Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Anna Karina Kristianslund

En prakseologisk analyse av resultatet av didaktiske transposisjonsprosesser innenfor differensialregning i matematikk R1

Masteroppgave i MLREAL
Veileder: Heidi Strømskag
Juni 2022

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Anna Karina Kristianslund

En prakseologisk analyse av resultatet av didaktiske transposisjonsprosesser innenfor differensialregning i matematikk R1

Masteroppgave i MLREAL
Veileder: Heidi Strømskag
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne studien undersøker jeg det matematiske innholdet i differensialregning i matematikk R1. Studien er en dokumentstudie med hovedfokus på Gyldendal sin lærebok for matematikk R1, *Mønster: Matematikk R1*, skrevet av Kalvø et al. (2021). Hensikten med studien er å identifisere kunnskapen som skal undervises i differensialregning i matematikk R1, samt å undersøke hvordan denne kunnskapen er tilpasset for å undervises på videregående skole.

Jeg tar i bruk både metodiske og analytiske verktøy fra den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD), for å analysere og beskrive differensialregning slik det kommer frem i læreplanen for matematikk R1 og i læreboken jeg undersøker. Ved hjelp av begreper som *prakseologi*, *prakseologisk analyse*, *matematiske organiseringer* og *didaktiske transposisjonsprosesser*, presenterer jeg en analyse av det matematiske innholdet i differensialregning i læreboken *Mønster: Matematikk R1*. Videre ser jeg på hvordan deler av dette innholdet har gjennomgått en transformasjon fra den akademiske kunnskapen som vi gjerne finner på universitetet til kunnskap som skal undervises i matematikk R1. Jeg har også inkludert et historisk perspektiv på kunnskapen, der jeg undersøker hvor kunnskapen kommer fra og analyserer hvordan dette kommer frem i læreboken.

Studien viser at innholdet i differensialregning i matematikk R1 slik det kommer frem i *Mønster: Matematikk R1* kan beskrives ved de to lokale matematiske organiseringene «Finn den deriverte av $f(x)$» og «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» De tilhørende begrunnelsene og bevisene varierer i stor grad; det er relativt solide begrunnelser for den førstnevnte lokale matematiske organiseringen, mens det er store mangler i begrunnelsene til den sistnevnte. I forhold til den akademiske kunnskapen vi finner i universitetsbøker har Kalvø et al. (2021) tatt bort mye av den matematiske kompleksiteten til fordel for enkelhet, noe som er grunnen til de manglende begrunnelsene og bevisene. Denne enkelheten, sammen med et visuelt fokus, gjør den matematiske kunnskapen i differensialregning mer tilgjengelig for et bredere spekter av elever.

Abstract

This study intends to identify the knowledge to be taught in differential calculus in Norwegian upper secondary school subject mathematics R1, and examine how this knowledge is adapted to be taught at upper secondary school. The study is a document study, where the main document is a textbook for mathematics R1, *Mønster: Matematikk R1* written by Kalvø et al. (2021).

Both methodical and analytical tools from the Anthropological Theory of the Didactics (ATD) are put into use to analyze and describe differential calculus in the curriculum for mathematics R1 and the textbook I investigate. I use terms as *praxeology*, *praxeological analysis*, *mathematical organisations* and *process of didactic transposition* to present an analysis of the mathematical content in differential calculus in the textbook *Mønster: Matematikk R1*. I also study the didactical transposition of some of this content from scholarly knowledge that we find in the university, to knowledge to be taught in mathematics R1. A historical perspective on the knowledge is included, where I investigate the origin of the knowledge and analyze how this emerges in the textbook.

My research found that the content in differential calculus in mathematics R1, as it emerges in the textbook *Mønster: Matematikk R1*, can be described by the two local mathematical organisations «Find the derivative of $f(x)$» and «What does $f'(x)$ and $f''(x)$ tell us about the properties of $f(x)$ and the shape of the graph?» The justification for the two mathematical organisations varies a lot; there are relatively solid justifications for the former local mathematical organisation, while the justifications for the second are poor. Compared to the scholarly knowledge in university textbooks, Kalvø et al. (2021) has reduced the mathematical complexity in favor of simplicity, which is part of the reason for the lack of justifications and proofs. This simplicity, along with a focus on the visual, makes the mathematical content in differential calculus accessible to a wider range of students.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten av min lektorutdanning på NTNU, og endelig skal jeg ut i en hverdag der jeg møter elever og får undervise. Jeg gleder meg til å ta i bruk det jeg har lært gjennom studiet, og til å fortsette å utvikle meg som lektor. Jeg vil i denne forbindelse takke alle som har hjulpet meg på veien på en lang, og til tider tung og annerledes avslutning på studiet.

Takk til mine studievenner Anna, Endre, Thomas og Elisabeth for alle gode pauser sammen og for all oppmuntring og støtte. Dette studiet hadde ikke vært det samme uten dere. Og spesielt takk til Elisabeth og Thomas som har hjulpet meg med gjennomlesning av masteren og som har gitt meg nyttige tilbakemeldinger.

Takk til min søster Kristina som gjennom hele denne perioden har gitt meg støtte og som jeg alltid har kunnet lufte ut min frustrasjon hos, og som også har lest og gitt meg verdifulle tilbakemeldinger på deler av masteroppgaven. Takk til det fine kollektivet jeg har bodd i, med Mikael, Eva og Eivind, som har vært som en ekstra familie i min studietid. Jeg vil også takke Magnus som har gitt meg mange fine avbrekk fra masterskrivingen, og som har bidratt med masse energi og glede.

Til slutt vil jeg takke Heidi, min veileder i arbeid med denne masteroppgaven, som alltid har satt av tid og gitt grundige tilbakemeldinger. Du har vært tålmodig og engasjert, og har alltid brydd deg om hvordan det går. Takk for alt arbeidet du har lagt i å veilede meg i dette prosjektet, jeg kunne ikke ha håpet på en bedre veileder enn deg!

Trondheim, 30.mai 2022
Anna Karina Kristianslund

Innhold

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Bakgrunn

I konstruksjon av kunnskapen som skal læres i matematikk, er det mange ulike valg og vurderinger som tas. Kunnskap er avhengig av institusjoner, og for vurdere hvilken kunnskap som skal undervises på videregående må det gjøres tilpasninger og forenklinger av den akademiske kunnskapen som vi gjerne finner på universitetet. Denne prosessen kalles *didaktisk transposisjon* i den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) (Bosch & Gascón, 2014). Dette innebærer hvordan kunnskapen er transformert fra akademisk kunnskap, og hvilke valg og forenklinger som er gjort i denne transformasjonen. Bosch og Chevallard (2014) hevder at siden kunnskap er avhengig av institusjoner, er det viktig å undersøke konstruksjoner av kunnskap i skolen, slik at disse ikke blir tatt for gitt. Chevallard og Bosch (2020b) påstår at begrepet *didaktisk transposisjon* tydeliggjør studie av kunnskap som skal læres i skolen som et viktig forskningsfelt. Videre trekker de frem at matematikkundervisning blir påvirket av begrensninger og betingelser i institusjonen, i tillegg til valg og transformasjoner i den didaktiske transposisjonen av kunnskapen. Undervisning og læring av kunnskap er altså avhengig av selve kunnskapen som skal undervises, og det er derfor viktig å undersøke denne kunnskapen og hvordan den presenteres. Forståelse av funksjoner er helt sentralt i matematikk, og differensialregning, som handler om forholdet mellom endring av to størrelser, gir oss mange verktøy for å forstå og drøfte funksjoner. Derfor er differensialregning ikke bare helt sentralt i matematikken, men kan brukes til å forstå endringer i ulike fenomener i samfunnet. I matematikk R1, som jeg undersøker i denne studien, er en stor andel av kompetansemålene rettet mot differensialregning (Utdanningsdirektoratet, 2021b).

1.2 Forskningsspørsmål

I denne studien undersøker jeg og analyserer matematikkfaglige elementer som er inneholdt i differensialregning, og analyserer hvordan disse er tilpasset for å undervises i matematikk R1. Med utgangspunkt i dette har jeg følgende forskningsspørsmål:

> *Hvilke matematikkfaglige elementer består differensialregning i matematikk R1 av, og hvilke didaktiske transposisjonsprosesser har disse elementene gjennomgått?*

For å besvare problemstillingen har jeg gjennomført en prakseologisk analyse av resultatet av didaktiske transposisjonsprosesser innenfor differensialregning i matematikk R1. Datamaterialet består av læreboken *Mønster: Matematikk R1* (heretter *Mønster R1*: Kalvø et al., 2021), læreplanen for matematikk R1 og to lærebøker for kalkulus på universitetet. Datamaterialet vil bli presentert nærmere i Kapittel 3.3.

1.3 Oppgavens oppbygging

I denne studien tar jeg utgangspunkt i verktøy fra den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) for å analysere de utvalgte dokumentene. Kapittel 2 tar for seg relevante begreper og verktøy fra ATD. Videre presenterer jeg metodisk tilnærming i Kapittel 3. For å frigjøre meg fra lærebokforfatternes syn på differensialregning, har jeg utviklet en epistemologisk referansemodell som inneholder hva differensialregning er, opprinnelsen til derivasjon og hva det brukes til. Den epistemologiske referansemodellen presenteres i Kapittel 4. Analysen av differensialregning i *Mønster R1* presenteres i Kapittel 5. Etter dette diskuterer jeg analyseresultatene i lys av teori i Kapittel 6. I Kapittel 7 drøfter jeg mulige implikasjoner for videre studier og matematikkundervisning. Til slutt gir jeg en oppsummering og sluttkommentarer i Kapittel 8.

Kapittel 2

Analytiske verktøy fra den antropologiske teorien for det didaktiske

I dette kapitlet presenterer jeg analytiske verktøy fra den antropologiske teorien for det didaktiske (ATD) som jeg videre vil bruke i min studie. Dette danner grunnlaget for mitt teoretiske rammeverk, samt mye av det metodiske rammeverket som presenteres i Kapittel 3. I dette kapitlet vil jeg presentere litt generelt om ATD i Kapittel 2.1 og definere det sentrale begrepet *prakseologi* i Kapittel 2.2. Videre vil jeg presentere relevante prinsipper for min analyse, altså hva didaktiske transposisjonsprosesser og epistemologisk referansemodell innebærer i Kapittel 2.3. Til slutt vil jeg introdusere to didaktiske paradigmer som beskrives av Yves Chevallard i Kapittel 2.4.

2.1 Didaktisk system og skala av didaktisk medbestemmelse

Det teoretiske rammeverket som er utgangspunkt for min studie er *den antropologiske teorien for det didaktiske* (the Anthropological Theory of the Didactic – ATD), som ble startet av Yves Chevallard på 1980-tallet med utvikling av teorien for didaktiske tranposisjonsprosesser. Rammeverket er utviklet for å studere menneskelig aktivitet i form av undervisning, læring, spredning og utvikling av kunnskap. Det var opprinnelig rettet mot matematikkundervisning, men bruksområdet har blitt utvidet til studie av undervisning og læring av all slags kunnskap. Det er viktig i ATD å undersøke institusjonelle forhold og konstruksjoner av kunnskap, slik at institusjonens syn på kunnskap, undervisning og læring ikke blir tatt for gitt (Chevallard & Bosch, 2020a).

For å se på læring og undervisning av kunnskap i ATD brukes begrepet *didaktisk system*, som beskriver en situasjon der en eller flere personer skal lære en matematisk målkunnskap k.[1] Dette kalles i ATD «the didactic stake», og referer til det som skal læres i det didaktiske systemet. Det didaktiske systemet beskrives med notasjonen $S(X; Y; k)$, der X er en eller flere personer x som skal lære noe om k, og Y er en eller flere personer y som hjelper X å studere k. I en skole vil ofte X betegne en klasse og Y vil være en eller flere lærere, men en didaktisk situasjon kan også forekomme i andre settinger, for eksempel hvis en person (x) spør en annen person (y) om hjelp til å bruke den nye kaffemaskinen på jobb (k). Dersom det ikke er en som hjelper X til å tilegne seg k, kalles systemet *autodidaktisk*, og det skrives $S(X; \text{Ø}; k)$ (Chevallard, 2019).

