Astrid Erdal
Øystein Spernes

Figurmønster som introduksjon til algebra

En kvalitativ studie av mellomtrinnselevers arbeid med figurmønster på vertikale tavler

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7.trinn
Veileder: Hermund André Torkildsen
September 2021

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Astrid Erdal
Øystein Spernes

Figurmønster som introduksjon til algebra

En kvalitativ studie av mellomtrinnselevers arbeid med figurmønster på vertikale tavler

Masteroppgave i Master i lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 1-7.trinn
Veileder: Hermund André Torkildsen
September 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien tar for seg kjennetegn på robust matematikkundervisning, der elevene benytter vertikale tavler i arbeid med en figurmønsteroppgave. Bakgrunn for valg av tema er TIMMS-resultatene fra 2015 og 2019, som viser at norske 5. og 9. klassinger presterer dårlig innenfor emnet algebra. Flere forskere anbefaler å bruke figurmønsteroppgaver som introduksjon til nettopp algebra.

Til å vurdere undervisningen, har vi benyttet Schoenfeld og Flodens (2014) rammeverk Teaching for Robust Understanding (TRU). Rammeverket bygger på en sammenfatning av hva forskning anser å være god matematikkundervisning. For å kunne vurdere undervisningen til «robust», må det matematiske innholdet være tilpasset elevgruppen, de kognitive kravene må opprettholde et produktivt strev, og elevene må gis tilgang til matematikken gjennom å dele egne og andres ideer. I tillegg skal lærer bygge videre på elevenes ideer og adressere eventuelle misoppfatninger. TRU-rammeverket fokuserer ikke på spesifikke matematiske emner. Vår studie omhandler generalisering av figurmønster, og vi valgte derfor å benytte Lannins (2005) rammeverk til å vurdere elevenes generaliseringsstrategier og begrunnelser. Elevresultatene dannet et grunnlag for å vurdere om matematikken var tilpasset elevgruppen i henhold til TRU-rammeverket.

Peter Liljedahl (2016) har i sin forskning arbeidet frem en metodikk der elevene jobber i tilfeldige treergrupper på vertikale, ikke-permanente tavler. Vi ønsket i vår studie å undersøke hvordan denne arbeidsformen innvirket på vurderingen av robust matematikkundervisning. I en kvalitativ kasusstudie analyserte vi videoopptak av fire fokusgrupper i to klasser på mellomtrinnet. For å kunne vurdere elevenes bruk av vertikale tavler, deltok klassenes øvrige elever i undervisningsøktene. Klassesamtalene er derfor også en del av datamaterialet. Vi intervjuet i tillegg lærerne som gjennomførte undervisningsopplegget for å underbygge våre observasjoner. Datamaterialet er analysert deduktivt og kodet i henhold til kategoriene i de to nevnte rammeverkene.

Våre funn indikerer at det matematiske innholdet var på et nivå som opprettholdt elevenes produktive strev. Funn indikerer også at de vertikale tavlene bidro til at elevene fikk dele idéer, bygge videre på egen gruppes idéer, samt hadde anledning til å få inspirasjon fra de andre gruppenes arbeid. Klassesamtalene og lærernes veiledning til gruppene, førte til at elevene ble gitt tilgang til det matematiske innholdet. Lærerne bygget også videre på elevenes idéer i klassesamtalene og ga elevene eierskap til dem. I tillegg fant vi at elevene beveget seg fra non-eksplisitte generaliseringsstrategier uten begrunnelse, til kontekstuelle strategier med godkjente begrunnelser innenfor Lannins (2005) rammeverk. Funnene indikerer at undervisningsmetoden med tilfeldige treergrupper og bruk av vertikale tavler på en figurmønsteroppgave kan være verdt å reflektere over som en introduksjon til algebra. Avslutningsvis drøfter vi bruk av TRU-rammeverket både som observasjons- og planleggingsverktøy for å ivareta en robust matematikkundervisning også innenfor andre matematiske emneområder.

Abstract

This study addresses characteristics of powerful classrooms, where students use vertical whiteboards while working on a patterning assignment. The choice of topic relates to the TIMMS results from 2015 and 2019, which show that Norwegian 5th and 9th graders perform poorly in the subject of algebra. Several researchers recommend using patterning activities as an introduction to algebra.

To assess the teaching, we have used Schoenfeld and Floden's (2014) Framework Teaching for Robust Understanding (TRU). The framework is based on a summary of what research considers to be good mathematics teaching. In order to assess the teaching as "robust", the mathematical content must be adapted to the student group, the cognitive requirements must maintain a productive struggle, and students must be given access to mathematics by sharing their own and others' ideas. In addition, the teacher must build on the students' ideas and address any misconceptions. The TRU framework does not focus on specific mathematical topics. Our study deals with generalisation of patterns, and we chose to use Lannin's (2005) framework to assess the pupils' generalisation strategies and justifications. The student results formed a basis for assessing whether the mathematics was adapted to the student group according to the TRU framework.

In his research, Peter Liljedahl (2016) has worked on a methodology where students work in random groups of 2-4 students on vertical, non-permanent boards. In our study, we wanted to investigate how this form of work influenced the assessment of TRU`s five dimensions. In a qualitative case study, we analyzed video recordings of four focus groups in two classes at the intermediate stage. In order to assess the pupils' use of vertical boards, the other students in the classes participated in the teaching sessions. The class conversations are therefore part of the data material. We also interviewed the teachers who carried out the teaching program to support our observations. The data material is analyzed deductively and encoded according to the categories of the two forementioned frameworks.

Our findings indicate that the mathematical content was at a level that maintained students' productive struggles. Findings also indicate that the vertical whiteboards helped students to share ideas, build on their own group's ideas, and have the opportunity to get inspiration from the other groups' work. The class conversations and teachers' guidance to the groups led to students being given access to the mathematical content. The teachers also built on the students' ideas in the class conversations and gave the students ownership of them. In addition, we found that students moved from non-explicit generalization strategies without justification to contextual strategies with approved justifications within Lannin's (2005) framework. The findings indicate that the teaching method with random groups of 2-4 and the use of vertical whiteboards on a pattern activity may be worth reflecting on as an introduction to algebra. Finally, we discuss the use of the TRU framework as both observational and planning tools to ensure teaching for robust understanding within other mathematical subject areas.

Forord

Denne studien er gjennomført i studieåret 2020-21, og markerer avslutningen på vår treårige utdanning som Lærerspesialist i matematikk 1 – 7. Utdanningen har vært svært lærerik, og har gitt oss forskningsbasert kunnskap som har bidratt til å øke kvaliteten på egen undervisning. Gjennom denne studien har vi i tillegg fått anledning til å fordype oss i et tema som vi betrakter som viktig og aktuelt, og som trenger mer oppmerksomhet i skolen.

Vi vil først og fremst få takke elevene og lærerne som sa seg villige til å delta. Uten dere, ingen studie. Vi vil også få rette en stor takk til vår veileder, Hermund André Torkildsen for rask respons og grundige tilbakemeldinger gjennom hele prosessen. Til slutt fortjener familiene våre en stor takk for uvurderlig støtte undervis i hele studietiden. Vår videreutdanning hadde ikke vært mulig uten dere.

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

Resultatene fra Timms-undersøkelsen i 2015 viser at norske 5. og 9. klasseelever presterer svakt innenfor emneområdet algebra (Bergem, 2016). Samme fenomen fant også Hole og Grønmo (2017) da de sammenlignet de norske resultatene fra barnetrinn til videregående trinn med de internasjonale både for TIMMS og PISA. I rapporten fra 2011 hevdet de at de svake resultatene mest sannsynlig var «et uttrykk for at algebra ikke anses som så viktig å undervise i norsk skole» (L. S. Grønmo et al., 2011, s. 26).

Forskjellen på TIMMS og PISA er at TIMMS tester elevenes forståelse av rene matematikk- og algebraoppgaver basert på konsensus i de ulike lands læreplaner. I PISA-undersøkelsen er det et ekspertpanel som definerer det de mener er nødvendig allmennkunnskap i et moderne samfunn (Hole & Grønmo, 2017). At TIMMS- og PISA-testene har ulikt fokus, reiser spørsmål om hvilken type matematisk kompetanse vi trenger i samfunnet, og hvordan matematikkundervisningen med det bør innrettes. Flere forskere, deriblant Devlin (1997) og Warren og Cooper (2008) beskriver matematikk som vitenskapen om mønstre og sammenhenger. Det kan være å studere mønstre innenfor den matematiske verden i form av tallmønster, men også å bruke matematikk til å forstå mønstre og lovmessigheter på andre felt, som for eksempel innenfor naturvitenskap.

Ernest (2000) skisserer mulige formål for matematikk i skolen, der ett av dem er å utvikle kreative ferdigheter i matematikk med problemløsning og undersøkende aktiviteter som metode. Cuoco, Goldenberg og Mark (1996) hevder at å bare gi elevene «a bag of facts» ikke gjør dem i stand til å møte fremtidens utfordringer. De mener at skolen i stedet må sette søkelys på hvilke verktøy i form av «habits of mind» som er nødvendige for å kunne bruke, forstå og til og med utføre matematikk som ennå ikke eksisterer.

Hole og Grønmo (2017) refererer til studier som viser at innholdet i matematikkundervisningen i ulike land deler seg i to retninger: den nordiske og engelskspråklige retningen som vektlegger matematikk i dagliglivet, og den østeuropeiske og østasiatiske som i større grad vektlegger klassisk, ren matematikk. De hevder videre at

> Den delen av ren matematikk som ubetinget er aktuell for alle i skolen, og som danner en nødvendig basis for anvendelser i dagligliv og samfunnsliv, består for en stor del av fakta, ferdigheter og begrepsforståelse innen tall og tallregning. Men i et moderne samfunn i en rivende teknologisk utvikling er spørsmålet om dette er nok, eller om det er andre deler av ren matematikk som mange av elevene, kanskje alle, vil trenge en god basis i. Det fagområdet som da peker seg ut, er algebra (Hole & Grønmo, 2017, s. 54)

For nettopp å øke fokus på algebra i grunnskoleopplæringen, har det i arbeid med ny læreplan (Kunnskapsløftet 2020) blitt lagt større vekt på algebraisk tenkning gjennom hele opplæringsløpet. I læreplanen kan vi lese at «*Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk*» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kjerneelementene, som skal gjennomsyre hele matematikkundervisningen, kan eksplisitt knyttes til flere av verbene i læreplanens uttalelse om algebra. Ordene utforske, generalisere og modellere kan direkte knyttes opp mot kjerneelementer som utforsking og problemløsing, modellering og anvendelse, samt abstraksjon og generalisering.

Algebra er med andre ord et område det skal legges ekstra stor vekt på i grunnskoleopplæringen. Kaput (2007) hevder at skolen siden 1900-tallet i stor grad har sett på algebra som et isolert emne, som først introduseres etter en grundig aritmetikkopplæring. Sen innføring kan dermed ha ført til at manges forståelse av algebra har blitt mekanisk, og at flere ser på algebra som et sett med regler for hvordan man manipulerer bokstaver for å komme frem til en løsning. Dette bekreftes også av Naalsund (2012) som et norsk fenomen. Kaput (2007) argumenterer for at tidligere introduksjon av algebra i opplæringsløpet kan bedre dybdeforståelsen i matematikk. Det kan gi elevene et kraftfullt redskap i arbeid med matematikk, samt gi mulighet for å flette algebra sammen med aritmetikk.

Flere forskere, deriblant Lannin (2005), Warren og Cooper (2008) og Strømskag (2017b) anbefaler arbeid med figurmønsteroppgaver som en innfallsport til algebra. Hensikten med å studere figurmønster i skolematematikken er å gi fysiske og ikoniske referansekontekster for generalisering og algebraisk tenkning (Strømskag, 2017b). Å generalisere figurmønster algebraisk betyr å finne et generelt uttrykk for antall komponenter i det n -te element, uttrykt ved $n.$ Forskning på elevers generaliseringsprosesser viser at det ikke er mønstergeneralisering i seg selv som er problemet når elever ikke lykkes, men heller måten oppgaver er formulert på og måten det undervises på som skaper problemer (Strømskag, 2017a). I tråd med Kaput (2007) sine argumenter og den forskning Strømskag (2017a) viser til, står dagens matematikklærere foran utfordringen med å gjøre algebra tilgjengelig for alle. Samtidig skal altså algebra ikke innføres som et eget isolert emne, men gjennom kjerneelementene komme til uttrykk i store deler av matematikkundervisningen.

Lithner (2017) viser til en serie studier der en nøkkelfaktor for elevenes læringsutbytte er om elevene engasjeres i en imitativ eller kreativ resonneringsprosess. Med imitativ, mener han at elevene benytter en gitt eller gjenkalt algoritme til å løse en utfordring. Kreativ matematisk resonnering, gir elevene selv mulighet til å resonnere seg frem til en løsning. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) på sin side beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. De påpeker at de fem komponentene henger tett sammen, og at elevene må involvere seg i alle samtidig, da det bidrar til å utvikle en matematisk kompetanse som er relevant, fleksibel, nyttig og varig.

For å oppnå en slik kompetanse, tolker vi at det innebærer en undervisningsform som gir rom for en aktiv elevgruppe. Den matematiske samtalen står her sentralt, da den er vesentlig for elevenes mulighet til dybdelæring (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Johnsen-Høines og Herheim (2016) hevder det ikke finnes en ensartet beskrivelse av hva en matematisk samtale er, men at det avhenger av konteksten. De referer til en undersøkelse gjort av Mellin-Olsen i 1990, som fant at et flertall av lærere benyttet en såkalt *oppgavediskurs*. I en slik undervisningsform karakteriseres samtalen ved at læreren stiller et spørsmål hen selv vet svaret på, elevene svarer og læreren evaluerer svaret. Elever som er vant til en undervisningskultur preget av at lærer benytter oppgavediskurs, sosialiseres inn i denne samtaleformen (Johnsen-Høines & Herheim, 2016).

Som en motsats til dette, er Peter Liljedahl en av flere som har forsket på hvordan man kan få matematikkundervisningen til å være mer utforskende og «tenkende» (Liljedahl, 2016). I likhet med Mellin-Olsen observerte også han en oppgavediskurs i mange klasserom, og opplevde at det hemmet elevenes evne til å tenke kreativt i arbeid med problemløsningsoppgaver. Han observerte videre at mange læreres metodikk var å først vise elevene hvordan en oppgave skulle løses, for deretter å be elevene løse en tilsvarende oppgave selv, omtalt som *now you try one* (Liljedahl & Santos-Trigo, 2019, s. 291). Liljedahl valgte derfor å bryte dette mønsteret ved å blant annet la elevene jobbe på vertikale tavler i tilfeldige treergrupper, med utforskende oppgaver gitt tidlig i timen (Liljedahl, 2016; Liljedahl & Santos-Trigo, 2019). Resultatene av hans forskning viser at elevene utviklet en mer selvstendig problemløsningsevne og fikk trening i å argumentere for egne løsninger. Å trene på argumentasjon trekkes også frem av Nosrati og Wæge (2015). De hevder det kan legges til rette for dybdelæring ved at elever selv vurderer nye ideer og knytter dem til tidligere kunnskap, vurderer logikken i et argument kritisk og reflekterer over sin egen forståelse og læreprosess. En slik tilnærming til undervisning er i tråd med intensjonene i Kunnskapsløftet 2020, der det legges vekt på blant annet utforsking, problemløsning, argumentasjon og dybdelæring (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Ideen til Liljedahl om et tenkende klasserom finner vi også spor av i Schoenfelds (2016a) beskrivelse av robuste læringsmiljøer. Et robust læringsmiljø er ifølge Schoenfeld (2016a) et miljø som ivaretar alle elever og tilrettelegger for at den enkelte skal utvikle kunnskap, fleksibilitet og evnen til å bli en ressurssterk, selvstendig tenker. I den anledning har Schoenfeld, i samarbeid med flere forskere, utviklet et rammeverk for å kunne vurdere om matematikkundervisningen kan karakteriseres som robust (Schoenfeld & Floden, 2014). Rammeverket Teaching for Robust Understanding (TRU) inneholder fem dimensjoner, eller kriterier, hvor kvaliteten på matematikkundervisningen avhenger av i hvilken grad alle de fem dimensjonene er ivaretatt. Mye av kunnskapen som har kommet frem i tidligere forskning på matematikkundervisning er samlet i dette rammeverket. Det fremmer altså ikke nye, radikale løsninger på hvordan matematikkundervisning bør drives, men er mer en sammenfatning av tidligere forskning på god praksis. Ved å ta hensyn til dimensjoner som: å gjøre det matematiske innholdet tilgjengelig for læring; elevenes forståelse og produktive strev; meningsfull og rettferdig tilgang til konsepter og praksis for alle elever; mulighet for å skape positive, selvstendige identiteter gjennom presentasjon, diskusjon og raffinering av ideer; samt fokus på miljøets respons på elevtenking, mener Schoenfeld (2016a) at matematikkundervisningen er i tråd med god praksis og kan med det anses som robust.

Med utgangspunkt i behovet for økt satsing på algebra på barnetrinnet, kjerneelementene i Kunnskapsløftet 2020 som fordrer aktive og utforskende elever, samt et ønske om en robust matematikkundervisning med elementer av Liljedahls (2016) metodikk, har vi derfor valgt følgende problemstilling:

Hvilke kjennetegn på robust matematikkundervisning fremkommer i arbeid med en figurmønsteroppgave på vertikale tavler på mellomtrinnet?

For å svare på forskningsspørsmålet, har vi gjennomført en kvalitativ kasusstudie der vi videofilmet en femte-, og sjetteklasse på to ulike skoler i arbeid med en figurmønsteroppgave. Vi presenterte undervisningsopplegget for to lærere, som gjennomførte det i sine klasser. I analysen av datamaterialet har vi benyttet en deduktiv metode, der vi identifiserte kjennetegn på robust undervisning ved hjelp av observasjons- og skåringsskjemaene fra TRU-rammeverkets (Schoenfeld, 2016a, 2016b; Schoenfeld & Floden, 2014) fem kategorier. I beskrivelsen av elevenes arbeid med det matematiske innholdet i TRU-rammeverkets matematikkdimensjon, har vi benyttet Lannins (2005) rammeverk om generaliseringsstrategier og begrunnelser.

I teorikapittelet vil vi redegjøre for hva som kan karakteriseres som god matematikkundervisning, bruk av figurmønster som introduksjon til algebra, vertikale tavler som et metodisk verktøy i matematikkundervisningen, samt det teoretiske rammeverket vi har benyttet i vår analyse av undervisningssituasjonen. I kapittel tre beskriver vi metode for datainnsamling og analyse, og i kapittel 4 presentasjon og analyse av data. Oppgaven avsluttes med en diskusjon og oppsummerende avslutning i kapittel 5, der vi beskriver mulige implikasjoner for forskning og undervisning.

2 Teori

I denne studien har vi undersøkt hvilke kjennetegn på robust matematikkundervisning som fremkommer i arbeid med en figurmønsteroppgave på vertikale tavler. Vi vil først klargjøre hva vi legger i begrepet robust og deretter gi en oversikt over hva deler av litteraturen betrakter som anerkjent matematikkundervisning generelt. Videre følger en beskrivelse av såkalte «tenkende klasserom», hvor vertikale whiteboardtavler er et sentralt verktøy. Deretter redegjør vi for hvordan nyere forskning beskriver introduksjon av algebra. Her fokuserer vi på generalisering av figurmønsteroppgaver spesielt, og presenterer videre Lannins (2005) rammeverk som omhandler nettopp dette. Til slutt i teorikapittelet beskriver vi det teoretiske rammeverket «Teaching for robust understanding» (TRU) (Baldinger & Louie, 2016; Schoenfeld, 2016a, 2016b; Schoenfeld & Floden, 2014). Her definerer vi sentrale begreper som er tatt i bruk for å identifisere kjennetegn på robust matematikkundervisning i vår undersøkelse.

2.1 Robust læringsmiljø, god matematikkundervisning

Schoenfeld & The Teaching for Robust Understanding Project definerer ingen spesifikk måte å undervise på, men beskriver heller kjennetegn ved læringsmiljøer hvor elevene viser fremgang. Et miljø som ivaretar alle elever, tilrettelegger for at den enkelte skal utvikle kunnskap, fleksibilitet og evnen til å bli en ressursfull, selvstendig tenker, kan karakteriseres som et *robust* læringsmiljø (Schoenfeld, 2016a).

Å beskrive hva som er god matematikkundervisning er krevende. I Norge har vi for eksempel hatt fire ulike læreplaner i matematikk de siste tiårene; Mønsterplanen 1986, L97, Kunnskapsløftet 2006 og Kunnskapsløftet 2020. Slik vi tolker det, har dermed kriteriene for hva Utdanningsdirektoratet anser som «god» matematikkundervisning vært i konstant endring. I Kunnskapsløftet 2020 kan vi lese at formålet med matematikkfaget blant annet er at:

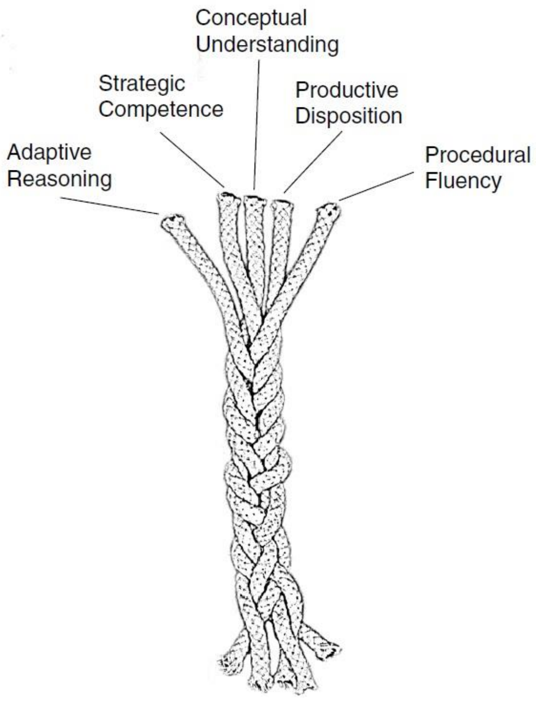
> *Vi trenger borgere som kan sette seg inn i, forstå og kritisk vurdere kvantitativ informasjon, statistiske analyser og økonomiske prognoser. På den måten er matematisk kompetanse nødvendig for å forstå og kunne påvirke prosesser i samfunnet (Kunnskapsdepartementet, 2019).*

Den matematiske kompetansen det her siktes til innebærer å bruke *problemløsing og modellering til å omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere gyldigheten av løsningen* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det presiseres også at dette har *språklige aspekter, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring ideer*. Det er skolen som skal bidra til å utvikle den matematiske kompetansen som samfunnet og den enkelte trenger, og ifølge Kunnskapsdepartementet (2019), må *elevene få anledning til å arbeide både praktisk og teoretisk for å oppnå dette*. Opplæringen skal *veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening*. Samtidig skal elevene *utfordres til å kommunisere matematikk skriftlig, muntlig og digitalt* (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Som vi ser ovenfor, er det mange aspekter ved matematikkundervisningen det skal tas hensyn til for å arbeide i tråd med Kunnskapsløftet 2020. Det spesifiseres i likhet med Schoenfeld (2016a) ikke hvilke metodiske grep som skal gjøres, men vi tolker formålet som en rettesnor for hva Utdanningsdirektoratet anser som ingredienser i «god» matematikkundervisning. Schoenfelds (2016a) definisjon av et robust læringsmiljø samsvarer etter vår mening i stor grad med Kunnskapsløftets formål. Kunnskap, fleksibilitet og selvstendig tenking er blant annet nødvendig for å sette seg inn i, forstå og kritisk vurdere ny informasjon. Vi velger derfor å tolke det som at et undervisningsmiljø som karakteriseres som robust, inneholder god matematikkundervisning.

2.2 Matematisk kompetanse

Matematikkundervisning skal bidra til å utvikle matematisk kompetanse, og vi starter derfor med å se på hva som ligger i det å kunne matematikk. Kilpatrick et al. (2001) har utviklet en modell bestående av fem strenger eller komponenter de mener beskriver matematisk kompetanse (mathematical profiency): Conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning og productive disposition (se figur 2.1). Vi har valgt å benytte Valentas (2015) norske oversettelse: Forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement. Kilpatrick et al. (2001) påpeker at de fem strengene er sammenvevde og ikke kan ses på uavhengig av hverandre. For å oppnå god matematisk kompetanse må lærere altså bedrive en undervisning som omfatter alle de fem komponentene mer eller mindre samtidig.



Figur 2.1: Intertwined Strands of Proficiency (Kilpatrick et al., 2001, s. 117)

Den første strengen, forståelse, handler om noe mer enn isolerte faktakunnskaper og metoder. En elev med god forståelse skjønner hvorfor en matematisk idé er viktig og hva slags kontekst den kan benyttes i (Kilpatrick et al., 2001). Kunnskapen til eleven er organisert i en sammenhengende helhet, som gjør det mulig å koble ny kunnskap til det hen allerede vet. Lærere ser gjerne etter tegn på forståelse i elevenes evne til å verbalisere sammenhenger mellom begreper og representasjoner (Kilpatrick et al., 2001). Vi må imidlertid være oppmerksom på at elever ofte forstår før de har evnen til å utrykke forståelsen verbalt. En signifikant indikator på god forståelse er derfor evnen til å kunne representere matematiske situasjoner på forskjellige måter, og vite hvordan ulike representasjoner er nyttige for ulike formål (Kilpatrick et al. 2001). Et eksempel på slik forståelse kan være en elevs evne til å se sammenhengen mellom multiplikasjon og areal (arealmodellen).

Den andre strengen, beregning, refererer til kunnskap om prosedyrer. Kunnskap om når, hvor og hvordan ulike prosedyrer skal benyttes, samt ferdigheter i å benytte dem fleksibelt, effektivt og nøyaktig (Kilpatrick et al., 2001). Kilpatrick et al. (2001) påpeker at beregningskompetanse må ses i sammenheng med forståelse. De argumenterer for at forståelse gjør det enklere å lære prosedyrer, samtidig som en viss prosedyrekunnskap er nødvendig for å lære nye matematiske konsepter med forståelse. Det betyr at den matematiske kunnskapen ikke isoleres, men kan brukes på tvers av matematiske ideer. I eksempelet med multiplikasjon og arealberegning har elevene nytte av å utføre multiplikasjon for å beregne arealet. Denne type beregningskompetanse er ifølge Kilpatrick et al. (2001) viktig for at elevene skal kunne utvikle dypere forståelse for matematiske konsepter.

Den tredje strengen, anvendelse (strategisk tankegang), refererer til evnen til å formulere matematiske problemer, representere dem og løse dem. Med matematiske problemer, mener Kilpatrick et al. (2001) alle mulige problemer som kan løses med matematikk. Et kjennetegn er at man ikke har en ferdig oppskrift på hvordan man skal løse problemet. Det betyr at man må utvikle en strategi på egenhånd, representere problemet på en hensiktsmessig måte, og så finne en løsning. Kilpatrick et al. (2001) hevder at anvendelseskompetanse henger nært sammen med forståelse-, og beregningskompetanse. Man trenger forståelse for mengdene og forholdet mellom mengdene som er involvert, i tillegg til beregningskompetanse for å kunne regne med disse mengdene. For å løse et problem som innebærer å finne det dobbelte av noe annet, trenger en elev i småskoletrinnet både forståelse for begrepet dobbelt, samt beregningskompetanse i dobling. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) har en elev med god problemløsingskompetanse evnen til å resonnere fleksibelt mellom ulike problemløsningsstrategier. Det være seg gjett og sjekk-strategier, algebraiske modeller eller andre metoder som passer både kravene og konteksten problemet er gitt i.

Den fjerde strengen, resonnering, refererer til evnen til å se en logisk sammenheng mellom faktakunnskap, prosedyrer, konsepter og løsningsmetoder. Basert på en nøye vurdering av alternativene, skal et resonnement være korrekt og gyldig, samtidig som man skal kunne argumentere for sine konklusjoner (Kilpatrick et al., 2001). I et sosiokulturelt læringsperspektiv betyr det at man må kunne kommunisere egne argumenter, samtidig som man må kunne vurdere andres argumentasjon (Sfard, 2006). Kilpatrick et al. (2001) vektlegger å begrunne det man har gjort som en vesentlig del av resonnering. De mener ikke nødvendigvis å føre bevis for at noe er korrekt, men å kunne gi tilstrekkelig begrunnelse for at et argument er sant. Målet er å kunne forklare og begrunne egne tanker, noe som igjen vil bidra til å forbedre resonneringsevnen og forståelsen (Kilpatrick et al., 2001).

Den femte strengen, engasjement, omhandler å se en mening i matematikken og at matematikk oppleves som både nyttig og verdifullt. Engasjement innebærer også troen på at innsats lønner seg, og at det å bli matematisk kyndig er verdt innsatsen. Målet er at eleven identifiserer seg positivt med matematikk, og ser på seg selv både som en effektiv «lærer» og «gjører» av faget (Kilpatrick et al., 2001). For å oppnå slikt engasjement, spiller læreren en viktig rolle (Kilpatrick et al., 2001). Hvis elevene skal ha anledning til å forstå, utvikle beregningskompetanse, strategisk tankegang og resonneringsevne, må de oppleve at matematikken er forståelig. Læreren må derfor legge til rette for at de fire andre strengene får utvikle seg, noe som igjen vil påvirke engasjementet og en positiv holdning til faget. Kilpatrick et al. (2001) hevder at jo flere konsepter elevene forstår, jo mer vil matematikken fremstå fornuftig for dem. Om elevene aldri får anledning til å streve med utfordrende problemløsningsoppgaver, vil de kunne tro at matematikk handler om pugging av kunnskap, og ikke forståelse (Kilpatrick et al., 2001).

Å oppnå matematisk kompetanse er som vi ser en sammenflettet og kompleks prosess. Hvordan læreren legger opp undervisningen og hvilke oppgaver elevene jobber med, spiller derfor en vesentlig rolle for elevenes læringsutbytte.

2.3 Kreativ resonnering og utforskende undervisning

En nøkkelfaktor for læringsutbyttet hos elever avhenger av om elevene deltar i aktiviteter som innebærer imitativ eller kreativ resonnering (Lithner, 2017). Lithner (2017) problematiserer at det i skolen ofte gis oppgaver hvor det er hensiktsmessig å huske en algoritme for å finne svaret, og beskriver videre to ulike former for resonnering.

