Johanne Krogholm Sand

Uniformt fordelte følger og diskrepans

Bacheloroppgave i matematiske fag
Veileder: Sigrid Grepstad
Desember 2022

Bacheloroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Johanne Krogholm Sand

Uniformt fordelte følger og diskrepans

Bacheloroppgave i matematiske fag
Veileder: Sigrid Grepstad
Desember 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Indhold

1 Indledning

Forestil dig en følge $(x_n), n = 1, 2, \ldots$ bestående af reelle tal. Betragt nu decimaldelene til hvert element, $\{x_n\}$, i følgen, som alle ligger i intervallet $I = [0, 1)$. Hvordan ville du tænke en uniformt fordelt følge på I ser ud? For endelige følger er det naturligt at tænke på følger, hvor distancen mellem alle påfølgende elementer er konstant, så følgerne er på formen $(x_n) = (n/N)$, hvor $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Hvis vi i stedet vender blikket mod uendelige følger, da er det naturligt at tænke på, at en uniformt fordelt følge på I kunne ligne den uniforme fordeling fra statistik når $n \to \infty$. Her er det naturligt se på følger, som består af tilfæligt genererede tal i I. Hvis vi i stedet ser på deterministiske følger, kan vi igen se på følger af typen $(n\alpha)$ for et vilkårligt reelt tal α. Vi ser, at når $\alpha = p/q$, hvor $p, q \in \mathbb{N}$, da vil $\{k\alpha\} = \{(q+k)\alpha\}$ for $k = 0, 1, \ldots$. Det vil sige, at følgen $(\{n\alpha\})$ består af ækvidistante punkter i $[0, 1)$, men den tager kun q forskellige værdier. Hvis α i stedet er irrational, da vil alle værdier af $\{n\alpha\}$ være forskellige og ikke ækvidistante, så I stort set bliver tildækket af punkter i $(\{n\alpha\})$ når $n \to \infty$. Når vi ser på $(n\alpha)$ mod 1, afhænger opførslen af følgen altså i stor grad af, om α er rational eller irrational. Desuden må vi have os en definition, som kan afgøre, om så forskellige følger begge kan være uniformt fordelt mod 1 (u.d. mod 1).

Definitionen af en følge, som er u.d. mod 1 blev udviklet af Hermann Weyl i 1916 [5, s. vii]. Lad $A([a, b); N; (x_n))$ være antal punkter $(\{x_n\})$, som ligger i $[a, b) \subseteq I$, når $1 \leq n \leq N$. Da definerer vi, at (x_n) er u.d. mod 1, hvis der for alle $[a, b) \subseteq I$ gælder, at

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A([a, b); N; (x_n))}{N} = b - a.$$

Det vil sige, at andelen af elementerne i følgen, som ligger i $[a, b)$ asymptotisk må tilsvare andelen af I, som $[a, b)$ udgør. Lidt upræcist kan man sige, at elementerne i en uendelig følge må næsten tildække intervallet I, hvilket tilsvarer den kendte uniforme fordeling fra statistik. Med Weyls definition er det klart, at $(n\alpha)$ ikke er u.d. mod 1, når α er rational. Vi ser nemlig, at et meget lille interval, som indeholder et af de q punkter, hvor $(\{n\alpha\})$ tager værdier, vil indeholde mange elementer fra denne følge, mens et langt større interval mellem sådanne to punkter ikke vil indeholde nogle elementer af følgen. I stedet peger Weyls definition af u.d. mod 1 i retning af, at $(n\alpha)$ er u.d. mod 1, når α er irrational. Dette vil blive vist senere i opgaven.

Weyl stod dog ikke kun bag definitionen af u.d. mod 1. Han viste også et meget brugbart kriterium, som er tilstrækkeligt og nødvendigt for at kunne afgøre, om en følge er u.d. mod 1. Weyls kriterium fortæller, at (x_n) er u.d. mod 1 hvis og kun hvis

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0$$

for alle heltal $h \neq 0$.

Et naturligt spørgsmål, som følger efter at have afgjort, om en følge er u.d. mod 1, er "hvor godt" eller "graden af" uniform fordeling, som denne følge har. Dette giver ophav til definitionen af diskrepans, som kan forstås som afvigelsen fra den ideelle uniforme fordeling, når man ser på de første N elementer af (x_n). Diskrepansen D_N

bliver derfor defineret som

$$D_N((x_n)) = \sup_{[a,b)\subseteq I} \left| \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} - (b-a) \right|.$$

Hvis vi vender tilbage til følgen $(n\alpha)$, så kan man overveje, hvilke irrationale α, som giver den laveste diskrepans. Her viser det sig, at det er de irrationale α, som dårligst kan tilnærmes af rationale tal ved diofantisk tilnærmelse, der giver den laveste diskrepans til $(n\alpha)$.

Denne oppgave vil introducere os til teorien knyttet til uniformt fordelte følger mod 1. Først vil uniform fordeling mod 1 defineres, og derefter vil fokus være på sætninger, som kan bruges til at afgøre, om en given følge er u.d. mod 1. Den mest centrale sætning her er Weyls kriterium. Vi skal så se på flere eksempler på følger, som er u.d. mod 1. Her vil $(n\alpha), n = 1, 2, \ldots$, hvor α er irrational, og delfølger af denne være et tilbagevendende eksempel.

Det næste kapitel vil have som mål at kvantificere graden af eventuel uniform fordeling for følger. Her prøver vi at finde en nedre grænse for diskrepansen, og vi vil derefter se på eksempler på følger, som har en diskrepans, der er meget tæt på denne nedre grænse. Vi ser specifikt på to følger, nemlig $(n\alpha)$ og Van der Corputfølgen.

Resultaterne her fra opgaven kan fint udvides til $\mathbb{R}^n$, hvor decimaldelen af punkter i stedet vil ligge i $[0, 1]^n$. Beviserne i flere dimensioner vil ofte følge samme ideer som her, men notationen og de tekniske udregninger vil være mer komplicerede, så derfor har vi valgt at nøjes med en dimension.

2 Uniformt fordelte følger modulo 1

Når vi arbejder med uniformt fordelte følger modulo 1 (forkortes u.d. mod 1), så ser vi på fordelingen af decimaldelen af elementerne i en følge (x_n) bestående af reelle tal. Decimaldelen til et reelt tal skrives som $\{x\} = x - [x]$, hvor $[x]$ er lig det største heltal, som er mindre end eller lig x. Hvis en følge (x_n) skal være u.d. mod 1, må ethvert interval $[a, b)$ i enhedsintervallet $I = [0, 1)$ indeholde andelen af elementerne i følgen $(\{x_n\})$, som asymptotisk tilsvarer længden af intervallet $[a, b)$. Dette giver følgende definition.

Definition 2.1. Lad $\omega = (x_n), n = 1, 2, \dots$ være en følge bestående af reelle tal. For $N \in \mathbb{N}$ og $E \subseteq [0, 1)$ definerer vi tællefunktionen A således at $A(E; N; \omega)$ er lig antal elementer i (x_n), hvor $1 \leq n \leq N$ og $\{x_n\} \in E$. Følgen ω er da u.d. mod 1 , hvis der for alle par af reelle tal a, b, som opfylder $0 \leq a < b \leq 1$, gælder at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} = b - a. \tag{2.1}$$

Vi ser at tællesunktionen A er tæt knyttet til indikatorfunktionen på $E \subseteq \mathbb{R}$, som er funktionen $\mathbb{1}_E : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, hvor

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in E. \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ligning (2.1) kan da skrives på andre former, som kan være nyttige til at afgøre, om en følge er u.d. mod 1.

Lemma 2.2. *Lad $(x_n), n = 1, 2, \dots$ være en følge bestående af reelle tal og $E = [a, b) \subseteq I$ være et interval med indikatorfunktionen $\mathbb{1}_E$. Følgen (x_n) er u.d. mod 1 hvis og kun hvis*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_E(\{x_n\}) = \int_0^1 \mathbb{1}_E(x)\, \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Bevis. Det gælder at $\mathbb{1}_E(x) = 1$ for alle $\{x_n\} \in E$. Dette medfører, at

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_E(\{x_n\}) = A(E; N; (x_n)). \tag{2.3}$$

Desuden er

$$\int_0^1 \mathbb{1}_E(x)\, \mathrm{d}x = b - a.$$

Derfor er (2.2) ækvivalent med (2.1). □

Kontinuerte funktioner kan tilnærmes med trappefunktioner, som er linære kombinationer af indikatorfunktioner. Dermed kan kontinuerte funktioner bruges til at afgøre om en følge er u.d. mod 1 som i Lemma 2.2.