I en didaktisk situasjon vil det som skjer ikke kun være avhengig av X, Y og k, men vil påvirkes av ulike *betingelser* som må undersøkes i den didaktiske analysen. En betingelse som ikke kan tas bort eller endres kalles en *begrensning*. I ATD er disse betingelsene og begrensningene beskrevet ved hjelp av *skala av didaktisk medbestemmelse* som vist nedenfor:

$$\text{Menneskeheten} \rightleftarrows \text{Sivilisasjon} \rightleftarrows \text{Samfunn} \rightleftarrows \text{Skole} \rightleftarrows \text{Pedagogikk} \rightleftarrows \text{Didaktisk system}$$

Denne skalaen beskriver hvordan betingelser og begrensninger forekommer på ulike nivåer og er gjensidig avhengig av hverandre. Med unntak av det øverste nivået, *menneskeheten*, forstås nivåene i flertall, slik at det er mange sivilisasjoner, mange samfunn, mange skoler, mange pedagogikker og mange didaktiske systemer. I analyse av en didaktisk situasjon i ATD vil det derfor være en viktig å undersøke hvordan de ulike institusjonene i skalaen av didaktisk medbestemmelse legger betingelser og begrensninger for den didaktiske situasjonen. Det er dette som i ATD kalles en økologisk/institusjonell analyse (Chevallard, 2019).

Skole forstås her som en institusjon der daglige gjøremål kan legges til side for å studere. I en skole vil det være betingelser og begrensninger som bestemmer hvordan en elev x møter k, noe som utgjør *pedagogikken*. De øverste nivåene, *samfunn*, *sivilisasjon* og *menneskeheten*, vil også legge føringer for hvordan skolen og pedagogikken ser ut, og dermed hva som foregår i den didaktiske situasjonen (Chevallard & Bosch, 2020a). Skolepolitikk og læreplanen er tydelige eksempler på hvordan samfunnet og sivilisasjonen påvirker den offentlige skolen og dermed

[1] Jeg vil her bruke symbolet k der Chevallard (2019) bruker $\heartsuit$.

didaktiske situasjoner i skolen. Videre vil hva som samfunnet oppfatter som nyttig og viktig påvirke politikk og læreplan, og ikke minst hva som er formålet med skolen. Lærebøker påvirkes av både samfunnet og skolen, samtidig som de har påvirkning på pedagogikken og didaktiske systemer der lærebøkene benyttes.

2.2 Prakseologi

Et viktig prinsipp i ATD er at all menneskelig aktivitet kan deles opp i *prakseologier* og analyseres ved hjelp av disse. Ved hjelp av prakseologier kan vi undersøke hva en person gjør, hvordan den gjør det, hva den tenker og hvorfor. ATD fastslår at enhver menneskelig aktivitet kan deles opp i ulike *typer oppgaver*. Ordet *oppgaver* brukes her i en vid forstand og kan innebære for eksempel å derivere en funksjon, pusse tennene eller å skifte dekk på en bil. Her vil å derivere en funksjon være en type oppgaver T, mens å derivere funksjonen $f(x) = e^2x$ vil være en oppgave t av type T, slik at $t \in T$. For å løse en oppgave t vil det være bruk for en *teknikk* τ, som er en måte å løse oppgaven t på. Dersom en teknikk τ kan brukes til å løse en type oppgaver T, vil denne teknikken identifiseres med T. Dette kan for eksempel være å derivere en polynomfunksjon med ett ledd, noe som er en type oppgaver T, men der alle oppgavene $t \in T$ kan løses med samme teknikk τ (Chevallard & Bosch, 2020a).

Her defineres type oppgaver ved hjelp av teknikken som brukes til å løse oppgaven. I matematikk kan det være stor forskjell på hvor vanskelig det er å hente ut og tolke informasjon fra en oppgave, samt hvor virkelighetsnær oppgaven er. For å også kunne ta hensyn til dette, kan vi ta i bruk begrepet *tekstoppgave*. Tekstoppgaver (word problems) defineres her ved hjelp av Verschaffel et al. (2014, s. 642, min oversettelse) sin definisjon som «verbale beskrivelser av problemer og tilhørende situasjoner der ett eller flere spørsmål stilles, og svaret kan fås ved å bruke matematiske operasjoner på numeriske data tilgjengelig i oppgaveteksten». Disse typene oppgaver er annerledes enn oppgaver i notasjonssystemer (f.eks «Finn $f'(x)$») eller i muntlig form (f.eks «Finn den deriverte»), og er alle skrevet hovedsakelig i naturlig språk. Mens oppgaven «Finn topppunktet til funksjonen $f(x)$» ikke er en tekstoppgave, er oppgaven «Finn når ballen er på sitt høyeste» en tekstoppgave.

Prakseologier deles opp i to komponenter, *praxis* og *logos*. *Praxis* er den praktiske komponenten som beskriver en menneskelig aktivitet og består av oppgaver og teknikker som presentert over. Når en teknikk utføres for å løse en oppgave vil det være en begrunnelse og forklaring bak hvordan det gjøres, som komponenten *logos* består av. *Logos* deles igjen opp i *teknologi* og *teori*. Teknologien θ er diskursen til teknikken τ, og forklarer hvorfor denne teknikken er hensiktsmessig og riktig for å løse en oppgave t. I matematikk vil teknologien ofte bestå av et matematisk bevis. Teorien Θ er av mer generell og abstrakt karakter enn teknologien, og danner grunnlaget for den teknologiske diskursen. Teorien vil i mange tilfeller være vanskelig å fange opp fordi den ofte tas for gitt, med mindre det oppstår utfordringer som stiller spørsmål til hele prakseologien. Vi bruker notasjonen $(T, \tau, \theta, \Theta)$ for prakseologier (Bosch & Gascón, 2014).

2.3 Didaktiske transposisjonsprosesser og epistemologisk referansemodell

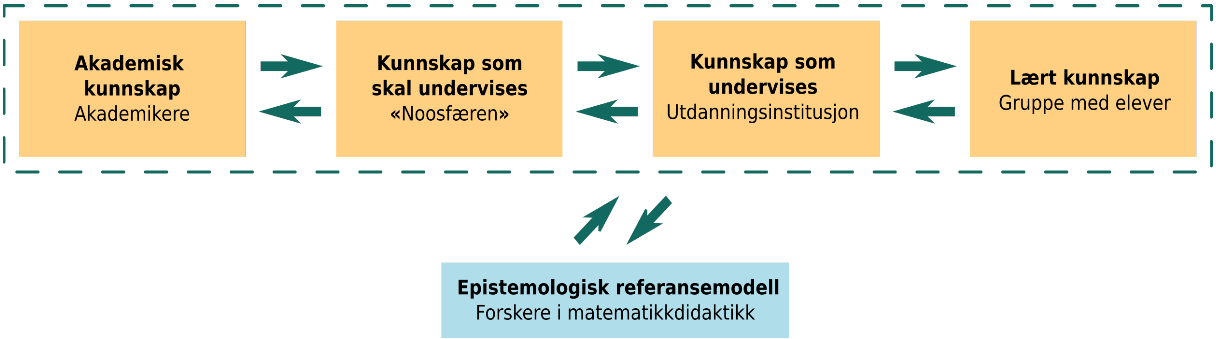
Et annet viktig begrep i ATD er *didaktiske transposisjonsprosesser*, som innebærer hvordan kunnskap gjennomgår en transposisjon mellom institusjoner. Som allerede nevnt er det viktig i ATD å undersøke institusjonelle forhold og konstruksjoner av kunnskap, og dette begrepet får frem kunnskapens avhengighet av institusjoner og hvordan kunnskapen som undervises i skolen konstrueres. I læringsprosesser er det alltid noe kunnskap som skal læres, og Figur 2.1 illustrerer hvordan den matematiske kunnskapen transformeres fra det akademiske felleskapet til utdanningsinstitusjoner, og til slutt til klasserommet og hva elevene faktisk lærer. I matematikk stammer «kunnskapen som skal undervises» fra den akademiske kunnskapen, som ofte konstrueres på universiteter. For å gjøre denne kunnskapen mer forståelig for elever transformeres denne kunnskapen i det vi her kaller *noosfæren*, altså sfæren av de som «tenker»[2] på undervisning. Dette innebærer blant annet de som lager læreplanen, forskere, lærere og lærebokforfattere. Vi kan derfor få tilgang til «kunnskap som skal undervises» gjennom læreplan, lærebøker, skoledokumenter og liknende (Chevallard & Bosch, 2020b).

Siden kunnskap er avhengig av institusjoner, er det som forsker viktig å frigjøre seg fra forståelsen og synspunktene til institusjonen som undersøkes. Dette gjøres ved å utvikle en *epistemologisk referansemodell*, som fungerer som et sammenligningsgrunnlag i forskningen. I denne studien undersøker jeg *kunnskap som skal undervises* i differensialregning i matematikk R1, og

[2] Det greske ordet nóos ($\nu\acute{o}o\zeta$) betyr «mind as used in resolving and purposing» og «thought» (Nóoζ, 2020)

Figur 2.1

Illustrasjon av didaktiske transposisjonsprosesser og forskeres posisjon.



Merknad: Figuren er tilpasset etter Bosch og Gascón (2014, s. 71).

dette ved å analysere innholdet i læreboken *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021). Den epistemologiske referansemodellen brukes i denne studien som et verktøy for å frigjøre meg fra lærebokforfatternes sine perspektiver på kunnskapen jeg undersøker.

Den epistemologiske referansemodellen utvikles blant annet ved hjelp av en prakseologisk analyse, der data fra det matematiske samfunnet, utdanningsinstitusjoner og klasserommet brukes til å undersøke spørsmålene: «Hvilke prakseologier undervises i skolen og hvorfor? Hva består de av? Hvor kommer de fra?» (Bosch & Gascón, 2014, s. 70, min oversettelse). Den epistemologiske referansemodellen handler altså om den matematiske målkunnskapen k som skal læres i et didaktisk system $S(X, Y, k)$, og undersøker hva k består av, dens opprinnelse, hva den brukes til og hvorfor den undervises i utdanningsinstitusjonen (Bosch & Gascón, 2014). For differensialregning vil det da være nødvendig å undersøke de fire spørsmålene: 1) Hva består differensialregningen av? 2) Hva var spørsmålene som motiverte til utvikling av differensialregning? 3) Hvilke områder brukes denne kunnskapen på i dag? og 4) Hvorfor skal differensialregning undervises i skolen? En epistemologisk referansemodell for kunnskap om differensialregning i R1 er presentert i Kapittel 4.

Begrepet *didaktisk transposisjon* er utviklet som et analyseverktøy for å frigjøre kunnskap og forskning fra utdanningsinstitusjonene sine synspunkter, og for å undersøke og bli bevisst på de aktuelle perspektivene på kunnskap og læring. Dette gjøres for å ikke ta for gitt kunnskapen som læres i skolen, men å undersøke og stille spørsmål om hva kunnskapen består av. Denne distanseringen fra de gjeldende synspunktene i skolen, som er sentralt i ATD, gjør den didaktiske transposisjonen av en målkunnskap til et viktig objekt for forskning. Dette fører til en større forståelse av hvilke valg som er tatt i konstruksjonen av kunnskap som skal undervises, og derfor også hva som er utelatt eller forenklet i transposisjonen som har betydning for hva slags forståelse elevene sitter igjen med (Chevallard & Bosch, 2020b).