Imitativ resonnering (IR) innebærer at strategivalget er å huske enten en løsningsalgoritme (Aritmetisk resonnering), eller å huske prosedyrekunnskap (Memorert resonnering). I Lithners (2017) beskrivelse av «algoritme», mener han ikke bare at noe blir eksplisitt undervist som en kjede av utførbare instruksjoner som eksempelvis divisjonsalgoritmen. Han peker også på at det kan være deler som er konseptuelt vanskelige, men som blir ivaretatt av en algoritme, slik at bare de enkle delene blir overlatt til elevene. En ung elev kan eksempelvis si at én tredel + én tredel blir to tredeler, uten at eleven nødvendigvis forstår konseptet brøk.

I motsetning til imitativ resonnering, beskriver Lithner (2017) kreativ resonnering som vesentlig for et høyere læringsutbytte. Kreativ resonnering baserer seg på at elevene selv konstruerer kunnskapen, og defineres av tre kriterier som må være oppfylt: 1. Kreativitet: Eleven lager en resonneringssekvens som ikke tidligere er brukt eller gjenskaper en glemt resonneringssekvens. 2. Plausibilitet: Det er beskrivende argumenter som støtter strategivalget og argumenterer for verifikasjon ved å forklare hvorfor strategivalgene og konklusjonene er sanne eller plausible. 3. Forankring: Argumentene er forankret i iboende matematiske egenskaper til komponentene i resonnementet.

Å løse en oppgave ved hjelp av kreativ resonnering har likheter med hvordan flere beskriver arbeid med ikke-rutinemessig problemløsing, som for eksempel Stein, Grover og Henningsen (1996) og Kilpatrick et al. (2001). Stein et al. (1996) hevder slike typer oppgaver krever at elevene selv må ta beslutninger om hva som må gjøres, og samtidig tolke rimeligheten av sine idéer. Kreativ resonnering handler altså i hovedsak om forskjellen på å imitere noe og det å faktisk skape noe selv. Slik vi tolker det, er det å resonnere kreativt en viktig ingrediens i det å utforske. Kunnskapsløftet 2020 sier at utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg frem til en felles forståelse (Kunnskapsdepartementet, 2019). Ved at elevene undersøker og diskuterer sammen for å skape forståelse, vil Lithners (2017) utsagn om at elevene selv skal konstruere kunnskapen ivaretas.

Jaworski (2006) anbefaler å drive utforskende eller undersøkende undervisning i arbeid med matematikk. Hun hevder at utforskning kan gi elevene muligheten til å se forbi anvendelse av algoritmer og regler. Videre kan elevene utvikle forståelse for generelle relasjoner i matematikk og håndtere problematiske sider ved sentrale deler av faget som abstraksjon og formalisme. Å drive utforskende undervisning er dermed et mulig tiltak for å utvikle det Kilpatrick et al. (2001) legger i begrepene forståelse, anvendelse og resonneringskompetanse.

2.4 Thinking classrooms

I likhet med Kilpatrick et al. (2001) fremhever Liljedahl (2005, 2016) også viktigheten av elevenes emosjonelle forhold og opplevelse av matematikken. Han argumenterer for at et mer positivt forhold, samt motivasjon i faget, kan økes ved at elevene får såkalte AHA-opplevelser (Liljedahl, 2005). Slike AHA-opplevelser beskriver han som «eurekaøyeblikk» hvor noe plutselig faller på plass eller gir mening. Bare én slik AHA-opplevelse kan endre en elevs motivasjon eller evne til å utføre matematikk (Liljedahl, 2016). Utfordringen ligger i hvordan lærere kan legge til rette for at elevene skal få AHA-opplevelser.

Liljedahl (2016) beskriver undersøkelser hvor han presenterte elever for kognitivt krevende problemer, tilrettelagt med AHA-opplevelsespotensiale. Formålet med undersøkelsen var å øke elevenes motivasjon i matematikkfaget. Resultatene ble riktignok ikke slik Liljedahl hadde håpet, da han oppdaget at elevene ikke brukte energi på å tenke og ga opp med en gang de møtte motstand. Lignende resultater fant han i mange ulike klasserom, og engasjerte seg derfor i forskning på hvordan man kan utvikle såkalte «Thinking classroms» eller «tenkende klasserom».

Et tenkende klasserom er ifølge Liljedahl (2016) ikke bare et klasserom som bidrar til tenking, men også gir anledning til å tenke. Det er et klasserom av tenkende individer som tenker sammen, lærer sammen og konstruerer kunnskap gjennom diskusjon og aktivitet. Det er et rom hvor læreren ikke bare fremmer tenking, men også forventer det både implisitt og eksplisitt (Liljedahl, 2016).

Liljedahl (2020) har gjennom omfattende undersøkelser identifisert 14 variabler eller punkter som legger grunnlaget for å utvikle et tenkende klasserom. Alle de 14 variablene har ikke like stor innvirkning, og ved innføring av et slikt system er det anbefalt å innføre punktene gradvis. Omfanget av vår undersøkelse begrenser oss til å kun benytte noen av Liljedahls (2020) punkter. Vi har derfor valgt å beskrive punktene som er relevantene for denne undersøkelsen, hvor bruk av vertikale, ikke-permanente overflater er det mest vesentlige grepet. Punktene som ikke er valgt, krever innførelse i et lengre perspektiv. I tabell 2.1 har vi markert de vi benyttet i vår undersøkelse med fet skrift.

Nummer	Punkter/variabler
1	**Gode problemløsningsoppgaver**
2	**Muntlig overlevering av oppgave til elevene**
3	**Tilfeldige tréergrupper**
4	**Stående arbeid på vertikale tavler**
5	Omorganisering av tradisjonelt klasserom
6	Kun besvare fortsett-å-tenke-spørsmål
7	**Hint og tips som opprettholder kognitivt strev**
8	**Oppfordre til samhandling mellom elevgrupper**
9	**Oppsummering av elevenes arbeid underveis**
10	Elevnotater
11	Kontrollspørsmål for elevenes selvevaluering
12	Formativ vurdering
13	Summativ vurdering
14	Rapportering av elevenes prestasjoner

Tabell 2.1: Liljedahls (2020) 14 punkter

2.4.1 Vertikale tavler/whiteboardtavler

En whiteboard-tavle kan ifølge Wenning (2005, s. 3) defineres som en gjenbrukbar flate av praktisk størrelse som elevene kan skrive eller tegne på for å presentere begreper, diagrammer, kart, tabeller, grafer eller ligninger. Den brukes med en ikke-permanent tusj, som lett kan tørkes bort fra tavleoverflaten. De fleste klasserom i dag er utstyrt med en stor tavle som læreren kan benytte i sin undervisning. I denne teksten refererer vi derimot til mellomstore tavler som benyttes av elever som samarbeider i løpet undervisningsøkten, også omtalt som «whiteboarding» (Oxford University Press, 2021).

I artikkelen til Wenning (2005), samt i flere artikler som omtales av Forrester, Sandison og Denny (2017), refereres det til at tavlene er brukt horisontalt. De er gjerne lagt på pulter, hvor små grupper elever har samarbeidet og videre presentert sitt arbeid. Hensikten har vært å legge til rette for tenkning på et høyere nivå, samt læring gjennom samarbeid. Liljedahl (2016) har funnet at gjenbrukbare ikke-permanente flater, i motsetning til permanente flater som ark, bøker, post-it-lapper o.l. gir størst potensiale for elevenes læring. Enda større effekt kan oppnås om de gjenbrukbare flatene benyttes vertikalt (Liljedahl, 2016).

Liljedahl (2016) hevder at bruk av permanente overflater kan gjøre elever mer skeptiske til å skrive noe før de vet om de har rett. Eventuelle feil man skriver blir stående og er tilgjengelig for andre elever, og enkelte kan være ukomfortable med dette. Ved bruk av ikke-permanente flater, kan feil enkelt viskes bort med hånden eller et papirtørkle. Det er dermed lagt til rette for at elever kan prøve og feile, og samtidig tørre å prøve seg frem med en gang. Liljedahl (2016) viser til funn som bekrefter nettopp dette fenomenet; at elever raskere kommer i gang med skriftlige notasjoner ved ikke-permanente kontra permanente overflater. Samtidig vises det også til funn om at flere elever både diskuterer, deltar og viser utholdenhet ved bruk av førstnevnte overflater. Lignede funn beskriver også Forrester et al. (2017) og Megowan-Romanowicz (2016) i sine undersøkelser om bruk av ikke-permanente overflater. Wenning (2005) hevder «whiteboarding» gir elevene en glimrende mulighet til å lære av, samt korrigere sine egne feil. De gis dessuten muligheten til å lære av andres suksess og feil. I tillegg hevder Wenning (2005) at elevene motiveres til egenvurdering og selvregulering, da de vet at gruppas arbeid skal presenteres for de andre i klassen.

Om tavlene henges opp vertikalt eller benyttes horisontalt på pultene, er heller ikke uvesentlig. Tradisjonell bruk av pulter på rekke og rad eller satt sammen i grupper, kan ifølge Liljedahl (2016) være med på å begrense potensialet for et tenkende klasserom. Han hevder at elevene i større grad har mulighet til å gjemme seg bort og forbli anonyme, slik at de lettere kan unngå å delta og bidra i undervisningen. Ikke alle elever ønsker nødvendigvis å gjemme seg bort, men når oppgavene blir vanskeligere og diskusjonene krever mer tenking, mener Liljedahl (2016) at det likevel er lettere å trekke seg unna dersom man sitter bak en pult. Å arbeide stående i en gruppe er en hindrende faktor for anonymisering. Læreren vil enkelt kunne se hvem som trekker seg vekk fra gruppen, samtidig som eleven selv ikke vil oppleve å være anonym ved å trekke seg mot læreren i midten av rommet (Liljedahl, 2016).

Når det gjelder selve elevarbeidet, vil bruk av vertikale tavler synliggjøre de ulike gruppenes utførelse, noe som gjør det lettere for læreren å få oversikt (Forrester et al., 2017; Liljedahl, 2016; Megowan-Romanowicz, 2016). At elevene står, vil i tillegg gi mulighet for at de ulike gruppene kan se hverandres tavler, samt gjøre det enklere å samhandle på tvers av grupper (Liljedahl, 2016). Slik type interaksjon kan gi anledning til å ta del i andres tanker og resonneringer.

2.4.2 Elevsamarbeid i tilfeldige grupper

Anna Sfard (2006, 2007) argumenterer for at læring skjer gjennom deltakelse, noe som blant annet bygger på Vygotskys sosiokulturelle læringssyn. Hun hevder at læring skjer i felleskap med andre, og at man gjennom kommunikasjon utvikler en diskurs (Sfard, 2006, 2007). En diskurs er en kommunikasjonsform eller et slags gruppespråk som avhenger av hvilken kontekst man er i. For at en diskurs skal være matematisk, må den derfor inneholde matematiske ord. Målet med en diskurs er å bli en aktiv deltaker av den (Sfard, 2006, 2007). Elevene må altså selv være aktive i denne prosessen, i motsetning til læring i et tilegnelsesperspektiv, hvor læring i større grad ses på som en individuell prosess uten like stort behov for samhandling med andre. For at læring i matematikk skal skje, bør samtalepartneren være matematisk kyndig (Sfard, 2006). Det kan være en lærer, en medelev eller en annen kyndig person.

I mange klasserom er det vanlig at læreren, basert på faglige mål, setter sammen grupper i forbindelse med gruppearbeid (Liljedahl, 2016). Læreren har i så fall en mulighet til å koble gruppemedlemmer, slik at de fleste får anledning til å samtale med en matematisk kyndig samtalepartner. Et annet alternativ er å la elevene velge gruppe selv, men da vil de aller fleste velge gruppe basert på sosiale forhold (Liljedahl, 2016). Motsetningen mellom hva læreren mener er faglig fornuftig og hva elevene selv ønsker sosialt, kan være problematisk (Liljedahl, 2016). Liljedahl (2016) henviser til Kotsopoulos (2007) og Slavin (1996), som sier at uansett hvor strategisk læreren er i sin utforming av grupper, vil det alltid være noen elever som blir misfornøyde med det sosiale aspektet.

Liljedahl (2016) argumenterer for å dele inn i tilfeldige grupper på 2-4 personer. I sin forskning undersøkte han effekten av å alltid dele inn i tilfeldige grupper, og så resultater allerede etter 2-3 uker. Elevene aksepterte i større grad å arbeide i hvilken som helst gruppe, sosiale barrierer i klasserommet minsket, kunnskap ble i større grad delt mellom elever, forventningen om at læreren alltid satt på fasit minsket, tilliten til egen gruppe eller andre gruppers svar økte, engasjementet i klasserommet økte, samt at elevene ble mer entusiastiske til matematikkfaget. Sistnevnte er tidligere omtalt som den femte strengen i Kilpatrick et als. (2001) beskrivelse av matematisk kompetanse. Liljedahl (2016) påpeker at inndelingen av tilfeldige grupper må skje i samvær med elevene, slik at de ser at den er tilfeldig. Om den tilfeldige inndelingen er gjort på forhånd, vil elevene kunne tro at læreren har en skjult agenda, og effekten av tilfeldige grupper vil ikke være like stor.

2.4.3 Etablering og opprettholdelse av tenkende klasserom

I etableringen av et tenkende klasserom påpeker Liljedahl (2016) at det er viktig å starte med gode og motiverende problemløsningsoppgaver, som ikke nødvendigvis er basert på faglige mål. Dette for å engasjere elevene til å *ville* ønske å snakke sammen mens de løser oppgaven. Når et tenkende klasserom er etablert, er tanken å kunne presentere problemer som i større grad kan knyttes til læreplanen. Liljedahl (2016) hevder også at problemet må overleveres muntlig til elevene. Grafer, diagrammer og lignende kan være tilgjengelig, men selve instruksjonen bør gjøres muntlig. Muntlig instruksjon kan få elevene til å samtale raskt om hva de skal undersøke, istedenfor å bruke tid på å dekode skriftlige instruksjoner (Liljedahl, 2016).

Når oppgaven er overlevert til elevene og arbeidet er i gang, har læreren en viktig rolle for å opprettholde et tenkende klasserom. Liljedahl (2016) påpeker at hint og tips må gis på en slik måte at balansen mellom den utfordringen elevene står i og deres evner i arbeidet med den, vedlikeholdes. Dersom oppgaven er for enkel, kan den oppleves kjedelig. Dersom utfordringen blir for stor, kan det føre til frustrasjon. Slik vi tolker det, er målet å opprettholde et kognitivt strev, hvor elevene hele tiden yter innsats for å forstå matematikken. Hiebert og Grouws (2007) konkluderer i sin gjennomgang av forskningslitteratur på matematikk at produktivt strev med viktig matematikk kan bedre elevenes begrepsforståelse og dybdelæring. De hevder også at kognitivt krevende oppgaver er essensielt i arbeid med å øke elevers begrepsmessige forståelse av matematikk.

2.5 Algebra

I skolen har algebraen ofte vært ensbetydende med å bruke symboler for å uttrykke og manipulere generaliteter i tallkontekster. Mason (1996) hevder at vi i skolematematikken har fremskyndet overgangen fra ord til bokstavsymboler i over hundre år. Symbolene har videre blitt behandlet som ukjente tall, hvor vi gjennom et sett av formelle behandlinger har manipulert symbolene etter strenge regler som i et slags spill. En slik tilnærming til algebraen har ifølge Mason (1996) fungert for de hurtigtenkende og ikke-spørrende elevene. De som søker mening i matematikken, og de som har problemer med å gjenkjenne forenklingsmønstre spontant, har i større grad forlatt matematikkfaget, noe som er med på å opprettholde algebra som det viktigste matematiske veiskillet i samfunnet som helhet (Mason, 1996).

2.5.1 Generalisering

Generalisering defineres av Mason og Pimm (1984) som å se det generelle i det spesielle og det spesielle i det generelle. Et eksempel er å se på et kvadrat, rektangel og trapes som spesielle eksempler, men som alle er firkanter (generelt). Motsatt kan vi se at en generell firkant kan være et kvadrat (spesiell). Mason (1996) hevder at med mindre generalisering gjennomsyrer klasserommet, så vil algebra slik det ofte undervises i dag fortsette å være et dødt emne i matematikkundervisningen. Med dødt trekker han paralleller til pugging av ulike deler av blomster eller bøying av verb. Generalisering er matematikkens hjerteslag ifølge Mason (1996), og han hevder videre at å uttrykke generalitet må fremkomme både naturlig og spontant i arbeid med matematikk. Dersom lærere ikke setter søkelys på dette, og ikke gir rom for at elever gir uttrykk for sine generaliseringer, vil ikke matematisk tenkning finne sted (Mason, 1996). Kaput og Blanton (2001) hevder på sin side at generalisering er fundamentalt for alt innenfor algebra, også innenfor symbolmanipulasjon, ved å gi mening til symbolene som blir manipulert. Å fokusere på generalisering virker altså fornuftig i arbeid med å øke elevers algebrakompetanse.

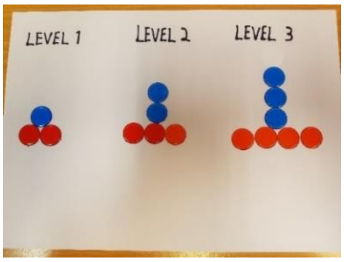
2.5.2 Introduksjon til algebra

En introduksjon til algebra, såkalt tidlig algebra, er ikke det samme som å innføre algebra tidligere (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008). Algebraisk resonnering de første skoleårene innebærer en dyp forståelse av den matematiske strukturen til aritmetikk, uttrykt gjennom språk og gestikuleringer i arbeid med konkreter og representasjoner (Warren & Cooper, 2008). En aktivitet som ifølge Warren og Cooper (2008) har vært vanlig i Australia, er utforsking av enkle, gjentatte mønstre ved hjelp av former, farger, bevegelse og lyd. Lignende oppgaver finner vi også i flere norske lærebøker, hvor elevene eksempelvis skal fargelegge mønster som roteres og/eller gjentas. Warren og Cooper (2008) hevder slike oppgaver legger til rette for et noe ensidig tankesett for variasjon, da det eneste som varierer er innenfor mønsteret selv. Slik vi forstår det, så repeteres bare et gitt mønster, eller fylles ut til en forhåndsbestemt størrelse. Det mangler altså et fokus på visuelt voksende mønster som ikke bare inneholder repetitive elementer. Tradisjonelt har det vært lagt liten vekt på relasjoner og transformasjoner som emner i undervisningen på barneskolen (Warren & Cooper, 2008). Ifølge Malara og Navarra (2003) har klasseromsaktivitet de første skoleårene ofte omhandlet matematiske produkter i stedet for matematiske prosesser, noe vi vil hevde mønsteroppgavene nevnt ovenfor er gode eksempler på. I tillegg har begrepet *variabel* ofte blitt innført som en ukjent i en likning, hvor den representerer et ukjent tall (English & Warren, 1998).

En mulig tilnærming for å introdusere algebra til unge, er derfor en undersøkelse av visuelle vekstmønstre, og uttrykke mønstrene som funksjoner og algebraiske uttrykk (Warren & Cooper, 2008). Lannin (2005) henviser til flere kilder som anbefaler å arbeide med generalisering av figurmønster som et ledd for å forbedre elevers evne til å lære formell algebra. Bakgrunnen for at figurmønsteraktiviter er anbefalt, er i tråd med hva både English og Warren (1998) og Warren og Cooper (2008) har savnet i arbeid med mønsteraktiviteter, altså muligheten for dynamiske representasjoner av variabler. Strømskag (2017b) hevder på sin side at hensikten med å studere figurmønster i skolematematikken er å gi fysiske og ikoniske referansekontekster for generalisering og algebraisk tenkning. Dynamiske representasjoner av variabler eller ikoniske referansekontekster vil si at man kan knytte et algebraisk uttrykk til noe man kan se utviklingen av, slik at det gir mening. Slike representasjoner gir mulighet for å kunne dele opp en figur for videre å kunne avgjøre hva som varierer og hva som er konstant i figuren. Oppdeling av figurer, også omtalt som dekomponering, beskrives videre i kapittel 2.5.4.

2.5.3 Figurmønsteroppgaver

En typisk figurmønsteroppgave tar utgangspunkt i en figur som utvikler seg på en bestemt måte (se figur 2.2). I oppgaven bes elevene om å lage en regel eller en oppskrift som kan brukes til å avgjøre et hvilket som helst tilfelle av figurmønsteret. Det kan gjøres ved å finne en relasjon mellom figurmønstrene og figurnumrene. Ifølge Warren og Cooper (2008) ser vi i prinsippet på voksende mønster som funksjoner, ved at man finner en relasjon mellom mønsteret og dets posisjon. Det vil si at definisjonsmengden er figurnumrene, og verdimengden er mengden av mulige figurtall i figurmønsteret. Vi betrakter altså ikke variasjoner innenfor ett datasett med flerfoldige repetisjoner av et gitt mønster.



Figur 2.2: Figurmønsteroppgave

Figurmønsteroppgaven ovenfor tar utgangspunkt i et tenkt dataspill, hvor figuren i spillet blir større og større for hvert «level» eller figurnummer man kommer til. Vi kan se at antall blå sirkler er identisk med figurnummeret. Samtidig kan vi se at antall røde sirkler er én mer enn figurnummeret. En generell regel for å bestemme antall brikker i et hvilket som helst figurnummer n, kan være $n + (n + 1) \; = \; 2n + 1$. Oversatt til en funksjon, kan vi si at antall brikker i mønsteret forholder seg slik: $f(n) = 2n + 1$, hvor n representerer figurnummeret.

Lannin (2005) viser til flere forskere som har demonstrert at figurmønsteroppgaver oppmuntrer elever til å formulere generaliseringer. Samtidig hevder han at mange elever generaliserer basert på ugyldige argumenter. Det kan innebære feilaktig bruk av multiplikasjon/proporsjonalitet (ratio), eller ved å benytte seg av *gjett og sjekk*-strategier for å konstruere en generalisering (Lannin, 2005). Problemet med gjett og sjekk- strategier kan ifølge Mason (1996) føre til bruk av det han kaller *lokal taktikk*. Lokal taktikk innebærer at elevene prøver å finne en regel som passer til en bestemt del av mønsteret, i stedet for å finne en generell relasjon i problemsituasjonen.

Når det gjelder feilaktig bruk av multiplikasjon/forhold, eller *helobjektmetoden* som Lannin (2005) refererer til, kan et eksempel fra figur 2.2 benyttes. Det kan tenkes at en elev dobler verdien av figur 2 for å finne verdien av figur 4. Antall blå brikker dobles fra figur 2 til 4, men de røde følger ikke samme utviklingsmønster, da det alltid er én rød brikke mer enn selve figurnummeret. Å benytte helobjektsmetoden vil i dette eksempelet bety at eleven ser figuren som en helhet, og videre kan anta at forholdet mellom figurnummer 2 og 4 også vil gjelde for antall brikker i figurene. At så lenge figurnummeret dobles, så vil også antall brikker dobles. Lannin (2005) påpeker at det å benytte seg av helobjektmetoden ikke nødvendigvis alltid blir feil. Dersom man tar høyde for at man må subtrahere eller addere noe i tillegg, kan denne metoden i visse tilfeller knyttes til figurmønsteret. Den eneste metoden som med sikkerhet kan knyttes direkte til figurmønsteret, er den kontekstuelle. Her lager man en regel som baserer seg på informasjon gitt i oppgaven eller relaterer regelen til en telle-teknikk. Eksempel på kontekstuell strategi presenteres i kapittel 2.5.4.

2.5.4 Rammeverk for generalisering av figurmønster

For å kunne svare på deler av forskningsspørsmålet vårt om kjennetegn på robust matematikkundervisning, har vi valgt å benytte Lannin (2005) sitt rammeverk som omhandler generaliseringsstrategier og begrunnelser. Rammeverket ble valgt, da det tar for seg strategier og begrunnelser elever kan benytte i arbeid med generalisering av figurmønster. Hvordan elevene generaliserte og begrunnet, var viktig for å kunne si noe om hvilke kjennetegn på robust matematikkundervisning som fant sted i tilknytning til dimensjon 1 i rammeverket Teaching for robust understanding (Schoenfeld & Floden, 2014).

Lannins (2005) rammeverk inneholder en tabell (Tabell 2.2) hvor han skiller mellom to typer generaliseringsstrategier: *eksplisitte* og *non-eksplisitte*. Eksplisitte strategier gir mulighet for å direkte regne ut verdien av den avhengige variabelen basert på verdien av den uavhengige variabelen. Den kontekstuelle generaliseringsstrategien er et eksempel på en eksplisitt strategi. I oppgaven på figur 2.2 kan man finne verdien til et gitt figurnummer (den avhengige variabelen) ved å doble verdien av figurnummeret (uavhengig variabel) og legge til én. Et eksempel på en non-eksplisitt strategi i forbindelse med samme oppgave, kan være å avgjøre at neste figur i rekken inneholder to flere brikker enn forgående figur. I et slikt tilfelle er man hele tiden avhengig av å vite antall brikker i den forgående figuren for å kunne avgjøre verdien til den neste, også kalt rekursiv strategi.

Generaliseringsstrategier	
Strategi	**Beskrivelse**
Non-eksplisitt	
Telling	Tegning av bilde eller konstruksjon av en modell til å representere situasjonen, og telle hvor mye figuren utvikler seg.
Rekursiv	Bygge på forrige figur/figurer for å avgjøre etterfølgende figur.
Eksplisitt	
Hel-objekt	Bruke en del som enhet for å lage en større enhet ved å multiplisere. Eks: 2 bananer koster 11 kr, derfor koster 6 bananer 33 kr. Det kan/kan ikke være nødvendig å justere for over- eller undertelling.
Gjett-og-sjekk	Gjetting av regel uten hensyn til hvorfor denne regelen kan virke. Dette involverer ofte eksperimentering med ulike operasjoner og tall som er gitt i problemoppgaven.
Kontekstuell	Kunstruksjon av regel basert på informasjon gitt i oppgaven; relatere regelen til en telleteknikk.

Tabell 2.2: Generalization Strategies (Lannin, 2005, s. 234) (vår oversettelse)

Samtidig med at generalisering av figurmønster er anbefalt som introduksjon til algebra, påpeker Lannin (2005) viktigheten av argumentasjon. Om en generaliseringsstrategi er matematisk gyldig eller ikke, avhenger av om den bygger på generelle matematiske relasjoner og prinsipper for figurmønsteret. Man må altså kunne argumentere for generaliseringsstrategiene sine for å kunne validere om figurmønsteret er forstått korrekt. Elevers argumentasjon bør derfor ses i sammenheng med generaliseringen når det skal avgjøres om generaliseringsstrategien er gyldig i henhold til det aktuelle figurmønsteret.

Tradisjonelt benytter mange seg av empirisk validitet i arbeidet med å argumentere for generalitet (Mason, 1996; Sowder & Harel, 1998). Det benyttes altså konkrete tilfeller i figurmønsteret i stedet for det generelle i relasjonen. Slik argumentasjon passer godt med Malara og Navarras (2003) påstand om at skolen har vært opptatt av matematiske produkter fremfor matematiske prosesser; altså oppgaver hvor elevene skal finne bestemte eksempler i stedet for det generelle i situasjonen. Å finne ut hvor mange brikker det er i figurnummer 4, er et eksempel på et bestemt tilfelle dersom vi tar utgangspunkt i oppgaven på figur 2.2. Å finne ut hvor mange brikker det er i figuren uansett figurnummer, vil sette søkelys på det generelle i situasjonen. Det kan altså tenkes at en mangel på arbeid med generalisering i opplæringen har påvirket elevene til å fokusere på empirisk validitet i stedet for å begrunne generelt (Mason, 1996).

Når man skal begrunne generaliseringen av en algebraisk struktur, blir et argument sett på som akseptabelt når det forbinder generaliseringen til en generell relasjon som finnes i problemkonteksten (Lannin, 2005 s. 235). Lannin (2005) hevder en slik type argumentasjon ofte er knyttet til hva han kaller et *geometrisk skjema.* Geometrisk skjema betyr hvordan elevene *ser* en figur, eller hvordan figuren dekomponeres. Figurmønsteret i figur 2.2 er i tråd med anbefalingene til Warren og Cooper (2008) delt inn i røde og blå brikker for å vise hvordan en slik dekomponering kan fremstå. Ved å bare benytte røde eller blå brikker, ville det antageligvis vært mer krevende å se at figuren består av en loddrett rekke med likt antall brikker som figurnummeret, samt en vannrett rekke med én brikke mer enn figurnummeret. Wilkie og Clarke (2016) påpeker viktigheten av å være fleksibel i måten man dekomponerer et figurmønster på. Å ha evnen til å *se* en figur på flere måter vil derfor hjelpe en elev til å finne hensiktsmessige strategier for å generalisere figurmønsteret.

Becker og Rivera (2006) har påvist at elever kan generalisere figurmønster numerisk eller figurativt. Elever som generaliserer numerisk er i all hovedsak opptatt av tallene som mønstrene representerer, mens de som generaliserer figurativt fokuserer på den visuelle fremstillingen av figurmønsteret. Elever som generaliserer numerisk er ofte ikke i stand til å begrunne generaliseringen sin, og bruker gjerne gjett- og sjekk-strategier uten å tenke på hva variablene egentlig representerer (Becker og Riviera, 2006). De som generaliserer figurativt, er i større grad i stand til å begrunne, fordi de kan knytte symboler og variabler til figurene som blir generert av mønsteret. De vil altså lettere se sammenhengen mellom de ulike figurene, ved å se hva som endrer seg og hva som er konstant i mønsteret (Becker og Riviera, 2006).

Lannins (2005) rammeverk inneholder en tabell (Tabell 2.3) for å kunne analysere hvordan elevene begrunner sine generaliseringer. Rammeverket skiller mellom fem ulike nivåer av begrunnelser, rangert fra 0 til 4. På nivå 3 og 4 er elevene i stand til å se generelle relasjoner i figurmønsteret og benytter i så måte en argumentasjon som kan karakteriseres som akseptert; dersom den er matematisk gyldig og de andre elevene i klassen forstår forklaringen (Lannin, 2005).

