 Forskningsspørsmål og formål med studien 2

1.2 Oppgavens oppbygning 4

2 Teori 5

2.1 Matematisk modellering 5

2.1.1 Hva er matematisk modellering? 5

2.1.2 Tilnærming til modelleringsbegrepet 5

2.1.3 Modelleringssykluser 6

2.2 Modelleringskompetanse 10

2.3 Funksjoner i matematikken 13

2.4 Representasjoner 14

2.4.1 Semiotiske representasjonssystemer 15

2.4.2 Transformasjoner 17

2.4.3 Representasjoner av funksjoner 18

2.4.4 Representasjoner i vår studie 18

2.5 Kompetanseaspekter i vår studie 19

2.6 Empiri fra barneskolen 20

3 Metode 21

3.1 Valg av deltakere 21

3.2 Valg av oppgave 22

3.3 Undervisningsdesignet 23

3.3.1 Undervisningsstruktur 23

3.3.2 Elevenes arbeidshefte 25

3.4 Datainnsamling 26

3.4.1 Lydopptak 26

3.4.2 Observasjon 26

3.4.3 Intervju 27

3.4.4 Elevarbeider 28

3.5 Analysemetode 28

3.6 Analyseskjema 29

3.6.1 Analyse av matematisk modellering 29

3.6.2 Analyse av representasjoner 30

3.7 Analyseprosessen 31
3.7.1 Analyse av matematisk modellering 31
3.7.2 Analyse av representasjoner 34
3.8 Etiske betraktninger 37
3.9 Troverdighet 38
4 Analyse 40
4.1 Analyse av matematisk modellering 40
4.1.1 Delanalyse 1 40
4.1.2 Delanalyse 2 43
4.2 Analyse av representasjoner 53
4.2.1 Delanalyse 3 53
4.3 Oppsummering av funn i analysen 57
5 Drøfting 59
5.1 Å kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen 59
5.2 Å kunne utvikle matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på egne undersøkelser og data 61
5.3 Å kunne bruke representasjoner for å kunne kommunisere med og om matematikk 64
5.4 Oppsummering av drøfting 64
5.5 Studiens begrensninger 65
5.6 Videre forskning 65
6 Avslutning 66
Referanser 67
7 Vedlegg 69

Figurer

Figur 1 Virkeligheten og matematikken (Schou et al., 2008, s. 23) 6
Figur 2 Modelleringsprosess, Kaiser (1995) og Blum (1996) gjengitt i (Kaiser, 2005) 7
Figur 3 Blum og Leiß (2007) modelleringssyklus 7
Figur 4 Modelleringssyklus i et kognitivt perspektiv (Ferri, 2006, s. 92). 8
Figur 5 Intertwined Strands of Proficiency (Kilpatrick et al. 2001, s. 5) 11
Figur 6 Sammenheng mellom to variabler sett som figurtall og i tabell 14
Figur 7 Ulike representasjoner av funksjonen f(x) = 2500 + 350x. 15
Figur 8 Grafisk fremstilling av de ulike øktene i undervisningsdesignet. 23
Figur 9 Elevens tabell for hopp 1-5 25
Figur 10 Forklarende tekst for hva elevene skal gjøre...25
Figur 11 Tabell for hopp med 6 strikker 25
Figur 12 Forklarende tekst rundt det store hoppet 25
Figur 13 Forklarende tekst rundt det store hoppet 25
Figur 14 Gruppe Es tabell for de fem første hoppene. 41
Figur 15 Gruppe Bs forklaring på gjettet lengde og resultatet i utfylt tabell på S_6. 45
Figur 16 Gruppe Bs forklaring på gjettet lengde på S_7 45
Figur 17 Gruppe Ds forklaring av gjettet fallhøyde for S_6 og tabell for hoppene 1-5.......46
Figur 18 Gruppe Ds forklaring av gjettet fallhøyde for S_7. 47
Figur 19 Gruppe Cs forklaring av gjettet lengde for S_7. 47
Figur 20 Gruppe Bs tabell for strikkhopp 6 49
Figur 21 Gruppe Cs utfylling av tabell i raden for S_7. 50
Figur 22 Skriftlig språk som uttrykte fremgangsmåte 54
Figur 23 Skriftlig språk som argumentasjon 55
Figur 24 Gruppe Bs illustrasjoner...55
Figur 25 Gruppe Cs bruk av symbolspråk..55

Tabeller

Tabell 1 Representasjonssystem med eksempler (Duval, 2006, s. 110). 16
Tabell 2 Representasjoner i vår studie...19
Tabell 3 Ulike observatørroller (Gold, 1985, gjengitt i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115) 27
Tabell 4 Analyseskjema for matematisk modellering 30
Tabell 5 Analyseskjema for representasjoner 31
Tabell 6 Kategorier og koder for matematisk modellering. 34
Tabell 7 Kategorier og koder for bruk av representasjoner. 37
Tabell 8 Elevgruppenes strategier for S_6 og S_7...44
Tabell 9 Matematiske modeller av S_6 og S_7 48
Tabell 10 Gruppenes matematiske modeller i modelleringsprosessen. 52
Tabell 11 Utdrag fra tabell 10, med vår tolkning av gruppene hensyn til konteksten i matematisk modell av det store hoppet. 53
Tabell 12 Bruk av representasjoner for å kommunisere skriftlig med og om matematikk. 54
Tabell 13 Bruk av naturlig språk for å kommunisere muntlig med og om matematikk...56
Tabell 14 Oppsummering av funn i analysen 57

Forkortelser/symboler

S_{1-5}	De små hoppene med hhv 1-5 strikker
S_6	Hopp med 6 strikker
S_7	Hopp med 7 strikker
D_7	Differanse mellom gjettet og målt høyde for strikkhopp 7
DST	Det store hoppet på ca. 3 meter.

1 Innledning

Temaet for denne masteroppgaven er matematisk modellering og handler om hvordan et utvalg elever på 4. trinn har jobbet med en modelleringsoppgave.

Samfunnet er i forandring, og for at dagens elever skal bli rustet til det 21. århundrets utfordringer, bli selvstendige, kritiske og samfunnsnyttige borgere, krever det at elevene lærer å være kreative, kritiske og løse kjente og ukjente problemer. I rapporten *PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK (DRAFT)* Blum og Kaiser, 1997, s. 9, gjengitt i OECD (2018, s. 3) konstanteres det at det matematiske kompetansebegrepet har forandret seg på grunn av digitaliseringen av samfunnet. Historisk sett har matematisk kompetanse handlet om tallforståelse og mestring av de fire regningsartene for å håndtere hverdagen. Etter hvert som samfunnet og teknologien har utviklet seg har også ferdighetskravene endret seg. Det 21. århundrets ferdigheter legger vekt på *matematisk literacy* for å kunne bruke matematikken til å løse problemer fra virkeligheten (OECD, 2018, s. 9). Matematisk literacy beskrives som «den enkeltes kapasitet til å resonnere matematisk og løse problemer i en kontekst» (OECD, 2018, s. 6). English (2010, s. 287) hevder at elever nå i større grad enn tidligere, må håndtere komplekse informasjonsdata i sin hverdag. Evner som å tolke, beskrive, forklare, konstruere, manipulere og forutsi komplekse systemer er viktige for elevene slik at de kan delta i samfunnet etter endt skolegang (Sriraman & English, 2010, s. 271). Matematisk modellering gir elever muligheter til å lære å håndtere store mengder data i en kompleks, men meningsfylt kontekst (English, 2010, s. 288). Hensikten er å hjelpe elevene med å forstå den virkelige verden bedre, støtte opp om læring i matematikk, utvikle ulike kompetanser og holdninger samt å bidra til et adekvat bilde av hva matematikk er (Blum & Ferri, 2009, s. 47). Matematisk modellering beskriver forholdet mellom to delvis adskilte verdener; den virkelige verdenen og den matematiske verdenen. Dette forholdet blir bearbeidet gjennom en modelleringssyklus ved at den virkelige verdenen skal danne utgangspunkt og forklares ved hjelp av modeller i den matematiske verdenen (Schou et al., 2008, ss. 22-23).

Begreper som omhandler matematisk modellering har i litteraturen blitt definert på forskjellige måter (English, 2010, s. 288). En *modell* er det ferdige produktet, som for eksempel en formel for å løse problemet, mens prosessen som leder frem er *modellering* (Våge, 2000, ss. 163-164). Vi mener at modelleringsbegrepet til Våge er for grovmasket fordi det mangler nyanser i modelleringsprosessen. For å beskrive modelleringsprosessen på en presis måte brukes en modelleringssyklus når en modelleringsaktivitet skal planlegges, gjennomføres eller analyseres. En modelleringssyklus er en grafisk fremstilling av modelleringsprosessen og viser hvor man er i prosessen. Vi støtter oss til et modellbegrep som ser på modelleringssyklusen i et kognitivt perspektiv. Ferri (2006) har identifisert og navngitt 6 delprosesser i en modelleringssyklus; *forstå oppgaven, forenkling/strukturering, matematisering, matematisk arbeid, tolkning og validering.*

Når vi skal utvikle matematiske modeller for å kunne beskrive den virkelige verdenen matematisk må vi bruke representasjoner fordi matematiske objekter er abstrakte. Det vil si at de kun er tilgjengelige gjennom representasjoner som står for det objektet som skal undersøkes. For eksempel vil tallet 7 være en representasjon av en mengde, og denne mengden kan representeres ved både 7 tellestreker, 7 klinkekuler, regnestykket

10-3 eller «syv» (Duval, 2006, s. 106). Kjernen i all matematisk aktivitet er transformasjoner av, altså å veksle mellom, representasjoner (Duval, 2006, s. 107). En transformasjon vil være å vise det samme matematiske objektet med en annen representasjon. Et eksempel er når en elev løser en oppgave om det matematiske objektet 7. Eleven ser et bilde av 7 klinkekuler, og idet hen teller objektene, skjer det en transformasjon fra en ikonisk representasjon til en muntlig representasjon som er «sju». Når eleven skriver 7 med symboler skjer det en transformasjon fra muntlig språk til symbol, mens det matematiske objektet er uforandret. Gjennom transformasjoner av representasjoner vil elevene se de matematiske objektene fra ulike sider slik at de kan oppdage sammenhenger og dermed utvikle en dypere matematisk forståelse (Kilpatrick et al., 2001). Matematisk modellering og bruk av representasjoner vil derfor kunne bidra til at elever utvikler ferdigheter innen matematisk literacy.

Kuntze et al. (2013, s. 317) argumenterer for at matematisk modellering har en høy relevans for utvikling av *matematisk literacy*, men til tross for viktigheten viser empirisk forskning at læreres kunnskap om matematisk modellering er knapp, og derfor er læreres kunnskapsutvikling om temaet viktig (Blum & Ferri, 2009, s. 52). På bakgrunn av det internasjonale fokuset på utvikling av *matematisk literacy,* har mange nasjonale læreplaner gitt modelleringsbegrepet større oppmerksomhet. I Kunnskapsløftet 2020 (LK20) ble det innført seks kjerneelementer og «*Modellering og anvedningar*» er en av dem. I LK20 blir *Modellering* i matematikk beskrevet som å lage modeller som beskriver virkeligheten med matematisk språk og vurdere disse kritisk, mens *anvendingar* er at elevene utvikler kompetanse til å se hvordan de skal bruke matematikken både i og utenfor faget (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). Slik har modellering fått større plass i den nye læreplanen sammenlignet med den forrige hvor tradisjonell problemløsning hadde et større fokus. English og Sriraman (2010, s. 283) argumenterer for at bruken av modelleringsoppgaver som bygger på tverrfaglige, autentiske problemløsningssituasjoner i skolen kan bidra til at elevene gjøres i stand til å løse problemer utenfor klasserommet. I tradisjonelle problemløsningsoppgaver er det et konsept og tekstoppgaver som er tilpasset temaet, og som er konstruert for det matematiske klasserommet English og Sriraman (2010, s. 267). Matematisk modellering vil gi elevene muligheten å oppleve komplekse data i en utfordrende, men meningsfull kontekst (English, 2010, ss. 287-288).

I det tverrfaglige temaet *Demokrati og medborgerskap* i Kunnskapsløftet skal matematikken «gi elevane kompetanse i å utforske og analysere funn frå reelle datasett og talmateriale frå natur, samfunn, arbeidsliv og kvardagsliv. Vidare handlar det om at elevane lærer å vurdere kor situasjonsbetingete slike funn er. Slik kompetanse er viktig å for å kunne formulere eigne argument og delta i samfunnsdebatten.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 4). Dette viser at skolen er en arena hvor elevene gjennom matematikken kan utvikle en modelleringskompetanse som et ledd for å ruste dem til det 21. århundrets utfordringer.

1.1 Forskningsspørsmål og formål med studien

Matematisk modellering har en høy grad av kognitive komplekse krav, og er derfor utfordrende for både elever og lærere (Blum & Ferri, 2009, s. 45). På bakgrunn av dette har også mange lærere både liten kunnskap og få erfaringer om temaet. Internasjonal forskning viser at det har vært lite fokus på matematisk modellering i barneskolen (Greer et al., 2007, s. 89). English (2010, s. 288) sier at «matematisk modellering tradisjonelt har vært forbeholdt ungdomsskoleelever på bakgrunn av antagelser om at barneskoleelever ikke er i stand til å utvikle sine egne modeller og å gi mening til systemer som håndterer komplekse situasjoner». Hun motsier påstandene, og eksemplifiserer hvordan man kan arbeide med matematisk modellering med yngre elever (English, 2003; English, 2010). Forskningslitteratur som omhandler barneskoleelever i arbeid med matematisk modellering, har vist til studier med systematisk arbeid over tid, for å utvikle en helhetlig kompetanse (English & Watters, 2005). Vi har funnet lite forskningslitteratur fra Norge som omhandler modellering i barneskolen og mener derfor at vår studie kan være et bidrag til debatten om hvordan elever kan jobbe med modellering i barneskolen.

Blomhøj og Jensen (2003, s. 127) anbefaler at elever skal jobbe med hele modelleringssyklusen for å kunne utvikle en god modelleringskompetanse, også kalt holistisk tilnærming. Allikevel erkjenner Blomhøj og Jensen (2003, s. 137) at må det veksles mellom en holistisk og atomistisk tilnærming, altså jobbe med delprosesser av en modelleringgsyklus, i undervisningssituasjoner. I empirien trekkes det frem at elevene har vansker med *å forstå oppgaven*, *forenkling* og *validering* i modelleringsprosessen (Blum & Ferri, 2009, s. 48), og fra et undervisningsperspektiv er det fornuftig å fokusere på delprosessene *matematisering* og *matematisk arbeid* (Blomhøj & Jensen, 2003, s. 127).

Formålet med denne studien var å studere hvordan et utvalg elever på 4. trinn løste en modelleringsoppgave da de ble presentert for et problem fra virkeligheten. Elevene jobbet med delprosessene *matematisering* og *matematisk arbeid* i en modelleringssyklus. Vi ønsket å studere hvordan elevene utvikler matematiske modeller og se på hvilke representasjoner de bruker i de ulike prosessene. Forskningsspørsmålet for denne studien har derfor vært:

Hvordan utvikler et utvalg 4. trinns elever matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan bruker elevene representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk?

For å finne svar på forskningsspørsmålet har vi studert 5 elevgrupper i en 4. klasse i deres arbeidet med en modelleringsoppgave, kalt S*trikkhopp*. Siden vår studie handler om matematisk modellering har vi valgt å bruke Ferris (2006) definisjon på en modelleringssyklus. I tillegg har vi brukt Duvals (2006) rammeverk om transformasjoner av representasjoner for å beskrive hvilke representasjoner elevene bruker i prosessene matematisering og matematisk arbeid. Disse to rammeverkene har vi brukt for å definere noen kompetanser som er nødvendige for å kunne jobbe med matematisk modellering.

Vårt formål med studien er å bidra til mer kompetanse om matematisk modellering generelt og mer spesifikt om hvordan man kan jobbe med deler av en modelleringssyklus med elever på barnetrinnet. Mer kunnskap om elevers arbeid med modellering kan hjelpe lærere å starte med dette fra barneskolen. Siden både tidligere forskning og kjerneelementene i matematikk er tydelige på at elever skal jobbe med dette så må kunnskapen ute hos lærere øke, samtidig som vi har nevnt over, har det vært få studier om temaet på barneskolen i Norge. For å bidra med kunnskap om elevers arbeid med matematisk modellering, har vi gjennomført en analyse av elevers utvikling og arbeid med matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, slik som Ferri (2006) definerer en modelleringssyklus. Spørsmålene vi stiller i analysen vil kunne gi både generelle og spesifikke svar med tanke på hvordan elevene utvikler modeller og på hvilke måter elevene kommuniserer med og om matematikk gjennom representasjoner basert på Ferris (2006) modelleringssyklus og Duvals (2006) rammeverk.

1.2 Oppgavens oppbygning

I det neste kapittelet vil vi presentere aktuell teori om matematisk modellering med fokus på prosessene og fasene i en modelleringssyklus. Deretter vil vi utdype hvilke delkompetanser, sett opp mot prosessene og fasene som undervisningsdesignet la til rette for. I tillegg vil representasjoner og transformasjoner bli forklart i teorikapittelet. I kapittel 3 vil vi gi en grundig beskrivelse av studien i sin helhet. I metodekapittelet vil vi også begrunne valg av oppgaven, deltakere og datainnsamlingsmetoder, samt forklare hvordan vi har analysert datamaterialet. I kapittel 4 vil vi introdusere resultatene av studien. I kapittel 5 vil vi drøfte våre funn opp mot teori og metode før vi i kapittel 6 oppsummerer studien.

2 Teori

I vår studie ønsker vi å studere hvordan et utvalg elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk. Sentrale begreper vil være matematisk modellering, modelleringskompetanse og representasjoner. I dette kapittelet vil vi starte med å gjøre rede for hva som ligger i begrepet matematisk modellering og modelleringssyklus for å etablere en ramme for senere beskrivelser. Vi vil deretter gjøre rede for kompetansebegrepet, først en generell beskrivelse, så matematisk kompetanse og til slutt modelleringskompetanse. Videre vil vi presentere teori om representasjoner og funksjoner for å komme med eksempler på hvordan funksjoner kan representeres. Kapittelet avsluttes med at vi oppsummerer vårt rammeverk for analysen før vi presenterer tidligere forskning på barneskoleelevers arbeid med matematisk modellering som grunnlag for senere drøfting.

2.1 Matematisk modellering

2.1.1 Hva er matematisk modellering?

I forskningslitteraturen finnes det ikke en homogen forståelse av matematisk modellering eller dens epistemologiske opphav (Sriraman & English, 2010), men det er enighet om at matematisk modellering beskriver forholdet mellom to delvis adskilte verdener; den virkelige verdenen og den matematiske verdenen (Schou et al., 2008, s. 22). Årsaken til at vi bruker matematisk modellering er for å forstå den virkelige verdenen bedre (Blum & Ferri, 2009, s. 47). Situasjonen eller fenomenet som anvendes i matematisk modellering skal være av en viss viktighet og elevene skal kunne se betydningen av det og kunne forholde seg til det for å kunne ta beslutninger om det (Schou et al., 2008, s. 22). Den virkelige verden er kompleks og sammensatt. Ved å ta en situasjon fra den virkelige verdenen og bearbeide den gjennom en modelleringssyklus skjer en forenkling av den virkelige verden. Resultatet blir en matematisk modell av situasjonen, som igjen kan oversettes tilbake til den virkelige verdenen for å se om den matematiske modellen beskriver situasjonen presist nok.

2.1.2 Tilnærming til modelleringsbegrepet

I det følgende vil vi kort gjøre rede for de ulike hovedretninger og mål innen modellering ut fra kategoriseringen til Kaiser og Sriraman (2006) og Kaiser (2020). Klassifiseringen er laget med bakgrunn i publikasjoner fra International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) og The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICMTA).

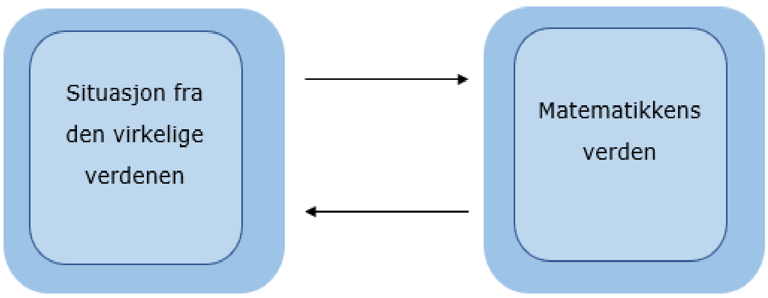
Realistisk eller *anvendt modellering* har pragmatiske og nyttige mål, som eksempelvis å løse problemer fra den virkelige verden og forstå den virkelige verden. Realistisk modellering tar utgangspunkt i en autentisk situasjon fra virkeligheten, som eksempel fra industrien eller vitenskapen. *Epistemologisk eller teoretisk modellering* har teoriorienterte mål og bygger på den vitenskapelige og humanistiske tilnærmingen. *Undervisningsmessig modellering* legger vekt på pedagogiske og fagrelaterte mål. De deles inn i to underkategorier *didaktisk modellering* og *konseptuell modellering*. I *didaktisk modellering* er det pedagogiske og fagrelaterte mål med å strukturere og fremme læringsprosesser som er i sentrum, mens de pedagogiske og fagrelaterte mål i *konseptuell modellering* er å introdusere og utvikle konsepter. *Model eliciting* og *kontekstuell modellering* vektlegger problemløsningsoppgaver og psykologiske mål. Synet på problemløsning i *Model eliciting* blir av Lesh & Zawojewski (2007, gjengitt i Sriraman & English, 2010, s. 271) sett på som en integrert del av utviklingen og forståelsen av et matematisk konsept eller en prosess.

Sosiokristisk og Sosiokulturell modellering vektlegger en kritisk forståelse av omverdenen forbundet med annerkjennelse av modelleringens sosialkulturelle avhengighet. *Kognitiv modellering* har et metaperspektiv på modellering hvor målet er å analysere de kognitive prosessene som finner sted i modelleringsprosessen og forståelsen av disse. Utviklingen av nye perspektiver innen modellering har de siste årtier lagt vekt på metakognisjon, sosiokritiske og sosiokulturelle spørsmål, et mer prosessorientert syn på modellering og modelleringssyklusen (Kaiser, 2020, s. 556).

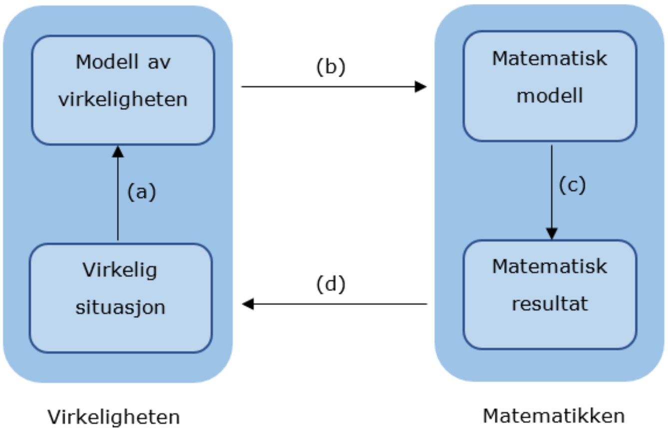
2.1.3 Modelleringssykluser

En modelleringssyklus er en teoretisk og ideell grafisk fremstilling av en matematisk modellering.

Vi vil i det følgende presentere forskjellige modelleringssykluser med ulikt detaljnivå avhengig av hvilket formål modelleringen skal ha. Som nevnt ovenfor har synet på modelleringsprosessen og modelleringssyklusen forandret seg over tid og med tanke på formål. I figur 1 vises matematisk modellering som forholdet mellom to adskilte verdener med en enkel grafisk fremstilling. Ved å bearbeide en situasjon fra den virkelige verdenen til den matematiske verden, blir resultatet en *modell av* den konkrete situasjonen. Modellen kan deretter generaliseres til en *modell for* liknende situasjoner Schou et al. (2008, ss. 41-42). Elever kan lage en matematisk modell av en erstatningsordning for sykkeltyveri. De kan deretter generalisere den matematiske modellen ved å bruke det generelle i modellen for sykkeltyveri og lage en liknende erstatningsordning for tyveri av for eksempel moped eller telefon. Elevene har da laget en *modell av* en spesiell situasjon og generalisert denne for å lage en *modell for* lignende situasjoner.



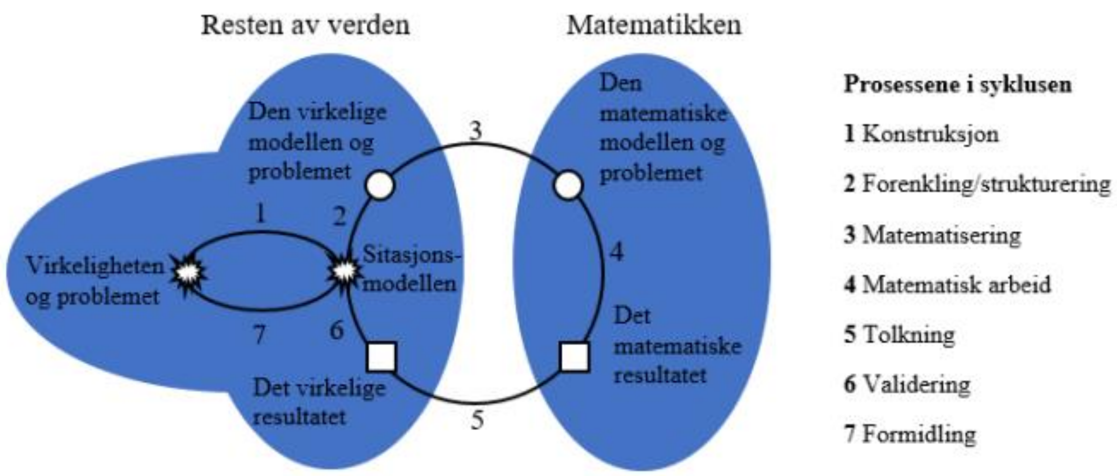
Figur 1 Virkeligheten og matematikken (Schou et al., 2008, s. 23)



Figur 2 Modelleringsprosess, Kaiser (1995) og Blum (1996) gjengitt i (Kaiser, 2005)

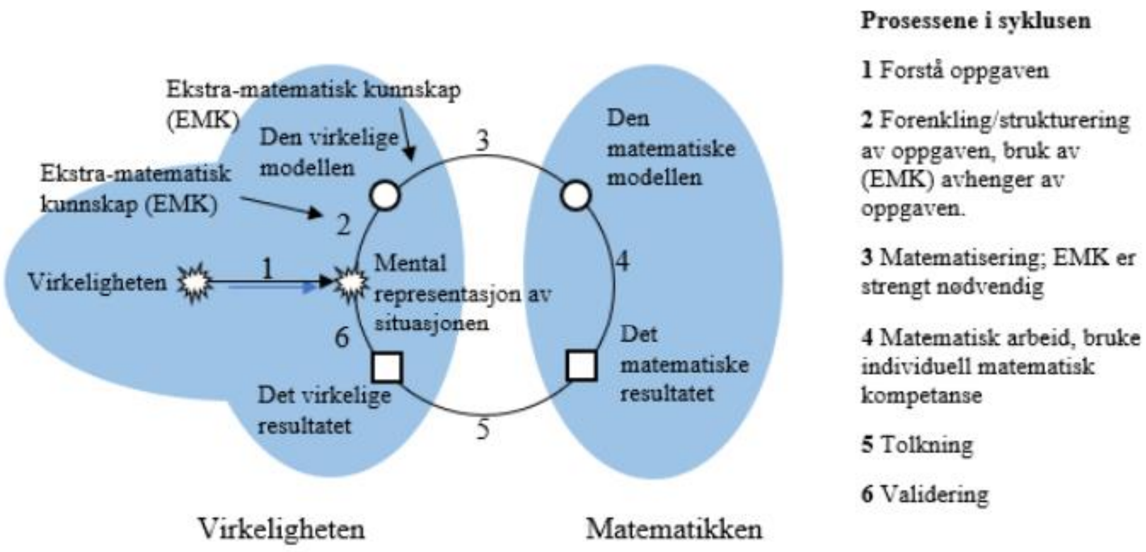
Forskere innen modellering beskriver modelleringssyklusen med ulikt detaljnivå avhengig av hvilket formål modelleringen skal ha. Figur 2 gir en noe mer detaljert beskrivelse av hva som ligger i og mellom de to adskilte verdenene i forhold til figur 1. Figur 2 beskriver en ideell og typisk prosedyre for en modelleringsprosess som starter i den virkelige verdenen. Den virkelige situasjonen blir *forenklet* og *strukturert* (a) for å kunne utarbeid en virkelig modell. I overgangen mellom virkeligheten og matematikken blir den virkelige modellen *matematisert,* (b) altså oversatt til matematikk, slik at du får en matematisk modell av den opprinnelige situasjonen. Gjennom *bearbeidelser* (c) av den matematiske modellen oppnås matematiske resultater. Det matematiske resultatet skal deretter overføres tilbake til den virkelige situasjonen og resultatet *tolkes* (d) opp mot den opprinnelige konteksten for så å validere eller forkaste resultatet. Dersom resultatet forkastes, må syklusen starte om igjen (Kaiser, 2005, s. 100). Den ideelle situasjonen er at modelleringsprosessen er i teorien syklisk, men i praksis går pilene på kryss og tvers mellom den *virkelige* og *matematiske verden*. Figur 2 gir en god oversikt over forholdet mellom den virkelige og matematiske verdenen, men ikke over delprosessene i matematisk modellering.

