Mari Solberg Jensen

Representasjoner i lærebøker

En kvalitativ innholdsanalyse av hvordan representasjonskompetansen blir ivaretatt i temaet likninger i lærebøker for 5. trinn.

Masteroppgave i Lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7. trinn
Veileder: Anita Valenta
September 2021

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Mari Solberg Jensen

Representasjoner i lærebøker

En kvalitativ innholdsanalyse av hvordan representasjonskompetansen blir ivaretatt i temaet likninger i lærebøker for 5. trinn.

Masteroppgave i Lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7. trinn
Veileder: Anita Valenta
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien har undersøkt representasjoner i lærebøker på 5. trinn. Hensikten har vært har vært å få innsikt i hvordan oppgaver og eksempler i lærebøkene ivaretar de ulike aspektene ved representasjonskompetansen. En slik innsikt vil kunne øke læreres bevissthet omkring representasjoner generelt og mer spesifikt om læreboka er et hjelpemiddel som bidrar til å til å utvikle elevenes representasjonskompetanse. Studiens forskningsspørsmål er: *På hvilken måte ivaretar lærebøker på 5. trinn representasjonskompetansen i temaet likninger?*

Studien har benyttet metoden kvalitativ innholdsanalyse og har analysert oppgaver og eksempler i kapittelet om likninger i tre lærebøker for 5. trinn. Datamaterialet ble analysert, ved å bruke en bearbeidet utgave av et analyseskjema, funnet hos Charalambous et al. (2010), som består av en horisontal og en vertikal analyse. I den horisontale analysen ble lærebøkene undersøkt på et overordnet nivå. Den vertikale analysen undersøkte kapitlene om likninger i hver lærebok, for å analysere de ulike aspektene i representasjonskompetansen, og er delt i fem delanalyser. Delanalysene var både deduktive og induktive, avhengig av om koder og kategorier var forhåndsdefinerte på bakgrunn av eksisterende teori eller ble utarbeidet gjennom analyse av data og senere samlet i kategorier. Som rammeverk har studien tatt utgangspunkt i Niss og Jensen (2002) for å definere begrepet representasjonskompetanse i undersøkelsen. For å undersøke hvordan representasjonskompetansen ble ivaretatt , ble Duval (2006) sitt rammeverk for semiotiske representasjonssystemer brukt for å predefinere koder i de deduktive delene av analysen. Mer bestemt for å beskrive representasjonene i lærebøkene og transformasjoner mellom representasjonssystemer.

Den horisontale analysen viser at det ikke er store forskjeller mellom lærebøkene på et overordnet og strukturelt plan. Delanalysene i den vertikale analysen, viser at lærebøkene ivaretar representasjonskompetansen, ved å kommunisere ulike, hensiktsmessige representasjoner, elevene kan bruke som verktøy i tankeprosessen, og for å kommunisere en løsning. For å representere likninger og støtte innlæring av algebraiske symboler, bruker lærebøkene alternative representasjoner, eksempelvis balansemodeller. Elevene må i hovedsak bruke symboler eller naturlig språk for å kommunisere en løsning, men kan bruke de øvrige representasjonssystemene vi finner i læreboka i tankeprosessen. Lærebøkene legger også til rette for at elevene må oversette mellom representasjonssystemer. Samtidig viser studien at elevene får få muligheter til å velge representasjoner selv. Lærebøkene stiller heller ikke eksplisitte spørsmål gir elevene mulighet til å reflektere over sammenhengen mellom representasjoner og representasjonenes egenskaper. Når lærebøkene ikke ivaretar alle aspektene ved representasjonskompetansen like tydelig, indikerer det at lærere bør kompensere for aspektene læreboka ikke dekker.

Nøkkelord: lærebøker i matematikk, lærebokanalyse, representasjoner, representasjonskompetanse, likninger

Abstract

This study has examined representations in textbooks in 5th grade. The purpose of the study has been to gain insight in how assignments and examples in textbooks, support different aspects of the representational competence. This insight can increase teacher's awareness about representations in general, and more specific if the textbook is a tool which contribute to develop student's representational competence. The research question is: *In what way do 5. grade textbooks support representational competence in the topic equations?*

The study has used qualitative content analysis method and has analysed assignments and examples in the equation chapter in three 5th grade textbooks. The data was analysed by using a modified version of an analysis form, found in Charalambous et al. (2010), consisting of a horizontal and a vertical analysis. In the horizontal analysis, the textbooks were investigated on a general level. The vertical analysis studied the equation chapters in each textbook, by analysing different aspects in the representational competence, and was divided into five sub-analyses. The sub-analyses were both deductive and inductive, depending on if codes and categories were pre-defined based on existing theory, or was developed throughout the analysis and later grouped in categories. As framework, the study has used Niss and Jensen (2002) to define the concept representational competence. To investigate in what way representational competence was supported, Duval's (2006) framework for semiotic representations, was used to predefine codes and categories in the deductive analyses. More specific to describe the representations in textbooks and transformations between representational systems.

The horizontal analysis shows that there are few differences between the textbooks on a general and structural level. The sub-analysis shows that textbooks support the representational competence, by communicating different, meaningful representations the students can use both as tools for understanding and to communicate a solution. To represent equations and support understanding of algebraic symbols, the textbooks present alternative representations, for example balance models. Students must mainly use symbols or natural language to communicate a solution but can use other representational systems from the textbook as tools. The textbooks also facilitate opportunities to translate between representational systems. At the same time, this study shows that students are given few opportunities to choose which representations to use themselves. The textbooks do not ask questions that make the students reflect upon connections between representations and representations' possibilities and limitations. When textbooks do not support all aspects of representational competence, this indicates that teachers must compensate for what the textbook do not cover.

Keywords: mathematics textbooks, textbook analysis, representations representational competence, equations

Forord

At matematikk er en vitenskap hvor objektene vi undersøker ikke finnes i den fysiske verden fasinerer meg. Det er nok derfor denne masteroppgaven og flere andre oppgaver de siste tre årene har handlet om nettopp representasjoner. Med denne masteroppgaven setter jeg imidlertid punktum. Ikke for representasjoner, men for tre år som lærerspesialiststudent. Det har vært tre lærerike år, og jeg er utrolig takknemlig for den nasjonale satsningen på videreutdanning, som gav meg muligheten til å oppdatere egne kunnskaper og lære mer om det faget jeg setter mest pris på i skolen.

Selv om det er mitt navn som står på denne masteroppgaven, er det flere som har bidratt slik at jeg kom i mål.

Først og fremst vil jeg takke min stødige veileder, Anita Valenta. Du har gitt grundige, tydelige og konkrete innspill og tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Din kunnskap og ditt engasjement, både som foreleser og veileder, har vært inspirerende og noe jeg tar med meg videre.

Takk til medstudenter på lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7, for hyggelig sosialt samvær, spennende faglige diskusjoner og noen litt mindre faglige, men like spennende, samtaler. Det hadde ikke vært like fint å dra på samling uten dere.

Jeg må også takke familien min. Mamma og pappa, som både har stilt opp med kontorplass, kost, losji og barnepass. Geir, som har dratt alene på hytta med ungene og som bidro med et kritisk blikk og gode innspill i sluttspurten. Og barna mine, som har holdt ut, selv om mamma har vært litt stressa og sur innimellom.

Sist en takk til min kollega og gode venninne Berit. Du har heiet på meg hele veien, spesielt når det har gått litt trått. Men du fikk rett til slutt. Jeg greide det!

September, 2021

Mari

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

Matematikken skiller seg fra andre vitenskaper, siden man ikke kan studere objektene en arbeider med direkte (Duval, 2006; Sfard, 1991, s.3). En botaniker kan studere en blomst ved å se på den eller plukke den fra hverandre. Dette er ikke mulig med matematiske objekter, siden disse kun kan studeres *«with our mind's eye»* (Sfard, 1991, s.3). I matematikk spiller derfor representasjoner en sentral rolle, siden representasjonene står for det objektet man skal undersøke (Sfard, 1991, s.3). Ofte kan det samme matematiske objektet representeres på ulike måter. Mengden fem kan eksempelvis skrives som fem tellestreker, ved tallsymbolet 5, brøken 25/5 eller ved å tegne fem epler.

I matematikk arbeider vi riktignok sjelden isolert med en representasjon (Duval, 2006), noe vi også ser i klasserommet. Lærere både tegner, bruker symboler og forklarer muntlig for å kunne belyse flere sider ved et matematisk objekt (Stylianou, 2010). Det samme gjelder i lærebøker hvor tekstene i stor grad multimodale (Maagerø & Skjelbred, 2010, gjengitt i Gulaker, 2018) og både består av symboler, illustrasjoner, figurer og tekst. Duval (2006) påpeker at det å veksle mellom ulike representasjoner er viktig i matematikk, men også å være i stand til å bruke ulike representasjoner avhengig av konteksten og hva man ønsker å belyse ved det matematiske objektet eller hva representasjonen skal brukes til. Samtidig gjør variert og fleksibel representasjonsbruk innlæringen av matematikk både mer meningsfull og effektiv (Stylianou, 2010, s. 327).

Både lærere og læreboka bruker altså ulike representasjoner når elevene skal lære matematikk og nettopp læreboka spiller en viktig rolle i matematikkfaget (Alseth et al., 2003; Gueudet et al., 2012; Li et al., 2009). Lærere bruker boka for å planlegge undervisning og bestemme hvilke oppgaver elevene skal gjøre, hva som skal undervises, hvor lang tid som skal sette av til et tema og hvilke spørsmål de skal stille i klasserommet (Kongelf 2017; Lepik et al., 2017; Pepin & Haggerty, 2002; Reys et al., 2004). Læreboka har derfor en veiledende funksjon for læreren (Rezat, 2012, s. 231). Ofte blir heller ikke tema som læreboka ikke inneholder presentert i klasserommet (Johansson, 2006). Innholdet i ei lærebok kan tillegges stor betydning for hvilken undervisning elevene møter. Kanskje påvirker læreboka også hvilke representasjoner læreren velger å bruke?

Videre fungerer læreboka som et bindeledd mellom kompetansemålene i læreplanen og den pedagogiske praksisen (Pepin et al., 2013), siden lærere ofte støtter seg til læreboka fremfor læreplanen, når de planlegger undervisning (Lepik et al., 2017, s. 293). Norge innførte høsten 2020 innførte Fagfornyelsen, og det blir nå utgitt lærebøker som skal ivareta den nye læreplanen. Et nytt element i Fagfornyelsen er at alle fag defineres ved kjerneelementer som tydeliggjør hva som er det viktigste i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019). Matematikk blir definert ved seks kjerneelementer, hvor ett omhandler representasjon og kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, 2020). Utdannings-direktoratet påpeker at de nye læremidlene må legge til rette for arbeid med kjerneelementene og ikke kun kompetansemålene (Svingen & Gilje, 2018). Med bakgrunn i Lepik, Grevholm og Viholainen (2017) kan vi anta at lærere stoler på at både kompetansemål og kjerneelementene blir ivaretatt om undervisningen bygger på de nye lærebøkene.

I Fagfornyelsen blir representasjoner beskrevet som de ulike måtene matematikk kan uttrykkes på og det blir fremhevet at elevene må få muligheten til både å bruke varierte representasjoner i ulike sammenhenger, veksle mellom representasjoner og bruke representasjoner når de kommuniserer i og om matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020 s.3). Det blir med andre ord forklart hva representasjoner er og hva elevene skal gjøre, men ikke hvordan og hvorfor det er viktig, noe som kan føre til utfordringer for lærere. En utfordring, som Duval (2004) beskriver, er å vite hvilke aktiviteter og oppgaver som er tilgjengelig for å trene elevene i variert representasjonsbruk. En annen utfordring er at alle lærere kanskje ikke har tilstrekkelig kunnskap om representasjoner. Stylianou (2010) undersøkte hva et utvalg lærere la i begrepet, og oppdaget store variasjoner. Noen så på representasjoner som et sluttprodukt, andre som et verktøy i tankeprosessen, mens noen betraktet de symbolske representasjonene som det matematiske objektet. Hun fant også at hva lærere tenkte om representasjoner, påvirket hvilken rolle representasjoner spilte i undervisning, noe som videre påvirket elevenes læringsutbytte. Flere lærere signaliserte også at det å undervise om representasjoner ble opplevd som en ekstra byrde. Om det Duval (2004) og Stylianou (2010) hevder er gjeldende blant norske lærere, betyr det at lærere trenger mer kunnskap om representasjoner enn det læreplanen formidler eksplisitt, både med tanke på hva representasjoner er og hvordan lærere kan legge til rette for å lære elevene å bruke representasjoner.

Læreboka kan være et hjelpemiddel når lærere skal undervise om representasjoner . Selv om det er forsket mye på lærebøker de siste tiårene, har vi begrenset kunnskap når det gjelder hvordan læreboka bruker og presenterer representasjoner. Fan et al. (2013) sin oppsummering av forskning på lærebøker, viser at majoriteten av forskningen har handlet om å undersøke hvordan bestemte tema eller aspekt blir fremstilt. Av de undersøkelsene de nevner i sin artikkel, omhandler imidlertid ingen representasjoner. Vi vet derfor ikke hvilke muligheter oppgaver i matematikkbøkene gir elevene med tanke på å bruke ulike representasjoner, veksle mellom representasjoner og kommunisere om representasjoner.

1.1 Forskningsspørsmål og formål med undersøkelsen

Læreboka er altså en viktig kilde for lærere og både ny læreplan og forskning sier at representasjoner er en viktig del av det å lære matematikk (Duval, 2006; Greeno & Hall, 1997; Utdanningsdirektoratet, 2020). Vi vet samtidig at lærere kan ha ulik oppfatning av representasjonsbegrepet (Stylianou, 2010) og at det kan være vanskelig for lærere å vite hvilke oppgaver som legger til rette for å bruke ulike representasjoner (Duval, 2004). Jeg vil derfor undersøke hvordan nye lærebøker legger til rette for at elevene lærer å bruke representasjoner, ved å analysere hvordan noen av de nye læreverkene i matematikk på 5. trinn gir elevene mulighet for å utvikle representasjonskompetanse. Med representasjonskompetanse mener jeg at elevene får muligheten til både å bruke ulike representasjoner i kommunikasjon og i tankeprosessen, veksle mellom representasjoner, velge representasjon ut ifra formål og utforske representasjoners egenskaper og sammenhenger mellom representasjoner. Det vil også være av betydning om representasjonene lærebøkene presenterer, hjelper elevene til få innsikt i viktige aspekter ved det matematiske objektet.

Å bruke ulike representasjoner i tankeprosessen og i kommunikasjon er spesielt avgjørende i begrepsinnlæring (Duval, 2006). Jeg vil derfor ta utgangspunkt i ligninger, som i Fagfornyelsen er et nytt tema for elevene på 5. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020). En annen årsak er at resultatet fra TIMSS-undersøkelsen 2019, fremdeles viser at algebra er det temaet i matematikk som er mest utfordrende for norske ungdomsskoleelever (Kaarstein et al., 2020). En av årsakene kan være mangelfull begrepsforståelse og at elever manipulerer symboler uten å skjønne hvorfor (Naalsund, 2012), noe som kan skyldes at det ikke er brukt alternative representasjoner for å støtte innlæring av de formelle og symbolske metodene (Webb et al., 2008).

Forskningsspørsmålet i denne undersøkelsen er: *På hvilken måte ivaretar lærebøker på 5. trinn representasjonskompetansen i temaet likninger?*

Oppgavene elevene får arbeide med har stor betydning for hva de lærer (Valenta 2016 s. 2). For å besvare forskningsspørsmålet har jeg derfor analysert oppgaver og eksempler i kapittelet om likninger i tre nye lærebøker på 5.trinn. Siden min studie omhandler representasjoner og representasjonskompetanse, har jeg som rammeverk brukt Niss og Jensen (2002) sin beskrivelse av representasjonskompetanse og annen forskning om representasjoner i undervisning, for å definere hva representasjonskompetanse er. I tillegg har jeg brukt Duval (2004; 2006) sin forskning om hvilken forståelse som kreves i arbeid med overganger mellom ulike representasjonssystemer og benyttet Duval (2006) sin inndeling i semiotiske representasjonssystemer som rammeverk for å beskrive hvilke representasjoner lærebøkene bruker.

Formålet med studien er å bidra til mer kunnskap om representasjoner og representasjonskompetanse generelt og mer spesifikt hvordan lærebøkene ivaretar representasjonskompetansen, for å gjøre lærere bevisste om at læreboka kan ha noen begrensninger. Økt kunnskap om det potensialet som fleksibel og hensiktsmessig representasjonsbruk utgjør, kan videre bidra til å øke elevenes læringsutbytte i matematikk. Både for å forstå de matematiske ideene, men også så elevene kan bruke representasjoner som verktøy i tankeprosessen og i kommunikasjon. For å bidra med slik kunnskap, har jeg undersøkt på hvilken måte de ulike delene av representasjonskompetansen blir ivaretatt av lærebøkene. De spørsmålene jeg har stilt i analysen, er spørsmål det kan være hensiktsmessig å stille seg, om en ønsker å vurdere en oppgaves potensiale med tanke på å styrke elevers representasjonskompetanse. Spørsmålene er utformet slik at de også kan benyttes i andre tema enn likninger. Derfor kan spørsmålene jeg stiller i analysen, fungere som et verktøy lærere eller lærerspesialister kan bruke for å analysere oppgaver og aktiviteter, planlegge undervisning eller for selv å utarbeide oppgaver hvor representasjonsbruk står i fokus.

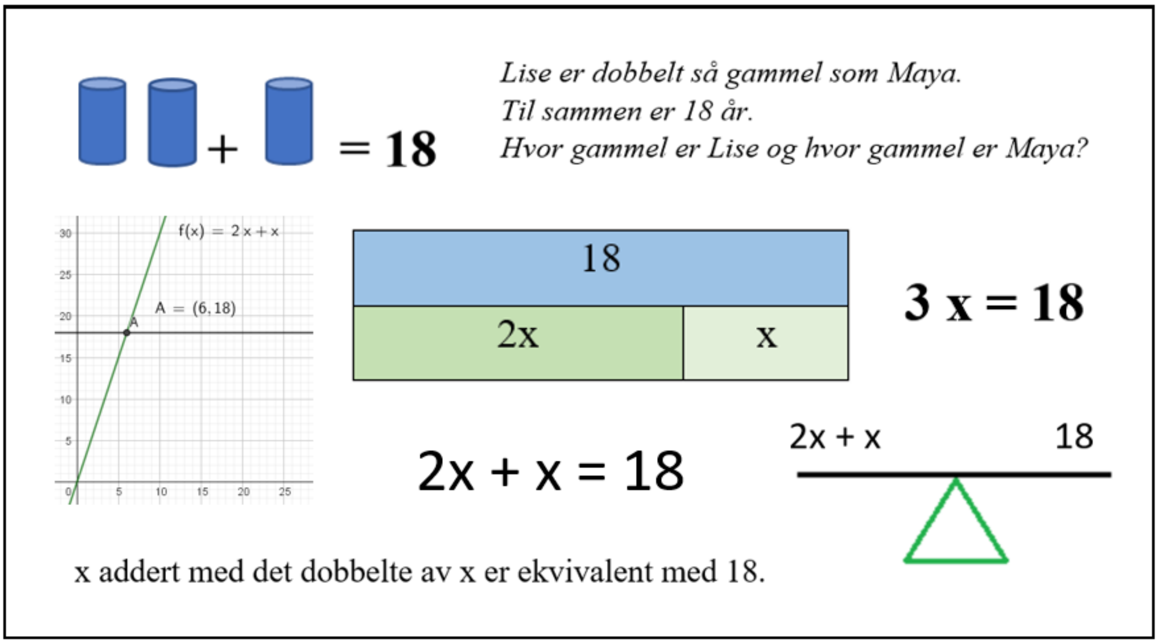
Jeg vil videre i kapittel 2, teorikapitlet, utdype hva representasjoner er og beskrive de teoretiske rammeverkene jeg har benyttet mer inngående, utdypet med annen forskning om representasjonskompetanse og representasjoner. Sist i teorikapittelet vil jeg belyse hva likninger er, og beskrive noen representasjoner en kan forvente å møte i lærebøker i temaet likninger. I kapittel 3 vil jeg beskrive metode for datainnsamling og analyse, før kapittel 4 vil være en presentasjon og analyse av data. Oppgaven avsluttes med at funnene i analysen diskuteres i kapittel 5, og konklusjon i kapittel 6, hvor jeg også beskriver eventuell videre forskning.

2 Teori

Denne studien undersøker hvordan lærebøker ivaretar representasjonskompetansen i temaet likninger. Sentrale begreper er derfor representasjoner, representasjonskompetanse og likninger. Jeg vil først beskrive hva representasjoner er og gjøre rede for Duval (2006) sine semiotiske representasjonssystemer, som er det overordnede rammeverket jeg benytter for å beskrive representasjoner. Videre vil jeg beskrive hvordan representasjonskompetanse blir beskrevet av Niss og Jensen (2002) og utdype med annen forskning, før jeg beskriver hvordan begrepet er definert i denne studien. Jeg vil deretter forklare hva likninger er, og vise til forskning om noen av de representasjonssystemene elever trolig vil møte i lærebøkene. Sist i kapittelet viser jeg hvordan jeg har tilpasset Duval (2006) sitt rammeverk til denne studien.

2.1 Hva er representasjoner?

Representasjoner er de ulike måtene vi uttrykker matematikk på, som symboler, tegninger, regnefortellinger eller grafer. Årsaken til at vi bruker representasjoner når vi arbeider med matematikk, er at de matematiske objektene ikke kan sanses eller observeres direkte (Duval, 2006; Sfard, 1991), men at ideene medieres gjennom representasjoner. Når vi i ei lærebok med øynene ser symboler, som sammen danner ei likning, er det ikke den matematiske ideen vi ser (Sfard, 1991), men en representasjon av en likning. Den samme ideen kan også representeres på flere måter, som figur 2.1 viser.



Figur 2.1 Ulike representasjoner av samme likning

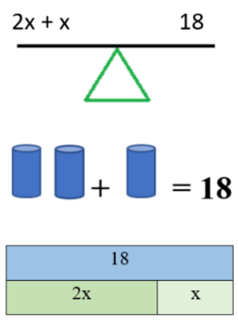
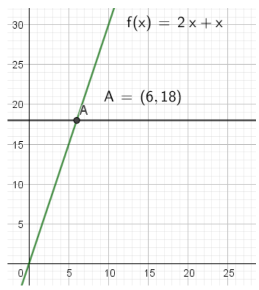
Representasjonene i figur 2.1 kunne vært hentet fra matematikkbøker, og viser at en og samme likning kan representeres på ulike måter. Enten ved hjelp av en hverdagssituasjon, beskrevet med matematisk språk, eller ved kun å bruke symboler. Likningen kan også representeres ved ulike modeller, ved å kombinere figurer og symboler, eller ved en graf. Alle representerer de det samme objektet, selv om de kan fremstå som ganske forskjellige. Det kan derfor være utfordrende å kjenne igjen et og samme objekt, når det representeres på ulike måter, eller å skille en representasjon fra den matematiske ideen (Duval, 2006, s. 107), spesielt hvis undervisning eller lærebøker fokuserer ensidig på en representasjon. En representasjon vil heller ikke være en fullverdig kopi av en matematisk ide, siden representasjonene har ulike egenskaper, som fremhever eller skjuler sider ved det matematiske objektet. Tallet 12 kan for eksempel representeres ved symbolene 10 + 2 eller ved en tegning av et brett med tre rader boller, hvor det er fire boller i hver rad. Den første representasjonen viser at tallet består av 1 tier og 2 enere, mens den andre representasjonen viser at 12 er delelig med både 3 og 4. Hvilken representasjon en velger å bruke, vil også kunne gi tilgang til ulike løsningsmetoder for å løse et matematisk problem (Enge & Valenta, 2013, s. 9). I lærebøker kan derfor de valgene lærebokforfattere tar med tanke på representasjoner, både ha betydning for hvilke sider ved et matematisk objekt som blir belyst og hvordan elevene kan bruke representasjonene for å løse oppgaver.

Representasjoner er altså de uttrykksformene vi bruker for å uttrykke matematiske ideer og utføre matematiske operasjoner (Duval, 2006). Siden representasjonene fungerer som redskaper for å mediere de matematiske objektene, er vi også avhengig av representasjoner for å kommunisere matematikk, som hjelp til å produsere ny matematisk kunnskap og for å dele og bevare matematiske tanker og ideer (Duval, 2006, s. 106). Bruk av representasjoner er derfor avgjørende for å lære, arbeide med og kommunisere matematikk og det viktig at lærebøker i matematikk legger til rette for at elevene kan utvikle representasjonskompetanse.

2.1.1 Ulike representasjonssystemer

I matematikk bruker vi altså et stort mangfold av semiotiske representasjoner av forskjellig karakter og med ulike egenskaper (Duval, 2006, s.108). Vi kan slik bruke ulike representasjoner ut ifra formål og hva vi ønsker å belyse ved det matematiske objektet. Noen representasjoner er typiske for matematikk, for eksempel algebraisk notasjon, mens språk eller illustrasjoner også brukes i annen type tenkning. Siden representasjonene ikke kan forstås isolert, hører de til i en større sammenheng, eller et representasjonssystem (Goldin, 2002, gjengitt i Stylianou, 2010). På bakgrunn av representasjoners egenskaper og karakter deles derfor representasjonene ofte inn i grupper eller kategorier.

Duval (2006) har lagd en oversikt med fire semiotiske systemer, hvor representasjoner med felles egenskaper og potensial er plassert i samme gruppe. To av representasjonssystemene omtales som multifunksjonelle. Med det menes at representasjonene også brukes i andre sammenhenger enn matematikk, og som egner seg til resonering og utforsking i matematikken. Vi finner her *naturlig språk,* som inkluderer representasjonene muntlig og skriftlig språk i form av forklaringer, teoremer eller tekstoppgaver og *illustrasjoner,* som kan være tegninger, skisser, mønstre og geometriske figurer. De to andre systemene blir beskrevet som monofunksjonelle representasjoner og er egnet til å utvikle algoritmer. *Symboler* er algoritmer, bevis og formler, som kun kan uttrykkes skriftlig og *tabeller, diagrammer og grafer* (Duval, 2006, s.110). Et representasjonssystem inneholder videre ulike representasjoner. 2x + x = 18 og x = 6 er eksempler på ulike representasjoner av det samme objektet, som begge befinner seg i representasjonssystemet symboler. Tabellen under viser Duval (2006) sin inndeling, samt hvor representasjonene fra figur 2.1 hører hjemme.

Naturlig språk	**Symboler**	**illustrasjoner**	**Tabeller, diagrammer og grafer**
Skriftlig: *bevis, teoremer, tekstoppgaver ol.* Muntlig: *forklaringer og assosiasjoner* **x addert med det dobbelte av x er ekvivalent med 18.** ***Lise er dobbelt så gammel som Maya. Til sammen er 18 år. Hvor gammel er Lise og hvor gammel er Maya?***	Kan kun uttrykkes skriftlig. *Numeriske eller algebraiske symboler* **2x + x = 18** **3 x = 18**	Ikoniske*: tegninger, skisser og mønstre* Ikke- ikoniske: *figurer konstruert ved hjelp av verktøy* 	

Tabell 2.1 Duvals representasjonssystemer (Duval, 2006, s. 110) med eksempler.