2.4 Paradigmet som innebærer å stille spørsmål om verden

Chevallard (2015) kritiserer det han mener er det gjeldende didaktiske paradigmet i skolen: *paradigmet som innebærer å besøke arbeider*. I likhet med hvordan *oppgave* er brukt i prakseologier forstås *arbeider* her i en vid forstand og innebærer et hvilket som helst objekt skapt av mennesker. Chevallard definerer et paradigme som «en mengde regler som implisitt foreskriver hva som skal studeres – hva målkunnskapen k kan være – og på hvikle måter k studeres» (Chevallard, 2015, s. 174, min oversettelse). I paradigmet som innebærer å besøke arbeider er arbeidene som undervises delt opp i små adskilte deler, og de undervises gjerne uavhengig av hverandre uten å trekke større linjer mellom de ulike arbeidene. Dette skjer ofte uten at elevene vet noe om deres eksistensberettigelse (deres *raisons d ´être*), altså hvor de kommer fra, hvorfor denne kunnskapen oppsto og hvordan den er nyttig. Chevallard mener at dette delvis skyldes de udemokratiske sosiale strukturene som tidligere dominerte i samfunnet. Han argumenterer for at dette sitter igjen i skolesystemet, og at det fører til at elevene «besøker» ulike arbeider som ofte er bestemt av tradisjon.

Chevallard (2015) argumenterer for at paradigmet som innebærer å besøke arbeider skaper mange ulemper for elevene. For det første mener han at det er en tendens til at elevene glemmer eller ignorerer det de har lært så fort en eksamen eller en prøve er ferdig. Tett knyttet opp til dette hevder han at elever ofte ikke ser på kunnskapen de lærer på skolen som noe som kan brukes utenfor skolen, spesielt når det gjelder kunnskapen som læres i matematikk. I tillegg kan dette paradigmet føre til at elevene flykter fra problemer de ikke kan løse med det de allerede kan, og at de tror det alltid er en person som kan undervise det de trenger å vite.

For å overkomme disse utfordringene lanserer Chevallard (2015) et nytt didaktisk paradigme; *paradigmet som innebærer å stille spørsmål om verden*. Som en motsetning til det gamle paradigmet ønsker det nye paradigmet å fremme holdninger hos elever som gjør at de tar stilling til spørsmål de møter på, og at de ikke gir opp hvis spørsmålet ikke kan besvares ved det de allerede kan. Spørsmål er helt sentralt i dette paradigmet, og hva som læres i et emne eller kurs bestemmes av spørsmål. Dermed vil lærere presentere spørsmål for elevene, og elevene vil undersøke spørsmålet og jobbe for å finne et svar på det med veiledning fra læreren. Derfor vil ikke kunnskapen som elevene lærer være bestemt på forhånd, men være avhengig av spørsmålene som er stilt og hvordan elevene velger å svare på spørsmålene.

Paradigmet som innebærer å stille spørsmål om verden inviterer elevene til å undersøke verden, stille nye spørsmål og løse nye problemer. Dette mener Chevallard (2015) vil bidra til at elevene ikke flykter fra problemer de ikke umiddelbart ser en løsning på, men i stedet har tro på at de har mulighet til selv å finne en løsning. Chevallard hevder at dette skiller seg fra mange former for undersøkende undervisning der de ofte starter med et spesifikt spørsmål som får elevene til å undersøke en på forhånd bestemt målkunnskap k. I motsetning til dette vil spørsmål i det nye paradigmet være åpne og ofte fremme flerfaglige undersøkelser.

Kapittel 3

Metodisk tilnærming

Som presentert i introduksjonen undersøker jeg i denne oppgaven forskningsspørsmålet «Hvilke matematikkfaglige elementer består differensialregning i matematikk R1 av, og hvilke didaktiske transposisjonsprosesser har disse elementene gjennomgått?» I dette kapitlet presenterer jeg det metodiske rammeverket som er tatt i bruk for å besvare dette forskningsspørsmålet. I kapittel 3.1 presenterer og begrunner jeg metodene jeg benytter i studien, før jeg gjør rede for valg av datamateriale og tema for studien i Kapittel 3.2. Videre presenterer jeg konteksten til læreverk i Kapittel 3.3. Etter dette presenterer jeg analyseverktøy fra ATD, først om matematiske organiseringer i Kapittel 3.4, og så om didaktisk transposisjonsanalyse i Kapittel 3.5. Til slutt er en vurdering av forskningsetiske betraktninger i Kapittel 3.6.

3.1 Forskningsdesign

For å undersøke hvilke matematikkfaglige elementer differensialregning i matematikk R1 består av, har jeg undersøkt resultatet av de didaktiske transposisjonsprosessene av disse elementene slik de kommer frem i kunnskap som skal undervises i matematikk R1. Dette har jeg gjort ved en prakseologisk analyse, som innebærer å identifisere de fire prakseologiske komponentene oppgave T, teknikk τ, teknologi θ og teori Θ. Denne studien faller under det kvalitative forskningsparadigmet. Kvalitativ forskning tar utgangspunkt i en eller flere av disse tre metodene for datainnsamling: intervjuer, observasjoner og dokumenter (Patton, 2002), der jeg i denne studien tar utgangspunkt i dokumenter. Utvalg av dokumenter som undersøkes presenteres i Kapittel 3.2.

Begrepet didaktisk transposisjon fra ATD er et viktig begrep i min studie, og med referanse til modellen av didaktisk transposisjon (Figur 2.1) i Kapittel 2.3, ønsker jeg å undersøke kunnskap som skal skal undervises i differensialregning i R1. For å besvare forskningsspørsmålet mitt presentert i Kapittel 1 og å undersøke kunnskap som skal undervises, har jeg undersøkt hvordan differensialregning presenteres i læreboken *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021) og hva differensialregning består av i denne boken. Som forklart i Kapittel 2.1 har ATD fokus på å løsrive seg fra institusjonenens syn på kunnskap, slik at dette synet ikke tas for gitt av forskeren. Dette har vært viktig for å ikke kun undersøke hvilke elementer differensialregningen i en lærebok i R1 består av, men også kunne finne ut hvilke transformasjoner denne kunnskapen har gjennomgått og hvorfor, ved å sammenligne og vurdere dette opp mot en epistemologisk referansemodell.

I tillegg til didaktisk transposisjon er det er flere begreper og analyseverktøy fra ATD som har vært viktige i min dokumentstudie. Begrepet prakseologi (se Kapittel 2.2) har gitt meg en måte å beskrive, analysere og undersøke matematikkfaglige elementer på. Ved hjelp av *matematisk organisering (MO)*, som jeg presenterer i Kapittel 3.4, har jeg sortert og modellert de matematikkfaglige elementene i differensialregning i *Mønster R1*. For å både få oversikt over de matematikkfaglige elementene og for å kunne undersøke og vurdere disse, har jeg valgt å dele opp analysen min i to deler. Den første innebærer å identifisere og presentere innholdet i differensialregning i læreboken i matematiske organiseringer, og den andre delen innebærer en didaktisk transposisjonsanalyse av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)».

3.2 Datamateriale og tema

I denne studien tar jeg utgangspunkt i én lærebok i matematikk R1, læreplanen LK20 for matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021b), og to lærebøker for kalkulus på universitetet. I valg av lærebok for matematikk R1 tok jeg utgangspunkt i de tre forlagene Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, som alle har læreverk i matematikk for videregående skole. Alle de tre forlagene ga ut nye lærebøker i matematikk R1 i forbindelse med at fagfornyelsen ble innført i dette faget høsten 2021. Med utgangspunkt i disse tre læreverkene valgte jeg Gyldendal sin lærebok *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021). Denne læreboken er helt ny, og ikke en videreføring av tidligere læreverk, slik som *Sinus R1: Matematikk* av Oldervoll et al. (2021) fra Cappelen

Damm og *Matematikk R1* av Borgan et al. (2021) fra Aschehoug. I tillegg opplever jeg denne læreboken som mer utforskende enn de to andre lærebøkene, noe som er i tråd med læreplanen LK20. Til slutt har teknologien innenfor differensialregning en sentral plass i *Mønster R1*, noe som var viktig for å kunne undersøke begrunnelser og bevis i dette temaet.

I valg av matematisk tema ønsket jeg å se på noe som i stor grad introduseres først i matematikk R1, slik at fokuset var på matematikk R1 og ikke på forkunnskapene som det er antatt at elevene skal ha før dette faget. Derivasjon introduseres kort i matematikk T, men dette er kun med utgangspunkt i kompetansemålet «bruke gjennomsnittleg og momentan vekstfart i konkrete døme og gjere greie for den deriverte» (Utdanningsdirektoratet, 2020). I matematikk R1 er differensialregning derimot et stort og sentralt tema, der fem av tolv kompetansemål omhandler derivasjon. Det at differensialregning er et sentralt tema i matematikk R1 sammen med at elevene har få forkunnskaper fra før, var noe av det som var viktigst i valget av differensialregning som matematisk tema for min studie.

For å kunne sammenligne hvordan differensialregning presenteres på universitetet i forhold til i matematikk R1, har jeg inkludert de to universitetsbøkene *Kalkulus* (Lindstrøm, 2016) og *Calculus: A Complete Course* (Adams & Essex, 2018). Siden *Kalkulus* er på norsk gir denne boken er god oversikt over norske begreper, samt at den inneholder en oversiktlig presentasjon av innholdet i derivasjon. Den har imidlertid ikke en tilstrekkelig teknologi for derivasjonsreglene, og derfor har jeg valgt å ta i bruk *Calculus: A Complete Course*, som presenterer flere ulike typer bevis for derivasjonsreglene.

3.3 Læreverk som dokumenter i forskning

For å undersøke konteksten til dokumentet som er hovedfokus i min studie, *Mønster R1*, ser jeg her på den politiske og sosiale konteksten til læreverk og lærebøker, samt forskning om bruk og betydning av læreverk i skolen. Både Bowen (2014) og Cohen et al. (2007) trekker frem at konteksten til dokumenter som undersøkes er viktig for å bestemme reliabiliteten og validiteten til dokumentet.

Utdanningsdirektoratet (2021a) definerer *læreverk* som «læremidler som dekker en større del av læreplanverket; typisk ett eller flere fag over flere årstrinn», der *læremidler* er definert ved at det er (1) «utviklet til bruk i opplæringen», (2) «er i regelmessig bruk» og (3) «dekker elementer i læreplanverket». I Norge var det lenge en godkjenningsordning for lærebøker i skolen, og disse hadde røtter helt tilbake til 1889. Dette var først en ordning kun for innholdet i kristendomsbøkene, men senere en kvalitetssikring av lærebøker i alle fag både i grunnskolen og i den videregående skole. Denne kvalitetssikringen innebar blant annet at innholdet skulle være i samsvar med læreplanmålene og at de var tilpasset til det aktuelle alderstrinnet (NOU 1995: 18, s. 118). Denne ordningen ble opphevet i år 2000, og kravene som nå stilles til lærebøker i opplæringsloven er kun rettet mot språk og rettskriving (Opplæringslova, 1998). Denne endringen førte til at forlagene nå har mindre retningslinjer for hvordan læreverk skal utformes og hva de skal inneholde, og at det i større grad er opp til skoler og lærere å vurdere kvaliteten til læreverkene.

Selv om godkjenningsordningen for lærebøker er opphevet, har utdanningsdirektoratet utviklet en rekke verktøy for å vurdere læreverk, samt rapporter som tar for seg kvaliteten til læreverk i ulike fag. En av disse rapportene er *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk* (Utdanningsdirektoratet, 2018), som, forankret i forskningen, undersøker og presenterer kvalitetskriterier for læreverk i matematikk. Med utgangspunkt i denne rapporten har de også utviklet et verktøy for å vurdere læreverk, som de anbefaler at lærere skal bruke «i et kollektivt arbeid med vurdering av læremidler på skolen eller i kommunen» (Utdanningsdirektoratet, u.å.). Ettersom disse verktøyene brukes i arbeid med å velge ut læremidler som blir brukt ved skolene, kan en anta at slike rapporter og verktøy påvirker lærebokforfatterenes valg i arbeid med lærebøker.