Blum og Leiß (2007) har videreutviklet den grafiske fremstillingen fra figur 2 slik at den dekker både de ulike fasene og de ulike prosessene i en didaktisk modelleringssyklus. En viktig avgrensning med denne modellen er at den er tilpasset komplekse



Figur 3 Blum og Leiß (2007) modelleringssyklus

modelleringsoppgaver og ikke problemløsningsoppgaver. Hensikten med syklusen er å hjelpe elevene med å forstå den virkelige verdenen bedre (Blum & Ferri, 2009, s. 47). En av forskjellene fra figur 2 er at Blum & Ferri (2009) mener *situasjonsmodellen* er en viktig fase i modelleringsprosessen, om ikke den viktigste. Grunnen til dette synspunktet er fordi den beskriver overgangen mellom *virkeligheten* og *situasjonsmodellen* som en prosess i å forstå oppgaven (Ferri, 2006, s. 87). De utvider også prosessen med at tolkning og validering er to ulike prosesser, og i tillegg har de lagt til formidling som en prosess som slutter syklusen. De har altså beskrevet modelleringsprosessen mer detaljert enn Kaiser og Blum har gjort tidligere. Blum og Leiß (2007) har tilpasset modellen slik at den omfavner komplekse modelleringsoppgaver. Modelleringssyklusen til Blum & Leiß (2007) gir med oversikten over prosessene, til høyre i Figur 3, et viktig bidrag til didaktisk modellering ved at de har synliggjort strukturene og læringsprosessene som er i en modelleringssyklus. Beskrivelsen av fasene og rekkefølgen er ifølge Ferri (2006, s. 89) normativ, en ideell og teoretisk beskrivelse, ut fra empiri viser det seg at rekkefølgen ikke er lineær. For å beskrive rekkefølgen av faser og overganger som elevene jobber i under modelleringen bruker Ferri begrepet modelleringsruter. En modelleringsrute er en betegnelse for den individuelle modelleringsprosess og kan identifiseres gjennom verbale ytringer eller representasjoner. Ved i ettertid å kombinere disse modelleringsrutene til elevene kan man få et overblikk over hvordan deres modellering kan beskrives empirisk (Ferri, 2006, s. 91).



Figur 4 Modelleringssyklus i et kognitivt perspektiv (Ferri, 2006, s. 92).

Ferri (2006, s. 87) har i figur 4 tatt utgangspunkt i empiri når hun har laget en videre tilpasning av modellen Blum og Leiß (2007). Her ser hun modelleringssyklusen i et kognitivt perspektiv, hvilket vil si at hun har fokus på tankeprosessene til elevene som foregår i syklusen. I *virkeligheten* har hun her erstattet *situasjonsmodellen* med en *mental representasjon av situasjonen* fordi dette begrepet beskriver den interne prosessen frem til et mentalt bilde etter at den komplekse modelleringsoppgaven er presentert. I tillegg har hun beskrevet hvor ekstra-matematisk kunnskap er en nødvendighet. Ekstra-matematisk verdenen er den delen av den virkelige verdenen som er relevant for oppgaven (Galbraith et al., 2007, s. 4) og med kunnskap så menes det den matematiske kunnskapen som er nødvendig for å oversette fra den virkelige verdenen og over til både en virkelig og en matematisk modell (Ferri, 2006, s. 92). Vi har valgt å ta i bruk modellen figur 4 fordi vi mener den har et tydeligere fokus på hvor i prosessen elevene må forstå oppgaven, og hvor de må kunne ta i bruk nødvendig matematisk kunnskap for å komme videre med problemet. Slik vi forstår Ferri (2006) er figur 4 bearbeidet og tilpasset gjennom empiri, og dette ser vi på som viktig når vi skal studere barneskoleelever som skal jobbe med modelleringsoppgaver.

Den grafiske fremstillingen i figur 4 viser en detaljert oversikt over de enkelte trinnene i prosessen og fasene. Fasene i en modelleringsprosess er områdene elevene jobber i, mens en prosess er overgangen fra en fase til en annen. Selv om disse forklares som en lineær prosess med en bestemt rekkefølge så er dette den optimale måten å modellere på i teorien, mens i praksis gjennomføres modellering på en ikke-lineær måte (Ferri, 2006, s. 91), og det er hennes tolkning av prosessene og fasene vi legger til grunn i vår oppgave. Vi vil videre utdype fasene og prosessene som er grafisk fremstilt i figur 4.

Virkeligheten, som er den virkelige situasjonen, kan beskrives, gjennom illustrasjon, tekst eller begge deler samtidig (Ferri, 2006, s. 92). Fasen tar utgangspunkt i materiell, som for eksempel aviser, podkast eller togbillett, eller virkelige situasjoner, spesielt for barneskoleelever (Maaß, 2010, s. 299). Et eksempel som har vært mye brukt i undervisning av matematisk modellering for elever på ungdomstrinnet er oppgaven om Westerhever fyrtårn. Dette fyrtårnet står ved den tyske kysten mot Nordsjøen og er 41 meter høyt. Oppgaven er å finne ut hvor langt unna kysten skipet er når mannskapet ser fyrtårnet i horisonten for første gang (Kaiser, 2020).

I overgangen, prosess 1, fra *virkeligheten* og en *mental representasjon av situasjonen*, vil eleven forstå problemet mer eller mindre fullt ut. Den mentale representasjonen kan være på et implisitt nivå, men selv om elevene ikke forstår problemet helt og fullt, og ikke kan sette ord på problemet, vil de kunne fortsette å jobbe med oppgaven (Ferri, 2006, s. 92). Eleven har *en mental representasjon av situasjonen*, og den vil være avhengig av deres måter å tenke matematikk på. Noen elever er veldig opptatt av visuelle forestillinger med assosiasjoner til egne opplevelser, mens andre har et større fokus på tall og fakta som er gitt av problemet. Forskjellen mellom *virkeligheten* og *den mentale representasjonen av situasjonen*, har to hovedaspekter. Det ene er forenkling av oppgaven og det andre er hvordan eleven skal takle problemet i den kommende modelleringsprosessen (Ferri, 2006, s. 92).

I overgangen, prosess 2, fra *mental representasjon av situasjonen* til *den virkelige modellen* skjer det en forenkling og strukturering av modellen som er mer forståelig for eleven. I løpet av prosess 2 tar elevene noen beslutninger som påvirker hvilken informasjon av problemet som er valgt ut og er med videre på bakgrunn av ekstra-matematisk kunnskap hos elevene (Ferri, 2006, s. 92). For å utvikle en virkelig modell av fyrtårnoppgaven må det gjøres noen antagelser, som for eksempel om jordas kurve, for å kunne strukturere oppgaven videre (Kaiser, 2020, s. 558).

Den virkelige modellen har en sterk tilknytning til *den mentale representasjonen av situasjonen*. Derfor er den virkelige modellen for det meste bygget på elevens måte å tenke matematikk på. Det betyr at ulike representasjoner, som for eksempel illustrasjoner eller formuleringer, kan forestille den virkelige modellen, men det er avhengig av de verbale utsagnene eleven gir samtidig (Ferri, 2006, s. 92).

Matematisering er overgangen, prosess 3, som er fra *den virkelige modellen* til *den matematiske modellen.* I denne prosessen overfører eleven problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen. Elevene må bruke ekstra-matematisk kunnskap til å beskrive problemet med matematisk notasjon og bygge en matematisk modell som de kan operere videre på (Ferri, 2006, s. 92). Ved å bruke fyrtårnoppgaven som eksempel kan det lages en todimensjonal matematisk modell som beskriver jorda som en sirkel, tegne inn fyrtårnet og skipet (Kaiser, 2020, s. 558).

Elevene er nå i den matematiske verdenen, og utsagnene de bruker, både muntlige og skriftlige, er mer på et matematisk nivå enn på et nivå som refererer til virkeligheten. I denne fasen, *matematisk modell,* bruker elevene representasjoner som for eksempel illustrasjoner eller formler i det videre arbeidet (Ferri, 2006, s. 92). *Matematisk arbeid* betyr at elevene bruker sine matematiske ferdigheter til å jobbe med den matematiske modellen slik at de oppnår et *matematisk resultat*. I prosess 4 kan elevene møte på vanskeligheter dersom de ikke har tilstrekkelige matematiske ferdigheter som kreves av oppgaven. Det matematiske arbeidet ender i et *matematisk resultat* som de skriver ned (Ferri, 2006, s. 93). I det matematiske arbeidet finner de et matematisk resultat ved å bruke Pytagoras setning til å kalkulere avstanden mellom fyrtårnet og skipet. En utvidelse av modellen er å ta utgangspunkt i at høyden til den som ser ikke er på havnivå, men noe høyere (Kaiser, 2020, s. 558).

I overgangen, prosess 5, mellom *det matematiske resultatet* og *det virkelige resultatet* skal elevene tolke de svarene de har fått. Dette er en viktig prosess som ofte gjøres uten at elevene er bevisst overgangen fra den matematiske verdenen til den virkelige verdenen (Ferri, 2006, s. 93).

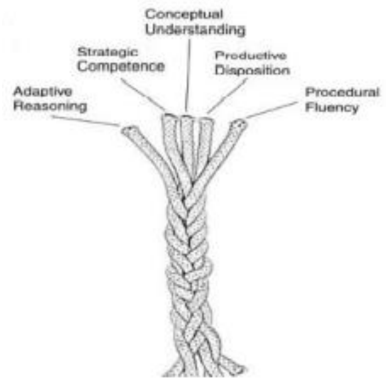
I *det virkelige resultatet* skal elevene diskutere *de matematiske resultatene* sett opp mot *virkeligheten* og vurdere om disse resultatene kan være reelle. Mens elevene validerer i prosess 6, må de, på bakgrunn av det virkelige resultatet og den mentale representasjonen de har av situasjonen, vurdere om dette kan være riktig eller ikke. På grunnlag av informasjonen kan det genereres to ulike måter for elevene å validere på. Det ene er en intuitiv validering hvor resultatene kan være gale for elevene av grunner som de ikke kan forklare. Elevene kan si at de tror at resultatene blir feil, eller at de ikke passer inn i deres egne rammer av erfaringer og assosiasjoner. Den andre måten å validere på er kunnskapsbasert validering, altså en mer bevisst validering. Elevene er enige eller uenige i resultatene på bakgrunn av deres ekstra-matematiske kunnskap. Både intuitiv og kunnskapsbasert validering er knyttet til elevenes tidligere refleksjoner. Årsaken til at elever for det meste ikke validerer, er fordi de for det meste gjør en «indre-matematisk validering». Validering for elevene betyr å beregne den matematiske modellen. De kobler ikke resultatene til situasjonen og virkeligheten (Ferri, 2006, s. 93).

2.2 Modelleringskompetanse

Som nevnt i innledningen har det blitt et større fokus på modellering i skolen, og da er det også rimelig å stille spørsmål om hvordan modelleringskompetanse kan både identifiseres og utvikles. Det er konsensus at modelleringskompetanse inkluderer delkompetanser som for eksempel å lage en virkelig modell eller å matematisere denne, men at dette ikke er nok til å karakterisere modelleringskompetanse (Maaß, 2006, s. 113). For å kunne spesifisere hva modelleringskompetanse kan være, vil vi først beskrive kompetansebegrepet generelt. Variasjoner av begrepet er basert på opprinnelse og ulike fagområder det kommer fra. Kunnskapsløftet bygger på følgende definisjon av kompetanse (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 10);

- *Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner.*
- *Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.*

Kunnskap er å kjenne til og forstå fakta, begreper, teorier, ideer og sammenhenger, mens ferdigheter er å mestre handlinger for å utføre oppgaver eller å løse problemer. Ferdigheter omfatter også motoriske, praktiske, kognitive, sosiale, kreative og språklige ferdigheter (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 10).



Figur 5 Intertwined Strands of Proficiency (Kilpatrick et al. 2001, s. 5)

Matematisk kompetanse kan beskrives ved hjelp av 5 komponenter. Komponentene kan sees på som tråder i et tau som er flettet sammen og avhengige av hverandre. Norsk oversettelse i parentes:

- Conceptual understanding (Forståelse)
- Adaptive reasoning (Resonnering)
- Strategic competence (Anvendelse)
- Procedural fluency (Beregning)
- Productive disposition (Engasjement)

Disse 5 komponentene støtter hverandre, og det er viktig å påpeke at elevene må utvikle alle fem samtidig. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket og elevene utvikler kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. Med tråden *resonnering* skal elevene utvikle den logiske tanke, refleksjon, forklaring og begrunnelse. *Anvendelse* er en strategisk kompetanse hvor elevene utvikler evne til å formulere, representere, løse matematiske problemer og lære ny kunnskap. Tråden *forståelse* utvikler oppfatning av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner, mens *engasjement* skal se matematikken som fornuftig, nyttig og overkommelig med en tro på å få det til. Den siste tråden, *beregning* står for dyktighet i å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2001).

Blomhøj (2006, s. 92) definerer matematisk modelleringskompetanse som en persons evne, i en gitt situasjon og på egenhånd kunne gjennomføre en modelleringsprosess med alle delprosesser. Å være kompetent i matematisk modellering betyr at elevene, autonomt og innsiktsfullt, kan jobbe seg gjennom modelleringsprosessene i bestemte kontekster (Blomhøj & Jensen, 2003, s. 126). Maaß (2006, s. 139) definerer at modelleringskompetanse inkluderer evner og ferdigheter til å gjennomføre modelleringsprosessen adekvat og på en målrettet måte, samt vise vilje til å bruke evnene og ferdighetene i praksis. I tillegg viser hun til at modelleringskompetanse inkluderer mer enn bare gjennomgå fasene og rekkefølgen av prosesser i en modelleringsprosess. Det handler også om å utvikle metakognitive modelleringskompetanser, strukturere fakta, kompetanse i argumentasjon og en positiv holdning. Maaß (2006, s. 139) beskriver modelleringskompetansen detaljert på denne måten (vår oversettelse):

A. Delkompetanser til å gjennomføre hvert enkelt steg i modelleringsprosessen;
   1. Kompetanse for å forstå det virkelige problemet og sette opp en modell basert på virkeligheten.
   2. Kompetanse til å sette opp en matematisk modell fra den virkelige modellen.

3. Kompetanse til å løse matematiske spørsmål innenfor den matematiske modellen.
4. Kompetanse til å tolke matematiske resultater i den virkelige situasjonen.
5. Kompetanse i å validere løsningen.

B. Metakognitive modelleringskompetanser.

C. Kompetanse til å strukturere virkelige problemer og vite i hvilken retning man skal gå for å finne en løsning.

D. Kompetanse til å argumentere i modelleringsprosessen og skrive ned argumentasjonen.

E. Kompetanse til å se mulighetene som matematikken gir for løsninger av virkelige problemer og se på disse som positive.

Elevene utvikler forskjellige kompetanser under de ulike prosessene i syklusen, både innenfor de enkelte delprosessene, A.1-A.5, og modelleringsprosessen som helhet, B-E.

Modellering er ifølge Blomhøj (2006) kompleks og modelleringssyklusen er omfattende og tidkrevende. Blomhøj og Jensen (2003, s. 128) skiller mellom to tilnærmingsmetoder for å utvikle modelleringskompetanse hos elever. En holistisk tilnærming er å jobbe med hele modelleringsprosessen. I utvikling av modelleringskompetanse gjennom en atomistisk tilnærming kan elevene jobbe med delprosessene i en modelleringssylklusen; matematisering, matematisk arbeid og tolkning. Den atomistiske tilnærmingen antar at implementering av fulle modelleringssykluser, spesielt i begynnelsen, vil være for tidkrevende og lite effektiv for å utvikle modelleringskompetanse Blomhøj og Jensen (2003, s. 129). Det er enighet om at begge tilnærmingene må integreres selv om det ikke er empiriske resultater som kan vise til effekt av tilnærmingene hver for seg (Kaiser, 2020, s. 559). Med bakgrunn i dette har vi valgt å ha en atomistisk tilnærming ved å la elevene jobbe med delprosessene matematisering og matematisk arbeid.

For å utvikle modelleringskompetanse gjennom matematikkundervisning må elevene, i følge Blomhøj (2006, s. 91), ofte jobbe med hele modelleringsprosessen. Elevene oppnår ikke modelleringskompetanse ved å jobbe med matematikk generelt. Som med andre kompetanser kan heller ikke modelleringskompetansen utvikles uten å jobbe med den. Fra et undervisningsmessig synspunkt er det hensiktsmessig å fokusere på få delkompetanser i en modelleringsprosess før man utvider med flere delprosesser. Blomhøj og Jensen anbefaler å begynne med delkompetansene som tilsvarer matematisering og matematisk arbeid (Blomhøj og Jensen, 2003, 127).

For å studere hvordan elevene utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, vil det derfor være hensiktsmessig å se på delkompetanser knyttet opp til disse to delprosessene. I følge Maaß (2006, s. 139) må elevene utvikle delkompetanser til å gjennomføre hvert enkelt steg i prosessen. To punkter kan beskrive delkompetansene som er nødvendig for å kunne gjennomføre delprosessene matematisering og matematisk arbeid:

- Kompetanse til å sette opp en matematisk modell fra den virkelige modellen.
- Kompetanse til å løse matematiske spørsmål innenfor den matematiske modellen.

Det er viktig å understreke at det er sjeldent man jobber i en og en prosess isolert, og at delkompetansene vil utvikles sammen (Ferri, 2006, s. 91).

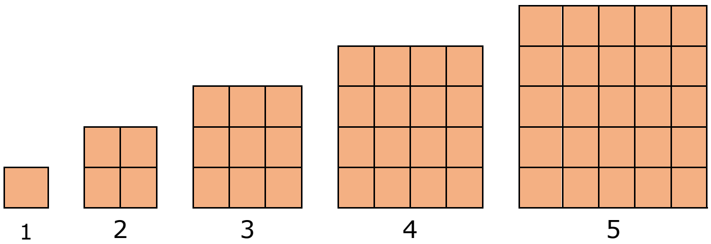
Kompetanse til å sette opp en matematisk modell fra den virkelige modellen
For å kunne sette opp en matematisk modell fra den virkelige modellen må elevene matematisere. Det betyr at elevene skal overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen (Ferri, 2006, s. 92). Ved å velge (Blum og Kaiser, 1997, s. 9, gjengitt i Maaß, 2006, s. 116) og bruke (Ferri, 2006, s. 92) passende matematisk notasjon beskriver elevene problemet og bygger en matematisk modell som de kan operere videre på. Elevene vil systematisere relasjonen mellom relevante mengder, og om nødvendig, redusere antall og kompleksitet i den matematiske modellen (Blum og Kaiser, 1997, s. 9, gjengitt i Maaß, 2006, s. 116). I den matematiske verdenen er utsagnene elevene bruker, både muntlige og skriftlige, på et mer matematisk nivå enn på et nivå som referer til virkeligheten (Ferri, 2006, s. 92).

Kompetanse til å løse matematiske spørsmål innenfor den matematiske modellen
For å kunne løse matematiske spørsmål innenfor den matematiske modellen må elevene bruke sine matematiske ferdigheter til å jobbe med den matematiske modellen slik at de oppnår et matematisk resultat. I det videre arbeidet vil elevene bruke representasjoner som for eksempel illustrasjoner, formler eller tabeller (Ferri, 2006, s. 92). Elevene må kunne dele opp problemet til mindre deler, etablere relasjoner til lignende problemer, omformulere og se problemet på en annen måte eller endre antallet (Blum og Kaiser, 1997, s. 9, gjengitt i Maaß, 2006, s. 116). De må kunne sortere, organisere, velge ut og vektlegge data de har tilgjengelig gjennom den matematiske modellen (English & Sriraman, 2010, s. 273). I denne prosessen kan elevene møte på vanskeligheter dersom de ikke har tilstrekkelige ferdigheter som kreves av oppgaven (Ferri, 2006, s. 92).

2.3 Funksjoner i matematikken

I denne studien ser vi på sammenhengen mellom to mengder gjennom matematisk modellering. Solem et al. (2017, s. 341) beskriver numeriske funksjoner (heretter benevnt funksjoner) som sammenhengen mellom to mengder hvor den ene mengden, definisjonsmengden, alltid tilordnes et element i verdiområdet. Funksjoner er forutsigbare fordi det til hvert element i definisjonsmengden kun er et element i verdiområdet. Funksjoner på barneskolen opptrer ifølge Solem et al. (2017, ss. 341-343) oftest i en kontekst og kan utrykkes gjennom ordnede tallpar som eksempelvis i en tabell. Når elever resonnerer og kommuniserer i arbeid med funksjoner, spiller de fysiske modellene, tabellene eller diagrammene en sentral rolle i arbeidet med å systematisere opplysningene, før elevene kan uttrykke sammenhenger mellom tallparene. Det å veksle fleksibelt mellom representasjonsformer er ifølge Janvier (1987, gjengitt i Solem et al., 2017, s. 341) en sentral del av arbeidet med funksjoner.

Arbeid med funksjoner på barnetrinnet er oftest sentrert rundt generaliseringen av relasjoner om sammenhengen mellom to eller flere mengder (Blanton et al., 2015, s. 512). På barneskolen er elevers møte med funksjoner som regel å se på endringer i tallmønstre og geometriske mønstre (Kieran et al., 2016, s. 5). I slike oppgaver skal elevene se hvordan de ulike mønstrene endrer seg og tilslutt generalisere en regel. Antallet i hver figur er en funksjon av figurnummeret (Eriksen et al., 2018, s. 189). Som regel blir fokus på endringen mellom hver figur, og ikke på sammenhengen mellom figurnummeret og antallet i figuren (Eriksen et al., 2018, s. 190). En slik rekursiv generalisering kan eksemplifiseres på følgende måte. Kvadrattall er det positive heltallet som blir av figurnummeret opphøyd i andre. I figur 6 er de fem første kvadrattallene vist både som et figurmønster og i en tabell. En elev kan forklare at mønsteret øker med 3-5-7 og 9 ruter, som er oddetallene. Denne eleven ser ikke at det er en sammenheng mellom figurnummeret og figurtallet og vil få problemer med å generalisere sammenhengen. Dersom en annen elev sier at figurtallene er det samme som figurnummeret multiplisert med seg selv, vil han eller hun ha større forutsetninger for å generalisere. Dette kalles for funksjonell generalisering (Eriksen et al., 2018, s. 190). Ved å vise sammenhengen mellom to størrelser i en tabell, kan det hjelpe elevene å sammenligne disse. Figurmønstre blir et for snevert grunnlag for funksjonstenkning (Blanton & Kaput, 2004, s. 141). Derfor vil ikke alltid slike oppgaver være hensiktsmessige når elevene skal generalisere sammenhenger mellom to mengder.



Figurnummer	Figurtall
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Figur 6 Sammenheng mellom to variabler sett som figurtall og i tabell

Å fremheve generelle relasjoner mellom størrelser, handler om matematisk modellering av en situasjon, og det er en forskjell mellom å møte funksjoner slik, eller å studere tallmønstre som er en metode som oftes benyttes i skolen for å la elever undersøke relasjoner mellom tall (Smith & Thompson, 2007).

2.4 Representasjoner

Modellering er kognitivt utfordrende for både elever og lærere. For elevene består utfordringene i manglende kompetanse med modelleringsprosessen, herunder konstruksjon, forenkling og validering. Lærernes utfordringene handler om støtten til elevene for å oppnå balansegangen mellom å gi minimalt med støtte og elevenes maksimale selvstendige arbeid (Blum & Ferri, 2009, ss. 48, 52). Modelleringsaktivteter er komplekse og utvikler ulike kompetanser hos elevene (Kaiser, 2020, s. 559), og modelleringskompetanse handler om evnen til å gjennomføre hele eller deler av modelleringssyklusen nøyaktig og adekvat (Blomhøj, 2006, s. 92; Blomhøj & Jensen, 2003, s. 128; Maaß, 2006, s. 117; 2010, s. 290). Derfor vil vi kunne dra nytte av å bruke et annet måleinstrument enn bare modelleringssyklusen for å studere og beskrive hvordan elever arbeider med matematisk modellering. Vi har, i tillegg til modelleringskompetanse, valgt å bruke rammeverket til Duval (2006) om representasjoner for å kunne beskrive hvordan et utvalg elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk.

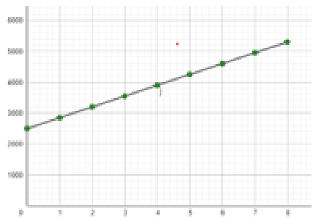
De matematiske objektene er abstrakte og kan eksempelvis være ideer, sammenhenger, mengder eller funksjoner. Felles for objektene er at de ikke kan oppfattes gjennom persepsjon eller andre instrumenter, som for eksempel en stjernekikkert som kan brukes for å studere stjernene og planetene i astronomi (Duval, 2006, s. 105). For å få tilgang til de matematiske objektene må de representeres ved for eksempel symboler, illustrasjoner, grafer eller regnefortellinger. En representasjon er noe som står for noe annet (Duval, 2006, s. 103), og har to roller. Ved siden av å kommunisere matematiske objekter skal representasjoner også fungere som støtte for elevenes tankeprosesser (Eriksen et al., 2018, s. 189).

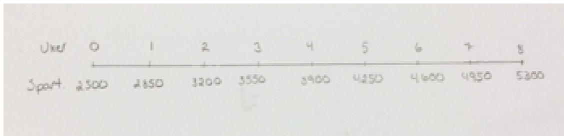
Et kognitivt paradoks er at elevene må skille mellom det representerte objektet fra den representasjonen selv om de ikke kan få tilgang til det matematiske objektet annet enn gjennom representasjoner. Når vi skal undersøke en sammenheng mellom to størrelser er det ikke det matematiske objektet vi ser, men en representasjon av en funksjon. Det samme objektet kan også representeres på flere måter som figur 7 viser.

Uker	Sparepenger
0	2500
2	3200
4	3900
6	4600
8	5300

$f(x)=2500+350x$

Inge skal spare penger så han kan kjøpe seg en ny sykkel. Sykkelen han har sett på koster 5000 kroner. Inge har allerede 2500 kr i banken, og vil spare 350 hver uke fremover. Hvor mange uker vil det ta før Inge har råd til sykkelen?





Figur 7 Ulike representasjoner av funksjonen f(x) = 2500 + 350x.

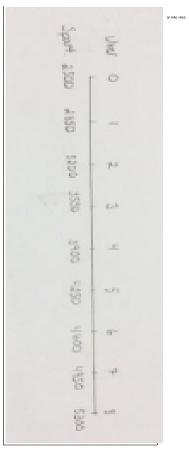
Ved hjelp av en tabell, graf, funksjonsuttrykk, tekstoppgave eller en dobbel tallinje kan en funksjon representeres på ulike måter. Selv om de er forskjellige representerer de det samme matematiske objektet, sammenhengen mellom antall uker Inge har spart penger, og hvor mange penger han har på sparekontoen sin. Fordi det matematiske objektet kan representeres på ulike måter, kan det være utfordrende for elever å kjenne igjen det samme matematiske objektet. Objektene må heller aldri forveksles med representasjonene som er brukt (Duval, 2006, s. 107). Som nevnt i innledningen kan tallet 7 være en representasjon av en mengde, og denne mengden kan representeres ved både 7 tellestreker «|||||||», 7 klinkekuler, regnestykket 10-3 eller med teksten «syv» (Duval, 2006, s. 106). For et og samme objekt finnes det altså flere forskjellige semiotiske representasjoner. Representasjoner er viktige for at elever skal kunne utrykke matematiske ideer. Samtidig som de må bruke representasjoner for kommunisere med og om matematikk vil elevenes evner til å se sammenhenger mellom de ulike representasjonene være viktig når de skal lære matematikk (Duval, 2006). En intern representasjon referer til et mentalt bilde av et matematisk objekt (Goldin, 2020, s. 566). Noe som betyr at elevene danner seg et visuelt og kognitivt bilde av en representasjon, og det er viktig at elevens interne representasjon stemmer overens med det matematiske objektet.

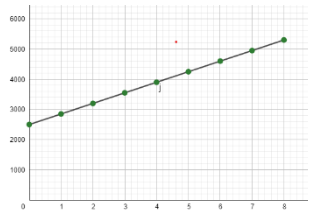
2.4.1 Semiotiske representasjonssystemer

I Duvals (2006) rammeverk deles matematiske representasjoner inn i fire semiotiske representasjonssystemer etter hvilke egenskaper representasjonene har; *naturlig språk*, *illustrasjoner*, *symbolspråk* og *diagrammer*, *tabeller og grafer.* Systemene er enten et multi- eller monofunksjonelt representasjonssystem. I et multifunksjonelt system finner vi representasjoner som kan brukes andre steder enn i matematikken og egner seg godt til kommunikasjons- eller informasjonsbehandling. For eksempel hører *naturlig språk* og *illustrasjoner* til et multifunksjonelt system. Naturlig språk kan være muntlige forklaringer, skriftlige begrunnelser, teoremer eller tekstoppgaver. Illustrasjoner er et ikonisk system med tegninger, mønstre eller geometriske figurer. Duval (2006, s. 109) sier at det kan være vanskelig for elever å se hva som er matematisk relevant i multifunksjonelle representasjonssystemer. Monofunksjonelle representasjonssystemer er systemer som er spesielle for matematikken og er egnet til å utvikle algoritmer. Symbolspråk som bevis, algoritmer og formler som kun kan uttrykkes skriftlig, og diagrammer, tabeller og grafer hører til under monofunksjonelle representasjonssystemer (Duval, 2006, s. 109). Et representasjonssystem inneholder ulike representasjoner. En verditabell og en graf er to eksempler på ulike representasjoner av det samme matematiske objektet som tilhører representasjonssystemet tabeller, diagrammer og grafer. Tabell 1 under viser hvor de ulike representasjonene fra figur 7 hører til etter Duvals (2006) inndeling av semiotiske representasjonssystemer.