I tillegg finnes andre representasjonssystemer enn de Duval bruker. National Council of Teachers of Mathematics (2014) har et representasjonssystem de kaller kontekstuelle representasjoner. Med det menes representasjoner som formidler en kontekst elevene kan kjenne seg igjen i, for eksempel en regnefortelling eller en illustrasjon. Matteson (2007, s. 66 - 67) identifiserer i sin doktoravhandling fem representasjonskategorier. Her er symbolske representasjoner bruk av formler og variabler, noe som gjør at likninger vil være plassert i denne kategorien. Numeriske representasjoner er begrenset til spesifikke tallverdier. Hos Duval vil både symboler og numeriske representasjoner tilhøre representasjonssystemet symboler. Siden uttrykk som består av regnesymboler og tall kan oppleves som noe helt annet enn uttrykk med algebraiske symboler, kan et slikt skille være viktig. Noen ganger blir representasjoner fra to eller flere av kategoriene benyttet i samspill for å løse et problem, som når språket og symboler blir brukt samtidig i problemløsning. Hos Matteson (2007) er det et eget representasjonssystem; doble representasjoner. Det er ikke utenkelig at lærebøker benytter doble representasjoner, siden tekstene i matematikkbøker er multimodale (Maagerø & Skjelbred, 2010, gjengitt i Gulaker, 2018, s. 111)

2.1.2 Å veksle mellom representasjoner

Duval (2006) beskriver vekslinger som kjernen i matematisk aktivitet, og at matematisk aktivitet alltid handler om å bruke og erstatte representasjoner, ut ifra konteksten og hva man ønsker å belyse ved det matematiske objektet (Duval, 2006, s.106). Å bytte fra en representasjon til en annen er ofte et kritisk punkt, og det er derfor viktig å arbeide med transformasjoner mellom representasjoner, for å støtte elevens læring av matematikk (Duval, 2004). Flere studier peker også på at evnen til å bruke ulike typer representasjoner og å kunne veksle mellom dem etter behov, har stor betydning for utvikling av begrepsforståelse og problemløsningskompetanse i matematikk (Enge & Valenta, 2013, s.10).

Duval (2006) skiller mellom to ulike typer vekslinger eller transformasjoner, *treatments* og *conversion*, heretter kalt *behandlinger* og *omdanninger*. Behandlinger er transformasjoner innenfor samme representasjonssystem, hvor representasjonssystemet bevares gjennom hele transformasjonsprosessen. Hvilke behandlinger det er mulig å gjøre, er avhengig av mulighetene som finnes i det aktuelle systemet. Eksempler på behandlinger er å utføre en regneoperasjon eller når likninger løses algebraisk, som i eksempelet under.

5x = 25

5x/5 = 25/5

x = 5

I eksempelet benyttes det symbolske representasjonssystemet i alle stegene i prosessen. Uttrykket endrer seg for hver linje, men det er fremdeles det samme matematiske objektet som representeres på symbolsk form, siden 5x = 25 er det samme som x = 5, bare forenklet og derfor representert på ulike måter.

Omdanninger er transformasjoner hvor det skjer et skifte mellom to representasjonssystemer, selv om man arbeider med det samme matematiske objektet (Duval, 2006, s.111-112). Eksempel på omdanningen kan være når elever får en tekstoppgave og finner svaret ved å bruke symboler, som i eksempelet under.

Stine er fire år eldre enn Tuva. Tuva er 8 år. Hvor gammel er Stine?

8 + 4 = $\underline{\underline{12}}$

I eksempelet benyttes to ulike representasjonssystemer. En tekstoppgave tilhører representasjonssystemet naturlig språk, siden det matematiske objektet er representert ved skriftlig språk. Oppgaven løses ved hjelp av numeriske symboler. Det skjer med andre ord et skifte mellom representasjonssystemer, siden det matematiske objektet som først var representert ved naturlig språk, blir representert ved symboler.

Duval (2006) påpeker at begge transformasjonstypene kan føre til vanskeligheter for elevene, men at omdanninger ofte er mer komplekse og kognitivt krevende enn behandlinger. Det representerte objektet må gjenkjennes i to ulike systemer, som innholdsmessig kan ha lite eller ingenting til felles (Duval, 2006, s.112), som når man går fra en regnefortelling til en algoritmisk utregning. I forrige eksempel måtte utrykket *fire år eldre* tolkes som at fire skal legges til og videre omdannes til + 4. Å gjøre en slik tolkning, krever at det er konstruert en indre koordinering mellom de ulike representasjonssystemene som er involvert. Uten en slik koordinering, vil de to representasjonssystemene oppfattes som to forskjellige objekter (Duval, 2004). Selv om slike koordineringer må konstrueres, er det behandlinger som ofte får mest oppmerksomhet i undervisning (Duval, 2006, s.121), spesielt innenfor det symbolske representasjonssystemet.

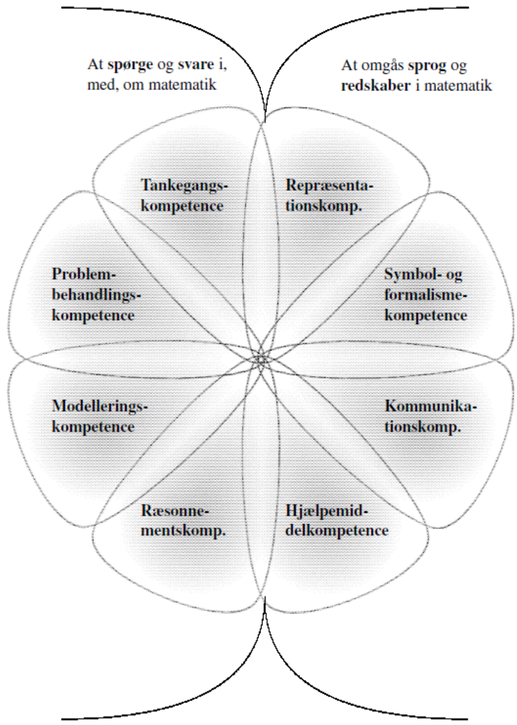
En overgang fra et representasjonssystem til et annet, vil alltid involvere en startrepresentasjon og en målrepresentasjon (Adu-Gyamfi et al., 2012; Duval, 2004). Startrepresentasjonen vil være den opprinnelige representasjonen som er utgangspunktet for overgangen, mens målrepresentasjonen er den matematiske representasjonen overgangen ender opp i. Overgangen er vellykket, dersom den matematiske ideen er velformulert gjennom strukturene i målrepresentasjonen (Adu-Gyamfi et al., 2012). I denne studien vil startrepresentasjonen være de representasjonssystemene en oppgave presenterer, eller oppgaven blir gitt i. Målrepresentasjonen vil være den representasjonen oppgaven legger opp til at elevene skal bruke når de kommuniserer svaret på oppgaven. En representasjon må omdannes dersom start- og målrepresentasjonen ikke tilhører samme representasjonssystem. Noen ganger vil elever tillegg trenge noen hjelperepresentasjoner (Duval, 2004). Hjelperepresentasjoner trenger ikke å ha noe til felles med verken start- eller målrepresentasjonen, men fungerer som et redskap for å forstå ulike faser i løsningsprosessen. Begrepet hjelperepresentasjon, vil her bli brukt om representasjoner vi kan forvente at elevene bruker på vei mot forventet målrepresentasjon.

2.2 Representasjonskompetanse

For å kunne undersøke hvordan lærebøker ivaretar representasjonskompetanse, trenger jeg å definere hva representasjonskompetanse er. Niss og Jensen ledet på starten av 2000-tallet det danske KOM-prosjektet som resulterte i rapporten *Kompetencer og matematiklæring* (Niss og Jensen, 2002). Rapporten presenterer åtte sentrale kompetanser, som sammen utgjør matematisk kompetanse, illustrert i figur 2.2.

Kompetansene er delt inn i to grupper, hvor de fire første handler om å spørre og svare i, med og om matematikk. Tankegangskompetanse blir beskrevet som å kunne utøve matematisk tankegang, mens problemløsningskompetanse omhandler å kunne formulere og løse et matematisk problem. Modelleringskompetanse er å kunne analysere og løse matematiske problemer og resonnementskompetanse er å kunne resonnere matematisk.

De fire neste kompetansene handler om å kunne bruke matematikkens språk og redskaper. Representasjonskompetanse, som er å kunne håndtere ulike matematiske representasjoner, vil jeg beskrive mer inngående, senere i dette kapittelet. De tre siste er symbol- og formalismekompetanse som handler om å håndtere matematikkens symbolspråk og formalisme, kommunikasjonskompetanse som er å kunne kommunisere i, med og om matematikk og hjelpemiddelkompetanse som omhandler å kunne bruke og forholde seg til ulike matematiske hjelpemidler.



Figur 2.2 Matematiske kompetencer (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

Den visuelle fremstillingen understreker at kompetansene har sin egenart, men likevel henger sammen, siden det er umulig å arbeide isolert med en kompetanse. Niss og Jensen (2002) understreker også at de to gruppene heller ikke er adskilte, siden kompetanser fra hver sin gruppe kan være tettere forbundet enn to kompetanser i samme gruppe.

At representasjoner er viktig i matematikk, understekes når det beskrives som en egen kompetanse. Mer utdypende omhandler kompetansen å kunne forstå og bruke ulike representasjoner for matematiske objekter, problemer og situasjoner, oversette mellom representasjoner og kunne forstå forbindelser mellom forskjellige representasjonsformer som representerer samme objekt. I tillegg er det en del av representasjonskompetansen å ha kjennskap til representasjoners styrker og svakheter, hvordan representasjonene kan vise eller skjule sider ved det matematiske objektet og velge representasjonsformer etter situasjon og formål.

Spesielt to andre kompetanser er nært knyttet til representasjonskompetansen. Symbol- og formalismekompetanse omhandler blant annet å oversette fram og tilbake mellom det matematiske symbolspråket og hverdagsspråket. Kommunikasjonskompetanse innebærer å kunne forstå og forklare andres skriftlige, muntlige eller visuelle matematiske utsagn og selv å kunne uttrykke seg på flere måter eller måter som er hensiktsmessig med tanke på formål eller mottaker. I tillegg vil hjelpemiddelkompetansen være knyttet til representasjonskompetansen, siden de fleste hjelpemidlene benytter en eller flere representasjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 56 – 62).

Hvis jeg ser på Niss og Jensen (2002) sin definisjon av representasjonskompetanse, og i tillegg inkluderer elementer fra andre kompetansene de beskriver som nært forbundet med representasjonskompetansen, kommer jeg frem til at representasjonskompetanse er:

- *Å forstå og bruke ulike representasjoner for matematiske objekter , inkludert de symbolske representasjonene, for å uttrykke seg eller for å forstå og forklare andres matematiske uttrykk.*
- *Å kunne oversette mellom representasjoner, inkludert mellom symbolspråk og hverdagsspråk og forstå forbindelser mellom ulike representasjonsformer.*
- *Å ha kjennskap til representasjoners styrker og svakheter og hvordan representasjoner kan vise eller skjule sider ved det matematiske objektet.*
- *Å kunne velge hensiktsmessige representasjoner etter situasjon og formål, også i form av hensiktsmessige hjelpemidler.*

Selv om Niss og Jensen (2002, s. 47), poengterer at aspektene i en kompetanse ikke kan oppfattes som en rekke delkompetanser som kan utvikles selvstendig. Jeg vil i denne studien allikevel bryte ned og undersøke hver del av representasjonskompetansen for å undersøke om lærebøker ivaretar helheten. Videre vil jeg på bakgrunn av annen forskning utdype hva som er viktig for at elever skal kunne forstå og bruke ulike representasjoner, og hvorfor dette er en viktig del av representasjonskompetansen. Jeg vil også begrunne ytterligere hvorfor elever bør får mulighet til selv å velge representasjoner og reflektere over deres forbindelser og egenskaper. Til slutt vil jeg presentere definisjonen av representasjonskompetanse, jeg legger til grunn, når jeg skal svare på forskningsspørsmålet i denne studien.

2.2.1 Å forstå og bruke ulike representasjoner

For å forstå en representasjon, kanskje spesielt innen det Duval (2006) omtaler som de monofunksjonelle representasjonssystemene, må elever både være i stand til å tolke og tillegge representasjonen betydning (Greeno & Hall, 1997). En symbolsk likning som $2x + x = 18$, vil ikke gi noen mening dersom elevene ikke er i stand til å tolke hva symbolene representerer. Elevene må altså skjønne hva representasjonen står for, noe som betyr at lærebøker på 5. trinn også bør representerer likninger ved andre representasjonssystemer enn symboler. Webb et al. (2008) støtter denne påstanden, og hevder at årsaken til manglende forståelse i matematikk kan skyldes at elevene ikke er i stand til å tillegge de symbolske representasjonene mening. De mener derfor at innlæringen av formelle representasjoner, som symboler eller grafer, bør bygge på uformelle og førformelle representasjoner, som er representasjoner elevene allerede kjenner til. Uformelle representasjoner har rot i elevenes virkelige eller tenkte kontekst, og er oftest representasjoner fra de multifunksjonelle representasjonssystemene, naturlig språk og illustrasjoner. Førformelle representasjoner bygger på elevenes uformelle representasjoner, men har en tydeligere matematisk struktur, som en dobbel tallinje eller arealmodellen. De fleste førformelle representasjonene er ikke utviklet av elevene selv, men formidlet fra lærere eller læremidler, for at elevene skal kunne bruke representasjonene i ulike situasjoner og kontekster (Webb et al., 2008). I likninger kan illustrasjoner både være førformelle og formelle representasjoner, avhengig av om de formidler en situasjon elevene kjenner igjen eller ikke. Symbolske likninger kan være eksempel på en formell representasjonen. Om lærebøker i matematikk følger samme tankegang som den Webb et al. (2008) skisserer, kan vi forvente at uformelle og førformelle representasjoner blir presentert før de algebraiske symbolene. Elevene vil da trolig bli bedre i stand til å tillegge symbolene mening og videre forstå de symbolske representasjonene.

For å kunne bruke ulike representasjonssystemer, må elevene også bli presentert for varierte representasjoner de senere kan bruke selv og bli gjort kjent med at et matematiske objekt kan representeres på ulike måter. Ulike representasjonsformer blir derfor ofte undervist eksplisitt i skolen (Greeno & Hall, 1997). Lærebøker kan for eksempel gjennom forklaringer vise hvordan elever kan tegne en modell, eller presentere en symbolsk fremgangsmåte steg for steg. Enkelte representasjoner blir imidlertid brukt oftere enn andre, og da gjerne de formelle representasjonene. Det er derfor viktig å være klar over at undervisning som ensidig fokuserer på enkelte representasjoner, kan føre til at elevene oppfatter denne eller disse representasjonene som den foretrukne (Pape & Tchoshanov, 2001) og ikke en potensiell representasjon (Greeno & Hall, 1997). Elever som får beskjed om at en oppgave skal løses som ei likning ved å bruke symboler, kan også tro at å bruke symboler er den eneste riktige måten å løse ei likning på, eller få en oppfatning av at representasjonen er objektet og ikke et utrykk for objektet (Enge & Valenta, 2013 s.10). Det er derfor viktig at lærebøker presenterer ulike representasjoner, både formelle, uformelle og førformelle, og at det gjøres eksplisitt i undervisning at en valgt representasjon ikke er objektet, men en potensiell representasjon.

Det bør også gjøres eksplisitt at representasjoner både er de ulike måtene et objekt kan representeres på i matematikk, et redskap for kognitiv aktivitet, og et redskap for å kunne kommunisere i matematikkfaget (Greeno & Hall, 1997; Pape & Tchoshanov, 2001). Hvis ikke kan representasjoner oppfattes som et produkt, som kun oppstår i siste fase av tankeprosessen, en oppfatning både lærere og elever kan ha (Duval, 2004; Stylianou, 2010). Om læreren har et snevert syn på hva representasjoner er, påvirker det hvordan representasjoner blir vektlagt i undervisningen (Stylianou, 2010), noe som kan bety at elever med et begrenset syn på representasjoner, heller ikke bruker representasjoner så utstrakt som de kunne gjort. Å kunne forstå og bruke representasjoner, både i tankeprosessen og for å kommunisere en løsning, vil derfor også være en viktig del av representasjonskompetansen.

2.2.2 Å velge hensiktsmessige representasjoner

I Niss og Jensen (2002) er et aspekt ved representasjonskompetansen og velge hensiktsmessige representasjoner ut ifra formål. Greeno og Hall (1997) utdyper at elevene bør få muligheten til å velge representasjoner selv, både når de skal arbeide med et matematisk problem eller kommunisere matematikk. Representasjonene blir da konstruert og tilpasset til det aktuelle formålet og elevene lærer å generere fleksible representasjoner til eget bruk. Hvis elever kun løser oppgaver ved å bruke representasjoner som er spesifiserte i oppgaveteksten, mister de muligheten til å lære hvordan man kan vekte ulike representasjoners styrker og svakheter, og hvordan representasjoner kan brukes som et verktøy for forståelsen (Greeno & Hall, 1997, s. 362). Jeg vil derfor i min definisjon av representasjonskompetansen, presisere at elever selv må kunne velge representasjoner, for å få innsikt i viktige aspekter ved matematiske objekter, finne og kommunisere en løsning.

Like viktig som å kunne bruke og velge representasjoner selv, er at representasjonene er hensiktsmessige (Kilpatrick et al., 2001; Niss & Jensen, 2001). I følge Kilpatrick et al. (2001, s. 99-100) kan representasjoners hensiktsmessighet vurderes ut ifra fem egenskaper:

1. Synlighet – hvor synlig den matematiske ideen er gjennom representasjonen.
2. Effektivitet – at representasjonen er effektiv både i bruk og for å kommunisere matematikk.
3. Generalitet – om representasjonen kan brukes på et bredt spekter av matematiske objekter.
4. Klarhet – at representasjonen er entydig og enkel å bruke.
5. Presisjon – hvor nøyaktig representasjonen er.

Symboler vil i temaet likninger være en representasjon som oppfyller alle kravene til hensiktsmessighet. Likevel er det ikke sikkert at symbolene vil oppleves som effektive eller enkle å bruke for elevene, om de ikke er i stand til å tolke hva symbolene betyr. Da vil kanskje en illustrasjon eller en hverdagssituasjon være mer effektiv, selv om disse ikke er like presise eller generelle, og ikke kan brukes på så mange andre matematiske objekter. I lærebøker kan derfor ikke en representasjons hensiktsmessighet sees kun i sammenheng med Kilpatrick et al. (2001) sine kriterier, siden elevene må forstå representasjonene, for at den skal oppfattes som hensiktsmessig (Greeno & Hall, 1997).

2.2.3 Å ha kjennskap til representasjoners forbindelser og egenskaper

Niss og Jensen (2002) beskriver at det er viktig å ha kjennskap til forbindelser mellom representasjoner og deres styrker og svakheter. Det tolker jeg, som at elevene må kunne kjenne igjen et matematisk objekt, når representeres på ulike måter. En slik kjennskap, vil dessuten være viktig, både når elevene skal omdanne og behandle et matematisk objekt. Duval (2004) hevder at å se slike forbindelser er vanskelig og at det derfor er viktig å undervise om representasjoners relasjoner. Spesielt formelle representasjoner blir ofte presentert slik at elevene må se forbindelsen selv (Webb et al., 2008), noe elever ikke alltid gjør. Å undervise om representasjoners forbindelser eksplisitt, kan også gi elevene en mer robust begrepsforståelse (Justnes, 2018), siden de får tilgang til ulike aspekter ved det matematiske objektet. Å vektlegge en bred begrepsforståelse vil være spesielt viktig når elevene skal lære om nye ideer i matematikk, som likninger på 5. trinn.

Å kjenne til representasjoners egenskaper, handler om å kunne bruke den representasjonen som er mest hensiktsmessig, i arbeid med matematikk eller for å kommunisere om matematikk. Å utnytte representasjoners muligheter er også viktig for å forstå de matematiske ideene (Zazkis & Gadowsky, 2001, s. 51), og for å kunne løse matematiske problem, siden de ulike representasjonenes potensialer, kan føre til ulike løsningsmetoder (Enge & Valenta, 2013, s.10). En forutsetning er da at elevene vet hvilke egenskaper de ulike representasjonssystemene har. Samtidig kan det være viktig at elevene reflekterer over representasjonenes egenskaper i samtaler, siden matematiske diskusjoner blir også fremhevet som avgjørende for elevers forståelse og læring i matematikk (Wæge, 2015, s.22). Lærebøker kan gi elevene en slik mulighet, ved å stille spørsmål som retter fokus mot representasjonene, deres egenskaper og sammenhengen mellom representasjoner.

2.2.4 Representasjonskompetanse i denne studien

Siden jeg i denne studien skal undersøke hvordan oppgaver og eksempler i lærebøker ivaretar representasjonskompetansen, må jeg å definere hva representasjonskompetanse er. Jeg har tatt utgangspunkt i Niss og Jensen (2002) sin forståelse av hva representasjonskompetanse er. I tillegg har jeg på bakgrunn av andre forskere, gjengitt tidligere i kapittelet, inkludert at representasjoner er viktig både i kommunikasjon og i tankeprosessen, og at elevene bør få muligheten til å velge representasjoner selv. Jeg vil derfor i min studie betrakte representasjonskompetanse som:

- Å forstå og bruke ulike, hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen, for å kommunisere en matematisk ide eller kommunisere om matematikk
- Å kunne oversette mellom ulike representasjoner som representerer det samme matematiske objektet.
- Å selv kunne velge hensiktsmessige representasjoner som gir hjelp til å få innsikt i viktige aspekter ved et matematiske objekt, finne en løsning på et matematisk problem eller for best mulig å kommunisere en løsning.
- Å kunne reflektere over representasjoners muligheter og begrensninger og sammenhenger mellom ulike representasjoner.

2.3 Likninger

Siden likninger er valgt som tema, for å undersøke ivaretagelse av representasjonskompetansen, er det nødvendig å se nærmere på hva likninger er og forskning knyttet til undervisning av likninger. En definisjon er at en likning er et matematisk utsagn som forteller at to uttrykk er like. Vanligvis er det å løse en likning underforstått med å finne frem til betingelsene for at = gjelder (Bjørnstad et al., 2006 s.

232). For elever på mellomtrinnet, vil det å løse en likning som regel handle om å erstatte en bokstav, gjerne x, med det tallet som gjør at regneuttrykket på hver side av likhetstegnet får samme verdi. I lærebøker blir bokstaver i likninger ofte omtalt som den ukjente, et begrep som kan være misvisende. Likninger som har flere ukjente verdier, som x + 25 = y, vil ikke ha en spesifikk løsning for x og y. Derimot vil alle tallpar hvor y er 25 mer enn x oppfylle betingelsene for at = gjelder. Det kan derfor være mer hensiktsmessig og kalle x og y for variabler (Selvik et al., 2007; Smith, 2011). Jeg velger allikevel i denne undersøkelsen å bruke begrepet ukjent, siden det er dette begrepet lærebøkene i studien selv bruker.

Likningene 4 + x = 13 og x + 25 = y, er lineære likninger, siden de ukjente er av første grad og ikke inneholder ledd av typen x^2, x^3 og lignende. Elever blir som regel introdusert for de lineære likningene først, og det er derfor denne typen likninger vi finner i lærebøker for 5. trinn. Å lære og løse en lineær likning med én ukjent, beskrives som en nøkkelkomponent i skolematematikken, siden matematikken gjennom likninger beveger seg fra å være konkret til å bli mer abstrakt. For de fleste er likninger den første muligheten til å knytte sammen forståelse for aritmetikk og matematikkens symbolikk (Andrews & Sayers 2012 s.476), noe som vil være tilfellet på 5. trinn hvor elevene møter de algebraiske symbolene for første gang.

2.4 Å representere likninger

Når 5. trinnselever skal lære om likninger, vil de møte ulike representasjoner og representasjonssystemer i læreboka. Noen kan være kjente fra tidligere, mens andre vil være nye representasjoner de ikke kjenner til. Jeg vil her beskrive noen representasjoner vi kan forvente at elevene møter når de skal lære om likninger, for å gi forståelse for noen av de begrepene jeg bruker i analysen og når jeg skal diskutere mine funn.

2.4.1 Symboler

For mange er symboler synonymt med matematikk og et symbol vi finner i alle likninger på symbolsk form er likhetstegnet. Representasjonen = vil for elevene være kjent fra aritmetikken. Symbolet beskriver at to uttrykk har lik verdi og er derfor et sentralt begrep i arbeid med likninger. Likevel kan elevene ha en annen oppfatning av symbolet, og overgangen fra aritmetikk til algebra kan føre til vanskeligheter (Kieran, 2006).

Vi kan skille mellom tre oppfatninger av likhetstegnet. Operasjonell, relasjonell-beregnende og relasjonell-strukturell (Stephens et al., 2013). Forskjellen kan illustreres gjennom følgende eksempeloppgave: *3 + 8 = __ + 5*. Dersom elevene har et operasjonelt syn, fant Falkner et al. (1999) at elevene legger sammen det som står på venstre side og skriver 11 på linja. Alternativt legger de sammen alle tallene og skriver 16 eller summerer på følgende måte: *3 + 8 = 11 + 5 = 16*. Felles for alle fremgangsmåtene er en at likhetstegnet blir sett på som en operasjon eller en kommando for å regne ut noe. Elever med et operasjonelt syn kan også hevde at uttrykk som *10 = 10* ikke stemmer, siden det ikke er utført noen handling (Stephens et al., 2013). Årsaken til en operasjonell forståelse kan skyldes at tradisjonell aritmetikk utelukkende har handlet om å finne svar og å utføre beregninger (Carpenter et al., 2005). Har elever et relasjonelt-beregnende syn, forstår de at likhetstegnet representerer en ekvivalens mellom høyre og venstre side og bekrefter ekvivalensen ved å utføre en beregning. I eksempeloppgaven, at det skal stå 6 på den tomme plassen, siden verdien på venstre side er 11 og at man må legge til 6 for at verdien skal bli 11 på høyre side. Ved et relasjonelt-strukturelt syn kan elevene se at tallet som mangler må være 2 lavere enn 8, siden 5 er to høyere enn 3. Det siste synet regnes som mer fleksibelt og tyder på en dypere forståelse (Stephens et al., 2013). Elever med relasjonell forståelse vil ha et bedre grunnlag for å løse tradisjonelle symbolske likninger, som 4x + 10 = 22, enn elever som har en operasjonell forståelse (Knuth et al., 2006). En relasjonell forståelse av likhetstegnet er derfor en forutsetning for å lykkes med å løse likninger (Alibali et al.2007; Knuth et al., 2006). Representasjonene lærebøkene bruker for å representere likninger, bør derfor underbygge en relasjonell forståelse for likhetstegnet.

Et annet symbol de fleste forbinder med likninger og som introduseres på 5. trinn er x. X og andre bokstaver defineres i denne studien som algebraiske symboler og er symboler som står for en størrelse som er ukjent (Selvik et al., 2007). Men selv om likninger inneholder algebraiske symboler, trenger ikke elevene å bruke disse symbolene. Før elever har fått opplæring i likningsløsning, er strategiene gjerne uformelle eller aritmetiske. Det er da mulig å finne verdien til den ukjente, uten å operere på de algebraiske enhetene. I likningen 6 + x = 9 er det mulig å se at x = 3, ved å tenke «*hvilket tall må jeg legge til 6 for å få 9*» og det er ikke behov for å flytte eller endre på den ukjente (Filloy & Rojano, 1989 s. 19). Likninger med ukjent på begge sider, for eksempel 3x + 1 = 11 – x krever derimot at man opererer på de algebraiske enhetene (Kieran, 1992 gjengitt Andrews & Sayers, 2012, s. 477). Løsningsmetodene er da algebraiske eller formelle, og forutsetter at elevene har en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Filloy & Rojano, 1989 s. 19). Hvilken type likninger elevene møter i lærebøkene, kan derfor påvirke om elevene er nødt til å bruke de algebraiske symbolene eller om likningen kan løses ved aritmetiske strategier. At elever på 5. trinn, ifølge kompetansemålet i læreplanen, skal løse likninger ved å bruke logiske resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2020 s. 9), kan også bety at lærebøkene vektlegger uformelle metoder.