Lærebøker har i mange år vært viktige i norsk skole. Både Knudsen et al. (2011) og Juuhl et al. (2010) trekker frem at lærebøker spiller en viktig rolle i læringsarbeidet i norsk skole, og de er viktige i planlegging og gjennomføring av undervisning i alle fag. Dette er også gjeldende i matematikk. I en undersøkelse i prosjektet ARK&APP gjennomført av Gilje et al. (2016), som undersøkte ulike former for undervisnings- og læringspraksiser i flere fag i den norske skolen, svarte rundt fire av fem matematikklærere at de hovedsaklig bruker papirbaserte læremidler. På spørsmål om hvilke typer læremidler de brukte sist time, svarte like mange at de hadde tatt i bruk en lærebok. Kongelf (2019) trekker frem i sin doktoravhandling flere studier som viser sammenheng mellom lærebok og elevprestasjoner. Videre argumenterer han for at «læreboken er det mest sentrale bindeleddet mellom kompetansemålene i læreplanen og de pedagogiske praksisene i skolen, og dermed må kunne antas å være en sentral brikke i elevens utvikling av matematisk kompetanse» (Kongelf, 2019, s. 22–23). Dette bruker han til å understreke viktigheten av å forske på innholdet i lærebøker.

Van den Ham og Heinze (2018) ser i sin studie på effekten av ulike lærebøker på elevenes prestasjoner, der læreplanen er lik. Også de understreker at lærebøker kan sees på som et bindeledd mellom det offentlige pensum, og pensum slik den blir implementert av lærere i skolen. Videre trekker de frem at innholdet i lærebøker i matematikk varierer med ulike pedagogiske og kulturelle intensjoner og tradisjoner, og derfor kan variere mellom ulike land og kulturer. De konkluderer i sin studie med at valg av lærebok i matematikk har betydelig effekt på elevenes prestasjoner, og at derfor bør lærebøker sees på som en viktig faktor for elevenes læring i forskning på utdanning.

Som allerede nevnt er det sentralt at læreverk dekker en større del av læreplanverket, slik at målene i læreplanen er rettledende for utvikling av læreverket. Dette innebærer at en lærebok som har som mål å være dekkende for et fag, tar utgangspunkt både i den overordende delen av læreplanen og i fagets kompetansemål. Læreboken *Mønster R1* hevder at «boka dekker målene i gjeldende læreplan i matematikk for realfag – programfag i utdanningprogram for studiespesialisering (MAT03–02)» (Kalvø et al., 2021, s. 2). Siden læreverket er styrende for læreboken og også skal være styrende for undervisning i faget, så kan vi se på innholdet i differensialregning i *Mønster R1* som forfatterenes konkretisering av innholdet i læreplanen i differensialregning i matematikk R1.

Selv om tidligere forskning viser stor bruk av lærebøker i skolen, er dette noe som er i endring på grunn av digitalisering i skolen. Gilje (2021) trekker frem av alle elever på videregående skole nå ha tilgang til en egen digital enhet tilknyttet internett, noe som åpner for større bruk av digitale læremidler. Videre hevder han at det har vært en stor økning i bruk av digitale læremidler de siste årene, og at omsetningen av digitale læremidler var nesten like høy som for papirbaserte læremidler i 2020. Han mener at dette tyder på en endring i læremiddelkulturen, som påvirker lærebøkenes betydning for undervisning. Selv om læremiddelkulturen er endret og digitale læremidler brukes på en litt annen måte enn tradisjonelle lærebøker, kan en anta at mye av forskningen på lærebøker er overførbar til digitale læremidler, blant annet at innholdet i læremidlene kan ha betydning for elevenes læring og prestasjoner. Uavhengig av hva slags type læremiddel som brukes er det da interessant å se på innholdet i disse. Selv om jeg i denne studien ser på innholdet i lærebøker, vil metodene jeg bruker i stor grad være overførbar til andre typer læremidler.

3.4 Matematisk organisering av kunnskapen

For å undersøke og å få oversikt over innholdet i differensialregning i *Mønster R1* har jeg tatt utgangspunkt i begrepet *matematisk organisering* som er utviklet med utgangspunkt i prakseologier (se Kapittel 2.2). Typer oppgaver, teknikker, teknologier og teorier brukes i ATD til å modellere matematisk aktivitet og matematisk kunnskap. Til sammen danner de det Barbé et al. (2005) kaller *matematisk prakseologisk organisering*, eller *matematisk organisering* (MO). Dersom en MO er basert på en spesiell type oppgave i en institusjon kalles det en *matematisk punktorganisering* (punkt-MO) (punctual MO). En punkt-MO kan for eksempel være definert ved oppgaver som «Finn den deriverte av en funksjon ved hjelp av definisjonen til den deriverte», eller «Finn vendepunktet til en funksjon», og samler oppgaver med lik teknikk. En samling av flere punkt-MO-er som alle deler den samme teknologien kalles en *lokal MO*. Videre kalles en samling av flere lokale MO-er som deler den samme teorien, en *regional MO* (Barbé et al., 2005).

Jeg har organisert innholdet i læreboken *Mønster R1* i MO-er gjennom en prakseologisk analyse. I en prakseologisk analyse brukes begrepet prakseologi til å forstå og analysere menneskelig aktivitet, ved å identifisere de fire komponentene av prakseologien. Relatert til undervisning kan en prakseologisk analyse av kunnskap som skal undervises klargjøre hvordan kunnskapen er oppbygd, noe som igjen kan identifisere utfordringer ved å lære kunnskapen. På denne måten kan begrepet prakseologi brukes som en modell for å analysere, og dermed skape bedre forståelse av, kunnskap som skal undervises og kunnskap som læres (Cirade & Crumière, 2020, s. 166). Videre har jeg brukt punkt-MO-er og lokale MO-er til å undersøke hvordan innholdet er bygd opp og henger sammen. En slik undersøkelse av innholdet i lærebøker for et spesielt tema er tidligere gjort av Barbé et al. (2005), Wijayanti og Winsløw (2017) og González-Martín et al. (2013). Barbé et al. (2005) undersøker det matematiske temaet grenseverdier av funksjoner, Wijayanti og Winsløw (2017) undersøker proporsjoner og González-Martín et al. (2013) tar for seg introduksjonen av reelle tall. Det er derfor ingen av disse studiene som har hatt fokus på differensialregning. I min studie har jeg, inspirert av den metodiske tilnærmingen til disse tre studiene, undersøkt differensialregning i *Mønster R1* ved å identifisere de eksisterende matematiske organiseringene i dette tema.

For å identifisere de eksisterende MO-ene i differensialregning i *Mønster R1* startet jeg med å identifisere kapitlene som inneholdt differensialregning, i dette tilfellet var det «Derivasjon» (Kapittel 3) og Funksjonsdrøfting (Kapittel 4). Deretter tok jeg utgangspunkt i eksemplene i disse to kapitlene for å undersøke hva slags type oppgaver og teknikker som ble brukt, og samlet eksempler med samme teknikk i samme punkt-MO. Eksempler som ikke var direkte under temaet differensialregning, så jeg bort fra. Videre undersøkte jeg alle oppgavene i de to kapitlene, og kategoriserte oppgavene inn i punkt-MO-ene som var funnet med utgangspunkt i eksemplene. Dersom oppgavene ikke passet inn i punkt-MO-ene som allerede var funnet, utviklet jeg nye punkt-MO-er slik at alle oppgavene kunne klassifiseres i en punkt-MO, definert ved samme teknikk. Denne kategoriseringen besto av praksisblokka til MO-ene, altså typer oppgaver og teknikker. For å samle punkt-MO-ene til lokale MO-er, undersøkte jeg teknologien til de ulike MO-ene. I tillegg til at jeg så på den teknologien som ble presentert i *Mønster R1*, undersøkte jeg den teknologien som ble presentert i *Kalkulus* av Lindstrøm (2016), lærebok for universitetet, ettersom teknologien som var presentert i *Mønster R1* ikke var tilstrekkelig. Deretter samlet jeg de punkt-MO-ene med samme teknologi i lokale MO-er. Denne modellen av differensialregning i læreboka ga da en oversikt over hvilke typer oppgaver som ble brukt i boken, hvor hyppig disse typer oppgaver ble brukt, i tillegg til at den ga en oversikt over hvilke oppgaver som delte samme teknologi. Videre ga MO-ene mulighet for å undersøke logosblokka, altså hvordan teknikkene blir begrunnet og i hvilken grad teori presenteres i boken.

3.4.1 Valg i kategorisering av MO-er

I kategorisering av eksempler og oppgaver inn i ulike MO-er var det mange valg jeg måtte ta underveis, og det var stadig endringer i kategoriseringen. Den første utfordringen i kategorisering var hva jeg ser på som én oppgave, og jeg endte med å se på en deloppgave som én oppgave. Hvis én deloppgave inneholdt flere spørsmål som hørte til ulike punkt-MO-er, valgte jeg å se på det som flere oppgaver, slik at samme deloppgave i boka kunne høre til i flere MO-er. Tilsvarende valgte jeg å kategorisere en oppgave i flere MO-er dersom det ble brukt en kombinasjon av to ulike teknikker.

For at oppgavene jeg kategoriserte skulle representere differensialregning i boka, valgte jeg å se bort ifra oppgaver som ikke handlet direkte om differensialregning. Hvis en oppgave for eksempel besto av «a) finn den deriverte av f» og «b) løs $f'(x) = 3$», så har jeg kun inkludert Oppgave a), siden b) er å løse en likning og dermed ikke direkte en del av differensialregning. I utvalg av oppgaver har jeg også valgt å ikke inkludere noen typer oppgaver som tar i bruk derivasjon, men som er utenfor de to kapitlene jeg i utgangspunkt har sett på. Dette inkluderer modellering i Python med diverse modelleringsmetoder som inkluderer bruk av derivasjon, derivasjon brukt i posisjons-, hastighets-, og akselerasjonsvektorer, og å finne minste avstand mellom to vektorer. I tillegg inkluderer det oppgaver om omvendte funksjoner, der flere oppgaver ber oppgaveløseren om å bruke den omvendte funksjonen til å finne den deriverte. Dette er alle oppgaver der derivasjon er i bruk, men der differensialregning ikke er i fokus.

3.5 Didaktisk transposisjonsanalyse

For å få en dypere forståelse av hvilke valg som er tatt i konstruksjonen av kunnskapen i differensialregning i R1, har jeg sett nærmere på en av punkt-MO-ene i *Mønster R1*, og gjort en didaktisk transposisjonsanalyse av denne. Denne analysen bygger på begrepet didaktisk transposisjon som ble presentert i Kapittel 2.3, som beskriver hvordan kunnskap transformeres fra akademisk kunnskap, til kunnskap som skal undervises, til kunnskap som undervises og til slutt til lært kunnskap. Som forklart i Kapittel 2.3 består *noosfæren* av de som konstruerer kunnskap som skal undervises, og det er her den akademiske kunnskapen transformeres for at kunnskapen skal være mer forståelig og relevant for elevene. Ettersom læreboken *Mønster R1* er et type svar på kunnskap som undervises, så er lærebokforfatterne en del av noosfæren. Dermed kan analyse av innholdet i læreboken gi innsikt i hvilke valg som tas og forenklinger som gjøres i noosfæren, noe som videre har betydning for hvilken kunnskap som undervises, som igjen har betydning for hva elevene lærer.