<table>
<tr><th>Symbolspråk</th><th>Illustrasjon</th><th>Naturlig språk</th><th>Tabeller, diagrammer og grafer</th></tr>
<tr>
<td>Kun skriftlig,
Symboler som representerer mengder, beregninger og bevis.

$f(x)=2500+350x$

$2500 + 350 \cdot 4 = 3900$</td>
<td>Ikoniske:
tegninger, skisser, mønstre
Ikke-ikoniske:
geometriske figurer som kan konstrueres med verktøy
</td>
<td>Muntlig:
forklaringer
Skriftlig:
teoremer, bevis

Inge skal spare penger så han kan kjøpe seg en ny sykkel. Sykkelen han har sett på koster 5000 kroner. Inge har allerede 2500 kr i banken, og vil spare 350 hver uke fremover.
a. Hvor mye har Inge spart etter 4 uker?
b. Hvor mange uker vil det ta før Inge har råd til sykkelen?</td>
<td><table>
<tr><th>Uker (x)</th><th>Sparepenger f(x)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>2500</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3200</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3900</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4600</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5300</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Tabell 1 Representasjonssystem med eksempler (Duval, 2006, s. 110).

Det finnes andre måter å systematisere representasjoner på. For eksempel kan de deles inn i andre abstrakte representasjonsformer som verbale, grafiske, algebraiske og numeriske (Mainali, 2021, s. 1). Abstrakte representasjonsformer er effektive, men ofte mye vanskeligere å forstå for elever. I andre representasjonssystemer blir konkretiseringsmateriell tatt med som en egen representasjon. Bruken av konkretiseringsmateriell er basert på ideen om at elever begrunner og forstår konkret før de kan abstrahere de samme matematiske objektene (Laski et al., 2015). Ved å bruke konkretiseringsmateriell som en representasjon for et matematisk objekt, legges til enda en ny måte å se abstrakte matematiske objekter på, og dette kan styrke elevenes læring i matematikk (f.eks Duval, 2006; Kilpatrick et al., 2001). Noen representasjoner er ikke avhengige av et semiotisk system i den matematiske aktiviteten fordi de ikke har regler for form eller spesielle muligheter for transformasjon, men brukes oftest som en hjelp til transformasjoner (Duval, 2006, s. 110). Konkreter, er ifølge, Duval (2006, s. 110) en representasjon, men tilhører ikke et semiotisk representasjonssystem, og de er avhengige av en fortolkning når de brukes som en representasjon. Dersom vi bruker definisjonen om at et multifunksjonelt representasjonssystem kan brukes andre steder enn i matematikken kan konkreter sammenlignes med representasjoner i et multifunksjonelt system (Duval, 2006, s. 115). Fire prinsipper kan beskrive god bruk av konkretiseringsmateriell i klasserommet (Laski et al., 2015);

- *Bruk av konkretiseringsmateriell konsekvent og over tid*. For at bruk av konkretiseringsmateriell skal være effektivt, trenger elever godt tid til å skape sammenhenger mellom det konkrete materiellet og det abstrakte matematiske objektet som representeres.
- *Begynn med konkrete representasjoner og gå over til mer abstrakte representasjoner over tid.* Jo større likheten er mellom konkretiseringsmateriellet og det matematiske objektet, jo større er muligheten for at elevene forstår sammenhengen mellom de to.
- *Unngår konkretiseringsmateriell som ligner på hverdagsobjekter eller som har forstyrrende og irrelevante funksjoner.* Konkretiseringsmateriell som representerer virkelige objekter, kan faktisk hindre læring dersom elevene ikke ser konkretiseringsmateriellet som representasjoner for et matematisk objekt. Det kan skje om elevene for eksempel har mer lyst til å leke med konkretiseringsmateriellet. Det vil derfor være til god hjelp for elever, om materiellet som brukes i undervisningen, er strippet for forstyrrende og irrelevante objekter.
- *Forklar eksplisitt sammenhengen mellom konkretiseringsmateriellet og det matematiske objektet.* Det vil være urimelig å forvente at elever kan forstå sammenhengen mellom konkretene og det matematiske objektet de representerer, uten eksplisitte forklaringer.

2.4.2 Transformasjoner

Transformasjoner, altså veksling mellom symboler og semiotiske representasjoner er kjernen i all matematisk aktivitet (Duval, 2006, s. 107) og samtidig så må elevene kunne gjenkjenne det samme representerte objektet, selv om de semiotiske representasjonene er produsert i ulike representasjonssystemer (Duval, 2006, s. 108). Det er derfor viktig at elevene arbeider med transformasjoner av ulike semiotiske representasjoner slik at de kan utvikle en god forståelse for matematiske objekter og se dem fra ulike perspektiver (Svingen, 2018, s. 3).

For å forstå ulike aspekter ved et matematisk objekt vil elevenes evner til å kunne bruke og skifte mellom ulike semiotiske representasjonssystemer være en kritisk faktor for deres læring i matematikk. Elevene må kjenne igjen det samme matematiske objektet gjennom semiotiske representasjoner i forskjellige representasjonssystemer (Duval, 2006, s. 108). De må i tillegg kunne transformere semiotiske representasjoner, det vil si erstatte en representasjon med en annen. Duval (2006, s. 103) snakker om to typer transformasjoner; behandling og omdanning (treatments and conversions), som elever gjør i arbeid med matematiske objekter. Behandlinger er transformasjoner innen samme representasjonssystem. Et eksempel på en behandling innenfor systemet symbolspråk kan være 2500+350·4=3900 fordi 2500+350·4 byttes med 3900 og begge måtene å skrive 3900 på hører til i symbolspråk. Omdanninger er transformasjoner mellom ulike representasjonssystemer. Ved en omdanning kan regnestykket over representeres for eksempel ved hjelp av naturlig språk som vist i figur 7. Det matematiske objektet endres ikke selv om man bytter representasjonssystem, men fordi det kan være vanskelig for elevene å se det samme matematiske objektet i ulike semiotiske representasjons-systemer vil omdanninger oftest oppfattes som den mest kognitive utfordrende transformasjonen for elevene (Duval, 2006, s. 112). Spesielt for elever som strever i matematikk er det viktig å oppdage sammenhengen mellom de ulike semiotiske representasjonssystemene (Svingen, 2018, s. 4).

2.4.3 Representasjoner av funksjoner

For å vise hvordan et matematisk objekt kan representeres i de fire semiotiske representasjonssystemene, har vi tatt utgangspunkt i hvordan funksjoner kan representeres, med utgangspunkt i tabell 1. Funksjoner kan representeres gjennom en praktisk situasjon som omhandler sammenhengen mellom to mengder og kan vises gjennom tabeller, grafer og funksjonsuttrykk som er gitt, for eksempel, verbalt eller symbolsk (Eriksen et al., 2018).

I kolonnen for symbolspråk er det skrevet to forskjellige representasjoner for sammenhengen mellom to mengder. Det er representasjonen f(x)=2500+350x som funksjonsuttrykk og med tallsymboler 2500 + 350·4 = 3900. I illustrasjonen kan man lage ikonske illustrasjoner som en tegning eller skisse slik som vi har laget en dobbelt tallinje, som representerer sammenhengen mellom antall uker og det oppsparte beløp. Ved hjelp av naturlig språk, har vi laget en kontekst hvor vi muntlig kan forklare og argumentere for hvordan vi tenker eller skriver det ned og lage en skriftlig forklaring. I den siste kolonnen tabeller, diagrammer og grafer vises sammenhengen mellom de to mengdene, som sammenhengen mellom antall uker og sparepengene i en tabell og i en graf.

2.4.4 Representasjoner i vår studie

Vi har i denne studien valgt å bruke Duvals (2006) semiotiske representasjonssystemer som et utgangspunkt i analysen og drøftingen av matematisk aktivitet. Vi har i tillegg lagt til kategorien konkret som en representasjon for det matematiske objektet og situasjonen. Vi har laget underkategorier for å kunne beskrive representasjonene elevene bruker når de arbeider med matematisk modellering. Vi vil derfor bruke inndelingene og begrepene i tabell 2 når vi omtaler elevenes matematiske arbeid og prosesser.

Representasjon	Representasjonssystem			
Konkret	Symbolspråk	Illustrasjon	Naturlig språk	Diagrammer, grafer og tabeller
Konkretiserings-materiell	Tallsymbol Beregninger Regneuttrykk	Tegning	Muntlig språk Skriftlig språk	Tabell

Tabell 2 Representasjoner i vår studie

Konkreter er i vår inndeling en representasjon for situasjonen og det matematiske objektet, og vil være et hjelperedskap for elevene når de skal løse oppgaven. Vi har valgt å dele *symbolspråk* mellom tallsymboler, beregninger og regneuttrykk. De er alle representasjoner som bruker symboler for å beskrive matematikk. Representasjonssystemet *illustrasjon* har vi gitt underkategorien tegning og vil beskrive hvordan elevene kommuniserer matematikk ved hjelp av tegning. *Naturlig språk* har vi delt inn i to representasjoner; muntlig og skriftlig språk. Elevene vil bruke muntlig språk når de samarbeider, og de vil da kommunisere både om matematikk og andre hverdagslige hendelser slik som for eksempel: «Jeg var på kino i går». Vi har valgt å se bort fra slike utsagn som ikke har med oppgaven eller matematikk å gjøre fordi de ikke vil hjelpe oss med å svare på forskningsspørsmålet. Når vi snakker om skriftlig eller muntlig språk så handler det om elevenes kommunikasjon med og om matematikk. Representasjonssystemet *Diagrammer*, *grafer* og *tabeller* har fått underkategorien tabell. I en tabell er det ofte tallsymboler, men vi har valgt å snakke om tabell og tallsymbol som egne representasjonssystemer fremfor å inkludere doble representasjonssystemer.

I analysen har vi valgt å bruke Duvals (2006) rammeverk med et tillegg om konkreter for å beskrive representasjoner. Når elevene skal veksle mellom representasjoner vil vi bruke Duvals (2006) begreper om transformasjoner; behandling og omdanning. Overgangen fra representasjonen konkret og over til et representasjonssystem vil benevnes som omdanning selv om vi tidligere har referert til at omdanninger er transformasjoner mellom ulike representasjonsyster fordi det vil være stor forskjell på hvordan man ser det matematiske objektet gjennom konkreter og symbolspråk, illustrasjon, naturlig språk eller diagrammer, grafer og tabeller.

2.5 Kompetanseaspekter i vår studie

Som beskrevet tidligere, er modelleringskompetanse omfattende og kan bestå av mange ulike delkompetanser. For å studere hvordan et utvalg av elever på 4. trinn utviklet matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan elevene brukte representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk har vi valgt ut følgende kompetanseaspekter:

- å kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen.
- å kunne utvikle matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på egne undersøkelser og data.

- å kunne bruke representasjoner for å kommunisere med og om matematikk.

Dette er kompetanseaspekter vi ser etter når elevene skal undersøke en virkelig situasjon knyttet opp mot et matematisk objekt.

2.6 Empiri fra barneskolen

Det er lite forskning på barnetrinnet om modellering, siden modellering tidligere har vært sett på som en del av lærerplanen på ungdomsskolenivå og oppover i skolesystemet (English, 2010, s. 288). English og Watters (2005) har tatt matematisk modellering inn i barneskolen og laget prosjekter innen modellering med yngre elever i 8 årsalderen og deres lærere. Gjennom matematisk modellering skal elevene identifisere den underliggende matematiske strukturen til komplekse fenomener. Fordi matematiske modeller fokuserer på strukturer som eksempelvis mønstre, blir de ifølge English og Watters (2005) et viktig verktøy for å forutsi atferden til komplekse systemer. Gjennom studiene har de undersøkt elevers utvikling av matematisk kunnskap og elevens resonneringprosess gjennom modellering. De brukte autentiske situasjoner fra virkeligheten som elevene skulle tolke og beskrive matematisk. Elevene fikk ferdig utfylte tabeller med resultater og bakgrunnsinformasjon om situasjonen og kriterier som skulle med i løsningsprosessen. Som forberedelse til modelleringsproblemene fikk elevene fire forberedende modelleringsaktiviteter for å sette dem i stand til å løse de to modelleringsproblemer. De forberedene aktiviter skulle utvikle elevenes ferdigheter i å: a) Tolke matematisk- og vitenskapelig informasjon som ble presentert i tekst eller i form av et diagramm. b) Lese av enkle tabeller. c) Samle inn, analysere og representere data. d) Forberede en skriftlig rapport fra analysen av data. e) Samarbeide i gruppearbeid. f) Dele sluttproduktet med resultatet med en muntlig presentasjon og et skriftlig arbeid. Funn fra studien viser: at elever på 8 år kan drive på med modellering og finne mønstre som de bruker når de lager beslutninger; at det er vanskelig å formulere seg skriftlig og bruke anvendt data som argumentasjon for konklusjonen.

Av norske studier som har brukt modellering i barneskolen kan nevnes Eriksen et al. (2018) som har analysert og drøftet 2.-4. trinns elevers skriftlige løsninger om en oppgave om proporsjonalitet. Deres fokus var å se på hvilke representasjoner og strategier elevene benyttet for å løse oppgaven og hvordan de generaliserte uttrykket (Eriksen et al., 2018, s. 187). De så blant annet på hvordan funksjonstekningen kom til uttrykk i elevenes løsningsmetoder, ulike strategier for generaliseringen av funksjonssammenhengen og hvordan elevene brukte representasjonsformer for å kommunisere (Eriksen et al., 2018, s. 192). Funnene fra denne studien viser blant annet at det er mulig for elever på 2.-4. trinn å ressonere seg frem til en korrekt konklusjon. Elevene brukte ulike og varierte representasjonsformer og uformelle strategier (Eriksen et al., 2018, s. 210).

3 Metode

Vi har i denne studien undersøkt hvordan et utvalg elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller og hvordan elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk. For å kunne svare på forskningsspørsmålet har vi observert elever som jobber med en modelleringsoppgave. Vi har observert,gjort opptak av elevenes arbeid, to gruppeintervjuer og kodet datamaterialet. Datamaterialet er videre analysert ved hjelp av våre analyseskjemaer som undersøker hvert av de tre aspektene av modelleringskompetanse, som definert under delkapittel 2.5. Analysen har vært både induktiv og deduktiv, avhengig av hvilken del av modelleringskompetansen vi har undersøkt. Dette vil vi beskrive nærmere under analyseprosessen litt senere i kapittelet. Vi vil videre beskrive valg av deltakere og oppgave, undervisningsdesign, datainnsamling, analysemetode, -skjema og -prosess, etiske betraktninger og troverdighet i kvalitativ forskning.

Metoden vi har valgt skal gi innsikt i hvordan et utvalg elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk. Målet er ikke å forsøke å beskrive hva alle, eller de fleste gjør, men å beskrive hva noen elever gjør i en gitt situasjon. Derfor har vi valgt en kvalitativ tilnærming. Vår studie kan danne grunnlag for refleksjon og forskning om muligheter og utfordringer med matematisk modellering i barneskolen. Vi har valgt å gå i dybden med noen få elevers arbeid gjennom en kvalitativ studie, fremfor å designe en studie som kan si noe om en større populasjon. Internasjonal forskning viser at det har vært lite fokus på matematisk modellering i barneskolen (Greer et al., 2007, s. 89), men at forskningen som er gjort viser at elever på barnetrinnet kan utvikle egne matematiske modeller ut fra komplekse situasjoner (English & Sriraman, 2010, s. 272).

3.1 Valg av deltakere

Beslutninger om utvalg er avhengig av hensikten med studien (Cohen et al., 2018, s. 307). Studien ble gjennomført i en 4. klasse ved en skole på Østlandet etter godkjenning av skolens rektor. Vi informerte læreren om prosjektet og hele klassen ble invitert til være deltakere i studien. Dette for at alle skulle bli inkludert og at vi skulle få tilstrekkelig med deltakere. Av 21 elever i klassen var det 18 som takket ja og ga samtykke til lydopptak fra undervisning i helklasser, gruppearbeid og intervju, samt innsamling av elevarbeider.

Vi la ingen føringer på gruppesammensetningen ut over antall deltakere per gruppe. Kontaktlærer delte elevene opp i grupper à 3 elever ut fra samtykker og dynamikk. Vi sa oss enige denne vurdering idet at det er en fordel at elevene er trygge på hverandre. Det var av interesse for oss at elevene snakket sammen da de jobbet. På denne måten endte vi opp med 5 grupper som vi kunne hente lydopptak og skriftlige datamaterialer fra. Alle elevene i klassen deltok i undervisningsopplegget.

Under klasseromssamtalene organiserte vi det slik at læreren henvendte seg til elever med navn når det var data vi kunne bruke, og henvendte seg til elevene uten navn der det ikke forelå samtykke. Slik sikret vi at utsagn fra elever som ikke kunne brukes, ikke ble med i det videre arbeidet. Gruppene vil bli referert til som gruppe A-E, elevene er anonymiserte ved at vi har endret alle navnene. En oversikt over grupper og elever som er med:

A. Anne, Birgitte og Pia
B. Fredrik, Robert og Simen
C. Caroline, Henrik og Ine
D. Dennis, Mary og Nina
E. Geir, Jesper og Karl

Vi har transkripsjoner fra gruppene A og E da de jobbet med de små hoppene. Vi har gruppeintervju med gruppene B og C. I tillegg har vi transkripsjoner fra klasseromssamtaler og observasjonsnotater fra alle fem gruppene.

3.2 Valg av oppgave

Forskning viser at det er utfordrende for elever og lærere å jobbe med matematisk modellering (Blum & Ferri, 2009, s. 45), samtidig som Kunnskapsløftet fremhever modellering gjennom innføring av kjerneelementer (Utdanningsdirektoratet, 2020). Med bakgrunn i erfaringer som er gjort av blant annet English og Watters (2005, s. 59) så er det å jobbe med matematisk modellering og utvikling av modelleringskompetanse en tidkrevende prosess, spesielt i barneskolen. Modellering er, som nevnt tidligere, veldig komplekst og må derfor introduseres for elevene stegvis og systematisk. Det er gjort studier, som over en seks måneders periode, med forberedende modelleringsaktiviteter for å gjøre elever på barneskolenivå kjente med faser, prosesser og begreper (English & Watters, 2005). Vi har valgt å avgrense studien til å ha fokus på *matematisering* og *matematisk arbeid* i en modelleringssyklus når elevene skal undersøke et matematisk objekt.

Oppgaven i studien er hentet fra Mattelist.no, som er en nettside med matematikkoppgaver driftet av Matematikksenteret i Trondheim på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet. Disse matematikkoppgavene skal være enkle å komme i gang med, samtidig som de skal kunne gi utfordringer for elever med stort læringspotensial. «LIST» står for Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde, og sammen med oppgavene finnes det både lærerveiledninger og løsningsforslag (Matematikksenteret, 2018).

Oppgaven er basert på «Strikkhopp»[1], og slik den er gitt fra Matematikksenteret skal elevene undersøke hvor langt en Barbiedukke faller med ulikt antall strikker. Først skal de la Barbie falle med henholdsvis 1-5 strikker, måle lengden for hver strikk, for så gjette på hvor langt Barbie faller med 6 og 7 strikker. Deretter, på bakgrunn av disse undersøkelsene, skal elevene anslå hvor mange strikker det er behov for når Barbie skal foreta «Det store strikkhoppet». Kriteriet for å lykkes er at Barbies hår akkurat skal berøre gulvet eller en bøtte med vann. I elevenes arbeidshefte skal de beregne og gjette hvor mange strikker de trenger å sette på Barbie, og de skal i tillegg forklare hvordan de kom frem til akkurat det antallet. Etter første forsøk på det store hoppet skal elevene evaluere antallet de gjettet, vurdere resultatet og beskrive hva de eventuelt må forbedre

[1] https://www.mattelist.no/473

til neste forsøk. Dersom elevene ikke klarer det på andre forsøk skal de anta hvor mange de trenger for å få til det perfekte strikkhoppet (Matematikksenteret).

I vår studie ønsker vi å lage en relasjon til den virkelige verdenen med at elevene gjennom en introduksjon får et grunnlag for å kunne undersøke hopp 1-7 på egenhånd. Introduksjonen vil inneholde to av de første fasene av en modelleringssyklus; *virkeligheten* og den *mentale representasjon*. Virkeligheten er at elevene får vite at kontaktlæreren skal gjennomføre et strikkhopp fra en bru. Instruksjonene til elevene går på at læreren skal hoppe i strikk, men siden vi må finne ut hvor mange strikker som må brukes må vi lage en forenkling i klasserommet, og Barbie pluss strikker skal representere kontaktlæreren i utprøvingen innendørs og er den *virkelige modellen*. Elevene skal samarbeide i grupper, og alle gruppene får en Barbie hver, et antall strikker, et målbånd og oppgaveark som de kan bruke i utprøvingen. Konkretene og det fysiske materiellet; Barbie, strikkene og målbåndet, representerer læreren som hopper i strikk i den virkelige situasjonen. Konkretene vil være til hjelp under matematiseringen når elevene beveger seg mellom den virkelige og den matematiske verdenen når de skal utvikle en matematisk modell.

3.3 Undervisningsdesignet

For å studere hvordan et utvalg elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og på hvilken måte elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk valgte vi å utarbeide et undervisningsdesign som ble strukturert i fem økter.

3.3.1 Undervisningsstruktur

Den planlagte undervisningsstrukturen tar utgangspunkt i oppgaven og bygger på egne erfaringer og observasjoner fra en pilotering vi holdt i forkant. Strukturen på undervisningsdesignet, slik figur 8, viser ble endret til flere mindre arbeidsøkter i grupper og med felles klasseromsoppsummeringer underveis for å hjelpe elevene i modelleringsprosessen.

Figur 8 Grafisk fremstilling av de ulike øktene i undervisningsdesignet.

Den første økten er introduksjonen. Hensikten med introduksjonen er at elevene skal *forstå oppgaven* gjennom konteksten om at kontaktlæreren deres skal hoppe i strikk. Elevene blir gjennom naturlig språk presentert for problemet som tar utgangspunkt i en tenkt situasjon fra den virkelige verdenen slik at de kan danne seg en *mental representasjon av situasjonen.* Undervisningsdesignet baserer seg på noen valg vi har gjort for å bestemme den virkelige modellen elevene skal jobbe med. Gjennom *forenkling* og *strukturering* har vi valgt at den virkelige modellen blir representert gjennom konkretene Barbiedukke og strikker. Gruppene skal undersøke funksjonen som er sammenhengen mellom to mengder; her vist mellom fallhøyden til Barbie og antall strikker. Konkretene Barbiedukke og strikker kan egne seg som representasjoner for problemet fordi de opptrer på tilnærmet lik linje med den virkelige situasjonen. Barbie har en konstant lengde og masse slik en person har, og strikkene vil strekke seg i hoppene slik strikker gjør under strikkhopp i virkeligheten.

Gruppene skal jobbe med konkreter, måle fallhøyden med et målbånd, skrive ned resultatene i arbeidsheftet og få erfaringer med måling og knytte målt lengde opp mot symboler som representerer fallhøyden. I introduksjonen får elevene sett den virkelige modellen og demonstrert arbeidsprosessen for hvordan gruppene skal veksle mellom å ta strikk på Barbie, la henne hoppe, måle lengden og fylle resultatet inn i det første tabelloppsettet i arbeidsheftet, se vedlegg 3.

Med bakgrunn i definisjonen, gitt av Blomhøj (2006), om at matematisk modelleringskompetanse er hvordan «en person», i en gitt situasjon og på egenhånd, evner å gjennomføre en modelleringsprosess med alle delprosesser, ble det lagt til rette for undervisningssituasjoner der elevene i størst mulig grad skal konstruere kunnskapen selv med minst mulig intervensjon fra lærer. I slike situasjoner kan et mønster i en tabell være med på å hjelpe elevene i riktig retning.

I arbeidet med de små hoppene med 1-7 strikker (S_{1-7}) skal elevene overføre problemet fra den virkelige verdenen til den matematiske verdenen gjennom prosessen matematisering. Elevene skal gjenta prosessen læreren viste dem for 1-5 strikker. Videre i matematiseringen skal elevene se etter et mønster i tabellen for fallhøyden for hopp 1-5. Mønsteret skal de bruke når de anslår fallhøyden på hoppet for Barbie med 6 strikker. Tabellraden for det 6. og 7. hoppet inneholder kolonner for gjettet og målt høyde, samt differanse. Hensikten er at de skal sjekke om deres anslag stemmer med målt fallhøyde før de gjentar prosessen til hopp nr. 7. Ved å beregne differansen, får gruppene en tilbakemelding på hvor presise deres matematiske modeller av hopp 6 og 7 er.

Etter at gruppene har jobbet med matematiseringen, og de små hoppene 1-7, skal elevene samles til oppsummering 1, felles i klasserommet. Hensikten er at elevene skal dele erfaringene og utfordringene slik at de kan bli bedre rustet til å fortsette modelleringsarbeidet.

I arbeidet med det store hoppet (DST) skal elevene utføre matematisk arbeid på den matematiske modellen de har utarbeidet gjennom S_{1-7}. De skal bruke sine matematiske ferdigheter til å lage en modell av et hopp med en bestemt fallhøyde på ca. 3 meter. Gruppene skal måle fallhøyden for det store hoppet før de utarbeider et anslag basert på høyden og erfaringer fra S_{1-7}. Deretter skal de teste og vurdere resultatet med å slippe den virkelige modellen ut fra hopphøyden og ned mot en vannoverflate. Basert på resultatet, denne gang i form av avstand til vannoverflaten, skal elevene videreutvikle den matematiske modellen. I vår studie har elevene «løst oppgaven» dersom håret til Barbie berører vannoverflaten.

Under oppsummering 2 skal gruppene dele deres matematiske resultater i fellesskap i klasserommet. Gruppene skal forklare hvordan de har tenkt, og hvilke elementer de har tatt hensyn til, for å bestemme antall strikker de ville teste ut for at håret til Barbie skulle berøre vannoverflaten.

3.3.2 Elevenes arbeidshefte

Arbeidsheftet er videreutviklet fra kopioriginalen på mattelist.no, og en fullstendig kopi finnes i vedlegg 0. Målet er å få elevene til å stoppe opp underveis, sette ord på, dokumentere og reflektere over matematiseringen og det matematiske arbeidet i modelleringssyklusen. Det har blitt lagt til forklarende tekst, tilpasset elever på 4. trinn, med blant annet beskrivelser på hva de skal gjøre med strikkene, Barbiedukken og målbåndet. Teksten er ment som en støtte mens de jobber med oppgavene, og Barbie blir nevnt eksplisitt for å hjelpe elevene i overgangene mellom den virkelige modellen og den matematiske modellen. Det er for at elevene lettere skal huske på at de målte lengdene representerer Barbie med strikker. Ved hver deloppgave har det blitt laget et eget felt der elevene skal forklare hvordan de har tenkt, enten ved hjelp av skriving eller tegning. Det er satt av plass slik at elevene fritt kan velge mellom ulike representasjonsformer som for eksempel naturlig språk, symbolspråk eller illustrasjon. I tabellen for 6 (S_6) og 7 (S_7) strikker har radene fått to nye kolonner i forhold til S_{1-5}; gjettet høyde og differanse. Hensikten er at elevene skal bli bevisste differansen mellom gjettet og målt høyde. Tilbakemeldingen, i form av differansen, skal bidra slik at elevene kan vurdere mønstrene de finner og bruke disse erfaringer i det videre arbeidet.

Dere skal sette på strikker, la Barbie hoppe og måle høyden på strikkhoppene.

Antall strikker	Høyde
1	
2	
3	
4	
5	

Figur 9 Elevens tabell for hopp 1-5

Nå skal dere gjette hvor langt dere tror Barbie hopper når det settes på 6 strikker. Forklar hvordan dere tenker ved å tegne eller skrive:

Figur 10 Forklarende tekst for hva elevene skal gjøre

Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
6			

Figur 11 Tabell for hopp med 6 strikker

Ved arbeidet med det store hoppet skal elevene først noterer ned den målte fallhøyden før de skal forklare hvordan de har tenkt og antallet av strikker de trenger. Etter at de har testet ut den første hypotesen skal de skrive ned hvordan det gikk og hva de tenker de må gjøre annerledes neste gang.

Høyden på det store strikkhoppet: __________

Hvordan tenker dere for å komme frem til antall strikker dere vil feste på Barbie slik at hun akkurat berører vannet med håret?