2.4.2 Naturlig språk

En annen representasjon som blir brukt for å representere likninger er naturlig språk. I lærebøker gjennom regnefortellinger eller tekstoppgaver, hvor teksten beskriver en hverdagssituasjon. Ved noen tilfeller kan symbolet x stå eksplisitt i regnefortellingen, men oftest er den ukjente verdien representert ved at en tallverdi i teksten mangler, for at betingelsene for = skal være oppfylt. I følge Kieran (2007, s.720) har det å løse et matematisk problem representert i tekstform, tradisjonelt involvert to faser. Først å sette opp en likning som representerer de forhold som er beskrevet i teksten, for deretter å løse likningen. Et aspekt i representasjonskompetansen er nettopp at elevene skal kunne oversette mellom representasjoner, men å omdanne språk til symboler krever flere ferdigheter av elevene. De må både identifisere relevant informasjon, evne å finne korresponderende algebraiske uttrykk og konstruere et forhold mellom ordene og symbolene (Pawley et al., 2005 s. 77). Elevene må altså selv identifisere hva i teksten som representerer x og hvor = hører til i denne sammenhengen. Duval (2004) deler en slik omdanning inn i tre faser. I første fase blir elevene presentert for et hverdagsproblem gjennom en regnefortelling. I andre fase må elevene tolke teksten og identifisere hvilken informasjonen som er relevant for å løse problemet. Etter tolkningen, må relevant informasjon omdannes til et annet representasjonssystem, som regel symboler. Elevene må altså finne et symbolsk matematisk uttrykk, som representerer den samme situasjonen eller det samme matematiske objektet som utgangspunktet. Til slutt må elevene løse oppgaven og holder seg da som regel innenfor det samme representasjonssystemet som de omdannet til. Underveis i denne prosessen kan elevene ha behov for noen hjelperepresentasjoner, for eksempel ved å tegne en modell eller ved å sette opp en tabell for å systematisere informasjon. Å bruke hjelperepresentasjoner kan, i noen tilfeller, føre til at elevene gjør en ekstra omdanning (Duval, 2004, s. 14 - 15) Selv om det å representere matematiske problem, ved å beskrive hverdagssituasjoner, er ment for å gjøre matematikken enklere og mer virkelighetsnær, er tekstoppgaver altså kognitivt krevende. På den andre siden kan tekstoppgaver være en egnet representasjon, hvis elevene skal trene på å omdanne fra et representasjonssystem til et annet.

2.4.3 Illustrasjoner

Lærebøker i matematikk inneholder som regel bilder eller illustrasjoner og mange husker kanskje bilde av ei skålvekt i kapittelet om likninger. Vekta er ment for å illustrere likevektsprinsippet i likninger og underbygger en relasjonell forståelse av likhetstegnet, men kan i tillegg representere en likning. Likhetstegnet er da representert ved at vekta er i balanse, mens x gjerne er representert ved en gjenstand som står på vekta, for eksempel et lodd. Det er grunn til å tro at elever på 5. trinn også vil møte liknende illustrasjoner i sine lærebøker. I forskningslitteraturen omtales skålvekta og lignende billedlige representasjoner som balansemodeller.

Blant forskere er det på et generelt nivå enighet om at modeller kan tillegge nye begreper og operasjoner mening (Filloy & Rojano, 1989). Når det gjelder balansemodellen spesielt, taler flere forskere for å bruke denne modellen. Vlassis (2002) konkluderte i sin undersøkelse med at modellen var til hjelp i innlæring av de formelle metodene for å utføre den samme operasjonen på begge sider av likhetstegnet, siden den gav elevene et operativt mentalt bilde. Også Filloy og Sutherland (1996) gjorde liknende funn, og poengterer at når elevene gjenkjente den fysiske balansen og greide å oversette fra modellen til passende språk og symbolsk notasjon, indikerer det at bruken av modellen var effektiv. Warren og Cooper (2005) hevder at modellen spesielt hjalp elevene med å løse problemer med ukjente på begge sider av likhetstegnet. Et siste viktig funn er at balansemodellen flyttet elevenes oppmerksomhet bort fra = som en indikasjon på at nå kommer et svar, til å se på en likning som en enhet og at en av modellens styrker er at den viser både høyre og venstre siden i likninger og ikke er retningsbestemt på noen måte (Pirie & Martin, 1997). Motstandere av balansemodellen hevder på sin side at modellen ikke er en god referanse til elever i dag, siden skålvekta er utdatert, at elevene trenger ikke å vektlegge den ukjente verdien og at selve modellen kan gi grobunn for feil, som det å flytte negative verdier (Vlassis, 2002).

Siden likninger er et nytt tema på 5. trinn, kan det bety at balansemodeller kan være en hensiktsmessig representasjon for å forstå viktige prinsipper ved likninger. Modeller involverer dessuten i mange tilfeller en transformasjon fra et konkret til et mer abstrakt nivå (Warren & Cooper, 2005), siden elevene må omdanne illustrasjonen til symboler. Modellen kan i så måte også bidra til å gjøre overgangen til symboler mer forståelig for elevene.

2.4.4 Representasjonssystemer i denne studien

Jeg har i denne studien valgt å bruke Duval (2006) sine representasjonssystemer, men har lagd noen underkategorier innenfor representasjonssystemene, for mer presist å kunne beskrive de representasjonene lærebøkene bruker i temaet likninger. Underkategoriene er utviklet på bakgrunn av studier om representasjoner, som er typiske i likninger og andre forskeres inndeling i representasjonssystemer. Jeg vil derfor videre i denne undersøkelsen benytte følgende inndeling og begreper når jeg omtaler representasjoner.

Naturlig språk	**symboler**	**Illustrasjoner**	**Tabeller, diagrammer og grafer**
Skriftlig språk som beskriver en hverdagssituasjon, Skriftlig språk som beskriver matematikk, Muntlig språk	Numeriske symboler Algebraiske symboler	Tegninger og bilder som beskriver en hverdagssituasjon Modeller • Balansemodeller • Balansemodeller som beskriver en hverdagssituasjon Figurer	Tabeller

Tabell 2.2 Representasjonssystemer og representasjoner i denne studien.

Naturlig språk er i min inndeling, i likhet med Duval (2006), delt inn i muntlig og skriftlig språk. Jeg velger å dele det skriftlige språket videre i språk som beskriver en hverdagssituasjon, eller om språket beskriver matematikk. Dette fordi matematisk språk og en beskrivelse av en kjent situasjon, kan oppleves som to ulike representasjoner for elevene. Muntlig språk vil ikke være en representasjon vi finner i lærebøkene, men en potensiell målrepresentasjon eller hjelperepresentasjon i tankeprosessen. I representasjonssystemet symboler skiller jeg mellom numeriske symboler og algebraiske symboler, siden jeg antar at et uttrykk som inneholder bokstaver for elevene fremstår som noe annet enn et uttrykk som kun består av tall. Spesielt siden likninger kan være elevenes første møte med algebraiske symboler i matematikk. Illustrasjoner har jeg valgt å dele inn i tegninger og bilder som beskriver en hverdagssituasjon, modeller og figurer. I tillegg har jeg spesifisert balansemodeller som en egen representasjon, siden balansemodeller er en representasjon lærebøkene trolig bruker. Balansemodellene, har jeg også delt med tanke på om de formidler en hverdagssituasjon eller ikke. Når jeg spesifiserer at noen representasjoner beskriver en hverdagssituasjon, er det for å inkludere det NTCM (2014) omtaler som kontekstuelle representasjoner, uten å kalle det et eget representasjonssystem. Jeg antar at tegninger, modeller og språk som formidler en hverdagssituasjon trolig vil oppfattes som veldig ulike representasjoner for elevene, selv om alle beskriver en situasjon fra elevenes hverdag. Jeg velger ikke å inkludere doble representasjoner som et eget system, men heller beskrive hvilke to representasjonssystemer som opererer sammen, dersom det er behov for det.

I analysen har jeg brukt min tilpassing av Duval (2006) som rammeverk, gjengitt i tabell 2.2, for å beskrive representasjoner. For å undersøke om elevene må oversette mellom representasjonssystemer, har jeg brukt begreper fra samme rammeverk. Hvordan hvert aspekt ved representasjonskompetansen er undersøkt, blir beskrevet mer inngående i kapittel 3.

3 Metode

For å kunne besvare forskningsspørsmålet, har jeg utviklet et analyseskjema som undersøker hvert aspekt av representasjonskompetansen. Analysen har vært både induktiv og deduktiv, avhengig av hvilken del av representasjonskompetansen jeg har undersøkt. Jeg vil videre beskrive metode, utvalg og hvordan jeg utarbeidet analyseskjemaet og koder. Avslutningsvis har jeg vurdert studiens troverdighet, samt gjort rede for etiske vurderinger.

3.1 Forskningsmetode

En gjennomgang av forskning på lærebøker viser overvekt av innholdsanalysestudier som undersøker hvordan et bestemt matematisk innhold, tema eller aspekt fremstilles eller behandles (Fan et al., 2013). Ifølge Rezat og Strässer (2017) kan forskning som er bygger på innholdsanalyser svare på spørsmål om innhold i lærebøker. Da mitt forskningsspørsmål handlet om hvordan representasjonskompetanse ble ivaretatt i lærebøker i matematikk, havnet også min undersøkelse i denne kategorien og jeg har valgt å bruke metoden innholdsanalyse.

Begrepet innholdsanalyse blir i litteraturen brukt ulikt. Enkelt forklart, definerer innholdsanalyse en forskers prosess for å oppsummere og beskrive hva innholdet i et bestemt datamateriale betyr (Cohen et al., 2018, s. 674). Krippendorff (2013, s. 24) definerer innholdsanalyse som *"a research technique for making replicable and valid inferences from text (or other meaningful matter) to the contexts of their use*". Videre omtaler Krippendorff (2013) innholdsanalysen som et verktøy som bruker spesifiserte prosedyrer. En liknende definisjon beskriver innholdsanalyse som en metode som gjennom nøyaktig, detaljert og systematisk analyse og fortolkning av et bestemt datamateriale, forsøker å identifisere mønstre, tema, predisposisjoner og meninger (Berg & Lune, 2012, s. 349 gjengitt i Fauskanger & Mosvold, 2015). Innholdsanalyse ble først utviklet innenfor den kvantitative tradisjonen, men har utviklet seg til også å bli anerkjent som en kvalitativ tilnærming (Fauskanger & Mosvold, 2015). Siden den kvalitative forskningsmetoden passer for å analysere skriftlige dokumenter (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 163), vil denne undersøkelsen være en kvalitativ tilnærming til innholdsanalysen.

Hsieh og Shannon (2005) skiller mellom tre ulike tilnærminger til innholdsanalysen. Konvensjonell innholdsanalyse blir brukt når analysens utgangspunkt er et skriftlig datamateriale som helhet, og studiens mål er å beskrive et fenomen. Denne tilnærmingen er spesielt hensiktsmessig i de tilfellene hvor eksisterende teori er begrenset, siden analysen av datamaterialet kan føre til ny forståelse. Summativ innholdsanalyse starter med å identifisere og undersøke hvor ofte et ord eller innhold forekommer i en tekst, for å forstå i hvilken kontekst ordet eller innholdet blir brukt. Tilnærmingen ville vært kvantitativ om den stoppet der, men er kvalitativ siden den søker den underliggende betydningen av ordene eller innholdet. Directed content analysis, på norsk kalt teoridrevet innholdsanalyse (Fauskanger & Mosvold, 2015) tar utgangspunkt i eksisterende teori eller tidligere forskning og har som mål å validere eller videreutvikle teoretiske rammeverk som allerede eksisterer (Hsieh & Shannon, 2005). Fauskanger og Mosvold (2005) poengterer at forskjellen mellom de tre tilnærmingene kan knyttes til hvordan koder og kategorier blir utviklet. I konvensjonell innholdsanalyse blir koder utviklet gjennom gjentatte gjennomlesninger og senere gruppert i kategorier. Kategorier blir med andre ord utviklet gjennom analyseprosessen. I summativ innholdsanalyse er fokuset er på ord og ordenes latente mening, og nøkkelord som leder til en kontekstuell mening, blir identifisert både før og under analysen. Den teoretiske tilnærmingen definerer analytiske kategorier før analysen. Nye koder og kategorier kan imidlertid utvikles underveis, som videre kan føre til at allerede eksisterende koder og kategorier blir endret (Fauskanger & Mosvold, 2015, s. 83). Elo og Kyngäs (2008) skiller mellom induktiv og deduktiv tilnærming. Ifølge deres beskrivelse vil induktiv innholdsanalyse være sammenfallende med den konvensjonelle innholdsanalysen, mens den deduktive tilnærmingen er lik den teoridrevne. I denne studien vil deler av analysen være teoridrevet, siden koder og kategorier ble definerte før analysen. Metoden er derfor deduktiv. Andre deler vil ha en mer konvensjonell eller induktiv tilnærming, siden kodene blir utviklet fra datamaterialet og senere samlet i kategorier. Hvilke deler av analysen som er induktive og hvilke som er deduktive, vil bli beskrevet nærmere senere i kapittelet.

Cohen et al. (2018, s. 676 – 680) beskriver at en kvalitativ innholdsanalyse kan gjennomføres som en prosess i 11 steg. Først må forskeren definere et klart forskningsspørsmål som analysen kan svare på (1). Deretter må populasjonene datamaterialet skal hentes fra defineres (2), før forskeren gjør et utvalg i populasjonen (3). Videre må det avklares hvordan datamaterialet blir innhentet eller generert (4) og hva i utvalget som skal danne grunnlag for analysen (5). Steg 1 - 5 skjer før forskeren kan begynne å arbeide med selve datamaterialet. I arbeid med datamaterialet må en først bestemme eller utvikle koder (6) og konstruere kategorier (7) for bruk i analysen. Deretter utføre kodingen og kategoriseringen av datamaterialet (8). Når kodingen er ferdig kan forskeren utføre selve dataanalysen (9), før han kan oppsummere (10) og gjøre antakelser (11). Siden Cohen et al. (2018) beskriver at koder og kategorier skal utarbeides før analysen, sammenfaller stegene med det Elo og Kyngäs (2008) beskriver deduktiv innholdsanalyse. Min innholdsanalyse vil i stor grad følge de 11 stegene Cohen et al. (2018) beskriver, med unntak av de delene av analysen som er induktiv og hvor kategorier ble utviklet etter at datamaterialet var kodet.

3.2 Utvalg

På bakgrunn av forskningsspørsmålet måtte jeg definere den aktuelle populasjon data kunne samles inn fra. Begrepet populasjon betegner ikke kun mennesker, men kan også referere til tekster (Cohen et al., 2018, s. 676), i dette tilfellet læreverk i matematikk. Siden min studie kun tar for seg 5. trinn og temaet likninger, var populasjonen allerede innskrenket til likningskapitlene i norske læreverk for 5. trinn. Å kun undersøke ett trinn gir et begrenset datamaterialet, sammenlignet med om analysen hadde tatt for seg flere trinn. Jeg kunne da fått tilgang til flere representasjoner og undersøkt om representasjonene endrer seg etter hvert som elevene blir eldre. Når jeg allikevel valgte å begrense forskningsspørsmålet til 5.trinn, handlet det om mitt ønske om at studien skal være aktuell i tiden fremover. Jeg derfor måtte undersøke lærebøker utgitt etter innføringen av ny læreplan. Siden Fagfornyelsen ble innført i 2020, var det ikke utgitt nye lærebøker for alle trinn. For 5. trinn var det imidlertid utgitt nye lærebøker fra flere forlag.

3.2.1 Avgrensing av datamaterialet

Selv om populasjonen allerede var begrenset til trinn og tema måtte jeg gjøre ytterligere utvalg, som å velge ut hvilke lærebøker som skulle være datagrunnlag for undersøkelsen. Lærebok kan defineres som *«den tradisjonelle fysiske klassetrinns-spesifikk boken som brukes til undervisning og læring av matematikk i skolen»* (Kongelf, 2019, s. 21) Jeg bruker her både lærebok og grunnbok om det Kongelf (2019) definerer som lærebok. For å beskrive et sett med ulike ressurser et forlag tilbyr, vil jeg bruke begrepet læreverk. Et læreverk består derfor både av grunnbøker for ulike trinn og andre ressurser som oppgavebøker, digitale ressurser og lærerveiledninger.

Jeg startet med å velge læreverk fra de tre største forlagene, basert på markedsandel i 2018 (BOK365, 2019), siden markedsandelen gir en indikasjon på hvilke lærebøker skolene i Norge bruker. Matematikk fra Cappelen Damm, Matemagisk fra Aschehoug og Multi fra Gyldendal. Etter en kartlegging av hvilke ressurser læreverkene gav ut, valgte jeg å kun ta utgangspunkt grunnboka, siden grunnboka var en felles komponent for alle forlagene. Undersøkelser av øvrige komponenter, viste dessuten at disse ikke brukte andre representasjoner enn grunnboka. En annen årsak var at egen erfaring tilsier at grunnboka blir prioritert når skoler skal kjøpe læreverk og at det er mer tilfeldig hvilke andre ressurser elevene har til rådighet. Mitt datagrunnlag ble derfor Matematikk 5 (Gulbrandsen et al., 2020a), Matemagisk 5B (Raen et al., 2020) og Multi 5B (Alseth et al., 2021a), siden disse grunnbøkene inneholdt kapittelet om likninger. Videre i teksten vil jeg bruke Matematikk, Matemagisk eller Multi når jeg refererer til de ulike lærebøkene. I tillegg har jeg i deler av analysen sett på lærerveiledningene for å få mer informasjon om innholdet i grunnbøkene, som læreverkets tanker rundt representasjoner og tanken bak de ulike oppgavetypene i læreboka. Datamaterialet ble innhentet ved å skaffe meg de aktuelle lærebøkene og lærerveiledningene, enten ved å kjøpe lærebøkene og lærerveiledningene eller å få digital tilgang fra forlagene.

Når utvalget var avgrenset til kapittelet om likninger i tre grunnbøker og jeg hadde tilgang på disse, måtte jeg velge hva jeg skulle analysere. Felles for alle lærebøkene var at likninger inngikk i et kapittel som omhandlet flere deltema, at det ble presentert oppgaver, forklaringer og eksempler, og at kapitlene inneholdt ulike oppgavetyper. For at analysen skulle bli så lik som mulig, valgte jeg kun å analysere den delen av kapittelet som omhandlet likninger. Siden to av bøkene inkluderte ekvivalens eller likhet, som en del av likninger, inkluderte jeg også ekvivalens i analysen av den siste læreboka, selv om det var plassert i et eget delkapittel. Jeg har kun analysert oppgaver i delkapittelet om likninger og ikke oppsummerende oppgaver, temaoppgaver eller liknende i slutten av kapittelet. Årsaken var at representasjonene som ble brukt i de avsluttende oppgavene, var de samme som ble benyttet tidligere i kapittelet. Å analysere flere oppgaver ville derfor ikke tilført undersøkelsen ny informasjon.

3.2.2 Analyseenheter

Cohen et al. (2018) definerer en analyseenhet som alt fra et ord til et avsnitt, en hel tekst eller et tema. I denne undersøkelsen er en analyseenhet definert som enten en oppgave eller et eksempel. Med oppgave mener jeg alt i det utvalgte datamaterialet som stiller et spørsmål eller som signaliserer at noe skal gjøres, og som enten er markert med et oppgavenummer eller plassert i egen rute. Deloppgaver er definert som egen analyseenhet i de tilfellene hvor deloppgavene behandler ulike aspekter ved likninger, siden det i deloppgaver ofte kun er tallene som varierer.

Alle læreverkene hadde det jeg valgte å kalle nummererte oppgaver, i tillegg til andre oppgavetyper. Matematikk har oppgaver kalt *samtale* og *utforsk sammen*. Samtalerutene er delt med en horisontal strek, hvor det over streken er et problem elevene skal løse gjennom samtale og aktuelle løsningsforslag, eller metoder som skal drøftes sammen med elevene under streken. *Utforsk sammen* skal løses i par eller små grupper, gjennom å reflektere og diskutere fremgangsmåter og strategier, før løsningsmetoder skal presenteres og argumenteres for i plenum (Gulbrandsen et al., 2020b). I Matemagisk har samtaleoppgavene betegnelsen *snakke matte*. *Snakke matte* er oppgaver elevene kan løse uten å måtte skrive, og lærerveiledningen anbefaler at elevene først diskuterer i par før en felles, matematisk samtale. Det blir påpekt at læreren spiller en viktig rolle i samtalene, ved å stille spørsmål som får frem hvordan elevene tenker (Aschehoug u.å). Multi har ikke samtaleoppgaver, men oppgaver merket med *utforsking*. Disse oppgavene er ment som en introduksjon til nytt tema og elevene skal arbeide i par eller grupper, før en felles oppsummering. Det blir i lærerveiledningen understreket at oppsummeringene er en anledning for læreren å vise sammenheng mellom ulike matematiske begreper (Alseth et al., 2021b). Selv om de ulike oppgavetypene defineres ulikt, ble alle oppgaver kodet og analysert på samme måte.

Et eksempel har jeg definert som forklaringer av matematiske objekter og begreper eller forslag til hvordan oppgaver kan løses. I Matemagisk og Multi blir henholdsvis begrepene *eksempel* og *forklaring* brukt om det jeg har definert som eksempler. I Matematikk vil det som står under streken i en samtalerute falle inn under min definisjon. I analysen ble oppgaven over streken analysert som en oppgave, siden den stiller et spørsmål, mens hele samtaleruta ble analysert som et eksempel, siden det viser løsninger på den overstående oppgaven. Å inkludere oppgaven i eksempelet, medfører noen representasjoner blir medregnet to ganger. Samtidig vil eksempelet mangle startrepresentasjonen, om oppgaven ikke blir inkludert og derfor ikke være fullstendig.

3.3 Utvikling av analyseskjema

For å gjøre analysen transparent, er det viktig å ha en god analysemetode. Jeg utarbeidet derfor et analyseskjema for hele undersøkelsen, inspirert av et skjema Charalambous et al. (2010, s. 122 - 123) brukte når de sammenlignet hvordan tre lærebøker fra henholdsvis Kypros, Irland og Taiwan formidlet addisjon og subtraksjon av brøker. Analyseskjema består av en horisontal og en vertikal del. Den horisontale analysen har som formål å studere læreboka i bredden og er mer overordnet, siden den presenterer læreboka som en helhet ved å se på bakgrunn og struktur. Med bakgrunn menes blant annet forlag, forfattere, antall sider og utgivelsesår. I struktur inngår definisjon av og antall oppgaveenheter, hvilke tema som inngår i læreboka og hvilken rekkefølge temaene er satt i. Den vertikale analysen har Charalambous et al. (2010) forklart som et dypdykk i et eller flere valgte tema og analyseenheter. Den analyserer altså det pedagogiske og faglige innholdet i lærebøkene, med mål om å gi detaljert informasjon om det matematiske innholdet. Denne analysen deles igjen inn i tre deler; *formidlet til elevene, kreves av elevene* og *sammenhenger*. *Formidlet til elevene* har som mål å analysere hva læreboka formidler, som læringsmål, eksempler, illustrasjoner, regler eller holdninger. Med *kreves av elevene* menes hvilke krav oppgavene stiller til elevene. I denne delen av analysen vil man ha behov for et rammeverk som passer til det undersøkelsen skal besvare. Den siste delen, *sammenhenger*, analyserer eksplisitte sammenhenger mellom det matematiske temaet, læreboka, annet arbeid i klasserommet og til situasjoner utenfor skolen (Charalambous et al., 2010, s. 122). Siden mitt forskningsspørsmål omhandler representasjoner og hvordan representasjons-kompetansen blir ivaretatt, var jeg nødt til å gjøre noen tilpasninger. Jeg vil videre beskrive hvordan jeg utviklet mitt analyseskjema.

3.3.1 Horisontal analyse

Den horisontale analysen er ment som bakgrunnsinformasjon om lærebøkene i studien. Jeg har derfor, i likhet med Charalambous et al. (2010), undersøkt lærebøkenes bakgrunnsinformasjon for å sette kapittelet om likninger inn i en større sammenheng og i tillegg undersøke hva lærerveiledningene sier om representasjoner. I analysen av generell struktur, avgrenset jeg analysen til kapittelet om likninger, da oppgaver om likninger eller algebra er samlet i et kapittel og fordi likninger ikke direkte bygger på kunnskap fra tidligere kapittel. Oppbygging av den horisontale analysen er vist i tabell 3.1.

HORISONTAL ANALYSE	
Bakgrunnsinformasjon	**Generell struktur – kapittel om likninger**
Tittel Forfattere Utgiver og utgivelsesår Sidetall hele boka/kapittel om likninger Andre ressurser Hva lærerveiledningen sier om representasjoner?	Hvor i boka er kapittel om likninger? Hva elevene har lært i forkant? Kapittelets oppbygning Antall oppgaver, deloppgaver og eksempler i kapittelet Fordeling av oppgaver (tema og oppgavetype)

Tabell 3.1 Analyseskjema – horisontal analyse

3.3.2 Vertikal analyse

I den vertikale analysen har jeg brukt Charalambous et al. (2010) sin inndeling som utgangspunkt i hva som kommuniseres til elevene og hva som kreves av elevene. Dette fordi læreboka både presenterer innhold og representasjoner for elevene samtidig som den krever at elevene bruker det innholdet som er kommunisert. Sammenhenger valgte jeg å ta ut, siden det ikke vil bidra til å besvare mitt forskningsspørsmål. Jeg valgte heller å inkludere min definisjon av representasjonskompetansen, som bygger på Niss og Jensen (2002), for å tydeliggjøre hvilket aspekt jeg undersøkte i delanalysene. I tillegg måtte jeg finne et rammeverk for å beskrive representasjoner. Jeg tilpasset derfor Duval (2006) sine semiotiske representasjonssystemer og brukte begreper for omdanning og behandling fra samme rammeverk, for å kunne definere kategorier og koder forkant av analysen.

For å kunne undersøke hvordan hvert aspektene ved representasjonskompetansen ble ivaretatt, besto min vertikale analyse av 5 delanalyser, som vist i tabell 3.2. Det første aspektet som handler om at elevene skal forstå og bruke ulike representasjoner, undersøkte både hvilke representasjoner læreboka kommuniserer til elevene og hvilke representasjoner læreboka krever at elevene må bruke. De øvrige aspektene er behandlet i hver sin delanalyse.