Sætning 2.3. *En følge $(x_n), n = 1, 2, \dots$ bestående af reelle tal er u.d. mod 1 hvis og kun hvis for enhver kontinuert funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gælder at*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Bevis. Antag (x_n) er u.d. mod 1 og inddel intervallet $[0,1]$ i delintervallerne $[a_i, a_{i+1}]$, hvor $i = 0, 1, \dots, k-1$, så $a_0 = 0$ og $a_k = 1$. Betragt funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ hvor $f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1})}(x)$, $d_i \in \mathbb{R}$ for $i = 0, 1, \dots, k-1$. Da vil (2.2) give at

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{k-1} d_i \mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1})}(\{x_n\}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} d_i \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1})}(\{x_n\}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} d_i \int_0^1 \mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1})}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{i=0}^{k-1} d_i \mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Det vil sige, at (2.4) holder for trappefunktioner. Nu vil vi vise at (2.4) holder for alle kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Da alle kontinuerte funktioner defineret på et lukket interval er Riemann-integrable, vil der for alle $\varepsilon > 0$ findes en inddeling af intervallet $[0,1]$ så differencen mellem oversummen $O(x)$ og undersummen $U(x)$ hørende til funktionen f vil være mindre end ε. Det giver at

$$\int_0^1 (O(x) - U(x))\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Da over- og undersummer opfylder at $U(x) \leq f(x) \leq O(x)$ for alle $x \in [0,1]$ vil

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_0^1 O(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (O(x) - U(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 U(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Tilsvarende er

$$\int_0^1 O(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon. \tag{2.6}$$

Da over- og undersummer netop er på formen $\sum_{i=0}^{k-1} d_i \mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1})}(x)$, vil (2.4) gælde for U og O, så

$$\int_0^1 U(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U(\{x_n\}), \tag{2.7}$$

og

$$\int_0^1 O(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} O(\{x_n\}). \tag{2.8}$$

Desuden er

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U(\{x_n\}) &\leq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \\ &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} O(\{x_n\}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Hvis man sammensætter (2.5) - (2.9), da vil man opnå

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \leq \int_0^1 f(x)\,dx - \varepsilon,$$

og dermed at (2.4) gælder for en vilkårlig kontinuert funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Nu vil vi vise den modsatte implikation. Betragt følgen $(x_n), n = 1, 2, \ldots$ bestående af reelle tal, og antag (2.4) gælder for alle kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Lad $[a,b) \subseteq [0,1]$. Da vil for alle $\varepsilon > 0$ eksistere to kontinuerte funktioner $U, O : [0,1] \to \mathbb{R}$ således $U(x) \leq \mathbb{1}_{[a,b)}(x) \leq O(x)$ for alle $x \in [0,1]$, samt $\int_0^1 (O(x) - U(x))\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$. Dette implicerer

$$b - a - \varepsilon = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b)}(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_0^1 O(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_0^1 U(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.10}$$

Tilsvarende fås at

$$\int_0^1 O(x) \leq b - a + \varepsilon. \tag{2.11}$$

Da vi antog, at (2.4) gælder for alle reelle, kontinuerte funktioner på $[0,1]$, og dermed også for U og O, vil

$$\int_0^1 U(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U(\{x_n\}) \tag{2.12}$$

og

$$\int_0^1 O(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} O(\{x_n\}) \tag{2.13}$$

At $U(x) \leq \mathbb{1}_{[a,b)}(x) \leq O(x)$ for alle $x \in [a,b)$ og (2.3) gælder, giver at

$$\sum_{n=1}^{N} U(\{x_n\}) \leq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a,b)}(\{x_n\}) = A([a,b);N;(x_n)) \leq \sum_{n=1}^{N} O(\{x_n\}). \tag{2.14}$$

Kombineres (2.10) - (2.14), får vi at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} = b-a.$$

og dermed at (x_n) er u.d. mod 1. $\square$

Da 1-periodiske, komplekse, kontinuerte funktioner kan tilnærmes med reelle, kontinuerte funktioner, kan disse også bruges til at afgøre, om en følge er u.d. mod 1.

Korollar 2.4. *Følgen (x_n) er u.d. mod 1 hvis og kun hvis for alle 1-periodiske kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gælder at*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

2.1 Weyls kriterium

Korollar 2.4 kan forenkles, så det ikke er nødvendigt at tjekke om alle 1-periodiske, kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ opfylder (2.15) for at kunne afgøre om en følge er u.d. mod 1. Funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ på formen $f(x) = e^{2\pi i h x}, h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ opfylder nemlig både at være kontinuerte og 1-periodiske, og det viser sig at benyttelsen af disse funktioner i (2.15) er tilstrækkelig til at kunne vise om en følge er u.d. mod 1. Det hænger sammen med at $\{e^{2\pi i h x} | h \in \mathbb{Z}\}$ er en basis for $L^2([0,1])$ og samles i en sætning kaldet Weyls kriterium.

Sætning 2.5 (Weyls kriterium)**.** *Følgen $(x_n), n = 1,2,\ldots$ bestående af reelle tal er u.d. mod 1 hvis og kun hvis*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \tag{2.16}$$

for alle heltal $h \neq 0$.

Bevis. Lad $(x_n), n = 1,2,\ldots$ være en følge bestående af reelle tal, som er u.d. mod 1. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, hvor $f(x) = e^{2\pi i h x}, h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ er både kontinuert og 1-periodisk, giver Korollar 2.4 at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = \int_0^1 e^{2\pi i h x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi i h}(e^{2\pi i h} - 1) = 0. \tag{2.17}$$

Antag nu, at (x_n) opfylder (2.16) for alle heltal $h \neq 0$. Lad $\varepsilon > 0$ og $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være kontinuert og 1-periodisk. Weierstrass' approksimationssætning [3, s. 202] giver da at der eksisterer et trigonometrisk polynomium P så

$$\|f - P\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{2.18}$$

Da er

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(x_n) \right| &= \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N P(x_n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N P(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(x_n) \right| \\
&\le \left| \int_0^1 f(x) - P(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N P(x_n) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N (P(x_n) - f(x_n)) \right|.
\end{aligned}$$

Ligning (2.18) medfører at det første og tredje led over vil være mindre end ε. Da P er en lineær kombination af trigonometriske polynomier vil $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$ som i (2.17). Grænseværdien i (2.16) medfører, at når N er tilstrækkelig stor, da vil

$$\left| \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N P(x_n) \right| = \left| 0 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N P(x_n) \right| < \varepsilon.$$

Dermed vil man for N tilstrækkelig stor opnå, at

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(x_n) \right| < 3\varepsilon,$$

så fra Korollar 2.4 kan vi kan konkludere (x_n) er u.d. mod 1. □

Vi vil nu se nogle eksempler på, at Weyls kriterium kan bruges til både at vise en følge er u.d. mod 1, samt at en følge ikke er u.d. mod 1.

Eksempel 2.6. Vi vil nu se på følgen $(n\alpha), n = 1, 2, \ldots$, hvor α er irrational. Da $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i h n\alpha}$ er en geometrisk sum, vil

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2\pi i h n\alpha} \right| = \frac{\left|e^{2\pi i h N\alpha} - 1\right|}{N\left|e^{2\pi i h\alpha} - 1\right|}.$$

Da $\left|e^{2\pi i h N\alpha}\right| \le 1$, vil $\left|e^{2\pi i h N\alpha} - 1\right| \le 2$. Desuden er

$$\left|e^{2\pi i h\alpha} - 1\right| = \sqrt{-2\cos 2\pi h\alpha + 2} = 2\left|\sin \pi h\theta\right|.$$

Dette medfører, at

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi h n \alpha} \right| \leq \frac{1}{N\,|\sin \pi h \alpha|} \to 0$$

for $N \to \infty$. Fra Weyls kriterium får vi, at følgen $(n\alpha)$ er u.d. mod 1.