Figur 12 Forklarende tekst rundt det store hoppet

Til slutt skal de vurdere, med naturlig språk, symboler eller illustrasjoner, hvordan det gikk og anslå hvor mange flere forsøk de eventuelt trenger til det perfekte hoppet dersom de ikke har oppnådd et matematisk resultat i løpet av to forsøk.

Hvor mange strikker vil dere feste sammen slik at Barbie akkurat berører vannet med håret? _________

Hvordan gikk det?

Figur 13 Forklarende tekst rundt det store hoppet

3.4 Datainnsamling

For å kunne svare på hvordan et utvalg elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og på hvilken måte elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk, valgte vi å hente datamateriale fra både observasjon, elevarbeider og gruppeintervju. I vår studie brukte vi ulike kvalitative datainnsamlingsmetoder for å beskrive og forstå elevenes handlinger i deres naturlige kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). Valg av instrumenter for datainnsamling skal være tilpasset studien. De forskjellige instrumentene har ulike styrker og svakheter, noe man som forsker må være oppmerksom på (Cohen et al., 2018, s. 469). I denne studien ble det brukt to diktafoner, et arbeidshefte, den virkelige modellen, intervjuguide, se vedlegg 0, kontaktlæreren og oss to som våre verktøy for å samle inn data. Vi har valgt å ha med både intervju, observasjon og elevbesvarelser som datainnsamlingsstrategier, vi vil utdype senere i dette kapittelet.

Klassen var på forhånd delt opp i syv grupper av kontaktlæreren, men på grunn av samtykkene er dataene våre basert på arbeidet i fem av gruppene. To av disse gruppene jobbet på hvert sitt grupperom slik at vi kunne ta lydopptak av fremdriften. I helklasseaktivitetene; introduksjonen, oppsummering 1 og 2, tok vi opptak av samtalene mellom kontaktlærer, forskere og elever. Intervjuene ble gjort på dag 2, og de to gruppene som ble valgt ut, ble valgt ut på bakgrunn av observasjoner av det de hadde gjort i gruppene, Strikkhopp 1-7 (S_{1-7}) og det store hoppet (DST), dagen i forveien.

3.4.1 Lydopptak

Ved å gjøre lydopptak vil vi få en presis gjengivelse av det elevene sier. Vi vil ikke ha mulighet til å skrive ned alt som blir sagt, derfor kan bruk av diktafon være et godt verktøy under datainnsamling (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131). Det som kan være til hinder i en forskningssituasjon er at elevene kan bli noe reserverte, og de kan prate i munnen på hverandre slik at det blir vanskelig å oppfatte det som sies. En annen begrensning til et lydopptak er at vi ikke ser hva elevene gjør samtidig som vi hører det de sier eller gjør (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131), men ved siden av elevarbeider og observasjoner, altså datatriangulering, vil lydopptak være tilstrekkelig for at vi vil kunne svare godt på forskningsspørsmålet vårt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 236). Vi er interesserte i kommunikasjonen, mellom elevene når de jobber selvstendig i grupper. Det ble gjort lydopptak av elevaktivitetene i 2 av gruppene, andre økt og 2 intervjuer.

3.4.2 Observasjon

Observasjon gjøres i informantenes naturlige kontekst, og vi som observatører må bruke alle våre sanser for å oppfatte og forstå (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114). Når vi går rundt i klasserommet vil vi se hvordan elever velger ulike måter å løse en oppgave på, vi vil studere hvordan elever jobber sammen i grupper, og hvordan fremdriften deres er. Vi må være åpne for å fange opp det som skjer samtidig som vi har et fokus mot forskningsspørsmålet for våre observasjoner. Det epistemologiske ståstedet i kvalitativ forskning er at kunnskap skapes i møte mellom forsker og forskningsdeltakere (Guba & Lincoln, 1984, gjengitt i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 114). Observasjon alene vil ikke være en tilstrekkelig måte å samle inn data på fordi vår subjektivitet og våre antakelser vil ha betydning for analyser og tolkninger vi vil gjøre videre. Observasjon tatt i bruk sammen med intervju ses på som utfyllende datainnsamlingsstrategier i kvalitativ forskning. Siden observasjon kan bidra med utfyllende informasjon til et kommende intervju vil disse to datainnsamlingsstrategiene fungere som likeverdige og komplementære og inngå som en del av studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115).

Cohen et al. (2018, s. 543) ser på observatørrollen på en skala fra å være fullstendig observatør til å være fullstendig deltaker, og mellom disse har han lagt inn deltaker-som-observatør og observatør-som-deltaker etter hvor liten eller stor deltakelsen eller avstanden forskeren har. De fire rollene er satt inn i en tabell og viser rollenes likheter og ulikheter på en oversiktlig måte.

		Forskerens deltakelse	
		Liten	**Stor**
Forskerens avstand	**Liten**	Deltaker-som-observatør	Fullstendig deltaker
	Stor	Fullstendig observatør	Observatør-som-deltaker

Tabell 3 Ulike observatørroller (Gold, 1985, gjengitt i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115)

I rollene, fullstendig observatør og observatør-som-deltaker, har forskeren stor avstand, og skal på liten eller ingen måte samhandle med de som observeres, og er heller ikke en del av prosessene som observeres. Vi ønsket, ved behov, å kunne påvirke prosessen for å finne ut hvordan elevene utarbeidet og jobbet med en matematisk modell, uten å hjelpe dem for mye. Derfor inntok vi observatørroller som har liten avstand til elevene, men for å kunne observere både med et overblikk og med påvirkning, vekslet vi mellom å være deltakere-som-observatører og fullstendige deltakere. Fordi det kan være vanskelig å observere mens man underviser, valgte vi å bruke klassens kontaktlærer til å gjennomføre det meste av undervisningsopplegget i helklasse. Ved å være deltakere-som-observatører kunne vi komme med innspill underveis for å sikre fremdriften vi ønsket. Det gjaldt både at elevene fikk nok informasjon, men ikke for mye informasjon. Ikke minst gjaldt det at vi ikke fortalte dem hva som var riktig eller galt, men at de selv skulle gjøre undersøkelser og ta avgjørelser basert mønstre i tabellen (Postholm & Jacobsen, 2018, ss. 115-116). Elevene kan endre adferd ved at de blir observert, både i å gjøre det bedre eller blir mer reserverte (Cohen et al., 2018, s. 560). Videre foreslår Cohen et al. (2018, s. 310) at forskere bruker tid på å bli kjent med elevene de skal observeres slik at forskerne kan bli noe kjent med klasserommets normer og regler.

3.4.3 Intervju

I et forskningsintervju møtes forskere og forskningsdeltakere, og intensjonen er å utvikle kunnskap knyttet til en bestemt tematikk (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 121). Ved å gjennomføre et fenomenologisk intervju søker vi svar på hva elevene gjorde og hvordan de tenkte da de jobbet med modelleringsoppgaven ved at elevene selv bidrar med retrospektive beskrivelser av sine egne opplevelser (Giorgi, 1985). Ut fra elevenes respons kan vi beskrive erfaringene de gjør seg basert på arbeid med matematisk modellering og representasjoner, og vil være et bidrag for å svare på forskningsspørsmålet vårt. Siden målsetningen vår med intervjuet er å forstå elevenes perspektiv, ønsker vi å gjennomføre et semi-strukturert intervju (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 121). Vi har laget en intervjuguide, vedlegg 0, men er ikke opptatt av å stille spørsmålene i en bestemt, men heller i en naturlig rekkefølge. I løpet av intervjuene kan det hende elevene kommer med utsagn og informasjon vi ikke har tenkt ut på forhånd, men som vi finner hensiktsmessig at vi følger opp med spørsmål for bedre å forstå og oppleve mening i det elevene sier.

I intervjuguiden har vi laget ulike spørsmål som kan hjelpe oss med å belyse problemstillingen. Ved å lage spørsmålene på forhånd sørger vi for å dekke områdene innenfor kompetanseaspektene som er relevante for vårt forskningsspørsmål. I det første spørsmålet ba vi elevene fortelle oss om oppgaven for å få en forståelse av hvordan de hadde tolket den. Videre hadde vi skrevet ned noen oppfølgingsspørsmål til det elevene sa for å oppnå dybde og mer nyanserte svar. For eksempel, dersom elevene svarte ja på om det var andre forslag til hvordan de kunne angripe oppgaven, søkte vi svar på hvilke forslag det var og hvorfor disse ikke ble valgt. Vi hadde laget noen fortolkningsspørsmål slik at vi kunne gjenta det elevene hadde sagt for å sikre oss at vi forstod informasjonen riktig. Et eksempel: «Har vi forstått dere riktig når dere sier…?». Samtidig brukte vi elevarbeidene som et grunnlag for intervjuet ved at vi kunne stille spørsmål for å få dem til å utdype eller forklare hvordan de hadde tenkt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 122).

I en casestudie som omhandler barn er det noen sentrale premisser for å intervjue forskningsdeltakerne. Barn har kortere oppmerksomhetsspenn, og en annen språklig og kognitiv utvikling enn voksne. De kan ha et annet fokus på hva som er viktig samtidig som de ikke har like gode muligheter til å fremkalle tidligere erfaringer. Som nevnt over ønsket vi å ha et kort tidsperspektiv mellom fenomenet og intervjuet, samt at varigheten av intervjuet begrenset seg til 30 minutter. Det ble gjennomført i elevenes kjente omgivelser og samtalen var om erfaringer elevene hadde gjort dagen i forveien. Under intervjuet forsøkte vi å skape en god stemning med positive tilbakemeldinger (Cohen et al., 2018, s. 528).

3.4.4 Elevarbeider

Ved siden av mulighetene vi har ved å bruke de skriftlige elevarbeidene i intervjusituasjonen for to grupper, kan vi studere elevenes skriftlige løsninger sammen med transkripsjoner av lydopptak og observasjoner. Det vil være lettere for oss å oppnå en forståelse av elevenes løsningsstrategier. Da kan vi sammenligne det som blir sagt og det som blir skrevet på oppgavearket. Vi har brukt alle 5 gruppers skriftlige arbeid som grunnlag for datamaterialet, begrensningen for vår del var opptaksutstyr og oss som forskere. Vi observerte og hadde opptaksutstyret på samme plass, for dokumentasjon av utsagn. Dette gjør ikke de observerte grupper til representative, men det gjør det mulig å si noe om hvordan et utvalg av norske elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller fra komplekse situasjoner og bruker representasjoner i kommunikasjon med og om matmeatikk.

3.5 Analysemetode

Datamengden i kvalitativ forskning er ofte stor og bør reduseres for å unngå drukne i data (Cohen et al., 2018, s. 643). I kvalitative analysemetoder er målet å sortere datamaterialet som er samlet inn slik at vi kan få en oversikt, og at vi kan presentere det i skriftlig form (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 139). Vi har gjennomgått både transkripsjoner, lydopptak og elevarbeidene flere ganger for å lete etter mønstre. Vi har forsøkt å dele datamaterialet inn i kategorier eller temaer (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 139). Under observasjonene forsøkte vi å forstå hva som skjedde der og da, mens vi i ettertid har hatt muligheten til å studere og lytte til datamaterialet. Det har gjort til at vi har funnet mange små biter som vi har forsøkt å sette sammen til et komplekst og helhetlig bilde av elevenes arbeid med matematisk modellering og bruk av representasjoner. Vi har sett på datamaterialet med forskjellige blikk siden vi har brukt både en modelleringssyklus og representasjoner for å forstå og forklare hvordan elever har utviklet og arbeidet med matematiske modeller. Derfor har vi brukt to ulike tilnærminger i analysen av det empiriske matemarialet. Da fokuset var å studer hvordan elevene utviklet matematiske modeller benyttet vi en metode inspirert av Grounded Theory og constant comparative method (Cohen et al., 2018, ss. 717-724; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 14). I den konstante komparative metoden ønsker forskeren å analysere, forstå, og gi mening til, samt opprette koder og kategorier fra datamaterialet (Postholm & Jacobsen, 2018, ss. 142, 145). Det kalles for en induktiv tilnærming når forskeren går fra empiri til teori (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 101). Da vi studerte hvordan elevene kommuniserte med og om matematikk, tok vi utgangspunkt i anerkjent teori da vi utviklet koder og kategorier, altså en deduktiv tilnærming når forskeren går fra teori til empiri. Postholm og Jacobsen (2018, s. 102) hevder at det ikke er mulig å ha rene deduktive eller induktive tilnærminger, og at disse er ytterpunkter på en skala. Det er ikke mulig å bare forholde seg til teori fordi forskeren har observert noe. Det er også vanskelig å gå ut i verden som et blankt lerret uten forventninger og antakelser fordi forskeren bringer med seg sin egen subjektive og individuelle teori. Vi vil beskrive hvordan datamaterialet er analysert under analyseprosessen.

3.6 Analyseskjema

For å kunne ha en god og oversiktlig analyseprosess utviklet vi analyseskjemaer som organiserte og systematiserte kompetanseaspektene i vår studie. Vi har valgt å dele analysen vår opp i å studere matematiske modellering og representasjoner i tre delanalyser. Vi har utarbeidet to skjemaer, et for matematisk modellering og et for representasjoner. Analyseskjemaet for matematisk modellering har som formål å beskrive handlingene elevene gjorde i modelleringsprosessen og er delt i to delanalyser. Med handlinger mener vi å studere hvordan elevene fyller ut et ferdig tabelloppsett, utvikler matematiske modeller for ulike situasjoner og hvordan de løser eventuelle kognitive konflikter. Analysen av representasjoner har til hensikt å studere og beskrive handlinger gjennom begreper om representasjoner og transformasjoner av representasjoner. I delanalyse 3 analyserte vi hvordan elevene brukte representasjoner da de kommuniserte med og om matematikk. I dette delkapittelet vil vi gi en kort oversikt over hvert av de to analyseskjemaene vi har utarbeidet.

3.6.1 Analyse av matematisk modellering

Analysene av matematisk modellering har til hensikt å studere handlingene elevene gjorde da de skulle matematisere en situasjon som omhandlet sammenhengen mellom to mengder, og hvordan elevene jobbet matematisk i modelleringsprosessen. Vi har valgt å studere handlingene elevene gjorde etter at de ble presentert for en situasjon og fikk forklart hvordan de kunne undersøke sammenhengen ved hjelp av konkreter. Når vi snakker om handlinger så mener vi hva elevene gjorde da de slapp Barbie utenfor, målte fallhøyden, skrev inn resultatet i raden som representerte antall strikker, og hva de gjorde dersom elevene fikk resultater de ikke forventet. Videre så ønsket vi å studere hvordan elevene brukte resultatene fra tabellen og erfaringene sine da de utviklet matematiske modeller for situasjonene med seks (S_6) og syv strikker (S_7), samt det store hoppet på litt over 3 meter (DST). For å kunne analysere elevenes handlinger, utviklet vi et analyseskjema slik at vi kunne sikre at vi undersøkte det vi sa vi skulle undersøke. I tabell 4 har vi skrevet ned hvilke spørsmål vi har stilt i analyseprosessen.

Å kunne utvikle og arbeide med matematiske modeller	
Å kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen.	Å kunne utvikle matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på elevenes egne undersøkelser og data.
Delanalyse 1 Hvordan fyller elevene ut en tabell som kan danne grunnlag for matematiske modeller senere i modelleringsprosessen?	**Delanalyse 2** A. Hvordan utvikler elever matematiske modeller når de har en bestemt fremgangsmåte de skal følge? (Modell av S_6 og S_7) B. Hva vektlegger elevene når de utvikler matematiske modeller og ikke har en bestemt fremgangsmåte de skal følge? (Modell av situasjonen, DST)
Koder og kategorier Kode elevens handlinger gjennom utsagn og observasjoner. Koder og kategorier utarbeidet fra datamaterialet.	**Koder og kategorier** Kode elevenes handlinger gjennom utsagn og observasjoner. Koder og kategorier utarbeidet fra datamaterialet.

Tabell 4 Analyseskjema for matematisk modellering

3.6.2 Analyse av representasjoner

For å kunne analysere kompetanseaspektet som omhandler representasjoner og transformasjoner av representasjoner har vi studert og analysert hvordan elevene brukte representasjoner da de skulle kommunisere skriftlig og muntlig med og om matematikk. Med hvordan elevene brukte representasjoner tenker vi på hvilke representasjoner elevene brukte med ulike hensikter for å kommunisere med og om matematikk. For at elevene skal utvikle en dypere forståelse for begreper er det viktig at de kan se det matematiske objektet fra ulike perspektiver (Duval, 2006, s. 106) og se at noen representasjoner deler felles matematiske strukturer, hvilket er vanskelig for uerfarne problemløsere (Kilpatrick, s. 125). Transformasjoner kan være kognitivt utfordrende for elever siden det matematiske objektet kan representeres med veldig ulike representasjoner (Duval, 2006, s. 112). Vi har utarbeidet et skjema som viser hvilke spørsmål som ble stilt for å kunne finne svar på elevenes bruk av representasjoner.

Å kunne bruke ulike representasjoner
Å kunne bruke representasjoner for å kommunisere med og om matematikk
Delanalyse 3 A. Hvordan bruker elevene representasjoner når de skal kommunisere skriftlig med og om matematikk? B. Hvordan bruker elevene representasjoner når de skal kommunisere muntlig med og om matematikk?
Koder og kategorier Kode elevens bruk av representasjoner når hensikten var å kommunisere med eller om matematikk.

A. Analysere elevenes arbeidshefte for å finne eksempler på elevenes skriftlige kommunikasjon.
B. Analysere transkripsjonene for å finne eksempler elevenes muntlige kommunikasjon.

Kategoriene er utarbeidet fra begreper om representasjoner. Kodene er utviklet ut fra hvordan elevene brukte representasjonene i kommunikasjon med og om matematikk.

Tabell 5 Analyseskjema for representasjoner

Som begge tabellene viser så har vi stilt spørsmål til datamaterialet. Disse spørsmålene skal hjelpe oss med å finne svar på forskningsspørsmålet. Vi utdyper analysearbeidet med delanalyse 1-3 i kapittel 3.7 Analyseprosessen.

3.7 Analyseprosessen

Etter at vi hadde utarbeidet analyseskjemaer, gikk vi over til å kode analyseenheter i datamaterialet. Med analyseenhet mener vi (a) et eller flere muntlige utsagn som uttrykker en handling eller hensikt, eller (b) del av det skriftlige materialet som uttrykker en handling eller hensikt. Et utsagn som uttrykker handling kan være: «Karl: Ja, vi plusser på håret. Da er det 51 (cm).» fordi utsagnet utrykker at gruppa plusser på håret når de skal måle fallhøyden. Analyseenheter som uttrykker en hensikt, handler om skriftlige eller muntlige elevutsagn som begrunner eller argumenterer for valg eller handlinger de gjør. Et eksempel på analyseenhet som betegnes som hensikt er «Pia: Fordi vi må måle på nytt, fordi vi målte med den røde i stad begge gangene, og vi skal måle med den her gråe (henviser til de to sidene med ulike farger på målbåndet).» Her er hensikten at Pia forklarer hvorfor de må måle på nytt og begrunner det med at de hadde gjort feil tidligere. Siden vi så på elevenes arbeid med to ulike rammeverk, ble flere av analyseenhetene kodet med koder fra begge analysene. Vi vil utdype prosessene i de ulike analysene i delkapitlene under.

3.7.1 Analyse av matematisk modellering

I analysen av matematisk modellering studerte vi datamaterialet og var åpne for hva det kunne si. Vi startet med å kode transkripsjonene fra elevaktivitetene og intervjuene ved å beskrive hva som skjedde. Vi gikk gjennom linje for linje, og stilte det analytiske spørsmålet: Hva gjør elevene her? På bakgrunn av dette utarbeidet vi koder som beskrev handlinger og hensikter, som for eksempel «Lese av resultat» og «Vurdere avlest resultat». Noen koder omfavnet enkeltsetninger, mens andre inneholdt større enheter. For hver gang vi opprettet en ny kode, gikk vi tilbake i datamaterialet vårt for å se om den nye koden kunne brukes på datamaterialet vi hadde sett på forut. Gjennom kodingen fikk vi en oversikt over hva elevene gjorde, og vi kunne opprette kategorier etter fellestrekk i kodene. Fordi kodene og kategoriene er utarbeidet fra datamaterialet er analysen av matematisk modellering induktiv. Kodene, og kategoriene de er samlet under, er beskrevet og eksemplifisert i tabell 6 og gjelder for både delanalyse 1 og 2.

Kodene vi brukte i analysen av matematisk modellering, hadde som formål å beskrive handlingene elevene utførte. Slik forsøkte vi å få en oversikt over hvordan elevene jobbet med matematisk modellering med fokus på å utvikle matematiske modeller. I dette delkapittelet vil vi først utdype hvordan vi analyserte elevenes arbeid med å fylle inn tallsymboler i et tabelloppsett, som vist i figur 9, i delanalyse 1. I delanalyse 2 forklarer vi hvordan elevene utviklet matematiske modeller på bakgrunn av informasjon de fikk fra tallmaterialet i denne tabellen.

Utvikle matematisk modell			
Kategori	**Kode**	**Beskrivelser**	**Eksempler fra datamaterialet**
Måle	Måle fallhøyde	Elevene slipper Barbie utfor og måler fallhøyden fra hoppkanten og til hårtuppene.	Geir: Plusser du på håret? Karl: Ja, vi plusser på håret. Da er det 51 (cm).
	Måle strikk	Elevene måler lengden på en strikk som ikke er festet på noe.	Ine: […], eller så målte vi hvor lang, hvor lang strikken var og så plussa, den var 14 cm, […]
	Måle høyde det store hoppet	Elevene måler fallhøyden fra hoppkanten og til vannoverflaten	Forsker B: Hvor høyt er det på det store strikkhoppet? Ine: 310 (cm). Henrik: Jeg skriver
Resultat	Akseptere	Elevene skriver ned målt resultat i tabellen. Denne kategorien gjelder der hvor elevene aksepterer målt fallhøyde uten at de diskuterer resultatet seg imellom.	Geir: 51, ja. […] Skal vi se… Antall strikker, høyde, 51, her (Eleven finner frem til riktig sted i tabellen for å skrive ned resultatet). […]
	Vurdere og akseptere	Elevene diskuterer og vurderer resultatet, aksepterer det og skriver det ned.	Karl: Skriv 114 (cm). Og så sjekker jeg Jesper: Jeg lurer på… Geir: Er det 114 centimeter? Jesper: Ja. Karl: Ja, 114. Ja, da er den her.
	Vurdere og forkaste_ gjøre på nytt	Elevene diskuterer og vurderer resultatet, forkaster det og gjør et nytt forsøk.	Birgitte: Bare hold den der oppe (Anne holder i strikken med Barbie hengende ned.) […] Pia: Hæ! Nei, det er ikke… (referer til hennes egen observasjon av lengden.) […] Anne: Dette stemmer ikke, Pia. Pia: Åh ja, vi tok den (målebåndet) kanskje andre veien i stad? Birgitte: Ja, det var det vi gjorde. […] Pia: Okay, jeg tror vi bør ta av den ene strikken og så prøver vi den igjen. […] Visk ut de to så prøver vi på nytt.
	Vurdere og sammen-ligne resultat opp mot mønster	Elevene vurderer det resultatet de har fått opp mot et tallmønster de har sett.	Geir: Vent, vi må tatt noe feil, på den der, for det der er bare 7 centimeter mer (peker i tabellen på resultatene for S_4 og S_5). Og den er 15 (peker i tabellen på resultatene for S_3 og S_4).
	Vurdere og forkaste_gå videre	Elevene diskuterer og vurderer resultatet. Velger å gå videre uten å gjøre noe mer med situasjonen.	Videre fra dialogen over forklarerer en annen på gruppen årsaken til det ulogiske tallmønsteret. Karl: Vi glemte å måle håret (argumentet aksepteres av gruppen). Elevgruppa valgte å ikke gjøre noe mer, derfor er setningen kodet med «vurdere og forkaste_gå videre»
	Sammen-ligne resultat	Elevene sammenligner to eller flere resultater	Henrik: Vi hadde hundrede og elleve centimeter med de her strikkene (1.42) Ine: Og nå skal vi ha trehundrede og ti centimeter
Mønster	Lete etter mønster	Elevene ser i tabellen og leter etter et mønster i tallene.	Birgitte: Tre, fem, sju, sju, ni (ser på enerplassen i tabellen), ja. Vent, jeg tror det er to, fordi det er, fordi det er… Jeg tror det er to fordi… Da blir det elleve.
	Se mønster	Elevene ser et mønster i resultatene	Geir: 50, 65, det er 15 pluss… (kommenterer differansen mellom S_1 og S_2, altså de to første hoppene)

<table>
<tr><td></td><td>Anslå strikk-lengde</td><td>Elevene anslår lengden på en strikk.</td><td>Det øker nesten ti cm nesten hver gang men noen ganger litt mer.</td></tr>
<tr><td></td><td>Anslå fallhøyde</td><td>Elevene gjetter på fallhøyden</td><td>derfor gjettet vi 104 cm nå.</td></tr>
<tr><td></td><td>Finne differanse</td><td>Elevene beregner differansen mellom anslått og målt fallhøyde.</td><td><table><tr><th>Antall strikker</th><th>Gjettet høyde</th><th>Målt høyde</th><th>Differanse</th></tr><tr><td>7</td><td>214</td><td>113</td><td>101</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Beregne</td><td>Beregne antall strikker</td><td>Elevene regner ut hvor mange strikker de trenger å sette.</td><td>Fredrik: Tjue, men to strikker holder det, er to strikker fire (cm)? Nei, ni… Er to strikker ni centimeter? Jeg tror vi bare trenger en strikk til.</td></tr>
<tr><td></td><td>Beregne fallhøyde</td><td></td><td>93+11=104 cm</td></tr>
<tr><td></td><td>Mellom-regning</td><td>Beregninger elevene må gjøre for å komme frem til et resultat.</td><td>111+14=125+14 139+28=167</td></tr>
<tr><td></td><td>Feil-beregning</td><td>Elevene gjør feil i utregningene sine.</td><td>167+28=196</td></tr>
<tr><td></td><td>Følgefeil</td><td>Resultater som er regnet riktig, men som er feil med på grunn av tidligere feil-beregninger.</td><td></td></tr>
<tr><td>Gjetting</td><td>Gjetting</td><td>Elevene kommer med forslag uten argumentasjon eller begrunnelse.</td><td>Karl: Nå må vi gjette høyde. (tenkepause). Ok, da gjetter vi 126.</td></tr>
<tr><td>Strategi</td><td>Utviklet matematisk modell</td><td>Eleven bruker egne data og undersøkelser i modellutviklingen</td><td>Gruppen tok 102 cm (S_6) og multipliserte med 3 og kom frem til 306 cm. Utgangspunktet for 306 cm er 18 strikker og legger til strikker for å komme til 315 cm.
Fredrik: Mmm, her står det hundrede og to (peker på tabellen og resultatet for S_6) og så ganget jeg det med tre og så fant jeg ut at det var tre hundre og seks og så…[…]
Fredrik: Atten, atten strikker. Vi trenger litt flere enn atten strikker.

Utviklet modell for det store hoppet (første forsøk): $S_6 * 3 + 1$</td></tr>
</table>

	Hybrid-modell	Elevene bruker egne data og undersøkelser, og legger til informasjon i modellutviklingen	Ine: Vi hadde 111 når vi hadde gjort 7'ern også. Eller, ja, i lengde, og så skulle vi prøve å, eller så vi målte vi jo, og da ble det 310 centimeter ned fra der […] Ja, så vi plussa på, eller så målte vi hvor lang, hvor lang strikken var og så plussa, den var 14 cm, så vi plussa på 14 helt til vi kom opp til 310. Og så til slutt så telte vi hvor mange 14 vi hadde tatt med i tellinga helt til vi kom til 320. Utviklet modell for det store hoppet (første forsøk): S_7 + 14cm*n
	Ny matematisk modell	Elevene tar ikke i bruk egne data eller undersøkelser fra tidligere i modellutviklingen	Gruppen målte lengden av en strikk til 13 cm og brukte gjentatt addisjon til de kom til 310 cm. Karl: La oss måle hvor lang en strikk er da. Her er en strikk, og når vi strekker den ut er den 30. […] Og når den er helt vanlig er den 13. […] Geir: Da tar vi 13 og hvor mange ganger.. 13+13+13+13 (Skriver dette på oppgavearket) Karl: Vi skriver først 10 «trettener» (teller 13-tallene) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Utviklet modell for det store hoppet (første forsøk): 13 cm * n

Tabell 6 Kategorier og koder for matematisk modellering.

Delanalyse 1

For å kunne undersøke om elevene kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen, undersøkte vi hvordan elevene fylte ut en tabell. Det vi så på var prosessen med å sette strikker på Barbie, slippe henne utenfor, måle resultatet, skrive det inn og eventuelt vurderte kognitive konflikter med tanke på resultatene. Med kognitive konflikter mener vi at elevene fikk et annet resultat enn hva de forventet da de sammenlignet med tidligere resultater. I drøftingen vil vi se på hvordan elevene fylte ut en tabell som kunne danne grunnlag for matematiske modeller senere i modelleringsprosessen og sammenligne det med tidligere forskning på matematisk modellering.