VERTIKAL ANALYSE				
Kommunisert til elever	**Kreves av elevene**			
Å forstå og bruke ulike hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen og for å kommunisere en matematisk ide eller kommunisere om matematikk		Å kunne oversette mellom ulike representasjoner som representerer det samme matematiske objektet.	Å selv kunne velge hensiktsmessige representasjoner som gir hjelp til å få innsikt i viktige aspekter ved et matematiske objekt, finne en løsning på et matematisk problem eller for best mulig å kommunisere en løsning	Å kunne reflektere over representasjoners muligheter og begrensninger og sammenhenger mellom ulike representasjoner.
DELANALYSE 1	**DELANALYSE 2**	**DELANALYSE 3**	**DELANALYSE 4**	**DELANALYSE 5**
1. Hvilket matematisk innhold omhandler oppgaven eller eksempelet? **2. Hvilke representasjoner blir brukt i oppgaven eller eksempelet?**	**Hvilke representasjoner kan vi forvente at elevene bruker for å løse oppgaven?**	**Krever oppgaven at elevene må omdanne eller behandle startrepresentasjonen?**	**Kan elevene selv velge representasjon når de skal løse oppgaven?**	**Gir oppgaven mulighet for refleksjon omkring representasjonene?**
Koder/kategorier	**Koder/kategorier**	**Koder/kategorier**	**Koder/kategorier**	**Koder/kategorier**
Kode matematisk innhold og startrepresentasjon 1. koder utvikles fra datamaterialet 2. Koder og kategorier utviklet fra Duval (2006)	Kode målrepresentasjon Koder og kategorier utviklet fra Duval (2006)	Kode om start- og målrepresentasjon er lik eller ulik. Kategorier utviklet fra begreper hentet hos Duval (2006)	Finne ord/setninger i datamaterialet som indikerer hvilket representasjonssystem elevene skal bruke. Koder utvikles fra datamaterialet	identifisere ord/ setninger i oppgavene som oppfordrer til refleksjon Koder utvikles fra datamaterialet

Tabell 3.2 Analyseskjema - vertikal analyse

Som tabell 3.2 viser, stilte jeg i hver delanalyse spørsmål til datamaterialet. Dette er de samme spørsmålene som jeg tenker lærere kan stille seg om de ønsker å vurdere om en oppgave eller undervisningsopplegg ivaretar representasjonskompetansen. I kapittel 3.4 vil jeg beskrive mer detaljert hvordan delanalysene ble utført og hvordan spørsmålene i analyseskjemaet bidrar til å besvare forskningsspørsmålet. Som tabellen viser, krevde delanalysene mange ulike koder og kategorier. De blir derfor gjengitt i tabeller, med eksempel på oppgaver som fikk den aktuelle koden.

3.4 Analyseprosessen

Etter å ha utarbeidet koder for de deduktive delanalysene, ble datamaterialet kodet suksessivt og simulant. Suksessivt i den forstand at jeg tok for meg en lærebok om gangen og kodet en og en oppgave og simultant fordi jeg så på alle delene i den vertikale analysen samtidig. Underveis i kodingen oppdaget jeg ved noen tilfeller behov for både flere kategorier og nye koder, noe som ikke er uvanlig når tilnærmingen til innholdsanalysen er teoretisk (Fauskanger & Mosvold, 2015, s. 83). I denne studien fordi de forhåndsdefinerte kodene ikke var presise nok. Hvilke kategorier og koder jeg brukte eller utarbeidet gjennom analysen vil bli beskrevet og eksemplifisert i de videre delkapitlene.

En utfordring i kodeprosessen var å bruke kodene likt, både fordi jeg måtte gjøre avklaringer underveis, og fordi noen oppgaver kunne tolkes på flere måter. Hver gang jeg endret en kode, eller hvordan jeg definerte en kode, måtte jeg gå igjennom hele datamaterialet på nytt for å dobbeltsjekke om jeg måtte endre hvordan jeg hadde kodet tidligere enheter. Endringer i en delanalyse kunne også påvirke andre deler, ved at endring i målrepresentasjon kunne endre om oppgaven krevde omdanning eller behandling. Jeg oppdaget også nye ting ved oppgavene når jeg kodet på nytt. Datamaterialet er derfor analysert og omkodet mange ganger for å få bruken av kodene så lik som mulig.

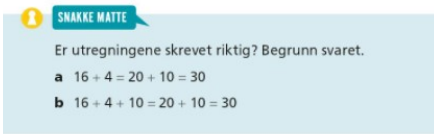
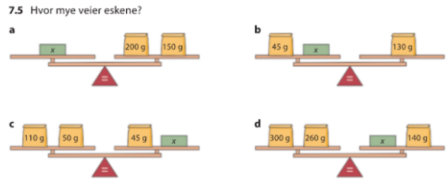
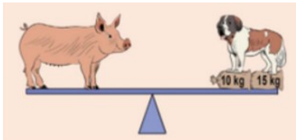
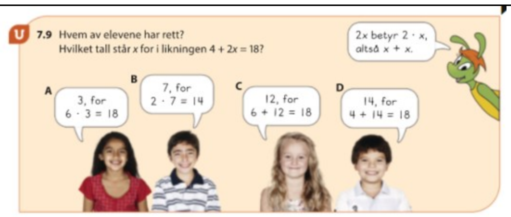
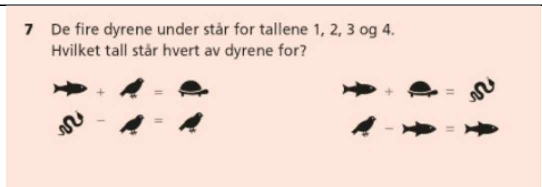
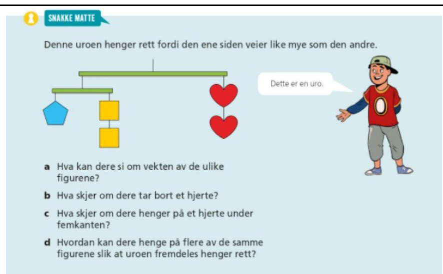
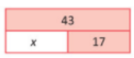
Da alle analyseenheter var kodet og kategorier var definerte i de induktive delanalysene, utførte jeg analysen. Først den horisontale analysen, hvor jeg beskrev de tre lærebøkenes bakgrunn og struktur. Deretter tok jeg for meg hver del i den vertikale analysen og undersøkte hvilke funn som gikk igjen. Den horisontale analysene og funn i den vertikale analysen er sammenfattet i analysekapittelet.

3.4.1 Delanalyse 1

For å kunne undersøke om læreboka kommuniserer representasjoner som gjør elevene i stand til å bruke og forstå ulike representasjoner, måtte jeg først og fremst undersøke hvilke representasjoner oppgaver og eksempler kommuniserte. Årsaken til det, er at elevene må bli presentert for noen representasjoner, hvis de senere skal kunne bruke disse selv. Dette er spesielt viktig siden likninger et nytt tema og at elevene ikke nødvendigvis kjenner til representasjoner som er egnet for å arbeide med likninger.

I tillegg undersøkte jeg hvilket matematisk innhold læreboka formidlet, altså hva elevene skulle lære. Det matematiske innholdet vil ikke direkte si noe om representasjonskompetansen blir ivaretatt, men er likevel viktig for å kunne avgjøre om en representasjon er hensiktsmessig. I en oppgave som handler om ekvivalens, er det eksempelvis viktig at representasjonen underbygger en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Representasjonene må med andre ord formidle viktige aspekter ved det matematiske objektet. I analysen vil jeg i hovedsak beskrive hvilke representasjoner og representasjonssystemer læreboka har kommunisert og kun i noe grad kommentere hvilket matematisk innhold som blir representert. I diskusjonskapittelet vil jeg derimot drøfte om representasjonene er hensiktsmessige for å arbeide med likninger.

I analysen av det matematisk innholdet ble kodene utviklet fra datamaterialet og samlet i kategorier. Denne delen av delanalyse 1 er derfor induktiv. Kodene som ble brukt, er beskrevet og eksemplifisert i tabell 3.3.

Kategori	**Kode**	**Beskrivelse**	**Eksempel fra datamaterialet**
Ekvivalens	*Ekvivalens*	Avgjøre om regneuttrykk på begge sider av likhetstegnet har lik verdi	
Løse likning	*Løse likning – en riktig løsning*	Finne verdien til en ukjent i en likning, hvor den ukjente kun kan ha en bestemt verdi.	
	Løse likning – flere løsninger	Finne verdien til ukjente i en likning, hvor de ukjente kan ha flere verdier.	12 Hva kan grisen og hunden veie? Skriv minst fem mulige løsninger. 
	Løse likning – velge riktig løsning	Velge hvilken av oppgitte løsninger som gir riktig svar på likning.	
	Løse likning – koble kjent og ukjent verdi	Når både kjente og ukjente verdier er gitt og man skal finne ut hvilke figurer som representerer hvilken verdi.	
Behandle likning	*Behandle likning*	Å legge til eller trekke fra verdier på begge sider av likhetstegnet og fremdeles opprettholde ekvivalens	
Omdanne situasjon til likning	*Omdanne situasjon til likning – lage likning*	Lage en symbolsk likning som passer til en beskrevet situasjon.	3.18 Plex sparer til en ny pussemaskin som koster 3200 kr. Hun mangler 500 kr for å ha råd til å kjøpe den. Hvor mange kroner har Plex?
	Omdanne situasjon til likning – velge likning	Velge hvilken av oppgitte likninger kan representere en beskrevet situasjon.	3.13 Skriv likningen som passer. Radius har en hylle med x bokser kattemat. Etter å ha spist 5 bokser er det 13 bokser igjen på hylla. Hvor mange bokser (x) var det på hylla? $x + 5 = 13$ $x - 5 = 13$ $13 - x = 5$ 
Omdanne likning til situasjon	*Omdanne likning til situasjon*	Beskrive en situasjon som kan representere en symbolsk likning.	3.19 Lag en tekstoppgave som passer til modellen og løs den som likning. 

Representere verdier	*Representere verdier*	Å representere en verdi ved å bruke en annen representasjon enn tallsymboler.	
Lage likning	*Lage likning*	Lage en likning uten å ta utgangspunkt i en situasjon fra hverdagslivet.	

Tabell 3.3 Koder for matematisk innhold. Eksempler hentet fra Alseth et al., 2021a, Gulbrandsen et al., 2020a og Raen et al., 2020.

I tillegg måtte jeg gjøre noen avklaringer. Oppgaver som omfattet to ulike aspekter ved likninger, ble kodet med to koder. Et eksempel på en slik oppgave er denne:

Løs oppgavene som likning. Tegn modell hvis du ønsker.

3.20 Tanja leser en bok som har 99 sider. Hun leser *x* sider hver dag i 9 dager. Da er hun ferdig med boka. Hvor mange sider leser Tanja hver dag?

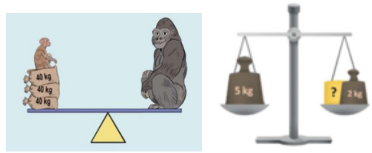
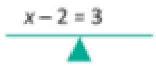
Figur 3.1 Oppgave med to koder for matematisk innhold (Gulbrandsen et al., 2020a, s. 91)

Oppgave i figur 3.1 fikk koden *omdanne situasjon til likning*, siden tekstoppgaven skal omdannes til en likning. Elevene skal deretter løse likningen og siden likninga kun har et riktig svar er oppgaven også kodet med *løse likning – en riktig løsning*.

Ekvivalens var en kode jeg måtte avgrense. Siden ekvivalens eller likevektsprinsippet er en forutsetning i alle likninger, kunne de fleste oppgavene fått denne koden. Koden ble derfor avgrenset til kun å gjelde oppgaver som eksplisitt etterspurte balanse, eller om uttrykkene på hver side av likhetstegnet hadde samme verdi.

For å beskrive hvilke representasjoner læreboka kommuniserte, brukte jeg Duval (2006) representasjonssystemer som kategorier, noe som gjør denne delen av delanalysen 1 deduktiv. På forhånd hadde jeg tilpasset kodene innenfor hvert representasjonssystem så de passet til min undersøkelse, beskrevet i kapittel 2.4.4. og i tabell 2.2. Kodene jeg brukte for å beskrive representasjonene læreboka presenterer er eksemplifisert i tabell 3.4.

Kategori	Koder	Beskrivelse	Eksempel fra datamaterialet
Naturlig språk	*Skriftlig språk som beskriver en hverdagssituasjon*	Skriftlig språk som beskriver en situasjon fra dagliglivet, for eksempel regnefortellinger.	Radius løper 54 km i løpet av 6 dager. Han løper like langt hver dag. Hvor mange kilometer løper han per dag?
	Skriftlig språk som beskriver matematikk	Skriftlig språk som beskriver eller forklarer matematiske begreper, symboler eller fremgangsmåter.	En likning er et regneuttrykk med et likhetstegn. Likhetstegnet betyr at det er like mye på hver side. På hver side av likhetstegnet kan det stå et tall eller et regneuttrykk.

	Muntlig språk	Muntlige ytringer som kommuniserer matematikk, strategier i matematikk eller som beskriver matematikken i en hverdagssituasjon.	
Illustrasjoner	*Tegninger og bilder som beskriver en hverdagssituasjon*	Tegninger eller bilder som beskriver eller kommuniserer en hverdagssituasjon, som enten representerer et matematisk objekt eller er et supplement til andre representasjoner.	
	Balansemodeller som formidler en hverdagssituasjon	Modeller som viser balanse og som viser en situasjon eller gjenstand elever kan kjenne igjen fra dagliglivet.	
	Balansemodeller	Modeller som viser balanse, men som ikke viser en hverdagssituasjon.	
	Modeller	Forenklede illustrasjoner i kombinasjon med symboler som bidrar til å organisere og/eller forenkle informasjon i en oppgave eller en kontekst.	
	Figurer	Geometriske figurer eller bilder av gjenstander eller lignende som ikke alene formidler en situasjon eller et matematisk innhold.	
Symboler	*Numeriske symboler*	Tallsymboler og regneuttrykk som består av tall og regnetegn	$16 + 4 + 10 = 20 + 10 = 30$
	Algebraiske symboler	Algebraiske symboler som x og y og regneuttrykk som inneholder bokstaver, tall og regnetegn.	$20 = 2x + 18$
Tabeller, diagrammer og grafer	*Tabell*	Systematisk organisering av informasjon.	Lam | Geit

Tabell 3.4 Koder for representasjoner og representasjonssystemer. Eksempler hentet fra Alseth et al., 2021a, Gulbrandsen et al., 2020a og Raen et al., 2020.

3.4.2 Delanalyse 2

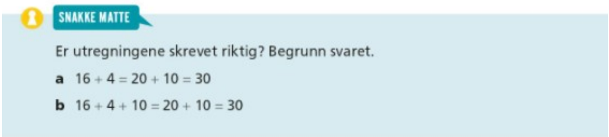
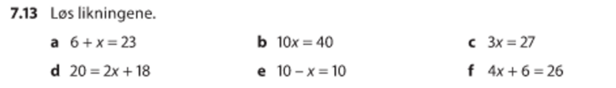
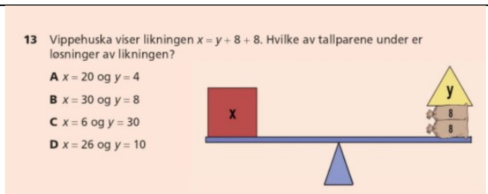
Delanalyse 2 undersøkte det samme aspekt ved representasjonskompetansen som delanalyse 1. Forskjellen mellom de to analysene er at delanalyse 2 belyser hva som kreves av elevene med tanke på å forstå og bruke ulike, hensiktsmessige representasjoner. Med det mener jeg hvilke representasjoner vi ut ifra oppgaven kan forvente at elevene må eller trolig vil bruke som målrepresentasjon eller hjelperepresentasjoner, og om representasjonene elevene får muligheten til å bruke er varierte. Kun oppgavene ble kodet, siden eksemplene ikke signaliserer at elevene skal gjøre noe. Jeg brukte her de samme predefinerte kodene for representasjoner hentet fra Duval (2006), som i delanalyse 1 (se tabell 3.4), noe som gjør at delanalyse 2 også er deduktiv. I likhet med delanalyse 1, vil jeg også her i hovedsak analysere forventet målrepresentasjon og eventuelle hjelperepresentasjoner. Om representasjonene er hensiktsmessige, kommer jeg tilbake til i diskusjonskapittelet.

Også i delanalyse 2 måtte jeg gjøre noen valg. For det første måtte jeg definere hva det vil si å løse en likning for å avgjøre forventet målrepresentasjon, siden flere oppgaver bruker dette som oppgavetekst. Selv om ingen av lærebøkene viser hvordan likninger skal løses algebraisk, presenterer alle likninger på symbolsk form. Når lærebøkene henviser til en likning, for eksempel ved at elevene skal finne likningen som passer eller hvilke tall som kan løse en likning, er likningen gitt ved symboler. Begrepet likning brukes ikke om modeller eller illustrasjoner. Når en oppgave skal løses som likning, har jeg derfor definert forventet målrepresentasjon som det symbolske representasjonssystemet.

For det andre var det vanskelig å avgjøre forventet målrepresentasjon i oppgaver merket med samtale, snakke matte eller utforsking. Felles disse oppgavetypene er at de skal løses gjennom samarbeid, før elevene diskuterer i plenum eller presenterer sin fremgangsmåte. Kun Matemagisk oppgir at oppgavene skal kunne løses uten å skrive (Aschehoug u.å.). Jeg valgte derfor å kode samtaleoppgaver med *muntlig språk* som målrepresentasjon, og i tillegg identifisere og kode aktuelle hjelperepresentasjoner elevene kunne bruke for å løse oppgaven i forkant av samtalen.

3.4.3 Delanalyse 3

Delanalyse 3 undersøkte om elevene får muligheten til å oversette mellom ulike representasjonene, ved å analysere om oppgavene krevde oversettelse mellom representasjonssystemer. Delanalyse 3 var deduktiv, siden jeg startet med kategoriene *omdanning* og *behandling*, hentet fra Duval (2006). Oppgavene ble kodet med hvilke representasjonssystemer start- og målrepresentasjonen tilhørte, altså kategoriene for representasjoner brukt i delanalyse 1 og 2. Underveis i kodeprosessen måtte jeg tilføye nye kategorier, da noen oppgaver kunne kreve både behandling og omdanning, eller at det ut ifra oppgaven var vanskelig å avgjøre hvilken representasjon elevene tar utgangspunkt i. Tabell 3.5 beskriver kategoriene, eksemplifisert med oppgaver fra datamateriale og hvilken kode eksempeloppgavene fikk.

Kategori	**Beskrivelse**	**Eksempel fra datamaterialet med kode**
Omdanning	Når oppgaven krever et skifte i representasjonssystem. Startrepresentasjon tilhører et annet representasjonssystem enn målrepresentasjon.	 SNAKKE MATTE Er utregningene skrevet riktig? Begrunn svaret. a $16+4=20+10=30$ b $16+4+10=20+10=30$ *Symboler → Naturlig språk*
Behandling	Når hele oppgaven kan løses ved å bruke representasjoner fra det samme representasjonssystemet. Startrepresentasjon tilhører samme representasjonssystem som målrepresentasjon.	 7.13 Løs likningene. a $6+x=23$ b $10x=40$ c $3x=27$ d $20=2x+18$ e $10-x=10$ f $4x+6=26$ *Symboler → Symboler*
Behandling eller omdanning	Når det både kan skje omdanning og behandling avhengig av hva ved startrepresentasjonen som blir betraktet. Dette gjelder spesielt oppgaver som formidler det samme matematiske objektet gjennom to eller flere representasjonssystemer.	 13 Vippehuska viser likningen $x=y+8+8$. Hvilke av tallparene under er løsninger av likningen? A $x=20$ og $y=4$ B $x=30$ og $y=8$ C $x=6$ og $y=30$ D $x=26$ og $y=10$ *Symboler → Symboler eller Illustrasjon → Symboler*

Både omdanning og behandling	Oppgaver med flere steg eller delprosesser hvor deler av oppgaven kan løses ved å bruke et representasjonssystem, mens andre deler krever skifte i representasjonssystem.	Løs oppgavene som likning. Tegn modell hvis du ønsker. **3.20** Tanja leser en bok som har 99 sider. Hun leser x sider hver dag i 9 dager. Da er hun ferdig med boka. Hvor mange sider leser Tanja hver dag? *Naturlig språk → Symboler → Symboler*

Tabell 3.5 Koder for omdanning og behandling. Eksempler hentet fra Alseth et al., 2021a, Gulbrandsen et al., 2020a og Raen et al., 2020.

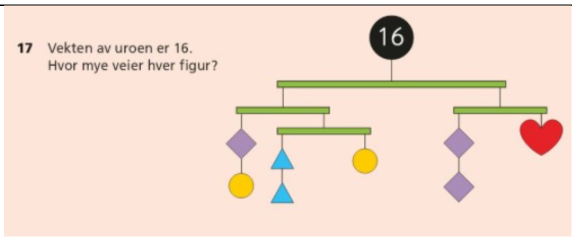
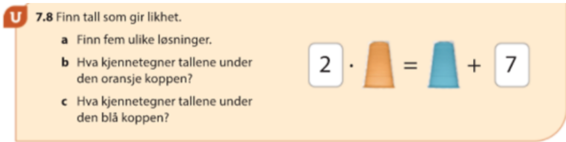
3.4.4 Delanalyse 4

Delanalyse 4 undersøkte om elevene har mulighet til å velge representasjoner selv eller om målrepresentasjon og eventuelle hjelperepresentasjoner var bestemt av oppgavens utforming. Delanalysen var induktiv, siden jeg ikke hadde predefinerte koder. I kodeprosessen identifiserte jeg først ord i oppgaven som signaliserte hva elevene skulle gjøre eller hvilken representasjon de skulle bruke. Oppgavene ble deretter kodet med signalordene og senere sortert i kategoriene *kan velge selv* og *kan ikke velge selv*. Oppgaver som ikke uttrykte målrepresentasjon, men som eksplisitt etterspurte et tall, ble kategorisert som *kan ikke velge selv*. Det samme gjaldt oppgaver som fikk koden *løs som likning*, siden det er underforstått i lærebøkene at likninger skal løses med symboler.

Underveis i analyseprosessen oppdaget jeg imidlertid at det i noen oppgaver i kategorien *kan bestemme selv*, var en foretrukken representasjon, selv om ikke dette var uttrykt eksplisitt. Jeg lagde derfor en ny kategori, *implisitt bestemt***.** I denne kategorien ble eksempelvis oppgaver som spør etter hvor mye noe veier plassert, siden det da er unaturlig å tro at elevene velger et annet representasjonssystem enn symboler. Samtaleoppgaver eller utforskingsoppgaver kunne ha ulike signalord som indikerte representasjon. Likevel var oppgaven kodet med *naturlig språk* som målrepresentasjon, siden oppgavetypen la opp til at elevene skulle besvare oppgaven muntlig, uansett hva som sto i oppgaveteksten. Dette tolket jeg som at elevene selv kunne velge hjelperepresentasjon, men at hvordan elevene skulle kommunisere svaret allerede var bestemt. Slike oppgaver ble derfor plassert i ytterligere en ny kategori, *oppgavetypen bestemmer*, på bakgrunn av at det var egenskaper ved oppgavetypen som bestemte målrepresentasjon.

Kategorier og eksempel på oppgaver med kode er eksemplifisert i tabell 3.6.

Kategori	**Beskrivelse**	**Eksempel fra datamaterialet med kode**
Kan velge selv	Oppgaven utrykker ikke eksplisitt hvilken målrepresentasjon som skal benyttes og elevene kan benytte ulike representasjoner for å besvare oppgaven.	**6** Sant eller usant? **a** $68 + 74 + 13 + 4 = 68 + 74 + 13 + 5$ **b** $2 + 4 + 6 + 8 = 4 + 6 + 8 + 2$ *Sant eller usant*
Kan ikke velge selv	Oppgaven uttrykker eksplisitt hvilken målrepresentasjon som skal benyttes.	**3.13** Skriv likningen som passer. Radius har en hylle med x bokser kattemat. Etter å ha spist 5 bokser er det 13 bokser igjen på hylla. Hvor mange bokser (x) var det på hylla? $x + 5 = 13$ $x - 5 = 13$ $13 - x = 5$  *Skriv likningen som passer*

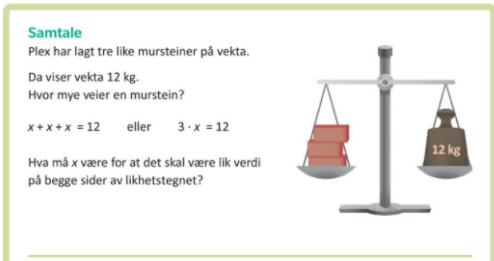
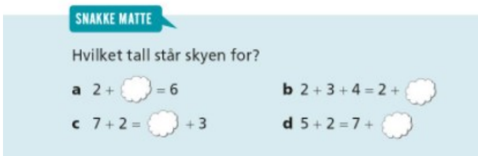
implisitt bestemt	Målrepresentasjon er ikke oppgitt eksplisitt, men oppgaven er formulert slik at det kun er en representasjon som kan benyttes. Dette gjelder spesielt oppgaver som på en eller annen måte spør etter et tall	 *Hvor mye veier…?*
Oppgavetypen bestemmer	Oppgaver som skal løses ved samarbeid og oppsummere i en klassesamtale.	 *samtaleoppgave*

Tabell 3.6 Koder for mulighet til å velge representasjoner selv. Eksempler hentet fra Alseth et al., 2021a, Gulbrandsen et al., 2020a og Raen et al., 2020.

3.4.5 Delanalyse 5

Delanalyse 5 var også induktiv og undersøkte om oppgavene eksplisitt stilte spørsmål, som ga elevene mulighet til å reflektere omkring valg av representasjoner, sammenheng mellom representasjoner eller representasjonenes egenskaper. I tillegg så jeg i lærerveiledningene om det der ble foreslått spørsmål, som kunne bidra til refleksjon omkring representasjoner i samtaler med elevene.

For å kode hvilke muligheter oppgavene ga for refleksjon omkring representasjonene, forsøkte jeg å identifisere ord eller setninger i oppgavetekstene og i lærerveiledningene som oppfordret til refleksjon. Da analysen ikke gav noen slike eksempler, endret jeg til potensiale for refleksjon. Jeg så da på om representasjonene oppgaven kommuniserte, kunne danne grunnlag for en matematisk samtale om representasjoner. Kun oppgaver hvor elevene skulle samarbeide eller samtaleoppgaver ble analysert, da disse oppgavene allerede var ment som grunnlag for matematiske samtaler. Jeg kodet oppgavene med hva det kunne være naturlig å reflektere over. Oppgavene ble sortert i kategoriene *potensiale for å reflektere over sammenheng* og *potensiale for å reflektere over egenskaper*, eksemplifisert i tabell 3.7.

Kategori	Beskrivelse	Eksempel fra datamaterialet med kode
Potensiale for å reflektere over sammenheng	Oppgaver hvor det er mulig for elevene å reflektere over hvilke sammenhenger mellom to eller flere representasjonene ved å se hvordan samme matematiske objekt representeres gjennom ulike representasjonssystemer.	 *Sammenheng mellom symboler og illustrasjon*
Potensiale for å reflektere over egenskaper	Oppgaver hvor det er mulig for elevene å reflektere over representasjonenes begrensninger og muligheter.	 *Å representere ukjent verdi ved en en figur*

Tabell 3.7 Koder for refleksjon omkring representasjoner. Eksempler hentet fra Gulbrandsen et al., 2020a og Raen et al., 2020.

En utfordring i delanalyse 5, var å plassere oppgavene i kategorier. I oppgaver som kommuniserer det samme matematiske objektet ved to representasjonssystemer, vil det alltid være mulig å reflektere over både sammenhenger og de ulike representasjonenes egenskaper. Et eksempel på en slik oppgave er den første oppgaven i tabell 3.7. Noen oppgaver ble derfor plassert i begge kategoriene.

3.5 Troverdighet

En forsker må sørge for at en undersøkelse fremstår som troverdig, siden forskning som anses som upålitelig vil være meningsløs (Cohen, 2018, s. 245). Guba (1981, s. 80-81) har utviklet et rammeverk for å sikre at en undersøkelses troverdighet og synliggjør fire aspekter.