Eksempel 2.7. Vi vil nu se nærmere på om følgen $(\log n), n = 1, 2, \ldots$ er u.d. mod 1. Lad $F : [1, N] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert og differentiabel funktion, hvor $N \in \mathbb{N}$. Eulers summationsformel [6, s. 10] giver, at

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F(n) = \frac{1}{N} \int_1^N F(x)\,\mathrm{d}x + \frac{F(1) + F(N)}{2N} + \frac{1}{N} \int_1^N \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) F'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

Lad $F(x) = e^{2\pi i \log x}$ i (2.19). Det ses, at det andet led på højresiden går mod 0 for $N \to \infty$. Det tredje led på højresiden opfylder, at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \left| \int_1^N \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi i e^{2\pi i \log x}}{x}\,\mathrm{d}x \right| &\leq \frac{1}{N} \int_1^N \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \frac{|2\pi i| \left| e^{2\pi i \log x} \right|}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{N} \int_1^N \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \frac{2\pi}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{N} \int_1^N \frac{\pi}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \frac{\log N}{N}.
\end{aligned}$$

Dermed vil det tredje led på højresiden af (2.19) gå mod 0 for $N \to \infty$. Det første led på højresiden af (2.19) er lig

$$\frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i \log x}\,\mathrm{d}x = \frac{N e^{2\pi i \log N} - 1}{N(2\pi i + 1)}.$$

Det vil sige, at

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i \log x}\,\mathrm{d}x = \lim_{N \to \infty} \frac{e^{2\pi i \log N}}{2\pi i + 1}.$$

Denne grænseværdi er ikke lig 0. Hvis den skal være lig 0, må

$$\lim_{N \to \infty} e^{2\pi i \log N} = 0. \tag{2.20}$$

Dette medfører, at $\log N$ må nærme sig heltalsværdier, når N er stor. Dette kan ske ved at alle værdier af $\log N$ samler sig om et bestemt heltal, når N er stor, men dette er ikke muligt, da $\log N \to \infty$ for $N \to \infty$. Derfor må værdierne til $\log N$ i stedet nærme sig heltalsværdier ved at nærme sig et heltal og så "hoppe" videre til at nærme sig et større heltal igen og igen. Dette er dog heller ikke muligt, da $(\log N)' = 1/N$, så afstanden mellem værdierne af $\log N$ vil blive vilkårlig lille. Dette resulterer i, at værdierne $\log N$ ikke kun kan samle sig om heltal, men i stedet vil ligge vilkårligt tæt mellem heltallene. Derfor kan (2.20) umuligt være opfyldt. Da summen af de to andre led på højresiden af (2.19) konvergerer mod 0, vil

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = \lim_{N\to\infty} \frac{e^{2\pi i \log N}}{2\pi i + 1}$$

ikke være lig 0 for $h = 1$, og Weyls kriterium giver da at (x_n) ikke er u.d. mod 1.

Der findes mange andre familier af følger, hvor Weyls kriterium kan bruges til at vise, at om er u.d. mod 1. Sætningen under er en konsekvens af Weyls kriterium, som ofte kan være nyttig i praksis.

Sætning 2.8 (Fejérs sætning)**.** *Lad* $(f(n)), n = 1, 2, \ldots$ *være en følge bestående af reelle tal, hvor* $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ *er monoton. Antag desuden, at*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta f(n) = 0 \tag{2.21}$$

og

$$\lim_{n\to\infty} n\,|f(n)| = \infty. \tag{2.22}$$

Da er $(f(n))$ *u.d. mod 1.*

Bevis. Først vises en ulighed, som vil blive taget i brug senere i beviset.

Lad $u, v \in \mathbb{R}$. Da vil

$$\begin{aligned}
\left|e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} - 2\pi i(u-v)e^{2\pi i v}\right| &= \left|e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u-v)\right| \\
&= 4\pi^2 \left|\int_0^{u-v} (u-v-x)\, e^{2\pi i x}\, \mathrm{d}x\right| \\
&\le 4\pi^2 \left|\int_0^{u-v} (u-v-x)\, \mathrm{d}x\right| \\
&= 2\pi^2 (u-v)^2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

For $u = hf(n+1)$ og $v = hf(n)$, $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, vil (2.23) medføre at

$$\left|\frac{e^{2\pi i h f(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi i h f(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi i h e^{2\pi i h f(n)}\right| \le 2\pi^2 h^2 \left|\Delta f(n)\right|.$$

Da følger det, at

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}\right| \\
&= \left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} + \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}\right| \\
&\leq \left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ihe^{2\pi ihf(n)}\right| \\
&+ \left|\frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n)}\right| \\
&\leq 2\pi^2h^2\left|\Delta f(n)\right| + \left|e^{2\pi ihf(n+1)}\right|\left|\frac{1}{\Delta f(n+1)} - \frac{1}{\Delta f(n)}\right| \\
&= 2\pi^2h^2\left|\Delta f(n)\right| + \left|\frac{1}{\Delta f(n+1)} - \frac{1}{\Delta f(n)}\right|. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Målet er at bruge Weyls kriterium til at vise at $(f(n))$ er u.d. mod 1, så vi ser på

$$\begin{aligned}
&\left|2\pi ih\sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi ihf(n)}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N-1}\left(2\pi ihe^{2\pi ihf(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}\right) + \frac{e^{2\pi ihf(N)}}{\Delta f(N)} - \frac{e^{2\pi ihf(1)}}{\Delta f(1)}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}\left|2\pi ihe^{2\pi ihf(n)} - \frac{e^{2\pi ihf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ihf(n)}}{\Delta f(n)}\right| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}\left|\frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)}\right| + 2\pi^2h^2\sum_{n=1}^{N-1}|\Delta f(n)| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|}. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Dette fulgte fra trekantuligheden og efterfølgende (2.24). Da Δf er monoton, vil Δf være enten voksende eller aftagende. Hvis Δf er voksende vil

$$\frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \leq 0$$

for $n = 1, 2, \ldots, N-1$, og

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left|\frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{\Delta f(n+1)} - \frac{1}{\Delta f(n)}\right) = \frac{1}{\Delta f(N)} - \frac{1}{\Delta f(1)}.$$

Fra (2.25) får vi, at

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i h f(n)}\right| &\le \frac{1}{2\pi|h|}\left(\frac{1}{N\Delta f(N)} - \frac{1}{N\Delta f(1)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi|h|}\left(\frac{1}{N\,|\Delta f(N)|} + \frac{1}{N\,|\Delta f(1)|}\right) + \frac{\pi|h|}{N}\sum_{n=1}^{N-1}|\Delta f(n)| \\ &\le \frac{1}{\pi|h|}\left(\frac{1}{N\,|\Delta f(N)|} + \frac{1}{N\,|\Delta f(1)|}\right) + \frac{\pi|h|}{N}\sum_{n=1}^{N-1}|\Delta f(n)|\,.\end{aligned}$$

Med tilsvarende argumenter kan overstående ulighed vises, hvis Δf er aftagende. Ved brug af grænseværdierne i (2.21) og (2.22), kan vi da konkludere, at

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h f(n)} = 0.$$

Weyls kriterium giver da, at $(f(n))$ er u.d. mod 1. $\square$

Korollar 2.9. *Lad $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ være en funktion, som er differentiabel når $x \ge x_0$ for en given $x_0 \in [1,\infty)$. Hvis $f'(x) \to 0$ for $x \to \infty \in [1,\infty)$ monotont, og $x\,|f'(x)| \to \infty$ for $x \to \infty$, da vil følgen $(f(n)), n = 1, 2, \ldots$ være u.d. mod 1.*

Bevis. Mellemværdisætningen giver, at for $n \ge x_0$ eksisterer $c \in (n, n+1)$, så

$$f'(c) = f(n+1) - f(n).$$

Derfor opfylder $f(n+1) - f(n)$ betingelserne for at kunne bruge Fejérs sætning (Sætning 2.8) for $n \ge x_0$. Det endelige antal n som er mindre end x_0 har ingen indflydelse på om følgen $(f(n))$ er u.d. mod 1, da dette er defineret ved en grænseværdi. Derfor kan vi konkludere, at $(f(n))$ er u.d. mod 1. $\square$

Fejérs sætning (Sætning 2.8), og ikke mindst Korollar 2.9, gør det lettere at bestemme om nogle klasser af følger er u.d. mod 1.

Eksempel 2.10. Disse klasser af følger er u.d. mod 1:

i) $(an^k \log^t n), n = 2, 3, \ldots$, hvor $a \neq 0$, $0 < k < 1$ og t er vilkårlig.

ii) $(a \log^t n), n = 1, 2, \ldots$, hvor $a \neq 0$ og $t > 1$.

iii) $(an \log^t n), n = 2, 3, \ldots$, hvor $a \neq 0$ og $t < 0$.