Delanalyse 2

Denne analysen hadde til hensikt å studere hvordan elevene utviklet matematiske modeller videre med bakgrunn i informasjon og erfaringer de opparbeidet seg underveis i undervisningsopplegget. Vi ønsket beskrive prosessen gjennom å bruke elevenes utsagn og skriftlige arbeider for å se om noen av gruppene fikk vanskeligheter med å utvikle en modell på grunn av valg og vektlegging av informasjon eller utilstrekkelige matematiske ferdigheter. For å kunne beskrive, sammenligne og forstå utviklingen av elevenes matematiske modeller ble det nødvendig for oss å oversette fra elevenes muntlige og skriftlige arbeider med matematiske uttrykk. Det er altså ikke elevene selv som har konstruert disse. Underveis i kodeprosessen måtte vi tilføye en ny kategori og nye koder for å kunne beskrive strategiene elevene brukte i modellutviklingen.

Det vi opplevde som utfordrende i denne delanalysen er at elevene uttrykte muntlig at de gjorde noe, men skrev noe annet i arbeidsheftet. For eksempel så var det en gruppe som sa at de la til 15 cm, men ifølge det de hadde skrevet så hadde de lagt til 14 cm. Et annet eksempel er at samme elevgruppe sa at de hadde lagt til litt for lite forrige gang, og da forventet vi at de skulle legge til mer enn 14 cm, mens de la til 8 cm som ga en gjettet lengde på 126 cm. Det kan være at de hadde feil med tierovergangen. Differansen mellom strikkhopp 5 og strikkhopp 6 var 18 cm, men at de da regnet feil da de skulle legge 18 cm til 118 cm.

3.7.2 Analyse av representasjoner

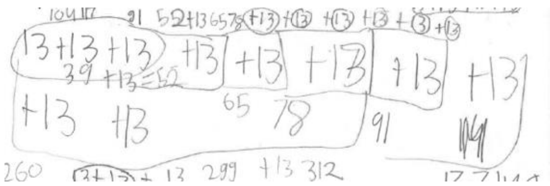
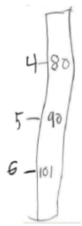
I analysen av representasjoner og hvordan elevene brukte og vekslet mellom representasjoner i kommunikasjon med og om matematikk så vi først etter ulike representasjoner og transformasjoner av disse. Deretter lagde vi koder som beskrev hvilken representasjon eller transformasjon elevene brukte. Noen koder fikk et tillegg som beskrev en handling eller hensikt, som for eksempel «Muntlig språk som argumentasjon» eller «Måle fallhøyde». Kategoriene ble utarbeidet med navn fra Duvals (2006) semiotiske representasjonssystemer og representasjonen konkret. Fordi kodene var utarbeidet fra representasjonene i vår studie var de allerede kategorisert.

Delanalyse 3

I delanalyse 3 undersøkte vi hvilke representasjoner elevene brukte for å kommunisere med og om matematikk. Elevene kan kommunisere på to måter, muntlig og skriftlig, samtidig som at de kan kommunisere matematikken både implisitt og eksplisitt. Når vi snakker om eksplisitt kommunikasjon så mener vi at elevene forklarer direkte hva de har gjort, eller hva de ser. «Det er forskjell på fire centimeter.» og «En strikk er 12 cm lang.» er eksplisitt kommunikasjon fordi vi ikke behøver å tolke eller være kjent med konteksten for å forstå hva eleven mener. «Det gikk ikke bra fordi den traff bakken.» er et eksempel på implisitt kommunikasjon. Vi må være kjent med konteksten for å forstå at denne eleven mener at det ble for mange strikker og at strikklengden er for lang i forhold til fallhøyde. Det er allikevel kommunikasjon om matematikk. Når det gjelder å bruke tabell som skriftlig kommunikasjon så valgte vi å ikke telle med disse analyseenhetene. Utfylling av tabell lå som en forventning til elevene fordi oppgaven eksplisitt ba om dette. Vi ønsket å studere elevenes egne valg av representasjoner. En begrensning i oppgaven til elevene var at de kunne velge mellom «å skrive eller tegne». For fjerdeklassinger kan det å skrive både bety å skrive setninger fremfor å bruke tallsymboler og regneuttrykk. I drøftingen vil vi løfte hvordan elevene bruker representasjoner i skriftlig og muntlig kommunikasjon med og om matematikk.

I analysen av representasjoner ble kodene og kategoriene utarbeidet fra datamaterialet, og analysen er derfor deduktiv. Kodene og kategoriene vi brukte er beskrevet i tabell 7.

Bruk av representasjoner			
Kategori	**Kode**	**Beskrivelse**	**Eksempler fra datamaterialet**
Naturlig språk	Muntlig språk som utrykker fremgangsmåte	Elevene forklarer muntlig hvordan de har jobbet i prosessen.	Henrik: Vi begynte med at vi gjorde det arket (elevenes arbeidshefte). Så vi begynte med å sette på en strikk og så slapp ned Barbien og målte hvor langt ned det ble med en strikk. Og så fortsatte vi med to strikker, og helt til vi kom ned til fem.[…]
	Muntlig språk som utrykker regneuttrykk og beregninger	Elevene forklarer muntlig hvordan de har beregnet.	Ine: […] så vi plussa på 14 helt til vi kom opp til 3 10. Og så til slutt så telte vi hvor mange 14 vi hadde tatt med i tellinga helt til vi kom til 320…
	Muntlig språk som utrykker tankeprosesser	Elevene forklarer muntlig hvordan de har tenkt.	Fredrik: Da tenkte vi, på en måte at det blir litt lengere. Den hopper lengere og lengere for hver gang… og så på grunn av at den strekker seg litt mer når den, mer når den hopper med flere strikker så da tenkte vi.
	Muntlig språk som utrykker vurdering av resultat	Elevene forklarer muntlig hvordan de vurderer et resultat	Geir: Vent, vi må tatt noe feil, på den der, for det der er bare 7 centimeter mer (peker i tabellen på resultatene for S_4 og S_5). Og den er 15 (peker i tabellen på resultatene for S_3 og S_4).
	Muntlig språk som argumentasjon	Elevene argumenterer for fremgangsmåte eller valg	Karl: […] da bør det være, det være i alle fall mer enn 10 centimeter, når den hopper.
	Muntlig språk som utrykker forslag	Muntlige forslag fra elevene	Karl: […] la oss prøve 114 (centimeter)

	Skriftlig språk som uttrykker fremgangsmåte, regneuttrykk eller beregninger	Elevene skriver ned hvordan de har jobbet i prosessen, eller utført beregninger.	Vi plusser på 1 hundrer så ble det 211, så plusset vi på to en ere så ble det 214.
	Skriftlig språk som uttrykker tankeprosesser	Elevene skriver ned hvordan de har tenkt.	Vi tenkte at 100 er 1 meter så vi må ha hundre 3 ganger.
	Skriftlig språk som uttrykker vurdering av resultat	Elevene skriver ned en vurdering av et resultat	Den traff bunnen av håret og vi er Fornayde
	Skriftlig argumentasjon	Elevene argumenter skriftlig.	Hvordan gikk det på andre forsøk? Det gikk ikke bra fordi at strikke strekker seg.
Symbolspråk	Beregninger	Elevene uttrykker beregninger med tallsymboler og operasjonstegn.	
	Regneuttrykk	Elevene bruker symbolspråk for å vise regneuttrykk	93 + 11 = 104 cm
Illustrasjoner	Tegning som representerer en sammenheng	Elevene tegner for å vise en sammenheng	
	Tegning for å unngå skriving	Elevene bruker tegning for å unngå å skrive en forklaring over hvordan de har tenkt.	

<table>
<tr><td>Tabell, diagrammer og grafer</td><td>Tabell</td><td>En tabell som viser sammenhengen mellom fallhøyde og antall strikker, eller for å vise differanse mellom anslått høyde og fallhøyde.</td><td><table><tr><th>Antall strikker</th><th>Høyde</th></tr><tr><td>1</td><td>50 cm</td></tr><tr><td>2</td><td>65 cm</td></tr><tr><td>3</td><td>78 cm</td></tr><tr><td>4</td><td>93cm</td></tr><tr><td>5</td><td>105cm</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Konkret</td><td>Klargjøre Barbie</td><td>Forklaring for hvordan elevene gjør klart Barbie for strikkhopp.</td><td>Geir: 51, ja. […] Skal vi se… Antall strikker, høyde, 51, her. […]
Karl: Og så må vi må vi ha den andre strikken.
Geir: Ja, den ja.
Karl: Og så, vi tar den, tar vi en her. Så gjør vi …</td></tr>
<tr><td></td><td>Måle fallhøyde</td><td>Hvordan elevene bruker målbåndet for å måle fallhøyden.</td><td>Pia: Fordi vi må måle på nytt, fordi vi målte med den røde i stad begge gangene, og vi skal måle med den her gråe (henviser til de to sidene med ulike farger på målbåndet).</td></tr>
<tr><td>Transformasjon</td><td>Omdanning</td><td>Der elevene bytter representasjons-system eller bytter mellom konkret og et av representasjons-systemene</td><td>Karl: Ja, vi plusser på håret. Da er det 51. […] Gå og skriv 51, Geir […]
Geir: Antall strikker, høyde. 51 her

(I dette eksempel skjer det en omdanning fra avlesing av konkret til naturlig språk og en omdanning fra naturlig språk til tabell)</td></tr>
<tr><td></td><td>Behandling</td><td>Der elevene bytter representasjon innenfor det samme representasjons-systemet</td><td>$214 - 113 = 101$

(I dette eksempel skjer det en behandling innen symboler)</td></tr>
</table>

Tabell 7 Kategorier og koder for bruk av representasjoner.

3.8 Etiske betraktninger

Vi har i denne studien forholdt oss til de generelle forskningsetiske og fagspesifikke retningslinjer fra Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Vi har tatt hensyn til at deltakerne er under 18 år og har skriftlig informert alle foresatte, elever og lærer om forskningsprosjektets innhold og om at deltakelse er frivillig og vi har innhentet samtykke fra foresatte. svarte på et samtykkeskjema, vedlegg 1 og 2, i henhold til retningslinjer hos Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Lydopptak, elevarbeid og skjema for samtykke regnes for personopplysninger (NSD) og prosjektet er meldt til NSD (Norsk senter for forskningsdata). Meldeskjemaet med referansekode 850282 ble godkjent 21.10.2020. og da var det mulig å informere elever/foresatte, samle inn samtykke og påbegynne datainnsamlingen. Elevene/foresatte ble skriftlig informert om behandling av personopplysninger og rettigheter og elevene fikk muntlig beskjed om at de kunne trekke samtykket ditt før opptakene ble startet i forbindelse med datainnsamlingen.

Før gjennomføringen ble prosjektbeskrivelsen meldt til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Av 21 elever i klassen var det 18 som ga samtykke til lydopptak fra undervisning i helklasser, gruppearbeid og intervju, samt innsamling av elevarbeider slik at vi kunne bruke dataene i vår studie.

I tillegg til de forskningsetiske retningslinjer og føringer fra NSD har vi forholdt oss til NTNU (Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet) sine retningslinjer for behandling av personopplysninger i studentprosjekter. Vi har i tillegg utarbeidet en datahåndteringsplan for å sikre forsvarlig oppbevaring av opplysninger. Ifølge NTNU sine retningslinjer er lagring av personopplysninger på private enheter ikke tillatt. Vi har derfor brukt opptaksutstyr og krypterte minnepinner eid av NTNU. For å ha full kontroll over data som er samlet inn, har vi i etterkant av datainnsamlingen anonymisert all data og kryptert lydopptakene. Vi overførte først lydfilene til en krypterte minnepinne og slettet lydopptakene fra opptaksenhetene. Lydfilene har etterfølgende blitt transkribert og blitt kodet med nye navn på alle deltakere, slik vi har mulighet til å spore opp elevutsagn hvis en eller flere i løpet av prosessen vil trekke seg. Vi har brukt minnepinnen til lagring av lydopptak og digital kopi av elevarbeid. De fysiske elevark med navn på har blitt kodet med en gruppebokstav og minnepinnene er innelåst i et skap sammen med elevarkene.

3.9 Troverdighet

Guba (1981) har utarbeidet et rammeverk for å undersøke troverdighet i kvalitativ forskning. Troverdighet kan deles opp i fire aspekter; sannhetsverdi, anvendelighet, konsistens og nøytralitet, ved forskningens troverdighet. Det er fire fundamentale spørsmål som kan stilles til kvalitativ forskning: Hvordan kan vi som forskerne være sikre på at det vi har undersøkt er det vi sier vi har undersøkt? Hvordan kan vi vite at det vi har undersøkt er relevant i andre kontekster? Hvordan kan vi vite at det resultatet vi har kommet frem til er det samme som andre ville kommet frem til om de hadde gjort studien en gang til under de samme forutsetningene? Hvordan kan vi vite at resultatene ikke er avhengig av oss som forskere, men at også andre forskere ville kommet frem til de samme resultatene som oss.

Guba (1981) har laget en oversikt over ulike grep som kan gjøres for å sikre troverdighet i forskningen. Vi vil sammenfatte vår tolkning av grepene: Kredibilitet, overførbarhet, avhengighet og bekreftbarhet og koble dem opp mot vår studie.

Kredibilitet handler om at forskerne må være sikre på at de undersøker det de sier de undersøker. Gir funnene i studien mening, er troverdige og overbevisende for leseren? Vi har beskrevet vår forståelse av teori, valg av metoder og gjort rede for vår rolle i innsamlingen av data. Vi har på denne måten lagt til rette for at studien kan gjentas. Vi har begrunnet våre funn ut fra utdrag fra datamaterialet og laget oversiktstabeller som viser hvilke koder og kategorier som har blitt anvendt.

Overførbarhet handler om hvilket potensial studien har til å kunne overføres fra en kontekst til en annen. Forskerne skal legge til rette for at leseren kan overføre til sin egen kontekst. Vi har vært tydelige på beskrivelser av utvalget av respondenter og konteksten vi har gjort undersøkelsene i. Det kan være interessant for videre forskning og praksis i skolen og se på hvordan elevene utvikler matematiske modeller og hvordan elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk i arbeidet med en modelleringsoppgave. For praksisen i skolen vil det være interessant for lærere å se hvordan elever kan jobbe med modellering i skolen, slik at det kan være inspirasjon og vise mulige utfordringer som man må være oppmerksomme på.

Avhengighet handler om å vurdere studiens avhengighet av instrumentene som brukes. Vil andre kunne oppnå et tilsvarende resultat dersom de brukte de samme instrumentene i prosessen som oss, herunder oppgaven, rammeverket til Duval (2006) og modelleringssyklusen til Ferri (2006, s. 92)? I dette aspektet er også loggskriving en faktor som kan sikre en større uavhengighet til instrumentene. Vi har sett på ulike syklusmodeller for å finne ut hvilke modeller som vil beskrive det vi ønsker å studere på best mulig måte. Vi har valgt Ferris (2006, s. 92) modelleringssyklus som vi mener kan brukes til å belyse de ulike fasene og prosessene i en modelleringssyklus. I tillegg har vi valgt Duvals teori om representasjoner for å belyse elevenes arbeid med matematisk modellering med et annet perspektiv (Duval, 2006).

Det siste aspektet er *bekreftbarhet* og handler om at forskningen skal være bias-fritt, men skal ikke være forsker-fritt. Vi har etter beste evne forsøkt å være transparente og eksplisitt i valgene som er gjort ved å forklare valgene vi har gjort underveis, fordi det bak alle valg ligger en fortolkning.

4 Analyse

Forskningsspørsmålet i denne studien er: Hvordan utvikler et utvalg 4. trinns elever matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan bruker elevene representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk. Vi har derfor analysert noen eleveres arbeid med utvikling av matematiske modeller gjennom mattelist-oppgaven *Strikkhopp* som er innenfor matematisk modellering. For å beskrive noen av utfordringene som oppstod, har vi valgt å bruke Duvals (2006) rammeverk om representasjoner. Kapitelet er strukturert slik at vi først presenterer en analyse av hvordan elevene utviklet matematiske modeller og deretter funn knyttet til bruk av representasjoner.

Nummereringen av utsagnene i dialogene og eksempler fra elevarbeidene, henviser ikke til rekkefølgen de oppsto i undervisningsdesignet. De kommer fortløpende i analysekapittelet for at vi skal kunne henvise tydelig til de ulike utsagnene når vi utdyper funnene våre. Videre har vi tatt bort utsagn som ikke er relevante for studien, og dette er markert med […]. Våre kommentarer i form av observasjoner som beskriver handlinger er skrevet med parenteser, (abc).

4.1.1 Analyse av matematisk modellering

I analysen av elevenes utvikling av matematiske modeller har vi gjennom to delanalyser undersøkt hvordan elevene overfører problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen, og hvordan elevene utvikler matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på egne undersøkelser og data. Vi vil i delanalyse 1 presentere funn knyttet til å overføre problemet, og i delanalyse 2 presenter funn knyttet til hvordan elevene utviklet matematiske modeller av forskjellige situasjoner.

4.1.2 Delanalyse 1

I denne delanalysen har vi studert hvordan elevene overførte problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen. Vi har undersøkt hvordan elevene fyller ut en tabell som representerer sammenhengen mellom Barbie med 1-5 strikker og fallhøyden. Denne sammenhengen danner grunnlag for matematiske modeller senere i prosessen. Elevutsagn og elevarbeider ble kodet etter handling og hensikt, se tabell 6. De to funnene vi ønsker å fremheve i delanalyse 1 er:

Funn 1.1: Alle 5 elevgruppene fylte ut en tabell for sammenhengen mellom Barbie pluss 1-5 strikker og fallhøyde.
Funn 1.2: Elevgruppene vurderte resultat de fikk opp mot et tallmønster de så i tabellen.

Funn 1.1: Alle 5 elevgruppene fylte ut en tabell for sammenhengen mellom Barbie pluss 1-5 strikker og fallhøyde.
I arbeidet med å undersøke sammenhengen mellom Barbie pluss antall strikker og fallhøyde, var det flere valg og vektlegginger gruppene, i den virkelige verdenen, skulle bli enige om å huske på før de kunne notere ned et resultat i tabellen, i den matematiske verdenen.

Elevene skulle gjøre sine egne målinger og fylle disse inn i tabellen i arbeidsheftet. Ved hjelp av denne fikk de en oversikt over sammenhengen mellom antall strikker og fallhøyde for Barbie. Denne sammenhengen skulle de bruke for å lage matematiske modeller av S_6, S_7 og det store hoppet. I det følgende vil vi vise et utdrag fra transkripsjonen som viser et eksempel på hvordan gruppe E en av gruppene førte resultater inn i en tabell.

1 Geir: Plusser du på håret?

2 Karl: Ja, vi plusser på håret. Da er det 51.

3 Geir: 51, ja. […] Skal vi se… Antall strikker, høyde, 51, her. […]

4 Karl: Og så må vi må vi ha den andre strikken.

I utsagn 1 spurte Geir om Karl plusset på håret da han skulle lese av lengden på hoppet. Det viser at guttene tok hensyn til kriteriet i oppgaven om at Barbie skulle bli våt i håret, samtidig som de sørger for konsensus. Videre ser vi at Geir i utsagn 3 orienterte seg i tabellen før han skulle skrive inn resultatet. I utsagn 4 gjør Karl klart for nytt hopp ved at han kommenterte at de måtte ha den andre strikken. Elevene slapp Barbie utenfor, målte fallhøyden, skrev inn resultatet i raden som representerte antall strikker. På denne måten ble tabellen fylt ut med resultater fra hopp med 1-5 strikker. Alle 5 elevgruppene fylte ut en tabell for sammenhengen mellom Barbie pluss 1-5 strikker og fallhøyden.

Funn 1.2: Elevgruppene vurderer resultat de får opp mot et tallmønster de ser i tabellen

På gruppe E oppdaget en elev et avvik i differansene mellom de fem første hoppene og uttrykte dette for resten av gruppa. Figur 14 viser tabellen til gruppas resultater etter S_{1-5} og danner bakgrunn for kritisk tenkning. Under er det et utdrag som viser hvordan tabellen bidro til at en av elevene så uregelmessighet i tallmønsteret.

Antall strikker	Høyde
1	50 cm
2	65 cm
3	78 cm
4	93cm
5	105cm

Figur 14 Gruppe Es tabell for de fem første hoppene.

5 Geir: Vent, vi må tatt noe feil, på den der, for det der er bare 7 centimeter mer (peker i tabellen på resultatene for S_4 og S_5). Og den er 15 (peker i tabellen på resultatene for S_3 og S_4).

I utsagn 5 påpekte Geir at differansen mellom S_4 på 93 cm og S_5 på 100 cm ble 7 cm, mens differansen mellom S_3 på 78 cm og S_4 på 93 cm ble 15 cm og som følge av det måtte de ha gjort en feil. Tabellen spilte en sentral rolle da Geir oppdaget at det ikke var en forventet systematikk mellom tallparene.

Gruppe A korrigerte resultatene i tabellen underveis. Elevene hadde ikke mange erfaringer fra praktisk bruk av målbånd tidligere. Det kan ha vært årsaken til at en gruppe startet med å måle fra 150 cm fremfor å starte på 0 cm, det vil si at de snudde målbåndet. I dialogen under har elevene målt og skrevet ned resultatet fra hoppet med en strikk, og de er i ferd med å gjøre hopp nummer to.

6 Anne: Så setter jeg den sånn, er dere klare? (De to andre jentene svarer bekreftende). En, to, tre (Barbie slippes utfor bordet)

7 Birgitte: Bare hold den der oppe (Anne holder i strikken med Barbie hengende ned.)

8 Pia: Hæ! Nei, det er ikke… (referer til hennes egen observasjon av lengden.) […]

9 Anne: Dette stemmer ikke, Pia.

I dialogen over forstår vi at elevene ikke godkjente resultatet fra hoppet, S_2, ved at de i utsagnene 8 og 9 tydelig utrykker at det er noe som ikke stemmer. Formuleringene elevene ga, tolker vi som at det kan ha oppstått en kognitiv konflikt mellom den mentale representasjonen elevene hadde av situasjonen og måleresultat de fikk. Videre diskuterte jentene hva som kunne være årsaken til at de fikk et resultat som ikke stemte med deres forventninger.

10 Pia: Åh ja, vi tok den (målebåndet) kanskje andre veien i stad?

11 Birgitte: Ja, det var det vi gjorde. […]

12 Pia: Men kanskje fordi vi startet på det høyeste?

13 Birgitte: Vi brukte den øverste.

Pia spør, i utsagn 10, om de har holdt målbåndet opp ned. Dette blir bekreftet av Birgitte i utsagn 11. Sammen finner jentene ut at dette stemmer fordi de startet på det høyeste slik Pia beskrev i utsagn 12, og Birgitte bekreftet i utsagn 13. Fordi gruppa hadde snudd målbåndet endte de opp med en kortere hopplengde på S_2 enn S_1. Det jentene jobbet med videre var hvordan de kunne løse den kognitive konflikten de hadde kommet opp i. Det forsøkte Pia å gjøre ved å komme med et forslag.

14 Pia: Okay, jeg tror vi bør ta av den ene strikken og så prøver vi den igjen. […] Visk ut de to så prøver vi på nytt.

15 Birgitte: Jeg tar av den (strikken). Skal vi ta av den ene eller skal vi ta av begge?

16 Pia: Hæ? Begge, fordi. […]

17 Birgitte: Hvorfor må vi ta av begge?

18 Pia: Fordi vi må måle på nytt, fordi vi målte med den røde i stad begge gangene, og vi skal måle med den her gråe (henviser til de to sidene med ulike farger på målbåndet).

19 Birgitte: Må vi måle alt på nytt?

20 Pia: Ja

I dialogen over viste jentene at de ved å sammenlikne de tidligere målinger i tabellen korrigerte det avleste resultatet. De skulle kontrollmåle hoppet med 1 strikk også. Grunnen forklares av Pia, i utsagn 18, med at de hadde målt med «… den røde i stad begge gangene, og vi skal måle den her gråe», og det er en beskrivelse av at de hadde snudd målbåndet første gangen også. Etter at de hadde identifisert årsaken til den kognitive konflikten, valgte de å måle på nytt. Dermed fortsatte de med å bygge en matematisk modell de kunne operere videre på.

Det disse utdragene viser at denne elevgruppa oppdaget en kognitiv konflikt mellom deres forventede resultat og avleste resultatet for S_2, hvordan de identifiserte feilen og hvordan de løste konflikten. Dette er et eksempel på at tabellen kan bidra til at elevene på egenhånd kan gjennomføre deler av en modelleringssyklus, til tross for begrensede erfaringer med måling.

Vi har i delanalyse 1 sett to eksempler på at elevene klarer å veksle mellom den virkelige og matematiske verdenen når de fyller ut en tabell. Eksemplene viser at elevene har noen antakelser om hvordan mønsteret skal utvikle seg, når de enten leter etter et mønster i tabellen, eller sammenlikner med tidligere resultater. Resultatet blir at gruppene forholder seg kritisk til tallene i tabellen, når de ikke stemmer overens med forventningene.

4.1.3 Delanalyse 2

Vi har i delanalyse 2 analysert hvordan elevgruppene utviklet matematiske modeller basert på egne undersøkelser. Analysen er delt i to og vi har undersøkt hvordan elevene har gått frem både når de hadde en oppskrift for hva de skulle gjøre, og da de skulle selv velge fremgangsmåte. Det har vi gjort ved å se på hvilke strategier elevene brukte i modelleringsprosessen. Funnene beskriver hvordan elevene jobbet i den matematiske verdenen og brukte den virkelige verden for å verifisere resultatet. Vi vil også bruke begreper fra Duvals (2006) rammeverk der det vil være naturlig å trekke frem representasjoner. I delanalyse 2 er det tre funn vi ønsker å trekke frem:

Funn 2.1: Elevgruppene brukte strategier basert på $\text{tabell}_{1\text{-}5}$ for å lage en matematisk modell av S_6 og S_7.
Funn 2.2: Elevgruppene hadde 3 ulike strategier for å utvikle en matematisk modell av det store hoppet.
Funn 2.3: Elevgruppene tok ikke hensyn til konteksten da de utviklet en matematisk modell av det store hoppet

Funn 2.1: Elevgruppene brukte strategier basert på $\text{tabell}_{1\text{-}5}$ for å lage matematisk modeller av S_6 og S_7.
Elevgruppene brukte ulike strategier for å lage matematiske modeller av S_6 og S_7. Selv om alle hadde fylt ut en ferdig oppsatt tabell var det forskjellige strategier for det videre arbeidet. I datamaterialet er det eksempler på hvordan elevene både tar utgangspunkt i differansen mellom to hopp, leter etter et mønster mellom alle målingene av fallhøydene og å se på enere og tiere hver for seg for å se om det finnes et mønster og en sammenheng som kan brukes videre. I noen av tilfellene var det klart hvordan elevene hadde gått frem, mens det noen ganger var strategien umulig å tolke i arbeidet deres. Vi har allikevel laget en kategorisering av strategiene med to ulike hovedstrategier for S_6 og tre for S_7. Den tredje strategien for S_7, «La til 10 cm», er tatt med fordi det var vanskelig å plassere gruppe Bs strategi i den ene eller den andre kategorien. En kategorisering og fordeling av strategier sees i tabell 8.

Strategi	Gruppe					Totalt
	A	B	C	D	E	
Strikkhopp 6						
Brukte mønster i differansene fra alle hoppene	X		X		X	3
Brukte differansen mellom to av hoppene		X		X		2
Strikkhopp 7						
Brukte samme strategi som for S_6	X			X		2
samme strategi som for S_6, men med korreksjon basert på resultater fra S_6			X		X	2
La til 10 cm		X				1

Tabell 8 Elevgruppenes strategier for S_6 og S_7.

Tabell 8 viser at i de aller fleste tilfellene tok elevgruppene utgangspunkt i datamaterialet fra tabellene sine. For å gi et bedre bilde av hvordan elevene utviklet modeller av strikkhopp 6 og 7 vil vi vise utdrag fra datamateriale og begrunne hvorfor hver enkelt gruppe er definert i de ulike strategiene. Det første eksemplet er tatt med for å vise at gruppe A brukte mønster i tabellen da de skulle anslå strikkhopp 6. Da gruppe A skulle anslå og gjette fallhøyde for strikkhopp 6 (S_6) så de utviklingen av ener- og tierplassene isolert. De vurderte først hvordan enerne endret seg fra S_1 til S_5 og uttrykte et mønster. I utdraget under forklarer gruppa hvordan de brukte resultatene i tabellen for å anslå lengden på S_6.

21 Birgitte: Tre, fem, sju, sju, ni (ser på enerplassen i tabellen), ja. Vent, jeg tror det er to, fordi det er, fordi det er… Jeg tror det er to fordi… Da blir det elleve.

I utsagn 21 fant Birgitte et mønster på hvordan sifrene på enerplassen økte med to nesten hver gang de la til en strikk, og hun konkluderte med at det neste tallet da måtte bli 11. Videre prøvde gruppa å finne et tilsvarende mønster for tierplassen.