Det første aspektet, *kredibilitet* omhandler sannhetsverdien; om man har undersøkt det man sier at man har undersøkt. (Guba, 1981). En måte å sikre kredibilitet på er at datainnsamlingen gir data som er relevante for problemstillingen. Mitt forskningsspørsmål har omhandlet representasjoner brukt om likninger i lærebøker og mitt datagrunnlag har derfor vært oppgaver hentet fra lærebøker. Jeg har også beskrevet min forskningsprosess så nøyaktig som mulig, for å vise hvordan datamaterialet er bearbeidet og hvordan dataene jeg har brukt støtter mitt prosjekt. Før analysen, samlet jeg også inn mer data enn det som er brukt i undersøkelsen, men valgte å avgrense datamaterialet til kun å gjelde oppgaver i bestemte deler av grunnbøkene. Øvrige ressurser ble undersøkt, men siden de ikke brukte andre representasjoner enn grunnboka, ble de ikke benyttet i analysen. I tillegg har jeg, som beskrevet tidligere i kapittelet, søkt koherens ved å gå igjennom datamaterialet på nytt når nye ting har dukket opp.

Aspektet *overførbarhet* omhandler at funn i en undersøkelse kan overføres til andre, lignende situasjoner (Guba, 1981). Jeg har kun sett på hvordan lærebøker bruker representasjoner i kapittelet om likninger, ved å bruke et analyseskjema utviklet for å analysere lærebøker, men tilpasset dette til å gjelde representasjoner. Mitt skjema kan derfor også brukes for å analysere representasjoner i andre tema i lærebøkene eller på andre trinn.

Samtidig må en forsker ta høyde for *avhengighet*, ved å være så eksplisitt med tanke på metode og analyse, at en annen forsker kunne gjort den samme undersøkelsen og fått det samme resultatet (Guba, 1981). Jeg har tatt høyde for dette prinsippet i metodekapittelet ved å beskrive stegene i analyseprosessen og bakgrunnen for utvikling av analyseskjema og koder. Dette var spesielt viktig i de induktive delene av analysen, hvor koder og kategorier er utviklet ut ifra mine vurderinger av datamaterialet. I de deduktive delene har det å være eksplisitt med tanke på mine tilpassinger, ført til at instrumentet for analysen i mindre grad er påvirket av min mening, siden vurderinger og tolkninger enten støtter seg til teori eller tidligere forskning. I tillegg har jeg forsøkt å være tydelig med tanke på hvordan jeg har gjennomført kodingen, ved å beskrive kriterier jeg har lagt til grunn og eksemplifisere kodene, for at andre skal kunne bruke de samme kriteriene som meg.

Det siste aspektet i rammeverket handler om *bekreftbarhet*, med andre ord i hvor stor grad man kan være trygg på at resultatene av en undersøkelse kommer fra data i studien og ikke er påvirket av forskerens forutinntatthet. I naturalistisk forskning vil forskeren aldri være usynlig, siden de valg man tar kommer fra forskeren selv (Guba, 1981). Siden jeg har jobbet som lærer i matematikk i mange år, vil mine tanker og mine erfaringer fra klasserommet kunne påvirke analysen. Likevel kan bekreftbarhet sikres ved å være eksplisitt med tanke på antagelser eller tolkninger man gjør (Guba, 1981). I metodekapittelet er derfor mine tolkninger, avgrensninger og definisjoner gjort eksplisitte, for å prøve å sikre bekreftbarhet. I analysen har jeg dessuten forsøkt å legge egne meninger om lærebøkene til side, men heller analysert bøkene ut ifra teori presentert tidligere.

3.6 Etiske betraktninger

I en lærebokanalyse er det færre etiske begrensninger enn i studier av for eksempel elever, siden lærebøker ikke inneholder noen form for personopplysninger. Det er derfor ikke nødvendig å melde prosjektet til NSD (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016). Allikevel er det hensyn en forsker må ta. En forsker bør for eksempel alltid vurdere og foregripe virkninger på en tredjepart som ikke direkte er inkludert i forskningen (NESH, 2016) I denne studien kan forfatterne av lærebøkene være en slik tredjepart og jeg måtte vurdere og ta hensyn til mulige ulemper for forfatterne. Det har derfor vært viktig å tenke igjennom hvordan jeg ordlegger meg når jeg omtaler lærebøkene og analysere så objektivt som mulig. I humaniora og samfunnsvitenskap vil imidlertid fortolkning alltid være en del av forskningsprosessen, og ulike ståsted kan åpne for at samme materiale tolkes ulikt (NESH, 2016). Jeg må derfor poengtere at min erfaring og bakgrunn alltid til en viss grad vil kunne påvirke, men at jeg har prøvd å være transparent med tanke på min metode og mine tolkninger. Det er dessuten viktig at alle henvisninger kan spores tilbake til den originale kilden (NESH, 2016), noe jeg har tatt hensyn til ved å oppgi referanser til data og teori som er brukt i undersøkelsen.

4 Analyse

Forskningsspørsmålet i denne studien er: På hvilken måte ivaretar lærebøker på 5. trinn representasjonskompetansen i temaet likninger? Jeg har brukt en bearbeidet og tilpasset versjon av Charalambous et al. (2010) sitt analyseskjema og analysert kapittelet om likninger i tre lærebøker for 5. trinn. Kapittelet er strukturert slik at jeg først presenterer den horisontale analysen og deretter funn fra den vertikale analysen.

4.1 Horisontal analyse

I den horisontale analysen har jeg undersøkt lærebøkenes bakgrunn og hva lærerveiledningene sier om representasjoner. Jeg har også analysert hvordan kapittelet om likninger er oppbygd, samt hvilke og hvor mange oppgaver vi finner i kapittelet. Den horisontale analysen er ment som bakgrunnsinformasjon før den vertikale analysen, og hver lærebok er presentert i egne delkapitler.

4.1.1 Matematikk

Matematikk 5 er skrevet av Jan Erik Gulbrandsen, Randi Løchsen, Kristin Måleng og Vibeke Saltnes Olsen, og ble utgitt av Cappelen Damm i 2020. Boka har 221 sider, hvorav 24 sider er kapittelet algebra. Læreverket *Matematikk* består på 5. trinn av grunnbok, oppgavebok og lærerveiledning. I tillegg tilbyr forlaget en digital lærerressurs og nettressursen *Skolen*, hvor man under faget matematikk kan finne læringsstier og oppgaver som følger temaene i grunnboka.

Om representasjoner skriver utgiver i lærerveiledningen til Matematikk 5 at det i innlæring av nye begreper er hensiktsmessig at elevene arbeider med konkreter eller halvkonkreter, som visuell støtte for å bli i stand til å løse abstrakte oppgaver. Læreverket utdyper i lærerveiledningen, at det de mener med abstrakter er tallsymbolene (Gulbrandsen et al., 2020b).

Grunnboka Matematikk 5 består av 6 kapitler, hvor kapittelet *algebra* er det tredje kapittelet. De to foregående kapitlene omhandler addisjon og subtraksjon og multiplikasjon og divisjon.

Kapittelet *algebra* innledes med et samtalebilde, læringsmål og viktige begreper. For likninger er aktuelle begreper likhet og likning. Elevene skal lære å forstå og forklare hva en likning er, og kunne løse enkle likninger og enkle problem som likning. Før likninger kommer delkapitlene *tallfølger* og *figurtall*. Delkapittelet *likhet og likninger* er delt i tre undertema: *løse likninger*, *å løse tekstoppgave som likning* og *mer enn en x i en likning*. Alle undertemaene starter med en samtalerute, etterfulgt av oppgaver med samme tema som foregående samtalerute. De to siste undertemaene i delkapittelet avsluttes med en utforsk sammen-oppgave. Etter *likhet og likninger* følger delkapitlene *ulikheter* og *koding* og en temaoppgave. Kapittelet avsluttes med noen påstander fra hele kapittelet elevene skal vurdere om er sanne eller usanne, oppsummering av målene i kapittelet, oppsummerende oppgave og en aktivitet knyttet til kapittelet. Øvrige kapitler i Matematikk 5 har lik struktur.

Fordeling av oppgavene i kapittelet er vist i tabell 4.1.

	tallfølger	**figurtall**	**Likhet og likninger**	**ulikheter**	**koding**	**Oppgaver etter delkapitlene**	totalt
Nummererte oppgaver	7	3	14	4	3	6	37
Samtale	1	1	3	1	1		7
Utforsk sammen	1	1	2	1	1		6
Totalt antall oppgaver i delkapittel	9	5	19	6	5	6	50
Antall deloppgaver	33	11	29	11	5	14	103

Tabell 4.1 Oppgaver i kapittel 3 – Algebra i Matematikk 5

I den vertikale analysen har jeg analysert alle oppgavene i delkapittelet likhet og likninger, til sammen 19 oppgaver.

4.1.2 Matemagisk

Matemagisk 5b er skrevet av Kristina Markussen Raen, Asbjørn Lerø Kongsnes, Gaute Nyhus og Hedda-Louise Rang-Lee og ble utgitt av Aschehoug Forlag i 2021. Boka har 168 sider, hvorav 26 av sider er kapittelet om likninger og ulikheter. Læreverket *Matemagisk* består på 5. trinn av to grunnbøker, oppgavebok og den digitale ressursen *Matemagisk 5 – 7*. Lærerutgaven av den digitale ressursen inkluderer lærerveiledning.

Lærerveiledningen til Matemagisk beskriver at læreverket legger til rette for bruk av representasjoner gjennom å bruke visuelle, kontekstuelle og symbolske representasjoner. Lærerveiledningen utdyper videre at hvert kapittel tilbyr representasjonsmodeller som skal gi elevene mentale bilder som kan fremme forståelsen (Aschehoug u.å.). I kapittelet likninger og ulikheter er uro og vippehuske aktuelle representasjonsmodeller.

I grunnbøkene Matemagisk 5a og 5b er det til sammen ti kapitler, hvor kapittelet *likninger og ulikheter* er det sjuende kapittelet. De seks kapitlene forut for *likninger og ulikheter* omhandler brøk og sannsynlighet.

Alle kapitler i *Matemagisk 5* har samme struktur. Kapittelet *likninger og ulikheter* starter med et samtalebilde og bilde av et læringslandskap som skal visualisere de tre delkapitlene; *likninger* og *ulikheter*. I tillegg står noen spørsmål til bildet, viktige begreper og hva elevene skal tenke med. Viktige begreper i dette kapittelet er regneuttrykk, likhetstegn, likning og ukjent og elevene skal tenke med vippehuske og uro. Første oppgave i kapittelet er en oppstartsoppgave. Delkapitlene som følger, starter med fellesløypa som er fagstoff det skal arbeides med i fellesskap. Her er eksempler og oppgaver merket med *snakke matte*. Hvert delkapittel avsluttes med oppgaver under overskriften *følg stien*. Etter delkapitlene følger temaoppgaven *uro til lillebror*, og *terrengløypa* som er oppgaver fra alle delkapitlene. Deretter en oppsummering av begrepene i kapittelet og mer utfordrende oppgaver merket *topptur*.

Fordeling av oppgavene i kapittelet er vist i tabell 4.2.

	Ekvivalens	Likninger	Ulikheter	Oppstart, temaoppgave og topptur	Totalt
Nummererte oppgaver	14	16	11	8	49
Snakke matte	5	4	3		12
Eksempler	1	1	1		3
Totalt antall oppgaver i delkapittelet	19	20	14	8	61
Antall deloppgaver	71	41	27	12	151

Tabell 4.2 Oppgaver i kapittel 7 – Likninger og ulikheter i Matemagisk 5b

I den vertikale analysen har jeg analysert oppstartsoppgaven og oppgavene i delkapitlene ekvivalens og likninger. Til sammen 29 oppgaver og 2 eksempler.

4.1.3 Multi

Multi 5b er skrevet av Bjørnar Alseth, Ann-Christin Arnås, Mona Røsseland og Gunnar Nordberg og ble utgitt av Gyldendal i 2021. Boka har 135 sider, hvorav 32 sider er kapittelet Algebra og programmering. Læreverket *Multi* består på 5. trinn av to elevbøker og lærerens bok for hver av elevbøkene. I tillegg tilbyr forlaget nettressursene *Multi smart øving* som er et adaptivt digitalt læremiddel hvor elevene kan trene på faktakunnskaper, ferdigheter og begrepsforståelse og vurderingsverktøyet *Multi smart vurdering*. I løpet av 2021 vil forlaget i tillegg gi ut en parallellbok, en enklere versjon av elevboka, og ferdigstille nettressursen *skolestudio*.

Forfatterne av Multi skriver i lærerveiledningen at læreverket bruker mange ulike representasjonsformer i matematikk. De skriver videre at representasjonsformene har ulik grad av abstraksjon, fra konkreter via bilder og tegninger, til ikoner, diagrammer og matematisk symbolspråk (Alseth et al., 2021b).

I grunnbøkene Multi 5a og 5b er det til sammen åtte kapitler, hvor kapittelet *algebra og programmering* er det sjuende kapittelet. De seks foregående kapitlene omhandler tall og regning, brøk og regning med brøk, desimaltall, brøk og prosent, sannsynlighet og tid.

Kapittelet *algebra og programmering* har et samtalebilde, læringsmål og matematikkord på første side. Læringsmål om likninger er å finne et tall som løser en likning og å kunne bruke bokstaver som symbol for tall. Viktige matematikkord er likning og ukjent. Det første delkapitlet, *likninger*, starter med en oppgave merket utforsking etterfulgt av en forklaring. Den etterfølgende forklaringen anbefales å sees i sammenheng med utforskingsoppgaven foran (Alseth et al., 2021b). Videre følger oppgaver, flere utforskingsoppgaver og forklaringer før delkapittelet avsluttes med en spillaktivitet. De to neste delkapitlene *ulikheter* og *programmering* følger samme struktur. Kapittelet avsluttes med oppgaver under tittelen *Kan du dette?* som er oppgaver knyttet til spesifikke læringsmål og sidetall i kapittelet, og *øvesider* som følger delkapitlene.

Fordeling av oppgavene i kapittelet er vist i tabell 4.3.

	likninger	ulikheter	Programmering	Kan du dette?	Øve mer	totalt
Nummererte oppgaver	11	11	21			44
Utforske	6	8	1			15
Spill/aktivitet	1	1				2
forklaring	3	3	3			9
Totalt antall oppgaver i delkapittelet	18	20	22	10	19	89
Antall deloppgaver	69	63	48	24	73	277

Tabell 4.3 Oppgaver i kapittel 7 – Algebra og programmering i Multi 5b

I den vertikale analysen har jeg analysert alle oppgaver og forklaringer i delkapittelet likninger, til sammen 18 oppgaver og 3 forklaringer.

4.1.4 Oppsummering av horisontal analyse

Den horisontale analysen viser at det er en del likhetstrekk mellom lærebøkene. For det første er alle lærebøkene utgitt etter innføringen av Fagfornyelsen. For det andre skriver lærebøkene i lærerveiledningene, at de legger til rette for å bruke ulike representasjoner, av ulik abstrasksjonsgrad. For det tredje inneholder alle lærebøkene ulike oppgavetyper, både nummererte oppgaver og oppgaver hvor elevene må samarbeide. Oppbygging av kapitlene og antallet oppgaver om likninger er også relativt likt. Går man mer i dybden på hver enkelt lærebok med tanke på representasjoner, er det noen forskjeller. Funn i den vertikale analysen vil vise noen av disse forskjellene.

4.2 Vertikal analyse

I den vertikale analysen har jeg gjennom fem delanalyser undersøkt på hvilken måte hvert aspekt ved representasjonskompetansen blir ivaretatt i temaet likninger i Matemagisk, Matematikk og Multi for 5. trinn. De neste delkapitlene presenterer derfor funn fra hver delanalyse. Til sammen besto datamaterialet av 64 oppgaver og 9 eksempler. Som beskrevet i metodedelen, ble oppgaver hvor deloppgavene omhandlet ulikt matematisk innhold analysert som flere analyseenheter. Dette gjaldt to av oppgavene i datamaterialet. En oppgave i datamaterialet ble ikke analysert, da den ikke direkte omhandlet likninger eller ekvivalens, men var en sudokuoppgave hvor løsninger fra foregående oppgave skulle settes inn. Datamaterialet besto derfor av totalt 76 analyseenheter, fordelt på 9 eksempler og 66 oppgaver, hvor 75 ble analysert.

4.2.1 Delanalyse 1

Delanalyse 1 har undersøkt hvilke representasjoner lærebøkene kommuniserer for å ivareta at elevene skal kunne forstå og bruke ulike, hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen, og i kommunikasjon. Jeg har derfor undersøkt oppgaver og eksemplers startrepresentasjon og hvilket matematisk innhold representasjonene formidler. Oppgaver og eksempler ble kodet med matematisk innhold (se tabell 3.3) og hvilke representasjoner som ble brukt (se tabell 3.4). Når det gjelder matematisk innhold, fant jeg at oppgaver og eksempler i hovedsak handler om å løse likninger eller omdanne en situasjon til en likning. Jeg velger allikevel ikke beskrive dette som et funn. Som omtalt i metodekapittelet, er matematisk innhold først og fremst viktig å analysere for å avgjøre om en representasjon er hensiktsmessig, noe jeg vil komme tilbake til i diskusjonskapittelet. De tre funnene jeg imidlertid ønsker å trekke frem i delanalyse 1 er:

1. Lærebøkene presenterer og bruker ulike representasjoner.
2. Alle lærebøkene representerer likninger ved å bruke balansemodeller
3. Lærebøkene bruker andre representasjonssystemer når de introduserer de algebraiske symbolene.

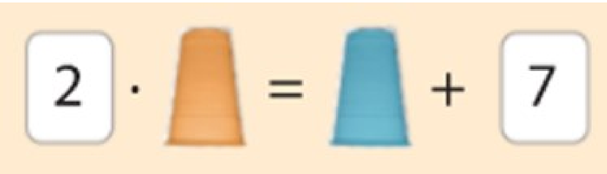
Funn 1: Lærebøkene presenterer og bruker ulike representasjoner

Ser man lærebøkene under ett, bruker bøkene representasjoner fra tre representasjonssystemer som startrepresentasjon, vist i tabell 4.4. Siden både oppgaver og eksempler kan bruke mer enn ett representasjonssystem samtidig, vil det totale antallet av representasjoner være større enn antall analyseenheter. Om en oppgave eller eksempel inneholdt to ulike representasjoner fra samme representasjonssystem, er representasjonssystemet oppgitt en gang pr analyseenhet.

	Matemagisk	**Matematikk**	**Multi**	**totalt**
Illustrasjoner	24	9	12	45
Symboler	16	8	13	37
Naturlig språk	7	19	7	33

Tabell 4.4 Startrepresentasjoner

Tabell 4.4 viser at representasjonen som oftest blir brukt som startrepresentasjon er illustrasjoner. Illustrasjonene har i hovedsak to funksjoner. For det første representerer illustrasjonene en ukjent verdi i likninger elevene skal løse. Illustrasjonen er da en figur. En av disse oppgavene er eksemplifisert i figur 4.1.



Figur 4.1 Illustrasjoner som startrepresentasjon (Alseth et al., 2021a s. 69)

Eksempelet viser hvordan en ukjent verdi er representert ved en kopp snudd opp ned. Koppene har i dette tilfellet ulik farge for å vise at koppene representerer ulike verdier. Elevene må finne ut hvilket tall hver av koppene representerer for å løse likninga. For det andre representerer illustrasjonene ei likning, i hovedsak balansemodeller. Siden funn 2 er at alle lærebøkene bruker balansemodeller for å representere likninger, vil jeg vil beskrive balansemodellene mer inngående i neste delkapittel.

Lærebøkene kommuniserer både numeriske og algebraiske symboler. Algebraiske symboler er oftest x og representerer en ukjent verdi i likninger elevene skal løse. Matemagisk er eneste lærebok som introduserer likninger med flere ukjente og bruker da også symbolene y og z . Numeriske symboler blir som startrepresentasjon brukt i oppgaver som omhandler ekvivalens.

Naturlig, skriftlig språk brukes av lærebøkene på to måter. I oppgaver blir skriftlig språk brukt for å beskrive hverdagssituasjoner, i form av regnefortellinger. Skriftlig språk som beskriver matematikk, blir kun brukt i eksempler, som i figur 4.2.

Figur 4.2 Skriftlig språk som beskriver matematikk i (Raen et al., 2020, s.71)

Eksempelet som er hentet fra Matemagisk, forklarer hva likhetstegnet betyr. Språket omtaler kun matematikk og har uthevet ord som *regneuttrykket* og *likhetstegnet*. Selv om det er en illustrasjon i eksempelruta, beskriver heller ikke den en hverdagssituasjon. Naturlig språk som beskriver matematikk blir i andre eksempler brukt for å forklare hva likninger er, hvordan ukjente kan representeres og hvordan elevene kan løse ei likning eller omdanne en situasjon til likning på symbolsk form.

Tabell 4.4 viser også at den enkelte læreboka bruker noen representasjoner oftere enn andre og at variasjonen ikke er så stor om man ser på en og en grunnbok. I Matemagisk er illustrasjoner det representasjonssystemene oftest blir presentert for elevene, i hovedsak balansemodeller. Symboler brukes nest mest som representasjonssystem, med klar overvekt av numeriske symboler. Overvekten kan skyldes at delkapittelet om ekvivalens er inkludert i analysen. I Multi opptrer illustrasjoner og symboler like ofte. Halvparten av illustrasjonene er balansemodeller, mens den andre halvparten er figurer som representerer en ukjent verdi. Matematikk bruker representasjonssystemet naturlig språk i nesten alle analyseenhetene, i motsetning til de andre lærebøkene hvor naturlig språk er den representasjonen som blir minst brukt. Oppgavene er da tekstoppgaver, hvor skriftlig språk beskriver en hverdagssituasjon.

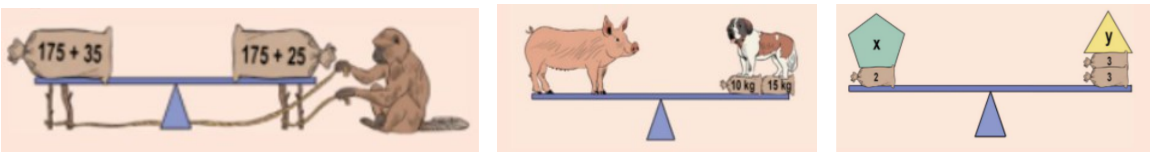
Funn 2: Alle lærebøkene representerer likninger ved å bruke balansemodeller
Ser vi på representasjonssystemet illustrasjoner som startrepresentasjon, er balansemodellene de representasjonene som blir brukt flest ganger, vist i tabell 4.5. Merk at når summen av antall ulike illustrasjoner i Matematikk er høyere enn antallet illustrasjoner totalt, skyldes det at flere av analyseenhetene brukte mer enn én type illustrasjoner i samme oppgave eller eksempel.

	Matemagisk	Matematikk	Multi	totalt
Illustrasjoner	24	9	12	45
• Tegninger og bilder som beskriver en hverdagssituasjon		2		2
• modeller		3		3
• balansemodeller som formidler en hverdagssituasjon	18	4	6	28
• balansemodeller	1	3		4
• Figurer	5		6	11

Tabell 4.5 Startrepresentasjon illustrasjoner

Felles for alle lærebøkene, er at balansemodellen blir brukt som introduksjon til likninger, for å skape relasjonell forståelse for likhetstegnet og for å forklare likevektsprinsippet i likninger. Det matematiske innholdet balansemodellene representerer, er enten en likning som skal behandles, løses eller omdannes til et annet representasjonssystem. Hvordan balansemodellene er utformet varierer i fra lærebok til lærebok.

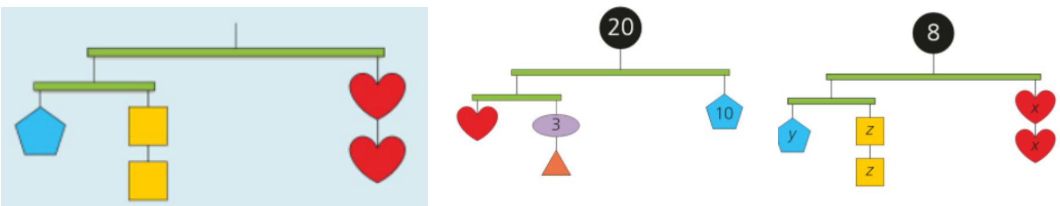
Matemagisk bruker to ulike balansemodeller, vippehuske og uro, som begge beskriver hverdagssituasjoner. Balansemodellene blir brukt som representasjon i samtaleoppgaver og i nummererte oppgaver. Vippehuske forekommer første gang i en oppgave for å vise ekvivalens og balansemodellen har da numeriske symboler på hver side av vippehusken. Neste gang vippehuska presenteres, representerer ulike dyr ukjente verdier. Mot slutten av kapittelet er de dyrene byttet ut med geometriske figurer som er påført algebraiske symboler. Selve illustrasjonen er lik i alle utgavene.



Figur 4.3 Balansemodell (vippehuske) i Matemagisk (Raen et al., 2020)

Den samme modellen abstraheres slik gradvis mot likninger på symbolsk form. Vippehuska brukes oftest i oppgaver hvor det matematiske innholdet er at elevene skal løse en likning og ved et tilfelle for å omdanne situasjon til likning.

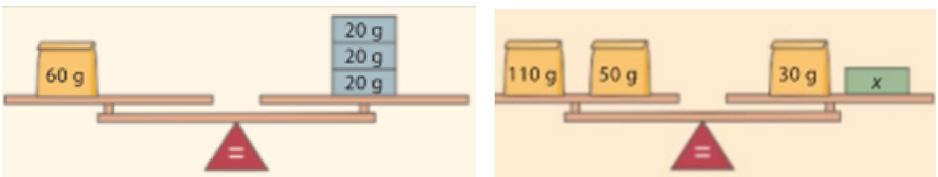
Uroen som balansemodell blir introdusert etter vippehuska, i oppgaver hvor elevene skal behandle eller løse en likning.



Figur 4.4 Balansemodell (uro) i Matemagisk (Raen et al., 2020)

De ukjente verdiene elevene skal finne, representeres først kun ved ulike geometriske figurer som henger under uroen. Deretter blir symboler gradvis inkludert i modellen. Først kun numeriske, deretter både numeriske og algebraiske symboler. Spørsmålene i oppgaven endrer seg også da til å spørre etter hvilken verdi for eksempel x har.

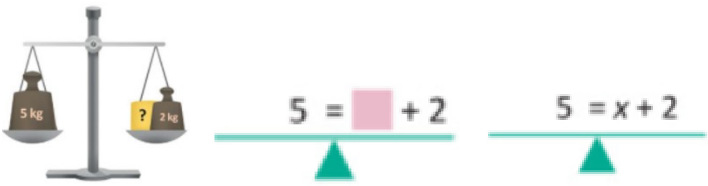
Multi bruker en vekt, som kan minne om vippehuska og er også en balansemodell som beskriver en hverdagssituasjon. Balansemodellen er påført likhetstegn og numeriske symboler, eller likhetstegn og både numeriske og algebraiske symboler.



Figur 4.5 Balansemodell i Multi (Alseth et al., 2021a)

I likhet med Matemagisk blir balansemodellen først introdusert med numeriske verdier som angir vekt. Deretter blir den ukjente verdien representert som en eske merket med det algebraiske symbolet x. Utover dette er balansemodellen identisk. Balansemodellen blir brukt både i eksempler og i oppgaver hvor elevene skal løse en likning. Når modellen inkluderer =, blir ekvivalensen representert dobbelt, siden den både blir representert i illustrasjonen og ved symboler.

Matematikk introduserer først skålvekt med lodd som balansemodell for å vise hvordan en likning kan løses. I samme samtalerute blir vekta også representert som en balansemodell som ligner på vippehusken i Matemagisk, men modellen formidler ikke en hverdagssituasjon. Balansemodellene opptrer i eksempler og samtaleoppgaver, ikke i nummererte oppgave. De introduseres ikke som et hjelpemiddel, men har som funksjon å forklare hva likninger er.