Beviserne for alle tre tilfælde over er næsten ens, så derfor viser vi kun det første tilfælde i detaljer. For enkelthedens skyld gøres det med konkrete værdier for $a = 1, k = 1/2$ og $t = 2$. Lad $f(x) = x^{1/2}\log^2 x$, som er differentiabel på $(0,\infty)$ med

$$f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}\frac{\log^2 x}{2} + 2x^{-\frac{1}{2}}\log x.$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^p x}{x^q} = 0$$

for alle positive reelle tal p og q, vil $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Fra grænseværdien over ved vi, at der findes $x_0 \in (0,\infty)$ således, at f' er monoton for $x \geq x_0$. Vi ser at

$$xf'(x) = x^{\frac{1}{2}} \log x \left(\frac{1}{2}\log x + 2\right)$$

er voksende på hele $(1,\infty)$, samt ikke-begrænset. Derfor vil $\lim_{x\to\infty} x\,|f'(x)| = \infty$. Korollar 2.9 giver da, at $(n^{1/2}\log^2 n)$ er u.d. mod 1.

2.2 Et metrisk resultat

I Eksempel 2.6 viste vi, at følgen $(n\alpha), n = 1,2,\ldots$ er u.d. mod 1, når α er irrational. Vi vil nu se på delfølger af denne følge, hvor α ikke nødvendigvis må ganges med ethvert naturligt tal, men i stedet bliver ganget med forskellige heltal. Disse heltal kan betragtes som elementer i en følge (a_n), hvor $n = 1,2,\ldots$. Hvis vi udvælger en bestemt følge af denne slags, vil $(a_n\alpha)$ ikke nødvendigvis være u.d. mod 1 for alle irrationale α, men i stedet næsten alle irrationale α og dermed næsten alle reelle α. Det viser sig, at blandt andet kædebrøksrepræsentationen til α har betydning for, om for en given heltalsfølge (a_n) vil $(a_n\alpha)$ være u.d. mod 1. Derfor gives en kort introduktion til kædebrøker.

En kædebrøk er en brøk på formen

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}$$

hvor $a_0 \in \mathbb{Z}$ og $a_i \in \mathbb{N}$ for $i = 1,2,\ldots$. Det gælder, at alle reelle tal er lig en kædebrøk, hvor rationale tal er lig en endelig kædebrøk og irrationale tal er lig en uendelig, entydig kædebrøk. For et irrationalt tal α, som er lig kædebrøken med positive heltal $a_0, a_1, \ldots$ skriver man, at

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots].$$

Den bedste rationale tilnærmelse til α er givet ved brøken

$$p_n/q_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \tag{2.26}$$

med $n \geq 0$, som opfylder, at

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

for alle $q \leq q_n$. De ikke-negative tal p_n og $q_n \neq 0$, genereres med algoritmen

$$\begin{aligned} p_{-2} &= 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_{-2} &= 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

hvor $i = 0, 1, \ldots$. Da vil $\gcd(p_i, q_i) = 1$, og $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \ldots$. Den bedste rationale tilnærmelse p_n/q_n vil også opfylde, at [5, s. 122]

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}. \tag{2.27}$$

Vi vil nu se et eksempel på hvorfor et irrationalt tals repræsentation som kædebrøk kan have afgørende betydning for hvorvidt $(a_n\alpha)$ er u.d. mod 1 for en given heltalsfølge (a_n).

Eksempel 2.11. Lad $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ være et irrationalt tal med bedste rationale tilnærmelser $p_n/q_n, n = 0, 1, 2, \ldots,$ som i (2.26). Vi definerer nu heltalsfølgen $(q_n), n = 1, 2, \ldots$. Da vil $(q_n\alpha)$ ikke være u.d. mod 1. Det ser vi, da vi fra (2.27) får, at for alle $n = 1, 2, \ldots$ er

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n}.$$

Dermed må $\{q_n\alpha\} < 1/q_n$, så

$$\lim_{n\to\infty} \{q_n\alpha\} = 0,$$

hvilket gør, at $(q_n\alpha)$ umuligt kan være u.d. mod 1.

I ovenstående eksempel har vi skræddersyet vores valg af q_n ud fra α således at følgen $(q_n\alpha)$ ikke er u.d. mod 1. Hvis man i stedet begynder med en vilkårlig heltalsfølge, så viser det sig dog, at det er få α, som gør at følgen $(a_n\alpha)$ ikke er u.d. mod 1.

Sætning 2.12. *Lad $(a_n), n = 1, 2, \ldots$ være en følge bestående af distinkte heltal. Da er følgen $(a_nx), n = 1, 2, \ldots$ u.d. mod 1 for næsten alle $x \in \mathbb{R}$.*

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise, at (a_nx) er u.d. mod 1 for næsten alle $x \in [0, 1)$. Det skyldes, at hvis $y \in [k, k+1)$, hvor $k \in \mathbb{Z}$, da vil $\{a_ny\} = \{a_n(k+x)\} = \{a_nx\}$, da a_n er et heltal. Hvis (a_nx) er u.d. mod 1 for næsten alle $x \in [0, 1]$, vil mængden B bestående af $x \in [0, 1)$, hvor (a_nx) ikke er u.d. mod 1, opfylde at $\lambda(B) = 0$. Da Lebesguemålet er translationsinvariant vil $B+k$, som er lig mængden af $y \in [k, k+1)$, hvor (a_ny) ikke er u.d. mod 1, have Lesbesguemål 0. Mængden bestående af reelle tal z, hvor (a_nz) ikke er u.d. mod 1 er lig

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (B + k)\,,$$

som har Lebesguemål 0, så sætningen over gælder for næsten alle $z \in \mathbb{R}$. Dermed kan sætningen vises ved kun at betragte x i intervallet $[0, 1)$.

Vi vil nu anvende Weyls kriterium. Fikser $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Vi definerer funktionen

$$S(N, x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h a_n x}$$

hvor $N \in \mathbb{N}$ og $x \in [0, 1)$. Læg mærke til at S afhænger af h. Det gælder, at

$$|S(N, x)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i h a_m x} \sum_{n=1}^{N} \overline{e^{2\pi i h a_n x}} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h (a_m - a_n) x}.$$

Da $\int_0^1 e^{2\pi i h (a_m - a_n) x} \, \mathrm{d}x = 0$ når $m \neq n$, og ellers lig 1, vil

$$\int_0^1 |S(N, x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N} 1 = \frac{1}{N}.$$

Dette implicerer

$$\sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 \left|S(N^2, x)\right|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

Vi definerer nu funktionerne $f_k : [0, 1) \to [0, \infty)$, hvor $f_k(x) = \sum_{N=1}^{k} \left|S(N^2, x)\right|^2$, som opfylder $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Da

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \sum_{N=1}^{\infty} \left|S(N^2, x)\right|^2,$$

giver Lebesgues monoton konvergenssætning [1, s. 78], at

$$\int_0^1 \sum_{N=1}^{\infty} \left|S(N^2, x)\right|^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_0^1 f_k(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{N=1}^{k} \int_0^1 \left|S(N^2, x)\right|^2 \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Dermed er

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left|S(N^2, x)\right|^2 < \infty$$

for næsten alle $x \in [0, 1)$, så

$$\lim_{N \to \infty} S(N^2, x) = 0$$

for næsten alle $x \in [0, 1)$.