Den didaktiske transposisjonsanalysen jeg har gjort i denne studien handler altså om overgangen fra akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises, og hvilke valg, forenklinger, og transformasjoner som er gjort i konstruksjon av kunnskapen som skal undervises. For å begrense hva jeg ser på har jeg tatt utgangspunkt i en av punkt-MO-ene fra *Mønster R1*, og sett på kunnskapen som er inneholdt i denne, spesielt med utgangspunkt i logosblokka til MO-en, altså teknologi og teori. Innholdet i MO-en sammenlignet jeg med den epistemologiske referansemodellen som presenteres i Kapittel 4, samt hvordan kunnskapen presenteres i de to universitetsbøkene *Kalkulus* og *Calculus: A Complete Course*. Jeg har inkludert de to lærebøkene for universitetet for å undersøke den akademiske kunnskapen av differensialregning, slik at jeg kan analysere overgangen mellom akademisk kunnskap og kunnskap som skal undervises (se Figur 2.1 i Kapittel 2.3). Jeg har i den didaktiske transposisjonsanalysen altså undersøkt hvordan kunnskapen i denne MO-en ble til, hvordan den presenteres på universitetet og hvordan den presenteres og begrunnes i *Mønster R1*. Denne analysen presenterer jeg i Kapittel 5.3.

3.6 Forskningsetiske betraktninger

Forskningsetikk er et sett med normer og regler som har som hensikt å fremme ansvarlig og god forskning, og som er forankret i det internasjonale forskerfellesskapet. Disse reglene og normene er knyttet til ansvar overfor hverandre i forskerfellesskapet, hensyn til personer, grupper og institusjoner, forpliktelser overfor oppdragsgivere, finansiører og samarbeidspartnere, og forskerformidling, altså hvordan forskere og forskningsinstitusjoner formidler vitenskapelige resultater. Spesielt står hensyn til personer som inngår i eller deltar i forskning ofte sterkt i samfunnsvitenskaplig forskning, med en rekke retningslinjer for melding av forskningsprosjekt og samtykkekrav for forskningsdeltakere (NESH, 2021). Siden min studie er en dokumentstudie er det ingen personer som deltar i forskningen, og det er heller ikke innhentet noen personopplysninger. Bowen (2009) trekker frem at en fordel med dokumentstudier er at gjenstanden for forskningen, dokumentene, ikke påvirket av forskningen. Han hevder at refleksivitet i utgangspunktet ikke er noe problem i dokumentstudier, altså at forskeren påvirker forskningsobjektet. Dette fører også til at det er færre etiske overveielser i dokumentstudier enn forskning der forskningsobjektet er mennesker.

Selv om det ikke er noen forskningsdeltakere i min studie er det noen forskningsetiske hensyn å ta. Det er viktig at forskeren skiller mellom beskrivelse og analyse, og at analysen bygger på forskningsbaserte perspektiv og teorier. Dette er for å tydelig begrunne fortolkningen, spesielt i fortolkning av andres motiv (NESH, 2021). Siden jeg i min studie undersøker valg som er tatt med hensyn til innholdet i en lærebok, inngår det i min studie til en viss grad tolkning av forfatternes motiv i arbeid med læreboken. Jeg har gjennom hele analysen brukt analytiske og teoretiske verktøy for å fortolke innholdet, og for holde analysen mest mulig objektiv og ikke tillegge forfatterne synspunkter og intensjoner det ikke er grunnlag for. Jeg har i studien min ikke som hensikt å vurdere kvaliteten av læreboken eller å si at boken er «god» eller «dårlig», men derimot å belyse valg og variasjoner i hvordan innholdet i differensialregning presenteres slik det er fremstilt i *Mønster R1*, samt å analysere hvilke didaktiske tranformasjoner punkt-MO-en «Finn den deriverte» har vært gjenstand for. Jeg har innhentet tillatelse til å bruke figurer fra *Mønster R1* til bruk i min analyse. Dette gjelder Figur 5.1 og Figur 5.2 presentert i henholdsvis Kapittel 5.3.3 og 5.3.4.

Kapittel 4

Forberedende analyse - Differensialregningens opprinnelse og utvikling år ca.1670–1830

Som forklart både i Kapittel 2.3 og Kapittel 3.5 er det sentralt å utvikle en epistemologisk referansemodell for å ha et sammenlikningsgrunnlag for forskningen, slik at institusjonenes syn på kunnskap ikke tas for gitt. I dette kapitlet presenterer jeg min epistemologiske referansemodell for differensialregning. Dette innebærer hva differensial er og hva differensialregning består av i Kapittel 4.1 og en historisk gjennomgang av differensialregning og ulike definisjoner av den deriverte i Kapittel 4.2. Videre ser jeg på teknikker for å finne maksimums- og minimumspunkter i Kapittel 4.3, og middelverdisetningen og den dobbeltderiverte i Kapittel 4.4. Til slutt undersøker jeg funksjonsbegrepets historie og utvikling i Kapittel 4.5 og hva differensialregning innebærer i læreplanen for Matematikk R1 i Kapittel 4.6.

4.1 Differensialer og differensialregning

Differensialregning er en undergren av kalkulus, også kalt matematisk analyse, og handler om hvordan størrelser endrer seg. Endringen kan for eksempel være bevegelse som i mekanikken, eller utvikling som i biologien. Differensialregning inneholder blant annet differensiallikninger, regler for grenseverdier slik som L'Hôpitals regel, funksjonsdrøfting og derivasjon. Derivasjon er helt sentralt i differensialregningen fordi den deriverte av en funksjon er lik den momentane endringsraten til funksjonen. Hvis en matematisk funksjon beskriver hvordan et visst fenomen forandrer seg med tiden, vil den deriverte funksjonen være et uttrykk for hvor hurtig denne forandringen skjer i hvert øyeblikk. Det er også denne delen av differensialregning som er en del av læreplanen i matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021b), og som derfor er i fokus her.

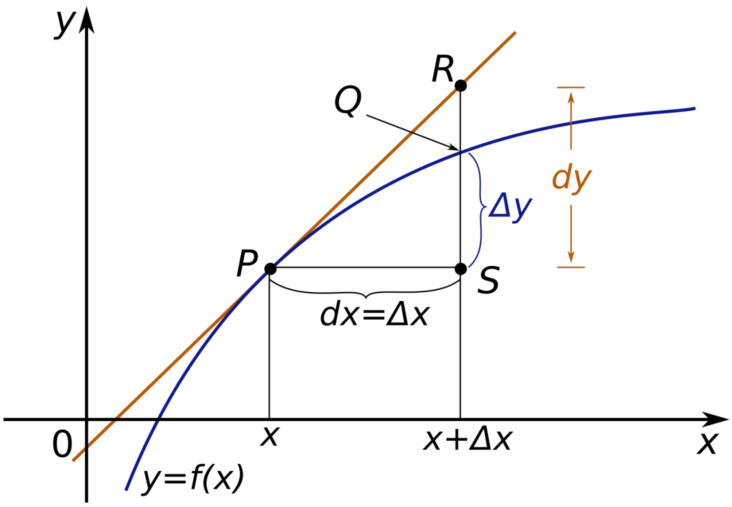
Den deriverte funksjonen beskriver for eksempel hastigheten til et legeme i bevegelse, reaksjonsfarten i en kjemisk reaksjon eller hvor raskt folketallet i et land endrer seg (Aubert, 2018). Derivasjon helt sentralt i funksjonsdrøfting. For en deriverbar funksjon, kan vi ved hjelp av derivasjon finne minimums- og maksimumspunkter for funksjonen, finne vende- og terrassepunkter samt finne tangenten i en punkt på grafen til funksjonen. Nettopp fordi derivasjon brukes til å forstå hvordan ulike fenomener utvikler seg, brukes det til å løse en rekke problemer i dag. I dag brukes kalkulus blant annet til å beregne banene til satellitter og romfartøy, til å predikere befolkningsstørrelser, til å estimere hvor raskt oljeprisen stiger eller synker, og i værprognoser (Stewart, 2012, s. 8).

Begrepet *differensialregning* kommer av *differensial* som beskriver en endring. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), som regnes som en av de viktigste bidragyterne til tidlig kalkulus, introduserte differensialer i sin første artikkel om differensialregning fra 1684: «gitt en vilkårlig verdi dx, så er differensialet dy definert til å være verdien dy slik at forholdstallet $\frac{dy}{dx}$ er lik stigningstallet til tangenten» (Edwards, 1979, s. 258). Stigningstallet til tangenten i et punkt er det vi i dag kaller den deriverte $f'(x)$. Med en moderne forståelse av Leibniz sin definisjon, med notasjonen for stigningstallet til tangenten som den deriverte $f'(x)$, kan vi skrive differensialet dy slik: $dy = f'(x)dx$. dx er her en uavhengig variabel, mens dy avhenger av dx og x.

En geometrisk forståelse av differensial tilpasset etter Stewart (2012) er vist i Figur 4.1. La $P(x, f(x))$ og $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ være to punkter på grafen til f og la $\Delta x = dx$. Da vil endring i y være $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Stigningstallet til tangenten PR er $f'(x)$, og dermed er avstanden mellom punktene S og R lik $f'(x)dx = dy$. Altså er dy hvor mye tangenten stiger eller synker, mens Δy er hvor mye grafen stiger eller synker. Dersom $dx \neq 0$, får vi $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, alstå at den deriverte beskrives som et forholdstall mellom differensialer (Stewart, 2012).

Figur 4.1

Illustrasjon av differensial dy.



Merknad: Figuren er tilpasset etter Stewart (2012, s. 254)

4.2 Opprinnelsen av kalkulus med fokus på differensialregning

Utvikling av derivasjon kan i følge Eves (1990) knyttes til å tegne tangenter på kurver, og å finne minimums- og maksimumsverdier til funksjoner. Dette problemet går helt tilbake til antikkens Hellas, men det hadde store fremskritt på 1600-tallet. Mange av de store matematikerne på 1600-tallet arbeidet med disse problemene og ga store bidrag til utviklingen av differensialregning. Blant annet oppdaget Johannes Kepler (1571–1630) at endringen til en funksjon blir veldig liten i nærheten av et maksimums- eller minimumspunkt, noe Pierre de Fermat (1607–1665) brukte for å utvikle en metode til å finne et maksimums- eller minimumspunkt til en funksjon. Selv om det er mange matematikere som bidro til utviklingen av kalkulus, er det Isaac Newton (1642–1727) og Leibniz som regnes som de viktigeste opphavsmennene av denne nye retningen innenfor matematikk (Eves, 1990, s. 390–410).

4.2.1 Problemer som motiverte til utvikling av differensialregning

Opprinnelsen til differensialregning og kalkulus kan knyttes til fire hovedtyper problemer (Kline, 1972, s. 342–343, min oversettelse):

1. Gitt formelen for strekningen et legeme beveger seg som en funksjon av tid, finn hastigheten og akserelasjonen på ethvert tidspunkt, og motsatt; gitt formelen som beskriver

akserelasjonen til et legeme som funksjon av tid, finn hastigheten og strekningen som legemet har beveget seg.

2. Finn tangenten til en kurve. Dette problemet var både et rent geometrisk problem og var viktig for flere vitenskapelige anvendelser, blant annet til design av linser i optikk.

3. Finn maksimums- og minimumsverdi til en funksjon. Dette problemet var blant annet knyttet til studier av himmellegemers bevegelse og avstander mellom disse.

4. Finn lengden til kurver, for eksempel avstanden som et himmellegeme har beveget seg over et gitt tidsintervall, areal som avgrenses av en kurve, volum som avgrenses av overflater og tyngdepunkter til legemer.