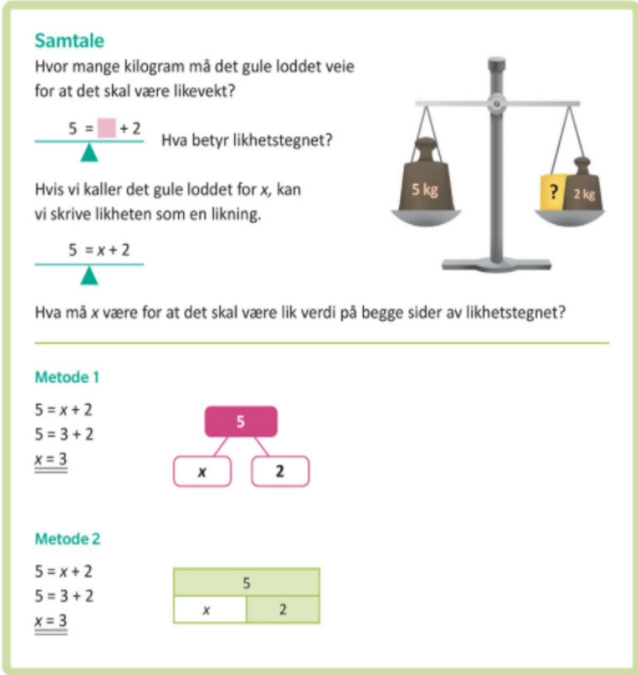
Figur 4.6 Balansemodell i Matematikk (Gulbrandsen et al. 2020)

Også balansemodellen i Matematikk blir gradvis mer abstrakt. Forskjellen fra de to andre lærebøkene er at den første modellen som beskriver en hverdagssituasjon, ikke gradvis utvikles, men erstattes med en modell som ikke beskriver en hverdagssituasjon. Denne modellen abstraheres videre, ved at den først blir representert ved en figur, deretter et algebraisk symbol. De to siste modellene representerer også ekvivalens dobbelt, i likhet med Multi.

Funn 3: Lærebøkene bruker andre representasjonssystemer når de introduserer de algebraiske symbolene.

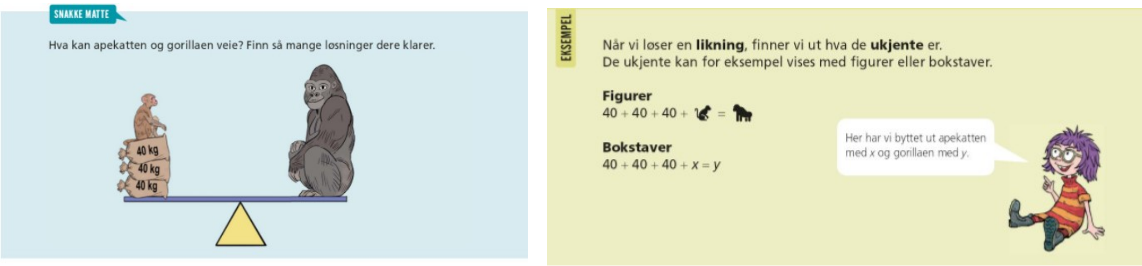
Alle lærebøkene bruker alternative representasjoner i forklaringer, for å forklare de algebraiske symbolene. Det som varierer, er hvilke alternative representasjoner de bruker, og hvordan overgangen til algebraiske symboler blir formidlet.

Matematikk introduserer de algebraiske symbolene i første samtaleoppgave og påfølgende forklaring, som forklarer både likevektsprinsippet, at en ukjent verdi kan representeres ved å bruke symbolet x og hvordan man løser likninger. De alternative representasjonen som blir brukt er naturlig språk og illustrasjoner. Oppgaven starter med skriftlig språk som beskriver en hverdagssituasjon, hvor elevene skal finne ut hvor mye det gule loddet må veie for at det skal være likevekt. Loddet det refererer til er på en balansemodell, som viser den samme hverdagssituasjonen, mer spesifikt en skålvekt hvor et lodd er merket med spørsmålstegn. Oppgaven kommuniserer samtidig to utgaver av en annen balansemodell som representerer samme likning som skålvekta. På den første er den ukjente vekten representert ved en tom, rosa rute. Videre blir det forklart at det gule loddet kan kalles x og at likheten kan skrives som en likning. Likningen blir representert ved en lik modell hvor den rosa ruta er byttet ut med det algebraiske symbolet, x. Det forklares ikke eksplisitt at x er en måte å representere ukjente verdier på. Oppgaven avsluttes med en omformulering av det første spørsmålet; hva må x være for at det skal være lik verdi på begge sider av likhetstegnet? Det skriftlige språket beskriver da matematikk. Under streken er to løsningsforslag, hvor samme likning er representert ved algebraiske symboler og to andre typer modeller. Matematikk kommuniserer alle representasjonene de bruker i kapittelet om likninger i starten av kapittelet. Eksempelet gir mening til de algebraiske symbolene ved å starte med en hverdagssituasjon og at ukjente er merket med et spørsmålstegn, et symbol vi kan anta at elevene er kjent med fra før, deretter tom rute og til sist x. Også språket brukes for å forklare symbolene, siden den første oppgaven bruker ord som loddet og likevekt, mens spørsmålet nederst bruker x og lik verdi på begge sider av likhetstegnet.



Figur 4.7 Eksempel i Matematikk (Gulbrandsen et al., 2020a, s. 86)

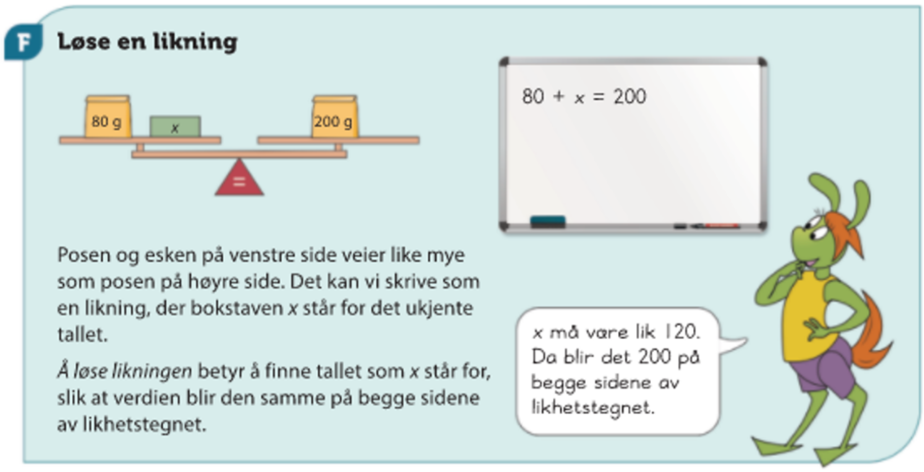
I Matemagisk finner vi i starten av delkapittelet om likninger, et eksempel som forklarer hva det vil si å løse en likning og hvordan ukjente verdier kan representeres. Eksempelet følger etter en samtaleoppgave som viser blide av en balansemodell i form av en vippehuske, hvor det sitter en gorilla og en ape oppå noen sandsekker.



Figur 4.8 Eksempel i Matemagisk (Raen et al., 2021, s. 74)

I eksempelet blir både naturlig språk og illustrasjoner brukt som representasjoner for å forklare de algebraiske symbolene. Først blir hva det vil si å løse en likning, og hvordan ukjente verdier kan representeres forklart med skriftlig språk som beskriver matematikk. Videre blir balansemodellen som beskriver en hverdagssituasjon fra den foregående oppgaven, representert ved ei likning bestående av tall, regnetegn og figurer, henholdsvis en forenklet utgave av apa og gorillaen. Under blir den samme likninga representert en gang til, men nå er figurene byttet ut med algebraiske symboler, x og y. I en snakkeboble blir det eksplisitt uttrykt at apekatten er byttet ut med x og gorillaen med y, noe som kan tolkes som at x og y representerer en forenkling av figurene i stedet for vekta til dyrene. Matemagisk forklarer overgangen fra en hverdagssituasjon representert ved en balansemodell til symboler, og forklarer omdanningen til symboler ved å omdanne først til figurer, så til algebraiske symboler, og ved å bruke skriftlig språk som eksplisitt forklarer hva som skjer.

I Multi blir algebraiske symboler først introdusert i en utforskende oppgave. I den påfølgende forklaringen som forklarer hva det vil si å løse en likning, bruker læreboka illustrasjoner og naturlig språk som alternative representasjoner. Eksempelet tar utgangspunkt i en balansemodell som viser en hverdagssituasjon; en vekt hvor det på den ene siden er en pose som veier 80 g og en eske påført x og på andre siden en pose som veier 200 g.



Figur 4.9 Eksempel i Multi (Alseth et al., 2021, s. 68)

Eksempelet forklarer først balansemodellen ved å beskrive at gjenstandene på venstre side veier like mye som pose på høyre side. Språket beskriver altså hverdagssituasjonen balansemodellen representerer. Videre beskriver språket matematikk, at situasjonen kan skrives som en likning der x står for det ukjente tallet. Hva det vil si å løse en likning blir forklart under. Ved siden av balansemodellen er en tavle hvor samme likning er representert ved algebraiske symboler. Både hvorfor x må være 120 og hvordan ukjente verdier kan representeres med x, blir forklart ved skriftlig språk som beskriver matematikk. Overgangen fra balansemodellen til likning på symbolsk form blir ikke forklart eksplisitt eller ved at balansemodellen gradvis abstraheres. Samtidig er balansemodellen allerede påført algebraiske symboler, noe som kan tolkes som at en slik overgang ikke er nødvendig.

4.2.2 Delanalyse 2

I denne delanalysen har jeg brukt de samme kodene for representasjonssystemer som i delanalyse 1 (se tabell 3.4). Jeg har analysert hvilke representasjoner oppgavene krever at elevene bruker, for å undersøke om elevene får muligheten til å bruke hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen eller for å kommunisere en matematisk løsning. I alle samtaleoppgaver er målrepresentasjon kodet som naturlig språk, men også kodet med forventet hjelperepresentasjon, siden det er naturlig å tro at elevene kan bruke andre representasjoner for å komme frem til en løsning de kan kommunisere muntlig. I delanalyse 2 gjorde jeg to funn:

1. Lærebøkene legger opp til at elevene skal bruke symboler og muntlig språk som målrepresentasjon.
2. Elevene kan bruke de øvrige representasjonssystemene læreboka har kommunisert som hjelperepresentasjoner.

Funn 1: Lærebøkene legger opp til at elevene skal bruke symboler og muntlig språk som målrepresentasjon.

Selv om lærebøkene kommuniserer varierte representasjoner til elevene, legger ikke oppgavene nødvendigvis opp til at elevene skal bruke alle som målrepresentasjonen. Analysen viser lærebøkene krever at elevene må bruke noen representasjonssystemer oftere enn andre.

	Matemagisk	**Matematikk**	**Multi**	**totalt**
Illustrasjoner	4	1	1	6
Naturlig språk	18	6	7	31
Symboler	16	14	10	50
Tabeller, diagrammer og grafer	2			2

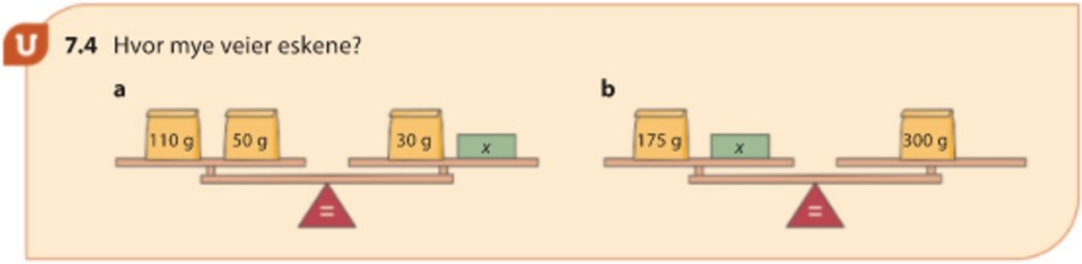
Tabell 4.6 Forventet målrepresentasjon

Forventet målrepresentasjon er oftest symboler eller naturlig språk. At elevene må bruke symboler, er forventet med tanke på at å løse likninger i grunnskolen handler om å finne hvilke verdier den ukjente står for, altså tall. Årsaken til at elevene ofte må bruke naturlig språk, skyldes at nesten 1/3 av alle oppgavene i datamaterialet er samtaleoppgaver eller utforskende oppgaver, som skal løses ved samarbeid og derfor krever at elevene må kommunisere matematikken muntlig. Men også her ser vi at det er forskjell mellom lærebøkene. I Matematikk og Multi er forventet målrepresentasjon kun symboler og naturlig språk, med unntak av en oppgave i hver bok hvor elevene skal bruke illustrasjoner som målrepresentasjon. Matemagisk er den eneste læreboka hvor elevene må bruke tabeller og hvor elevene får flere muligheter til å bruke illustrasjoner som målrepresentasjon.

Funn 2: Elevene kan bruke de øvrige representasjonssystemene læreboka har kommunisert som hjelperepresentasjoner.

Alle representasjoner læreboka har kommunisert er potensielle hjelperepresentasjoner, selv om oppgavene krever at elevene bruker en annen målrepresentasjon. I datamaterialet er det eksempler på oppgaver hvor elevene må eller kan bruke andre representasjoner enn målrepresentasjonen, for å finne en løsning på en oppgave.

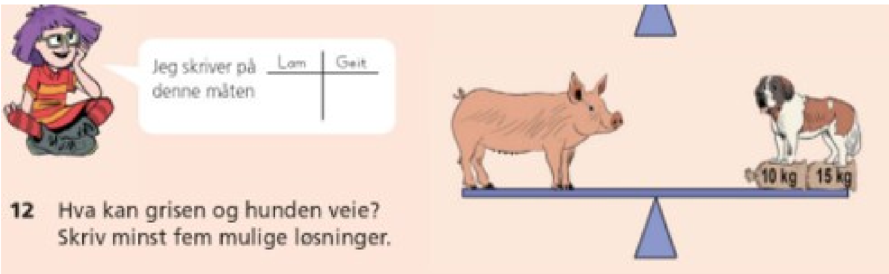
I flere samtaleoppgaver kan noen elever ha behov for å bruke symboler for å finne en løsning de senere kan kommunisere muntlig, som oppgaven figur 4.10



Figur 4.10 Symboler som hjelperepresentasjon (Alseth et al., 2021a, s. 68)

Siden oppgaven er merket med *utforsking*, skal løsningen kommuniseres muntlig. Når oppgaven etterspør hvor mye eskene veier, vil det å sette opp regnestykker være en mulig strategi. I oppgave a i eksempelet, ved først å summere tallene på venstre side, deretter å subtrahere tallet på høyre side for å finne den ukjente verdien. Numeriske symboler er derfor en naturlig hjelperepresentasjon for å finne svaret på oppgaven.

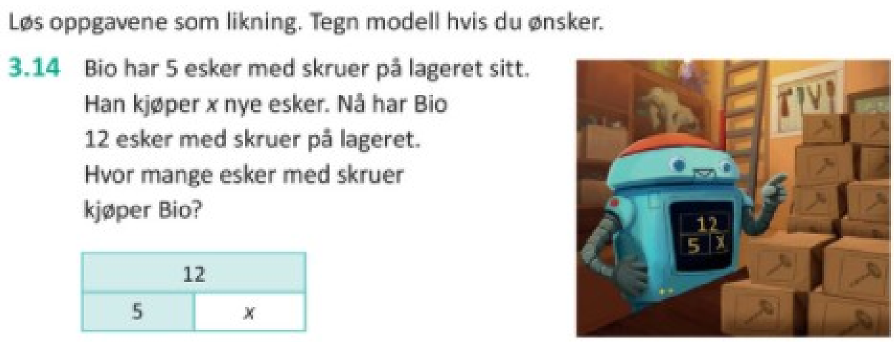
I Matemagisk blir tabell foreslått som representasjon.



Figur 4.11 Tabell som hjelperepresentasjon (Raen et al., 2020, s. 77)

Representasjonen blir kun presentert denne ene gangen, men elevene møter flere lignende oppgaver hvor de skal løse en likning som har flere løsninger. Tabellen kan da være en hensiktsmessig representasjon, siden tabeller er egnet for å systematisere informasjon.

Matematikk bruker andre modeller enn balansemodellen, både i eksempler og oppgaver. Modellen blir i noen oppgaver eksplisitt foreslått som mulig hjelperepresentasjon.



Løs oppgavene som likning. Tegn modell hvis du ønsker.

3.14 Bio har 5 esker med skruer på lageret sitt. Han kjøper *x* nye esker. Nå har Bio 12 esker med skruer på lageret. Hvor mange esker med skruer kjøper Bio?

12	
5	*x*

Figur 4.12 Modell som hjelperepresentasjon (Gulbrandsen et al., 2020a, s. 88)

Oppgaven er den første av flere liknende oppgaver. Felles er at denne, og oppgavene som følger, er at likningene elevene skal løse er representert ved skriftlig språk som beskriver en hverdagssituasjon. Setningen *tegn modell hvis du ønsker* indikerer at modellen ikke er forventet målrepresentasjon, men en representasjon som kan hjelpe elevene til å finne den riktige likninga. I de øvrige oppgavene er modellen ikke en del av oppgaven, men kan brukes på samme måte som i eksempelet. Også balansemodeller, eller forenklede utgaver av balansemodellene, kan være aktuelle å bruke i liknende oppgaver.

4.2.3 Delanalyse 3

For å undersøke om lærebøkene gir elevene muligheten til å veksle mellom ulike representasjoner, har jeg undersøkt om oppgavene krever at elevene omdanner eller behandler det matematiske objektet. Jeg har kodet oppgavene med start- og målrepresentasjon og samlet kodene i kategorier ut fra om det skjer et skifte i representasjonssystem (se tabell 3.5). I delanalyse 3 gjorde jeg ett funn; at de fleste oppgavene i lærebøkene krever omdanning fra et representasjonssystem til et annet.

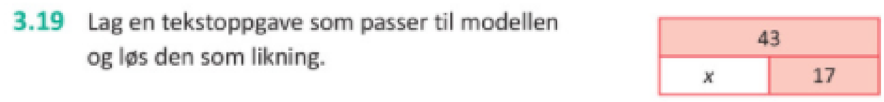
Funn: De fleste oppgavene i lærebøkene krever omdanning fra et representasjonssystem til et annet.

Av de 67 analyseenhetene som utgjorde oppgavene i datamaterialet, var det 7 hvor elevene kun måtte utføre en behandling. I Matemagisk innenfor representasjonssystemet illustrasjoner, i Multi innen symboler og i Matematikk både innenfor symboler og naturlig språk. Hvordan alle kategoriene fordeler seg i de ulike lærebøkene er vist i tabell 4.4

	Matemagisk	**Matematikk**	**Multi**	**totalt**
Omdanning	20	1	7	28
Behandling	2	3	2	7
Omdanning eller behandling	8	3	6	17
Både omdanning og behandling	1	11	2	14

Tabell 4.7 Omdanning og behandling

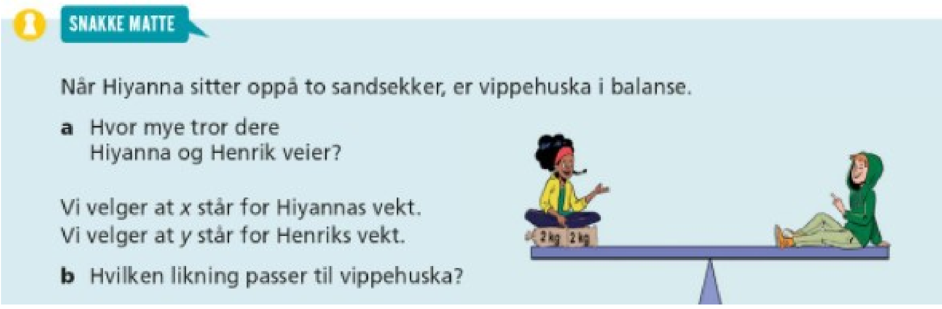
Tabellen viser at lærebøkene gir elevene mange muligheter til å øve på å omdanne de matematiske objektene. Samtidig viser analysen at det er forskjeller mellom lærebøkene, med tanke på hvilke representasjonssystemer de får muligheten til å omdanne mellom, noe som henger sammen med hvilke representasjoner læreboka kommuniserer som startrepresentasjon. Matemagisk er den læreboka hvor det er flest omdanninger fra et representasjonssystem til et annet, i hovedsak fra illustrasjoner og/eller symboler til naturlig språk. Matematikk har en stor andel oppgaver hvor elevene både må omdanne og behandle det matematiske objektet, som i det neste eksempelet.



Figur 4.13 Oppgave som krever omdanning og behandling i (Gulbrandsen et al., 2020a, s. 89)

Oppgaven kommuniserer en modell som tilhører representasjonssystemet illustrasjoner. Elevene skal først lage en tekstoppgave som passer til modellen, altså omdanne illustrasjonen til naturlig språk. Videre skal tekstoppgaven løses som likning, ved å omdanne språket til symboler. Til slutt må de behandle symbolene for å finne en løsning på likninga. Denne oppgaven innebærer med andre ord omdanning fra illustrasjon til naturlig språk og til symboler, før behandling av symbolene.

Siden en stor andel av oppgavene i datamaterialet er samtaleoppgaver, betyr det at elevene må omdanne til naturlig språk, som i en av samtaleoppgave fra Matemagisk. Oppgaven tar utgangspunkt i en balansemodell som viser en hverdagssituasjon, to personer og noen sandsekker på en vippehuske.



Figur 4.14 Oppgave som krever omdanning i (Raen et al., 2020, s. 75)

I a-oppgaven må elevene omdanne illustrasjonen til naturlig språk. Siden oppgaven spør hvor mye personene veier, kan symboler for noen være en nødvendig hjelperepresentasjon, og oppgaven krever da ytterligere en omdanning. I b-oppgaven blir det opplyst at x og y skal stå for vekta til personene og at oppgaven er å finne likning som passer, noe som krever at illustrasjonen skal omdannes til symboler. Siden svaret skal kommuniseres muntlig, må elevene i neste rekke kommunisere likninga de har kommet frem til med språket.

4.2.4 Delanalyse 4

For å undersøke om lærebøkene gir elevene mulighet til å velge målhjelperepresentasjoner selv, har jeg undersøkt om oppgavene eksplisitt legger føringer for hvilke representasjoner elevene skal bruke. Jeg hadde ingen koder eller kategorier på forhånd, men analyserte oppgavene ved å identifisere signalord som indikerte hvilken målrepresentasjon som var forventet og samlet kodene i kategorier (se tabell 3.6). I delanalyse 4 gjorde jeg ett funn; at få oppgaver i lærebøkene gir elevene mulighet til å velge målrepresentasjon selv.

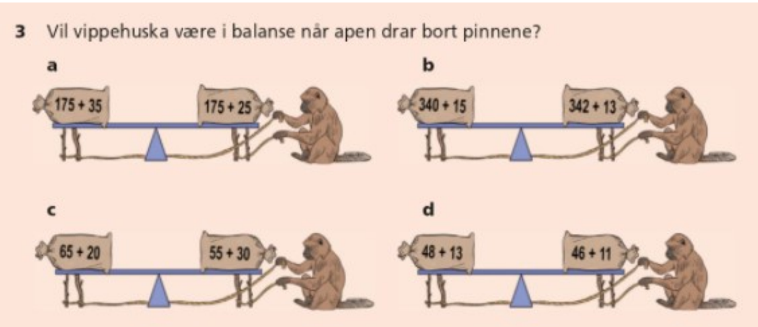
Funn: Få oppgaver i lærebøkene gir elevene mulighet til selv å velge målrepresentasjon.

Tabell 4.8 viser at oppgavene i stor grad styrer hvilke representasjoner elevene skal bruke som målrepresentasjon, siden verken kategoriene *kan ikke velge selv, implisitt bestemt* eller *oppgavetypen bestemmer* gir elevene mulighet til å velge.

	Matemagisk	Matematikk	Multi	totalt
Kan velge selv	4			4
Kan ikke velge selv	8	13	7	28
Implisitt bestemt	7		4	11
Oppgavetype bestemmer	12	5	6	23

Tabell 4.8 Mulighet for å velge representasjon selv

I oppgaver der elevene ikke kan velge representasjon selv, blir målrepresentasjon eksplisitt uttrykt, oftest ved at oppgaven spør etter tall, en likning eller svar på en likning. I alle disse tilfellene må elevene bruke symboler. Heller ikke i kategoriene implisitt bestemt eller oppgavetypen bestemmer får elevene mulighet til å bestemme representasjoner, siden signalord i oppgavene gjør det vanskelig å unngå et bestemt representasjonssystem, eller at oppgaven skal besvares gjennom samtale. Elevenes valgfrihet er derfor begrenset til kun fire oppgaver, alle fra Matemagisk. En av disse oppgave er vist i figur 4.15



Figur 4.15 Oppgave hvor elevene kan velge målrepresentasjon i (Raen et al., 2020, s. 73)

Oppgaven viser et regnuttrykk, representert ved balansemodell. Elevene skal avgjøre om vippehuska vil være i balanse når apen drar bort pinnen. Denne oppgaven tolker jeg som en oppgave som gir elevene mulighet til selv å velge representasjon. Spørsmålet indikerer at elevene skal svare ja eller nei, noe som kan representeres på flere måter. For det første kan elevene svare med naturlig språk enten muntlig eller skriftlig, enten ved å svare ja eller nei og eventuelt begrunne med språket. For det andre kan elevene ta utgangspunkt i tallene og bruke symbolene = eller ≠ for å vise om vippehuska er i balanse eller ikke. Det tredje alternativet er å tegne en liknende illustrasjon hvor balansen eller ubalansen illustreres.

Analysen har tatt utgangspunkt i om elevene selv kan velge målrepresentasjon. Ser vi på muligheten til selv å velge hjelperepresentasjoner, har elevene noe mer valgfrihet. For eksempel at elevene kan velge å tegne en modell i mange av oppgavene i Matematikk for lettere å finne en løsning, som beskrevet i kapittel 4.2.2. I oppgaver i kategorien *oppgavetype bestemmer*, er ofte hjelperepresentasjoner implisitt bestemt. Hjelperepresentasjonene er fortrinnsvis er symboler, ved at oppgaven etterspør en tallverdi eller hvor mye noe veier. I Matematikk er det imidlertid et eksempel på en oppgave hvor hjelperepresentasjoner ikke er bestemt, selv om oppgavetypen bestemmer målrepresentasjon.