Begrunnelser	
Nivå på begrunnelse	**Beskrivelse**
Nivå 0: Ingen begrunnelse	Ingen begrunnelse i svarene blir gitt.
Nivå 1: Henvise til ekstern myndighet	Eleven henviser til andre/annet materiale som begrunnelse.
Nivå 2: Empirisk bevis	Begrunnelse er gitt på bakgrunn av korrektheten av spesifikke eksempler, men eleven kan ikke argumentere for at dette alltid vil gjelde.
Nivå 3: Generisk eksempel	Eleven har en deduktiv begrunnelse for et bestemt tilfelle i mønsteret, og kan samtidig argumentere for at dette vil gjelde alle andre forekomster i mønsteret også.
Nivå 4: Deduktiv begrunnelse	Gyldighet er gitt gjennom et deduktivt argument som er uavhengig av bestemte tilfeller.

Tabell 2.3: Justification Framework (Lannin, 2005, s. 236) (vår oversettelse)

Vår tolkning av deduksjon: Eleven har et gyldig resonnement, en logisk slutning eller et bevis etter gitte premisser. Eleven kan argumentere for at det «alltid vil være sånn».

I neste kapittel beskriver vi *Teaching for robust understanding*, som er hovedrammeverket i denne masteroppgaven. Her vil vi blant annet forklare hvorfor Lannins (2005) rammeverk om generalisering av figurmønster har fått vår oppmerksomhet i hovedrammeverkets første dimensjonen.

2.6 Teaching for Robust Understanding (TRU)

The Teaching for Robust Understanding Project frontet av Alan Schoenfeld, har utviklet rammeverket Teaching for Robust Understanding (TRU) (Baldinger & Louie, 2016; Schoenfeld, 2016a, 2016b; Schoenfeld & Floden, 2014). Rammeverket er et verktøy for å kunne beskrive produktive eller robuste læringsmiljøer i matematikk. TRU kan ses på som en sammenfatning av tidligere kunnskap om god praksis. Denne sammenfatningen er systematisert og kategorisert i fem ulike dimensjoner eller aspekter ved matematikkundervisningen. Kvaliteten på undervisningen avhenger av i hvilken grad alle de fem dimensjonene er ivaretatt (Schoenfeld, 2016a). Rammeverket kan således benyttes både i planlegging, gjennomføring og vurdering av matematikkundervisning.

TRU-rammeverket inneholder ikke ferdige oppskrifter på hva man skal gjøre i klasserommet. Det finnes mange måter lærere kan skape robuste læringsmiljøer på, og det eksisterer ingen fasit på «riktig» undervisning (Schoenfeld, 2016a). Hensikten med TRU-rammeverket er derfor, innenfor rammeverkets fem dimensjoner, å spesifisere kjennetegn på undervisningsmiljøer hvor elever lykkes. I arbeid med analyse av undervisning, vurderes de ulike dimensjonene fra nivå 1-3, hvor 3 rangeres som høyest (robust).

Endring av praksis i tråd med kjennetegn på robust matematikkundervisning er en tidkrevende prosess (Schoenfeld, 2016a). Det finnes altså ingen magisk knapp man kan trykke på for å skape et robust læringsmiljø. I likhet med Kilpatrick et als. (2001) beskrivelse av matematisk kyndighet, kreves det også her arbeid med alle de fem dimensjonene synkront over tid. I denne studien er det riktignok ikke rom for å jobbe med et robust læringsmiljø over tid. Vi kan derfor ikke konkludere med at et læringsmiljø er robust, men vi mener likevel det er mulig å se etter kjennetegn på robust matematikkundervisning i et øyeblikksbilde. Slik informasjon kan være nyttig for lærere som skal planlegge videre undervisning. Vår undersøkelse kan dermed gi rom for refleksjon knyttet til hvordan de ulike dimensjonene kan ivaretas i arbeid med en figurmønsteroppgave.

De fem dimensjonene i TRU-rammeverket er som figur 2.3 viser: The Content, Cognitive Demand, Equitable Access to Content, Agency, Ownership and Identity og Formative Assessment. I den videre beskrivelsen av de ulike dimensjonene har vi valgt å oversette begrepene til norsk, med følgende tolkning: Matematikken, Kognitive krav, Tilgang til matematikken, Eierskap, identitet og deling, samt Formativ vurdering. Klasserom som scorer høyt innenfor de fem dimensjonene vil ifølge Schoenfeld (2016a) få frem elever som er kunnskapsrike, fleksible, ressursfulle tenkere og problemløsere.

The Five Dimensions of Powerful Classrooms

The Content	Cognitive Demand	Equitable Access to Content	Agency, Ownership, and Identity	Formative Assessment
The extent to which classroom activity structures provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful disciplinary thinkers. Discussions are focused and coherent, providing opportunities to learn disciplinary ideas, techniques, and perspectives, make connections, and develop productive disciplinary habits of mind.	*The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important disciplinary ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core disciplinary content being addressed by the class. Classrooms in which a small number of students get most of the "air time" are not equitable, no matter how rich the content: all students need to be involved in meaningful ways.*	*The extent to which students are provided opportunities to "walk the walk and talk the talk" – to contribute to conversations about disciplinary ideas, to build on others' ideas and have others build on theirs – in ways that contribute to their development of agency (the willingness to engage), their ownership over the content, and the development of positive identities as thinkers and learners.*	*The extent to which classroom activities elicit student thinking and subsequent interactions respond to those ideas, building on productive beginnings and addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to deepen their understandings.*

Figur 2.3: The five dimensions of powerful classrooms (Schoenfeld, 2016a)

2.6.1 Dimensjon 1: Matematikken

Den første dimensjonen handler om i hvilken grad matematikken oppleves som sammenhengende og overførbar til andre matematiske områder, i motsetning til isolert fakta- og prosedyrekunnskap. Det skal gis rom for å lære viktig matematisk kunnskap, teknikker og perspektiver, samt se sammenhenger mellom ny og tidligere lært kunnskap (Schoenfeld, 2016a). I Schoenfelds (2016a) videre beskrivelser av dimensjonen, kan vi knytte flere av Kilpatrick et als. (2001) tråder for matematisk kyndighet. Der Schoenfeld (2016a) påpeker viktigheten av å fokusere på ideene bak fakta og prosedyrekunnskap, sammenfaller det med Kilpatrick et als. (2001) tråder om beregningskompetanse og forståelse. Kilpatrick et al. (2001) hevder at beregningskompetanse må ses i sammenheng med forståelse, hvilket er helt i tråd med Schoenfelds (2016a) tanker om å fremheve sammenhengene mellom prosedyrekunnskap og konsepter. Schoenfeld (2016a) hevder videre at å se på sammenhengene mellom ulike matematiske konsepter er viktig for å utvikle relasjonell forståelse. Disse nettverkene av forståelse er essensielle i det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som anvendelseskompetanse. Å ha kunnskap på tvers av ulike matematiske konsepter, vil slik vi tolker det gi gode forutsetninger for å eksempelvis løse problemer uten en ferdig oppskrift.

Schoenfeld (2016a) påpeker at det i dimensjon 1 er viktig at matematikken er tilpasset elevenes faglige nivå, samt at man er bevisst på hva som er det matematiske målet i undervisningen. I vår studie av elevers arbeid med generalisering av figurmønster, har målet vært at elevene skal gi en matematisk godkjent begrunnelse for hvordan en hvilken som helst figur i mønsteret ser ut. Lannins (2005) rammeverk om generaliseringsstrategier og begrunnelser kan derfor brukes for å si noe om elevenes måloppnåelse i undervisningssituasjonen. Slik informasjon kan fortelle om det matematiske innholdet har vært tilpasset elevgruppen, som igjen kan si noe om undervisningssituasjonen viser kjennetegn på robust matematikkundervisning innenfor dimensjon 1.

2.6.2 Dimensjon 2: Kognitive krav

Kognitive krav handler om at elevene blir utfordret på en måte som gir rom for utvikling. Det vil si at oppgavene hverken er for lette eller for vanskelige. En enkel oppgave gir lite rom for utvikling, mens en altfor vanskelig oppgave kan føre til at elevene mister troen på seg selv og gir opp (Schoenfeld, 2016a). For å treffe godt innenfor dimensjonen om kognitive krav, anbefaler Schoenfeld (2016a) at vanskelighetsgraden på oppgaven ligger mellom moderat og vanskelig. Oppgaven bør altså legges på et slikt nivå at den opprettholder et «produktivt strev», og dermed gir best mulig forutsetninger for utvikling hos elevene (Liljedahl, 2016; Schoenfeld, 2016a). Stein og Lane (1996) argumenterer lignende i sin studie av elevers faglige utbytte i arbeid med ulike typer matematikkoppgaver. De påpeker viktigheten av å benytte kognitivt krevende oppgaver, om man har som mål at elevene skal utvikle sin evne til å tenke, resonnere og løse problemer. Hiebert og Grouws (2007) understreker også at kognitivt krevende oppgaver er viktig både for elevenes begrepsforståelse og dybdelæring.

For å vurderes til nivå 3 i Schoenfeld og Flodens (2014) beskrivelse av dimensjon 2, er det ifølge rammeverket avgjørende at oppgaven(e) som benyttes i undervisningen er kognitivt krevende. I tillegg er det viktig at læreren gjør sitt beste for å opprettholde et produktivt strev hos elevene. Liljedahl (2016) argumenterer for å bare besvare «fortsett-å-tenke»-spørsmål, mens Schoenfeld (2016a) problematiserer at lærere fort kan gi for mye hjelp, og på den måten redusere de kognitive kravene. I verste fall kan for mye hjelp føre til hva Brousseau, Balacheff, Cooper, Sutherland og Warfield (1997) omtaler som *Topaze-effekten.* Topaze-effekten innebærer at læreren forenkler problemet så mye at målkunnskapen forsvinner fullstendig for elevene. Et eksempel på Topaze-effekt i forbindelse med en figurmønsteroppgave, kan være om læreren tilbyr elevene en formel for mønsterets utvikling, uten å knytte formelen direkte til figurmønsteret.

I likhet med Liljedahl (2016) understreker Schoenfeld (2016a) at elevene må gis tid og rom for å tenke. For å opprettholde elevenes tenkning, må læreren bygge «stillas» rundt elevene. Dette kan gjøres ved å eksempelvis stille klargjørende spørsmål, la elevene presentere ideer for hverandre, eller støtte elevene i å tegne/skrive ut sine ideer (Schoenfeld, 2016a). I sin beskrivelse av «Thinking classrooms» argumenterer Liljedahl (2016) for at stående arbeid med vertikale tavler i treer-grupper gir både lærere og elevene denne muligheten.

2.6.3 Dimensjon 3: Tilgang til matematikken

Med tilgang til matematikken, menes at alle elevene i en gruppe skal få tilgang til matematikken det undervises i. Klasseromsaktiviteten må legges til rette slik at den gir støtte til at alle elevene får delta aktivt i arbeid med det matematiske innholdet (Schoenfeld, 2016a). Selv om innholdet er godt, hjelper det altså lite dersom bare noen få elever deltar. Denne dimensjonen handler ikke om nivåtilpasninger av selve matematikken, slik vi finner i dimensjon 1 og 2, men omhandler i hvilken grad læreren lykkes med å tilpasse for alles deltakelse i arbeid med det matematiske innholdet (Schoenfeld, 2016a).

Schoenfeld (2016a) viser til forskning der lærere lykkes i å gi oppgaver som gjør det mulig for alle elever å engasjere seg i utfordrende matematisk innhold. Samtidig peker han på lærere som etablerer klasserom hvor det er forventet at alle elevene deltar og bidrar i undervisningen. Boaler (2008) viser i sin forskning til eksempler på lærere som klarer å inkludere alle elever i et læringsfelleskap uavhengig av ferdigheter og sosiale forhold. Det er altså mulig å etablere klasseromsnormer hvor elevene har såkalt *rettferdig relasjon* (Boaler, 2008). Begrepet rettferdig relasjon innebærer tre ulike egenskaper: Respekt for andres ideér, en forpliktelse til å sørge for andres læring og innlærte metoder for kommunikasjon og støtte. Det siste punktet henviser til elevenes evne til å stille gode spørsmål for å få innsikt i andres tankegang. Boaler (2008) hevder at læringsfelleskap som klarer å etablere rettferdige relasjoner mellom elevene, i større grad lykkes med å få alle elevene til å delta. I hennes undersøkelse trakk hun frem en skole hvor elever med ulik matematisk kompetanse jobbet sammen og dro nytte av hverandre basert på rettferdige relasjoner (Boaler, 2008). Elevene ved denne skolen oppnådde bedre resultater enn de skolene som hadde nivådelt undervisning. Liljedahl (2016) argumenterer også for å arbeide i grupper, og med tilfeldig gruppesammensetning der det heller ikke er tatt hensyn til nivåinndeling.

Schoenfeld, (2016a, 2016b) ber læreren se på undervisningen gjennom elevens øyne og reflektere over spørsmål som: Kan jeg gjemme meg og bli ignorert? Liljedahl (2016) mener elevene i større grad inkluderes ved å arbeide stående i grupper på vertikale tavler, uten mulighet for å gjemme seg bort. Sfard (2006, 2007) hevder at elever lærer ved å utvide sin diskurs i kommunikasjon med andre. Det er dermed vesentlig at ingen gis mulighet for å trekke seg unna. Schoenfeld (2016a) presenterer ulike tiltak læreren kan gjøre for å sikre elevenes tilgang til matematikken. Det kan være å gi oppgaver som kan løses på ulike måter, eller benytte oppgaver som tar utgangspunkt i noe fra elevenes dagligliv. Videre kan læreren vektlegge å diskutere ulike strategier og se på sammenhenger mellom dem. Hen kan også oppmuntre til forbedring av ideér i stedet for å avslå eller ignorere mangelfulle innspill, eller løfte frem elever som enda ikke har sagt noe.

For å vurderes til nivå 3 innenfor tilgang til matematikken, må læreren aktivt støtte og til en viss grad oppnå bred og meningsfull matematisk deltakelse. Alternativt sørger allerede etablerte klasseromsnormer for dette, uten behov for lærerens medvirkning (Schoenfeld & Floden, 2014).

2.6.4 Dimensjon 4: Eierskap, identitet og deling

Eierskap, identitet og deling handler om i hvilken grad læreren gir elevene mulighet til å dele sine ideer, bygge på andres ideer og la andre bygge på deres ideer. Tanken er at elevene gjennom denne delingen skal oppnå positive identiteter som matematiske «gjørere» og få eierskap til det matematiske innholdet. Det skal igjen stimulere elevene til å fortsette å engasjere seg i matematikk (Schoenfeld, 2016a). Kilpatrick et al. (2001) benytter seg også av begrepet «matematiske gjørere» i sin tråd om engasjement. I likhet med Kilpatrick (2001) beskriver Schoenfeld (2016a) viktigheten av at elevene engasjerer seg og tror at de kan lykkes gjennom hardt arbeid. Målet er å oppnå et eierskap til matematikken. Eierskap beskrives av Schoenfeld (2016a) som å selv resonnere omkring og begrunne matematiske ideer, i stedet for å kopiere eller memorere andre, eller referere til eksterne autoriteter.

For å etablere et klasseromsmiljø som skaper slike identiteter med eierskap til faget, peker Schoenfeld (2016a) spesielt på alle elevers mulighet til å bli hørt. I dimensjonen om tilgang til matematikken, viste vi blant annet til hvordan Boaler (2008) beskrev læreres arbeid med rettferdige relasjoner. Det finnes altså muligheter for å inkludere alle, selv om enkeltelever ikke har like gode forutsetninger for å gjøre dette på egenhånd. Selv om dimensjon 3 og 4 har likheter, handler ikke dimensjon 4 om hvem som gis tilgang til å bli hørt. Dimensjon 4 tar for seg i hvilken grad det *legges til rette* for at alle elevene blir hørt og kan dele sine idéer og resonnement, samtidig som de blir gitt anerkjennelse og tildelt eierskap (Schoenfeld, 2016a).

Schoenfeld (2016a) argumenterer for flere ulike grep: Læreren kan legge opp til klasseromsdiskusjoner, hvor elevene gis mulighet for anerkjennelse av sine idéer. Videre kan læreren hjelpe usikre elever ved å gjenta eller omformulere elevenes bidrag. Gjentakelse/omformulering eller «revoicing» støtter elever som har problemer med å gjøre seg forstått, og hjelper til med å klargjøre en elevs resonnement for resten av klassen (Chapin, O'Connor & Anderson, 2009; Wæge, 2015).

Schoenfeld (2016a) anbefaler i likhet med Liljedahl (2016) arbeid i små grupper for at alle elevene skal ha mulighet til å bli hørt og få delt sine ideer, men det krever som Boaler (2008) påpeker gode klasseromsnormer for å oppnå alles deltakelse. Gode klasseromsnormer omtales også av Schoenfeld som essensielt i arbeid med elevenes delingskultur. Han påpeker at det kun er i miljøer hvor elevene er trygge og komfortable til å bidra i den matematiske diskusjonen, at elevene har mulighet til å utvikle en positiv matematisk identitet med eierskap til matematiske idéer (Schoenfeld, 2016a). For å vurderes til nivå 3 innen dimensjon 4, må altså elevene beskrive og forklare sine ideer, hvor læreren anerkjenner innspill som blir gjort i plenum. Alternativt vil en undervisningssituasjon kunne vurderes til nivå 3 dersom elevene responderer på og bygger på hverandres idéer (Schoenfeld & Floden, 2014).

2.6.5 Dimensjon 5: Formativ vurdering

Formativ vurdering handler om hvordan elevenes tenkning blir innhentet og respondert på, samt hvordan dette benyttes i planlegging av ny undervisning. Det presiseres at det er vesentlig at misoppfatninger tas tak i og at det bygges videre på produktive elevidéer. God instruksjon møter elevene der de er, og gir dem muligheten til å utvikle dypere forståelse (Schoenfeld, 2016a).

Formativ vurdering innebærer organisering av klasseromsaktiviteter hvor elevenes nåværende forståelse kommer til syne under læringsprosessen. Å få tilgang til denne forståelsen gir både læreren og elevene muligheter til å bygge videre på gode idéer, samt ta tak i misoppfatninger (Schoenfeld, 2016a). I motsetning til summativ vurdering, hvor elevene får en vurdering etter endt arbeid, er formativ vurdering en vurdering som gjøres underveis i elevenes læringsprosess. Fordeler med underveisvurdering, er at man kan hjelpe elevene til å utvikle dypere forståelse mens de fortsatt er i denne læringsprosessen (Schoenfeld, 2016a). Summativ vurdering vil typisk gi et svar på hva elevene kan etter et gitt læringsløp, uten mulighet til påvirkning underveis.

Kilpatrick et al. (2001) nevner elevenes evne til resonnering som en vesentlig del av det å bli matematisk kyndig. Schoenfeld påpeker videre viktigheten av at læreren får ta del i elevenes tanker. Slik kunnskap er essensielt for å kunne planlegge videre undervisning, og blant annet kunne tilpasse undervisningens kognitive krav (dimensjon 2) underveis (Schoenfeld, 2016a). Læreren har ikke nødvendigvis ansvaret for å alltid ta opp alle problemene som dukker opp underveis i elevenes resonnering. Elever kan i gruppearbeid fungere som ressurser for hverandre, ved å legge frem egne idéer og bygge videre på andres (Schoenfeld, 2016a). Å bli satt i posisjon til å dele, vurdere og kritisere egne og andres idéer, vil bedre elevenes produktive tankegang og evne til å videreutvikle sine idéer. Slikt arbeid vil igjen kunne påvirke elevenes eierskap til det matematiske innholdet (Schoenfeld, 2016a).

For å vurderes til nivå 3 innenfor formativ vurdering, må læreren innhente elevenes tenkning, bygge videre på deres idéer eller adressere deres misoppfatninger (Schoenfeld & Floden, 2014). Basert på Schoenfelds (2016a) fokus på elevenes egenvurdering, vil vi også vurdere denne dimensjonen til nivå 3 dersom elevene deler og reflekterer over egne og andres idéer.

3 Metode

Cai et al. (2019) understreker betydningen av å la forskningsspørsmålet bestemme de metodiske valgene for datainnsamling. Vårt forskningsspørsmål er *Hvilke kjennetegn på robust matematikkundervisning fremkommer i arbeid med en figurmønsteroppgave på vertikale tavler på mellomtrinnet?* For å kunne svare på forskningsspørsmålet, redegjør vi for de valg vi har gjort med tanke på forskningsmetode, og metode for datainnsamling, utvalg og oppgaven vi ga til elevene. Deretter beskriver vi metoden for analyse, og avslutningsvis redegjør vi for etiske vurderinger og studiens troverdighet.

3.1 Valg av metode

Det er målet med studien som bestemmer om forskeren skal velge å gjennomføre en kvantitativ eller kvalitativ undersøkelse (Cleland, 2015). Ifølge Cleland (2015) har kvantitativ forskning sitt utspring i positivismen, og målet med kunnskapsinnhentingen er å beskrive de fenomenene vi erfarer som kan observeres og måles. Kvantitative metoder brukes til å utvikle representativ oversikt over generelle forhold, og til å teste hypoteser og teorier (S. Grønmo, 2020). Utgangspunktet for en kvalitativ studie er en subjektiv oppfattelse av hvordan man kan tolke, forstå eller erfare en hendelse i den sosiale verden. Virkeligheten kan ikke måles direkte. Virkeligheten er relativ og mangfoldig, og oppfattes gjennom konstruerte og subjektive tolkninger (Cleland, 2015). Grovt sett kan man si at kvantitative undersøkelser involverer utprøving av hypoteser med en deduktiv tilnærming, der målet er å få bekreftet eller avkreftet hypotesen gjennom et eksperiment som analyserer resultatet numerisk. Kvalitative undersøkelser er opptatt av å forstå den observerte virkeligheten i lys av teori. Dette gir forskeren ulike «conseptual lenses» (Cleland, 2015, s. 4), som gir mulighet for å fokusere på ulike aspekter ved dataene, samt et rammeverk for å gjennomføre analysen.

Schoenfeld og Flodens rammeverk (2014) kan benyttes til å vurdere et undervisningsopplegg og gjennomføringen av det. Målet vårt er å undersøke kjennetegn på robust matematikkundervisning, hvor elevenes deltakelse er sentralt. Vii har derfor valgt et kvalitativt forskningsdesign. Et sentralt poeng i all kvalitativ forskning, er at individer konstruerer en realitet i interaksjon med andre (Merriam & Tisdell, 2016). Det finnes ulike varianter av kvalitative studier, og vår studie kan defineres som en kvalitativ kasusstudie. Felles for definisjoner av en kasusstudie er at det er en studie av et avgrenset område og/eller gruppering. Creswell (2013) definerer en *casestudy* som en kvalitativ tilnærming. Forskeren studerer et avgrenset system (case) ved hjelp av data fra flere kilder som for eksempel observasjoner, lyd- og videoopptak og intervju. Vår studie innebærer å observere hva elevene gjør og hvordan de gjør det, både knyttet opp mot de fem dimensjonene i TRU (Schoenfeld & Floden, 2014) og Lannins (2005) rammeverk for generalisering av figurmønster.

TRU-rammeverket (Schoenfeld & Floden, 2014) består som tidligere beskrevet av fem dimensjoner: matematisk innhold, kognitive krav, elevenes tilgang til matematikken, elevenes mulighet til å dele og få anerkjennelse for sine ideer, samt formativ vurdering. Ifølge Schoenfeld (2016a) kan ikke vurdering av en enkelt undervisningsøkt fastslå om læringsmiljøet er robust. Observasjonene knyttet til de fem dimensjonene kan imidlertid danne grunnlag for refleksjon over undervisningen som helhet, og gi innspill til matematisk innhold, organisering og vurdering. Vår undersøkelse er et øyeblikksbilde, der vi har en antagelse om at bruk av vertikale tavler gir elevene tilgang til andre elevers resonnement. Vi antar at tavlene også gir læreren bedre oversikt over elevenes arbeid kontra arbeid i bøker eller andre horisontale arbeidsflater. Begge disse områdene er omtalt i de tre siste dimensjonene. Videre antar vi at de vertikale tavlene legger til rette for samarbeid mellom elevene, og gir mulighet til utprøving av ideer, noe som berøres i alle dimensjonene.

Den første dimensjonen i TRU-rammeverket omhandler i hvilken grad det matematiske innholdet er på et nivå tilpasset elevgruppen. Vi har i tillegg valgt å benytte Lannins (2005) rammeverk for å vurdere elevenes generalisering av figurmønster, og om de også kan begrunne generaliseringen sin. En undersøkelse av elevenes strategier og begrunnelser mener vi vil gi oss data på om det matematiske innholdet har vært tilpasset elevgruppen.

3.2 Utvalg

Vårt forskningsspørsmål omhandler det matematiske emneområdet figurtall som en inngang til algebraisk tenkning på mellomtrinnet. Vi ønsket derfor å knytte til oss to klasser med lærere som viste interesse for arbeid med figurmønsteroppgaver, men også for bruk av vertikale tavler som et didaktisk element. Lærer og de 19 elevene på 5. trinn på skole A hadde benyttet vertikale tavler på figurmønsteroppgaver tidligere. Lærer og de 15 elevene på 6. trinn på skole B hadde verken benyttet vertikale tavler eller arbeidet med figurmønsteroppgaver. Ved valg av lærere hadde vi et praktisk utgangspunkt, da dette var lærere vi kjente til og som hadde et ønske om å utvikle seg som matematikklærere. Klassene hadde litt forskjellig bakgrunn når det gjaldt arbeid med vertikale tavler og figurtall, og vi ønsket å se om det hadde noen betydning for måloppnåelsen. På skole B gjennomførte vi en pilot der elevene jobbet med en talloppgave på vertikale tavler, slik at de var introdusert for verktøyet før studien startet. På den måten reduserte vi antall ukjente faktorer for elevene. Lærer og elever ble blant annet kjent med den praktiske funksjonen til tavlene, slik at vi ikke trengte å bruke tid på det i undersøkelsen.

Alle elevene i de to klassene ønsket å delta i studien. Vi valgte å ha med alle, da det å dele metoder og løsningsstrategier ved bruk av vertikale tavler betinger at flere elevgrupper jobber med samme oppgave samtidig. Av praktiske hensyn konsentrerte vi oss om to grupper á tre elever i hver klasse. Vi ønsket å følge anbefalingen om å dele elevene i tilfeldige treergrupper (Liljedahl, 2016). Liljedahl understreker riktignok at effekten av tilfeldige grupper først viser seg over tid, når elevene er vant til at det er tilfeldig hvem de skal jobbe sammen med. Vi ønsket imidlertid å sikre at elevene ikke hadde inntrykk av at vi hadde satt sammen grupper for å få et ønsket resultat. Med det la vi til rette for at vi ville få et så autentisk arbeid i gruppene som det var mulig å oppnå. For likevel å sikre oss at fokusgruppene hadde elever som kunne uttrykke seg, og normalt viste engasjement i problemløsningsoppgaver, ba vi lærerne velge ut to elever som skulle være i hver sin fokusgruppe. De to andre elevene i de to gruppene ble trukket, og sammensetningen av gruppene var derfor ikke bestemt på forhånd.

3.3 Valg av metode for datainnsamling

I en kasusstudie benytter man seg av varierte datainnsamlingsmetoder som intervju, observasjon, dokumenter og eksperimenter (Cohen, Morrison & Manion, 2018). Observasjon gjennom bruk av video- og lydopptak er den viktigste datainnsamlingsmetoden i vår undersøkelse, fordi det er selve undervisningssituasjonen som gir svar på forskningsspørsmålet. Det er imidlertid ikke alt i en undervisningssituasjon som er observerbart. Vi valgte derfor å intervjue de to lærerne for å få deres perspektiv på sentrale elementer innenfor de fem dimensjonene, samt den didaktiske bruken av de vertikale tavlene.

3.3.1 Video og taleopptak

Bruk av video og taleopptak gir forskere mulighet til å studere klasseromssituasjoner flere ganger, i motsetning til observasjonsnotater som innebærer at forskeren tolker inntrykkene i situasjonen der og da. Video- og taleopptak skal med andre ord sikre at forskeren får et så eksakt bilde av virkeligheten som mulig, da video- og lydopptakene dokumenterer elever og læreres oppførsel mens det skjer i klasserommet (Merriam & Tisdell, 2016). Chan, Mesti og Clarke (2019) problematiserer den ontologiske utfordringen som ligger i samspillet mellom videomaterialet og forskeren, og hvordan det påvirker tolkning av den informasjonen videoopptak gir. De viser til tre ulike måter å benytte videoopptak på, ut fra studienes forskningsdesign: Video kan brukes som et *vindu* der forskeren får se hva som foregår i klasserommet, den kan brukes som en *linse* der forskeren får mulighet til å studere et spesielt fokusområde, og som *speil* for å beskrive hvordan lærere og elever reflekterer over egen praksis. De tre metaforene for bruksområdene av video fordrer en bevissthet om hvilken rolle videomaterialet har i studien. I vindusmetaforen representerer videomaterialet en virkelighet som er antatt uavhengig av forskeren. I linsemetaforen representerer videomaterialet en virkelighet som er orkestrert av forskeren gjennom måten studien er utformet på, og hvilket utsnitt forskeren velger å analysere. Speilmetaforen kan betraktes som en måte å hente data fra respondenter på lik linje med intervju, utført oppgave eller spørreskjema.

Forskningsspørsmålet vårt omhandler en undersøkelse av en undervisningssituasjon. Vi har derfor benyttet videomaterialet i kombinasjon av *vindu* og *linse,* fordi vi ønsket å filme undervisningssituasjoner så tett opp til virkeligheten som det var mulig å få dem. Av praktiske grunner valgte vi å ha et spesielt fokus på to grupper i hver klasse. I tillegg til fokusgruppene, valgte vi også å ta med klassesamtalene for å få et helhetlig bilde av undervisningssituasjonen.

Pring (2000) viser til to ulike paradigmer som danner basis for hvordan en undersøkelse kan oppfattes. Paradigme A tror på en objektiv sannhet der forsker og det som forskes på er separate, og at resultatet derfor kan betraktes som en sannhet. Paradigme B mener at virkeligheten er en «social construction of mind» (Pring, 2000, s. 251) der forskningsresultatet er en konstruksjon mellom forsker og det det forskes på, og der fakta ikke eksisterer uavhengig av hvordan forskeren konstruerer virkeligheten. Pring (2000) hevder videre at verken paradigme A eller B har enerett på sannheten. En fortolkning av fysiske og sosiale realiteter må bygge på at det eksisterer både fysiske og sosiale faktorer med tydelige kjennetegn, som gjør det mulig for oss å konstruere vår oppfattelse av verden. Vårt utgangspunkt er at vi observerte en samhandling mellom elever, og elever og lærer, men ikke totalt uavhengig av vår tilstedeværelse og gjennom det vår medvirkende konstruksjon av undervisningssituasjonen. En utdyping med henblikk på undersøkelsens troverdighet, diskuteres videre i kapittel 3.6.