22 Pia: Så vi tenkte… Så vi tenke at femti, seksti, sytti, åtti, nitti… Så det var vi tenkte at neste var hundrede.

23 Birgitte: Neste var hundrede og elleve.

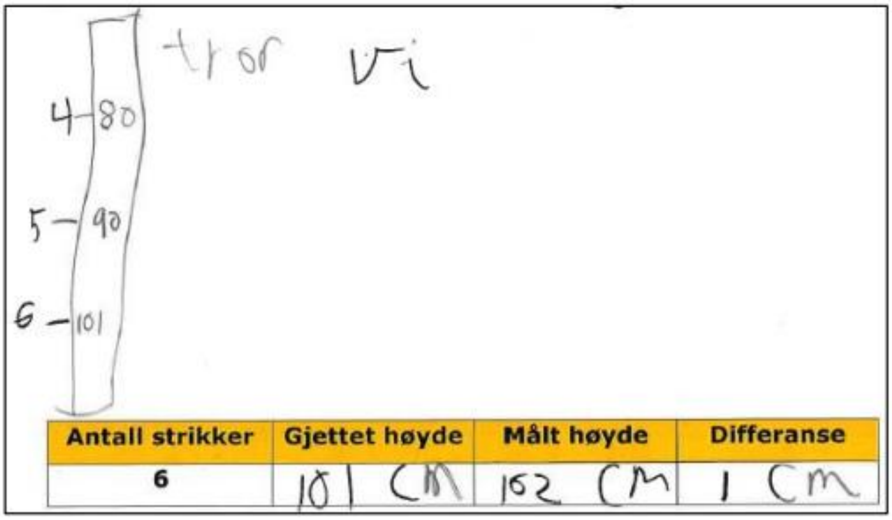
24 Pia: Neste på treerplassen ble hundrede, hundrede og så ble det…

25 Birgitte: Og så ble det elleve. Og så tok vi to fra hvert tall av enerplassen, og så la på ni, og ni pluss to er elleve så da blir svaret hundrede og elleve. […]

I utsagn 22 beskrev Pia et mønster om at lengden økte med 10 om gangen da hun så på tierplassen isolert, og at de da endte opp på 100 etter å ha talt opp med ti om gangen fra femti til hundrede på tierplassen. Videre forklarte de hvordan de la sammen resultatet for på enerplassen og fikk 11 som det neste tallet i mønsteret. og tierne som var 100 slik at gjettet resultat ble 111 cm på S_6, og at de skulle teste hypotesen sin

Det andre eksemplet er tatt med for å vise at gruppe B brukte illustrasjon og fant differansen mellom hopplengder i tabellen da de skulle anslå strikkhopp 6. Gruppe B hadde en annen tilnærming for å utvikle en matematisk modell for S_6. De oppdaget en sammenheng som de senere forkastet, men som de i intervjuet dagen etter ga uttrykk for at de kunne brukt videre. Modellen gikk ut på at lengden på strikkene økte med 1 cm for hver som ble satt på. Gruppe B brukte, som eneste gruppe, representasjonen illustrasjon som viste hvordan de tenkte på denne måten da de skulle gjette på S_6. Illustrasjonen med symboler viser et tegnet målbånd med antall strikker på yttersiden og med målt eller gjettet resultat inni. Ved at elevene skriver «tror vi» ved siden kan vi anta at de er usikre på om de har gjort rett.

Under intervjuet beskrev gruppa tenkemåten og illustrasjonen for oss. Figur 15 er en kopi av elevenes illustrerte forklaring av gjettet lengde og utfylling av tabellen for S_6. Elevene gjettet at Barbie skulle hoppe 101 cm med 6 strikker festet rundt beina. Da de målte høyden, fant de ut at den faktiske høyden ble 102 cm, og at differansen fra gjettet høyde ble 1 cm. I utdraget under forklarer Fredrik hvordan gruppa tenkte da gjettet lengden for S_6.

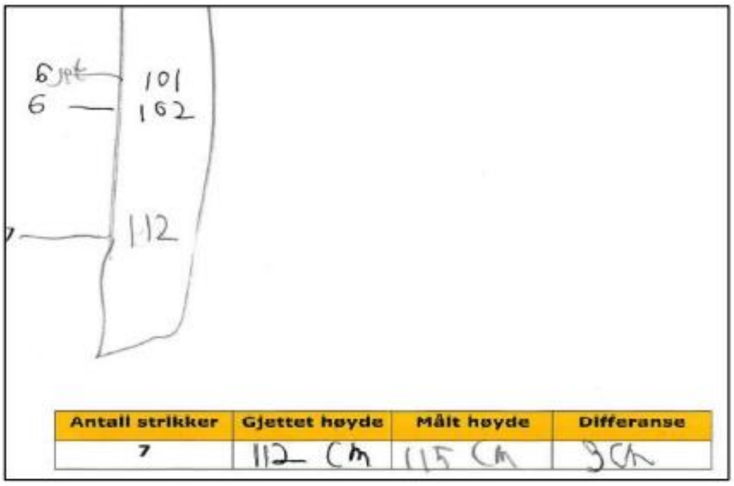


Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
6	101 cm	102 cm	1 cm

Figur 15 Gruppe Bs forklaring på gjettet lengde og resultatet i utfylt tabell på S_6.

26 Fredrik: Da tenkte vi, på en måte at det blir litt lengere. Den hopper lengere og lengere for hver gang… og så på grunn av at den strekker seg litt mer når den, mer når den hopper med flere strikker så da tenkte vi. På den forrige var den 90 og på den før igjen var det 80, så vi tenkte da 101 og så bomma vi med en centimeter … og da ble det 102, som var det riktige svaret.

I utsagn 26 forklarte Fredrik at de hadde sett at strikkene strakk seg lengre for hver strikk som ble satt på, og at de ønsket å bruke den kunnskapen da de skulle gjette på S_6. Resultatet fra S_6 var at S_6 ble 102 cm, som Fredrik forklarte i utsagn 26. Dette resultatet tok gruppa med seg videre da de skulle gjette lengde på hopp S_7. Vi har definert strategien til gruppe B for strikkhopp 6 til å være «Brukte differansen mellom to av hoppene» fordi deres skriftlige begrunnelser viste til at de så på differansen mellom strikkhopp 4 og strikkhopp 5.



Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
7	112 Cm	115 Cm	3 Cm

Figur 16 Gruppe Bs forklaring på gjettet lengde på S_7

Det tredje eksemplet er tatt med for å vise at gruppe B velger å bruke en bestemt lengde, da de skulle anslå strikkhopp 7. I illustrasjonen i figur 16 har gruppe B vist at de har tenkt på både gjettet og målt lengde for S_6 da de skulle gjette lengde for S_7. De valgte å endre strategi slik at de gikk bort fra å legge på ekstra lengde for hver strikk, men gjettet heller at lengden ville øke med 10 cm. Resultatet ble at D_7 = 3 cm, og i intervjuet resonnerte gruppa på den valgte strategien da vi ba dem om å spesifisere tankene opp mot valgt strategi og resultat.

27 Forsker B: Hvordan tenke dere da når dere skulle ta på 7 strikker?

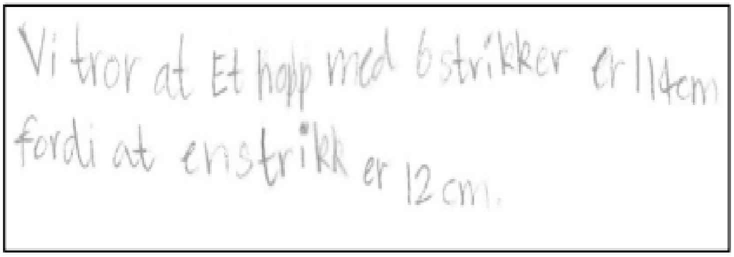
28 Fredrik: Vi tenkte egentlig … at det ble ti til… tydeligvis (Forsker A og B bekrefter med et ja).

29 Forsker B: Men det ble, hvor mye mer ble det?

30 Fredrik: Det ble jo… 13 til. Så egentlig burde vi ha gått for samme strategien som forrige gang med 11, at det ble en mer for hver, som kommer når man hopper.

I utsagn 28 sa Fredrik at de tenkte «at det ble ti til», og han la på «tydeligvis» etter en kort tenkepause. Det tolker vi som at Fredrik oppdaget her at strategien for S_7 ikke var optimal, og han begrunnet heller ikke hvorfor de hadde lagt til 10 cm da de skulle gjettet fallhøyden for S_7. I utsagn 30 forklarte Fredrik videre at de burde holdt seg til den opprinnelige strategien, altså den de startet med på S_6 med at de tenkte på at strikkene ble lengre da de tok på flere. Dette er det eksemplet som hvor vi ikke klarer å se hvorfor gruppa valgte å legge til 10 cm. Derfor definerte vi strategien gruppe B brukte ved strikkhopp 7 til å bli «La til 10 cm».

Det fjerde eksemplet er tatt med for å vise at gruppe D brukte samme strategi for å anslå fallhøyden av strikkhopp S_6, som for S_7. Gruppe D skriver at de tror at et hopp med 6 strikker er 114 cm fordi en strikk er 12 cm. Vi tolker det som at de har brukt differansen mellom S_4 og S_5 for å bruke 12 cm som strikklengde fordi det er det eneste stedet der differansen mellom tallene i to rader er 12 cm, se i figur 17.


Vi tror at Et hopp med 6 strikker er 114cm fordi at en strikk er 12 cm.

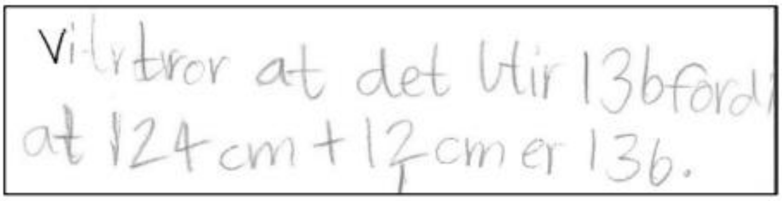
Antall strikker	Høyde
1	57cm
2	72cm
3	79cm
4	90cm
5	102cm

Figur 17 Gruppe Ds forklaring av gjettet fallhøyde for S_6 og tabell for hoppene 1-5.

For å beregne fallhøyden for strikkhopp 6 brukte gruppe D differansen mellom to av hoppene og endte opp med en matematisk modell av $S_6 = S_5 + 12$ cm = 102 cm + 12 cm = 114 cm.

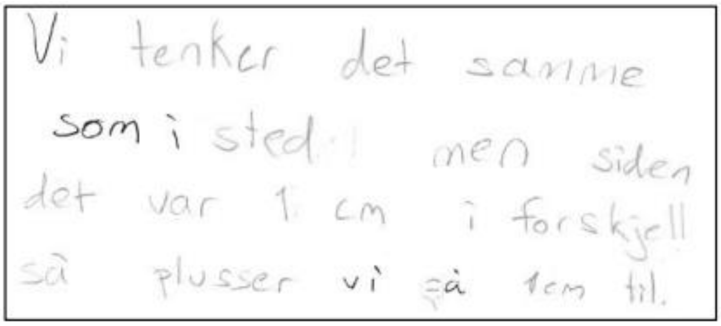
Da gruppe D skulle gjette fallhøyde for strikkhopp 7 tok de utgangspunkt i et tall det er vanskelig å tolke hvor kom fra. I figur 18 forklarte de at fallhøyden trodde de skulle bli

136 cm fordi 124 cm addert med 12, er 136. Elevgruppa forklarte ikke hvor «124 cm» kom fra, og det finnes ikke noe datamateriale som gjør at vi kan tolke det heller. Siden gruppa hadde lagt til 12 cm i beregning av fallhøyde for S_6 så har gruppe B brukt samme strategi som for S_6. Gruppa har endt opp med matematisk modell av S_7 = 124 cm + 12 cm = 136 cm.



Figur 18 Gruppe Ds forklaring av gjettet fallhøyde for S_7.

Det femte eksemplet er tatt med for å vise at gruppe C brukte samme strategi for S_7, men med korreksjon basert på resultater fra S_6. Gruppe C tok utgangspunkt i hele tabellen og brukte mønstret i differansen fra alle hoppene da de skulle gjette fallhøyden for strikkhopp 6. Da gruppe C skulle gjette fallhøyden for strikkhopp 7 tok de utgangspunkt i resultatene fra S_6. De forklarte at de tenkte det samme som tidligere, men siden de fikk en differanse på 1 cm ønsket de nå å legge til en cm ekstra slik at de ville legge til 12 cm i stedet for 11 cm. For å beregne fallhøyden for strikkhopp 7 brukte de den samme strategien for S_6, men med en korreksjon basert på resultatet fra S_6. Gruppe C endte opp med en matematisk modell av S_7 = S_6 + 12 cm = 105 cm + 12 cm = 117 cm.



Figur 19 Gruppe Cs forklaring av gjettet lengde for S_7.

I tabell 9 oppsummerer vi gruppenes strategier og de ulike matematiske modellene elevgruppene fikk.

Gruppe	Mønster	Matematisk modell av hopp med 6 strikker (S_6)	Matematisk modell av hopp med 7 strikker (S_7)
A	Gruppa studerte ener- og tierplassene isolert, de så hvor mye hvert siffer økte for hver strikk.	S_5 + 12 cm	S_6 + 102 cm
B	Gruppa uttrykte at for hver strikk de legger på, så øker fallhøyden med 1cm ekstra.	S_4 + 10 cm + 11 cm	S_6 + 10 cm
C	Øker med nesten 10 cm for hver gang, men noen ganger mer, velger å legge til 11.	S_5 + 11 cm	S_6 + 12 cm
D	En strikk er 12 cm, brukte differansen mellom S_4 og S_5.	S_5 + 12 cm	124 cm + 12 cm

E	Gruppa studerte tabellen, og så på de ulike differansene og så at det var to økninger med 15 cm, derfor sa de at de la til 15, mens de gjettet på 14 cm ekstra.	S_5 + 14 cm	S_6 + 8 cm

Tabell 9 Matematiske modeller av S_6 og S_7

Funn 2.2: Elevgruppene hadde 3 ulike strategier for å utvikle en matematisk modell av det store hoppet.

I vår studie fant vi at gruppene brukte sine utviklede modeller fra de små hoppene i ulik grad. Vi har delt de opp i tre strategier utfra hvilken grad de har brukt deres modell fra matematiseringen. Forskjellen på strategiene var at to grupper brukte *utviklet matematisk modell* fra matematiseringen, mens en gruppe brukte en hybridversjon av en utviklet modell. Med en *Hybridmodell*, mener vi at de tok utgangspunkt i resultater fra matematiseringen, men at de målte lengden av en strikk da de skulle beregne den fulle lengden. En siste variant var at en elevgruppe ikke tok hensyn til den matematiske modellen utviklet under matematiseringen da de skulle utvikle en hypotese for det store hoppet, men utviklet en helt *ny modell*. I tillegg var det mangelfulle skriftlige forklaringer fra en gruppe som gjøre at deres modell hverken kan identifiseres eller klassifiseres. Vi vil først vise funn knyttet opp mot de tre ulike strategiene som ble brukt til å utføre det matematiske arbeidet. Etter å ha presentert de ulike måtene å utvikle hypoteser for det store hoppet, vil vi vise gruppenes progresjon gjennom tabell 10 som viser en skjematisk oversikt over utviklingen av deres matematiske modeller og hypoteser i studien.

Bruker matematisk utviklet modell

Når vi definerer at to av gruppene *utviklet matematisk modell*, mener vi at gruppe A og B tok utgangspunkt i en eller flere av de matematiske modellene fra *De små hoppene*, uten å legge til ny informasjon, da de skulle finne ut hvor mange strikker de trengte for at Barbie skulle berøre vannet med håret.

I overgangen til *Det store strikkhoppet* forklarer gruppe B, under prosessen *matematisk arbeid*, hvordan de tenkte da de skulle beregne antall strikker.

31 Forsker B: Men det du gjorde nå, var at du fant hvor høyt det var på seks strikker?

32 Fredrik: Mmm, her står det hundrede og to (peker på tabellen og resultatet for S_6) og så ganget jeg det med tre og så fant jeg ut at det var tre hundre og seks og så…

I utsagn 32 forklarte Fredrik at gruppa brukte den matematiske modellen og resultatet fra S_6 da de skulle lage en hypotese for det store hoppet. Gruppa opererte her i den matematiske verdenen fordi utsagnene de brukte var på et mer matematisk nivå enn i den virkelige verdenen. De beskrev det matematiske objektet, sammenhengen mellom antall strikker og hoppet lengde, ved å bruke symbolspråk. I klasseromsamtalen forklarte Fredrik hvorfor de tok utgangspunkt i S_6.

33 Fredrik: Vi løste den ved at vår gruppe. Vi hadde jo regnet ut seks, hvor mange… hvor langt det ble når vi hadde seks strikker, så vi ganget den målte høyden med seks strikker med tre, og da ble det ganske nærme svaret da, så vi plusset på noen få strikker til og så testet vi ut.

34 Lærer: Ja, så dere tok utgangspunkt i da dere hadde seks strikker?

35 Fredrik: mmm (bekreftende)

Det Fredrik sa i utsagn 33 var at lengden på S_6 multiplisert med 3 var veldig nærme den målte høyden for det store hoppet. Resultatet gruppa hadde fra S_6 var på 102 cm, som vist i figur 20, og det multiplisert med 3 ble 306 cm og som da var veldig nærme 315 cm. Dette viser at gruppe B tok utgangspunkt i deres tabell da de skulle utvikle matematisk modell av det store hoppet.

Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
6	101 cm	102 cm	1 cm

Figur 20 Gruppe Bs tabell for strikkhopp 6

Gruppa diskuterte videre hvordan de skulle komme nærmere 315 cm i og med at ved å multiplisere S_6 med 3 så hadde de kommet seg frem til 306 cm. Utgangspunktet for 306 cm er 18 strikker. I det følgende vil transkripsjon av gruppearbeidet vise hvordan elevene resonnerte seg frem til en hypotese for det store hoppet.

36 Fredrik: Vi skulle ha tre meter og femten.

37 Robert: Så da trenger vi mange flere strikker.

38 Fredrik: Atten, atten strikker. Vi trenger litt flere enn atten strikker.

39 Forsker B: Litt flere enn atten strikker, hva tenker du da?

40 Robert: Tjue, kanskje?

41 Fredrik: Tjue, men to strikker holder det, er to strikker fire? Nei, ni… Er to strikker ni centimeter? Jeg tror vi bare trenger en strikk til.

I utsagnene 36 og 37 blir Fredrik og Robert enige om at de trenger flere strikker en 18. I utsagn 40 kom Robert med et overslag på tjue strikker, mens Fredrik i utsagn 41 resonnerte seg frem til at to strikker ekstra på 9 cm ville bli for mye.

Fredrik, i utsagn 35, bekrefter lærerens spørsmål, i utsagn 34, at de tok utgangspunkt i resultater fra matematiseringen. Gruppe B tok i bruk ekstra-matematisk kunnskap, i utsagn 41, da de resonnerte seg frem til at to strikker ville bli for mye med tanke 9 cm manglet for å komme opp til 315 cm. De hadde bygget en matematisk modell under matematiseringen som de opererte videre på i det matematiske arbeidet. I tillegg brukte gruppe B sine matematiske ferdigheter slik at de utviklet en hypotese som i senere prosesser kan bli til et matematisk resultat.

Gruppe A, som er den andre gruppa som brukte denne strategien, tok utgangspunkt i D_7 som er en del av den utarbeidede tabellen og den matematiske modellen. Dette er et resultat som ikke vil bli validert, altså erklært som et gyldig resultat, i den virkelige verdenen. Funnet er allikevel tatt med fordi strategien viser at elevgruppa brukte informasjon de hadde utarbeidet under matematiseringen for å utarbeide en hypotese for det store hoppet.

Hybridmodell

Når vi definerer en anvendelse av en *Hybridmodell*, mener vi at den matematiske modellen ble brukt i det matematiske arbeidet, men at det også lagt til ny informasjon som ikke kom fra prosessen i arbeidet med S_{1-7}. Denne strategien ble brukt av en av gruppene. Gruppe C tok utgangspunkt i S_7 som var en del av deres matematiske modell da de skulle utvikle en hypotese for det store hoppet under det *matematiske arbeidet*.

Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
7	117 cm	111 cm	6 cm
		+ 14	

Figur 21 Gruppe Cs utfylling av tabell i raden for S_7.

Den målte høyden, S_7 = 111 cm ble utgangspunktet videre for det matematiske arbeidet med hypotesen. I det følgende vil vi vise hvordan gruppen tenkte da de skulle lage en hypotese for det store hoppet, og hvorfor «+14» står under målt høyde i Figur 21. Vi viser utdrag fra intervjuet hvor vi først spurte om fremgangsmåten til S_{1-7}, for så å få en overgang til tankemåter på det store hoppet.

42 Forsker B: Det var det dere gjorde (Henviser til mønsteret i hopp 1-5). Dere målte ikke strikken sånn? (Legger en strikk ned på bordet og måler den. Gruppa bekrefter med et nei.)

43 Ine: Nei, eller det gjorde vi da vi skulle ta det store fallet. […] For å plusse på. Så vi hadde 111 når vi hadde gjort 7'ern også. Eller, ja, i lengde, og så skulle vi prøve å, eller så vi målte vi jo, og da ble det 310 centimeter ned fra der.

44 Forsker B: Fra der Barbie skulle hoppe?

45 Ine: Ja, så vi plussa på, eller så målte vi hvor lang, hvor lang strikken var og så plussa, den var 14 cm, så vi plussa på 14 helt til vi kom opp til 310. Og så til slutt så telte vi hvor mange 14 vi hadde tatt med i tellinga helt til vi kom til 320.

I utsagn 43 forklarte Ine at de valgte å måle strikken da de skulle jobbe med den matematiske modellen, men at de ikke hadde gjort det i matematiseringen. Videre fortalte hun i utsagn 43 at de tok utgangspunkt i S_7 med lengden 111 cm, og at det store hoppet var 310 cm. Ine utdypet, i utsagn 45, hvordan gruppa hadde jobbet for å finne frem til antallet strikker Barbie måtte ha før de skulle slippe henne utfor det store hoppet. Det gjorde de ved å ta 111 cm og legge til 14 så mange ganger at de kom opp til 320, og at de deretter talte antallet 14'er for å finne hvor mange ekstra strikker de hadde behov for. Deres matematiske modell for DST1 ble S_7+14n.

Utvikler ny matematisk modell

Når vi definerer at en av gruppene, gruppe E, utvikler en helt *ny matematisk modell*, mener vi at de ikke tok hensyn til den matematiske modellen de hadde utviklet i matematiseringen, men utviklet en ny modell da de skal teste behovet for antall strikker på det store hoppet. Gruppa målte det store hoppet til å være 310 cm, og de målte strikken på to ulike måter.

46 Karl: La oss måle hvor lang en strikk er da. Her er en strikk, og når vi strekker den ut er den 30. […] Og når den er helt vanlig er den 13. […]

47 Geir: Da tar vi 13 og hvor mange ganger.. 13+13+13+13 (Skriver dette på oppgavearket)

48 Karl: Vi skriver først 10 «trettener» (teller 13-tallene) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Ingen av utsagnene henviser til tidligere arbeid. Gruppa valgte å starte helt på nytt ved at Karl i utsagn 46 først foreslo at de skulle måle en strikk. Denne strikken var 30 cm utstrukket, men de konkluderte med at den var 13 da den var vanlig, i utsagn 46. Derfor blir deres nye matematiske modell 13n, hvor n er antall strikker de trenger for å komme frem til ca. 310 cm, og denne modellen har ingen relasjoner til den matematiske modellen. Ved at gruppa brukte lengden på en strikk og tok i utgangspunkt i den, og ikke i tidligere resultater, plasserer vi dem i kategorien «utvikler en helt ny modell». Gruppe E startet en med å gjøre en ny matematisering, men at de nå tok utgangspunkt i lengden på en strikk. De gikk tilbake til den virkelige verdenen, matematiserte ved å måle lengden på strikken før de gikk tilbake til den matematiske verdenen og representerte strikkens lengde med 13. I det matematiske arbeidet beregnet gruppa, ved å bruke gjentatt addisjon, hvor mange strikker de ville ha behov for å komme opp til 310 cm. Gruppe E hadde utviklet en matematisk modell i deloppgavene for $S_{1\text{-}7}$, men opererte ikke på denne videre.

Skjematisk oversikt over utviklingen av matematiske modeller og hypoteser
I de neste avsnittene vil vi oppsummere utviklingen for hver gruppe fra de startet med å utvikle en matematisk modell til det matematiske arbeideidet mot et matematisk resultat for det store hoppet. Først beskriver vi med tekst og notasjon før vi setter alt opp skjematisk i en tabell. Utdypende kommentarer, som er relevante for å svare på forskningsspørsmålet og som er knyttet opp mot begge prosessene, matematisering og matematisk arbeid forkommer andre steder i analysen.

Gruppe A fant et mønster i tabellen for $S_{1\text{-}5}$ hvor de så at det det siste tallet (enerplassen) økte med 2 i verdi nesten hver gang, mens det første tallet (tierplassen) økte med 1. I hypotese S_6 fikk de en overgang fra tosifret tall til tresifret, og mønstret passet med at lengden økte med 12 slik at $S_6 = S_5 + 12$ cm = 99 cm + 12 cm = 111 cm. Da de skulle utvikle hypotese S_7, brukte de det samme mønsteret med første og siste tall, og endte opp med at $S_7 = S_6 + 102$ cm = 111 + 102 = «214» cm (notert med en regnefeil slik elevene gjorde). Fordi 102 cm er mye mer enn en strikklengde, ender gruppa opp med $D_7 = 101$ cm. Denne differansen bruker gruppa videre i arbeidet sitt for å utvikle en matematisk modell av det store hoppet, og de oppnår et matematisk resultat på første forsøk med 21 antall strikker festet på Barbie.

Gruppe B starter med å tenke at strikkene øker med 1 cm i lengde for hver som tas på. Dette gjør de i hypotese S_6 ved at de bruker S_4 og legger til 10 cm og 11 cm, men for hypotesen for S_7 velger de å endre strategi ved å legge til 10 cm, og det burde ha vært 12 cm om de hadde fulgt sin første modell. Ved videre utvikling av en matematisk modell for det store hoppet tar de utgangspunkt i S_6 og multipliserer med 3. Denne gruppen oppnår et matematisk resultat ved å legge til en strikk etter den første utprøvingen og ender opp med en total på 19 strikker.

Gruppe C ser at lengden øker med neste 10 cm for hver strikk, og de velger å legge til 11 cm i S_6. Ved hypotesen i S_7 legger de til 12 cm, altså en mer enn forrige hypotese fordi D_6 var 1 cm. Da de utviklet en matematisk modell av det store hoppet tok de utgangspunkt i S_7 og en målt strikklengde på 14 cm og fikk DST = 111 + 14n. Gruppa oppnådde et matematisk resultat på første forsøk med 20 strikker festet på Barbie.

Gruppe D tar utgangspunkt i at en strikk har lengde lik $D_5 = S_5 - S_4$ = (102-90) cm = 12 cm, og bruker dette videre i S_6 og S_7. Hypotese S_6 = 102 cm + 12cm = 114 cm, mens S_6 blir 120 cm. For å utvikle hypotese S_7 skriver de at 124 cm + 12 cm = 126 cm, men vi finner ingen informasjon i datamaterialet for hvor 124 cm kommer fra. De skriver ikke hvordan de har kommet frem til en matematisk modell for det store hoppet, men at 24 strikker ble for mange fordi Barbie traff bakken. Siden vi ikke har lydopptak og få observasjoner fra denne gruppa kunne vi ikke identifisere en hypotese eller matematisk modell. Selv om elevene kan ha tenkt og jobbet på et matematisk nivå, har de ikke brukt en ekstra-matematisk kunnskap til å beskrive problemet med matematisk notasjon. De har heller ikke brukt andre skriftlige representasjoner.

Gruppe E utviklet hypotese S_6 ved at de tok utgangspunkt i S_5 og la til 14 cm, altså 100 cm + 14 cm = 114 cm. Da de utviklet hypotesen for S_7 la de til 8 cm slik at $S_7 = S_6 + 8$ cm = 118 cm + 8 cm = 126 cm. I den matematiske modellen for det store hoppet målte de en strikk til å bli 13 cm. Denne lengden brukte de til å anslå at det var behov for 22 strikker. I tabellen under har vi valgt å vise utviklingen av de ulike matematiske modellene elevene jobbet med for å finne antall strikker de måtte sette på Barbie for det store hoppet.

Gruppe	**Matematisk modell av første forsøk på stort hopp (DST1)**	**Matematisk modell av andre forsøk på stort hopp (DST2)**	**Endelig matematisk modell av det store hoppet**	**Antall strikker brukt i endelig modell**	**Bruk av modell i hypoteser for DST1/2**
A	$D_7 * 3$	Matematisk resultat på DST1	$D_7 * 3$	21	Utviklet modell
B	$S_6 * 3 + 1$	DST1+ 1 strikk	$S_6 * 3 + 2$	20	Utviklet modell
C	S_7 + 14cm*n	Matematisk resultat på DST1	S_7 + 14cm*n, n = 13 strikker	20	Hybridmodell
D	?	DST2 - 2 strikker (Ikke matematisk resultat)			?
E	13 cm * n	Ikke matematisk resultat	13 cm * n, n= 19 strikker	19	Ny modell

Tabell 10 Gruppenes matematiske modeller i modelleringsprosessen.