Disse fire problemene var i følge Kline (1972) både rent matematiske problemer og sentrale for mange ulike fagområder, og det var derfor en rekke matematikere som arbeidet med disse utfordringene. Det skulle senere vise seg at de fire problemene alle var knyttet til integrasjon og derivasjon. Noe av det som skapte utfordringer i utvikling av derivasjon og integrasjon var det vi i dag kaller *infinitesimaler*, altså veldig små størrelser, noe som også gjaldt arbeid med differensialer. Blant annet brukte Fermat en størrelse $E \neq 0$ i sin utledning til en metode for å finne tangenter. I utregningen delte han først på E og så satte $E = 0$, uten å begrunne dette videre. Også Newton og Leibniz hadde utfordringer med hvordan regne med og begrunne bruk av små størrelser, og ingen av de hadde en tydelig og presis definisjon av de fundamentelle begrepene integrasjon og derivasjon. Leibniz skrev i et brev til matematiker John Wallis (1616–1703) i 1690 at «Det er nyttig å betrakte uendelig små størrelser slik at når deres forholdstall undersøkes, så betraktes de ikke som null, men at de elimineres når de forekommer sammen med uforlignelig større størrelser» (Kline, 1972, s. 384, min oversettelse). Disse utfordringene skulle senere løses blant annet ved å se på grenseverdier, et begrep både Wallis og James Gregory (1638–1675) beskrev, men som ikke fikk noen oppmerksomhet i sin tid.

4.2.2 Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz sine arbeider

Newton og Leibniz var også viktige bidragsytere til det vi dag kaller *analysens fundamentalteorem*[1], altså at derivasjon og integrasjon er inverse prosesser. Både Gregory og Barrow hadde

[1] Videre bruker jeg de synonyme begrepene *teorem* og *setning*. Jeg oversetter det engelske *theorem* til teorem, mens jeg beholder begrepet setning fra de tilfellene Lindstrøm (2016) benytter det.

oppdaget at problemene om tangent og areal under grafen var inverse problemer, mens Newton generaliserte disse ideene og oppdaget at man kunne finne arealet ved å reversere prosessen som innebar å finne endringsraten. Leibniz var den første som beskrev denne sammenhengen knyttet til integrasjon som en summasjonsprosess, altså at integrasjon som summasjonsprosess er det inverse av derivasjon. Newton og Leibniz arbeidet på veldig ulike måter. Mens Newton var empirisk, konkret og varsom i arbeidet sitt, var Leibniz mer spekulativ og modig i form av å generalisere sammenhenger selv om de matematiske bevisene ikke var rigorøse. Dette førte til at Leibniz publiserte flere metoder og konkrete resultater enn Newton, selv om Newton kom frem til flere av de samme resultatene. Dette gjaldt blant annet derivasjon av produktet av to funksjoner. Mens Leibniz presenterte denne regelen sammen med flere andre derivasjonsregler, visste Newton om denne regelen uten at han generaliserte og publiserte den. Leibniz var også opptatt av å utvikle notasjon, og det var han som innførte mye av den notasjonen vi bruker i dag for integrasjon og derivasjon. Blant annet brukte han $\int$ for sum i integrasjon, og dx som differansen mellom to etterfølgende x-verdier. Videre brukte han dy/dx for derivasjon, og d^n for den n-te deriverte.

Arbeidet Newton og Leibniz gjorde med å generalisere ideene om derivasjon og integrasjon av funksjoner la grunnlaget for kalkulus, en helt ny retning innenfor matematikken som ikke kun hadde utgangspunkt i geometrien slik som tidligere. Samtidig ble bevisene som lå til grunn for den nye matematikken sett på som uholdbare blant mange matematikere (Kline, 1972). Dette var spesielt knyttet til bruk og begrunnelse av infinitesimaler, og om infinitesimaler eksisterte. Leibniz hevdet at uavhengig av eksistens, så var infinitesimaler et nyttig verktøy som ledet til riktige løsninger på problemer (Edwards, 1979).

4.2.3 Definisjon av derivert funksjon

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) var den første matematikeren som hadde en tydelig definisjon av grenseverdi-begrepet. Ved hjelp av grenseverdi-begrepet definerte han infinitesimaler, eller uendelig små størrelser, som en variabel med grenseverdi lik null. Dermed unngikk han noen av de tidligere utfordringene med infinitesimaler, noe som gjorde at de ikke skapte like mye kontrovers som tidligere. Cauchy hadde også en tydelig definisjon av den deriverte som en grenseverdi av forholdstallet mellom differensialer. Med $\Delta x = i$, beskrev han dette forholdstallet som

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}. \tag{4.1}$$

Cauchy beskrev at selv om både teller og nevner vil gå mot grenseverdien 0 for en kontinuerlig funksjon, så vil selve forholdstallet gå mot en annen grenseverdi, enten positiv og negativ. Han skrev at (som referert i Edwards, 1979, s. 313)

> «This limit, when it exists, has a definite value for each particular value of x; but it varies with x ... The form of the new function which serves as the limit of the ratio $[f(x+i) - f(x)]/i$ will depend on the form of the proposed function $y = f(x)$. In order to indicate this dependence, one gives the new function the name of derived function, and designates it with the aid of an accent by the notation, y' or $f'(x)$».

Det engelske ordet *derived* kan her oversettes til *avledet*, som beskriver avhengigheten av den opprinnelige funksjonen. Det er allikevel begrepet *derivert funksjon* som brukes på norsk. Begrepet *derivasjon* sammen med notasjonen $f'(x)$ for den deriverte av $f(x)$, har sin opprinnelse fra matematikeren Joseph Louis Lagrange (1736–1813) (Edwards, 1979, s. 296-297).

Slik vi i dag forstår den deriverte av en funksjon, kan vi både se på den deriverte i et punkt og se på den deriverte som en funksjon. Ser vi på den deriverte i et punkt a på en funksjon f vil den deriverte, betegnet med $f'(a)$, kunne defineres på følgende måte:

> Den deriverte $f'(a)$ er den momentane endringsraten til $y = f(x)$ med hensyn til x når $x = a$ (Stewart, 2012, s. 146).

Ved en geometrisk tolkning vil dette være stigningstallet til tangenten til $f(x)$ i punktet a. For å finne et uttrykk for den deriverte i et punkt kan vi se på stigningstallet til en sekant gjennom punktene $P(a, f(a))$ og $Q(x, f(x))$ hvor $a \neq x$. Stigningstallet m_{PQ} til sekanten vil være gitt ved

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{4.2}$$

Lar vi nå Q nærme seg P ved å la x gå mot a slik som vist i Figur 4.2, vil stigningstallet til sekanten m_{PQ} gå mot signingstallet m til tangenten til $y = f(x)$ i $x = a$. Da får vi at den deriverte til funksjonen f i et punkt bestemt ved $x = a$ er gitt ved

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{4.3}$$

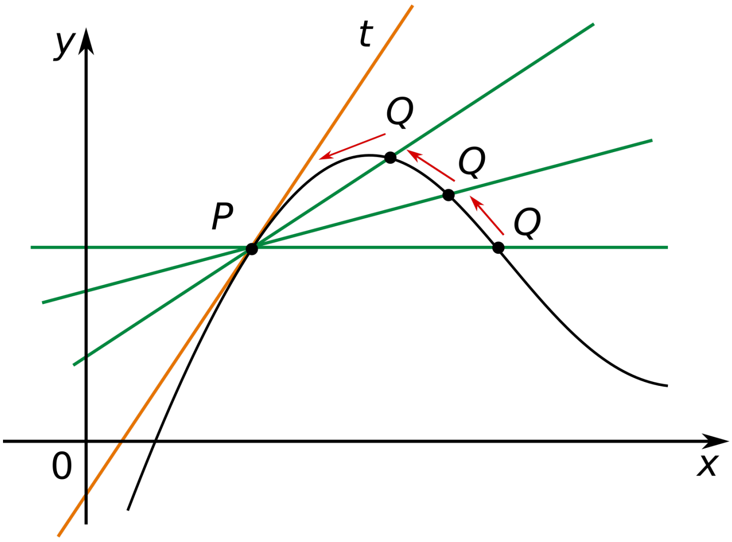
hvis denne grenseverdien eksisterer. Vi kan også se på $f'(x)$ som en funksjon, den deriverte av $f(x)$, og denne er gitt ved

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{4.4}$$

for tall x hvor denne grenseverdien eksisterer (Stewart, 2012, s. 140–153).

Figur 4.2

Sekanten PQ nærmer seg tangenten t når Q går mot P.



Merknad: Figuren er tilpasset etter Stewart (2012, s. 141).

Ved hjelp at disse definisjonene til den deriverte kan vi finne den deriverte til en funksjon, og vi kan utlede derivasjonsregler for ulike type funksjoner, som polynomer, eksponensialfunksjoner, logaritmefunksjoner, sammensatte funksjoner, brøkfunksjoner og produktet av to ulike funksjoner.

4.3 Maksimums- og minimumspunkter og Fermats teorem

Som utledet i Kapittel 4.2 var problemet med å finne maksimums- og minimumsverdier noe av det som initierte til utvikling av differensialregning. Edwards (1979) trekker Fermat frem som en av de som tidlig jobbet med maksimums- og minimumsproblemer. Selv om han arbeidet med lengder, omkrets og areal, kom han med sin metode frem til at endringer i en funksjon blir veldig liten nær et maksimums- eller minimumspunkt. Fermat begrunnet imidlertid ikke denne metoden på en presis måte, noe som har ført til at det i dag er uenighet om hva han mente. Edwards (1979) gir en begrunnelse med en moderne forståelse av Fermat sine arbeider, der $f(x)$ er en maksimums- eller minimumsverdi av funksjonen f. Edwards hevder at hvis e er liten, så vil $f(x) \approx f(x+e)$ i følge Fermat, og dermed $f(x+e)-f(x) \approx 0$. Videre skriver Edwards (1979) at siden $f(x)$ er et polynom, så er $f(x+e)-f(x)$ delelig med e, og ved å se bort ifra de leddene Fermat neglisjerte, så vil $\frac{f(x+e)-f(x)}{e} \approx 0$. Grenseverdien av denne brøken når $e \to 0$ er den moderne definisjonen av den deriverte (Likning 4.4), og dermed har vi $f'(x) = 0$ i maksimums- eller minimumspunktet. Det må her understrekes at denne forståelsen av Fermat sine arbeider er med moderne forståelse av både funksjon og derivasjon, og Fermat konstaterte verken at e skulle være liten eller skrev om grenseverdien når e går mot 0 (Edwards, 1979, s. 122–124).

Selv om Fermat ikke skrev om sammenhengen mellom maksimums- og minimumspunkt og den deriverte slik vi forstår den i dag, er denne sammenhengen oppkalt etter han. Herifra antar vi at $a < b$. Fermats teorem for stasjonærpunkt sier følgende:

> Anta at funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ har et maksimum eller et minimum i et indre punkt $c \in (a, b)$. Dersom f er deriverbar i c, må $f'(c) = 0$ (Lindstrøm, 2016, s. 289).

At den deriverte av en funksjon er lik 0 i maksimums- og minimumspunkter er en viktig egenskap, som danner grunnlaget for å undersøke mye av egenskapene til en funksjon. For bevise denne setningen må vi «vise at dersom $f(c) \neq 0$, så kan ikke c være et ekstremalpunkt» (Lindstrøm, 2016, s. 290). Vi antar at $f(c)$ er et ekstremalpunkt hvor $f'(c) > 0$ (vi kan behandle tilfellet hvor $f'(c) < 0$ på tilsvarende måte). Da har vi at

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \tag{4.5}$$

for alle x som er tilstrekkelig nær c. «Velger vi x litt større enn c, er nevneren $x - c$ positiv, og dermed må også telleren $f(x) - f(c)$ være positiv; det vil si $f(x) > f(c)$. Altså kan ikke c være et maksimumspunkt» (Lindstrøm, 2016, s. 290). Velger vi nå x litt mindre enn c vil nevneren $x - c < 0$ og dermed må telleren være negativ, $f(x) - f(c) < 0$, slik at $f(x) < f(c)$. Altså kan c heller ikke være et minimumspunkt. Dermed er $f(c)$ ikke et ekstremalpunkt, altså verken et minimums- eller maksimumspunkt (Lindstrøm, 2016, s. 290).