3.3.2 Intervju

En kvalitativ undersøkelse henter ofte data fra flere kilder, og i tillegg til videoopptakene, ønsket vi å intervjue de to lærerne etter at undervisningsøkten var gjennomført. Intervjuene ville gi oss tilgang til lærernes vurderinger av undervisningssituasjonen. Kvale og Brinkmann (2017) beskriver to ulike metaforer for intervjueren: gruvearbeider eller reisende. Metaforene beskriver de ulike epistemologiske oppfatningene av intervjuprosessen, der metaforen gruvearbeider illustrerer kunnskapsinnhenting, mens den reisende bedriver kunnskapskonstruksjon. De to metaforene representerer ulike tilnærminger til intervjuet. Vår tilnærming var den reisende, som sammen med lærerne reflekterte over undervisningssituasjonen og de didaktiske valgene, og gjennom det skapte ny innsikt.

Kvale og Brinkmann (2017) beskriver videre syv hovedtrekk ved intervjukunnskap. Det første er at kunnskap er produsert. Med det mener de at kunnskap er et produkt som skapes av intervjueren og den som blir intervjuet i fellesskap. Kunnskap er for det andre relasjonell, den skapes i samspillet mellom intervjuer og intervjuobjekt. For det tredje er intervjukunnskap samtalebasert. I likhet med Sokrates kan vi betrakte samtalen som en primær måte å produsere kunnskap om det sanne, det gode og det skjønne på (Kvale & Brinkmann, 2017, s. 77). For det fjerde må kunnskap ses i en kontekstuell sammenheng. Med det menes at den kunnskap som er oppnådd i én situasjon ikke nødvendigvis lar seg overføre til en annen. Kunnskap konstitueres gjennom språklig samspill. Språket er intervjuprosessens verktøy, og produktet er i vårt tilfelle muntlige utsagn som er transkribert og gjenstand for analyse. Videre er kunnskap narrativ, hvor intervjuet gir tilgang til fortellinger fra intervjupersonenes perspektiver. Til slutt hevder Kvale og Brinkmann (2017) at kunnskap er pragmatisk. Med det mener de at pragmatismen insisterer på at tanker og betydninger blir legitime når de setter oss i stand til å mestre den verden vi befinner oss i.

Med overnevnte betraktninger som bakteppe, planla vi et semistrukturert intervju. Et semistrukturert intervju karakteriseres av en intervjuguide med en blanding av mer eller mindre strukturerte spørsmål. Hovedvekten av intervjuet styres av en planlagt liste av spørsmål og/eller tema, der det er spesifikke data som innhentes fra alle respondentene (Merriam & Tisdell, 2016). Forskningsspørsmålet vårt omhandler kjennetegn på robust matematikkundervisning, bruk av vertikale tavler som didaktisk virkemiddel og figurmønsteroppgave som introduksjon til algebra. I utarbeidelsen av intervjuguiden (vedlegg 6) stilte vi først spørsmål knyttet til de fem dimensjonene i Schoenfelds (2016a) rammeverk. Spørsmålene omhandlet lærernes erfaring, holdning og kunnskap knyttet til det matematiske emneområdet, elevenes engasjement og lærernes mulighet for vurdering underveis. Andre del av intervjuet dreide seg om bruk av vertikale tavler og hvordan lærerne opplevde at det didaktiske virkemiddelet påvirket undervisningssituasjonen både for seg selv og elevene.

I et kvalitativt forskningsintervju produseres kunnskap sosialt, altså gjennom interaksjon mellom intervjuer og intervjuperson. Kvaliteten på de data som produseres er avhengig av intervjuerens ferdigheter og kunnskap om tema (Kvale & Brinkmann, 2017). Kvalitetskriterier for et intervju er blant annet i hvilken grad intervjueren får spontane, innholdsrike, spesifikke og relevante svar fra intervjupersonene. Andre viktige momenter er å strebe etter korte spørsmål, men lange svar, og å klare å følge opp spørsmålene underveis i intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2017). Intervjueren må være kunnskapsrik, strukturert, åpen og vennlig. Hen må også være styrende, og ha evnen til å tolke det som blir sagt for å få det bekreftet eller avkreftet underveis i intervjuet (Kvale &

Brinkmann, 2017). Vår manglende intervjuerfaring gjorde imidlertid at intervjusituasjonene etter hvert utviklet seg mer til samtaler, der våre synspunkter også ble en del av samtalen. Likevel var det fortsatt en samtale med en hensikt (Merriam & Tisdell, 2016). Samtaleformen samsvarer med vårt valg om den reisende metaforen, der vi i relasjon med lærerne produserte ny kunnskap, og der vi fikk kjennskap til lærernes narrativer om hva de mener kjennetegner et robust læringsmiljø.

Det anbefales å foreta en pilot for å kvalitetssikre spørsmålene (Kvale & Brinkmann, 2017; Merriam & Tisdell, 2016). I vårt tilfelle var en pilot vanskelig å utføre, da spørsmålene rettet seg mot den undervisningssituasjonen lærerne nettopp hadde gjennomført. I så måte kan man hevde at den kunnskapen som ble skapt i intervjuet var kontekstuell, og ikke nødvendigvis overførbar til andre situasjoner. Spørsmålene var imidlertid stilt på en slik måte at lærerne kunne gi uttrykk for mulighet for overføring til andre matematiske emneområder. Videre kunne de påpeke hvilke forutsetninger de mente måtte være til stede i elevgruppen for å nå målet om et robust læringsmiljø.

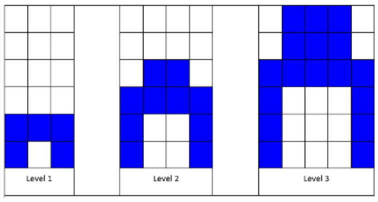
Vi intervjuet de to lærerne hver for seg og fordelte intervjurollen mellom oss, slik at en av oss var hovedintervjuer mens den andre kom med innspill underveis. Vi la vekt på å skape en god atmosfære rundt intervjuet, der vi understreket hvor viktig det var å få deres ærlige mening om, og holdning til de ulike temaene (Cohen et al., 2018; Merriam & Tisdell, 2016). Kvale og Brinkmann (2017) trekker frem noen innvendinger mot kvaliteten på et intervju i form av at det er subjektivt, personavhengig og ensidig. Vår hensikt med å intervjue de to lærerne var nettopp å få frem deres personlige mening om undervisningssituasjonen de hadde gjennomført. Og som Kvale og Brinkmann (2017) selv påpeker, vil vurderingen av intervjukvalitet avhenge av intervjuets spesifikke form, tema og formål.

3.3.3 Vertikale tavler brukt som observasjonsgrunnlag

De vertikale tavlene som elevene benyttet var i tillegg til å være et didaktisk hjelpemiddel for lærerne og elevene, også et metodisk grep for oss. Vi hadde hele tiden tilgang til elevenes arbeid på tavlene, og kunne observere hvordan de enkelte gruppene både benyttet egen tavle, men også studerte medelevers tavler. Vi kunne også observere om lærerne valgte å la elevgrupper få anledning til å stille spørsmål til det arbeidet de kunne se på tavlene til andre elevgrupper. Observasjonene knyttet vi så til intervjuet med lærerne i etterkant, og fikk deres vurdering av noen av de valgene de gjorde underveis. At tavlene var såpass store (A2), gjorde at vi kunne se arbeid som ble gjort på andre siden av klasserommet uten å måtte flytte oss fra gruppene vi videofilmet.

3.4 Robotoppgaven

Figur 3.1: Robotfigur fra Star Wars



Figur 3.2: De tre første figurene i figurmønsteret

Valg av matematisk tema er begrunnet i internasjonale og nasjonale undersøkelser som peker på at norske elever presterer lavt innen emneområdet algebra. Oppgaven er også valgt fordi den har lav inngangsterskel og stor takhøyde, og med det både ivaretar kognitive krav, men også mulighet for alle elevene til å delta på sitt nivå. Læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019) oppfordrer i kjerneelementene til at vi skal utfordre elevene gjennom problemløsningsoppgaver, der de blant annet får anledning til å utforske, argumentere og generalisere. Vi mener derfor denne oppgaven er i tråd med denne oppfordringen.

Robotoppgaven, illustrert i figur 3.1 og 3.2, er en figurmønsteroppgave der elevene bes om å finne antall poeng på utvalgte level. Begrepet *level* er her ekvivalent med figurnummer. Vi valgte å benytte level for å knytte det til elevenes kjennskap til dataspill. Det er en mediering som Presmeg (2006) beskriver som *between practices,* der lærere hjelper elevene å bevege seg mellom diskursen knyttet til en kjent situasjon og den matematiske diskursen. Læreren medierer, knytter en sammenheng, mellom det matematiske objektet og en representasjon som er kjent for elevene. I den videre beskrivelsen av oppgaven, benytter vi poeng i stedet for antall ruter i figuren. Oppgaven har som mål at elevene skal kunne lage en beskrivelse for å finne poengsummen for et hvilket som helst figurnummer.

Robotfiguren utvikler seg etter et spesielt mønster, og antall poeng på et hvilket som helst figurnummer er ekvivalent med antall ruter i figuren. Den eksplisitte formelen for antall kvadrater er $n^2 + 2n + 2$ der $n = figurnummer$. Elevene fikk først i oppgave å tegne level 4 og 5 og finne ut hvor mange poeng man har på de to figurnummerne. Det gir en lav inngangsterskel til oppgaven der alle elever kan bidra, fordi det er mulig å telle seg frem til hvordan figuren endrer seg fra figurnummer 1 til 3. Elevene får dermed den kunnskapen de trenger for å tegne figurnummer 4 og 5.

Neste oppgave var å finne antall poeng på figurnummer 10, uten at det ble gitt noen føringer for hvordan elevene skulle komme frem til det. De kunne velge å tegne eller lage et regnestykke. Vi ønsket å se om noen valgte å doble antall poeng fra figurnummer 5, for å oppdage eventuelle misoppfatninger som *helobjekt-strategi* (Lannin, 2005). Alternativt om de hadde oppdaget sammenhengen mellom figurnummer og antall kvadrat, og dermed også konstantleddet $+2$. Etter figurnummer 10 samlet lærer elevene til en samtale om hvordan de så figuren. Eksempelvis ville en dekomponering av figuren i form av «hodekropp» som n^2 og bein eller armer som $2n + 2$, hjelpe dem til å se sammenheng mellom figurnummer og antall poeng. Denne kunnskapen var nyttig i den neste oppgaven som var å finne antall poeng på figurnummer 100. Ved å be elevene finne antall poeng på et høyt figurnummer, ønsket vi å tvinge frem en generalisering, hvor elevenes evne til å dele opp figuren er sentralt (Lannin, 2005).

Uten denne dekomponerings-samtalen, så vi det som vanskelig for en del elever å finne frem til antall poeng for figurnummer 100. Da vi ba elevene finne antall poeng på et figurnummer det er vanskelig å tegne figuren til, ga det oss mulighet til å se hvordan elevene dekomponerte figuren. Videre ønsket vi å se om elevene klarte å bevege seg fra rekursive til eksplistte generaliseringsstrategier. I tillegg ville vi få innblikk i hvordan elevene argumenterte for sine generaliseringer.

Den siste oppgaven til elevene var å be dem lage en «oppskrift» for å finne antall poeng for et hvilket som helst figurnummer. De elevene som klarte å formulere det med ord, ble utfordret til å lage et regnestykke som passet til beskrivelsen deres. Vi ba ikke om en formel, da elevene på disse trinnene er ukjente med det, men lærer viste hvordan det kunne skrives som et algebraisk uttrykk i den siste klassesamtalen. Begge lærerne valgte å benytte $l \cdot l + 2l + 2$, der l representerte figurnummeret ($l = level$). Formelen lærerne valgte, bygde på elevenes beskrivelser av hvordan man kan finne antall poeng på hvilket som helst level (figurnummer). En videre beskrivelse av elevenes oppskrifter gis i resultatkapittelet.

Lærer ga alle oppgavene muntlig til elevene underveis i timen. Det er i tråd med Liljedahls anbefaling om å begrense skriftlige oppgaver som elevene må tolke før de kan starte arbeidet (Liljedahl, 2016). Vi hadde på forhånd gjennomgått undervisningsopplegget sammen med lærerne (hver for seg), og gitt dem anledning til å gjøre seg kjent med det, slik at de kunne føle seg mest mulig komfortable i gjennomføringen. Ved starten av timen forklarte vi elevene at lærerne kunne be om en «time out» hvis de hadde behov for å konferere med oss. Begge lærerne hadde det samme skriftlige undervisningsnotatet å forholde seg til (se vedlegg 5), og valgte å benytte det fremfor å be om «time out». Gjennomføringen i de to klassene ble derfor progresjonsmessig lik.

3.5 Metode for analyse av data

Analyse av data innebærer å identifisere de deler av datamaterialet som kan gi svar på forskningsspørsmålet vårt (Merriam & Tisdell, 2016). Det kan være alt fra korte uttalelser som en deltaker bruker til å beskrive et fenomen, til lengre observasjonsnotater som beskriver en spesiell hendelse. I analysen kan forskeren benytte induktiv eller deduktiv metode. I en induktiv metode sorterer forskeren data som hører sammen i ulike kategorier(Braun & Clarke, 2012; Merriam & Tisdell, 2016). Forskeren benytter empiri til å utvikle teori på områder der det finnes lite forhåndskunnskap. I vår analyse, er kategoriene gitt i Schoenfeld og Flodens (2014) og Lannins (2005) rammeverk. Vi benytter derfor en deduktiv metode i analysen av datamaterialet. I kontrast til en induktiv metode, er en deduktiv metode ovenfra og ned, der forskerne studerer datamaterialet ved hjelp av konsepter, ideer eller tema som de bruker til å kode materialet (Braun & Clarke, 2012).

Vår studie er en studie der vi søker å identifisere kjennetegn på robust matematikkundervisning gjennom fem dimensjoner. I tillegg vurderer vi bruk av vertikale tavler som arbeidsmetode, og elevenes generaliseringsstrategier som en del av matematikkdimensjonen. Vi kan derfor karakterisere studien som en tematisk analyse. Braun og Clarke (2012) definerer en tematisk analyse som en metode for systematisk å identifisere, organisere og gi innsikt til et mønster av mening (tema) på tvers av et datasett. En tematisk analyse kan også karakteriseres som en narrativ analyse, der forskeren er opptatt av deltakerne og deres fortellinger (Postholm, Jacobsen & Søbstad, 2018).

Merriam og Tisdell (2016) beskriver analyse av en kvalitativ studie som en parallell prosess mellom innsamling og analyse av data. I et ideelt scenario starter analysen av data allerede etter første datainnsamling, slik at for eksempel spørsmål til intervjupersoner kan endres for å spisses mer i relasjon til forskningsspørsmålet. Vår undersøkelse hadde et stramt tidsskjema, og all datainnsamling skjedde i løpet av en 14-dagersperiode. Begge undervisningssituasjonene fulgte samme mønster, og intervju av lærerne samme intervjuguide. Vi hørte gjennom lydopptak fra første gjennomføring før den andre, men gjorde kun organisatoriske endringer, slik at lydkvaliteten ble noe bedre. Vi hadde dermed et samlet materiale da vi startet analyseprosessen.

En analyseprosess går gjennom flere sorteringsfaser av datamaterialet (Cohen et al., 2018; Merriam & Tisdell, 2016). I første del av analysen så vi gjennom videoopptakene og dannet oss et inntrykk av prosessene i klasserommene, i tillegg til intervjuene med lærerne. Vi noterte observasjoner vi ville se nærmere på i en egen observasjonslogg. I tillegg til videoopptak av fokusgruppene, hadde vi også utstyrt dem med lydopptaker for å sikre at vi fikk tilgang til dialogen. Vi oppdaget imidlertid at lydopptakene inneholdt for mye støy fra de andre elevgruppene til at vi kunne oppfatte hvem som sa hva. Vi valgte derfor å kun transkribere videoopptakene.

Vi delte transkripsjonsarbeidet av de to undervisningstimene og lærerintervjuene mellom oss, men har hatt tilgang til alt materialet begge to. Fremfor å bruke koder for pauser, spørsmål, avbrutt tale og så videre, valgte vi å beskrive kroppsspråk, tonefall og humør til elevene sammen med uttalelsene. Vi fanget da dynamikken elevene imellom. Kroppsspråket er en del av dialogen i form av at de peker og referer til «der», og «slik», ord som blir meningsløse hvis man ikke også kan se hva de mener. Kroppsspråk er i transkripsjonen skrevet i kursiv. Vi nummererte elevuttalelsene, og ga de fire gruppene nummer fra 1 til 4.

Mens vi transkriberte, benyttet vi fargekoder som samsvarte med TRU-rammeverkets bruk av farger for å beskrive de fem dimensjonene (se fig 2.3). Der en uttalelse eller hendelse kunne passe til flere dimensjoner, skrev vi kommentarer i margen som henviste til de ulike dimensjonene. Med det fulgte vi anbefalingen om å starte organiseringen av data før all transkripsjon var ferdig (Merriam & Tisdell, 2016; Postholm et al., 2018).

På videoopptakene opplevde vi at det var mye støy fra de andre gruppene i rommet. Det var tidvis vanskelig å oppfatte hvem som sa hva, særlig hvis eleven som snakket stod med ryggen til kamera. Etter å ha lyttet gjennom opptaket fra skole én, posisjonerte vi oss annerledes til skole to, slik at lydkvaliteten ble noe bedre her. Transkripsjonsarbeidet var tidkrevende, da vi måtte spole tilbake flere ganger for å få med hva hvert enkelt gruppemedlem sa. For å sikre at vi tolket materialet likt, tok vi stikkprøver der vi kodet hverandres materiale, for så å sammenligne etterpå. Av tidsmessige årsaker valgte vi denne metoden fremfor å kode alt materialet begge to. Etter første gjennomgang, diskuterte vi oss gjennom materialet og sorterte det etter generaliseringsstrategier og begrunnelser (Lannin, 2005), og de fem dimensjonene (Schoenfeld og Floden, 2014). Deretter gikk vi gjennom lærerintervjuene og noterte utsagn som kunne høre inn under de ulike dimensjonene, samt bruk av vertikale tavler. Til slutt samlet vi materialet i de temaene vi ønsket å presentere i resultatkapittelet. En nærmere presentasjon av sorteringsarbeidet beskrives i 3.5.1, 3.5.2 og 3.5.3.

3.5.1 Argumentasjon og begrunnelse for generalisering av figurmønster

Schoenfeld (2016a) påpeker at det er viktig at matematikken er tilpasset elevenes faglige nivå. Elevenes måloppnåelse er dermed vesentlig for å kunne vurdere om undervisningssituasjonen er robust. Vårt mål var at elevene skulle finne antall poeng på hvilket som helst figurnummer. Vi ville derfor analysere hvilke generaliseringsstrategier og begrunnelser elevene kom frem til, og til det har vi valgt å benytte Lannins (2005) rammeverk for generalisering og begrunnelser.

Vi studerte transkripsjonene hver for oss, og kodet utsagnene i henhold til tabell 3.1. Vi sammenlignet deretter resultatene, og diskuterte oss frem til en enighet.

Generaliseringsstrategier	
Strategi	**Beskrivelse**
Non-eksplisitt	
Telling	Tegning av bilde eller konstruksjon av en modell til å representere situasjonen, og telle hvor mye figuren utvikler seg.
Rekursiv	Bygge på forrige figur/figurer for å avgjøre etterfølgende figur.
Eksplisitt	
Hel-objekt	Bruke en del som enhet for å lage en større enhet ved å multiplisere. Eks: 2 bananer koster 11 kr, derfor koster 6 bananer 33 kr. Det kan/kan ikke være nødvendig å justere for over- eller undertelling.
Gjett-og-sjekk	Gjetting av regel uten hensyn til hvorfor denne regelen kan virke. Dette involverer ofte eksperimentering med ulike operasjoner og tall som er gitt i problemoppgaven.
Kontekstuell	Konstruksjon av regel basert på informasjon gitt i oppgaven; relatere regelen til en telleteknikk.

Tabell 3.1: Generalization Strategies (Lannin, 2005, s. 234) (vår oversettelse)

Vi så videre på om elevene klarte å begrunne strategiene sine slik Lannin (2005) beskriver det i tabell 3.2:

Begrunnelser	
Nivå på begrunnelse	**Beskrivelse**
Nivå 0: Ingen begrunnelse	Ingen begrunnelse i svarene blir gitt.
Nivå 1: Henvise til ekstern myndighet	Eleven henviser til andre/annet materiale som begrunnelse.
Nivå 2: Empirisk bevis	Begrunnelse er gitt på bakgrunn av korrektheten av spesifikke eksempler, men eleven kan ikke argumentere for at dette alltid vil gjelde.
Nivå 3: Generisk eksempel	Eleven har en deduktiv begrunnelse for et bestemt tilfelle i mønsteret, og kan samtidig argumentere for at dette vil gjelde alle andre forekomster i mønsteret også.
Nivå 4: Deduktiv begrunnelse	Gyldighet er gitt gjennom et deduktivt argument som er uavhengig av bestemte tilfeller.

Tabell 3.2: Justification Framework (Lannin, 2005, s. 236) (vår oversettelse)

Vi laget en tilsvarende tabell (tabell 3.3) der vi la inn elevuttalelser og dialogsekvenser som vi vurderte til å høre inn under de ulike kategoriene. På den måten fikk vi oversikt over elevenes generaliseringsstrategier og deres begrunnelser.

Eksempel fra tabellen:

Helobjekts-tenkning	3.53 Lærer: Det jeg vil at dere skal prøve å finne ut nå er level 10. Om dere tegner eller prøver å regne det ut på en annen måte er det samme. 3.54 Karl: Det er dobbelt så mye, så om det er 6 her, så blir 12 to ganger, og 25+25 *(Tegner med fingrene på tavla)* 3.55 Oda: 25+25 det er 50. 3.56 Karl: Det blir 12 på de lange. 3.57 Oda: Ja, men så lenge dette er 25, så må du plusse på 25 til for å få level 10.

Tabell 3.3: Sortering av elevuttalelser

Tabellen ga oss en samlet oversikt over dialogsekvenser som vi tolket til å høre inn under de ulike kategoriene i Lannins (2005) rammeverk. Dette materialet ga utgangspunktet for resultatene beskrevet under punkt 4.1 i resultatkapittelet.

3.5.2 Kjennetegn på robust matematikkundervisning

Til TRU-rammeverket er det utarbeidet observasjonsskjemaer innenfor de fem kategoriene (Schoenfeld, 2016b). Rammeverket inneholder videre et skjema der undervisningen vurderes fra nivå 1-3 innenfor arbeidsmetoder som helklassesamtale, individuelt arbeid, arbeid i små grupper og elevpresentasjoner (Schoenfeld og Floden, 2014). I figur 3.3 vises et sammendrag av de ulike skjemaene i rammeverket. Robust matematikkundervisning vurderes til nivå 3.

Summary Rubric

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Uses of Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent does the teacher support access to the content of the lesson for all students?*	*To what extent are students the source of ideas and discussion of them? How are student contributions framed?*	*To what extent is students' mathematical thinking surfaced; to what extent does instruction build on student ideas when potentially valuable or address misunderstandings when they arise?*
1	Classroom activities are unfocused or skills-oriented, lacking opportunities for engagement with key grade level content (as specified in the Common Core Standards)	Classroom activities are structured so that students mostly apply memorized procedures and/or work routine exercises.	There is differential access to or participation in the mathematical content, and no apparent efforts to address this issue.	The teacher initiates conversations. Students' speech turns are short (one sentence or less), and constrained by what the teacher says or does.	Student reasoning is not actively surfaced or pursued. Teacher actions are limited to corrective feedback or encouragement.
2	Activities are at grade level but are primarily skills-oriented, with few opportunities for making connections (e.g., between procedures and concepts) or for mathematical coherence (see glossary).	Classroom activities offer possibilities of conceptual richness or problem solving challenge, but teaching interactions tend to "scaffold away" the challenges, removing opportunities for productive struggle.	There is uneven access or participation but the teacher makes some efforts to provide mathematical access to a wide range of students.	Students have a chance to explain some of their thinking, but the teacher is the primary driver of conversations and arbiter of correctness. In class discussions, student ideas are not explored or built upon.	The teacher refers to student thinking, perhaps even to common mistakes, but specific students' ideas are not built on (when potentially valuable) or used to address challenges (when problematic).
3	Classroom activities support meaningful connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and provide opportunities for building a coherent view of mathematics.	The teacher's hints or scaffolds support students in productive struggle in building understandings and engaging in mathematical practices.	The teacher actively supports and to some degree achieves broad and meaningful mathematical participation; **OR** what appear to be established participation structures result in such engagement.	Students explain their ideas and reasoning. The teacher may ascribe ownership for students' ideas in exposition, **AND/OR** students respond to and build on each other's ideas.	The teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings.

Figur 3.3: Samlet skåringsskjema (Schoenfeld og Floden, 2014)

Vår undervisningssituasjon bestod hovedsakelig av gruppearbeid med innslag av elevpresentasjoner i helklassesamtale. For å være spesifikke på hva vi skulle se etter, valgte vi å utarbeide et skåringsskjema som tok utgangspunkt i Schoenfeld og Flodens (2014) sammendrag, vist i figur 3.3. Vi tok i tillegg med elementer fra skåringsskjemaene generell undervisning, gruppearbeid og elevpresentasjon. Vårt skåringsskjema er i vedlegg 4. For ytterligere å spisse observasjonen, benyttet vi også observasjonsskjemaene til de fem dimensjonene, gjengitt i vår oversettelse i vedlegg 3. Skjemaene inneholdt konkrete vurderingspunkter både om elever og lærere.

I tråd med en tematisk analyse (Braun & Clarke, 2012), gikk vi gjennom transkripsjonene dimensjon for dimensjon, og laget et eget analysedokument der vi la inn dialogutdrag og egne observasjoner under hver dimensjon. På den måten fikk vi sortert datamaterialet. Der et utdrag kunne vurderes til å tilhøre mer enn én dimensjon, noterte vi det i analysedokumentet med fargekode tilhørende dimensjonen.

Som beskrevet i teorikapittelet, henger de fem dimensjonene sammen, og kan ikke vurderes separat fra hverandre. Hvis for eksempel det matematiske temaet ikke er rikt nok til å engasjere elevene kognitivt, har det innvirkning på hvilket nivå undervisningen vurderes til i alle de andre dimensjonene. Vårt forskningsspørsmål omhandler kjennetegn på robust matematikkundervisning, vurdert til nivå 3 i skåringsskjemaet. Sfard (2007) sier at vi ikke kan observere elevenes kommunikasjon med seg selv, deres tenkning, men at deres deltakelse i diskursen bygger opp en mulig tolkning av både deres kommunikasjon med seg selv (tenkning) og kommunikasjon med andre (dialog). Fra transkripsjonene har vi derfor konsentrert oss om uttalelser og kroppsspråk som vi har tolket til å være på nivå 3.

Innenfor matematikkdimensjonen så vi etter om matematikken som ble presentert var korrekt, og på et nivå tilpasset elevgruppen. Vi så også etter om lærerne oppfordret elevene til å forklare og begrunne sin generalisering av figurmønster. Her benyttet vi som tidligere nevnt Lannins (2005) rammeverk for generalisering og begrunnelser av figurmønster.

I dimensjon 2, Kognitive krav, så vi etter om lærerens hint eller stillasbygging støttet elevene i produktivt strev. Et viktig element er om læreren ga elevene nok tid til å tenke, og om aktiviteten og lærerens stillasbygging la til rette for å bygge matematisk forståelse hos elevene. Her valgte vi, i tillegg til å se på utdrag fra transkripsjonene, også å bruke våre observasjoner fra undervisningssituasjonen. Da vi observerte at en gruppe hadde jobbet med samme problemstilling i 20 minutter, tolket vi det til nivå 3 under dimensjonen kognitive krav.

I dimensjon 3, Elevenes tilgang til matematikken, undersøkte vi om alle elevene i gruppa engasjerte seg i gruppas matematiske diskusjoner. For å vurderes til nivå 3 i denne dimensjonen, må læreren aktivt støtte og til en viss grad oppnå bred og meningsfull matematisk deltakelse. Vi så også på om klasseromsnormene bidro til at elevene hadde mulighet til å få tilgang til matematikken gjennom sin deltakelse. En klasseromsnorm som vurderes til nivå 3, er et læringsfellesskap der det er kultur for å dele egne og anerkjenne andres tanker og idéer.

I dimensjon 4, Eierskap, identitet og deling, så vi på om elevene kunne forklare sine ideer og resonnement. Vi vurderte i tillegg om lærer ga eierskap til elevenes bidrag og bygget videre på dem i plenum. En undervisningssituasjon ble også vurdert til nivå 3 dersom elevene responderte på og bygget på hverandres ideer.

I den siste dimensjonen, Formativ vurdering, så vi etter om læreren innhentet elevenes tenkning, og om videre instruksjoner responderte på produktive tanker hos elevene eller adresserte deres misoppfatninger. Vi var også opptatt av om elevene forklarte egen tenkning, om de så feil som muligheter for ny læring, og om de reflekterte over eget og medelevers arbeid.

3.5.3 Intervju av de to lærerne

Fra intervjuene med lærerne knyttet vi deres uttalelser til de fem dimensjonene, med hovedvekt på tilgang til matematisk innhold, elevdeltakelse og vurdering. TRU-rammeverket skal ikke brukes til å felle dom over en enkelt undervisningstime, men kan benyttes som et diskusjonsverktøy for refleksjon over hva som kan bidra til en robust matematikkundervisning (Baldinger & Louie, 2016; Schoenfeld, 2016a). Lærernes uttalelser ble derfor viktige fordi de har fulgt klassen over tid. De kunne vurdere om elevene deres engasjerte seg på andre måter med denne arbeidsformen enn de vanligvis gjør ved problemløsningsoppgaver. De kunne også vurdere om, og i så fall på hvilken måte, de vertikale tavlene utgjorde en forskjell for elevene innad i gruppene og i klassesammenheng. I tillegg var deres mening om bruk av tavlene interessante i vurderingsdimensjonen. Vi brukte observasjonsskjema for de ulike dimensjonene og leste transkripsjonene hver for oss, og sammenlignet utdragene vi hadde valgt ut. Utsagnene fargekodet vi i tråd med TRU-rammeverkets 5 dimensjoner (Schoenfeld & Floden, 2014). I tillegg markerte vi alle uttalelser som handlet om bruken av de vertikale tavlene, og ga dem en egen fargekode.