For ethvert $N \geq 1$ eksisterer $m \in \mathbb{N}$, så $m^2 \leq N < (m+1)^2$. Derfor gælder, at

$$\begin{aligned}
|S(N,x)| &\leq \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h a_n x}\right| + \frac{1}{N}\left|\sum_{n=m^2+1}^{N} e^{2\pi i h a_n x}\right| \\
&\leq \frac{1}{m^2}\left|\sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h a_n x}\right| + \frac{1}{N}\sum_{n=m^2+1}^{(m+1)^2} \left|e^{2\pi i h a_n x}\right| \\
&\leq \left|S(m^2,x)\right| + \frac{2m}{N} \\
&\leq \left|S(m^2,x)\right| + \frac{2}{\sqrt{N}}.
\end{aligned}$$

Det følger da, at $\lim_{N\to\infty} |S(N,x)| = 0$ for næsten alle $x \in [0,1]$. Det vil sige, at der for ethvert $h \neq 0$ eksisterer en mængde B_h med $\lambda(B_h) = 0$ bestående af alle $x \in [0,1)$, hvor $\lim_{N\to\infty} |S(N,x)|$ er forskellig fra 0 eller ikke eksisterer. Da vil

$$\bigcup_{h\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} B_h$$

også have Lebesguemål 0, og fra Weyls kriterium kan vi dermed konkludere, at $(a_n x)$ er u.d. mod 1 for næsten alle $x \in [0,1)$. $\square$

3 Diskrepans

Indtil nu har fokus været på at få værktøjerne til at kunne afgøre, om en følge er u.d. mod 1 eller ej. To følger, som er u.d. mod 1 kan, dog godt have forskellige størrelser på afvigelsen fra den ideelle uniforme fordeling. Det skyldes, at kravet til at opnå u.d. mod 1 kun er at antall punkter i et interval må vokse proportionelt med længden af intervallet ganget med antal punkter i følgen, når antal punkter i følgen øges. Konceptet diskrepans indføres derfor som et mål på en følges afvigelse fra den ideelle uniforme fordeling. Dette kan hjælpe med at kunne afgøre hvilke følger, som er særligt tæt på den ideelle uniforme fordeling.

Definition 3.1. Lad $\omega = (x_n), n = 1, 2, \ldots$ være en følge bestående af reelle tal. Diskrepansen til de første N led af denne følge, D_N defineres som

$$D_N(\omega) = \sup_{0 \le a < b \le 1} \left| \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} - (b - a) \right|$$

hvor A er tællefunktionen fra Definition 2.1. Ofte skrives kun D_N når konteksten gør det åbenlyst, hvilken følge der er tale om.

Denne definition viser tydeligt, at der er en klar sammenhæng mellem diskrepansens størrelse og om en følge er u.d. mod 1.

Sætning 3.2. *Følgen $\omega = (x_n), n = 1, 2, \ldots$ bestående af reelle tal er u.d. mod 1 hvis og kun hvis*

$$\lim_{N \to \infty} D_N(\omega) = 0.$$

Bevis. Antag (3.2) gælder. Da vil for alle $\varepsilon > 0$ eksistere $M > 0$, således at for $N > M$ vil

$$\sup_{0 \le a < b \le 1} \left| \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} - (b - a) \right| < \varepsilon.$$

Da

$$\left| \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} - (b - a) \right| \le \sup_{0 \le a < b \le 1} \left| \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} - (b - a) \right| < \varepsilon$$

for alle $[a, b) \subseteq [0, 1]$. Vi får da, at

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A([a, b); N; \omega)}{N} = b - a$$

for alle $a, b \in [0, 1]$, hvor $a < b$. Dermed er ω u.d. mod 1.

Antag nu, at ω er u.d. mod 1. Vi deler nu intervallet $I = [0, 1]$ op i $m \ge 2$ delintervaller, I_k, $0 \le k \le m - 1$, hvor

$$I_k = \left[\frac{k}{m}, \frac{k + 1}{m} \right).$$

Da vil $\lambda(I_k) = 1/m$. Siden ω er u.d. mod 1 vil der for alle $\varepsilon > 0$ eksistere $M(m) > 0$ så for $N > M$ vil

$$\left| \frac{A(I_k; N; \omega)}{N} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon.$$

Ved at vælge $\varepsilon = 1/m^2$ får vi uligheden

$$\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right) < \frac{A(I_k;N;\omega)}{N} < \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right). \tag{3.1}$$

Lad $J = [a,b) \subseteq I$. Da findes to intervaller J_1 og J_2, som begge er endelige unioner af nogle av intervallerne I_k, så $J_1 \subseteq J \subseteq J_2$. Intervallerne J_1 og J_2 kan vælges således, at de også opfylder, at

$$\lambda(J) - \lambda(J_1) < \frac{2}{m} \quad \text{og} \quad \lambda(J_2) - \lambda(J) < \frac{2}{m}. \tag{3.2}$$

Ved brug af samme argumentation som for (3.1) og det faktum, at alle x_n i ω som ligger i J_2 også vil ligge i J og J_1, fås at

$$\lambda(J_1)\left(1-\frac{1}{m}\right) \le \frac{A(J_1;N;\omega)}{N} \le \frac{A(J;N;\omega)}{N} \le \frac{A(J_2;N;\omega)}{N} \le \lambda(J_2)\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Fra (3.2) får vi, at

$$\left(\lambda(J)-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right) < \frac{A(J;N;\omega)}{N} < \left(\lambda(J)+\frac{2}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Da $\lambda(J) \le 1$ vil

$$-\frac{3}{m} - \frac{2}{m^2} < \frac{A(J;N;\omega)}{N} - \lambda(J) < \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}$$

for alle $N > M$. Da J blev valgt vilkårligt, vil

$$D_N(\omega) = \sup_{0\le a<b\le 1}\left|\frac{A([a,b);N;\omega)}{N} - (b-a)\right| < \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}$$

for alle $N > M$. Dog kan $3/m + 2/m^2$ blive valgt vilkårlig lille, så derfor vil

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega) = 0.$$

□

Allerede fra definitionen af diskrepans følger de første begrænsninger på størrelsen af denne. Disse begrænsninger for diskrepansen kan forbedres væsenligt, hvilket vil blive vist senere i dette kapitel.

Sætning 3.3. *For enhver følge $(x_n), n = 1, 2, \ldots$ bestående af reelle tal, er*

$$\frac{1}{N} \le D_N \le 1.$$

Bevis. Lad $J = [a, b) \subseteq I = [0, 1]$. Ud af N punkter vil højest N af dem være i J, så

$$A(J; N) \leq N.$$

Desuden er $\lambda(J) = b - a > 0$, så derfor vil

$$D_N \leq \frac{N}{N} - 0 = 1.$$

Nu vil vi vise den anden ulighed. Lad $\varepsilon > 0$ og x være decimaldelen til et af de første N elementer i følgen (x_n). Betragt intervallet $K = [x, x + \varepsilon) \cap I$. Da $x \in K$, vil

$$D_N \geq \frac{A(K, N)}{N} - \varepsilon \geq \frac{1}{N} - \varepsilon.$$

Da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$ vil

$$\frac{1}{N} \leq D_N \leq 1.$$

□

Et eksempel på følger, hvor $D_N = 1/N$, er endelige følger, hvor elementerne er ækvidistant fordelt over $[0, 1)$.

Eksempel 3.4. Følgen $(x_n) = ((n-1)/N), n = 1, 2, \ldots, N$, uanset rækkefølge på elementerne, opfylder, at $D_N = 1/N$. For at se dette, betragt intervallet $J = [a, b) \subseteq I = [0, 1)$. Da findes et unikt heltal k, hvor $0 \leq k \leq N - 1$, som opfylder, at $k/N < \lambda(J) \leq (k+1)/N$. Da vil J indeholde mindst k og maksimalt $k+1$ elementer af (x_n). Da vil

$$D_N = \sup_{J \subseteq I} |A(J; N) - \lambda(J)| \leq \left| \frac{k+1}{N} - \frac{k}{N} \right| = \frac{1}{N}.$$

Kombineres dette med Sætning 3.3, fås at $D_N = 1/N$.

Det viser sig, at man faktisk kan nøjes med at betragte intervaller på formen $[0, a) \subseteq I = [0, 1]$ i stedet for alle intervaller $[a, b) \subseteq I$, når man skal estimere diskrepansen til en følge. Det skyldes, at diskrepansen til en følge kan begrænses både ovenfra og nedenfra af det som kaldes stjernediskrepansen, hvor man kun forholder sig til intervaller $[0, a) \subseteq I$.

Definition 3.5. Lad $\omega = (x_n), n = 1, 2, \ldots$ være en følge bestående af reelle tal. Stjernediskrepansen til de første N led af denne følge, D_N^*, defineres som

$$D_N^*(\omega) = \sup_{0 < a \leq 1} \left| \frac{A([0, a); N; \omega)}{N} - a \right|$$

Sætning 3.6. *For diskrepans og stjernediskrepans gælder at*

$$D_N^* \leq D_N \leq 2D_N^*.$$

Bevis. Da mængden bestående af intervaller på formen $[0,c) \subseteq I = [0,1]$ er indeholdt i mængden bestående af intervaller på formen $[a,b) \subseteq I$ vil

$$D_N^* = \sup_{0<c\leq 1} \left| \frac{A([0,c);N;\omega)}{N} - c \right| \leq \sup_{0\leq a<b\leq 1} \left| \frac{A([a,b);N;\omega)}{N} - a \right| = D_N.$$

For at opnå den modsatte ulighed, ser vi at $A([a,b);N) = A([0,b;N) - A([0,a);N)$, hvor $0 \leq a < b \leq 1$. Trekantuligheden giver derfor, at

$$\left| \frac{A([a,b);N;\omega)}{N} - (b-a) \right| \leq \left| \frac{A([0,b);N;\omega)}{N} - b \right| + \left| \frac{A([0,a);N;\omega)}{N} - a \right|.$$

Da supremum bevarer uligheder, vil

$$D_N \leq 2D_N^*.$$

□

Det følgende korollar følger direkte fra Sætning 3.2 og Sætning 3.6.