Fermats teorem forteller oss hvor vi kan finne ekstremalpunkter på en funksjon, og legger grunnlaget for følgende setning (Lindstrøm, 2016, s. 311):

Anta funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i c. Da er enten:

i. c et av endepunktene a og b eller

ii. $f'(c) = 0$ eller

iii. f ikke deriverbar i c.

Disse tre typene punkter kalles *kritiske punkter* og det er i disse punktene på en funksjon vi kan finne ekstremalpunkter. De punktene der $f'(x) = 0$ kalles for *stasjonære punkter*.

4.4 Middelverdisetningen og den dobbeltderiverte

Et sentralt teorem i differensialregningen er *middelverdisetningen*, som Lindstrøm (2016, s. 289) hevder er «det viktigste resultatet i teorien for deriverbare funksjoner». Dette begrunner han med at setningen brukes i mange ulike bevis og at den dukker opp i mange ulike sammenhenger. Ifølge Edwards (1979) er Cauchy er kjent for å ha formulert og bevist teoremet, selv om det tidligere var kjent for Langrange (1736–1813). Teoremet var derimot lite brukt av Lagrange, i motsetning til Cauchy som demonstrerte nytten av det. Edwards (1979) trekker frem at Cauchy i sin publikasjon *Leçons sur le calcul differentiel* fra 1829 innledet sin introduksjon til middelverdisetningen med å se på betydningen av fortegnet til den deriverte. Med definisjon av den deriverte som

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{4.6}$$

observerte han at dersom $y' > 0$ i x_0 så har Δx og Δy samme fortegn for tilstrekkelige små Δx. Derfor vil $y = f(x)$ øke når x øker. Tilsvarende vil $y = f(x)$ minke når x øker dersom $y' < 0$ (Edwards, 1979, s. 313–314).

Middelverdisetningen er presentert på følgende måte i Lindstrøm (2016, s. 290):

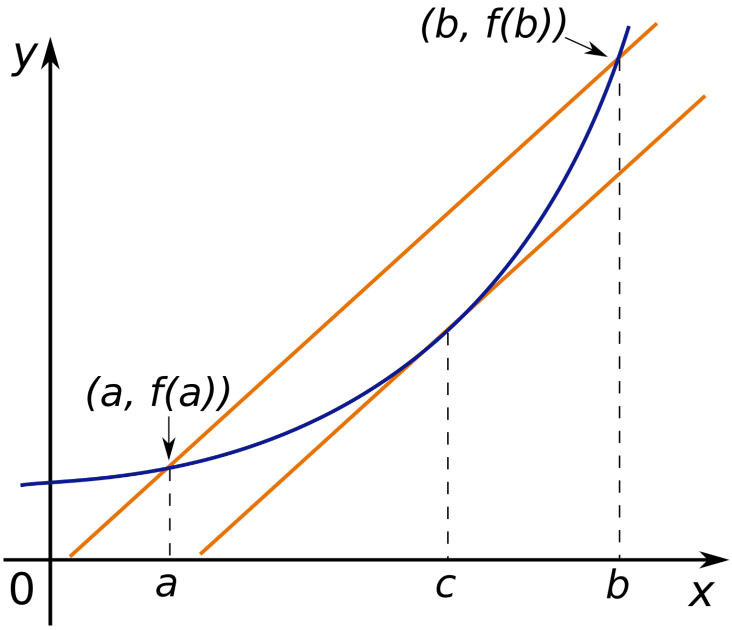
Anta at funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den der deriverbar i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.7}$$

En geometrisk tolkning av middelverdisetningen er presentert i Figur 4.3. Stigningstallet til sekanten gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ er $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, og setningen sier dermed at det finnes et punkt c mellom a og b der tangenten i dette punktet er parallell med sekanten.

Figur 4.3

Geometrisk tolkning av middelverdisetningen.



Merknad: Figuren er tilpasset etter Lindstrøm (2006, s. 291).

For å bevise middelverdisetningen bruker vi *Rolles teorem* som er et spesialtilfelle av middelverdisetningen (Lindstrøm, 2016, s. 290):

> Anta at funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Anta videre at $f(a) = f(b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$.

Siden f er kontinuerlig, har den minst ett ekstremalpunkt i intervallet $[a, b]$ i følge ekstremalverdisetningen. Siden $f(a) = f(b)$, så må minst ett slikt punkt ligge i intervallet (a, b). Siden c ikke er et av endepunktene a eller b, og f er deriverbar i c, så forteller Fermats teorem oss at $f'(c) = 0$.

For å så bevise middelverdisetningen ser vi på sekanten gjennom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ med «likningen

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Den loddrette avstanden mellom grafen $y = f(x)$ og denne sekanten er derfor

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$ » (Lindstrøm, 2016, s. 291).

Siden $h(a) = h(b)$ og $h(x)$ er kontinuerlig og deriverbar i alle indre punkter, tilfredsstiller den betingelsene i Rolles teorem. Da må det finnes en c slik at $h'(c) = 0$. Dermed får vi at

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

som gir $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (Lindstrøm, 2016, s. 291).

Middelverdisetningen brukes blant annet til å koble sammen konkavitet og konveksitet til fortegnet til den dobbeltderiverte. Dette resultatet fører med seg at der $f''(x) \geqslant 0$ er grafen *konveks* (grafen vender den hule siden oppover dersom $f''(x) > 0$), og der $f''(x) \leqslant 0$ er *konkav* (grafen vender den hule siden nedover dersom $f''(x) < 0$). Dette gjør at fortegnet til den dobbeltderiverte kan fortelle om et ekstremalpunkt er et minimums- eller maksimumspunkt. Videre kalles steder på grafen der grafen går fra å være konveks til å være konkav, eller omvendt, *vendepunkt*, altså der $f''(x)$ skifter fortegn (Lindstrøm, 2016). Den dobbeltderiverte, også kalt andrederiverte $f''(x)$, har en interessant fysisk tolkning. Dersom $f(x)$ beskriver strekningen et legeme beveger seg per tid, så er $f''(x)$ akserelasjonen til legemet.

4.5 Funksjonsbegrepets utvikling

For å få en bedre forståelse av differensialregningen sin historie, er det viktig å undersøke hvordan datidens matematikere så på det vi i dag kaller funksjoner. Da Leibniz og Newton utviklet sine teorier innen kalkulus, arbeidet de med kinematikk, kurver og andre geometriske objekter. Den forståelsen vi i dag har av funksjon, der en «funksjon $f : A \to B$ [er] en mengde ordnede par (x, y) der $x \in A$, $y \in B$, og der hver $x \in A$ hører med til nøyaktig ett par» (Lindstrøm, 2016, s. 275), kom først senere. Tidligere hadde fokuset i stor grad vært på det geometriske, og nye kurver ble funnet ved geometiske konstruksjoner. Rene Descartes (1596–1650) og Pierre de Fermat (1601–1665) la mye av grunnlaget for en endring i forståelse av kurver med et skifte fra det geometriske til det analytiske, med begynnelsen av det som kalles analytisk geometri. Her så de på sammenhengen mellom en likning $f(x, y) = 0$ og en kurve bestående av koordinater (x, y) som tilfredsstiller likningen, gitt to ortogonale akser. Deres forståelse av det vi i dag kaller funksjon var ganske annerledes enn i dag. Verken Descates eller Fermat brukte systematisk to koordinatakser, og de så på de to ukjente verdiene i likningen som linjestykker, og ikke som tall (Edwards, 1979, s. 95–97).

Leibniz introduserte begrepet *funksjon* av en kurve som et uttrykk som beskriver de ulike geometriske kvantitetene til kurven. Senere ble fokuset flyttet mer og mer over på det analytiske, altså likninger, algebraiske uttrykk og variabler, fremfor på det geometriske og selve kurven. Dette ledet frem til definisjonen Leonhard Euler (1707–1783) presenterte i *Introductio in analysin infinitorum* i 1748 (som referert i Edwards, 1979, s. 271, min oversettelse): «En funksjon av en variabel størrelse er et analytisk uttrykk som er sammensatt, på en eller annen måte, av denne variable størrelsen og av tall eller konstante størrelser.» Selv om Euler sin definisjon har fokus på det «analytiske uttrykket» og selve funksjonen fremfor kurven, er det noen forskjeller fra den moderne forståelsen av funksjoner. Blant annet godtok Euler at det var flere y-verdier til samme x-verdi, som for eksempel ved utrykket $y^2 = x^2 + 1$, og han godtok ikke funksjoner med delt forskrift (Lindstrøm, 2016, s. 271).

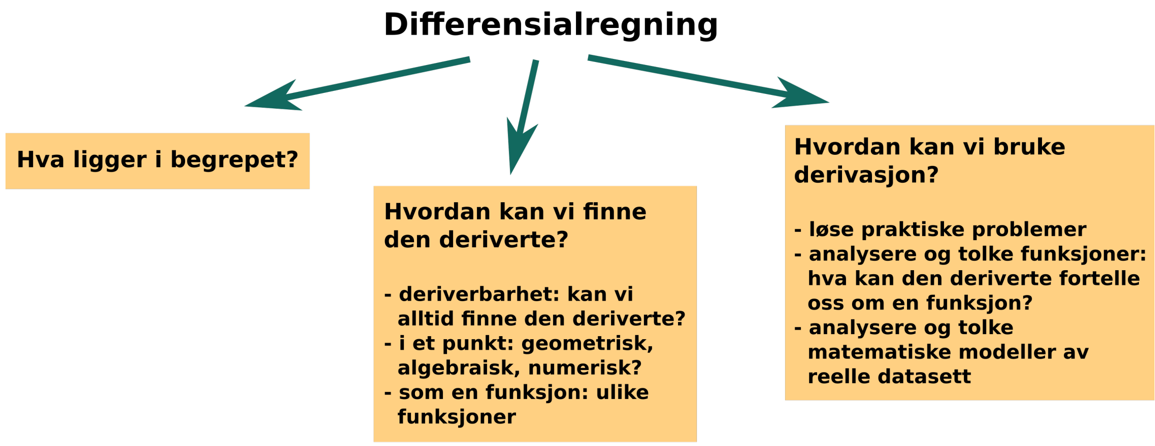
4.6 Derivasjon i læreplanen

I læreplanen for matematikk R1 inneholder fem av tolv kompetansemål *derivasjon*, *den deriverte* eller *derivere*. Derivasjon er dermed en stor del av innholdet i faget. Disse fem kompetansemålene innebærer å *forstå* begrepet derivasjon, *finne* den deriverte og å *bruke* den deriverte til å løse praktiske problemer samt analysere og tolke funksjoner og matematiske modeller. Kompetansemålene får frem at elevene skal kunne finne den deriverte geometrisk, algebraisk og numerisk, i tillegg til å vurdere når og hvor en funksjon er deriverbar (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Elevene møter på derivasjon først i matematikk T, der ett av fjorten kompetansemål handler om den deriverte, og elevene skal kunne «bruke gjennomsnittlig og momentan vekstfart i konkrete eksempler og gjøre rede for den deriverte» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Innholdet i derivasjon i læreplanen for matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021b) kan vi dele opp i tre hovedspørsmål som vist i Figur 4.4: (1) *Hva ligger i begrepet?*, (2) *Hvordan kan vi finne den deriverte?* og (3) *Hvordan kan vi bruke derivasjon?* Under spørsmål (2) er det spesifisert at elevene skal kunne vurdere om en funksjon er deriverbar, samt at de skal kunne finne den deriverte i et punkt både numerisk, geometrisk og algebraisk, og kunne derivere ulike funksjoner. Spørsmål (3) innebærer at elevene skal kunne løse praktiske problemer knyttet til derivasjon, i tillegg til å analysere og tolke funksjoner og matematiske modeller av reelle datasett.

Figur 4.4

Innhold i differensialregning i læreplanen i Matematikk R1.