3.6 Studiens troverdighet

Å kunne stole på forskningsresultatene er spesielt viktig innenfor forskning som berører praksisfeltet, fordi forskeren griper inn i andres liv (Merriam & Tisdell, 2016). Validitet og reliabilitet er to begrep som knyttes til både kvantitative og kvalitative studiers troverdighet (Cohen et al., 2018). Validitet handler om at studien undersøker det den hevder å undersøke, og at forskeren kan forsvare sine tolkninger og konklusjoner ut fra både valgt teori og tilgjengelige data. For vår del handler det om at den teorien og de metodene for innsamling av data vi har valgt, faktisk undersøker det forskningsspørsmålet vårt hevder at vi undersøker. Det er omdiskutert om reliabilitet er et hensiktsmessig begrep innenfor kvalitativ forskning (Merriam & Tisdell, 2016). Reliabilitet handler i hovedtrekk om målingene er stabile, om de kan gjenskapes hvis man måler på nytt i samme eller i et annet utvalg. Det pågår en diskusjon om hvilke begreper som bør benyttes innenfor kvalitativ forskning (Merriam & Tisdell, 2016). Vi har valgt å benytte Gubas (1981) fire aspekter ved troverdighet i naturalistisk forskning: kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet (credibility, transferability, dependability og confirmability).

Kredibilitet tar for seg sannhetsverdien i det forskeren har funnet ut. Virkeligheten er som oftest ganske kompleks, og i en undersøkelse vil man forsøke å forenkle situasjonen ved å kontrollere for noen variabler, men ikke fjerne alle vi ikke vil undersøke. Det gjør det derfor litt vanskelig å være helt sikker på hva som påvirker resultatet. For best mulig å sikre kredibilitet, har vi beskrevet metodevalg og analyse på en måte som vi mener skal gi mening og være troverdig for leseren. Tiltak vi har gjort for å gi studien troverdighet er å gjennomføre undersøkelsen i to klasser fremfor én, og også filme flere grupper for å ha et rikt datamateriale. Vi har i tillegg valgt flere metoder for datainnsamling gjennom video, intervju og egne observasjoner.

Overførbarhet handler om funnene i studien er overførbare til andre kontekster. Innenfor naturalistisk forskning, som Guba beskriver som «a paradigm for inquiry, not a method» (Guba, 1981, s 76) unngår gjerne forskere generaliseringer fordi de mener at all forskning på sosiale og atferdsmessige forhold er kontekstbasert (Guba, 1981). Det er ikke nødvendigvis et mål i seg selv at kunnskapen skal være generell i en kvalitativ studie. Det er forskerens jobb å legge til rette for overføring av kvalitativ forskning til andre kontekster. For å sikre best mulig overførbarhet, har vi samlet inn såkalte «tykke data» i form av video og lydopptak. Det er imidlertid ikke mulig å konkludere med at våre funn er overførbare til andre klasser som gjennomfører samme undervisningsopplegg. Vi mener likevel at andre lærere vil kunne ha nytte av å lese studien, og selv vurdere overførbarheten til egne elever. For å bidra til denne vurderingen, har vi beskrevet klassetrinn, oppgaven til elevene og den teori og rammeverk vi har benyttet i analysen.

Pålitelighet i studien kan sikres ved en overlapp av metoder eller ved å bruke to rammeverk på det samme datamaterialet. Pålitelighet kan også sikres ved at datamaterialet deles i to, der to separate forskningsteam analyserer hver sin del. I vårt tilfelle har vi benyttet en overlapp av metoder i form av videoopptak, intervju og observasjon. Vi har videre analysert transkripsjonene hver for oss, og som stikkprøve analysert hverandres transkripsjoner for å se om vi kom til samme konklusjon. Vi har også bestrebet oss på å beskrive analyseprosessen så detaljert som mulig for å gi leseren mulighet til å følge våre tolkninger.

Det siste punktet, bekreftbarhet, tar for seg i hvilken grad funnene er påvirket av forskeren. Bekreftbarhet kan sikres ved triangulering, som vil si å samle data fra ulike perspektiv. Forskeren kan også bruke varierte metoder fra forskjellige kilder for å kunne teste sine teorier så godt som overhodet mulig. I vår studie har vi beskrevet teori, metode og analyse for å skape en gjennomsiktighet i materialet. Vi har også søkt å være tydelige på at vår tilstedeværelse er en faktor som påvirker resultatet, slik Pring (2000) beskriver i sitt Paradigme B.

3.7 Etiske betraktninger

Vi har i denne studien forholdt oss til generelle forskningsetiske retningslinjer utarbeidet av De nasjonale forskningsetiske komiteene (u.å.). Før oppstart meldte vi prosjektet til Norsk senter for forskningsdata, NSD, og prosjektet med referansekode 905316 ble godkjent 07.10.20 (vedlegg 2). Vi innhentet først samtykke fra de to involverte lærerne, før vi sendte samtykkeskjema med informasjon om studien hjem til elevenes foresatte (vedlegg 1). Elevene ble informert muntlig om prosjektet samtidig som de ble invitert til å delta. Vi informerte dem også om at det var deres foresatte som måtte godkjenne deltakelsen, siden de er under myndighetsalder. Både lærere, elever og foresatte ble informert om at deltakelsen var frivillig, og at de på hvilket som helst tidspunkt kunne trekke seg fra studien uten å oppgi grunn.

Lydopptak, videoopptak og skjema for samtykke regnes som personopplysninger, og vi har i vår datahåndteringsplan fulgt både NSD og NTNUs retningslinjer for oppbevaring av disse på to krypterte minnepinner. Vi har hatt alle data lagret på hver vår minnepinne, og har i det hatt en ekstra backup for datamaterialet. Til video- og lydopptak har vi benyttet NTNUs opptaksutstyr. Elever, foresatte og involverte lærere har fått informasjon om at alle personopplysninger anonymiseres. Skolene, elevenes og lærernes navn er enten ikke gjengitt, eller gitt fiktive navn. Alle involverte er også opplyst om at de har rett på innsyn i eget bidrag til studien. Det omfatter riktignok ikke videomaterialet, der det vil være mulig å identifisere andre deltakere i studien. Videre er de informert om at alle data slettes så snart studien er avsluttet (vedlegg 1).

4 Resultat

Forskningsspørsmålet *Hvilke kjennetegn på robust matematikkundervisning fremkommer i arbeid med en figurmønsteroppgave på vertikale tavler på mellomtrinnet?* inneholder flere elementer. Vi har valgt å presentere resultatene i to hovedkategorier: Elevenes arbeid med generalisering av figurmønstre, og kjennetegn på robust matematikkundervisning, der bruk av de vertikale tavlene inkluderes.

Hvordan elever generaliserer og begrunner figurmønster er ikke en del av TRU-rammeverket (Schoenfeld, 2016a). Rammeverket er uavhengig av hvilken matematikk det undervises i, men brukes for å vurdere om det matematiske innholdet er tilpasset til elevenes nivå, og om det knyttes sammenhenger til andre deler av matematikken. Vi ønsker i denne studien å se nøyere på elevenes generaliseringsstrategier og begrunnelser av figurmønster, da vi mener det har betydning for en vurdering av måloppnåelsen til elevene. Måloppnåelsen vil igjen si noe om elevene ble gitt mulighet til å forstå det matematiske innholdet, noe som er en viktig del av dimensjon 1 i TRU-rammeverket (Schoenfeld & Floden, 2014). At vi har lagt fokus på dette matematiske innholdet, mener vi også er vesentlig for å kunne drøfte om studiens undervisningsmetode kan anbefales i introduksjon av algebra i barneskolen. Resultatgjennomgangen vil derfor starte med en analyse av elevenes generalisering og begrunnelser av generaliseringen, der vi har benyttet Lannins (2005) rammeverk.

4.1 Elevenes generalisering og begrunnelser av figurmønsterutvikling

Resultatene som presenteres i dette kapittelet er sortert etter rekkefølgen til de ulike deloppgavene i figurmønsteroppgaven. Det vil si at vi presenterer funn på generaliseringsstrategier og begrunnelser som fant sted tidlig i arbeidet, og ser hvordan strategiene og begrunnelsene endret seg underveis i undervisningsforløpene. For å vise denne utviklingen, er funnene presentert i følgende kategorier: Non-eksplisitte strategier, helobjektstenkning, kontekstuell sammenheng med lav grad av begrunnelse, elevenes dekomponering etter helklassesamtale og kontekstuelle strategier med godkjent begrunnelse.

I tabell 4.1 har vi samlet alle resultatene. Tabellen viser de ulike generaliseringsstrategiene og begrunnelsene som fokusgruppene benyttet på de forskjellige deloppgavene. Gruppene er nummerert og gitt en farge, for å lettere kunne se hvordan hver enkelt gruppe har generalisert og begrunnet i de ulike deloppgavene. Eksempel: I cellen hvor det står skrevet Fig 4 og 5, kan vi se at samtlige grupper (1, 2, 3 og 4) benyttet tellestrategi/rekursiv strategi med empirisk begrunnelse (nivå 2 i Lannins tabell) i arbeidet med å finne antall firkanter i figurnummer 4 og 5.

Oversikt	**Begrunnelse**			
Generaliseringsstrategier	Ikke godkjent begrunnelse		Godkjent begrunnelse	
	Ingen, nivå 0	Empirisk, nivå 2	Generisk, nivå 3	Deduktiv, nivå 4
Telling/rekursiv (non-eksplisitt)		Fig 4 og 5: 1, 2, 3, 4		
Hel-objekt (eksplisitt)	Fig 10: 3, 4			
Kontekstuell (eksplisitt)	Fig 10: 1; Fig 100: 2	Fig 10: 1, 2, 3; Fig 100: 1, 3, 4	Oppskrift/ metode: 1, 2	Oppskrift/ metode: 3, 4

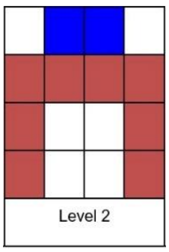
Tabell 4.1: Oversikt over elevenes generaliseringsstrategier og begrunnelser

4.1.1 Non-eksplisitte strategier

Samtlige av de fire fokusgruppene benyttet non-eksplisitte strategier i arbeidet med å tegne figurnummer 4 og 5 (tabell 4.1). Samtidig tolket vi alle gruppene til å benytte empirisk begrunnelse (Nivå 2 i Lannins (2005) tabell). Som beskrevet i metodekapittelet, var det med den lave inngangsterskelen lagt til rette for at elevene behøvde få andre strategier enn å telle fra forgående figur. Å bygge på forgående figur for å lage neste figur, beskrives av Lannin (2005) som en non-eksplisitt generaliseringsstrategi. Gruppe 3 (skole B) generaliserte non-eksplisitt da de studerte utviklingen fra figur 1-3 for å diskutere hvordan figur 4 skulle tegnes.

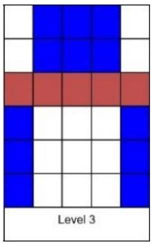
> 3.3 Oda: Men dere, se det der a. For først så er det bare en på en måte en bro da (*Oda peker i luften for å illustrere level 1*). Også blir den én høyere, også blir det to stykker, også blir det 3, også skal den neste kanskje være 4 på bein.
>
> 3.4 Karl: Og når du skal ta over der (*Karl peker på robotens kropp og viser avstanden fra ytterkant bein til ytterkant bein*), så må du ta én mer enn 5, så da blir det 6 her, og 5 ned der igjen (*peker ned langs der det andre beinet skal tegnes*).
>
> 3.5 Mari: Toppen?
>
> 3.6 Karl: (…) Da blir det 1, 2, 3, 4 (*pause*), 1, 2, 3, 4.(*Karl peker og viser omrisset av overkropp/hode på roboten*).

Gruppa kommer raskt i gang og tegner figurnummer 4 uten nevneverdige problemer. Underveis i diskusjonen viser det seg at elevene i gruppa dekomponerer figuren ulikt, og kobler ikke deler av figuren direkte til figurnummeret. I ytring 3.3 sammenligner Oda høyden på figuren med en bro som blir høyere (Se figur 4.1).



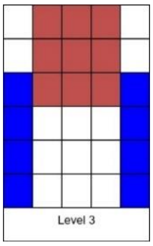
Figur 4.1:
Odas bro

Hun sier videre at høyden på «beina» i broen blir én høyere for hver figur, og mener «beina» skal bestå av 4 ruter på figurnummer 4. Karl følger opp i ytring 3.4 med å vise at bredden på hele figuren øker med én for hvert figurnummer (Se figur 4.2), og konkluderer med at bredden blir 6 ruter på figurnummer 4.



Figur 4.2: Karls breddeforklaring

Videre peker han ned langs beina, og sier de skal bestå av 5 ruter. Der Oda mener figur 4 skal ha 4 ruter på «beina», sier altså Karl at det skal være 5, da han teller med de ytterste rutene (Illustrert på figur 4.3). Karl og Oda dekomponerer forskjellig, da de har ulik oppfatning av hvilke ruter på figuren de tolker som «bein». I ytring 3.6 viser Karl at det skal være 4 ruter i bredden og 4 ruter i lengden på robotens «hode eller kropp» (Figur 4.3 viser omrisset av hode/kropp Karl bruker for å forklare antall ruter). Karl teller altså med de 3 rutene han tidligere omtalte som en del av bredden til figuren.



Figur 4.3: Karls endrede dekomponering

Som vi ser av utsagnene, har elevene selv med ulik dekomponering, en rekursiv og dermed non-eksplisitt tellestrategi i arbeid med å tegne neste figur. Elevene sier altså noe konkret om hva som skjer fra én figur til den neste, uten at de knytter deler av figuren til det faktiske figurnummeret. Nivået på begrunnelsen tolker vi som lav. Som vi kan se av Odas ytring (3.3), benytter hun allerede gitte eksempler for å forklare hvordan «broen» blir høyere. En slik begrunnelse sammenfaller med hva Lannin (2005) beskriver som empirisk bevis. Karls forklaring tolker vi også til å være empirisk. Han bygger i ytring 3.4 videre på Odas forklaring, hvor han sier at det må bli 6 i bredden fordi det var 5 i foregående figur.

4.1.2 Helobjektstenkning

To av fokusgruppene prøvde å generalisere ved å benytte den eksplisitte generaliseringsstrategien helobjektmetoden (Lannin, 2005) i overgangen fra figurnummer 5 til 10. Bruk av denne strategien tyder på at elevene ikke har sett sammenhengen mellom figur og figurnummer (Lannin, 2005). Det var interessant å se hvordan Gruppe 3 (skole B) gikk fra å tidligere dele opp figuren i mindre biter (dekomponering) til å få et helt *numerisk* fokus.

> 3.54 Karl: Det er dobbelt så mye, så om det er 6 her, så det blir 12 to ganger, og 25+25 (*Tegner med fingrene på tavla*).
>
> 3.55 Oda: 25+25 det er 50.

3.56 Karl: Det blir 12 på de lange.

3.57 Oda: Ja, men så lenge dette er 25, så må du plusse på 25 til for å få level 10. (*Forklarer til Mari hvordan hun skal tegne*)

Karl tar utgangspunkt i figurnummer 5 når han i ytring 3.54 påpeker at figurnummer 10 vil ha en verdi som er dobbelt så stor. Karls påstand tyder på at han feilaktig ser figurutviklingen proporsjonalt med figurnummeret, noe Lannin (2005) refererer til som en vanlig misoppfatning. Selv om gruppa tidligere gransket de ulike figurkomponentenes utvikling, refererer ikke Karl til den geometriske utviklingen av figurmønsteret når han multipliserer med 2. Oda og Mari virker å akseptere Karls strategi om at figurnummer 10 er det dobbelte av figurnummer 5, da de følger opp utsagnet ved å regne ut verdien og tegne figuren på tavla. Ingen på gruppa gir noen videre begrunnelse for hvorfor strategien deres kan stemme, noe som svarer til nivå 0 i Lannins (2005) tabell om begrunnelse.

4.1.3 Kontekstuell sammenheng med lav grad av begrunnelse

I arbeid med å finne antall ruter i figurnummer 10, var det også grupper som lyktes i å generalisere kontekstuelt. Selv med et ønske om å forklare for hverandre, viste det seg at elevene hadde problemer med å argumentere for sine generaliseringer. Leif på gruppe 1 (skole A) forklarer løsningen på figurnummer 10:

1.240 Leif: Det er 122, jeg vet det. Fordi her er det 1,2,3,4,5 (*teller vannrett rad i kvadratet)*

1.241 Mona: Åh, Ja, og her er det seks! Da skal det være 10 der

1.242 Leif: Da skal det være 10 der (*de tegner et kvadrat uten inndeling og skriver 10 under)*

1.243 Leif: Det blir 100

1.244 Mona: Det blir over 100

1.245 Leif: Det blir 122, for her så blir det 11 på dem to (*peker på beina)* og det er 22, og så blir det 100 i den rekka (*peker på kvadratet)*. Det er helt riktig

Leif sier i ytring 1.240 at figurnummer 10 skal bestå av 122 ruter. Han peker på kvadratet i figurnummer 5, samtidig som han teller til 5 og antyder at man skal telle videre til 10. Mona virker å forstå hva Leif mener, ved at hun følger opp med å si at det må bli 10 i figurnummer 10. I ytring 1.245 kommer det frem at Leif har dekomponert figuren på en hensiktsmessig måte. Han peker på beina på figuren, summerer antall ruter, og legger til de 100 i kvadratet. En slik dekomponering, som knytter deler av figuren til figurnummeret, tolker vi til å være en kontekstuell generaliseringsstrategi. I sitt videre ønske om å forklare for de andre i gruppa, baserer han seg fortsatt på figurnummer 5.

1.250 Leif: Skal jeg vise?

1.252 Mona: Ja

1.253 Leif: (*overtar tusjen)* Det her er femmern, det er fem her og fem opp, så kommer du jo, når det er ti, så blir det jo ti ruter her, og ti opp

1.254 Mina: Ja

1.255 Leif: Da blir det 100, og så 11 ned på begge, og da blir det 22

At Leif klarer å finne verdien av figurnummer 10 basert på figurnummer 5, tyder på at han har sett en generell relasjon i figurmønsteret. Når han i ytring 1.253 forklarer hvorfor det blir $10 \cdot 10$ ruter i figurnummer 10, argumenterer han likevel kun basert på lignende funn i figurnummer 5. En slik argumentasjon, som baserer seg på konkrete eksempler, tolker vi til å være empirisk begrunnelse. I sin siste ytring derimot, hvor Leif sier det blir 11 på begge beina, begrunner han ikke i det hele tatt (nivå 0, ifølge Lannin (2005)).

4.1.4 Elevenes dekomponering i helklassesamtale

I etterkant av arbeidet med å finne antall firkanter i figurnummer 10, var det planlagt at lærerne skulle samle elevene til en helklassesamtale. Lærerne styrte samtalen, hvor elevene fikk mulighet til å argumentere for hvordan de hadde dekomponert figuren. Samtalen viste seg å være viktig for å få flere av gruppene til å se utviklingen av figurmønsteret i sammenheng med figurnummeret. I etterkant av samtalen lyktes samtlige av fokusgruppene med å finne antall firkanter i figurnummer 100.

Selv om fokusgruppene lyktes med å regne ut antall firkanter, manglet det i stor grad begrunnelse for hva elevene faktisk hadde gjort. Under følger et eksempel fra Gruppe 2 (skole A), hvor Stian og Anne gir læreren løsningen på figurnummer 100:

> 2.235 Stian: Det her er 11 da. (*Peker på figuren de tegnet på level 10*). hvis du legger på en 0 på levelet, så blir det 101. Og 101 på den andre siden.
>
> 2.236 Lærer: Hvor mye er det da?
>
> 2.237 Anne og Stian: 202
>
> 2.239 Stian: Og så er det 100 der (*peker loddrett på en rekke på hode/kroppen til roboten*), 100 der, 100 der ..osv.
>
> 2.240 Lærer: Og da får dere?
>
> 2.241 Stian: 100 ganger 100
>
> 2.242 Anne: Og det er 10 000
>
> 2.243 Stian: Og når vi la sammen 10 000 med det (*peker på 202*), så ble det det (*peker på 10 202*).

Vi tolker det til at gruppa har sett en sammenheng mellom figurnummeret og antall firkanter i figuren. Stian henviser i ytring 2.235 til figurnummer 10, og sier at antall brikker i figurens bein er 11. Videre påpeker han at det blir 101 brikker på beina til figurnummer 100. Han forklarer ikke ytterligere hvorfor det blir slik, men vi mener det er sannsynlig at han har sett at robotens bein inneholder én firkant mer enn figurnummeret. I ytring 2.239 og 2.240 fortsetter Stian med at Robotens hode/kropp inneholder 100 ganger 100 firkanter. Heller ikke her begrunner Stian, selv om han helt korrekt multipliserer figurnummeret med figurnummeret for å finne figurens hode/kropp. Vi tolker det til at Stian benytter en kontekstuell generaliseringsstrategi (Lannin, 2005), da han basert på figurnummeret regner ut hvor mange firkanter det er i figurnummer 100. I henhold til Lannins (2005) skjema for begrunnelse, plasserer vi Stian på nivå 0, da han ikke begrunner påstanden sin. At Stian tilsynelatende generaliserer korrekt, men ikke forklarer hvordan, kan passe med Kilpatrick et als. (2001) påstand om at elever ofte forstår før de evner å utrykke forståelsen verbalt.

4.1.5 Kontekstuelle strategier med godkjent begrunnelse

For å nå målet med timen, skulle elevene i siste oppgave beskrive en metode som kunne brukes for å regne ut antall firkanter (poeng) uansett figurnummer (level). Det viste seg at flere av elevene nå benyttet eksplisitte generaliseringsstrategier med matematisk godkjente begrunnelser.

Elevene i gruppe 1 (Skole A) sin metode var begrunnet med et generisk eksempel:

> 1.515 Eva: Hvis du for eksempel er på level 100, da får du 100 gange 100 fordi du ganger levelet du er på med levelet du er på. Det ser ut som en firkant, og er over beina. Så tar du levelet du er på og plusser med en på hvert bein

Gruppa tar utgangspunkt i figurnummer 100, når de beskriver hvordan man skal regne ut hvor mange poeng (firkanter) det er i robotens hode/kropp. Videre beskriver de at man tar «levelet man er på og ganger med levelet man er på». For å regne ut antall poeng på bein, sier de at man *tar* «levelet man er på og plusser med én på hvert bein». Vi tolker det som at elevene benytter begrepet level for figurnummer, da de ikke har blitt introdusert for begrepet figurnummer tidligere. Gruppa benytter en kontekstuell generaliseringsstrategi, da de har dekomponert figuren i bein og hode/kropp og igjen knytter disse delene til figurnummeret. Videre går de fra å beskrive figurnummer 100 til å argumentere generelt, ved å si at «man ganger levelet man er på med levelet man er på». Den samme generelle beskrivelsen benytter de i begrunnelsen av antall firkanter/poeng på robotens bein. En argumentasjon som tar utgangspunkt i et eksempel, men som knyttes til andre forekomster av mønsteret, sammenfaller med et generisk eksempel i Lannins (2005) tabell.

Datamaterialet viser at Gruppe 2 ved skole A også generaliserte kontekstuelt med et generisk eksempel, men behøvde litt støtte av lærer for å presisere begrunnelsen.

En annen gruppe på skole A benyttet seg også av en kontekstuell strategi. De kunne samtidig argumentere uten å ta utgangspunkt i spesifikke eksempler, noe Lannin (2005) omtaler som deduktiv begrunnelse. Gruppen hadde skrevet ned sin metode, og leste den høyt for klassen.

> 297 Adrian: At høyden på beina er alltid én mer enn levelnummeret og hodet eller boksen da er alltid lik som levelnummeret ganger levelnummeret.

Vi tolker av Adrians opplesning at gruppa har generalisert kontekstuelt, ved å benytte en hensiktsmessig dekomponering av robotens bein og hode/kropp. I oppskriften begrunner Adrian at «beina alltid er én mer enn figurnummeret» og at hodet til roboten «alltid er lik figurnummer ganger figurnummer». En slik begrunnelse, som ikke baserer seg på konkrete tilfeller av mønsteret, tolker vi til å passe med hva Lannin (2005) omtaler som et deduktivt argument.

På skole B var det også grupper som generaliserte kontekstuelt med deduktive begrunnelser, selv om det manglet noe på presisering. Oda forklarte gruppe 3 sin metode for læreren, hvorpå læreren tolket hva hun mente.

> 3.161 Oda forklarer: På det kvadratet her så har du lengden og bredde, som er det samme som levelet du er på. Også på bein så er det levelet +1.
>
> 3.163 Mari: Også er det kvadrat = høyde level, altså høyden på kvadratet er lik levelet. Og lengden på kvadratet er også levelet.
>
> 3.164 Lærer: *Peker på kvadratet*: Men sånn som jeg skjønte det nå, så mente du level gange level (*Fører pekefingeren først langs lengden og så langs bredden)* og så var det..
>
> 3.165 Mari: Bein er level +1

I ytring 3.161 peker Oda på robotens hode/kropp når hun forklarer at lengden og bredden på kvadratet er ekvivalent med figurnummeret. Videre sier hun at beina kan beskrives som figurnummer +1. Mari følger i ytring 3.163 opp med å presisere at høyden og lengden på kvadratet (robotens hode/kropp) er det samme som figurnummeret. Vi tolker det som at gruppa har gjort en hensiktsmessig dekomponering av robotens hode/kropp og bein, og således har benyttet en kontekstuell generaliseringsstrategi. Læreren tolker i ytring 3.164 at gruppa mener at robotens hode/kropp kan regnes ut ved å gange figurnummer med figurnummer, noe vi anser som sannsynlig at gruppa mener. Det baserer vi på at de tidligere lyktes i å regne ut antall firkanter i figurnummer 100 ved å benytte nevnte strategi. Gruppa er altså ikke presise nok i sin begrunnelse, men med lærerens hjelp så tolker vi det til at de i felleskap begrunner med et deduktivt argument. Gruppa omtaler figurmønsteret generelt, og omtaler ikke spesifikke eksempler, hvilket samsvarer med hvordan Lannin (2005) beskriver deduktiv begrunnelse.

Fokusgruppe 4 (skole B) generaliserte kontekstuelt, samtidig som de også manglet noe presisering i sitt deduktive argument.

> 4.281 Fie: Det er sånn at levelet gange 2 er det som er inni kvadratet, og så er det level + 1 på beina
>
> 4.282 Lærer: Level pluss en på beina?
>
> 4.283 Fie og Stine: Ja
>
> 4.284 Stine: Og så er det level gange to, eller level gange level
>
> 4.286 Stine: Så det er egentlig level gange level, og på bena er det level pluss level pluss en pluss en.

Fie sier i ytring 4.281 at det skal være levelet (figurnummeret) multiplisert med 2 i kvadratet og level (figurnummeret) + 1 på beina. I ytring 4.284 presiserer Stine at gruppa mener ”level ganger level” og ikke ”level ganger 2”. I sin siste ytring får Stine sagt metoden i sin helhet på en korrekt måte.

Vi tolker det som gruppa har benyttet en kontekstuell generaliseringsstrategi, da de behandler kvadratet (robotens hode/kropp) og beina hver for seg, og samtidig knytter begge delene av roboten til figurnummeret. At både Fie og Stine i sine ytringer sier «level ganger 2», tolker vi som at elevene er upresise i språket sitt og egentlig mener «level ganger level». Gruppa løste tidligere figur 100 ved å multiplisere 100 med 100, hvilket vi mener tyder på at gruppa bare formulerer seg uriktig. Stine endrer som nevnt formuleringen i ytring 4.286, slik at metoden fremstår korrekt. Vi tolker derfor at gruppen implisitt mener at beskrivelsen gjelder uavhengig av figurnummer, noe som passer med Lannins (2005) beskrivelse av et deduktivt argument.

4.2 Kjennetegn på robust matematikkundervisning

Som nevnt i teorikapittelet, er ikke Schoenfelds (2016a) rammeverk utviklet for vurdering av hver enkelt undervisningstime. Bruksområdet er både som diskusjonsgrunnlag for vurdering av undervisningssekvenser, men også for planlegging av undervisning. Vi mener derfor indikasjoner på robust matematikkundervisning som fremkommer i de to undervisningsøktene kan gi nyttige innspill til videre planlegging av undervisning i figurmønster som introduksjon til algebra. Vårt hovedfunn er at vi fant kjennetegn på robust matematikkundervisning i alle de fem dimensjonene. Dimensjonene går som tidligere nevnt i hverandre, og beskrivelser av funn innenfor én dimensjon, kan også passe innenfor andre.

4.2.1 Dimensjon 1: Matematikken

For å vurderes til nivå 3 i dimensjon 1, må klasseromsaktivitetene støtte opp om meningsfulle sammenhenger mellom prosedyrer, konsepter og kontekster. Innholdet i matematikken skal være tilpasset for denne elevgruppen, og inneholde både forklaringer og begrunnelser. Læreren skal oppfordre elevene til å forklare og begrunne sine matematiske ideer. Det skal gis muligheter til å se sammenhenger i matematikken, slik at det matematiske innholdet gir mening.

Vi vurderte det til at fokusgruppenes begrunnelser var forståelige for de andre elevene i klassen. I tillegg benyttet gruppene godkjente begrunnelser i henhold til Lannins (2005) rammeverk, slik datamaterialet i kapittel 4.1 viser. Vi tolker det derfor til at matematikken har vært nivåmessig tilpasset denne elevgruppen. Lærerne skapte også en sammenheng mellom elevenes oppskrift og et algebraisk uttrykk (se dimensjon 3). Å gi mening til et algebraisk uttrykk, gir mulighet for å skape sammenheng til andre matematiske områder. Eksempler på slike områder kan være geometri og likninger. Funn på nivå 3 i de andre dimensjonene gir også en indikasjon på om matematikken har vært på riktig nivå, slik Schoenfeld (2016a) beskriver. Vi vil i de følgende underkapitlene beskrive funn som støtter opp om vår tolkning om at det matematiske innholdet kan vurderes til nivå 3.