Korollar 3.7. *En følge $\omega = (x_n), n = 1,2,\ldots$ bestående af reelle tal er u.d. mod 1 hvis og kun hvis*

$$\lim_{N\to\infty} D_N^* = 0.$$

For en endelig følge med N elementer, vil D_N ikke ændre sig, hvis man ændrer på rækkefølgen af de N elementer i følgen. Derfor kan man i sætninger vedrørende D_N i følger af længde N antage at elementerne i følgen kommer i stigende rækkefølge. Det samme gælder for stjernediskrepansen D_N^*.

Sætning 3.8. *Lad $(x_n), n = 1,2,\ldots,N$ være en følge bestående reelle tal, hvor $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N \leq 1$. Da er*

$$\begin{aligned} D_N^* &= \max_{i=1,2,\ldots,N} \max\left(\left| x_i - \frac{1}{N} \right|, \left| x_i - \frac{i-1}{N} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2N} + \max_{i=1,2,\ldots,N} \left| x_i - \frac{2i-1}{2N} \right|. \end{aligned}$$

Vi henviser til [5, s. 92] for at læse beviset for Sætning 3.8.

Korollar 3.9. *For for alle følger bestående af N elementer i $I = [0,1]$ vil*

$$D_N^* \geq \frac{1}{2N}, \tag{3.3}$$

hvor følgen

$$(x_n) = \left(\frac{2n-1}{2N} \right)$$

med $n = 1,2,\ldots,N$ er den eneste følge i I, hvor (3.3) er en lighed.

Bevis. Da enhver følge med N kan få omrokeret sine elementer, så de kommer i stigende rækkefølge uden at påvirke D_N^* vil vi kunne gøre dette og anvende Sætning 3.8. Derfra følger det direkte at $D_N^* \geq \frac{1}{2N}$. Hvis der skal opnås lighed må

$$\max_{i=1,2,\ldots,N} \left| x_i - \frac{2i-1}{2N} \right| = 0$$

så

$$x_i = \frac{2i-1}{2N}$$

for alle $i = 1, 2, \ldots, N$, hvilket netop kun er den givne følge, som opfylder. □

Bemærkning. At alle følger bestående af N elementer i $I = [0, 1]$ opfylder (3.3) kan også konkluderes på baggrund af Sætning 3.3 og 3.6 .

Vi vil nu se på diskrepansen og stjernediskrepansen til uendelige følger $\omega = (x_n)$. For disse ser vi, at det sker regelmæssigt, altså for uendelig mange N, at den nedre grænse for stjernediskrepansen er væsentligt større end $1/2N$, nemlig at $D_N^* > c \log N/N$.

Sætning 3.10. *Lad ω være en uendelig følge bestående af reelle tal. Så er*

$$ND_N^*(\omega) > c \log N$$

for uendelig mange naturlige tal N, og hvor $c > 0$ er en absolut konstant.

For at kunne bevise Sætning 3.10 har vi brug for et lemma, hvis bevis findes i [5, s. 108]. Vi definerer $R_N(y) = A([0, y); N) - Ny$, hvor $y \in [0, 1]$ og A er tællefunktionen fra definitionen af diskrepans. For $K = (a, b]$, $0 \leq a < b$, og $y \in [0, 1]$, definerer vi da, at for en følge (x_n) bestående af elementer i $[0, 1]$, er

$$h(K, y) = \max_{N \in K} (R_N(y)) - \min_{N \in K} (R_N(y)), \tag{3.4}$$

hvor vi med $\max_{N \in K} (R_N(y))$ (resp. min) mener maksimum over alle heltalværdier N med $a < N \leq b$.

Lemma 3.11. *Lad t være et naturligt tal. For ethvert interval $K = (a, b] \subseteq (0, \infty)$ med $\lambda(K) \geq 4^t$, samt alle y, gælder at*

$$4^{-t} \sum_{j=1}^{4^t} h(K, y + j4^{-t}) \geq 2^{-5}t.$$

Bevis for Sætning 3.10. Det tilstrækkeligt at vise, at for alle naturlige tal N eksisterer et naturligt tal m, hvor $1 \leq m \leq N$, således at

$$mD_m^*(\omega) > c \log N. \tag{3.5}$$

Det skyldes, at $c \log N \geq c \log m$, og vi ved, at når $N \to \infty$, vil $c \log N \to \infty$. Dermed må $mD_m^*(\omega) \to \infty$, men $D_m^*(\omega) \leq 1$, så da må $m \to \infty$. Derfor må $D_m^*(\omega) > c \log m$ for uendelig mange m.

Vi deler beviset op i to tilfælde. Antag først, at $N \geq 4^{32}$. Da findes et heltal $t \geq 32$, således at $4^t \leq N < 4^{t+1}$. Lad $K = (0, 4^t]$. Da Lemma 3.11 gælder for alle reelle $y \geq 0$, vil dette også gælde for $y = 0$, så

$$4^{-t} \sum_{j=1}^{4^t} h(K, j4^{-t}) \geq 2^{-5}t. \tag{3.6}$$

Vi ser at $j4^{-t} \in [0,1]$ for alle $j = 1, 2, \ldots, 4^t$. Derfor må der eksistere $x \in [0,1]$, så

$$\sum_{j=1}^{4^t} h(K, j4^{-t}) = 4^t h(K, x).$$

Sættes dette in i (3.6), fås at

$$h(K, x) \geq 2^{-5}t.$$

Fra definitionen (3.4) af h må der derfor eksistere to heltal $m, n \in K$, så $R_m(x) - R_n(x) \geq 2^{-5}t$. Hvis både $|R_m(x)| < 2^{-6}t$ og $|R_n(x)| < 2^{-6}t$ vil

$$R_m(x) - R_n(x) < 2 \cdot 2^{-6}t = 2^{-5}t,$$

hvilket giver en modsigelse. Derfor må $|R_m(x)| \geq 2^{-6}t$ eller $|R_n(x)| \geq 2^{-6}t$. Antag uden tab af generalitet at $|R_m(x)| \geq 2^{-6}t$. Fra definitionen af R_m vil da $m \geq 1$. Dermed vil $1 \leq m \leq 4^t \leq N$. Siden $mD_m^*(\omega) \geq |R_m(x)|$ for alle $x \in [0,1]$, må $mD_m^*(\omega) \geq 2^{-6}t$. Vi mangler nu kun at estimere t. Da $t \geq 32$ er $t \geq 32/33(t+1)$ og $\log N < \log 4^{t+1}$. Dermed er

$$mD_m^*(\omega) \geq 2^{-6}\frac{32}{33}(t+1) > 2^{-6}\frac{32}{33}\frac{\log N}{\log 4} = \frac{\log N}{66 \log 4},$$

så (3.5) er opfyldt med $c = 1/(66 \log 4)$.

I tilfældet hvor $1 \leq N < 4^{32}$ er ω endelig, så vi kan benytte Korollar 3.9 til at konkludere, at

$$D_1^*(\omega) \geq \frac{1}{2} > \frac{\log N}{66 \log 4}$$

da $\log N < 32 \log 4$. I dette tilfælde er (3.5) derfor opfyldt med $m = 1$ og $c = 1/(66 \log 4)$, og dermed for alle N. $\square$

Den eneste øvre grænse for D_N, som vi har set indtil nu, er 1. Fra Sætning 3.10 ser vi, at en øvre grænse må være større end $c \log N/N$. Et naturligt spørgsmål er dog, om der findes nogle bestemte følger, hvor diskrepansen kommer tæt på denne grænse. Svaret på dette er ja, og vi skal nu se nærmere på to sådanne følger.