Figur 4.16 Oppgave hvor elevene kan velge hjelperepresentasjoner i (Gulbrandsen et al. 2020a, s. 91)

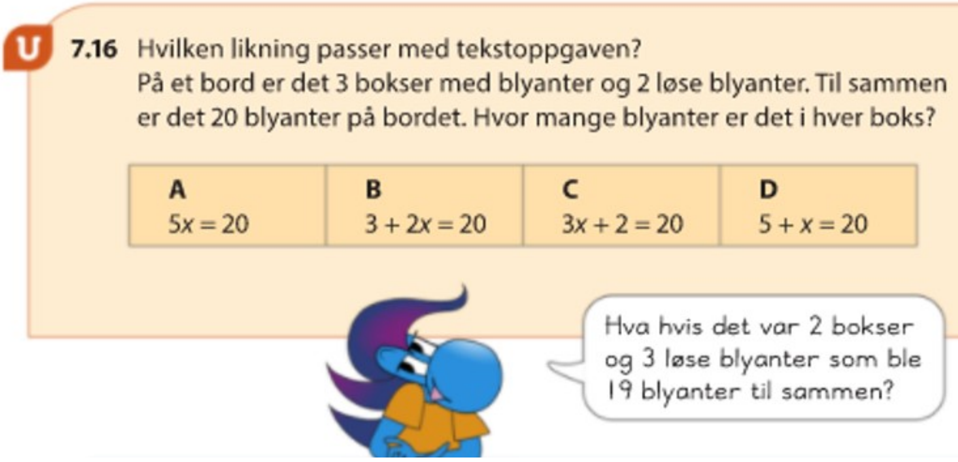
Oppgaven er av typen *utforsk sammen*, og der derfor kodet som *oppgavetypen bestemmer*. Startrepresentasjonen er en likning i representert ved skriftlig språk som beskriver en hverdagssituasjon. Hensikten med oppgaven er at elevene skal forklare hverandre hvordan de kom frem til svaret. Hvilke representasjoner elevene skal bruke for å løse likninga er ikke eksplisitt uttrykt. Oppgaven er den siste i delkapittelet om likninger, noe som kan tilsi at elevene kan bruke alle representasjonene læreboka har kommunisert. I dette tilfellet kan det være modeller og algebraiske eller numeriske symboler. For denne oppgaven er det derfor mer riktig å si at læreboka, og ikke oppgaven, bestemmer hvilke hjelperepresentasjoner elevene kan velge.

4.2.5 Delanalyse 5

For å undersøke om lærebøkene gir elevene muligheten til å reflektere over representasjoners egenskaper og sammenhenger mellom ulike representasjoner, undersøkte jeg om oppgaver eller eksempler eksplisitt stiller spørsmål som åpner for refleksjon. I datamaterialet var det ingen slike eksempler. I de tilfellene hvor oppgaver åpner for refleksjon, er det refleksjon om løsningsstrategier og ikke representasjonene. Heller ikke lærveiledningene forslår spørsmål om representasjonene som kan stilles i matematiske samtaler.

Funn: Ingen oppgaver i lærebøkene legger eksplisitt opp til refleksjon omkring representasjoner.

Da jeg ikke gjorde noen funn i datamaterialet, undersøkte jeg om representasjonsbruken i samtaleoppgavene kunne danne grunnlag for samtale om representasjoner. Et slikt potensiale fant jeg i flere oppgaver. En oppgavene som hadde potensiale for å diskutere sammenhenger mellom representasjoner er hentet fra Multi.



Figur 4.15 Oppgave med potensiale for refleksjon i (Alseth et al., 2021a, s. 72)

Oppgaven er en utforskende oppgave, hvor elevenes løsninger skal oppsummeres i plenum. I en matematisk samtale kan elevene reflektere over sammenhenger mellom representasjonene skriftlig språk som beskriver hverdagssituasjon og algebraiske symboler, ved å identifisere hvordan informasjonen i teksten er representert ved symboler og regnetegn.

I Matematikk fant jeg én oppgave, hvor det er potensiale for å diskutere representasjonenes egenskaper.

Figur 4.17 Oppgave med potensiale for refleksjon i (Gulbrandsen et al., 2020a, s. 88)

Elevene skal først løse en likning, representert ved naturlig språk som beskriver en hverdagssituasjon, og etterpå diskutere de foreslåtte løsningsforslagene i plenum. Det vil i denne samtalen være mulig å diskutere hvilke egenskaper modellen og de algebraiske symbolene har. Om elevene har løst oppgaven ved noen av disse representasjonen, kan de utfordres på å begrunne valg av representasjon og hvordan representasjonen førte til løsning på problemet. Siden denne samtaleruta representerer likningen ved tre representasjonssystemer; naturlig språk, illustrasjon og symboler, vil det også være mulig å diskutere sammenhenger mellom representasjonssystemene.

4.2.6 Oppsummering av funn i vertikal analyse

Jeg har i den vertikale analysen gjort følgende funn, som viser hvordan lærebøkene ivaretar representasjonskompetansen, samlet i tabell 4.9.

Delanalyse	Aspekt ved representasjonskompetansen	Funn
1	*Å forstå og bruke ulike, hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen og for å kommunisere en matematisk ide eller kommunisere om matematikk*	1. Lærebøkene presenterer og bruker ulike representasjoner 2. Alle lærebøkene representerer likninger ved å bruke balansemodeller 3. Lærebøkene bruker alternative representasjoner når de introduserer de algebraiske symbolene.
2		1. Lærebøkene legger opp til at elevene skal bruke symboler og muntlig språk som målrepresentasjon 2. Elevene kan bruke de øvrige representasjonssystemene læreboka har kommunisert som hjelperepresentasjoner.
3	*Å kunne oversette mellom ulike representasjoner som representerer det samme matematiske objektet.*	De fleste oppgavene i lærebøkene krever omdanning fra et representasjonssystem til et annet.
4	*Å selv kunne velge hensiktsmessige representasjoner som gir hjelp til å få innsikt i viktige aspekter ved et matematiske objekt, finne en løsning på et matematisk problem eller for best mulig å kommunisere en løsning*	Få oppgaver i lærebøkene gir elevene mulighet til selv å velge målrepresentasjon.
5	*Å kunne reflektere over representasjoners muligheter og begrensninger og sammenhenger mellom ulike representasjoner.*	Ingen oppgaver i lærebøkene legger eksplisitt opp til refleksjon omkring representasjonene.

Tabell 4.9 Oppsummering av funn i vertikal analyse

Som tabellen viser, blir de to første aspektene ved representasjonskompetansen ivaretatt ved at lærebøkene presenterer ulike representasjoner elevene kan bruke som mål- og hjelperepresentasjoner. Lærebøkene bruker balansemodeller for å representere likninger og de andre representasjonssystemene for å gi mening til de algebraiske symbolene. Elevene må bruke både symboler og muntlig språk som målrepresentasjon, men kan også bruke de andre representasjonene læreboka kommuniserer som hjelperepresentasjoner. Oppgavene i lærebøkene gir dessuten elevene mange muligheter til å omdanne mellom representasjonssystemer. Disse funnene indikerer at elevene både får mulighet til å forstå og bruke ulike representasjoner og oversette mellom representasjoner hvis undervisningen er lagt opp etter læreboka. Hvilke representasjoner elevene får tilgang til, kan imidlertid variere med tanke på hvilken av de tre lærebøkene som blir brukt. Analysen viser også at få oppgaver gir elevene mulighet til selv å velge målrepresentasjoner, og at lærebøkene ikke eksplisitt legger opp til at elevene skal diskutere representasjoner i samtaler om matematikk. Om representasjonene lærebøkene bruker er hensiktsmessige og de øvrige funnene vil bli diskutert i neste kapittel.

5 Diskusjon

Den horisontale analysen viser at lærebøkene er like med tanke på oppbygging, antall oppgaver, oppgavetyper og hva forlagene tenker om representasjoner. Undersøker man hvert læreverk mer inngående, slik jeg gjorde i den vertikale analysen, er det likevel noen forskjeller. Jeg vil i dette kapittelet diskutere funnene i den vertikale analysen som ble sammenfattet tabell 4.9. Resultatene vil bli drøftet i lys av tidligere forskning og teori, og utdypet med egne refleksjoner.

Forskningsspørsmålet i denne studien er: *På hvilken måte ivaretar lærebøker på 5. trinn representasjonskompetansen i temaet likninger?* Vi vet at læreboka er viktig i matematikkfaget (Alseth et al., 2003, Li et al., 2009, Gueudet et al., 2012) og at læreboka av lærere, brukes for å planlegge hva de skal undervisere, hvordan undervisningen skal foregå, undervisningens rekkefølge og hvilke oppgaver elevene skal gjøre (Lepik et al., 2017; Pepin & Haggerty, 2002; Reys et al., 2004). De tema ei lærebok ikke presenterer, blir ofte ikke presentert i klasserommet (Johansson, 2006). I følge Schoenfeld (1988) kan lærere kompensere for svakheter og mangler i lærebøker, men gjør det sjelden. Overfører vi dette til denne studien, kan en anta at lærere i klasserommet ivaretar representasjonskompetansen på samme måte som lærebøkene og ikke kompenserer for de punktene læreboka ivaretar i mindre grad.

Diskusjonskapittelet er videre strukturert slik at jeg tar for meg de fire aspektene ved representasjonskompetansen i egne delkapitler og diskutere funnene fra analysen. Avslutningsvis vil jeg beskrive hvordan lærere kan stille de samme spørsmålene som jeg gjorde i analysen, for å vurdere om en oppgave eller et undervisningsopplegg ivaretar representasjonskompetansen.

5.1 Å forstå og bruke ulike hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen og for å kommunisere en matematisk ide eller kommunisere om matematikk

Det første aspektet ved representasjonskompetansen ble undersøkt ved å se på hvilke representasjoner lærebøkene kommuniserer, og hvilke representasjoner vi kan forvente at elevene bruker. Analysen viser at lærebøkene kommuniserer representasjoner fra alle de fire representasjonssystemene, som start- eller hjelperepresentasjon. Analysen sier ikke noe om elevene forstår representasjonene som blir brukt, siden jeg kun har undersøkt lærebøkene. Det jeg kan og vil diskutere, er om representasjonene lærebøkene kommuniserer er hensiktsmessige for å arbeide med likninger.

At funn i studien viser at symboler går igjen, både som start og målrepresentasjon er ikke unaturlig, siden symboler er en viktig og effektiv representasjon i matematikk (Webb et al., 2008; Kaput 1992 gjengitt i Friedlander & Tabach, 2001). I tillegg til er representasjonssystemet både er synlig, generelt, klart og presist (Kilpatrick et al., 2001), og derfor en hensiktsmessig representasjon. Det er dessuten viktig at elevene lærer det matematiske symbolspråket, siden det å operere på de algebraiske symbolene er en forutsetning for å løse mer avanserte likninger. Samtidig krever symbolene, i denne studien de algebraiske, at elevene skjønner hva de betyr og at innlæringen derfor bør støttes av andre representasjoner (Webb et al., 2008). Spesielt i den tidlige innlæringen av algebra, siden utfordringer med algebra, kan skyldes at elevene ikke har forståelse for de algebraiske symbolene (Naalsund 2012). Symboler vil derfor ikke være like hensiktsmessige, om elevene ikke forstår hva symbolene betyr eller hvis symbolene ikke blir forklart. Funn i delanalyse 1, viser at lærebøkene bruker alternative representasjoner når de innfører algebraiske symboler, som illustrasjoner i form av balansemodeller, figurer og språket i eksempler. Funnet betyr at lærebøkene legger til rette for at elevene skal utvikle forståelse for symbolspråket, ved at andre representasjoner gir mening til symbolene, noe som er en forutsetning for å forstå representasjoner (Greeno & Hall, 1997). Webb et al. (2008) hevder allikevel at formelle representasjoner ofte blir presentert slik at elevene selv må se sammenhengen mellom symbolene og andre representasjoner, noe som kan bety at eksemplene i læreboka ikke er nødvendigvis er nok, om elevene må tilegne seg informasjonen selv. Jeg tenker derfor at symbolene og sammenhengen mellom symbolene og andre representasjoner, bør forklares mer enn det et eksempel gjør og at det er noe læreren må sørge for. Det er derfor positivt at eksemplene i lærebøker gjerne kommer etter samtale- eller utforskende oppgaver, slik at lærere kan inkludere og utdype eksemplene i klassesamtaler.

Funn i delanalyse 2 viser at elevene ofte må bruke symbolene for å kommunisere en løsning eller at symboler kan brukes som hjelperepresentasjon, spesielt i oppgaver hvor målrepresentasjonen er naturlig språk. I oppgaver hvor elevene skal løse en likning, trenger de imidlertid ikke å operere på de algebraiske symbolene for å finne en løsning. Elevene kan i stedet løse likningene ved hjelp av aritmetiske metoder (Filloy & Rojano, 1989), ved å tenke «hvilket tall må jeg legge til … for at svaret skal bli …?» og derfor betrakte likningen som et regnestykke hvor et tall mangler. I andre oppgaver trenger ikke elevene å bruke en symbolsk likning i det hele tatt, og heller bruke aritmetiske metoder. Dette gjelder spesielt tekstoppgavene i Matematikk. Tekstoppgavene likner tilsvarende oppgaver elevene har møtt i aritmetikken og kan fint løses uten å bruke algebraiske symboler. Det er til og med mer effektivt. Det kan også tenkes at elevene finner likninga, siden oppgaven etterspør at oppgaven skal løses som likning, men at uformelle metoder blir brukt for å finne svaret (Van Ameron, 2003), eller at elevene lager ei likning hvor x står alene på høyre side. Dette kan bety at elevene på 5. trinn ikke trenger de algebraiske symbolene for å løse likninger, og at de kun er en måte å representere ukjente verdier på. Slik sett er det ikke sikkert at de algebraiske symbolene oppleves som hensiktsmessig for elever på 5. trinn, selv om de er hensiktsmessig i arbeid med likninger. Samtidig vet vi at likninger ofte er elevenes inngangsport til algebra, og at overgangen fra aritmetikk til algebra kan føre til vanskeligheter (Kieran, 2006). At elevene heller støtter seg til de metodene de allerede kjenner til, er kanskje ikke så rart. Likevel burde lærebøkene gi elevene oppgaver slik at overgangen ikke kan unngås. Multi presenterer oppgaver hvor elevene heller skal velge hvilken likning som passer til gitte tekstoppgaver. Slik jeg ser det, kan en slik oppgavetype være en bedre løsning, om målet er at elevene skal omdanne språket til algebraiske symboler. Elevene må fremdeles tolke og omdanne informasjonen, men kan ikke velge andre målrepresentasjoner enn algebraiske symboler. Det kan dessuten bli en meningsfull diskusjon i klasserommet, om hvorfor den ene likninga representerer konteksten, mens de andre likningene ikke gjør det. Diskusjoner kan også omhandle hvordan konteksten ville endret seg om den skulle vært representert ved de andre likningene eller hva som gjør likningene ulike.

Naturlig språk brukes i lærebøkene både for å forklare matematikk i eksempler, for å beskrive en kontekst og som målrepresentasjon for å kommunisere en løsning. Tekstoppgaver eller kontekster blir ofte brukt for å gjøre matematikken med forståelig og relevant, og både Matematikk og Multi bruker tekstoppgaver for å representere likninger. Å bruke hverdagssituasjoner vil for elever på 5. trinn være hensiktsmessig, siden matematikken da settes inn i en sammenheng de kan kjenne igjen. Å løse likninger gitt som tekstoppgaver kan imidlertid være krevende for elevene, siden de må tolke teksten og finne relevant informasjon, omdanne informasjonen til symbolspråket og deretter løse likningen (Pawley et al., 2005; Duval 2004). Med tanke på at elevene på 5. trinn introduseres for likninger for først gang, er representasjonen skriftlig språk kanskje en startrepresentasjon som er i overkant krevende? Det krever i det minste at læreren hjelper elevene med å forstå hvordan en tekstoppgave kan tolkes og at sammenhengen mellom teksten og symbolspråket blir gjort eksplisitt.

Matematiske diskusjoner og kommunikasjon blir fremhevet som avgjørende for elevers forståelse og læring i matematikk (Wæge, 2015, s.22), og i det første aspektet av representasjonskompetansen står det at elevene skal bruke representasjoner for å kommunisere om matematikk. Lærebøkene ivaretar dette ved å gi elevene muligheten til å bruke muntlig språk som målrepresentasjon i samtaleoppgaver. Naturlig språk er hensiktsmessig i kommunikasjon, siden språket er egnet for å kunne forklare og resonnere (Duval, 2006), samtidig som representasjon både er effektiv og generell (Kilpatrick et al., 2001). Likevel trenger ikke språket å være tilstrekkelig alene for å løse samtaleoppgavene for alle elever, og noen vil være avhengig av hjelperepresentasjoner.

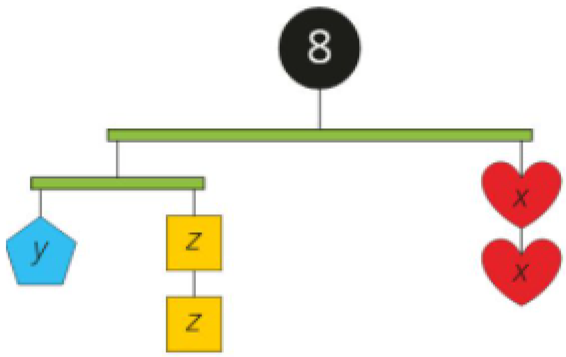
Funn i delanalyse 2, viser at elevene har tilgang på mange potensielle hjelperepresentasjoner, mer bestemt alle representasjonene læreboka kommuniserer. I mange oppgaver er symboler en naturlig hjelperepresentasjon, siden oppgavene stiller spørsmål på en slik måte at symbolske representasjoner er vanskelig å unngå. Muntlig språk vil også være en hensiktsmessig hjelperepresentasjon, når elever skal samarbeide. Matemagisk presenterer tabell i en av oppgavene, hvor likninga har flere løsninger. Tabeller er både effektive, generelle, klare og presise (Kilpatrick et al., 2001), og derfor hensiktsmessig. I tillegg er tabeller egnet for å systematisere informasjon og oppdage mønster. Å oppdage mønster, som relasjonen mellom verdien til x og y, vil kunne hjelpe elevene til å utvikle et relasjonelt-strukturelt syn på likhetstegnet (Stephens et al., 2013). Når det å løse likninger forutsetter dessuten at elevene har en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Filloy & Rojano, 1989 s. 19), understreker det tabellens hensiktsmessighet ytterligere.

Matematikk introduserer eksplisitt modeller som mulige hjelperepresentasjon i eksempler og tekstoppgaver. Selv om modeller også er hensiktsmessige for å sortere informasjon, og dessuten egnet for å tillegge nye begreper og operasjoner mening (Filloy & Rojano, 1989), er oppgavene i Matematikk så enkle, at elevene trolig ikke får hjelp av modellen. Det er en fare for at den ikke blir brukt som et verktøy, men at elevene bare tegner den fordi det står i oppgaven. Modellen er da trolig heller ikke bli oppfattet som en hjelperepresentasjon. Jeg mener ikke at modellen ikke er egnet i det hele tatt, men at om modeller av denne typen skal introduseres, må oppgavene skape et behov, slik at elevene ser nytteverdien.

Et annet funn i delanalyse 1, er at alle lærebøkene benytter balansemodeller for å forklare hva likninger er og for å representere ei likning elevene kan løse. Flere forskere mener balansemodellen er hensiktsmessig og hevder at modellen hjelper elevene å gjenkjenne den fysiske balansen, som videre gir elevene et mentalt blide som inneholder viktige prinsipper i likninger (Vlassis 2002; Filloy & Sutherland 1996). Modellen kan også hjelpe elever til å løse problemer med ukjente på begge sider (Warren & Cooper 2005) og bidrar til å gi elevene et relasjonelt syn på likhetstegnet (Pirie & Martin, 1997). Andre hevder at balansemodeller kan gi grobunn for feil, som det å flytte negative verdier (Vlassis 2002). I lærebøker på 5. trinn er ikke det å flytte negative verdier et tema og balansemodeller kan derfor være hensiktsmessige, men en slik begrensning påvirker modellens generalitet og effektivitet med tanke på at modellen ikke er like egnet når likningene blir vanskeligere på senere klassetrinn.

I lærebøkene er imidlertid balansemodellene utformet ulikt, noe som kan påvirke hvor hensiktsmessig modellen er. Både Matematikk og Multi bruker balansemodeller i form av balansevekter. Pirie og Martin (1997) hevder at skålvekta er utdatert, siden moderne vekter ikke lenger benytter balanseprinsippet. I så måte er kanskje vippehuska Matemagisk bruker mer hensiktsmessig, siden elevene har flere erfaringer med vippehusker og at det derfor er enklere for elever å tillegge representasjonen mening. Multi poengterer i sin lærerveiledning, at en forutsetning for å bruke vekta som representasjon er at elevene er fortrolige med balansevekt og foreslår vippehuske som alternativ representasjon (Alseth et. al., 2021b, s. 68). Matematikk bruker også en mer stilisert modell av balansemodellen, som minner om vippehuska, og hvor klarhet godt ivaretatt (Kilpatrick et al., 2001) siden modellen da er så enkel at elevene lett kan gjenskape den selv, om de har behov for det i tankeprosessen.

Matemagisk bruker også balansemodell i form av en uro, som vist i figur 5.1. Slik jeg ser det er ikke denne representasjonen like hensiktsmessig som vippehuska. Når elevene skal løse likninga uroen representerer skal de, ut ifra vekta, avgjøre verdien til hver side og videre hvilken verdi hver figur kan ha for at uroen skal være i balanse. Den totale vekta må være en del av likninga for å kunne gi de ukjente en bestemt verdi. Å omdanne uroen til symboler vil være vanskeligere med denne representasjonen, siden representasjonen d ikke underbygger de to sidene i likninger. Det er også vanskelig å avgjøre hvor en skal plassere likhetstegnet, siden det både kan plasseres mellom høyre og venstre side, men også mellom summen av alle figurene og den totale vekta. I følge Kilpatrick et al. (2001) betyr det at synligheten er svekket, siden den matematiske ideen ikke er like lett å se gjennom representasjonen. Det kan da være en fare for at elevene ikke opplever at de arbeider med likninger, når oppgavene benytter representasjonen balansemodell i form av en uro. Er da uroen en egnet representasjon for å lære om likninger eller blir den oppfattet som en grubleoppgave, hvor de skal finne verdien til noen figurer? I mine øyne har ikke uroen kvaliteter vippehuska ikke har, siden uroen ikke tydeliggjør flere aspekter ved likninger.



Figur 5.1 Uro som balansemodell i (Raen et al., 2020, s. 76)

Ut ifra funnene i delanalyse 1 og 2, kan en konkludere med at første aspektet ved representasjonskompetansen blir ivaretatt ved at lærebøkene kommuniserer varierte representasjoner som elevene også må bruke selv, for å løse oppgaver eller kommunisere om matematikken. Samtidig viser tabellene gjengitt i analysen at den enkelte læreboka bruker enkelte representasjoner mer enn andre, og at noen sider ved objektet derfor kan bli skjult (Greeno & Hall, 2006). Representasjonene lærebøkene bruker er hensiktsmessige for å arbeide med likninger. Balansemodellene er egnet for å forklare viktige prinsipper ved likninger, men utformingen kan påvirke hvor hensiktsmessig representasjonen er. Slik jeg ser det, er vippehusken den som er mest hensiktsmessig, siden den ivaretar balanseprinsippet i likninger og er en representasjon elevene har erfaringer med fra dagliglivet. De algebraiske symbolene blir forklart ved hjelp av andre representasjonssystemer, og tillagt mening, slik at de også blir hensiktsmessig representasjoner. Naturlig språk, som tekstoppgaver, er en representasjon som kan være utfordrende for elevene, siden det å omdanne en hverdagssituasjon til en symbolsk likning er kognitivt krevende. Det betyr ikke at tekstoppgaver ikke bør brukes som representasjon, men at overgangen fra språk til symboler bør modelleres. Muntlig språk er dessuten hensiktsmessig for å begrunne og forklare. I tillegg er språket viktig for å utvikle matematisk forståelse. Det er derfor positivt at mange av oppgavene legger opp til samarbeid og samtaler.

5.2 Å kunne oversette mellom ulike representasjoner som representerer det samme matematiske objektet.

Like viktig som være i stand til å bruke flere representasjoner, er det å kunne oversette mellom dem (Kilpatrick et al., 2001) og transformasjoner beskrives som kjernen i matematisk aktivitet (Duval, 2006). Å kunne bruke og veksle mellom representasjoner er også viktig for begrepsforståelsen (Enge & Valenta, 2013), og derfor viktig i likninger som er et nytt begrep for elevene på 5. trinn. Selv om omdanninger er mer kognitivt krevende, hevder Duval (2006) at behandlinger oftest får mest oppmerksomhet i undervisning, spesielt innenfor det symbolske representasjonssystemet. I delanalyse 3 fant jeg derimot at nesten alle oppgavene krever omdanning, noe som indikerer at lærebøkene ivaretar representasjonskompetansen ved å gi elevene mange muligheter til å omdanne det matematiske objektet. Selv i oppgaver hvor elevene må behandle symbolene, krever oppgaven ofte omdanning fra et annet representasjonssystem først. Datamaterialet viser også at det er få omdanninger til representasjonssystemet illustrasjoner, med mindre elevene lager modeller som hjelperepresentasjoner. Hjelperepresentasjonen vil da kreve omdanning mellom tre representasjonssystemer, men er, som beskrevet i forrige delkapittel, en omdanning som kan være overflødig.

Å bytte fra et representasjonssystem til et annet, er ofte et kritisk punkt i matematikk og det er derfor viktig å støtte elevene når de skal arbeide med transformasjoner (Duval, 2004). At lærebøkene inneholder mange oppgaver hvor matematiske objekter må omdannes, er derfor ikke nødvendigvis nok for å ivareta dette aspektet ved representasjonskompetansen. Likevel tenker jeg at lærebøkene tar grep som kan bidra til å gjøre omdanninger mer forståelig for elevene og slik fungere som støtte. Et eksempel er balansemodellene, som funn i delanalyse 1 viser at alle lærebøkene benytter for å representere likninger Hvordan balansemodellene er utformet, påvirker imidlertid hvor godt overgangen fra illustrasjon til symboler blir forklart. Jeg spesielt på balansemodellene med likhetstegn, som den balansemodellen i Matematikk som ikke beskriver en hverdagssituasjon og balansevekta i Multi, Siden modeller ofte involverer en transformasjon fra et konkret til et mer abstrakt nivå (Warren & Cooper, 2005), kan det at modellen er påført symboler lette omdanningen. Spesielt symbolet = tydeliggjør ekvivalensen mellom de to sidene i likninga. Modellen blir slik en slags mellomting mellom illustrasjon og symboler, noe som også bidrar til at synligheten blir tydeligere.

Siden tall, ukjente og = allerede er der, kan elevene flytte symbolene ut av modellen og se en symbolsk likning, kun ved å sett inn +. En kan også tenke seg at noen elever etter hvert begynner å betrakte kun symbolene, selv om de er en del av en illustrasjon. Når Multi i tillegg bruker balansemodellene med kjente verdier før de introduserer x, kan det bidra til å gjøre overgangen fra det konkrete til det mer abstrakte mer tydelig, siden elevene allerede har et mentalt bilde av hvordan modellen fungerer, før de nye symbolene introduseres. Også funnet i delanalyse 1, som beskriver at lærebøkene bruker andre representasjonssystemer for å forklare de algebraiske symbolene kan bidra til å forklare omdanninger. Eksemplene modellerer omdanning fra konkrete til abstrakte representasjoner, ved å gradvis innføre algebraiske symboler.

Oppsummert kan en si at det andre aspektet ved representasjonskompetansen blir ivaretatt, ved at de fleste oppgavene i lærebøkene krever at elevene omdanner det matematiske objektet. Noen representasjoner kan imidlertid være mer hensiktsmessige, for at elevene skal kunne forstå hva som skjer når et matematisk objekt omdannes. I mitt datamateriale, var balansemodellene med symboler og likhetstegn et slikt eksempel. Samtidig er det viktig å påpeke at omdanning er et kritisk punkt i arbeid med matematikk, og at elevene kan trenge mer støtte enn det læreboka gir.

5.3 Å selv kunne velge hensiktsmessige representasjoner som gir hjelp til å få innsikt i viktige aspekter ved et matematiske objekt, finne en løsning på et matematisk problem eller for best mulig å kommunisere en løsning

Fordi representasjonssystemer har fordeler og ulemper, er det viktig å kunne velge den som er mest hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2001). Om elevene som får muligheten til å velge representasjoner selv, enten for å forstå eller kommunisere matematikk, utvikler de fleksible representasjoner tilpasset det aktuelle formålet (Greeno & Hall, 1997). Samtidig kan elevene velge de representasjonene som gir mening for dem.