Det er forskjell mellom elevenes uttalte fremgangsmåter og hva de skrev i arbeidsheftet. Tabell 10 tar utgangspunkt i det gruppene har skrevet ned, mens vi har kommentert de tilfellene hvor det er relevante forskjeller i utvikling av modellene, i analysen der hvor de hører hjemme med tanke på rammeverk som er brukt i studien. Vi vil presisere at både den matematiske modellen og hypotesen, er et uttrykk for sammenhengen mellom hoppet lengde og antall strikker. Årsaken til at vi har valgt å bruke ulike begreper på sammenhengen handler om at vi ikke validerer hypotesen som er utarbeidet fra en foreløpig modell fra de små hoppene.

Funn 2.3 Elevgruppene tok ikke hensyn til konteksten da de utviklet en matematisk modell av det store hoppet.

For validere de matematiske modellene gruppene kom frem med i funn 2.2 vil vi se på i hvilken grad modellene tar hensyn til konteksten med at Barbie skal hoppe strikk. I funn 2.2 så vi på hvilke strategier de ulike gruppene hadde da de skulle representere løsningen for det store hoppet på ca. 3 meter. I tabell 11 har vi zoomet inn på den endelige modellen av det store hoppet for å se i hvilken grad gruppene tar hensyn til konteksten i sin løsning.

Gruppe	Matematisk modell av det store hoppet	Hvordan er "Barbie" synlig i den matematiske modellen?
A	$D_7 * 3$	D7 står for differansen mellom målt og gjettet høyde da Barbie hadde på 6 strikker. Derfor er Barbie ikke talt med i denne modellen. Dersom elevene hadde ment det var Barbie med 7 strikker de hadde målt opp hadde Barbie blitt talt med 3 ganger.
B	$S_6 * 3 + 2$	Har tatt utgangspunkt i S_6, som står for Barbie og 6 strikker. Dette har gruppa multiplisert med 3, dermed har de tatt med Barbie 3 ganger
C	S_7 + 14cm*n, n = 13 strikker	Har tatt utgangspunkt i S_7 og lagt til 14*13 strikker. Har tatt med Barbie en gang.
D	Ikke mulig å bestemme utfra elevenes arbeidshefte	
E	13 cm * n, n= 19 strikker	Har målt en strikk og multiplisert lengden 13 cm med 19 strikker. Ikke tatt med Barbie i beregningene.

Tabell 11 Utdrag fra tabell 10, med vår tolkning av gruppene hensyn til konteksten i matematisk modell av det store hoppet.

4.2 Analyse av representasjoner

I analysen av representasjoner har vi gjennom delanalysen undersøkt hvordan elevene brukte representasjoner da de kommuniserte med og om matematikk. Vi har i delanalysen presentert funn fra elevenes arbeidshefte knyttet opp mot hyppigheten i bruken av representasjoner. Dernest har vi sett på hvilken grad elevene anvendte symbolspråk i sin skriftlige kommunikasjon i beregningen av det store hoppet. Til slutt har vi analysert hensikten og forekomsten av muntlig språk for 2 grupper for hopp 1-7.

4.2.1 Delanalyse 3

I denne delanalysen har vi studert hvordan elevene har brukt og vekslet mellom representasjoner for å kommunisere med og om matematikk. Vi har delt analysen i skriftlig og muntlig kommunikasjon. Vi har som tidligere nevnt ikke tatt med tabell som en skriftlig kommunikasjonsmetode fordi utfylling av tabell lå som en føring i oppgaven, og at vi ønsket å se på hvilke representasjoner elevene selv valgte. I muntlig kommunikasjon har vi kun brukt utsagn som omhandler matematikk. Funnene vi ønsker å trekke frem i delanalyse 3 er:

Funn 3.1: Naturlig språk var representasjonen som forekom hyppigst i den skriftlige kommunikasjonen med og om matematikk.
Funn 3.2: 3 av 5 grupper brukte symbolspråk for å beregne antall strikker for det store hoppet.
Funn 3.3: Elevene brukte muntlig språk for å kommunisere fremgangsmåter og vurdering av resultat.

Funn 3.1: Naturlig språk var representasjonen som forekom hyppigst i den skriftlige kommunikasjonen med og om matematikk

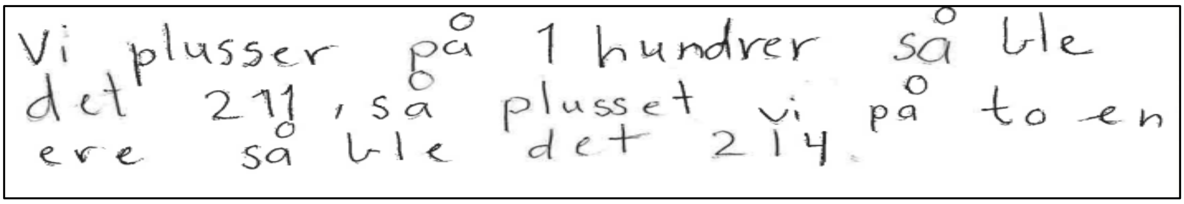
For å kunne studere den skriftlige kommunikasjonen har vi sett på elevenes arbeidshefte. I arbeidsheftet ble elevene bedt eksplisitt om å skrive symboler i en tabell. Derfor har vi valgt å se bort fra det. I arbeidsheftet ble elevene oppfordret til å skrive eller tegne hvordan de tenkte, og vår analyse viste at elevene brukte de semiotiske representasjonene naturlig språk, symbolspråk og illustrasjon. Vi kodet arbeidsheftene til alle fem gruppene og kodet til sammen 50 analyseenheter. med koder som beskrevet og eksemplifisert i tabell 7. Analyseenheter ble kodet ut fra hensikten elevene hadde med kommunikasjonen.

Ser vi elevenes bruk av skriftlig kommunikasjon under ett, så brukte elevene representasjoner fra alle representasjonssystemene, unntatt tabeller, diagrammer og grafer som vi tidligere har begrunnet hvorfor ikke er med her. Det skriftlige arbeidet har blitt analysert med en unik kode med tanke på representasjoner.

Kode	A	B	C	D	E	Totalt
Skriftlig språk som uttrykker fremgangsmåte.	3	1	2	1	3	**11**
Skriftlig språk som uttrykker tankeprosesser	1	0	2	2	0	**4**
Skriftlig språk som uttrykker vurdering av resultat	1	2	2	2	3	**9**
Skriftlig språk som argumentasjon	3	0	5	5	2	**15**
Totalt for naturlig språk	8	3	11	10	7	**39**
Beregninger	0	0	1	1	1	**3**
Regneuttrykk	2	1	2	0	0	**5**
Totalt for symbolspråk	2	1	3	1	1	**8**
Tegning som representerer en sammenheng	0	2	0	0	0	**2**
Tegning for å unngå skriving	0	1	0	0	0	**1**
Totalt for illustrasjon	0	3	0	0	0	**3**
Skriftlige analyseenheter	**10**	**7**	**14**	**11**	**8**	**50**

Tabell 12 Bruk av representasjoner for å kommunisere skriftlig med og om matematikk.

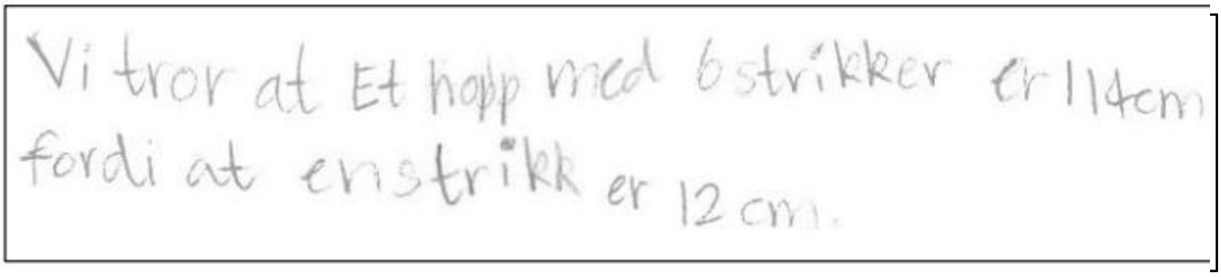
Tabell 12 viser at av 50 analyseenheter forekom representasjonen naturlig språk oftest med 39 analyseenheter. Naturlig språk blir i Duvals (2006, s. 110) rammeverk delt inn i



Figur 22 Skriftlig språk som uttrykte fremgangsmåte

muntlige forklaringer og skriftlige teoremer og bevis. Vår analyse viser at elevene skrev forklaringer, og at de brukte *skriftlig språk som uttrykte fremgangsmåte* og *skriftlig språk som argumentasjon* hyppigst.

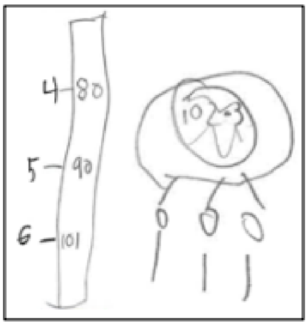
Figur 22 viser et eksempel på hvordan en elevgruppe forklarte fremgangsmåten for å komme frem til 214. Ved at elevene skrev dette fikk vi innblikk i hvordan de hadde tenkt.


Vi tror at Et hopp med 6 strikker er 114cm fordi at en strikk er 12 cm.

Figur 23 Skriftlig språk som argumentasjon

Figur 23 viser hvordan en elevgruppe argumenterte for at «et hopp med 6 strikker er 114 cm fordi en strikk er 12 cm», og vi fikk også et innblikk i hvordan denne gruppa hadde tenkt. I begge eksemplene kan ikke setningene stå alene. Vi måtte se på hva elevene hadde skrevet tidligere for å kunne forstå hele tankeprosessen.

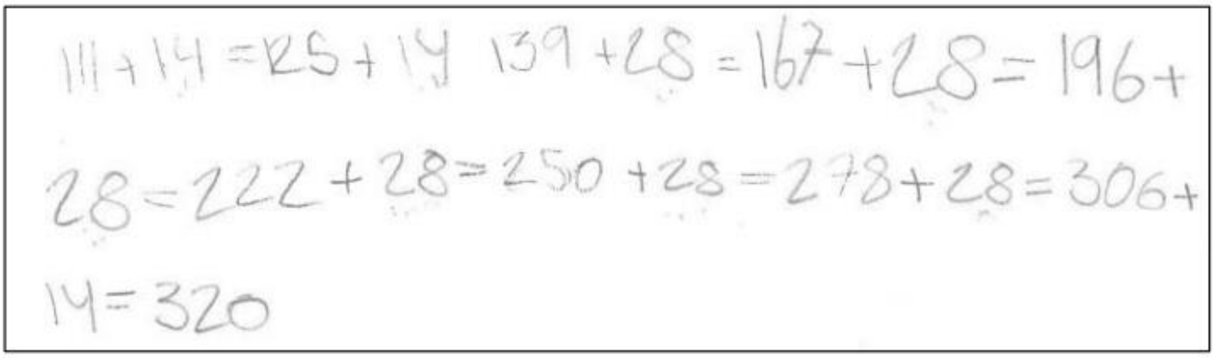
Som vi skrev over, fant vi eksempler på at gruppene brukte alle representasjonssystemene i den skriftlige kommunikasjonen, om vi ser alle gruppene under ett. Det var kun gruppe B som brukte illustrasjoner, og de hadde to svært ulike måter å gjøre det på. De brukte en illustrasjon som kunne ligne på et målbånd da de skulle vise hvordan de hadde tenkt for å gjette høyde på strikkhopp 6 og 7. Da de skulle prøve å forklare hvordan de hadde tenkt for å komme frem til antall strikker for det store hoppet, tegnet de seg selv som streker med «hoder» og en tankeboble over med et regneuttrykk i. I transkripsjonen gav elevene på gruppa veldig tydelig uttrykk for at de ikke ønsket å skrive, og det var derfor de valgte å tegne at de hadde tenkt. Dersom vi ser i tabell 12, så hadde Gruppe B færrest skriftlige analyseenheter sammenlignet med de andre gruppene.



Figur 24 Gruppe Bs illustrasjoner

Funn 3.2: 3 av 5 grupper brukte symbolspråk for å beregne antall strikker for det store hoppet.

For å kunne si noe mer om hvordan elevgruppene brukte representasjoner i skriftlig kommunikasjon studerte vi hvordan elevene anvendte symbolspråk. Bruk av symboler er


111+14=125+14 139+28=167+28=196+
28=222+28=250+28=278+28=306+
14=320

Figur 25 Gruppe Cs bruk av symbolspråk

for mange det matematikk handler om. Symbolspråk er også en representasjon som hører til matematikkfaget. I tillegg kan gode matematiske ferdigheter i å behandle symbolspråk være effektive og nøyaktige strategier, og er derfor viktig at elevene behersker symboler og transformasjoner på en god måte.

I figur 6 ser vi hvordan gruppe C behandlet tallsymboler da de skulle beregne antall strikker de trengte for det store hoppet. De startet med 111 og adderte med 14 og 28 til de kom til 320. I Elevene har i tillegg brukt likhetstegnet feil, men det har ikke hindret elevene i å regne ut antall strikker. I intervjuet forklarte elevene at de telte antall ganger de hadde lagt til 14. 111 som er starttallet representerte Barbie pluss syv strikker. Eksemplet over viser hvordan en av gruppene brukte symbolspråk da de gjorde beregninger for det store hoppet. Vi fant tilsvarende hos en annen gruppe, mens den tredje gruppa brukte multiplikasjon da de behandlet symbolspråk.

Funn 3.3: I muntlig kommunikasjon brukte elevene naturlig språk hyppigst til å uttrykke fremgangsmåter og vurdering av resultat

For å kunne studere den muntlige kommunikasjonen har vi sett på transkripsjonene fra de to gruppene, A og E, vi fulgte tett i den første delen av undervisningsopplegget. I muntlig kommunikasjon bruker elevene naturlig språk, og naturlig språk kan brukes til hverdagsspråk og forklaringer som omhandler matematikk. Vi har kodet til sammen 154 analyseenheter der hensikten har vært å kommunisere med eller om matematikk. Kodene er beskrevet og eksemplifisert i tabell 7. Vi har sett på hyppighetene av de ulike hensiktene til den muntlige kommunikasjon for å kartlegge hvilke som var mest fremtredende i matematiseringen. Analysen viste at begge gruppene hadde flest analyseenheter med koden *muntlig språk som uttrykker en fremgangsmåte* og deretter brukte de *muntlig språk som uttrykker vurdering av et resultat* nest flest ganger. Dette resultatet kan henge sammen med at det er flere praktiske ting som måtte avklares når elevene i matematiseringen jobbet med overgangen mellom den virkelige modellen og en matematisk modell.

Kode	A	E	Totalt
Muntlig språk som uttrykker fremgangsmåte	29	27	**56**
Muntlig språk som uttrykker regneuttrykk eller beregninger	6	9	**15**
Muntlig språk som uttrykker tankeprosesser	5	2	**7**
Muntlig språk som uttrykker vurdering av resultat	23	18	**41**
Muntlig språk som argumentasjon	18	9	**27**
Muntlig språk som uttrykker forslag (til fallhøyde)	5	3	**8**
Totalt for naturlig språk	**86**	**68**	**154**

Tabell 13 Bruk av naturlig språk for å kommunisere muntlig med og om matematikk

Da elevene startet opp med oppgaven, snakket de sammen om fremgangsmåten. Utdraget under viser et eksempel på hvordan elevene brukte muntlig språk for å uttrykke fremgangsmåte.

49 Anne: Vi må starte nå. Først så tar vi en tråd (en strikk), under sånn, ikke sant? […]

I utsagn 49 forklarte Anne hvordan de skulle sette på en strikk samtidig som hun gjorde det. Å bruke muntlig språk for å uttrykke fremgangsmåte var hensikten som forekom oftest i datamaterialet.

I arbeidet med å teste ut fallhøyden for 1-5 strikker brukte elevene tidligere resultater for å se om det var noe mønster. Utdraget under viser et eksempel på hvordan elevene brukte muntlig språk for å vurdere resultat.

> 50 Geir: Vent, vi må tatt noe feil, på den der, for det der er bare 7 centimeter mer (peker i tabellen på resultatene for S_4 og S_5). Og den er 15 (peker i tabellen på resultatene for S_3 og S_4).

I utsagn 50 forklarte Geir hvordan de måtte ha gjort en feil fordi han så at det var stor forskjell på to differanser. Å bruke muntlig språk for å vurdere resultat var hensikten som forekom nest oftest i datamaterialet.

4.3 Oppsummering av funn i analysen

Delanalyse	Kompetanseaspekt	Funn
1	Å kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen	1. Alle 5 elevgruppene fylte ut en tabell for sammenhengen mellom Barbie pluss 1-5 strikker og fallhøyde. 2. Elevgruppene vurderte resultat de fikk opp mot et tallmønster de så i tabellen.
2	Å kunne utvikle matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på elevenes egne undersøkelser og data.	1. Elevgruppene brukte ulike strategier basert på tabell_{1-5} for å lage matematiske modeller av S_6 og S_7. 2. Elevgruppene hadde 3 ulike strategier for å utvikle en matematisk modell av det store hoppet. 3. Elevgruppene tok ikke hensyn til konteksten da de utviklet en matematisk modell av det store hoppet.
3	Å kunne bruke representasjoner for å kommunisere med og om matematikk	1. Naturlig språk var representasjonen som forekom hyppigst i den skriftlige kommunikasjonen med og om matematikk. 2. 3 av 5 grupper brukte symbolspråk for å beregne antall strikker for det store hoppet. 3. Elevene brukte muntlig språk for å kommunisere fremgangsmåte og resultat.

Tabell 14 Oppsummering av funn i analysen

Vi ønsket å finne svar på hvordan et utvalg 4. trinns elever utviklet matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan brukte elevene representasjoner i kommunikasjon med og om matematikk.

Modelleringsoppgaven hadde en progresjon fra mye til lite støtte for elevene i prosessen. I utfyllingen av et ferdig tabelloppsett var det mye støtte i at det stod forklart hvordan elevene skulle jobbe med oppgaven. Det vi så var at alle elevgruppene klarte dette, og det var liten forskjell i hvordan de løste oppgaven. I den neste delen av oppgaven viser våre funn at elevene brukte to ulike strategier for komme frem til en matematisk modell av S_6 og S_7. Elevene måtte selv identifisere et mønster og ta et valg om hva de skulle ta hensyn til i utviklingen videre. I den siste delen hadde vi ikke gitt elevene en fremgangsmåte for hvordan de skulle utvikle en modell av det store hoppet, og funnene våre viste at elevgruppene anvendte tre forskjellige strategier som beveget seg fra å bruke egne undersøkelser, til å bruke både egne undersøkelser og ny informasjon og til å ikke bruke egne undersøkelser i det hele tatt. I utviklingen av matematiske modeller gjennom delprosessene matematisering og matematisk arbeid viser våre funn at elevgruppene brukte ulike strategier og utviklet forskjellige matematiske modeller. Etter hvert som kompleksiteten i oppgaven økte og elevene baserte valgene sine på egne undersøkelser og data, ble forskjellene mellom strategiene og modellene større og større.

Elevene brukte i hovedsak naturlig språk i skriftlig kommunikasjon med og om matematikk. 3 av 5 grupper brukte symbolspråk for å beregne antall strikker for det store hoppet. I muntlig kommunikasjon brukte elevene naturlig språk da de kommuniserte fremgangsmåte og resultat.

5 Drøfting

I dette kapittelet vil vi diskutere funnene som ble presentert i analysekapittelet og oppsummert i kapittel 4.3. Resultatene vil bli drøftet opp mot teori og tidligere forskning som ble presentert i innledningen, teorikapittelet og våre refleksjoner. Diskusjonskapittelet er strukturert slik vi først tar for oss og drøfter funnene fra delanalyse 1 og 2 opp mot kompetanseaspektene i vår studie, før vi drøfter funnene fra delanalyse 3 opp mot representasjoner.

Vårt forskningsspørsmål i studien har vært: Hvordan utvikler et utvalg 4. trinns elever matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan bruker elevene representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk? Vi vet at modelleringskompetanse utvikles gjennom å jobbe, med deler eller hele modelleringssyklusen over tid (Blomhøj & Jensen, 2003). I utviklingen av modelleringskompetansen kan elever jobbe med delkompetansene matematisering og matematisk arbeid og ut fra undervisningsmessig synspunkt er det fornuftig å fokusere på disse (Blomhøj & Jensen, 2003, s. 127). Det er viktig å starte tidlig for å få erfaringer med autentiske komplekse situasjoner (English & Sriraman, 2010; English & Watters, 2005; Eriksen et al., 2018), og vi som lærere må støtte opp om elevenes utvikling av selvstendighet og kan hjelpe dem med å stille åpne spørsmål når de trenger det (Blum & Ferri, 2009, ss. 51-52).

For å kunne kommunisere med og om matematikk så må representasjoner brukes fordi matematiske objekter er abstrakte og kan ikke sees direkte. I tillegg er innebærer all matematisk aktivitet transformasjoner av representasjoner (Duval, 2006). Fordi matematiske objekter er abstrakte, og kan de være vanskelige å både se og forstå. Bruken av konkretiseringsmateriell er basert på ideen om at elever begrunner og forstår konkret før de kan abstrahere de samme matematiske objektene (Laski et al., 2015). Det kan derfor være lurt å bruke konkreter i nye sammenhenger.

5.1 Å kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen

Det første kompetanseaspektet handler om å kunne overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen. Vi har undersøkt hvordan elevene fylte ut en tabell og vurderte resultatet de fikk. Analysen viste at alle elevgruppene fylte ut et ferdig tabelloppsett som representerte en sammenheng mellom Barbie pluss 1-5 strikker og fallhøyden. Det var ingen synlige forskjeller i strategi på hvordan elevene gjennomførte den første del av oppgaven. Årsaken til det kan være at elevene fikk mye støtte ved at læreren demonstrerte hvordan elevene skulle fylle ut tabelloppsettet. Analysen viste også at dersom elevene oppdaget at det var noe som ikke stemte med resultatene fra de ulike fallhøydene, ga de uttrykk for dette. Når elever skal matematisere må de bruke ekstra-matematisk kunnskap, matematisk notasjon og bygge en matematisk modell de kan operere videre på (Ferri, 2006, s. 92). I vår studie satte elevene på strikker, slapp Barbie utenfor en høyde, målte fallhøyden og førte resultatet inn i et ferdig tabelloppsett. Det som krevdes av ekstra-matematisk kunnskap var erfaringer innen måling, herunder avlesing og vurdering av resultatet, egenskaper til strikker, samt å føre resultatet inn på riktig sted i tabelloppsettet. Som nevnt tidligere mestret alle elevgruppene å overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen. En grunn til det kan være den gjentakende prosessen elevene gjorde med å sette på en strikk på Barbie, teste ut, måle og avlese, notere og vurdere resultatet.

I matematiseringen, måtte elevene overføre problemet fra den virkelige verdenen til den matematiske verdenen. Elevene må bruke notasjon og bygge en modell de kan opererer videre på (Ferri, 2006, s. 92). I vår studie så vi at elevene overførte problemet fra den virkelige verdenen når de utførte hoppene og målte lengden og dernest noterte resultatene inn i tabelloppsettet. Da elevene skulle anslå lengden for hopp 6 og 7 opererte de på modellen. Når vi sammenlikner denne delen av matematiseringen med begrepsapparatet til Duval (2006) kan matematiseringen beskrives som en omdanning mellom konkret og tabell. Konkret ses på som en representasjon som kan brukes andre steder enn matematikken, mens tabell er et monofunksjonelt representasjonssystem som bare brukes i matematikken. Det vil si at det er kognitivt utfordrende for elevene å gjenkjenne det samme matematiske objektet i begge (Duval, 2006, s. 115). Funn i delanalyse 1 viser at elevene mestret prosessen mellom den virkelige verdenen og den matematiske verdenen, men vi kan i denne fasen ikke si mye om den mentale representasjonen elevene hadde av situasjonen fordi dette er på et implisitt nivå (Ferri, 2006, s. 92). Det er ikke gjort funn i datamaterialet som viser at elevene har en forestilling om at den virkelige modellen representerer en sammenheng mellom to mengder. Vi hadde forventet at vi ville finne skriftlig eller muntlig kommunikasjon som viste at elevene så at Barbie og strikkene representerte det matematiske objektet. Sett opp mot funksjoner, spilte de fysiske modellene og tabellene en sentral rolle i elevenes arbeid med å systematisere opplysningene, før de kunne uttrykke sammenhenger mellom tallparene i tabellen (Solem et. al, s, 343). Vi er derfor litt overrasket over at ingen av elevgruppen uttrykte sammenhengen eksplisitt. Duval (2006, s. 115) hevder at det er vanskelig for elevene å kjenne igjen det matematiske objektet gjennom representasjoner som kan brukes utenfor den matematiske verdenen. Han stiller også spørsmål om dette kan være tilfelle for monofunksjonelle representasjoner, slik som en tabell er. Vi kunne ha hjulpet elevene med dette ved å forklare eksplisitt sammenhengen, slik som Laski et al. (2015) hevder skal gjøres når konkreter skal tas i bruk i undervisningen. På den andre siden, ville vi ha fjernet oss fra ideen om modellering, dersom vi hadde sagt at elevene skulle finne sammenhengen mellom to mengder. Slik vi tolker English og Watters (2005) er hensikten at elevene skal undersøke og identifisere den underliggende matematiske strukturen til komplekse fenomener gjennom modelleringen, og derfor valgte vi å ikke uttrykke sammenhengen eksplisitt.

Det andre funnet i delanalyse 1 viste at elevene vurderte resultatet de fikk opp mot et tallmønster de så i tabellen. Da de opplevde avvik mellom det målte resultatet og deres forventning eller sammenlikning av resultatet opp mot tabellen, ga de uttrykk for dette. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning (Kilpatrick et al., 2001; Utdanningsdirektoratet, 2017). Elevene forventet at Barbie skulle falle lenger på en strikk mer, men da hun ikke gjorde det så startet de en feilsøking. I det andre eksemplet oppdaget elevene at det ikke var samsvar mellom differansene i tabellen, men da ble det begrunnet med at håret til Barbie ikke var tatt med i alle målingen. Denne gruppa startet ikke en feilsøking. Begge elevgruppene vurderte og tolket resultatene, noe som er viktig med tanke på utvikling av kompetanse da kompetanse innebærer evne til refleksjon og kritisk tenkning, men det var ulikt hvordan de to gruppene valgte å forholde seg til dette.

I arbeidet med å systematisere relasjonen mellom relevante mengder og se etter mønstre nedover i tabellen reduserte gruppene kompleksiteten i tabellen. De endte opp med en matematisk modell som beskrev en fallhøyde og tilvekst som baserte seg på differansen mellom to hopp. Eksemplene i funn 1.2 viser at utsagnene som elevene brukte da gruppene fant et mønster relatert til den matematiske verdenen og ikke den virkelige verden. Dette er i samsvar delkompetansene til å sette opp en matematisk modell fra en virkelig modell (Blum & Kaiser, 1997, gjengitt i Maaß, 2006, s. 116).

Ut fra funnene i delanalyse 1 kan vi konkludere med at elevene kan overføre problemet fra den virkelige verdenen og over til den matematiske verdenen gjennom å omdanne situasjonen og det matematiske objektet mellom representasjonene konkret og tabell. Basert på hvordan vi har definert kompetanseaspektene i vår studie betyr det at elevene har modelleringskompetanse i delprosessen matematisering. Vi tok i denne studien utgangspunkt at elevene skulle jobbe med delprosessene matematisering og matematisk arbeid. Blomhøj og Jensen (2003) påpeker at det skal jobbes med hele modelleringsprosessen over tid for å oppnå generell modelleringskompetanse. I det neste kapittelet vil vi drøfte hvordan i hvilken grad elevene viste modelleringskompetanse innen delprosessen matematisk arbeid. Ferri (2006, s. 93) beskriver matematisk arbeid med at elevene bruker sine matematiske ferdigheter slik at de får et matematisk resultat uten å tolke resultatet. Dersom elevene ikke har tilstrekkelige matematiske ferdigheter så kan det bety at elevene ikke kommer frem til et matematisk resultat, eller at de ikke kommer frem til et resultat som elevene selv kan forklare.

5.2 Å kunne utvikle matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på egne undersøkelser og data

Det andre kompetanseaspektet i vår studie handler om å kunne utvikle matematiske modeller av forskjellige situasjoner basert på egne undersøkelser og data, og komme frem til et matematisk resultat. Vi har studert a) Hvordan utviklet elevene matematiske modeller da de hadde en bestemt fremgangsmåte de skulle følge og b) Hva vektla elevene og hvilke strategier brukte de, da de ikke hadde en bestemt fremgangsmåte å følge.

Elevenes medinnflytelse på datainnsamlingen og utfyllingen av et tabelloppsett står i kontrast til English og Watters (2005) som i sine studier ga elevene ferdig utfylte tabeller fra virkelige situasjoner som de skulle tolke og matematisere. Erfaringene fra disse studiene viser at noen av elevene fikk vanskeligheter fordi de ikke forstod tabellen. Med bakgrunn i disse vansker anbefaler English og Watters (2005, s. 72) at elevene skal starte med å utvikle sine egne tabeller i arbeid med matematisk modellering for å få en større forståelse av tabellen, før de får ferdigutfylte tabeller. Funn i delanalyse 1 viser at elevene i vår studie kunne orientere seg i tabellen, gruppene hadde unike resultater og de visste hvor resultatene kom fra. Når elevene skal utvikle matematisk modeller må de identifisere en struktur og et mønster, slik at de kan forutse utviklingen av komplekse systemer (English & Watters, 2005). Gruppene brukte tabellen, og dermed egne resultater da de anslo fallhøyden for strikkhopp 6 og 7. De to strategiene vi så i datamaterialet var å bruke mønsteret i differansene fra alle hoppene eller å bruke differansen mellom to hopp. Denne måten å transformere dataen på og vektlegge noe informasjon mer enn annet, i utarbeidelsen av en modell, samsvarer med lignende funn fra (English & Sriraman, 2010, s. 273; English, 2010, s. 292) og Eriksen et al. (2018) som i sine studier fant at elevene brukte forskjellige strategier da elevene uttrykte en sammenheng mellom to mengder.