3.1 Kroneckerfølgen $(n\alpha)$

I Kapitel 2 så vi, at Kroneckerfølgen $(n\alpha), n = 1, 2, \ldots$ er u.d. mod 1, når α er irrational. Det viser sig dog, at for bestemte irrationale α bliver diskrepansen til denne følge særdeles lav. Dette gælder blandt andet irrationale tal, hvor den bedste rationale tilnærmelse ikke er specielt god.

Sætning 3.12. *Lad $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ være et irrationalt tal. Antag der eksisterer et positivt reelt tal K, hvor $a_i \leq K$ for alle $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Da opfylder følgen $\omega = (n\alpha), n = 1, 2, \ldots$, at*

$$ND_N(\omega) \leq 3 + \left(\frac{1}{\log \varphi} + \frac{K}{\log(K+1)} \right) \log N,$$

hvor $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Ovenståene sætning gælder blandt andet kvadratiske irrationale tal, som er lig periodiske kædebrøker [4, s. 48]. Før beviset af sætningen over vises et lemma, som fortæller, at diskrepansen til en følge kan begrænses ovenfra af diskrepansen til dennes delfølger.

Lemma 3.13. *Lad $1 \leq i \leq k$, hvor i og k er naturlige tal. For hvert i, lad ω_i være en følge bestående af reelle tal med N_i elementer. Antag ω_i har diskrepans $D_{N_i}(\omega_i)$. Lad ω være en følge bestående af reelle tal, således at ω indeholder alle elementerne fra alle ω_i for $i = 1, 2, \ldots, k$, hvor $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ er antal elementer i ω. Da vil*

$$D_N(\omega) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} D_{N_i}(\omega_i), \tag{3.7}$$

og

$$D_N^*(\omega) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} D_{N_i}^*(\omega_i). \tag{3.8}$$

Bevis. Vi viser kun (3.7), da beviset for (3.8) følger de helt samme linjer.

Lad $J = [a, b) \subseteq I = [0, 1]$. Da ethvert element i ω også er i nøjagtig en delfølge ω_i, er

$$A(J, N, \omega) = \sum_{i=1}^{k} A(J; N_i; \omega_i).$$

Derfor er

$$\left| \frac{A(J; N; \omega)}{N} - \lambda(J) \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} \left(\frac{A(J; N_i; \omega_i)}{N_i} - \lambda(J) \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} D_{N_i}(\omega_i).$$

Vi ser da, at $D_N(\omega)$ er lig supremum til venstresiden over, som da vil være mindre end eller lig højresiden. □

Bevis for Sætning 3.12. For $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, lad $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \ldots$ være defineret som i (2.26). For ethvert naturligt tal N, eksisterer et ikke-negativt heltal r, således at $q_r \leq N < q_{r+1}$. Tallet N kan da skrives som sin Ostrowskirepræsentation [2, s. 107]

$$N = \sum_{i=1}^{r} b_i q_i, \tag{3.9}$$

som opfylder, at for $0 \leq i \leq r$ er $0 \leq b_i \leq a_{i+1}$, samt $b_r \geq 1$. Denne er unik.[1] Betragt nu følgen $(n\alpha), n = 1, 2, \ldots, N$. Denne følge kan deles op i $b_0 + b_1 + \ldots + b_r$ delfølger, $0 \leq i \leq r$, hvor b_i delfølger har q_i på hinanden følgende tal som elementer. Da er alle N elementer i $(n\alpha)$ placeret i præcis én delfølge. Vi vil nu estimere diskrepansen for en af disse delfølger med q_i elementer. Da vil elementerne i denne delfølge kunne skrives som $n\alpha$, hvor $n = n_0 + j$, $1 \leq j \leq q_i$, samt $n_0, j \in \mathbb{N}$. Fra (2.27) fås, at

$$\alpha = \frac{p_i}{q_i} + \frac{\theta}{q_i q_{i+1}},$$

hvor $|\theta| < 1$, så

$$\{n\alpha\} = \left\{ n_0\alpha + \frac{jp_i}{q_i} + \frac{j\theta}{q_i q_{i+1}} \right\}. \tag{3.10}$$

Da $\gcd(p_i, q_i) = 1$ vil punkterne $\{n_0\alpha + jp_i/q_i\}$ kunne samles til en følge bestående af q_i ækvidistante punkter i stigende rækkefølge med afstand $1/q_i$. Siden

$$\left| \frac{j\theta}{q_i q_{i+1}} \right| < \frac{1}{q_{i+1}},$$

for $j = 1, 2, \ldots, q_i$, vil ethvert element i (3.10) være lig et element $\{n_0\alpha + jp_i/q_i\}$ som er flyttet med en afstand mindre end $1/q_{i+1}$. Alle elementerne i (3.10) vil være flyttet i samme retning. Lad J være et interval så $J \subseteq [0, 1]$. Da eksisterer et heltal k, hvor $0 \leq k \leq q_i - 1$, så

$$\frac{k}{q_i} + \frac{1}{q_{i+1}} \leq \lambda(J) \leq \frac{k+1}{q_i} + \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Desuden vil der gælde for denne delfølge, at

$$k \leq A(J; q_i) \leq k + 1,$$

hvilket medfører

$$D_{q_i} \leq \left| \frac{k+1}{q_i} + \frac{1}{q_{i+1}} - \frac{k}{q_i} \right| = \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Nu kan vi finde en øvre grænse til følgen $(n\alpha), n = 1, 2, \ldots, N$. Da vi opdelte denne følge i $b_0 + b_1 + \ldots + b_r$ delfølger, hvor b_i følger har q_i elementer, kan vi benytte Lemma 3.13, så vi får

$$ND_N(\omega) \leq \sum_{i=0}^{r} b_i q_i D_{q_i} \leq \sum_{i=0}^{r} b_i \left(\frac{q_i}{q_{i+1}} + 1 \right) \leq r + 1 + \sum_{i=0}^{r} b_i, \tag{3.11}$$

[1] Hvis $q_0 = q_1 = 1$, kan flere forskellige valg af b_0 og b_1 kan give samme sum. Dette kan løses ved at indeksere summen fra 1 og justere værdien af b_1.

da $b_i q_i/q_{i+1} \leq b_i q_i/a_{i+1}q_i \leq 1$ for i = 0, 1, ... Vi vil nu vise at

$$\sum_{i=0}^{r} b_i \leq 1 + \frac{K}{\log(K+1)} \log N, \tag{3.12}$$

hvor hver b_i kommer fra Ostrowskirepræsentationen (3.9) af N, og K er den øvre begrensning af a_i for $i = 1, 2, \ldots$. Dette vil vi vise ved induktion på r. For $N \geq 1$ definerer vi

$$\sigma(N) = \sum_{i=0}^{r} b_i.$$

Her er det nødvendigt at overveje to tilfælde i induktionsstarten, da $q_0 \leq q_1$. Hvis $q_0 = q_1 = 1$ vil man i princippet kunne fjerne leddet $b_0 q_0$ fra summen i (3.9) og lægge b_0 til leddet $b_1 q_1$. Da vil induktionsstarten være med værdien $r = 1$, og vi får at

$$1 \leq \sigma(N) = b_0 + b_1 = N < q_2 \leq a_2 + 1 \leq K + 1.$$

Hvis $q_0 < q_1$ vil vi i stedet have induktionsstarten i $r = 0$, og vi får da at

$$1 \leq \sigma(N) = b_0 = N < q_1 \leq a_1 + 1 \leq K + 1.$$

For $1 \leq N \leq K + 1$ vil det derfor være tilstrækkeligt for induktionsstarten at vise, at

$$N \leq 1 + \frac{K}{\log(K+1)} \log N.$$

Dette kan vi vise ved at betragte funktionen $f(x) = x - (K/\log(K+1)) \log x$. Observer at $f(1) = f(K+1) = 1$ og f er konveks med minimum på intervallet $[1, K+1]$, så for $N \in [1, K+1]$ vil

$$f(N) = N - \frac{K}{\log(K+1)} \log N \leq 1,$$

som giver det ønskede resultat. Nu antager vi at (3.12) er sand for $r - 1$ og viser det også gælder for r. Betragt et naturligt tal N, hvor $1 < q_r \leq N < q_{r+1}$. Fra Ostrowskirepræsentationen af N kan vi skrive $N = b_r q_r + N_{r-1}$, hvor $0 \leq N_{r-1} < q_r$. Antag $N_{r-1} > 0$. Da er $\sigma(N) = b_r + \sigma(N_{r-1})$. Fra induktionshypotesen fås da, at

$$\sigma(N) \leq b_r + 1 + \frac{K}{\log(K+1)} \log N_{r-1}.$$

Da $N > b_r N_{r-1} + N_{r-1}$, vil derfor

$$\sigma(N) \leq b_r + 1 + \frac{K}{\log(K+1)} \log\left(\frac{N}{b_r + 1}\right). \tag{3.13}$$

Vi antager nu, at $N_{r-1} = 0$. Da vil $N = b_r q_r$, så $\sigma(N) = b_r$. Da $q_r > 1$ vil vi derfor få at

$$\frac{N}{b_r + 1} = \frac{b_r q_r}{b_r + 1} \geq 1.$$

Dermed er $\log(N/(b_r+1)) \geq 0$, så uligheden i (3.13) holder også for $N_{r-1} = 0$.