Delanalyse 4 viser at lærebøkene gir elevene få muligheter til å velge målrepresentasjoner selv, siden målrepresentasjonene i stor grad er definerte av læreboka. Når oppgaveformuleringene også til en viss grad styrer valg av mulige hjelperepresentasjoner, betyr at elevene mister muligheten til å vurdere representasjoner egenskaper og bruke de representasjonene de selv mener er egnet som verktøy for forståelsen (Greeno & Hall, 1997, s. 362). I og med at valg av representasjoner er styrt av læreboka, er dessuten både hva som er en hensiktsmessig representasjon og hva som skal belyses ved det matematiske objektet bestemt. Det er ikke uvanlig å undervise noen representasjonsformer eksplisitt (Greeno & Hall, 1997), slik lærebøkene gjør når de velger å kommunisere noen representasjoner eller vektlegge noen representasjoner mer enn andre. I mange tilfeller er det fornuftig, siden læreboka skal gi elevene opplæring i matematiske objekter og representasjoner som viser ulike sider ved objektene. En kan også argumentere med at likninger er et nytt tema for elevene, og at en av lærebokas oppgaver da både er å kommunisere egnede representasjoner og gi elevene trening i å bruke disse representasjonene. Samtidig kan det føre til at elevene oppfatter representasjonene læreboka kommuniserer som de riktige eller mest egnede representasjonene (Pape & Tchoshanov, 2001). Datamaterialet viser at symboler er en representasjon alle lærebøkene bruker mye, både som målrepresentasjon og hjelperepresentasjon, og at det å løse likninger implisitt er ensbetydende med å bruke symboler. Dette kan føre til at elevene oppfatter symbolene som likninger og ikke mulig en måte å representere likninger. De kan altså oppfatte representasjonen som objektet og ikke som et uttrykk for objektet (Enge & Valenta, 2013 s.10).

En forutsetning for at elevene skal kunne velge den eller de representasjonene de synes er mest hensiktsmessig, er de har tilgang på representasjoner de kan velge mellom (Kilpatrick et al., 2001). Funn i delanalyse 1 og 2 viser at lærebøkene kommuniserer ulike representasjoner elevene kan bruke, at noen representasjoner opptrer hyppigere som målrepresentasjon, men at de andre representasjonene læreboka kommuniserer kan brukes som hjelperepresentasjoner. Disse funnene betyr at forutsetningene ligger til rette for at elevene kunne hatt mer valgfrihet, men at lærere må kompensere for at dette aspektet ved representasjonskompetansen ikke blir ivaretatt. En sentral del av en matematikklærers arbeid er nettopp å velge eller utforme oppgaver (Valenta 2016 s. 2). Om matematikklæreren bruker boka som grunnlag for undervisning er valg av oppgaver allerede gitt, men det betyr ikke at oppgavene ikke kan justeres for å gi elevene valgfrihet. Læreboka er et godt utgangspunkt, men en kan for eksempel ta bort setninger i oppgaveteksten som «*løs som likning*», så elevene ikke tror de må bruke algebraiske symboler. Det som da kan skje er at elevene ikke bruker likninger i det hele tatt, noe som kanskje er poenget i kapittelet om likninger. Samtidig sier det kanskje noe om at algebraiske representasjoner ikke er den mest hensiktsmessige representasjonen for den aktuelle oppgaven, om elevene bruker andre representasjoner eller representasjonssystemer for å finne en løsning, og lykkes med det.

Aspektet ved representasjonskompetansen som omhandler å få muligheten til å velge representasjoner selv, blir altså ikke like godt ivaretatt av lærebøkene, siden de fleste oppgavene i lærebøkene bestemmer hvilken representasjon elevene skal bruke, enten eksplisitt eller implisitt. Skal elevene ha muligheten til å velge representasjoner selv, kan imidlertid oppgaver i lærebøkene som utgangspunkt, men krever at lærer modifisere oppgaveteksten, slik at forventet målrepresentasjon ikke blir eksplisitt.

5.4 Å kunne reflektere over representasjoners muligheter og begrensninger og sammenhenger mellom ulike representasjoner.

Å kunne reflektere omkring representasjoner er viktig for å forstå at representasjoner er et redskap i matematikk og for å forstå forbindelser mellom ulike representasjoner (Duval, 2004; Greeno & Hall, 1997; Pape & Tchoshanov, 2001). Delanalyse 5 undersøkte derfor om lærebøkene eksplisitt foreslår spørsmål som fremmer refleksjoner omkring sammenhengen mellom representasjoner eller representasjoners egenskaper. I datamaterialet stilte verken oppgaver, eksempler eller lærerveiledningene slike spørsmål. Funnet fant jeg overraskende, siden et av punktene i kjerneelementet representasjoner og kommunikasjon er at elevene skal få muligheten til å forklare og grunngi valg av representasjon (Utdanningsdirektoratet**,** 2020). Slik jeg ser det, vil det være vanskelig for elevene å begrunne hvorfor de bruker en bestemt representasjon, om de ikke kan si noe om representasjonenes egenskaper, eller hvilke forbindelser det er mellom representasjoner fra ulike representasjonssystemer. Stylianou (2010) har derfor et poeng når hun fremhever at det er viktig å gjøre representasjoners rolle eksplisitt i undervisningen.

Eksplisitt undervisning om representasjoner, vil være spesielt meningsfullt i innlæring av nye begreper siden det å undervise om representasjoners forbindelser kan gi bedre begrepsforståelse (Justnes, 2018). At likninger er et nytt begrep for femtetrinnselever, understreker ytterligere at lærebøkene burde ivaretatt dette aspektet. Samtidig er det viktig å undervise om representasjonenes forbindelser, siden det er vanskelig for elevene å se disse selv (Duval, 2004), noe som kan tyde på at læreren uansett spiller en viktig rolle som tilrettelegger for faglige samtaler.

Analysen viser at flere oppgaver utgjør et potensiale for å diskutere representasjoners egenskaper og forbindelser, men også andre funn i undersøkelsen viser at muligheten for å kunne reflektere, delvis blir ivaretatt. Felles for alle lærebøkene er at de inneholder mange samtaleoppgaver, og oppgaver hvor elevene skal samarbeid. Tanken bak disse oppgavene er at læreren skal oppsummere i plenum i etterkant, og klassesamtalene utgjør et stort potensiale for å reflektere eller diskutere representasjoner. I lærerveiledningene står tips til hvilke spørsmål en kan stille i disse samtalene, men søkelyset er rettet mot hvilke strategier elevene har brukt. Læreren kan og bør i disse samtalene også rette elevenes oppmerksomhet mot de ulike representasjonene og utfordre elevene på å oversette mellom dem (NCTM, 2014 i Torkhildsen & Stedøy 2017), for eksempel ved å sammenligne representasjonene elevene har brukt i de ulike løsningene og hvordan representasjonene har bidratt til å løse oppgaven.

Når det gjelder aspektet ved representasjonskompetansen som handler om at elevene skal kunne reflektere omkring representasjoner, kan vi derfor si at læreboka ikke ivaretar aspektet eksplisitt. Oppgavene i læreboka kan likevel brukes som grunnlag for refleksjon i klassesamtaler som læreren styrer. Læreren spiller med andre ord en viktig rolle i samtaler, ved å stille de riktige spørsmålene som gir elevene muligheten til å reflektere. Det er derfor positivt at lærebøkene inneholder samtaleoppgaver, og slik legger til rette for matematiske diskusjoner.

5.5 Å vurdere om representasjonskompetansen blir ivaretatt

I analysen undersøkte jeg hvordan oppgaver og eksempler ivaretok de ulike aspektene i representasjonskompetansen. En av hensiktene med denne studien, var å utvikle noen spørsmål lærere eller lærerspesialister kan bruke for å undersøke om en oppgave eller et undervisningsopplegg bidrar til å utvikle hele eller deler av representasjonskompetansen. Jeg vil derfor i dette delkapittelet presentere spørsmålene og utdype hvorfor dette er spørsmål det er lurt å stille seg i planleggingsfasen.

Jeg stilte i den vertikale analysen følgende spørsmål:

1. *Hvilket matematisk innhold omhandler oppgaven?*
2. *Hvilke representasjoner blir brukt i oppgaven?*
3. *Hvilke representasjoner kan vi forvente at elevene bruker for å løse oppgaven?*
4. *Krever oppgaven at elevene må omdanne eller behandler startrepresentasjonen?*
5. *Kan elevene velge representasjoner selv når de skal løse oppgaven?*
6. *Gir oppgaven mulighet for refleksjon omkring representasjonene?*

Når man som lærer skal rette søkelyset mot representasjoner i matematikkundervisningen, kan dette være spørsmål det er lurt å stille seg. Spørsmålene er utformet slik at de ikke retter seg mot likninger på 5. trinn, og kan derfor brukes på andre tema eller klassetrinn.

De tre første spørsmålene undersøker hvilke representasjoner som blir kommunisert og hvilke representasjoner oppgaven legger opp til at elevene må bruke. Når en også identifiserer hvilket matematisk innhold som blir representert, er det for å kunne avgjøre om representasjonene får frem viktige sider av det matematiske innholdet, altså om representasjonene er hensiktsmessige. Det er viktig å påpeke at spørsmålene ikke besvarer om elevene faktisk forstår de representasjonene. Likevel kan de bidra med å vurdere om representasjonene er egnet, og hva representasjonene formidler. Hvis start-målrepresentasjon er bestemt, kan det også være lurt å tenke igjennom om elevene kjenner til noen hjelperepresentasjoner de kan bruke, som redskap i tankeprosessen.

Det fjerde spørsmålet er for å identifisere om elevene må omdanne eller behandle det matematiske objektet, altså om startrepresentasjonen er en annen enn den representasjonen elevene vil bruke for å kommunisere en løsning. Omdanninger kan være krevende, og det er ikke sikkert alle elevene forstår at det er representasjonen som endrer seg, og ikke det matematiske objektet når det skjer et skifte i representasjonssystem. Det kan bety at elevene trenger ekstra støtte for å se at det samme objektet kan representeres gjennom ulike representasjonssystemer, og at en som lærer tenker igjennom hvordan elevene kan støttes på best mulig måte.

Spørsmålet om valgfrihet sjekker om oppgaven låser elevene til en bestemt representasjon. Noen ganger kan det være fornuftig, mens det andre ganger er bedre at elevene selv kan velge hvilke representasjoner de bruker. Det kommer an på om hensikten er å trene elevene i å bruke bestemte representasjonssystemer eller om elevene skal ha muligheten til å velge representasjoner som er hensiktsmessige for dem.

Om oppgaven gir mulighet for refleksjon, handler det om å identifisere elementer ved en oppgave eller løsninger på oppgaven som kan danne grunnlag for en matematisk samtale om representasjoner. Når slike elementer er definert, bør en som lærer bestemme hvilke spørsmål en vil stille. Spørsmålene kan omhandle hva som er likt og ulikt mellom to representasjonssystemer eller spørsmål omkring representasjonenes egenskaper, derunder muligheter og begrensninger.

Det er viktig å påpeke at en oppgave som kun ivaretar noen aspekter ikke nødvendigvis er en dårlig oppgave. I noen tilfeller er det vel så viktig at man blir klar over hvilke aspekter oppgaver ikke ivaretar, spesielt om det i et tema ofte er det samme aspektet. Læreren bør da tenke igjennom om aspektet kan synliggjøres på andre måter i undervisningen. I andre tilfeller er det kanskje små endringer som må til for å dekke et aspekt, eller man får bekreftet at oppgaven ivaretar det, eller de aspektene en ønsker å arbeide med.

5.6 Studiens begrensninger

I denne studien har mitt fokus vært rettet mot hvordan representasjonskompetansen blir ivaretatt, ved å analysere oppgaver i lærebøkene Matematikk 5, Multi 5b og Matemagisk 5b. Det har ikke vært min intensjon å vurdere kvaliteten på læreverkene. Likevel har jeg vurdert oppgaver, eksempler og de representasjonene lærebøkene har valgt å bruke. På den måte kan en si at kvaliteten er vurdert indirekte, ved at jeg har påpekt hvilke representasjoner som er mindre hensiktsmessige og påpekt at lærebøkene har noen mangler med tanke på å ivareta representasjonskompetansen. Slik jeg ser det, er dette uunngåelig i analyse av lærebøker.

En svakhet ved min metode, innholdsanalyse, er at det ble mange delanalyser, koder og kategorier. Selv om jeg beskrev kodene eksplisitt, kan noen av kodene blitt brukt ulikt. Jeg har allikevel prøvd å sikre avhengighet ved å beskrive alle analyseprosessene så nøyaktig som mulig i metodekapittelet og være eksplisitt med tanke på hvordan kodene har blitt brukt i analysen.

I kvalitativ forskning, vil forskeren aldri være usynlig. Et annet aspekt som derfor, i ytterste konsekvens, kan ha påvirket analysen, er mine oppfatninger av læreverkene. Jeg jobber selv som lærer og har fra egen arbeidshverdag erfaring med noen av lærebøkene. Jeg mener allikevel tror jeg har unngått å være forutinntatt i analysen, ved å bruke analyseskjema og etterstrebet å analysere alle lærebøkene med de samme kriteriene.

Den største svakheten med min undersøkelse er nok at jeg har sett på et begrenset antall oppgaver, siden undersøkelsen kun omhandlet temaet likninger på 5. trinn og jeg kun analyserte oppgaver i kapittelet om likninger i grunnbøkene. Samtidig oppdaget jeg i datainnsamlingen, at det å analysere for eksempel oppgavebøker og digitale ressurser i tillegg, ikke tilførte andre representasjoner til undersøkelsen. Jeg kan derfor si at grunnboka var representativ for de representasjonene læreverket bruker for å representere likninger. Det kan allikevel ikke utelukkes at resultatet av undersøkelsen kunne sett annerledes ut, om jeg hadde undersøkt hele læreboka, et annet tema, andre eller flere lærebøker eller lærebøker fra flere årstrinn. Jeg utelukker ikke at jeg da kunne gjort andre funn. Undersøkelsen påpeker likevel at lærebøkene ikke ivaretar alle ved aspektene ved representasjonskompetansen i like stor grad, og at dette gjelder alle lærebøkene i studien. Da disse funnene er mer generelle og ikke knyttet til en enkelt lærebok, er det ikke utenkelig at funnene er representative, også for andre tema eller bøker. Undersøkelsen kan dessuten bidra til å gjøre lærere bevisste at læreboka ikke nødvendigvis dekker alle aspekter ved representasjonskompetansen, også når de arbeider med andre tema i matematikk.

6 Avslutning

Uten representasjoner er det umulig å drive med matematikk, og en del av matematikken handler derfor om å tilegne seg kompetanse i å bruke ulike representasjoner. Siden læreboka er viktig i matematikkfaget, har denne studien belyst hvilke muligheter oppgaver og eksempler i lærebøker gir, med tanke på å utvikle elevenes representasjonskompetanse i temaet likninger på 5. trinn.

Funn i analysen, viser at noen av aspekter ved representasjonskompetansen blir ivaretatt, for eksempel gjennom at læreboka kommuniserer ulike representasjoner, som er hensiktsmessige for å representere likninger, og at mange oppgaver krever at elevene må oversette mellom representasjonssystemer. Andre aspekter ved representasjonskompetansen blir ivaretatt i mindre grad. At læreboka ikke ivaretar hele representasjonskompetansen, kan i ytterste konsekvens kan føre til at elevene ikke tilegner seg en fullstendig representasjonskompetanse om undervisningen følger læreboka. Samtidig betyr funnene at læreren spiller en viktig rolle, som den som kan kompenserer for de aspektene ved representasjonskompetansen læreboka ikke dekker. Å kunne kompensere for lærebokas mangler, krever imidlertid at lærere er bevisst hvilke aspekter ikke blir ivaretatt, noe denne studien nå har belyst.

For å utvikle elevenes representasjonskompetanse er det dessuten avgjørende at lærere vet hvilken rolle representasjoner spiller i matematikken. Dette understrekes av Stylianou (2010), som i sin undersøkelse fant at elevers muligheten til å bruke representasjoner i undervisning, hang sammen med hva læreren tenkte om representasjoner. I så måte er denne studien et bidrag, for både å synliggjøre hva representasjonskompetanse innebærer, at representasjoner er viktig både i tankeprosessen og i kommunikasjon og at det, for best mulig å bruke representasjoner i undervisning, er viktig å være bevisst ulike representasjoners egenskaper. I tillegg kan spørsmålene jeg brukte i analysen, sammenfattet i kapittel 5.5, bidra til bevissthet omkring hvordan ivaretagelse av representasjonskompetanse kan undersøkes.

Fagfornyelsen er også et skritt i riktig retning for å synliggjøre representasjonenes rolle. I den nye læreplanen blir representasjoner nevnt eksplisitt i kunnskapsmål fra første til åttende årstrinn, og *representasjoner og kommunikasjon* er fremhevet som et eget kjerneelement (Utdanningsdirektoratet, 2020). Når representasjoner inkluderes i et eget kjerneelementet, er det ytterligere et argument for at kunnskap om representasjoner er viktig, siden kjerneelementene er det viktigste i faget.

Som en forlengelse av denne studien, kunne det vært interessant å undersøke om mine funn er gjeldende for temaet likninger på andre klassetrinn eller i andre tema i matematikk. Alternativt ville det å undersøke om elevene faktisk forstår og bruker de representasjonene læreboka kommuniserer, gitt innsikt i om representasjonene i lærebøkene oppleves som hensiktsmessige for elevene. I forbindelse med innføringen av Fagfornyelsen, kunne det å undersøke læreres oppfatning av representasjoner i Norge, og i hvor stor grad representasjoner faktisk er en integrert del av matematikkundervisningen, også vært interessant. For selv om representasjoner er viktig i matematikk, er det ikke sikkert alle lærere vet hvor viktige de egentlig er.

Kilder

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and mathematics, 112*(3), ss. 159 - 170.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., & McNeil, N. (2007). A Longitudinal Examination of Middle School Students' Understanding of the Equal Sign and Equivalent Equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), ss. 221 – 247.

Alseth, B., Arnås, A.-C., Røsseland, M., & Nordberg, G. (2021a). *Multi 5b Grunnbok.* Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.-C., Røsseland, M., & Nordberg, G. (2021b). *Multi 5b Lærerens bok.* Gyldendal.

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus.

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). (2012) Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Bahavior*, ss. 467 - 488.

Aschehoug. (u.å.). *Matemagisk 5 - 7. Lærerveiledning*. Hentet fra https://aunivers.lokus.no/fagpakker/realfag/matemagisk-5-7/fleksibelt-innhold/til-laereren/laererveiledning/laererveiledning

Bjørnstad, Ø., Kongelf, T. R., & Myklebust, T. (2006). *Alfa. Matematikk for allmennlærerutdanningen.* Fagbokforlaget.

BOK365. (2019, mai 2). *Her er Norges største forlag.* Hentet fra https://bok365.no/artikkel/her-er-norges-storste-forlag/

Carpenter , T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM, 37*(1).

Charalambous, Y. C., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractiona in Textbooks form Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12* (2), ss. 117 - 151.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education (8. utgave).* New York: Routledge.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2016). Forskningsetiske retningslinjer forsamfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. . Hentet fra Forskningsetiske retningslinjer forsamfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi: https://www.etikkom.no

Duval. (2004). A cruical issue in mathematics education: The ability to change representation register. . *Proceedings of the 10th International Conference on Mathematics Education.* Copenhagen.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 103 - 131.

Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing, 62*(1), ss. 107 - 115.

Enge, O., & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten*(1), ss. 8 - 12, 46.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), ss. 232-236.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education, 45*(5), ss. 633-646.

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse – med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempel. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(2), ss. 79 - 96.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), ss. 19 - 25.

Filloy, E., & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. I K. C. A. Bishop, *International handbook of mathematics education (Vol. 1)* (ss. 139 - 160).

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting Multiple representations in Algebra. I NTCM, *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook.*

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. *Phi Delta Kappan*, ss. 361 - 367.

Guba. (1981). Criteria for Assessing the Truthworthiness of Natrualistic Inquiries. *Educational Communication and Technology, 29*(2), ss. 75 - 91.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2012). Introduction. I G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Red.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development .* (ss. ix-xiii). Dordrecht: Springer.

Gulaker, D. T. (2018). Utforskende læring i matematikk. I T. Fiskum, H. P. Andersen, & D. T. Gulaker, *Den engasjerte eleven: undrende, utforskende og aktiviserende undervisning i skolen.*

Guldbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K., & Olsen, V. S. (2020a). *Matematikk 5.* Cappelen Damm.

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K., & Olsen, V. S. (2020b). *Matematikk 5 – Lærerveiledning.* Cappelen Damm.

Hsieh, H.-F., & Shannon, S. E. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research, 15*(9), ss. 1277 - 1288.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments: three teachers' ways to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education, 11*(3), ss. 5 - 30.

Justnes, C. N. (2018). *Representasjoner i matematikk.* Hentet fra http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-12/Hva%20er%20representasjoner%20i%20matematikk%2018.11.29_0.pdf

Kieran, C. (2006). Research on the teaching and learning of algebra. I A. Gutiérrez, & P. Boero (Red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (ss. 11 - 49). Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. I F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 707 - 762).

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics. .* Mathematics Learning Study Committee, National Academy Press.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from solving Equations. *Journal of Research in Mathematics Education, 37*(4), ss. 297 - 312.

Kongelf, T. R. (2017). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence* (ss. 155 - 194). Oslo: Cappelen Damm.

Kongelf, T. R. (2019). Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge (doktoravhandling). Universitetet i Agder.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis. An Introduction to Its Methodology. Third edition.* Sage.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A. C., Nilsen, T., & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo. Hentet fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/2019/timss-2019-kortrapport.pdf

Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2017). Using textbooks in the mathematics classroom - the teachers' view. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence.* (ss. 287 - 314). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education, 41*(6), 809 - 826.

Matteson, S. M. (2007). Middle school students' representional understanding and justification schemes: Gleanings from cognitive interviews (doktoravhandling). Texas A&M University,. Hentet fra http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/ETD-TAMU-1682/MATTESON-DISSERTATION.pdf?sequence=1

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* NCTM Reston.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark. Hentet fra.* Uddannelseministeriet. Hentet fra http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? : a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency (Vol. nr 154).* Oslo: Unipub forlag.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice, 40*, ss. 118 - 127.

Pawley, D., Ayres, P., Cooper, M., & Sweller, J. (2005). Translating words into equations: a cognitive load theory approach. *Educational Psycholog, 25*(1), ss. 75 - 97.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what?2. *British Educational Research Journal, 28*(4), ss. 567 - 590.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education, 46*, ss. 685-698.

Pirie, S. E., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation, and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*, ss. 159 - 181.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.

Raen, K. M., Kongsnes, A. L., Nyhus, G., & Rang-Lee, H.-L. (2020). *Matemagisk 5b.* Aschehoug.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Chávez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership, 61*(5), ss. 61 - 66.

Rezat, S. (2012). Interactions of teachers´ and students´ use of mathematics textbooks. I G. G., P. B., & L. Trouche (Red.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (ss. 231 - 246). Dordrecht: Springer.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries* (ss. 495 - 514). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of ”well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*(2), ss. 145–66.

Selvik, B. K., Rinvold, R., & Høines, M. J. (2007). *Algebra og funksjonslære.* (B. K. Selvik, Red.) Caspar.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), ss. 1 - 36.

Smith, M. (2011). A procedural focus and a relationship focus to algebra: How US teachers and Japanese teachers treat systems of equations. I J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, *Early Algebraization: A global dialouge from multiple perspectives.* (ss. 511 - 528). Springer.

Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, ss. 173 - 182.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conseptions of representations in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, s. 325−343.

Svingen, O. L., & Gilje, Ø. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremidler i matematikk.* Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/kunnskapsgrunnlag-for-kvalitetskriterium-for-laremiddel-i-matematikk/

Torkildsen, S. H., & Stedøy, I. M. (2017). *Undervisning – Planlegging, prosess og produkt.* Hentet fra Matematikksenteret.no: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/Sted%C3%B8y_Torkildsen%20Planlegging_prosess_produkt.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan for matematikk 1.-10. trinn.* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Hva er kjerneelementer?* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Valenta, A. (2016). *Kognitive krav i matematikkoppgaver.* Hentet fra matematikksenteret.no: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta%20Kognitive%20krav%20i%20matematikkoppgaver_0.pdf

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*, ss. 63 - 75.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*, ss. 341 - 359.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Young Children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns. *Matehematics Education Research Journal, 17*(1), ss. 58 - 72.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Teaching in the Middle School., 14*(2), ss. 110 - 113.

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk - redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 26*(2), ss. 22-27.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to Transparent Features of Opaque Representations of Natural Numbers. . I A. Cuoco, & F. Curico (Red.), *The roles of representations in school mathematics.*

Vedlegg

Vedlegg 1: Analyseskjema

Vedlegg 1:

ANALYSESKJEMA FOR REPRESENTASJONER I LÆREBØKER

HORISONTAL ANALYSE

Bakgrunnsinformasjon	**Generell struktur – kapittel om likninger**
Tittel Forfattere Utgiver og utgivelsesår Sidetall hele boka/kapittelet om likninger Andre ressurser Hva lærerveiledningen sier om representasjoner?	Hvor i boka er kapittel om likninger? Hva elevene har lært i forkant? Kapittelets oppbygning Antall oppgaver, deloppgaver og eksempler i kapittelet Fordeling av oppgaver (tema og oppgavetype)

VERTIKAL ANALYSE

Kommunisert til elevene	**Kreves av elevene**			
Å forstå og bruke ulike hensiktsmessige representasjoner i tankeprosessen og for å kommunisere en matematisk ide eller kommunisere om matematikk		Å kunne oversette mellom ulike representasjoner som representerer det samme matematiske objektet.	Å selv kunne velge hensiktsmessige representasjoner som gir hjelp til å få innsikt i viktige aspekter ved et matematiske objekt, finne en løsning på et matematisk problem eller for best mulig å kommunisere en løsning	Å kunne reflektere over representasjoners over muligheter og begrensninger og sammenhenger mellom ulike representasjoner.
DELANALYSE 1	**DELANALYSE 2**	**DELANALYSE 3**	**DELANALYSE 4**	**DELANALYSE 5**
1. Hvilket matematisk innhold omhandler oppgaven eller eksempelet? **2. Hvilke representasjoner blir brukt i oppgaven eller eksempelet?**	**Hvilke representasjoner kan vi forvente at elevene bruker for å løse oppgaven?**	**Krever oppgaven at elevene må omdanne eller behandle startrepresentasjonen?**	**Kan elevene selv velge representasjon når de skal løse oppgaven?**	**Gir oppgaven mulighet for refleksjon omkring representasjonene?**
Koder/kategorier	**Koder/kategorier**	**Koder/kategorier**	**Koder/kategorier**	**Koder/kategorier**
Kode matematisk innhold og startrepresentasjon 1. koder utvikles fra datamaterialet 2. Koder og kategorier utviklet fra Duval (2006)	Kode målrepresentasjon Koder og kategorier utviklet fra Duval (2006)	Kode om start- og målrepresentasjon er lik eller ulik. Kategorier utviklet fra begreper hentet hos Duval (2006)	Finne ord/setninger i datamaterialet som indikerer hvilket representasjonssystem elevene skal bruke. Koder utvikles fra datamaterialet	identifisere ord/ setninger i oppgavene som oppfordrer til refleksjon Koder utvikles fra datamaterialet

NTNU
Kunnskap for en bedre verden