4.2.2 Dimensjon 2: Kognitive krav

For å vurderes til nivå 3 innenfor Kognitive krav, må lærerens hint eller stillasbygging støtte elevene i produktivt strev. Det innebærer å gi elevene rikelig med tid til å tenke, og til å stå i oppgaven. Et annet element som må være oppfylt, er at lærer justerer utfordringene til elevene slik at de får mulighet til at det produktive strevet opprettholdes.

Begge undervisningsøktene varte i cirka 90 minutter, der elevene arbeidet i grupper i størstedelen av tiden. De fikk med andre ord god tid til å tenke og til å «stå i oppgaven». Oppgaven startet med figurnummer fire og fem, et nivå der det var mulig for alle elever å engasjere seg. Grupper som løste oppgaven raskere enn andre, fikk en ny utfordring med å finne figurnummer 10. På den måten justerte lærer det kognitive strevet for elevene, slik at de gruppene som trengte det, fikk tilstrekkelig tid til å løse ett trinn i oppgaven før de fikk det neste.

Lærer for gruppe 3 og 4 fikk spørsmål om han synes oppgaven var krevende nok, eller om det var elementer der som gjorde at noen meldte seg ut.

> Nei, jeg synes ikke det. Det startet jo på et nivå hvor alle kan bli med på en måte, så utvidet det seg etter hvert, og når de først hadde skjønt første delen, er det lettere å henge med over til neste delen, følte jeg. Så var det den gruppen som stod nede i hjørnet, de hadde jeg ikke trodd skulle få til så mye egentlig, men de fikk jo til veldig mye bra. De skrev nesten ut den formelen, eller den oppskriften, av seg sjøl omtrent. Det så veldig bra ut.

Vi tolker svaret hans som en bekreftelse på at oppgaven bidro til et kognitivt krav som var tilpasset elevgruppen. Gruppen «i hjørnet», presterte i tillegg bedre enn han hadde forventet på forhånd. Oppgaven var i tråd med det flere forskere anbefaler som utforskende undervisning (Stein et al., 1996; Kilpatrick et al., 2001; Jaworski, 2006). Elevene fikk utfordringer etter hvert som de løste dem. «Gruppa i hjørnet» klarte å ta beslutninger på hvordan de skulle håndtere utfordringene, uten å være avhengig av støtte fra læreren.

Lærer for gruppe 1 og 2 kommenterte at elever som normalt ikke er så «sterke» i matematikk, fikk en mestringsfølelse av denne oppgaven. Alle klarte å være med til og med figurnummer 5, og de fleste også til figurnummer 100, selv om klassen ikke hadde jobbet mye med figurmønsteroppgaver tidligere. På spørsmål om hvorfor, svarte han:

> Det er jo visuelt. Det er kanskje ikke mer visuelt enn mye annet, men det er jo visuelt. Og i tillegg er det mye hjelp å få i rommet. Så kanskje hvis du er litt usikker, så kan du få mye bekreftelse ved å bare titte litt rundt. «Ja, de gjør det samme som meg» - også får du det til da. Også er det jo grupper også.

Vi tolker uttalelsen hans som at det kognitive kravet i oppgaven var tilfredsstillende, samtidig som elevene fikk støtte gjennom det didaktiske virkemiddelet vertikale tavler. At de også fikk lære sammen, slik sosiokulturelt læringssyn legger opp til (Sfard, 2006), bidro til å trygge elevene. Oppgaven la også opp til at elevene kunne benytte kreativ resonering fremfor å imitere en algoritme (Lithner, 2017). Det gir elevene mulighet til prøve ulike fremgangsmåter, og diskutere seg frem til en løsning. På spørsmål om oppgaven ga elevene mulighet til å tenke ut ulike løsningsstrategier, beskrev lærer for gruppe 1 og 2 følgende:

> Ja, oppgaven gjør det, men det spørs jo helt hvordan man ser figuren. Og også hvordan man velger å angripe oppgaven, med tegning, skriving, forklare og snakke. Og dobling og ikke dobling – prøve ut det og om det går eller ikke. Så det går an å gjøre den oppgaven her på mange ulike måter og det var det jo eksempler på. Det var jo ingen som gjorde det likt.

For å kunne vurdere kognitive krav til å være på nivå 3, skal også lærer støtte elevene uten å fjerne utfordringen fra arbeidet som elevene er engasjert i. Gruppe 4 tegnet figurnummer 4 feil og fikk derfor feil antall ruter, uten at de klarte å se hvor feilen lå. Etter 20 minutters arbeid uten å gi opp, ga lærer et innspill som hjalp dem videre:

> 4.82 Lærer: Men jenter, kanskje dere skal gå og titte litt på de andre
>
> 4.83 Stine: Men hva er det som er feil!

Lærer svarer ikke på ytring 4.83, men gjentar oppfordringen om å benytte muligheten til å se hva de andre gruppene har gjort. En av elevene følger lærerens råd, og kommer tilbake med opplysninger som gjør at de til slutt klarer å tegne figurnummer fire og fem riktig. Når læreren kommer tilbake til gruppen, gir han dem støtte på at de nå har tenkt riktig:

> 4.117 Lærer: Dere så sjøl at dere hadde tatt litt for mange, så bra! Og dere har funnet ut hvor mange poeng dere har

Vi observerte at de vertikale tavlene og den tilgangen de gir til alle elevenes arbeid, har støttet denne gruppen i å selv klare å korrigere eget arbeid fremfor å søke hjelp hos lærer, slik både Liljedahl (2016) og Wenning (2005) beskriver. Lærerens gjentagelse om å se på andre gruppers arbeid, samsvarer med Liljedahl (2016) og Schoenfelds (2016a) anbefaling om å gi svar og innspill som opprettholder elevenes kognitive strev.

Ingen av elevene i de to klassene ga opp oppgaven selv om det kognitive kravet økte underveis. Det gjaldt også gruppene som ikke ble filmet. Vi tolker det til at elevene opprettholdt et produktivt strev, også når lærer ikke var til stede i den enkelte gruppe.

4.2.3 Dimensjon 3: Tilgang til matematikken

For å kunne vurdere elevenes tilgang til matematikken til nivå 3, må lærer støtte aktivt og til en viss grad oppnå bred og meningsfull matematisk deltakelse. Alle gruppemedlemmene må bidra til gruppas matematiske diskusjoner, eller læreren må gjøre grep for at alle gruppemedlemmene kan komme med meningsfulle bidrag.

En viktig forutsetning for at alle elevene skal få tilgang til matematikken, er gode klasseromsnormer (Boaler, 2008; Schoenfeld, 2016a). Vi kunne observere en kultur der elevene var forventet å bidra, og der vi kunne observere at det var lov å ta feil, og til å bygge videre på andres ideer. Det illustreres i et eksempel fra gruppe 3 i arbeidet med å komme fram til antall poeng for figurnummer 10:

> 3.105 Oda: nei, vi må regne ut den der først. Det er 100
>
> 3.106 Mari: Ja, det er 100 +11 +11
>
> 3.107 Karl: Er det 11? Hvorfor er det 11?
>
> 3.108 Oda: Fordi på 5 så er det 6, på 7 så er det 8, på 8 så er det 9 og på 10 så er det 11.
>
> 3.110 Karl: Neimen blir det ikke 12 da?
>
> 3.111 Oda: Nei men se her. (*Peker på figur 5*): På 5 så er det 6 i høyde, på 6 så er det 7 i høyde… og på level 10 så blir det 11.

Karl har bestemt seg for at figurnummer 10 er det dobbelte av figurnummer 5, og hevder i ytring 3.110 at «beina» skal være 12. De to jentene har kommet frem til en korrekt måte å dekomponere figuren på, og Oda forklarer deres tolkning i ytring 3.111. Stemningen i gruppen fortsetter å være god på tross av at Karl ikke umiddelbart forlater sin tanke (han blir til slutt overbevist). Vi tolker samarbeidet i gruppen til å være på nivå 3, fordi elevene lytter til hverandres oppfatninger, og bygger også videre på hverandres tolkninger. Samarbeidet i denne gruppen viste kjennetegn på «rettferdige relasjoner» (Boaler, 2008), der elevene har respekt for hverandres ideer, og der de føler en forpliktelse til å sørge for at gruppen får mulighet til å lære. Vi opplevde tilsvarende kjennetegn på god klasseromskultur i den andre klassen også. På spørsmål om oppgaven legger til rette for at elevene kan dele ideer, svarte lærer for gruppe 1 og 2:

> Ja, det er det. Veldig mye egentlig. Men så er jo det en øvelsessak og da, at man lar andre komme til ordet og, selv om man er flink og er på sporet selv. Så kan en liten kommentar fra en som også er flink, men ikke prater like mye da være en mye bedre fremgangsmåte enn det du prøver på selv. Og det er veldig vanskelig å legge bort når man er i sona og er vant til å jobbe mye og man får det til da, og det tror jeg de får øvd seg veldig mye på når vi jobber sånn her.

Uttalelsen tolker vi til at lærer mener at denne arbeidsformen bidrar til å bygge et klasserom med gode relasjoner, og at det krever øvelse å bli god i det. Lærer har flere kommentarer der han bekrefter at det er et mål at alle elevene skal kunne samarbeide med hverandre, lytte til hverandres idéer og sørge for at alle på gruppa forstår.

På nivå 3 skal lærer også støtte elevers presentasjoner og bygge videre på disse i klassen. Under klassesamtalene trekker begge lærerne frem elevgruppers bidrag og involverer klassen i dem. Etter figurnummer 10, samlet lærerne elevene i en dialog om hvordan de dekomponerte figuren. Lærer for gruppe 3 og 4 ba tre av gruppene beskrive hvordan de så figuren, og den tredje gruppen beskrev den slik:

> 146 Jente: Vi tenkte at det er det levelet du er på pluss en kloss (*peker på beina på level 1*) Så da på level 4 blir det 4 klosser + 1, og på den i midten da på level 4 så var det fire klosser i midten, og så var det 4 oppover
>
> 147 Lærer: Okei. Så, sånn som jeg har skjønt det nå da så, som jeg har hørt at flere av dere har tenkt, både dere, men også dere (*ser på den første gruppen*) og andre grupper, er at dere har på en måte sett at det er et kvadrat der, har dere det? (*tegner et kvadrat på*

tavlen). Det har jeg hørt flere av dere har nevnt. Og når vi da er på level fire (*ruter opp kvadratet tilhørende level 4*). Sånn. Og så var det disse beina (*ser ut over klassen*).

I ytring 147 bekrefter lærer flere grupper på at de har dekomponert figuren på en hensiktsmessig måte, og oppsummerer det med en tegning av et kvadrat med to «bein» på tavlen. Han bygger med dette videre på elevenes forklaring og gir støtte ved hjelp av tegning. Tegning sammen med klassesamtalen ga støtte til elever som enda ikke hadde dekomponert figuren på en egnet måte.

Undervisningsøktenes oppbygging med lav inngangsterskel og stor takhøyde, bidro også til å gi flere elever tilgang til det matematiske innholdet. Med lav inngangsterskel mener vi at oppgaven til å begynne med var på et nivå der det er forventet at alle skal kunne bidra. Alle kan telle antall ruter i figuren på de tre første figurnumrene, og ut fra det finne hvor mange ruter det er på neste figurnummer. Stor takhøyde betyr at oppgaven ga rom for å kunne komme frem til det algebraiske uttrykket $n^2 + 2n + 2$ som et generelt uttrykk for antall ruter (poeng) for et hvilket som helst figurnummer. Alle elevene vil ikke nødvendigvis klare det på egenhånd, men lærers oppsummering av gruppenes arbeid og veiledning i den videre prosessen la til rette for at flere får tilgang til det matematiske innholdet. Begge lærerne hadde en oppsummering mot slutten av undervisningen som innebar å «oversette» elevenes muntlige og skriftlige forklaring til et algebraisk uttrykk:

422 Lærer: Skal jeg prøve å skrive ned det dere sa. Det var at dere sa lengde gange bredde pluss level gange 2 pluss 2 (*skriver l x b + level x 2 + 2)*. Okei. Skjønner dere hva de mener? Klarer vi å skrive dette på en enklere måte? Eller en annen måte?

423 Elev: Level gange level?

425 Elev: Og så level pluss en og level pluss en

426 Lærer: Okei, så du vil ha pluss level pluss en, nå blir det mange plusser her, og level pluss en (*skriver dette på tavlen mens han snakker)* Sånn

I ytring 422, bruker lærer elevenes uttrykk l i stedet for n i sin formel for å knytte bokstavuttrykket tettere opp til elevenes forklaring. I samme ytring utfordrer han også elevene til å finne et kortere uttrykk for «level pluss en pluss level pluss en». En av elevene foreslår i ytring 423 «level gange leve»l i stedet for «lengde gange bredde». Samme elev fortsetter i ytring 425 med hva lærer kan skrive for beina. Det er et annet uttrykk enn $level \cdot 2 + 2$ som lærer skrev sammen med ytring 422. Gjennom diskusjon kommer de etter hvert frem til at ordet level kan byttes ut med l, og beina kan beskrives med $2(l + 1)$, og at det er likeverdig med $level \cdot 2 + 2$.

I den andre klassen hadde de jobbet med figurmønster tidligere, og blitt introdusert for begrepene variabel og konstant. I oppsummeringen gjorde læreren det samme som lærer B med å bygge videre på elevenes beskrivelser. I tillegg diskuterte han med klassen hva som endret seg, og hva som var konstant i figuren:

2.329 Lærer: Hva er det som aldri endrer seg i figuren? Som kalles konstant. Vi har brukt det ordet før.

2.330 Eva: At det alltid er én mer på de beina.

2.331 Lærer: Ja, at beina vil alltid ha på én på hver side.

2.332 Lærer: Hva er det som alltid endrer seg da?

2.333 Anne: Formen, den blir alltid større.

2.335 Stian: Levelet

2.337 Stian: Og da blir figuren større, sånn som Anne sa.

I ytring 2.331 tydeliggjør lærer Evas ytring 2.330 om at det alltid er én mer på beina. Han kunne understreket det ytterligere ved å knytte Evas «alltid» til begrepet *konstantleddet*. I ytring 2.333 og 2.335 sier Anne og Stian at det er formen, eller levelet, som alltid endrer seg. Stian presiserer så sammenhengen mellom level og størrelsen på figuren i ytring 2.337. På denne måten hjelper lærer elevene til å gi mening til begrepene variabel og konstant, noe de vil ha nytte av ved senere arbeid med for eksempel figurmønsteroppgaver og funksjoner. Det er i tråd med Kilpatrick et als. (2001) to tråder forståelse og beregning. Elevene hjelpes til å forstå hvorfor den matematiske idéen variabel og konstant er viktig, og i hvilken kontekst de kan benytte denne kunnskapen. I tillegg knyttes slik kunnskap mot beregningskompetanse, der elevene får oversatt sine skriftlige forklaringer til en representasjon i form av et algebraisk uttrykk. I diskusjonen ser elevene hvordan det algebraiske uttrykket kan hjelpe dem til å finne antall poeng på et hvilket som helst level (figurnummer).

Vi observerte at begge klassesamtalene bidro til at flere kunne få tilgang til matematikken. Lærerne benyttet en samtaleform der de fikk flere grupper til å dele sine beskrivelser, og de brukte tavlen til å omsette elevenes ordrike beskrivelser til kortere uttrykk og til slutt et algebraisk uttrykk. Lærer er her den matematisk kyndige personen som gir andre mulighet til å bli med på sin diskurs, slik Sfard (2006) beskriver.

Ofte er det læreren som er den matematisk kyndige personen, men det kan også være medelever. Vi observerte også eksempler på at elever lente seg på gruppemedlemmer når de synes noe ble vanskelig. Et eksempel er fra gruppe 4 som strevde med å lage en beskrivelse av hvordan man kan finne antall poeng for et hvilket som helst figurnummer.

> 4.275 Stine: Jeg skjønner ikke hvordan vi skal lage en oppskrift, det er jo ikke noen oppskrift det der (*går tilbake ut i rommet. Fie og Oda blir stående ved sin tavle og ser i bakken, virker opprådd på hva de skal gjøre*)
>
> 4.276 Stine: *kommer løpende tilbake* Jeg skjønner, jeg skjønner! (*griper tusjen*) På level 5 er det 5 her og fem her (*tegner kvadratet*), og fem + 1 på beina (*tegner beina*). Det er alltid level gange (..), level gange (..)
>
> 4.277 Fie: Level gange 2
>
> 4.278 Stine: Ja, level gange to her (*peker på kvadratet*) Så fem gange fem oppe der
>
> 4.279 Fie: Og så skal det være fem ned pluss en

I ytring 4.276 og 4.277 klarer jentene å bygge videre på Stines oppdagelse, etter at hun observerte hva en annen gruppe hadde gjort. De endrer også etter hvert beskrivelsen fra «level gange 2» til «level gange level». Fra videoopptaket ser vi at Oda står og lytter, og bidrar ikke til å lage «oppskriften». Hun stiller noen kontrollspørsmål underveis for å forstå hva de to andre jentene gjør, og gjennom det tolker vi det som at hun blir med på deres diskurs samtidig som hun har et behov for å se sammenhengen for å kunne akseptere.

Å delta i en annens diskurs var også noe lærer for gruppe 1 og 2 kommenterte i samtalen om elevene hentet ideer fra andres tavler:

> Ja. Det gjorde de. Det så jeg at de gjorde. De titta mye. Jeg så blant annet at en gruppe hadde rett svar uten å kunne forklare det, så da hadde de lånt svaret av nabogruppa. Men så klarte de det etter hvert, og da tok de det (forsto det). (…) Også var det tilfeller hvor gruppa ikke var helt enig. For det var flere ganger hvor de hadde sagt det riktige svaret først og pussa bort fordi en sa noe annet. Også var egentlig alt riktig bortsett fra antall poeng. Og under forklaringen så kom det fram hvor de hadde gjort feil da. Når de fikk fram riktig da så sa de: «Ja, men det var jo det vi skrev først!».

Lærer trekker her også frem tilfeller der elever blir med på en annens feilaktige diskurs. At elevene får forklare fremgangsmåten sin blir derfor sentralt i å avklare om de har fått tilgang til matematikken, eller om de har misoppfatninger som det er nødvendig å ta tak i. I eksempelet fra lærer er det uklart om det er elevene selv som oppdager hva som er feil, eller om lærer hjelper til. Vi vurderer uansett den oppklarende dialogen til å være på nivå tre, fordi lærer oppnår bred og meningsfull matematisk deltakelse gjennom den oppklarende samtalen med elevgruppen.

4.2.4 Dimensjon 4: Eierskap, identitet og deling

Målet i denne dimensjonen er at elevene skal skape seg positive identiteter som matematiske «gjørere» og få eierskap til det matematiske innholdet. Denne dimensjonen skiller seg fra dimensjon 3 ved at det her handler om i hvilken grad det *legges til rette for* at alle elevene blir hørt og kan dele sine idéer og resonnement, samtidig som de blir gitt anerkjennelse og tildelt eierskap (Schoenfeld, 2016a). Begge lærere ga god tid til å arbeide med oppgaven, og arbeidsformen med treergrupper som arbeidet på tavlene, ga rom for at alle elevene fikk anledning til å dele sine ideer.

Oppgaveformen innebar at elevene måtte resonnere selv, i stedet for å følge en oppskrift på hvordan man finner den eksplisitte formelen for antall ruter. Det samsvarer med oppfordringen om kreativ resonnering, fremfor imitativ resonnering (Lithner, 2017). Vi vurderer i tillegg undervisningsopplegget til å være i tråd med det Liljedahl (2016) beskriver som et tenkende klasserom. I et tenkende klasserom tenker lærere og elever sammen, og konstruerer kunnskap gjennom diskusjon og aktivitet (Liljedahl, 2016). Bruk av de vertikale tavlene, treergrupper og nok tid til å diskutere en utforskende oppgavetype, var sentrale metodiske grep i vår studie. Disse metodiske grepene vurderer vi til å være på nivå 3, fordi elevene fikk anledning til å forklare sine tanker, og lærer tilskrev eierskap til elevenes idéer i senere diskusjoner. Flere av utdragene presentert i de andre dimensjonene viser at elevene delte idéer, at de fikk bruke god tid, og at de benyttet tanker fra hverandres tavler, noe som bekrefter poenget om at dimensjonene glir i hverandre.

Lærer for gruppe 3 og 4 fikk spørsmål om det at elevene fikk mulighet til å bidra skyldtes oppgaven, arbeidsformen eller begge deler:

> Hvis jeg skal si akkurat det jeg tror, så tror jeg at arbeidsformen gjorde det mest, for den oppgaven, hvis vi skulle gjort den en og en for eksempel, de hadde ikke holdt ut like lenge da, kanskje ikke en gang to og to. Så jeg tror det å stå sånn og tegne, se seg litt rundt, ha mulighet til å gå litt rundt, det gir en litt større frihet på en måte, så jeg tror arbeidsformen mest, faktisk, sånn jeg tenker umiddelbart nå.

Vi tolker lærerens ytring både som en vurdering av kognitive krav, tilgang til matematikken, samt eierskap og elevenes egenvurdering. Læreren vurderer vertikale tavler som avgjørende både for utholdenhet, men også for muligheten til fremdrift ved at elevene kan se hverandres bidrag og gjennom det vurdere egen prosess. Slik oppgaven og arbeidsmetodikken ble utført på de to skolene, ble alle de syv uthevede punktene fra Liljedahls (2020) liste ivaretatt (tabell 1).

For å kunne vurderes til nivå 3 i dimensjon 4, skal lærer tilskrive elevene eierskap til sine ideer i fellesskapet. Lærer for gruppe 1 og 2 ba i en klassesamtale flere grupper presentere hvordan de så (dekomponerte) figuren. Den første gruppen hadde en litt omstendelig måte å forklare figuren på som muligens forvirret medelevene. Dekomponeringen var imidlertid riktig, og gruppen fikk anerkjennelse for det. For å få flere synspunkter henvendte læreren seg så til klassen:

2.148 Lærer: Er det flere som ser den på samme måte? Vil du komme opp og tegne din måte Eva?

2.149 Eva: Den er litt lik, men ikke helt. Jeg tar først femmeren da. Så fant jeg ut at hvis det er level 5, så er det fem bortover sånn og fem ruter nedover, så det er på en måte 5 ganger 5. *(Eva tegner et kvadrat samtidig som hun forklarer).* Også nedover her *(Peker der beina skal være)* så øker det alltid med en mer enn det som er der *(peker på hodet til roboten)* så da blir det 6 her *(skriver tallet ved siden av det ene beinet)* og 5 her og 5 her *(skriver et femtall på en horisontal og vertikal linje i kvadratet på toppen.)*

2.150 Lærer: På den andre siden da?

2.151 Eva: På den andre siden er det også 6, og da tar jeg bare 6+6. *(Tegner det andre beinet og setter på et 6-tall)*

2.152 Lærer: Ja, er det flere som ser roboten på de måtene her?

Lærer involverer i ytring 2.148 flere elever til å beskrive figuren, og gir med det elevene eierskap til sine forklaringer. Lærer bekreftet i intervjuet at han visste at Evas gruppe hadde en tydelig beskrivelse av hvordan de dekomponerte figuren. Eva starter i ytring 2.149 med å sammenligne sin forklaring med den forrige gruppens, og forbereder læreren og elevene på at deres forklaring er litt lik, men ikke helt. Hun understreker med det eierskapet som hennes gruppe har til sin forklaring. Lærer oppfordrer i ytring 2.152 de andre gruppene til å reflektere over om deres dekomponering ligner på de to gruppene de har hørt, og gir med det de andre gruppene en anledning til å presentere sine beskrivelser.

4.2.5 Dimensjon 5: Formativ vurdering

Den femte dimensjonen, formativ vurdering, handler om hvordan lærer gjør seg kjent med og responderer på elevenes tenkning. I dette ligger også hvordan lærer tar tak i eventuelle misoppfatninger. De vertikale tavlene ga lærerne en mulighet til raskt å få oversikt over elevenes tenkning. På spørsmål om hvordan han fikk oversikt over det elevene gjorde, svarer lærer for gruppe 3 og 4:

> Nei, det er jo det som var, jeg har jo alltid likt stasjonsundervisning for da har jeg fått oversikt over hva de gjør når de kommer på min gruppe, og får en rundgang på det, men her ser man jo veldig fort, ser hva de holder på med der og der på en gang, så ser man noe spennende så går man dit, og så går man frem og tilbake, så jeg føler jeg fikk veldig god oversikt faktisk. Overraskende god oversikt.

I tråd med Megowan-Romanowicz (2016) og Liljedahl (2016), beskriver ytringen at tavlene samt at elevene stod, ga lærer en god oversikt over elevenes fremdrift og innhold. Læreren får et overblikk over hvor gruppene er i prosessen, og kan gi respons til gruppene der de er. I den delen av dimensjonen som omhandler misoppfatninger, presenterer vi et eksempel fra gruppe 3. Læreren oppdaget at gruppen ønsket å doble antall poeng (ruter) fra figurnummer 5 til 10:

3.76 Lærer: Jeg ser dere gikk for å tegne. Jeg synes jeg hørte noe om dobling i stad, gikk dere bort fra det?

3.77 Mari: Nei, vi dobla de her (*Peker på beina*) For der var det 6 (*Peker på figur 5*), så da dobla vi der.

3.78 Lærer: Hvis dere ser på level 2 og deres level 4, har dere dobla fra level 2 til level 4 da?

3.79 Karl: Nei, vi trenger en til sånn firkant. (*Peker på level 4*)

3.80 Lærer: Men level 4 er riktig. Men er det dobbelt så mye som level 2?

3.81 Gruppa i kor: Nei

> 3.82 Karl: Level 2 er en mindre, fordi du tar 4 +6 = 10, og her tar du 6 (*peker på beina*) + 4, 8, 12, 16 = 17 ??? Nei..jo, nei….
>
> 3.83 Lærer: For dere har tenkt til å doble level 5 for å få level 10?
>
> 3.84 Gruppa: Ja
>
> 3.85 Lærer: Men hvis det ikke funka fra 2 til 4 da? Funker det fra 5 til 10 da tror dere?

I ytring 3.78 ber læreren elevene vurdere om figurnummer 4 er det dobbelte av figurnummer 2. Han tar slik Schoenfeld (2016a) beskriver, tak i elevenes misoppfatning, og følger det opp i ytring 3.80, 3.83 og 3.85. Målet hans er å få elevene til å selv oppdage at en doblingsstrategi ikke vil fungere her, fremfor å fortelle elevene at det er galt. Vi tolker det som at han benytter det Liljedahl (2016) beskriver som å gi hint og tips for å opprettholde et kognitivt strev.

Bruk av de vertikale tavlene ga også elevene anledning til egenvurdering, som vi ga eksempel på under dimensjon 3. Lærer for gruppe 1 og 2 fikk spørsmål om hvilke fordeler og ulemper han ser ved bruk av de vertikale tavlene:

> Det er mange fordeler og jeg har nevnt mange av dem: Man kan se på hverandre, du får et eierforhold til det her og, når du skal tegne, skrive og forklare hele veien. Du får litt ansvar. Også er det, rommet er liksom åpent, man kan selv tilpasse hva slags hjelp man skal få eller spørre etter. Om du vil rekke opp hånda eller prøve å finne ut av det selv eller diskutere i gruppa. Ulemper ved bruk av utstyret klarer jeg ikke å tenke på så lenge de klarer å jobbe på denne måten uten at man løper rundt og er veldig høylytte. Men det er jo ikke tilfelle her, så for denne her gruppa så klarer ikke jeg å tenke på noen klare ulemper nå.

Lærer beskriver i ytringen elevenes mulighet til å kunne ta ansvar for egen fremdrift ved å kunne benytte ulike fremgangsmåter, samt få støtte i de andre gruppenes arbeid. De blir med det ikke avhengige å hele tiden få bekreftelse fra lærer, men kan underveis vurdere eget arbeid.

Vi vurderer i tillegg muligheten for egenvurdering som sentral i å kunne plassere dimensjon 5 i nivå 3. Det er en treningssak å både klare å formidle egne ideer og lytte til andres, og alle gruppene benyttet ikke muligheten som lå i å observere andre gruppers arbeid. Eksempler vi har vist til tidligere, viser likevel at det var tilfeller av egenvurdering som kan vurderes til nivå 3 i begge klasserom.

4.2.6 Oppsummering

Vi har tolket funnene vi har presentert til at kombinasjonen av oppgavetype og arbeidsform bidro til at vi fant kjennetegn på robust matematikkundervisning i alle dimensjonene. Vi opplevde at det matematiske innholdet var på et nivå flertallet av elevene mestret, og vi observerte at det kognitive kravet bidro til å opprettholde et produktivt strev. Arbeidsformen gjorde at alle fikk mulighet til å dele egne tanker og bygge videre på andres, både internt i gruppen, og ved å se andre gruppers arbeid. Gruppeoppgavene avbrutt av klassediskusjoner ga elevene mulighet for tilgang til matematikken. Elever som presenterte på vegne av gruppen, ble gitt annerkjennelse og eierskap til sine løsninger. Videre ga lærerne uttrykk for at de fikk god oversikt over gruppenes arbeid, og kunne veilede og oppklare misoppfatninger ved behov.

5 Diskusjon

Vårt forskningsspørsmål er *Hvilke kjennetegn på robust matematikkundervisning fremkommer i arbeid med en figurmønsteroppgave på vertikale tavler på mellomtrinnet?* Vi ønsker å besvare forskningsspørsmålet med funn vi presenterte i resultatkapittelet, og samtidig sammenligne funnene med annen relevant forskning. Først drøfter vi funn i de fem dimensjonene relatert til robust matematikkundervisning. I tilknytning til dimensjon 1, vil vi ytterligere belyse hvordan elevene i undersøkelsen endret generaliseringsstrategier og begrunnelser i løpet av undervisningsøktene. Videre reflekterer vi over bruk av TRU-rammeverket, både som analyse- og planleggingsverktøy. Vi gir så vår vurdering av kvaliteten på undersøkelsen, før vi avslutter med forslag til videre forskning.