Funn i delanalyse 2 viste at elevene anvendte ulike strategier da de utviklet matematiske modeller videre. Oppgaven elevene fikk økte i kompleksitet og støtten til elevene ble mindre. Funn 2.1 viste at elevgruppen i hovedsak tok utgangspunkt i egne undersøkelser da de anslo fallhøyde for strikkhopp 6 og 7. For strikkhopp 6 viste analysen at elevene enten tok utgangspunkt i differansen mellom 2 hopp, eller fant et slags gjennomsnitt fra flere. Disse to forskjellene kan begrunnes med at elevene som valgte å ta utgangspunkt i et slags gjennomsnitt forsøkte å se på og få en oversikt over egne undersøkelser. For gruppene som anvendte differansen mellom to av hoppene, kan vi anta at de ikke ser at det kan være en større sammenheng i dataene sine. For strikkhopp 7 viser analysen at 4 av 5 grupper anvendte samme strategi som for strikkhopp 6, men to av gruppene gjorde en korreksjon med bakgrunn i resultatet for strikkhopp 6. Det at elevgruppene fremdeles utvikler matematiske modeller med ganske lik strategi kan bety både at forskjellene mellom de fem første hoppene, og hopp 6 og 7 ikke er så stor, eller at elevgruppene har samsvarende mentale representasjonen av situasjonen slik at valgene de gjør baseres seg på det samme. Dessuten så var ikke differansen i fallhøydene mellom målingene til de ulike elevgruppene spesielt store.

Funn 2.2 viste at elevene anvendte tre ulike strategier da de utviklet en matematisk modell av det store strikkhoppet. Da elevene skulle beregne antall strikker for det store hoppet, kunne ikke elevene bruke noen av de tidligere strategiene fordi fokuset endret seg fra å gjette ny fallhøyde med «en strikk ekstra» til å beregne et antall strikker til en oppgitt fallhøyde. Denne fallhøyden var omtrent 3 ganger høyere enn fallhøydene elevgruppene hadde jobbet med tidligere. Tabell 10 viser at gruppene valgte ut et eller flere resultater fra egne undersøkelser som de opererte på da de skulle forutse utviklingen av et komplekst system. Sett ut fra et modelleringsperspektiv er det viktig at læreren i matematiseringen indentifiserer funksjonsuttrykkene i det matematiske resultatet, og kan tolke hvor de kommer fra. Ut fra situasjonen på det store hoppet viser elevene i tabell 11 at de har et regneuttrykk som passer for sammenhengen. Selv om gruppenes regneuttrykk inneholdt Barbies lengde 0, 1 eller 3 ganger, så lyktes gruppene med målet for modelleringsoppgaven, altså at håret til Barbie ble bløtt da de slapp henne utfor den store fallhøyden.

Vårt inntrykk er at elevene klarte å forholde seg mer kritiske til hoppene 1-7 enn det de gjorde for det store hoppet. Det som også kan skape vansker for elevene er at strikkene strekker seg litt mer når det blir flere på. Under strikkhopp 1-7 er ikke dette så merkbart, men da elevene skulle prøve seg på det store hoppet ble disse egenskapene til strikkene være mye mer gjeldende. En annen faktor som var viktig å ta med, er at elevene ikke fikk lik avstand mellom hver strikk som ble satt på da de målte. Dette kan ha gjort det vanskeligere for elevene å oppdage en sammenheng mellom to mengder. Det kan ha vært årsaken til at to av gruppene valgte å måle strikkene på nytt under det store hoppet.

Kilpatrick et al. (2001) påpeker at elevene må utvikle de fem komponenter i trådmodellen samtidig, og vi så at elevene møtte på utfordringer rundt *beregning* og *engasjement*. Vi opplevde en gruppe som uttrykte et mønster som så på sifrene i fallhøyden isolert sett på grunn av manglende ferdigheter innen posisjonssystemet. De sa at det siste sifferet vokste med to, og det første med en. Det er hverken fleksibelt eller hensiktsmessig i denne oppgaven å bruke dette mønsteret. Mønstret vil fungere så lenge elevene jobber med tosifrede tall, men ikke ved en overgang til hundrer. Dette er i overensstemmelse med Ferri (2006, s.93) som skriver at elevene kan møte på vanskeligheter, dersom de ikke har tilstrekkelig med matematiske ferdigheter til å løse oppgaven.

Funn 2.3 i vår analyse viser at elevgruppene ikke tok hensyn til konteksten da de utviklet en matematisk modell av det store hoppet. I dette funnet har vi datamateriale fra 4 av 5 grupper. Vi har vist i tabell 10 hvordan Barbie er «synlig» eller ikke i elevenes matematiske modeller. Gruppe C er den eneste gruppen som kan ha tatt hensyn til konteksten fordi Barbie, i deres matematiske modell, er representert en gang. I de tre andre gruppene som det var mulig å utlede en matematisk modell var Barbie representert 0 eller 3 ganger. Matematisk modellering har en høy grad av kognitive komplekse krav (Blum & Ferri, 2009, s. 45). Oppgaven som ble gitt elevene hadde et endret fokus fra å gjette lengde for «en strikk til» og over til å beregne antall strikker for en fallhøyde nesten tre ganger så stor som siste målte fallhøyde. Dette kan ha vært for kognitivt krevende for elevene. I tillegg viser funn fra både delanalyse 1 og 2 at ikke alle elevgruppene hadde tilstrekkelige matematiske ferdigheter hverken med å håndtere konkretene eller beregninger.

Ved siden av de fire prinsippene for bruk av konkretiseringsmateriell (Laski et al., 2015), er det viktig å ta høyde for at i matematisk modellering skal den virkelige verdenen beskrives ved hjelp av matematikk. Da kan det være at konkretiseringsmateriellet ikke nødvendigvis har en relativt stor likhet med det matematiske objektet. Ved siden av kan det være hensiktsmessig å bruke konkretiseringsmateriell som har en kobling mot hverdagen for at elevene skal kunne oversette mellom og forstå sammenhengen mellom den virkelige verdenen og den matematiske verdenen.

For å kunne representere situasjonen valgte vi at elevene skulle bruke Barbiedukke, strikker og målbånd fordi dette ville være tett opp mot virkeligheten om at læreren skulle hoppe i strikk. Dersom vi skal knytte disse konkretene opp mot å representere det matematiske objektet, sammenhengen mellom to mengder, er ikke dette like tydelig. Årsaken kan være at Barbie, strikker og et målbånd ikke har en stor likheter med matematiske objekter og Laski et al. (2015) hevder at jo større likheten er mellom konkretiseringsmateriellet og det matematiske objektet, større er muligheten for at elevene forstår sammenhengen mellom de to. Uten eksplisitte forklaringer, vil det være urimelig å forvente at elevene skulle forstå sammenhengen mellom konkretene og det matematiske objektet. Konkretiseringsmateriell som representer virkelige objekter kan derfor være til hinder, og det kan hende elevene har mer lyst til å leke med konkretene (Laski et al., 2015). Samtidig sier også Duval (2006, s. 115) at det er vanskelig for elever å skille hva som er matematisk relevant og ikke, når de bruker representasjoner som kan brukes både i og utenfor matematikken. Dette betyr at vårt valg av representasjoner av situasjonen kan ha vært til hinder for elevenes utvikling av matematiske modeller av situasjonene, men også til hjelp for å forstå situasjonen.

5.3 Å kunne bruke representasjoner for å kunne kommunisere med og om matematikk

Vi ønsket i vår studie å se på hvordan et utvalg 4. trinns elever brukte representasjoner for å kommunisere med og om matematikk. Gjennom handlingene så vi hvor i modelleringssyklusen elevene var, men vi hadde bruk for representasjonene slik at vi fikk et innblikk i hvordan de tenkte. Da elevene kommuniserte seg imellom med og om matematikk brukte de naturlig språk for å forklare hva de gjorde. Naturlig språk hører til multifunksjonelle representasjonssystemer og egner seg godt til kommunikasjon og informasjonsbehandling (Duval, 2006). Naturlig språk er noe elevene er kjent med fra før og kommunikasjon og informasjonsbehandling var sentralt i arbeidet med strikkhopp 1-5. De monofunksjonelle representasjonssystemer er spesifikke for matematikken og i arbeidsheftene så vi at elevene mestret behandling av symbolspråk i forbindelse med utregninger, men at dette ble lite brukt for å vise hvordan de hadde tenkt. Å transformere mellom tabell og symbolspråk for det store hoppet var vanskelig for elevene fordi de ikke kunne identifisere funksjonssammenhengen. Funksjonssammenhengen mellom mengdene i denne oppgaven var det matematiske objektet og gruppene valgte «vilkårlig» informasjon fra undersøkelsene sine som de tok utgangspunkt i for å beregne antall strikker til fallhøyden på ca. 3 meter i det store hoppet.

Funn i delanalyse 3 viste at naturlig språk var representasjonen som forekom hyppigst i den skriftlige kommunikasjonen med og om matematikk.

Funn 3.2 i analysen viste at 3 av 5 grupper brukte symbolspråk for å beregne strikker for det store hoppet. Dette funnet overrasket oss, både fordi alle gruppene hadde vist at de behersket å bruke symbolspråk tidligere i oppgaven, og fordi samtidig så var oppgaven av en slik art at behandling av symbolspråk ville være foretrukket bruk av representasjoner. Samtidig hevder Duval (2006) at behandlinger av symbolspråk får mye oppmerksomhet i undervisning. Årsaken til dette kan være at elevene manglet de nødvendige matematiske ferdighetene modelleringsoppgaven krevde.

I analysen viste funn at da elevene kommuniserte muntlig var hensikten som oftest å uttrykke fremgangsmåte og vurdere resultat. Dette vil være naturlig i og med at elevene jobbet sammen i en gruppe for å løse en oppgave. For elever på 4. trinn er det vanlig å snakke om hverdagssituasjoner og det de gjør. Dette har de dratt med seg inn i gruppearbeidet også. Hvis vi tar et tilbakeblikk til det første funnet i denne delanalysen så ser vi at naturlig språk var representasjonen som forekom hyppigst. Årsaken til det kan være at behandling innenfor et representasjonssystem anses for å være mindre kognitivt krevende enn å omdanne mellom forskjellige representasjonssystemer (Duval, 2006) som for eksempel fra naturlig språk og til for eksempel symbolspråk

5.4 Oppsummering av drøfting

Sett ut fra et modelleringsperspektiv er det å la elevene utforske autentiske problemer og få erfaringer med komplekse data, hvor de skal konstruere egne modeller innen en meningsfull kontekst for at de i etterkant kan vurdere resultatene (English 2010 s. 287-288) sentralt hvis vi skal oppnå at elevene skal få matematisk kompetanse til å forholde seg til 21. århundres komplekse utfordringer slik vi problematiserte i innledningen.

Det overordnede målet med matematisk modellering i barneskolen er å gi elevene muligheter til å lære å håndtere store mengder data i en kompleks, men meningsfylt kontekst (English, 2010, s. 288). Hensikten er å hjelpe elevene med å forstå den virkelige verden bedre, støtte opp om læring i matematikk, utvikle ulike kompetanser og holdninger samt bidra til et adekvat bilde av hva matematikk er (Blum & Ferri, 2009, s. 47) Evner som å tolke, beskrive, forklare, konstruere, manipulere og forutsi komplekse systemer er viktige for elevene slik at de kan delta i samfunnet etter endt skolegang (Sriraman & English, 2010, s. 271).

5.5 Studiens begrensninger

De metodiske valgene som ligger til grunn for studien har hjulpet oss til å beskrive hvordan et utvalg elever på 4. trinn utviklet matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan brukte elevene representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk. Ved å ha et lite utvalg av respondenter på 15 elever, er det ikke mulig å overføre resultatene direkte til andre 4. klassinger, men vi kan anta at noen av funnene vil gå igjen. Når vi sammenlikner våre funn med erfaringene til English og Watters (2005), ser vi fellestrekk fra moduleringsprosessen som gjør det mulig at andre 4. trinns elever kan få lignende resultater under like omstendigheter som vår studie er gjort under.

En svakhet i vår studie var både store og omfattende mengder med datamateriell som vi ikke hadde begrenset nok. Det viste seg i veldig mange koder og kategorier, og det kan ha vært koder vi ikke har brukt konsekvent. Vi har allikevel forsøkt å være transparente ved å beskrive analyseprosessen og gi gode forklaringer for hvordan kodene ble brukt i analysen.

5.6 Videre forskning

På hvilke andre måter kan man legge til rette for matematisk modellering i barneskolen innenfor rammene som er. I vår studie var vi totalt 3 voksne som var til stede med elevene, og vi brukte mye rom og areal da vi gjennomførte studien. Det som kan være interessant er hvordan kan man løse matematisk modellering i mindre skala. Samtidig så undersøkte vår studie to av delprosessene. Videre forskning kunne søkt svar på hvordan norske barneskoleelever mestrer å gjennomføre hele sykluser, da lagt til rette over tid. Det er lite av forskningslitteratur som har vist hvordan konkreter kan tas i bruk i modelleringsarbeidet, og det er behov for å undersøke dette område mer.

6 Avslutning

Målet med studien var å studere hvordan et utvalg av elever på 4. trinn utvikler matematiske modeller i delprosessene matematisering og matematisk arbeid, og hvordan elevene bruker representasjoner i kommunikasjonen med og om matematikk

Matematisk modellering binder sammen den virkelige verdenen og den matematiske verdenen, og vil hjelpe elevene med et adekvat bilde av hva matematikk er. Både PISA-rapporten og Kunnskapsløftet fremhever at elevene skal bli selvstendige, kritiske og samfunnsnyttige samfunnsborgere, og matematisk modellering gir elever muligheter til å håndtere store mengder data i en kompleks og meningsfylt kontekst.

Matematisk modellering stiller høye kognitive krav til både lærere og elever og tidligere forskning har vært kritisk til å innføre modellering i de lavere årstrinnene på grunn av kompleksiteten. En økning av komplekse systemer, krever ferdigheter knyttet til å kunne tolke, beskrive, forklare, konstruere, manipulere og forutse disse. Gjennom denne studien, men vi mener å ha vist at elever kan, men gode tilpasninger, påbegynne sin utvikling av modelleringskompetanse, steg for steg. Hensikten med modellering som gjennomføres i skolen er avhengig tilnærmingen og synet på modellering. Vi har brukt en modelleringssyklus som har en kognitiv tilnærming som bygger på empiri, for å undersøke hvordan elevene arbeider i de ulike fasene. Rammeverket til Ferri (2006) beskriver hva som skjer i prosessene, men ikke hvorfor det skjer. Derfor har vi benyttet oss av rammeverket for Duval (2006) for å beskrive dette. Vi ser at det er noen fallgruver en kan gå i arbeidet med modellering, som vi kort vil beskrive. Hvis du som lærer har et stort fokus på at elevene skal få et matematiskresultat i det matematiske arbeidet som matematisk korrekt, skaper det en utfordring fordi elevene ikke får erfaringer med å operere på kognitiv utfordrende problemer og lære av sine feil. Samtidig må du som lærer være oppmerksom på om elevene har forstått oppgaven og gi dem støtte slik de ikke gir opp. Vi ser er at det konkretene hjalp våre respondenter i matematiseringsprosessen, fordi den virkelige modellen viste hvordan et samsvar med den mentale representasjonen. Når vi skal utvikle modellering i barneskolen er det viktig at vi tar høyde for konkretenes rolle og betydning, samtidig som teorien viser at konkretene kan bli et hinder for utvikling av matematiske modeller.

Slik forskning viser, så er matematisk modellering viktig for å lære elevene å håndtere store mengder data, og hensikten er å hjelpe elevene med å forstå den virkelige verdenen. Det er argumentert for at matematisk modellering har en høy relevans for utvikling av matematisk literacy (Kuntze et al., 2013, s. 317). Matematisk literacy beskrives som «den enkeltes kapasitet til å resonnere matematisk og løse problemer i en kontekst» (OECD, 2018, s. 6). Dette knyttes opp til den økende kompleksiteten og at samfunnet er i forandring, samt ferdigheter elevene trenger for det 21. århundret. Siden vi også vet at utviklingen av modelleringskompetanse tar tid, så må elevene møte oppgaver som er komplekse, og i meningsfylte kontekster allerede i barneskolen, slik som også Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2020) legger føringer for.

Referanser

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *International Group For The Psychology Of Mathematics Education*.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. In *Kunne det tænkes?:-Om matematiklæring* (ss. 80-109). Malling Beck.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, *22*(3), 123-139.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling And Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA*, *12*, 222.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. R. B. (2018). *Research methods in education* (8th ed. ed.). Routledge.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131.

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. In S. J. Lamon, W. A. Parker, & K. Houston (Red.), *Mathematical Modelling: A Way of Life* (ss. 3-17). Elsevier.

English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21 st century. In *Theories of mathematics education* (ss. 263-290). Springer.

English, L. D. (2010). Modeling with complex data in the primary school. In *Modeling students' mathematical modeling competencies* (ss. 287-299). Springer.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics education research journal*, *16*(3), 58-79.

Eriksen, E., Solem, I. H., & Ulleberg, I. (2018). På jakt i elevers algebraiske tenkning. In E. Michaelsen & K. Palm (Red.), *Den Viktige begynneropplæringen : en forskningsbasert tilnærming* (ss. 187-212). Universitetsforlaget.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86-95.

Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (Vol. 10). Springer Science & Business Media.

Giorgi, A. (1985). *Phenomenology and psychological research : essays*. Duquesne University Press.

Goldin, G. A. (2020). Mathematical representations. *Encyclopedia of mathematics education*, 566-572.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. In *Modelling and applications in mathematics education* (ss. 89-98). Springer.

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Ectj*, *29*(2), 75-91.

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school–Examples and experiences. *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum. Hildesheim: Franzbecker*, 99-108.

Kaiser, G. (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (ss. 553-561). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, *38*(3), 302-310.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Survey of the State of the Art. In *Early Algebra* (ss. 3-32). Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., & council, N. r. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101). Citeseer.

Kuntze, S., Siller, H.-S., & Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling–an empirical study with Austrian teachers. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (ss. 317-326). Springer.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education. *SAGE Open*, *5*(2), 2158244015589588. https://doi.org/10.1177/2158244015589588

Mainali, B. (2021). Representation in Teaching and Learning Mathematics. . 9. 1-21. 10.46328/ijemst.1111. . *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9 (1)*, 1-21. https://doi.org/https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Matematikksenteret. *Strikkhopp*. Matematikksenteret. https://www.mattelist.no/473

Matematikksenteret. (2018, 28.11.2018). *MatteLIST - ny nettside med aktiviteter som passer alle*. Matematikksenteret. Retrieved 4.1.21 from https://www.mattelist.no/

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, *38*(2), 113-142.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285-311.

OECD. (2018). *PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK (SECOND DRAFT)* https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Schou, J., Hansen, H. C., & Schou, J. (2008). *Matematik for lærerstuderende-Omega*. Samfundslitteratur.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E., & Paiam, V. (2017). *Tall og tanke : matematikkundervisning på 5. til 7. trinn : 2* (Vol. 2 :). Gyldendal akademisk.

Sriraman, B., & English, L. D. (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers*. Springer.

Svingen, O. E. L. (2018). Representasjoner i matematikk. *Hentet fra https://www. matematikksenteret. no/sites/default/files/attachments/Elever% 20som*, *2*.

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Våge, J. (2000). Matematisk modellering. In G. G. T. Onstad (Ed.), *Mathema 2000* (ss. 158-169). NKS-forlaget.

7 Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring elever

Vedlegg 2: Samtykkeerklæring lærer

Vedlegg 3: Elevenes arbeidshefte

Vedlegg 4: Intervjuguide elever

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring elever

Matematisk modellering på 4. trinn

Til foresatte for elever på 4. trinn ved [redacted] barneskole

Som masterstudenter på Lærerspesialistutdanning i matematikk 1 – 7 ved NTNU har vi planlagt å gjennomføre et forskningsprosjekt på 4. trinn. Formålet med undersøkelsen er å se på hvordan elever løser praktiske matematiske problemer i forbindelse med en oppgave gitt av oss. Resultatene vil bli brukt i en masteroppgave ved NTNU og vil bli publisert.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Vi har valgt ut 4. trinn til forskningsprosjektet og har i samarbeide med matematikklærer på trinnet og rektor ved skolen besluttet at hele trinnet får tilbud om å delta. Vi har valgt [redacted] barneskole og 4. trinn kontaktlæreren har funksjon som lærerspesialist ved skolen, og vi har jobbet sammen med han på skoleutvikling tidligere. Samtidig er elevenes årstrinn spesielt interessant å studere da det finnes lite forskning om matematisk modellering på 4. trinn.

Hva innebærer deltagelse?
Hvis du velger å la ditt barn delta i forskningsprosjektet, innebærer det observasjon og lydopptak når barnet arbeider med matematikkoppgaver i samarbeid med andre elever. Etterpå vil vi føre en samtale med elevene på gruppen og stille spørsmål som *hvordan tenkte dere når dere løste oppgaven, hvorfor valgte dere å løse oppgaven slik, er det likheter mellom løsningene*? Vi tar lydopptak av samtalen mellom elevene, i undervisning og i gruppeintervjuet. Lydopptakene vil i ettertid bli transkribert og anonymisert. Vi vil i tillegg samle inn elevenes skriftlige arbeider. Disse vil også anonymiseres. Arbeidet med oppgaven vil ta 120-240 min, gruppeintervjuet, for de det gjelder, vil ta inntil 30 minutter. Begge deler vil foregå i løpet av skoledagen. Det er kun elever som har samtykket til deltakelse som vil høres på lydopptakene. Foresatte kan få tilgang til en fullstendig oversikt over hvilken oppgave elevene skal løse og hvilke spørsmål som vil bli stilt ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du eller ditt barn når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. All innsamlet data fra barnet vil da bli slettet og ikke brukt i oppgaven. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn ved ikke å delta eller hvis samtykket trekkes tilbake. Elever som ikke deltar i forskningen vil gjennomføre undervisningsopplegget sammen med resten av klassen. De vil ikke bli valgt ut til gruppeintervju.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene omtalt i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Anja Olsen, Remy Hulegaard Lyng og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Vi vil anonymisere alle navn og utelate utsagn som kan identifisere eleven fra transkripsjonen.
- Datamaterialet vil låses inn, og lydopptaket blir oppbevart på en kryptert disk.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes i september 2021. Etter prosjektslutt vil lydopptak slettes og skriftlige data, som ikke er anonymisert, makuleres.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke. På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved yvonne.grimeland@ntnu.no
- NTNU, personvernombud Thomas Helgesen, Thomas.helgesen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Yvonne Grimeland	Anja Olsen og Remy Hulegaard Lyng
Prosjektansvarlig	Masterstudenter ved lærerspesialist i matematikk 1 – 7 NTNU
(Forsker/veileder)	

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk modellering på 4. trinn*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan:

- delta i samtale med lærere og medelever hvor det blir tatt lydopptak og skriftlige arbeider samles inn.

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. *September 2021*

Det understrekes at barnet kan motsette seg deltagelse, selv om foresatte har gitt samtykke.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2: Samtykkeerklæring lærer

Matematisk modellering på 4. trinn

Til lærer på 4. trinn ved [redacted] barneskole

Som masterstudenter på Lærerspesialistutdanning i matematikk 1 – 7 ved NTNU har vi planlagt å gjennomføre et forskningsprosjekt på 4. trinn. Formålet med undersøkelsen er å se på hvordan elever løser praktiske matematiske problemer i forbindelse med en oppgave gitt av oss. Resultatene vil bli brukt i en masteroppgave ved NTNU og vil bli publisert.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Elevenes årstrinn spesielt interessant å studere da det finnes lite forskning om matematisk modellering på 4. trinn. Videre har vi jobbet sammen med deg med skoleutvikling, og vi vet at du er både faglig oppdatert og interessert i å undersøke hvordan elever tenker og jobber.

Hva innebærer deltagelse?
Hvis du velger å delta i forskningsprosjektet, innebærer det observasjon og lydopptak når elevene arbeider med matematikkoppgaver i samarbeid med andre elever og i klasseromsundervisningen. Vi vil også gjennomføre et intervju med deg for å spørre om blant annet *hvilken type undervisning er elevene vant med, på hvilken måte mener du elevene løste oppgaven sammenlignet med tradisjonell undervisning*. Vi tar lydopptak av intervjuet. Lydopptakene vil i ettertid bli transkribert og anonymisert. Arbeidet med oppgaven i klasserommet vil ta 60-120 min og foregå i løpet av skoledagen. Vi antar at forarbeid og intervjuer vil ta til sammen 2-3 timer.

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. All innsamlet data fra deg vil da bli slettet og ikke brukt i oppgaven. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg ved ikke å delta eller hvis samtykket trekkes tilbake.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene omtalt i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Anja Olsen, Remy Hulegaard Lyng og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Vi vil anonymisere alle navn og utelate utsagn som kan identifisere eleven fra transkripsjonen.
- Datamaterialet vil låses inn, og lydopptaket blir oppbevart på en kryptert disk.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes i september 2021. Etter prosjektslutt vil lydopptak slettes og skriftlige data, som ikke er anonymisert, makuleres.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke. På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved yvonne.grimeland@ntnu.no
- NTNU, personvernombud Thomas Helgesen, Thomas.helgesen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Yvonne Grimeland	Anja Olsen og Remy Hulegaard Lyng
Prosjektansvarlig	Masterstudenter ved lærerspesialist i matematikk 1 – 7 NTNU
(Forsker/veileder)	

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk modellering på 4. trinn*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- det tas lydopptak av undervisning og intervju.
- at det kan tas bilder av notater på tavla.

Jeg samtykker til at opplysninger om meg behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. *September 2021*

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Det store strikkhoppet

Dere skal sette på strikker, la Barbie hoppe og måle høyden på strikkhoppene.

Antall strikker	Høyde
1	
2	
3	
4	
5	

Nå skal dere gjette hvor langt dere tror Barbie hopper når det settes på 6 strikker. Forklar hvordan dere tenker ved å tegne eller skrive:

Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
6			

Nå skal dere gjette hvor langt dere tror Barbie hopper når det settes på 7 strikker. Forklar hvordan dere tenker ved å tegne eller skrive:

Antall strikker	Gjettet høyde	Målt høyde	Differanse
7			

Høyden på det store strikkhoppet: __________

Hvordan tenker dere for å komme frem til antall strikker dere vil feste på Barbie slik at hun akkurat berører vannet med håret?

Hvor mange strikker vil dere feste sammen slik at Barbie akkurat berører vannet med håret? _________

Hvordan gikk det?

Hva vil dere gjøre annerledes på andre forsøk? Forklar hvorfor:

Hvordan gikk det på andre forsøk?

Hvor mange forsøk tror dere at dere trenger for å få til det perfekte strikkhoppet? ___________

Vedlegg 4: Intervjuguide elever

Spørsmålene som vil stilles vil være koblet opp mot den praktiske delen av oppgaven og situasjonen rundt utprøvingen. Fokuset for intervjuet vil være hvordan elevene kom frem til antagelsene for det store strikkhoppet samt at de vil få positive tilbakemeldinger av oss underveis i intervjuet. Intervjuet vil bestå av introduksjons-, oppfølgings-, indirekte, direkte og utdypende spørsmål.

Generelle spørsmål:

- Fortell oss om oppgaven. Hva gikk den ut på?
- Har dere løst lignende oppgaver tidligere?
    - Hvis ja; kunne dere bruke samme løsningsmetode nå?
    - Hvis nei; hva synes dere om denne måten å jobbe på?
- Hvordan begynte dere på oppgaven?
- Stod dere fast noen ganger? Hva gjorde dere dersom dere stod fast?
- Hvordan tenkte dere når dere skulle anta fallhøyden på 6 og 7 strikker?
- Hvordan tenkte dere når dere skulle bestemme antall strikker på det store strikkhoppet?
- Måtte dere gjøre flere forsøk for å få det perfekte strikkhoppet?
    - Hvis ja; hvorfor måtte dere det?
    - Hvis nei; hvorfor tror dere at dere fikk det til på første/andre forsøk?
- Hvilke matematiske temaer har dere jobbet med i dag?
- Fikk dere god nok tid på oppgaven?
- Hva ved oppgaven synes dere var vanskeligst?
- Hvordan var det å jobbe sammen på gruppe?
- Føler dere at dere har lært noe ved å jobbe med denne oppgaven?
    - Hvis ja: hva?
    - Hvis nei: Hva kunne vært gjort annerledes?

Fortolkningsspørsmål:

- Har vi forstått dere riktig når dere sier…?
- Kan vi forstå det dit at dere mener…?
- Hvis vi oppsummerer, først så sa dere…, så sa dere… Er det riktig oppfattet?

NTNU

Kunnskap for en bedre verden