Da $1 \leq b_r \leq a_{r+1} \leq K$ og funktionen $g(x) = x/\log x$ er voksende for $x > 0$, vil

$$b_r = \frac{b_r}{\log(b_r+1)}\log(b_r+1) \leq \frac{K}{\log(K+1)}\log(b_r+1).$$

Indsættes dette i (3.13), fås at

$$\begin{aligned}\sigma(N) &\leq 1 + \frac{K}{\log(K+1)}(\log(b_r+1) + (\log N - \log(b_r+1))) \\ &\leq 1 + \frac{K}{\log(K+1)}\log N.\end{aligned}$$

Dette bekræfter (3.12).

Nu mangler vi kun at finde en øvre grænse for r i (3.11). Vi viser derfor at $q_i \geq \varphi^{i-1}$ ved induktion på $i \geq 0$. For $i = 0$ ser vi at

$$q_0 = 1 \geq \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \varphi^{-1}.$$

Tilsvarende for $i = 1$ er

$$q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} \geq q_0 = 1 = \varphi^0.$$

Vi antager nu $q_j \geq \varphi^{j-1}$ for $j \leq i$. Da er

$$q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1} \geq \varphi^{i-1} + \varphi^{i-2} = \varphi^{i-2}(\varphi+1) = \varphi^i,$$

da netop den valgte φ opfylder, at $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dermed har vi vist, at $q_i \geq \varphi^{i-1}$ for $i \geq 0$. Da vil $N \geq q_r \geq \varphi^{r-1}$, så $r \leq (\log N)/\log\varphi + 1$. Fra (3.11) og (3.12) følger det da, at

$$\begin{aligned}ND_N(\omega) &\leq \frac{\log N}{\log\varphi} + 1 + 1 + 1 + \frac{K}{\log(K+1)}\log N \\ &= 3 + \left(\frac{1}{\log\varphi} + \frac{K}{\log(K+1)}\right)\log N.\end{aligned}$$

□

3.2 Van der Corputfølgen

En anden følge som har lav diskrepans er Van der Corputfølgen. Et ikke-negativt heltal $n-1$ skrives ud fra dets repræsentation i 2-talssystemet, så

$$n - 1 = \sum_{j=0}^{s} a_j 2^j.$$

Her er $a_j \in \{0,1\}$ for alle $j = 0, 1, \ldots, s$. Van der Corputfølgen $\omega = (x_n), n = 1, 2, \ldots$ defineres da ud fra n's repræsentation i 2-talssystemet som

$$x_n = \sum_{j=0}^{s} a_j 2^{-j-1}.$$

Elementerne i Van der Corputfølgen vil derfor være

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16}, \frac{13}{16}, \frac{3}{16}, \frac{11}{16}, \frac{7}{16}, \frac{15}{16}, \ldots$$

så denne opfylder, at $x_n \in [0,1]$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Sætning 3.14. *Stjernediskrepansen $D_N^*(\omega)$ til Van der Corputfølgen $\omega = (x_n)$ opfylder, at*

$$ND_N^*(\omega) \leq \frac{\log(N+1)}{\log 2}.$$

Bevis. Lad N være et naturligt tal med repræsentationen $N = 2^{h_1} + 2^{h_2} + \ldots + 2^{h_s}$ i 2-talssystemet, hvor $0 \leq h_s < h_{s-1} < \ldots < h_2 < h_1$. Vi opdeler intervallet $[1, N]$ i s disjunkte intervaller M_j, så

$$M_j = \left[1 + 2^{h_1} + 2^{h_2} + \ldots + 2^{h_{j-1}}, 2^{h_1} + 2^{h_2} + \ldots + 2^{h_j}\right],$$

og $j = 1, 2, \ldots, s$. Vi definerer $M_1 = \left[1, 2^{h_1}\right]$. Bemærk at hvert heltal i $[1, N]$ ligger i nøjagtig et interval M_j. Hvert interval M_j indeholder 2^{h_j} heltal n, som hver især entydigt kan skrives som

$$n = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} 2^{h_k} + \sum_{i=0}^{h_j - 1} a_i 2^i,$$

hvor $a_i \in \{0,1\}$. Det vides, at der findes 2^{h_j} kombinationer af disse a_i. Vi ser over, at vi har repræsentationen af $n-1$ i 2-talssystemet stående. Dermed må hvert af de første N elementer af Van der Corputfølgen kunne skrives som

$$x_n = \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-h_k - 1} + \sum_{i=0}^{h_j - 1} a_i 2^{-i-1} = y_j + \sum_{i=0}^{h_j - 1} a_i 2^{-i-1},$$

hvor

$$0 \leq y_j = \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-h_k - 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-h_k} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h_j - 1} 2^{-i} = 2^{-h_j} - 1 < 2^{-h_j}.$$

Hvis vi lader n gennemgå alle 2^{h_j} heltalsværdier i M_j vil $\sum_{i=0}^{h_j-1} a_i 2^{-i-1}$ have værdierne

$$0, 2^{-h_j}, 2 \cdot 2^{-h_j}, 3 \cdot 2^{-h_j}, \ldots, \left(2^{h_j} - 1\right) 2^{-h_j}$$

i en eller anden rækkefølge. Vi definerer delfølgen ω_j af Van der Corputfølgen til at bestå af x_n fra Van der Corputfølgen, hvor $n \in M_j$. Dermed vil Van der Corputfølgen blive delt i s delfølger ω_j, $j = 1, 2, \dots, s$, med 2^{h_j} elementer i hver, og alle x_n fra Van der Corputfølgen er i præcis én delfølge ω_j. Da hver ω_j er endelig og har alle sine elementer i $[0, 1]$ kan rækkefølgen af elementerne i ω_j ændres til at være i stigende rækkefølge uden at ændre på diskrepansen til ω_j. Sætning 3.8 medfører, at

$$\begin{aligned} D^*_{2^{h_j}}(\omega_j) &= \frac{1}{2^{h_j+1}} + \max_{i=1,2,\dots,2^{h_j}} \left| y_j + \frac{i-1}{2^{h_j}} - \frac{2i-1}{2^{h_j+1}} \right| \\ &\le \frac{1}{2^{h_j+1}} + \left| y_j - \frac{1}{2^{h_j+1}} \right| \le \frac{1}{2^{h_j}}. \end{aligned}$$

Fra Sætning 3.13 fås da, at

$$ND^*_N(\omega) \le \sum_{j=1}^{s} 2^{h_j} \frac{1}{2^{h_j}} = s.$$

Nu mangler vi kun at finde en øvre grænse for s. Vi ser, at

$$N = \sum_{k=1}^{s} 2^{h_k} \ge \sum_{k=1}^{s} 2^{s-k} = 2^s - 1,$$

så

$$s \le \frac{\log(N+1)}{\log 2}.$$

Dermed er

$$ND^*_N(\omega) \le \frac{\log(N+1)}{\log 2}.$$

□

Kilder

[1] Sheldon Axler, *Measure, integration & real analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 282, Springer, Cham, [2020] ©2020. MR 3972068

[2] Dmitriy Bilyk, Josef Dick, and Friedrich Pillichshammer (eds.), *Discrepancy theory*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, vol. 26, De Gruyter, Berlin, [2020] ©2020. MR 4391422

[3] Peter Duren, *Invitation to classical analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2933135

[4] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1964. MR 0161833

[5] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974. MR 0419394

[6] Nico M. Temme, *Special functions*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996, An introduction to the classical functions of mathematical physics. MR 1376370

NTNU

Kunnskap for en bedre verden