5.1 Kjennetegn på robust matematikkundervisning

I resultatkapittelet viser vi til funn på nivå 3 innenfor alle de fem dimensjonene. Vi mener funnene skyldes en rekke faktorer. Den viktigste er at oppgaven elevene fikk var på riktig matematisk nivå. Undervisningsopplegget er utforskende, og flere forskere (Kilpatrick et al., 2001; Liljedahl, 2016; Lithner, 2017; Schoenfeld, 2016a; Stein et al., 1996) hevder at utforskende oppgaver gir elevene mulighet til å resonnere, argumentere og se sammenhenger mellom ulike matematiske emneområder. Som vi vil se i kapittel 5.2 og 5.3, var det en gradvis utvikling av både elevenes generaliseringsstrategier og begrunnelser gjennom undervisningsøktene. At elevene hele tiden diskuterte sine strategier og samtidig forbedret sine matematiske begrunnelser, kan tyde på at matematikken har vært tilpasset elevgruppen. Noen elever brukte riktignok mer tid og strevde mer med enkelte deloppgaver enn andre. Det belyste vi blant annet i forbindelse med gruppe 3 og 4 sine helobjektsstrategier. Gjennom helklassesamtaler fikk lærerne samlet elevene og diskutert viktige poeng, slik at elevene stadig nærmet seg undervisningsøktenes faglige mål.

Schoenfeld (2016a) påpeker at det matematiske innholdet skal være i tråd med relevant matematikk. Det betyr at innholdet må kunne knyttes til gjeldende læreplan. Relevant matematikk er i vårt tilfelle Kunnskapsløftet 2020. Kjerneelementene i læreplanen sier at elevene blant annet kan generalisere ved å utforske figurer og videre finne sammenhenger og formalisere disse ved bruk av algebra eller andre hensiktsmessige representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2019). Samtidig fokuseres det i læreplanen på at elevene skal gis mulighet til å forklare og begrunne sine valg av representasjoner. Undervisningsopplegget i vår undersøkelse ivaretok det læreplanen beskriver, ved at elevene generaliserte et figurmønster og samtidig argumenterte for sine generaliseringer. Vi mener derfor at matematikken som ble presentert er i tråd med Schoenfelds (2016a) beskrivelse av relevant matematikk.

I dimensjon 2, kognitive krav, fant vi at elevene i begge klasser arbeidet sammenhengende i 90 minutter, gjennom gruppearbeid og klassesamtaler. I de fire fokusgruppene deltok alle elevene hele tiden, og i de øvrige gruppene var det ingen som meldte seg ut. Det kan tyde på at elevene klarte å opprettholde et produktivt strev gjennom hele økten. Støttet av Schoenfeld (2016a), er vår vurdering at de ikke ville klart det, dersom oppgaven ikke var tilpasset elevgruppen. Vi tolker det som at elevene hadde en opplevelse av å kunne lykkes, at de hadde nødvendig motivasjon og engasjement til å stå i oppgaven, slik Kilpatrick et al., (2001) og Schoenfeld (2016a) understreker betydningen av. Vi kan imidlertid ikke utelukke at engasjementet også har blitt påvirket av vår tilstedeværelse. Det kan muligens være lettere å holde motivasjonen oppe med et kamera på seg.

En hensikt med vertikale tavler, er å gi elevene mulighet til å dele idéer og bygge videre på hverandres tanker. Vi observerte at grupper i begge klasserom benyttet seg av muligheten til å se på andre gruppers arbeid. I klasse A, der elevene hadde brukt tavlene tidligere, tok elevene i større grad initiativ til å se på andres tavler enn i klasse B. I klasse B måtte lærer oppfordre gruppe 4 til å studere andres tavler da de ikke kom videre på egenhånd. Liljedahl (2016) beskriver at denne arbeidsmåten trenger en introduksjonsfase før elevene ser nytten og verdien av å ha hele klassens arbeid tilgjengelig. At ikke arbeidsmetoden var innarbeidet, kan derfor ha påvirket elevenes eget initiativ til å utforske andres tavler.

Lærer for gruppe 3 og 4 mente at arbeidsformen der elevene jobbet i treergrupper på tavlene var det viktigste elementet for elevenes mulighet til å delta, og dermed gi alle mulighet for tilgang til det matematiske innholdet (dimensjon 3). Vi observerte at gruppene benyttet tavlene helt fra starten av arbeidet. Det samsvarer med funn i Liljedahls studie (2019) studie, der han sammenlignet vertikale og horisontale arbeidsflater. Han fant at elevene som jobbet på de vertikale, non-permanente tavlene kom raskere i gang med å notere. I tillegg diskuterte de mer enn de som jobbet horisontalt, særlig på permanente arbeidsflater. Forrester et al. (2017) fant i sin studie at elevene som jobbet på vertikale tavler opplevde at de lærte mer, likte å snakke til klassekameratene om matematikken, og så nytten av å se andre gruppers arbeid på tavlene. Elevene i vår studie ga også uttrykk for at dette var en arbeidsform de ønsket mer av. I likhet med Forrester et als. (2017) studie, uttrykte elevene at de syntes arbeidsformen var morsom, og at de følte at de lærte mer. Det samsvarer også med Kilpatrick et als. (2001) tråd om resonnering og engasjement.

Klasseromsnormer er av avgjørende betydning for elevenes mulighet og interesse av å dele (Boaler, 2008). Vi observerte at det i begge klasserom var en kultur for å komme med innspill, selv om elevene ikke var helt sikre på om de hadde rett. Lærer for klasse B uttalte at de synlige elevarbeidene medvirket til at han syntes de delte enda lettere enn de pleide å gjøre. I et klasserom uten denne klasseromsnormen, er det ikke sikkert dette undervisningsopplegget hadde medført like stor grad av deling, argumentasjon og begrunnelser (dimensjon 4).

Liljedahl (2016) anbefaler at elevene jobber i tilfeldige grupper på 2 – 4 elever. Denne studien gir ikke svar på om arbeidet hadde fortonet seg annerledes dersom lærerne hadde bestemt gruppene. Lærerne benytter ikke tilfeldige grupper til vanlig, og gir i intervjuene uttrykk for at de er usikre på om gruppesammensetningen har betydning for elevene. I denne studien kan vi kun referere til at det ikke kom protest fra noen av elevene, og at gruppene samarbeidet og delte idéer gjennom hele økten. Det er en indikasjon på at tilfeldige grupper i hvert fall ikke hindret et produktivt arbeid.

For dimensjon 5 vurderer vi også bruken av de vertikale tavlene som betydningsfull. Begge lærerne ga uttrykk for at de fikk god oversikt over elevenes arbeid, og kunne observere hvilke grupper som trengte hjelp for å komme videre. Det samsvarer med Forrester et als. (2017) studie, der læreren ga uttrykk for at det var enkelt å identifisere hvem som hadde problemer. Vi kan imidlertid ikke konkludere med at alle gruppemedlemmene kunne stå inne for produktet på tavlene. Til det kreves at lærer får hørt samtlige elevers forklaringer og begrunnelser. Derfor er det så viktig at lærer samler elevene til helklassesamtaler, slik at eventuelle misoppfatninger kan adresseres.

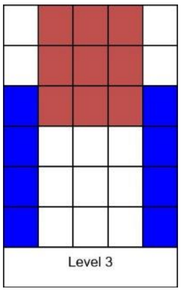
5.2 Elevenes endring av generaliseringsstrategier

Elever benytter ofte rekursive generaliseringsstrategier i arbeid med figurnummer som ligger nære de allerede oppgitte figurene (Stacey, 1989). Det kan forklare tegne/telle-strategiene elevene i vår undersøkelse brukte på figur 4 og 5. I tillegg tenker vi at elevenes måte å dekomponere figuren på kan ha forsterket bruken av rekursive strategier, der de ikke klarte å knytte de ulike figurdelene til figurnummeret. Warren og Cooper (2008) refererer til at elever ofte har problemer med å relatere figurnummeret til figurmønsteret. Samtidig sier Wilkie et al. (2016) at måten man dekomponerer en figur på, kan avgjøre om man benytter rekursive eller eksplisitte generaliseringsstrategier. I resultatkapittelet kunne vi se hvordan gruppe 3 dekomponerte «roboten» til å være et bord som ble høyere. I dette tilfellet knyttet ikke elevene figuren til figurnummeret, og vi tenker at det kan ha medført at elevene generaliserte rekursivt ved å hevde at «bordbeina» ble én høyere for hver figur.

Å gå fra non-eksplisitte til eksplisitte generaliseringsstrategier er ifølge English og Warren (1998) utfordrende for elever. I vår undersøkelse kunne vi kjenne igjen dette fenomenet, spesielt i arbeid med figur 10. Der fortsatte den rekursive tankegangen i flere av gruppene, før fokusgruppe 3 og 4 fikk problemer da de feilaktig benyttet helobjekt-strategien. Stacey (1989) fant i sin undersøkelse at flere elever overraskende brukte strategier hvor resultatet av strategiene enkelt kunne motbevises. Resultatene kunne i tillegg motbevises bare ved hjelp av data som var synlig for elevene. I vår undersøkelse spurte lærer fokusgruppe 3 om de kunne doble verdien av figur 2 for å finne verdien til figur 4. Gruppen hadde like før feilaktig doblet verdien av figur 5 for å finne figur 10. Elevene kunne altså ha testet ut sin egen strategi på allerede kjente figurverdier, men valgte tilsynelatende ukritisk å benytte helobjekt-strategien i overgangen fra figur 5 til 10. Stacey (1989) problematiserer at elever ikke tar seg bryet med å sjekke om generaliseringsstrategien de bruker faktisk virker. Elever som benytter en helobjekt-strategi kan være motvillige til å stille spørsmålstegn ved den, fordi den er enkel å bruke og man får raskt et svar. For mange elever er et svar bedre enn ikke noe svar (Stacey, 1989). At fokusgruppene ikke undersøkte resultatet av helobjektsstrategiene i vår undersøkelse, kan muligens forklares ut ifra fenomenet Stacey beskriver.

Vi fant at flere grupper endret generaliseringsstrategier etter en helklassesamtale om dekomponering av figuren. Flere grupper endret strategi til mer kontekstuelle varianter, da de av medelever ble gjort oppmerksomme på at man kunne knytte deler av figurene til figurnummeret. Elevene i vår studie ble generelt mer figurative enn numeriske i sine tilnærminger til figurmønsterutviklingen, noe Becker og Riviera (2006) omtaler som positivt for å regne ut antall elementer langt ut i figurrekken. I sine undersøkelser fant de blant annet at elever som hadde en figurativ tilnærming til mønsteroppgavene, i større grad klarte å finne antall elementer i eksempelvis figurnummer 100 enn de med numerisk tilnærming. Slike funn passer i våre øyne med anbefalingene til English og Warren (1998), Strømskag (2017b) og Warren og Cooper (2008) om å benytte figurmønsteroppgaver for å gi visuelle referansekontekster til variabler. Da elevene i vår undersøkelse ble oppmerksomme på figurenes oppbygning, viser funnene våre at de i større grad mestret å knytte figuren til figurnummeret. I kapittel 4.2.4 beskrev vi elevenes arbeid med å finne antall brikker i figurnummer 100. Samtlige fokusgrupper benyttet kontekstuelle generaliseringsstrategier, hvor de hadde en figurativ tilnærming for å løse oppgaven.

I undersøkelser av generaliseringsstrategier blant 8-åringer, fant Warren og Cooper (2008) at elevene lettere klarte å relatere figurmønster til figurnummer når mønsteret var hensiktsmessig inndelt i farger. Vi kunne på forhånd ha delt inn roboten med ulik farge på bein og hode/kropp (figur 5.1) for å øke sannsynligheten for eksplisitte generaliseringsstrategier, men valgte å avstå fra dette fordi elevene i vår undersøkelse var eldre. Samtidig ønsket vi å se om andre metodiske grep, som vertikale tavler og arbeid i treergrupper, hadde innflytelse på elevenes vei til å nå timens mål.



Figur 5.1: Fargeinndelt figur

5.3 Elevenes endring av begrunnelser

Vi fant ifølge Lannins (2005) tabell (tabell 2.3) lav grad av begrunnelse i deloppgavene frem til og med figur 100, selv om generaliseringsstrategiene endret seg til å bli kontekstuelle og effektive for eksplisitt å regne ut verdier langt ut i figurfølgen. Slike funn samsvarer med Masons (1996) påstand om at mange elever benytter empirisk validitet for å argumentere for generalitet. Om det skyldes at elevene i vår undersøkelse tidligere har hatt fokus på bestemte eksempler i sin matematikkundervisning vites ikke, selv om Mason (1996) nevner det som en mulig årsak.

Vi fant derimot en klar forbedring av elevenes begrunnelser da de skulle beskrive en metode for å regne ut antall firkanter uansett figurnummer. I resultatkapittelet beskrev vi blant annet at fokusgruppe 1 begrunnet med et generisk eksempel helt på egenhånd, da Eva leste opp gruppas metode i ytring 1.515. Gruppe 2 og 3 på sin side fikk noe hjelp av lærer med presisering av sine gyldige begrunnelser. Fokusgruppe 4 vurderte vi til å begrunne med hva Lannin (2005) beskriver som et deduktivt argument, selv om de ikke presiserte at regelen *alltid* vil gjelde. Det er likevel mulig at elevene implisitt mente at deres forklaring gjaldt for alle figurnummer. Gruppas begrunnelse tok altså ikke utgangspunkt i et spesifikt eksempel, men baserte seg på den generelle sammenhengen mellom figur og figurnummer. Lannin (2005) hevder det er utfordrende for elever å lage gyldige argumenter for sine generaliseringer. Vi tolker det til at elevene i vår undersøkelse sjelden har blitt utsatt for situasjoner hvor de har hatt behov for å begrunne generelt. En slik påstand støttes av Lannin (2005), som sier at det tradisjonelt har vært mer fokus på det spesielle enn det generelle i skolen.

Elevene ved skole A hadde som nevnt i metodekapittelet arbeidet med generalisering av figurmønster tidligere. Det er kanskje ikke tilfeldig at nettopp fokusgruppe 1 klarte å begrunne matematisk korrekt (generisk eksempel) uten å bli veiledet gjennom sitt resonnement. I tillegg viste vi i resultatkapittelet til Adrian i samme klasse som formulerte et korrekt deduktivt argument. Lannin (2005) påpeker at læreren har en viktig jobb med å utvikle elevenes forståelse for validiteten av både generaliseringsstrategier og begrunnelser i arbeid med figurmønsteroppgaver. Elevene ved skole A har muligens erfaring med å argumentere for at likheten gjelder for alle forekomster av mønsteret.

En presisering av at noe alltid vil gjelde er spesielt viktig i overgangen fra et empirisk argument til et generisk eksempel. I Rø og Arnesens (2020) undersøkelse av 27 lærerstudenter, fant de at ingen argumenterte matematisk korrekt med generisk eksempel, selv om de ble bedt om nettopp det i forbindelse med å bevise en påstand innen multiplikativ resonnering. Problemet skyldtes ifølge Rø og Arnesen (2020) ikke lærerstudentenes kunnskap om bevis på generelt plan, men heller at det er noe i naturen til et generisk eksempel som gjør det krevende å bruke. Lannin (2005) beskriver noe av det samme. I etterkant av sin undersøkelse om elevers generaliseringsstrategier og begrunnelser, tvilte han på om elevene i det hele tatt forstod forskjellen på et generisk eksempel og et empirisk argument. Med tanke på Rø og Arnesen (2020) og Lannins (2005) betraktninger, synes vi det er interessant at to elevgrupper på 5. trinn benyttet hva vi har vurdert til å være korrekte generiske eksempler. Selv om gruppe 2 riktignok fikk noe hjelp med sin presisering.

Vi observerte at gruppe 3 og 4, som begrunnet med deduktive argumenter, hadde litt problemer med å være presise i den skriftlige fremstillingen av sine oppskrifter. Da de skulle forklare oppskriftene verbalt, ser vi av kapittel 4.2.5 at de klarte å få frem sine begrunnelser, men trengte noe veiledning fra læreren. Lannin (2005) påpeker i sin undersøkelse at læreren er viktig for å henvise elevene tilbake til konteksten i situasjonen. I vår undersøkelse henviste læreren til elevenes figurer når de forklarte, og læren stilte både spørsmål og tolket elevenes utsagn underveis. Vi opplevde derfor at lærerens rolle var essensiell for at elevene lyktes i å argumentere deduktivt.

Schoenfeld (2016a) hevder læreren har en viktig oppgave som støttende stillas for sine elever. At læreren hjelper elevene gjennom en korrekt matematisk resonnering, tolker vi derfor som nyttig, både for å opprettholde det kognitive strevet (dimensjon 2), og samtidig bidra til å gi elevene tilgang til matematikken (dimensjon 3).

5.4 Bruk av TRU-rammeverket som analyseverktøy

Schoenfeld og Flodens (2014) rammeverk er som tidligere nevnt ikke beregnet på vurdering av én enkelt undervisningsøkt. Vi vil likevel hevde at vurdering av et øyeblikksbilde kan bidra til diskusjon av hvilke kriterier som bør oppfylles for å oppnå robust matematikkundervisning. I metodekapittelet beskrev vi hvordan vi, med noen tilpasninger, valgte å benytte observasjonsskjemaene som Schoenfeld (2016b) og hans team har utarbeidet. I tillegg justerte vi deres skåringsskjema til å passe til vår undervisningssituasjon, der vi hadde en kombinasjon av klassesamtale og gruppearbeid.

I likhet med Schoenfelds (2016b) anbefaling, opplevde vi at det var avgjørende å ha diskutert hvilke elementer vi ville legge vekt på i observasjonene før vi analyserte datamaterialet. Observasjonsskjemaene er omfattende, og det lar seg vanskelig gjøre å dekke alle elementene, selv ikke når en observerer flere undervisningssekvenser. Det utvalg av punkter man gjør i en slik diskusjon, påvirker naturlig nok vurderingen av skåringsnivå. Om omfanget er en styrke eller svakhet ved observasjonsskjemaene skal vi ikke ta stilling til, men det er i hvert fall viktig å ha avklart hva en skal observere før en går inn i observasjonsrollen. I vår studie fikk vi støtte i skåringsskjemaet som beskrev kriterier for klasseromsaktiviteter, gruppearbeid og lærers rolle for å kunne vurdere dimensjonen til nivå 3. Kombinasjonen av observasjonsskjemaene og skåringsskjemaet, ga oss mulighet til å gjøre valg som vi mente var riktige for vår studie.

Schoenfeld (2016a) anbefaler videre at de involverte, for eksempel et lærerteam, velger hvilket matematisk emne som skal ha fokus. I vårt tilfelle var det elevenes generalisering og begrunnelser av en figurmønsterutvikling, og vi valgte derfor Lannins (2005) rammeverk som et supplement. Vi opplevde det som både nyttig og nødvendig å supplere TRU-rammeverket med en spesifikk vurdering av det matematiske innholdet. Gjennom denne kombinasjonen fikk vi svar på om det matematiske innholdet hadde vært tilpasset elevgruppen.

Schoenfeld (2016a) er tydelig på at observasjon og vurdering av undervisningssituasjoner ikke er et enkeltmannsarbeid. Vi observerer og tolker situasjoner ulikt, og trenger diskusjonen i etterkant for å sikre en større grad av objektivitet i vurderingen. Helt objektivt vil det imidlertid ikke bli, fordi vi ofte går inn i observasjonene med forventninger og antagelser om hva vi kommer til å oppleve, slik blant annet Cleland (2015) omtaler med begrepet «conceptual lenses». Pring (2000) beskriver noe av det samme ved at forskningsresultatet er en konstruksjon mellom forsker og det det forskes på. Vår erfaring er at en detaljert diskusjon på forhånd om hva vi ønsket å studere, bidro til å redusere faren for å se etter funn som bekreftet ønskede forventninger til resultat.

5.5 Bruk av TRU-rammeverket som planleggingsverktøy

Schoenfeld (2016a) oppfordrer til at TRU-rammeverket kan brukes både til å diskutere gjennomført undervisningsopplegg, men også til planlegging av undervisning. Louie og Baldinger (2016) skisserer viktige spørsmål å stille innenfor hver dimensjon som kan bidra til å planlegge undervisningens innhold og metodikk, jamfør figur 5.2.

The Five Dimensions of Powerful Classrooms	
The Content	How do important disciplinary ideas and practices[2] develop in this lesson/lesson sequence? How can we create more meaningful connections?
Cognitive Demand	What opportunities do students have to make their own sense of ideas? To work through authentic intellectual challenges? How can we create more opportunities?
Equitable Access to Content	Who does and does not participate in the intellectual work of the class, and how? How can we create more opportunities for each student to participate meaningfully?
Agency, Ownership, and Identity	What opportunities do students have to see themselves and each other as powerful thinkers and learners? How can we create more of these opportunities?
Formative Assessment	What do we know about each student's current thinking? How can we build on it?

Figur 5.2: The five Dimensions of Powerful Classrooms (Louie & Baldinger, 2016)

Spørsmålet er med andre ord hva som må legges til rette for å kunne oppnå robust, og dermed god matematikkundervisning. Innenfor matematikkdimensjonen må det matematiske innholdet være nivåmessig tilpasset elevgruppen. Oppgaven må ta utgangspunkt i der elevene er, samtidig som det er av betydning at elevene får arbeide med kognitivt krevende oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning (Wæge & Nosrati, 2018). I en klasse med 20 elever som nivåmessig spenner over 2 – 3 skoleår, bør derfor oppgaven være av typen Lav Inngangsterskel, Stor Takhøyde (LIST) slik robotoppgaven er. Det gir alle elevene en mulighet til å være med fra start, samtidig som matematisk kyndige elever (Kilpatrick et al., 2001) får en mulighet til å strekke seg. LIST-oppgaver fremmer også en positiv klasseromskultur, der hele klassen arbeider sammen (Wæge & Nosrati, 2018). Wæge og Nosrati (2018) viser også til at LIST-oppgaver gir elevene mulighet til å vise det de kan, i stedet for det de ikke kan. Da hender det at elevene overrasker læreren positivt med hva de får til, slik lærer på skole B opplevde med «gruppa i hjørnet» som skrev oppskriften helt på egenhånd.

Schoenfeld (2016a) er bevisst på å ikke anbefale «best practice», men at lærerne selv skal velge hvilken metodikk de vil benytte i undervisningen. I planleggingen av undervisningen må man med andre ord velge arbeidsformer som opprettholder engasjementet hos elevene. Elevenes engasjement har nær sammenheng med deres indre motivasjon (Kilpatrick et al., 2001). Ifølge Wæge og Nosrati (2018) er flere faktorer av avgjørende betydning for elevenes indre motivasjon: elevene må føle mestring, de må oppleve en faglig anerkjennelse fra lærer og medelever, de må oppleve at de får ta matematiske avgjørelser, og at det er en trygg og god relasjon mellom lærere og elever. Vertikale tavler kan være en arbeidsform som kan legge til rette for elevenes engasjement, slik vi har sett i vår studie.

Hattie og Yates hevder i sin studie at tilbakemeldinger har en effektiv påvirkning på elevenes læring (Hattie & Yates, 2014). Det er imidlertid ikke alle tilbakemeldinger som har like stor effekt. Spesifikke tilbakemeldinger på innsats og bruk av strategier, fremmer elevenes indre motivasjon (Wæge og Nosrati, 2018). I tillegg er tilbakemeldinger effektive når elevene vet hva det vil si å lykkes. De får redusert gapet mellom der de er og der de bør være, og de får informasjon om hvor de skal gå videre (Hattie & Yates, 2014). Formativ vurdering krever derfor en bevissthet fra læreren på hvilke typer tilbakemeldinger som gis for å opprettholde elevenes produktive strev, og for å sikre at de bruker hensiktsmessige strategier. Funn i vår undersøkelse viste at de vertikale tavlene var et nyttig hjelpemiddel innenfor formativ vurdering. Begge lærere ga uttrykk for at de fikk god oversikt over elevenes arbeid, bedre enn hvis elevene hadde jobbet ved pultene. Oversikten ga dem mulighet til å adressere misoppfatninger, og veilede gruppene underveis i prosessen.

Oppsummert kan TRU-rammeverket bidra til at lærere sikrer at det matematiske innholdet er tilpasset elevgruppen, at oppgavetypen gir anledning til utforsking og produktivt strev, og at metodikken gir rom for at elevene kan dele egne og andres ideer, samt få anerkjennelse for dem. Videre må læreren gis anledning til god oversikt over elevenes arbeid, slik at hen kan adressere misoppfatninger og veilede elevene i riktig retning. En forutsetning for å oppnå en robust matematikkundervisning, er etter vår vurdering klasseromsnormer der det er kultur for å dele og å lære av egne og andres feil.

5.6 Vurdering av kvaliteten på undersøkelsen

Vi har i vår studie undersøkt to klassers arbeid med generalisering av figurmønster, der de benytter vertikale tavler og jobber i tilfeldige treergrupper. De presenterte funnene gjelder for disse to klassene, og kan ikke uten videre generaliseres til andre elever. Våre funn i analysen, sammen med teori om god matematikkundervisning og innholdet i TRU-rammeverket, kan likevel være et bidrag i diskusjonen om hva som må legges til rette for å oppnå robust matematikkundervisning.

Det er forhold som kan ha påvirket resultatet av studien vår. Vår tilstedeværelse er som nevnt en faktor som kan hatt innvirkning på både lærere og elever i gjennomføringen. Vi kan også ha tolket elevene feil i transkripsjonsarbeidet der lydkvaliteten var dårlig. I intervjuene kan vi ha gått glipp av viktig informasjon fra lærerne. Vi kan både ha påvirket dem gjennom våre egne betraktninger, og unnlatt å følge opp deres uttalelser som kunne gitt oss viktig tilleggsinformasjon.

I studien har vi både ønsket å se på kjennetegn på robust matematikkundervisning, generaliseringsstrategier og begrunnelser, og bruk av vertikale tavler. Når vi undersøker flere faktorer på en gang, kan det være vanskelig å skille hva som gir hvilken effekt og hvorfor. Vi mener det er kombinasjonen av de nevnte faktorene som har gitt resultat i denne undersøkelsen. Vertikale tavler i seg selv gir for eksempel liten effekt på elevenes deling, dersom oppgaven er på et slikt nivå at elevene ikke klarer å utføre den. Å jobbe i treergrupper har på sin side begrenset effekt, hvis det ikke er rom for produktivt samarbeid.

5.7 Videre forskning

Som nevnt innledningsvis i denne masteroppgaven er det gjort mye forskning på bruk av figurmønsteroppgaver som en inngangsport til mer formell algebra. I tillegg kan vi finne mye litteratur som beskriver god matematikkundervisning generelt. Formålet med vår undersøkelse har vært å se på ulike metodiske grep som kan gjøres for å knytte innlæring av algebra sammen med god undervisning. Vi har argumentert for at oppgavetype, klasseromsnormer, bruk av vertikale tavler, arbeid i små grupper og helklassesamtaler har vært utslagsgivende i vår vurdering av robust matematikkundervisning. Samtidig er det nok mange andre faktorer som spiller inn, men som vi ikke har tatt hensyn til i denne oppgaven.

At arbeidsmetodene var nye og kanskje spennende for elevene, kan ha påvirket resultatet i vår undersøkelse. Det hadde derfor vært interessant å se om vi hadde fått lignende funn om vi hadde forsket i et lengre tidsperspektiv. Det hadde også vært interessant å se om resultatene hadde fortonet seg annerledes om elevene i undersøkelsen hadde vært yngre eller eldre. Vi kunne også ha sammenlignet grupper som arbeidet på tradisjonelle, horisontale flater med grupper som jobbet på vertikale tavler. Ved å sammenligne, kan man si noe mer spesifikt om de vertikale tavlenes påvirkning for innlæring av det faglige innholdet. I tillegg hadde det vært spennende å se om de samme metodiske grepene ville gitt tilsvarende resultater på andre matematiske emneområder.

Referanser

Baldinger, E. & Louie, N. (2016). TRU Math conversation guide: A tool for teacher learning and growth. . Hentet 11.06 2021 fra http://map.mathshell.org/trumath.php

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 95-101).

Bergem, O. K. (2016). 2 Hovedresultater i matematikk. I *Vi kan lykkes i realfag* (s. 22-44).

Boaler, J. (2008). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach. *British educational research journal, 34*(2), 167-194. https://doi.org/10.1080/01411920701532145

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Research designs: quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological. *APA handbook of research methods in psychology, 2*, 55-71.

Brousseau, G., Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (bd. 19). Dordrecht: Dordrecht: Springer Netherlands.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., … Hiebert, J. (2019). Choosing and justifying robust methods for educational research. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(4), 342-348.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school* ERIC.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. *Algebra in the early grades*, 235-272.

Chan, M. C. E., Mesiti, C. & Clarke, D. (2019). Problematising Video as Data in Three Video-based Research Projects in Mathematics Education. *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*, 199.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions : using math talk to help students learn, grades K-6* (2nd ed. utg.). Sausalito, Calif: Math Solutions.

Cleland, J. (2015). Exploring versus measuring: considering the fundamental differences between qualitative and quantitative research. *Researching medical education*, 1-14.

Cohen, L., Morrison, K. & Manion, L. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition. utg.). London,New York: Routledge.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry & research design : choosing among five approaches* (3rd ed. utg.). Los Angeles: Sage.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (u.å.). Etiske retningslinjer. Hentet fra https://www.forskningsetikk.no

Devlin, K. (1997). *Mathematics : the science of patterns : the search for order in life, mind and the universe*. New York: Scientific American Library.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *The Mathematics teacher, 91*(2), 166-170.

Ernest, P. (2000). Why Teach Mathematics? I White, J. & Bramall, S.(red.), Why Learn Maths. I: London, Institute of Education, London University.

Forrester, T., Sandison, C. E. & Denny, S. (2017). Vertical whiteboarding : Riding the wave of student activity in a mathematics classroom. *Australian Mathematics Teacher, 73*(4), 3-8.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2011). Framgang, men langt fram. *Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS*.
Grønmo, S. (2020). Kvantitativ metode. I *Store norske leksikon*. Hentet 04.06 fra https://snl.no/kvantitativ_metode
Guba, E. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational communication and technology, 29*(2), 75-91. https://doi.org/10.1007/BF02766777
Hattie, J. & Yates, G. C. R. (2014). *Visible Learning and the Science of How We Learn*. London: London: Routledge.
Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 371-404.
Hole, A. & Grønmo, L. S. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken: En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMMS Advanced og andre internasjonale studier* Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing).
Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education, 9*(2), 187-211.
Johnsen-Høines, M. & Herheim, R. (2016). *Matematikksamtaler : undervisning og læring - analytiske perspektiv*. Bergen: Caspar forl.
Kaput, J. J. (2007). What is algebra? What is algebraic reasoning. I *Algebra in the early grades* (s. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teacers of Mathematics.
Kaput, J. J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (s. 344-352).
Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., Mathematics Learning Study, C., National Research Council Center for Education, D. o. b. & social sciences, e. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1. - 10.* (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet 18.06 2021 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob
Kvale, S. & Brinkmann, S. (2017). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.
Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3
Liljedahl, P. (2005). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. *International journal of mathematical education in science and technology, 36*(2-3), 219-236.
Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (s. 361-386). Cham: Springer International Publishing.
Liljedahl, P. (2019). Conditions for supporting problem solving: Vertical non-permanent surfaces. I *Mathematical problem solving* (s. 289-310). Springer.
Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning* Corwin.
Liljedahl, P. & Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research*. Cham: Cham: Springer International Publishing AG.
Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education, 49*(6), 937-949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3
Malara, N. A. & Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking* Pitagora.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I *Approaches to algebra* (s. 65-86). Springer.
Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing the General in the Particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289. https://doi.org/10.1007/BF00312078
Megowan-Romanowicz, C. (2016). Whiteboarding: a tool for moving classroom discourse from answer-making to sense-making. *The Physics Teacher, 54*(2), 83-86.
Merriam, S. B. & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research : a guide to design and implementation* (Fourth edition. utg.). San Francisco, CA: Jossey-Bass, a Wiley Brand.
Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). Dybdelæring i matematikk. *Hentet fra Realfagsløyper. no: http://realfagsloyper. no/sites/default/files/2018-04/MN% 20KW% 20dybdel% C3% A6ring*.
Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? : a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency* Faculty of Educational Sciences, University of Oslo, Oslo.
Oxford University Press. (2021, 18.06). "Definition of whiteboarding". I. Hentet fra https://www.lexico.com/definition/whiteboarding
Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "Connections" Standard: Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 163-182. https://doi.org/10.1007/s10649-006-3365-z
Pring, R. (2000). The 'False Dualism' of Educational Research. *Journal of Philosophy of Education, 34*(2), 247-260. https://doi.org/10.1111/1467-9752.00171
Rø, K. & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 58*, 100755.
Schoenfeld, A. (2016a). *An introduction to the teaching for robust understanding (TRU) framework* Hentet 11.06 2021 fra http://map.mathshell.org/trumath.php
Schoenfeld, A. (2016b). *The Teaching for Robust Understanding (TRU) observation guide for mathematics: A tool for teachers, coaches, administrators, and professional learning communities*. Hentet 11.06 2021 fra http://mathshell.org/trumath.php
Schoenfeld, A. & Floden, R. (2014). *The TRU Math Scoring Rubric* Hentet 11.06 2021 fra http://map.mathshell.org/trumath.php
Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. I *New mathematics education research and practice* (s. 153-170). Brill Sense.
Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The Journal of the learning sciences, 16*(4), 565-613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253
Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics teacher, 91*(8), 670-675.
Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.
Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal, 33*(2), 455-488.
Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50-80.
Strømskag, H. (2017a). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet.
Strømskag, H. (2017b). A methodology for instructional design in mathematics—with the generic and epistemic student at the centre. *Mathematics Education, 49*(6), 909-921. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0882-4

Valenta, A. (2015). Aspekter ved tallforståelse. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta_Aspekter%20ved%20tallforsta%CC%8Aelse%20okt16.pdf
Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *An International Journal, 67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2
Wilkie, K. J. & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal, 28*(2), 223-243.
Wæge, K. (2015). Samtaletrekk–redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten, 2*, 2015.
Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforl.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og Samtykkeskjema

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Vedlegg 3: Observasjonsskjema i TRU-rammeverket

Vedlegg 4: Skåringsskjema i TRU-rammeverket

Vedlegg 5: Undervisningsnotat

Vedlegg 6: Intervjuguide

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Robust matematikkundervisning i arbeid med algebra på vertikale tavler"?

Til foresatte for elever ved _____________ skole

Vi er to studenter ved Lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7 på NTNU, og skal i løpet av dette skoleåret skrive en masteroppgave innenfor emnet matematikkdidaktikk. I den forbindelse ønsker vi å gjennomføre en undersøkelse i ditt barns klasse. Formålet med undersøkelsen er å se etter kjennetegn på robust matematikkundervisning når elevene jobber i grupper på vertikale tavler som blir hengt opp i klasserommet. Hva elevene diskuterer, hvordan de samarbeider og hvordan de uttrykker seg på tavlene, vil være av stor verdi for vår undersøkelse. Funnene vil være nyttige for oss lærere i videre planlegging av undervisning, samt nyttig for andre lærere som ønsker innsikt i nye undervisningsmetoder. Resultatene vil videre bli brukt i en masteroppgave ved NTNU, hvor alt av data anonymiseres.

Hva innebærer deltagelse?

Dersom du velger å la ditt barn delta i undersøkelsen, vil barnet arbeide med en matematikkoppgave på gruppe med to andre elever. Gruppene observeres av kontaktlærer og undertegnede. Det vil også bli tatt video- og lydopptak av samtalene mellom elevene i to tilfeldig valgte grupper. I etterkant av undervisningsøkten vil video- og lydopptakene bli transkribert og anonymisert. Arbeid med oppgaven vil ta omtrent 60 minutter og gjennomføres i en matematikktime i perioden 1. november til 20. desember.

Det er frivillig å delta i prosjektet. Dersom ditt barn velger å delta, er det likevel mulig å trekke samtykket når som helst uten å oppgi noen grunn. Elevens bidrag vil da bli slettet. Det vil ikke medføre negative konsekvenser for ditt barn hvis dere velger å ikke delta, eller dersom samtykket trekkes tilbake.

Bruk og oppbevaring av personlige opplysninger

Vi vil kun bruke opplysningene om ditt barn til formålet omtalt i dette skrivet. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Undertegnede og veileder vil ha tilgang til det anonymiserte datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter ved NTNU.

- Alle navn anonymiseres. I tillegg vil alle utsagn som kan identifisere enkeltelever i transkripsjonen utelates.
- Datamaterialet låses inn, og video- samt lydopptak vil bli oppbevart på en kryptert minnepenn. Etter prosjektslutt, september 2021, vil video- og lydopptak slettes og skriftlige data makuleres.

Dine rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- få slettet personopplysninger om ditt barn,
- få utlevert en kopi av ditt barns personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke. På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, ta kontakt med oss eller:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved hermund.a.torkildsen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.
- Personvernombud ved NTNU, thomas.helgesen@ntnu.no.

Med vennlig hilsen

Øystein Spernes – student ved lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7, NTNU

E-mail: oesp@sarpsborg.com

Astrid Erdal - – student ved lærerspesialistutdanningen i matematikk 1 – 7, NTNU

E-mail: astrid.erdal@mosseskolen.no

Samtykkeerklæring

Sett kryss i ruten som passer:

☐ Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet "*Robust matematikkundervisning i arbeid med algebra på vertikale tavler"*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at mitt barn kan:

- delta i samtale med elever hvor det blir tatt video- og lydopptak

Det understrekes at barnet kan motsette seg deltagelse, selv om foresatte har gitt samtykke.

(Barnets navn)

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, september 2021.

(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)

☐ Jeg samtykker IKKE til at mitt barn deltar i prosjektet.

(Barnets navn)

(Signert av foresatte, dato)

Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD

Melding07.10.2020 12:16

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 905316 er nå vurdert av NSD. Følgende vurdering er gitt: Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 07.10.2020 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 08.09.2021.

LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon. OPPFØLGING AV PROSJEKTET NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 3: Observasjonsskjemaene i TRU-rammeverket

Matematisk innhold Beskrivelse av dimensjonen: I hvilken grad det matematiske innholdet er i tråd med Kunnskapsløftet. Hver elev skal ha mulighet til å streve meningsfullt med sentrale ideer, og i arbeid med dette, utvikle seg til å bli en kunnskapsrik, fleksibel og ressurssterk matematisk tenker og problemløser. Lærere burde ha mulighet til å vurdere og diskutere hvordan hver leksjon kan knyttes til den kompetanse elevene skal utvikle over tid	
Elever: - engasjerer seg på relevant matematisk nivå slik at de får frem viktige sammenhenger, prosedyrer og problemløsningsstrategier - får anledning til å utvikle produktive matematiske vaner - får anledning til matematisk resonnering, både muntlig og skriftlig gjennom å bruke passende matematisk språk - begrunner både fremgangsmåte og svarene sine	*Lærer:* - Fremhever viktige poeng og gir mulighet for elevene til å engasjere seg i dem - benytter konkreter og/eller oppgaver som fokuserer på sentrale ideer og sammenhenger - er tydelig på å knytte innholdet til kjente sammenhenger, og også hvordan det skal jobbes med videre - støtter målbevisst bruk av språk og representasjoner som er sentrale i matematikk (som grafer, tabeller og symboler) - støtter elevene i å se hvordan matematikk er sammenhengende og forståelig, og hvordan det er koblinger mellom ulike tema
Plass til å notere spesielle observasjoner: - hvordan bidro de vertikale tavlene til elevenes mulighet for resonering og problemløsning - hvordan uttrykte de seg skriftlig og muntlig - hvilket matematisk språk benyttet de i sin generalisering - hvordan passet oppskriftene deres til Lannins (2005) rammeverk for generalisering og argumentasjon	
Plass til å skrive notater	
Mål: Alle elevene arbeider med sentrale matematiske spørsmål på måter som gjør det mulig for dem å utvikle konseptuell forståelse, utvikle resonnement og problemløsningsferdigheter, og bruke matematiske konsepter, verktøy, metoder og representasjoner i relevante sammenhenger	

<table>
<tr><td colspan="2">Kognitive krav
Beskrivelse av dimensjonen: I hvilken grad elevene har muligheter til å streve med, gi mening til og bruke matematiske ideer. Elever lærer best når de blir utfordret på måter som gir rom og støtte for å utvikle matematisk kompetanse, med oppgaver som varierer fra moderat til krevende vanskelighetsgrad. Nivået på oppgavene bør legge til rette for et produktivt strev hos elevene.</td></tr>
<tr><td>Elever:
- engasjerer seg individuelt og i samarbeid med utfordrende matematiske ideer
- søker aktivt å utforske grensene for deres nåværende forståelse
- er komfortable med at deres tanker og ideer trekkes frem i en større samtale, selv om det er feil
- resonerer og tester ideer som bygger på tidligere kunnskap
- forklarer hva de har gjort så langt, før de spør om hjelp
- fortsetter å streve med en idé etter at læreren har gått</td><td>Lærer:
- setter elevene i en posisjon der de får mulighet til å gi mening til sentrale matematiske ideer
- bruker og tilpasser konkreter og aktiviteter slik at elevene gis mulighet individuelt og/eller kollektivt for dybdelæring
- etablerer og opprettholder klasseromsnormer som støtter hver elevs engasjement gjennom disse konkretene og aktivitetene
- overvåker elevenes utfordringer, og justerer oppgaver, aktiviteter og diskusjoner slik at alle elevene er engasjert i produktivt strev
- støtter elevene uten å fjerne utfordringer fra arbeidet de er engasjert i</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å notere spesielle observasjoner:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å skrive notater</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mål: Alle elever får mulighet til å skape mening til viktige matematiske ideer, og utvikle dypere forståelse og sammenhenger som bygger på tidligere kunnskap</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Tilgang til matematikken
Beskrivelse av dimensjonen: I hvilken grad klasseromsaktiviteter innbyr til og støtter meningsfullt engasjement i arbeid med kjernen av det matematiske innholdet for alle elevene. Å finne måter å støtte engasjementet til elever med forskjellige kompetanse, er nøkkelen til et klasserom der alle har tilgang til matematikken.</td></tr>
<tr><td>Elever:
- alle elever bidrar til kollektiv forståelse av det matematiske innholdet ved for eksempel foreslå ideer, stille spørsmål, lage diagrammer og lignende
- lytter aktivt til andre elever og bygger videre på idéene deres
- støtter andre elever i deres utvikling av forståelse
- forklarer, tolker, bruker og reflekterer over viktige matematiske ideer
- deltar meningsfullt i det matematiske arbeidet i klassen</td><td>Lærer:
- skaper trygge læringsmiljøer
- bruker oppgaver og aktiviteter som gir flere innganger og støtter flere tilnærminger til matematikken
- gir elevene mulighet til å se seg selv og deres personlige og samfunnsmessige interesser reflekter i læreplanen
- læreren validerer ulike måter å gi bidrag på
- etablerer og opprettholder klasseromsnormer som støtter hver elevs deltakelse i gruppearbeid og helklasseaktiviteter
- tar hensyn til elever med spesielle behov som for eksempel minoritetselever, for å oppnå full deltakelse
- forventer og støtter meningsfullt matematisk engasjement fra alle elever, og hjelper elevene med å bidra og bygge videre på andres bidrag</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å notere spesielle observasjoner:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å skrive notater</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mål: Alle elever støttes i tilgang til sentralt matematisk innhold, og deltar aktivt i klassens arbeid. Ulike styrker og behov bygges på gjennom bruk av forskjellige strategier, ressurser og teknologier som gjør det mulig for alle elever å delta meningsfylt</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Eierskap, identitet og deling
Beskrivelse av dimensjonen: I hvilken grad hver elev har mulighet til å utforske, anta, resonnere, forklare og bygge på nye ideer, noe som bidrar til utvikling av engasjement og eierskap til innholdet, som igjen resulterer i positiv matematisk identitet for den enkelte</td></tr>
<tr><td>Elever:
- tar eierskap til læringsprosessen i planlegging, overvåking og refleksjon over individuelt/kollektivt arbeid
- stiller spørsmål og kommer med forslag som støtter analysering, evaluering, bruk og oppbygging av matematiske ideer
- bygger på andres bidrag, og hjelper andre til å se eller skape sammenhenger
- ansvarliggjør seg selv og klassekamerater gjennom å rettferdiggjøre sin argumentasjon ved bruk av bevis og/eller utdypende resonnement</td><td>Lærer:
- gir elevene tid til å utvikle og uttrykke matematiske ideer og resonnement
- sikre at alle elever har mulighet for at meningen deres skal bli hørt
- oppmuntre til elevdiskusjoner og fremme gode bidrag i plenum
- gir oppgaver og stiller spørsmål som krever at elevene argumenterer for sine påstander
- Bruker ulike teknikker som gir elevene nye ideer, for å bygge eierskap og identitet hos elevene</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å notere spesielle observasjoner:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å skrive notater</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mål: Alle elever bygger produktive matematiske identiteter gjennom å utnytte muligheter til å engasjere seg meningsfylt med faget, og dele og forbedre sine ideer</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Formativ vurdering
Beskrivelse av dimensjonen: I hvilken grad klasseromsaktiviteter fremkaller alle elevenes tenkning, og hvordan denne tenkningen blir besvart ved å bygge på produktive begynnelser eller adresserer misoppfatninger. Instruksjon av høy kvalitet «møter elevene der de er», og gir dem mulighet til å utvikle dypere forståelse, både ved hjelp av lærer, og i interaksjon mellom elevene.</td></tr>
<tr><td>Elever:
- forklarer deres tenkning, selv om den er ufullstendig
- ser feil som muligheter for ny læring
- reflekterer konsekvent over sitt eget arbeid og arbeid gjort av medelever
- ser medelever som ressurser for egen læring
- gir spesifikk og nøyaktig tilbakemelding til medelever
- benytter tilbakemeldinger i revidering av eget arbeid</td><td>Lærer:
- skaper trygge læringsmiljø der elevene gjerne uttrykker ideene sine
- bruker undervisningsmateriell som fremkaller flere strategier, og har elever som forklarer sine resonnement, for å få informasjon om elevenes faglige utvikling
- er fleksibel i justering av innhold og prosess, og gir elevene mulighet til å revidere sine tanker og engasjere seg på nytt
- gir spesifikk tilbakemelding til elevene på riktig tidspunkt som en del av klasseromsrutiner, noe som gjør at elevene kan bruke tilbakemeldinger som en aktiv del av deres videre læring
- gir muligheter for at elevene individuelt og kollektivt kan reflektere over egen kunnskap og læring</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å notere spesielle observasjoner:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plass til å skrive notater</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mål: Hver elevs læring forbedres kontinuerlig av den pågående strategiske og fleksible bruken av teknikker og aktiviteter som gjør at elevene kan gjøre rede for sin forståelse. Det gir igjen mulighet til å rydde opp i misoppfatninger, og bygge videre på produktive ideer.</td></tr>
</table>

Vedlegg 4: Skåringsskjema i TRU-rammeverket

Dimensjon 1: Matematisk innhold

Nivå 1: Klasseromsaktivitetene er ikke nivåtilpasset, og fokuserer på instrumentelle ferdigheter. Matematikken som blir diskutert er ikke på riktig nivå, eller diskusjonene tar sikte på å få frem svar, og ikke hvordan elevene kommer frem til svaret. Det legges ikke fokus på elevenes resonnering og problemløsning.

Nivå 2: Aktivitetene er nivåtilpasset, men er i hovedsak ferdighetsorientert med få muligheter for å se sammenhenger mellom prosedyrer og konsepter. Elevenes presentasjon av matematikken er i hovedsak prosedyrebasert uten verken støtte eller forventninger om at ideene blir forklart.

Nivå 3: Klasseromsaktivitetene støtter opp om meningsfulle sammenhenger mellom prosedyrer, konsepter og kontekster. Matematikken som presenteres er korrekt, og inneholder både forklaringer og begrunnelser. Alternativt at læreren oppfordrer elevene til å fokusere på sentrale matematiske ideer ved at de må forklare og begrunne dem. Det gis mulighet for å se sammenhenger i matematikken, slik at det matematiske innholdet gir mening.

Dimensjon 2: Kognitive krav

Nivå 1: Aktivitetene eller lærerens innblanding er strukturert slik at elevene i hovedsak begrenses til å jobbe med rutineoppgaver eller memorerte prosedyrer. Elevpresentasjoner eller klasseromsdiskusjoner fokuserer på kjente fakta og prosedyrer.

Nivå 2: Aktivitetene og/eller elevpresentasjonene gir muligheter til produktivt engasjement eller strev med sentrale matematiske ideer, men elevene blir enten overlatt til seg selv når de strever, eller læreren hjelper for mye eller tar bort utfordringen.

Nivå 3: Lærerens hint eller stilasbygging støtter elevene i produktivt strev. Læreren streber etter å bygge matematisk forståelse hos elevene. Det innebærer å gi dem rikelig med tid til å tenke, og til å stå i oppgaven.

Dimensjon 3: Tilgang til matematikken

Nivå 1: Det er ikke gitt tilgang til matematikken for alle elever, og det gjøres tilsynelatende ingen innsats for å løse dette problemet. I gruppearbeid blir enkeltelever stående utenfor, eller uten mulighet til å kunne bidra. I elevfremlegg gis ikke elever som trenger det støtte av læreren, eller læreren forholder seg kun til et fåtall av elevene.

Nivå 2: Det er ujevn tilgang til matematikken, eller ujevn deltakelse, men læreren gjør noe innsats for å gi matematisk tilgang til et bredt spekter av elever. I gruppearbeid ser det ut til at alle gjør matematikk, men ikke alle deltar i gruppearbeidet. Læreren foretar seg ikke noe som støtter at alle inkluderes i gruppearbeidet. Læreren oppmuntrer elever som presenterer, men uten nødvendig stilasbygging. Presentasjonen brukes til å involvere klassen, men det er ujevn deltakelse, og læreren gjør ikke nok for at mange elever skal delta på en meningsfull måte.

Nivå 3: Læreren støtter aktivt, og til en viss grad oppnår bred og meningsfull matematisk deltakelse. Alle på gruppa bidrar til gruppas matematiske diskusjoner, eller læreren gjør grep for at alle gruppemedlemmene kan komme med meningsfulle bidrag. Læreren støtter ved behov elever som presenterer, og bruker presentasjonen til å involvere hele klassen.

Dimensjon 4: Eierskap, identitet og deling

Nivå 1: Læreren setter i gang samtaler. Elevens samtaletid er kort, gjerne en setning eller mindre, og er begrenset til hva læreren sier eller gjør. Diskusjonen er lærerstyrt. Lærerens innblanding i gruppearbeid begrenser elevene til å produsere korte svar, eller at læreren ignorerer klare ubalanser i gruppediskusjonen. Elevpresentasjoner er begrenset til å svare på lærerens spørsmål.

Nivå 2: Elevene har mulighet til å forklare noe av deres tenkning, men læreren er den som hovedsakelig driver samtalen, og som bedømmer om tenkningen er korrekt. I gruppearbeid får minst en elev muligheten til å snakke om det matematiske innholdet, men læreren støtter ikke opp under at elevene skal bygge videre på hverandres ideer. Det er læreren som er dommer eller fasit.

Nivå 3: Elevene forklarer sine ideer og resonnement, læreren kan tilskrive elvene eierskap til sine ideer i fellesskapet. Elevene kan også bygge videre på hverandres ideer. I gruppearbeid får minst én elev tre frem og forsvare sin idé eller resonnement og/eller elevene bygger på hverandres ideer, eller læreren tilskriver eierskap til elevenes ideer i senere diskusjoner.

Dimensjon 5: Formativ vurdering

Nivå 1: Elevenes resonnement blir ikke aktivt fulgt opp av læreren. Lærerens handlinger begrenser seg til korrigerende tilbakemelding eller oppmuntring. I gruppearbeid er lærerens handlinger begrenset til å gi korrigerende tilbakemeldinger ved for eksempel å lede dem gjennom en ferdigdefinert læringssti, uten å innhente eller etterfølge elevenes tenkning på en meningsfull måte.

Nivå 2: Læreren referer til elevenes tenkning, også til kollektive misoppfatninger og feil. Spesifikke elevers ideer blir ikke bygget videre på (selv om de er potensielt verdifulle), eller brukt til å adressere utfordringer. I gruppearbeid innhenter læreren elevenes tenkning, men etterfølgende diskusjoner bygger ikke videre på begynnende ideer. Lærerens handlinger er korrigerende av natur, med det som mål å lede elevene i «riktig» retning.

Nivå 3: Læreren innhenter elevenes tenkning, og videre instruksjoner responderer på produktive tanker hos elevene, eller ved å adressere deres misoppfatninger.

I tillegg ønsker vi å trekke inn elevperspektivet fra observasjonsskjemaet til TRU, dimensjon 5: Begrunnelsen for det er at vi mener at formativ vurdering også omhandler elevenes egenvurdering.

Elever:

- forklarer deres tenkning, selv om den er ufullstendig
- ser feil som muligheter for ny læring
- reflekterer konsekvent over sitt eget arbeid og arbeid gjort av medelever
- ser medelever som ressurser for egen læring
- gir spesifikk og nøyaktig tilbakemelding til medelever
- benytter tilbakemeldinger i revidering av eget arbeid

Vedlegg 5: Undervisningsnotat

Robotoppgaven:

Mål for timen: At elevene muntlig eller skriftlig kan forklare hvordan man kan regne ut antall poeng uansett hvilket level man er på i robotspillet.

1. Introduksjon: Vis powerpointen. Informer elevene om timeout!

   Introdusér ordet «level». Mange elever vil kjenne igjen dette ordet, men det kan være lurt å knytte ordet til «nivå» eller «brett».

   Dette er en robot fra et dataspill. På level 1, ser roboten slik ut. Roboten blir større og større jo lengre du kommer i spillet – henvis til level 2 og 3. Du har like mange poeng/like høy score som det er antall firkanter i roboten. Eks: på level 1 er roboten laget av 5 firkanter – altså 5 poeng.

2. I dag skal dere finne ut hvor mange poeng dere får når dere kommer lenger i spillet.
   Det første dere skal gjøre er å tegne level 4 og 5 og finne ut hvor mange poeng dere har på de to levlene?

Del inn i tilfeldige grupper og la elevene gå til tavlene.

Er det noen grupper som er i mål med nivå 4 og 5? – Be elevene finne ut antall poeng på level 10. Dere kan velge om dere tegner eller regner det ut på en annen måte.

- Noen vil prøve å tegne videre – spør elevene om de klarer å finne det ut uten å tegne, eller ved å tegne på en enklere måte. Trenger dere å tegne alle rutene?

Samle elevene – Bruk 1 minutt i gruppene og diskuter: Hvordan ser dere figuren? Til lærer: Vis dette for alle på tavla.

Er det noen som så det på en annen måte? Lærer skriver opp på tavlen hvordan elevene tenkte. Hvordan regner dere ut antall poeng? Er det noen sammenheng mellom levelet du er på og hvordan roboten ser ut?

- Prøv å finne antall poeng på level 100.

Siste utfordring:

En venn av deg spiller dette spillet. Kan du hjelpe han med å lage en oppskrift på hvordan han skal regne ut antall poeng uansett hvilket level han er på?

Han har kommet langt i spillet, men husker ikke hvilket level han er på. Hvis han drar hjem og sjekker levelet, kan du sende med han en lapp som forteller hvordan han skal sjekke hvor mange poeng han har.

Du kan forklare med ord, en tegning eller regning.

Dersom noen elever klarer å argumentere generelt muntlig – spør om de kan gjøre det skriftlig eller med en tegning.

Til slutt: Hvis dere skulle ha laget forklaringen som et regnestykke, hvordan ville dette regnestykket ha sett ut?

Oppsummering: Knytt figur til regnestykket på tavlen. Vis hvordan man kan regne ut et hvilket som helst level. Bruk enkle eksempler som f.eks level 5-10 for å unngå fokus på hvordan man multipliserer store tall.

Oppsummering:

Ta utgangspunkt i en gruppe sin løsning/tolkning av figuren.

F.eks: n*n+2n+2. Forklare de ulike leddene, n*n er «kroppen», 2n er beina og 2 er føttene.

Hva er det som endrer seg, og hva er det som ikke endrer seg? Konstantledd, variabel.

Hva med n*n+2*(n+1) – Her ser vi at beina er én mer enn levernummeret.

Vedlegg 6: Intervjuguide

Arbeid med figurtall:

1. Hvilke matematiske sammenhenger kunne elevene se i denne undervisningsøkten?
    - På hvilken måte tenker du at elevene kan forstå matematikken? Er det ny kunnskap som må pugges, eller kan kunnskapen forstås ved å bygge på relasjoner mellom andre områder i matematikken?
    - Kan matematikken som læres tilpasses andre situasjoner? Kan kunnskapen benyttes i andre kontekster?

2. På hvilken måte opprettholder eller begrenser en slik undervisningstime elevenes tenkning?
    - Var oppgaven krevende nok til å opprettholde elevenes tenking, eller var det elementer ved oppgaven som gjorde at elever meldte seg ut?
    - I hvilken grad ga oppgaven elevene rom til å tenke ut fremgangsmåter og løsningsstrategier selv?
    - Er det noe du som lærer kan gjøre for å opprettholde elevenes tenking?

3. I hvilken grad fikk alle elevene tilgang til matematikken i løpet av undervisningsøkten?
    - Var det noe ved selve oppgaven som gjorde at flere/færre elever aktivt deltok?
    - Var det noe ved selve arbeidsformen som gjorde at flere/færre elever deltok aktivt?
    - Er det grep du som lærer kan gjøre for å gi alle elevene en mulighet til å tilegne seg matematikken?

4. På hvilken måte legger en slik undervisningstime til rette for at elevene kan dele egne og anerkjenne andres ideer?
    - Hvordan kan du som lærer legge til rette for at alle får delt eller argumentert for sine ideer i løpet av en undervisningsøkt?
    - I hvilken grad fremmer/hemmer en slik arbeidsform mulighetene for elevene til å argumentere for/dele sine ideer kontra andre arbeidsformer i matematikk.
    - I hvilken grad mener du det er viktig at elevene får delt og argumentert for sine ideer, og hvorfor mener du det er viktig/ikke viktig?

5. I hvilken grad fikk du informasjon om elevenes kunnskaper ved å gjennomføre en slik undervisningstime?
   - På hvilken måte fikk du oppsummert elevenes arbeid?
   - Valgte du ut en rekkefølge på hvordan du skulle trekke frem enkelte elevarbeid, og i så fall hvorfor og hvordan?
   - Oppdaget du noen misoppfatninger?
   - Hvordan er vurderingsmulighetene i slik matematikkundervisning kontra andre undervisningsformer?
   - Hva sitter du igjen med etter en slik matematikktime, og hvordan kan det brukes i videre planlegging av undervisning?

Bruk av vertikale tavler og tilfeldig valgte treergrupper

6. Hvordan opplevde du å gi oppgaven muntlig fremfor skriftlig?

7. Elevene ble delt inn i tilfeldige treergrupper. Hvordan opplevde du at det fungerte sammenlignet med grupper der du velger hvem som skal samarbeide?
   - Tror du det har noen betydning at elevene så at inndelingen var tilfeldig, og i så fall på hvilken måte?

8. Når elevene jobber på vertikale tavler, kan de se hverandres arbeid underveis. Hvilken effekt kunne du observere at det hadde på elevene?

9. Hvilken rolle opplevde du å ha mens elevene jobbet på tavlene?

10. Dette var første gang elevene jobbet med vertikale tavler. Er dette en arbeidsform du kan tenke deg å fortsette med, og i så fall hvorfor?

Til Kurland skole: Elevene har jobbet med vertikale tavler tidligere. Ser du en utvikling i måten elevene samarbeider om oppgavene, og i så fall på hvilken måte?

11. Hvilke fordeler og ulemper vil du trekke frem ved bruk av vertikale tavler?

12. Hva opplever du at du som lærer må være bevisst på ved denne arbeidsformen?

13. Hva vil du formidle til elevene at de må være bevisste på ved denne arbeidsformen?

14. Til hvilken type oppgaver kan du tenke deg å benytte vertikale tavler?

15. Hvilke av kjerneelementene i fagfornyelsen tenker du at vertikale tavler kan bidra til å oppfylle, og i så fall på hvilken måte?

16. Hvilke klassenormer mener du må være på plass for at bruk av vertikale tavler kan være en suksessfull arbeidsform i en klasse? *Begrepet klassenorm må forklares*

NTNU
Kunnskap for en bedre verden