I læreplanen for R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021b) står det at faget handler om å «forstå moderne anvendelser av matematikk i realfaglige og samfunnsfaglige sammenhenger,» og «om å tilegne seg og forstå matematiske verktøy og om å anvende verktøyene i utforsking og analyse av problemstillinger knyttet til realfag og samfunn.» Relatert til derivasjon betyr dette at elevene skal forstå hvordan det har relevans og nytte (se anvendeleser av derivasjon i Kapittel 4.1). Videre skal elevene utvikle sine ferdigheter innenfor problemløsningsstrategier, matematisk forståelse og kritisk tenking, som blant annet innebærer kritisk vurdering av resonnementer. Kompetansen elevene utvikler i faget skal bidra til at elevene er i stand til «å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet», i tillegg til å forberede «elevene til videre arbeid og utdanning som stiller krav om matematisk forståelse» (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Faget skal altså bidra til ulike formål for elevene: den skal utvikle elevene sine ferdigheter, gjøre elevene til selvstendige samfunnsborgere ved å selv kunne ta stilling til viktige spørsmål, og å forberede elevene til videre utdannelse.

I kompetansemålene for matematikk R1 er det fokus på forståelse og anvendelse av derivasjon, og vi finner ikke ordene *resonnere*, *begrunne* og *bevise* i kompetansemålene. Det er dermed lite fokus på teknologien til derivasjon i kompetansemålene. Ser vi derimot på innholdet under *Underveisvurdering* i læreplanen finner vi formuleringer om at elevene skal vise kompetanse «ved å resonnere og argumentere for gyldigheten av matematiske utsagn» (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Ved siden av kompetansemålene beskriver kjerneelementene «det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Utdanningsdirektoratet, 2019). I matematikk er det seks kjerneelementer: *utforskning og problemløsning*, *modellering og anvendelser*, *resonnering og argumentasjon*, *representasjon og kommunikasjon*, *abstraksjon og generalisering* og *matematiske kunnskapsområder*. I kjerneelementet resonnering og argumentasjon i matematikk R står det blant annet at «Argumentasjon i matematikk R handler om å begrunne og bevise gyldigheten til framgangsmåter, resonnementer og løsninger» (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Dette viser at selv om det er lite fokus på teknologi i kompetansemålene for derivasjon, er de overordnede kjerneelementene tydelig på at resonnering og argumentasjon i matematikk R handler om matematiske begrunnelser og bevis.

Kapittel 5

Analyse av differensialregning i *Mønster R1*

I dette kapitlet presenterer jeg min analyse av differensialregning i læreboken *Mønster R1*, skrevet av Kalvø et al. (2021). Målet er å svare på forskningsspørsmålet «Hvilke matematikkfaglige elementer består differensialregning i matematikk R1 av, og hvilke didaktiske transposisjonsprosesser har disse elementene gjennomgått?» I Kapittel 5.1 kommenterer jeg begrepsbruken i differensialregning i læreboken. Videre presenteres analysen i Kapitlene 5.2 og 5.3. Kapittel 5.2 er en prakseologisk analyse av eksemplene og oppgavene i differensialregning i *Mønster R1*, der analyseresultatet viser den matematiske organiseringen av disse i læreboken. Kapittel 5.3 presenterer en analyse av den didaktiske transposisjonen som utvalgte elementer fra differensialregning i R1 har gjennomgått i læreboka *Mønster R1*, der analyseresultatet viser hvilke transformasjoner disse elementene har gjennomgått. Jeg vil diskutere analyseresultatene i egne delkapitler under Kapitlene 5.2 og 5.3, før jeg diskuterer analysen mer generelt i Kapittel 6.

5.1 Definisjoner og begrepsbruk

I likhet med hva som gjøres i læreplanen, bruker *Mønster R1* begrepet *vekstfart* i stedet for *endringsrate* slik det er brukt på engelsk (rate of change). Begrepet vekstfart, bestående av *vekst* og *fart* kan gi misvisende assosiasjoner til elevene. Vekst antyder at endringen til funksjonen er positiv, i tillegg til at elevene fra tidligere matematikkfag kun er kjent med positiv fart, noe som også kan gjøre det utfordrende for elevene å forstå at vekstfart kan være negativ. I introduksjonen til begrepet vekstfart i *Mønster R1* presenterer Kalvø et al. (2021) en figur som viser en graf med en tangent. Rett etter denne figuren sier de at «vekstfarten i tangeringspunktet er lik stigningstallet til tangenten» (Kalvø et al., 2021, s. 141). Denne tangenten har et positivt stigningstall. De to påfølgende eksemplene i boka viser også tilfeller med positiv endringsrate. Selv om det nevnes i forbindelse med en illustrasjon i boken at det er mulig med «negativ momentan vekstfart», så kan tilfellene med positiv endringsrate underbygge elevenes misforståelse av vekstfart som noe positivt.

Fart kan også antyde at det er en endring per tidsenhet. Det finnes mange funksjoner der endringsraten ikke beskriver en endring per tidsenhet, for eksempel i mange maksimum- og minimumsproblemer. Pierre de Format (1607-1665) var tidlig ute med å løse et slikt problem med å se på endringen til funksjonen nær ekstremalpunktene. Han så blant annet på hvordan en kan dele opp et linjestykke med lengde b i to deler, x og $b - x$, slik at produktet av de, $x(b - x) = bx - x^2$, er størst mulig. En geometrisk forståelse av dette er å finne sidelengdene x og $b - x$ til et rektangel med en gitt omkrets $2b$, slik at arealet av rektangelet er størst mulig (Edwards, 1979, s. 122-123). Dette problemet kan løses ved å finne maksimumspunktet til arealfunksjonen $A(x) = bx - x^2$ ved å derivere denne funksjonen og sette den deriverte lik null. I dette problemet ser vi på endringen i areal $A(x)$ med hensyn til sidelengden x til rektangelet, gitt en fastsatt omkrets på $2b$, og det er dermed ikke noen tidsendring i endringsraten til denne funksjonen.

Samtidig som vekstfart kan gi elevene misvisende assosiasjoner, kan det hende at begrepet *rate* er lite kjent for elevene fra før, og at det dermed krever at elevene bygger opp et forståelse av hva dette innebærer for at det skal gi mening for elevene. *Mønster 1T* bruker også begrepet *stigningstallfunksjonen* i innledningen av den deriverte, som jeg kommenterer videre i Kapittel 5.3.1. Dette er også et tilfelle av å bruke begreper som er kjent for elevene fra før, som kan føre til at elevene i større grad knytter det nye de skal lære opp mot sine forkunnskaper. Dette kan imidlertid være et problem dersom elevene får misoppfatninger på grunn av assosiasjonene de allerede har med begrepene.

5.2 Matematisk organisering av innholdet i *Mønster R1*

Som forklart i Kapittel 3.4 har jeg gjennomført en prakseologisk analyse av innholdet i differensialregning i *Mønster R1* ved hjelp av å se på eksemplene og oppgavene i *Mønster R1*, noe som resulterte i en matematisk organisering. Jeg samlet først eksemplene og oppgavene i punkt-MO-er, og deretter samlet jeg disse punkt-MO-ene i lokale MO-er ved å undersøke teknologien til punkt-MO-ene. Som forklart i Kapittel 3.4 er en lokal MO en samling av punkt-MO-er med lik teknologi. Dette resulterte i at oppgavene i differensialregning i *Mønster R1* ble samlet i de to lokale MO-ene: «Finn den deriverte av $f(x)$» og «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» Jeg vil her presentere disse to lokale MO-ene med tilhørende teknologi, hvordan jeg har valgt å ta hensyn til tekstoppgaver og hvordan eksemplene og oppgavene som forekommer i *Mønster R1* er fordelt utover punkt-MO-ene. Til slutt vil jeg diskutere noen av utfordringene med en slik matematisk organisering.

5.2.1 Lokal MO: Finn den deriverte av $f(x)$

Den første lokale MO-en er «Finn den deriverte av $f(x)$», og den består av å finne den deriverte med ulike fremgangsmåter, sammen med å vurdere om en funksjon er deriverbar, gi en praktisk tolkning av den deriverte og å finne tangenten til $f(x)$ i et punkt. Denne lokale MO-en består av følgende punkt-MO-er:

1. Er $f(x)$ deriverbar?
2. Finn tangenten til $f(x)$ i $x = a$.
3. Finn $f'(x)$ og gi en praktisk tolkning.
4. Finn den deriverte numerisk.
5. Finn den deriverte ved hjelp av definisjonen til den deriverte.
6. Finn den deriverte (ved derivasjonsregler).[1]

[1] I denne MO-en er det flere oppgaver som kan løses ved hjelp av CAS eller andre hjelpemidler, men det er vanskelig å bedømme hvilke oppgaver dette er lagt opp til når det ikke er spesifisert. Siden det kun er 9 oppgaver i boken som er spesifisert at skal løses med CAS har jeg inkludert disse oppgavene i denne kategorien. Her inkluderes også oppgaver om å finne den dobbeltderiverte (12 oppgaver), siden disse oppgavene har samme teknikk som «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)», med eneste forskjell at det deriveres to ganger for å finne den dobbeltderiverte.

Disse seks punkt-MO-ene samles av den samme teknologien, som tar utgangspunkt i den analytiske definisjonen av den deriverte, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, forståelsen av den deriverte som den momentane endringsraten til $f(x)$, og den geometriske tolkningen av den deriverte som tangent i et punkt på grafen.

I *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021) knyttes deriverbarhet (Punkt 1) direkte opp mot den analytiske definisjonen av den deriverte i likhet med hva som gjøres av Lindstøm (2016). Når det gjelder tangenten til en kurve (Punkt 2) presenterer *Mønster R1* først ettpunktsformelen til tangenten i punktet (x_0, y_0) på formen $y - y_0 = a(x - x_0)$ der $a = f'(x)$ er stigningstallet til funksjonen og $y_0 = f(x_0)$ (Kalvø et al., 2021, s. 141). Noen sider etter dette knytter Kalvø et al. (2021, s. 151) stigningstallet til en tangent opp mot den analytiske definisjonen av den deriverte, ved å se på stigningstallet til en sekant mellom punktene $(A = x, f(x))$ og $(B = x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ som går mot stigningstallet til en tangent når Δx går mot null og punktet B nærmer seg punktet A. Dette knytter dermed teknologien til Punkt 2 opp mot den analytiske definisjonen av den deriverte.

Når det gjelder Punkt 3, «Finn $f'(x)$ og gi en praktisk tolkning», handler dette både om å finne den deriverte og å gi en praktisk tolkning av den deriverte. Teknologien til å finne den deriverte kommer jeg tilbake til i Punktene $4 - 6$, mens teknologien til å gi en praktisk tolking av den deriverte bygger på den fysiske forståelsen av den deriverte. Denne teknologien er ikke uttrykt like eksplisitt i *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021) som for de to første punktene, men den er knyttet opp mot forståelsen av den deriverte som den momentane vekstfarten i et punkt på en graf. Når det gjelder Punkt 4 og Punkt 5 knyttes teknologien eksplisitt opp mot den analytiske definisjonen av den deriverte, og det er tydelig at teknikkene tar utgangspunkt i denne.

Teknologien til Punkt 6 krever litt mer undersøkelse, siden denne MO-en består av mange ulike teknikker avhengig av hva slags type funksjon som deriveres. Siden det er denne punkt-MO-en jeg gjør en didaktisk transposisjonsanalyse av, undersøker jeg teknologien grundigere i Kapittel 5.3. Allikevel vil jeg her kommentere at teknologien som kommer frem i *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021) til kjereneregelen og produktregelen, knyttes direkte opp mot den analytiske definisjonen til den deriverte. Videre brukes disse to reglene for å bevise reglene for derivasjon av brøkfunksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner. Dermed er det ikke tydelig i bevisene at disse reglene bygger på definisjonen av den deriverte, men ved nærmere undersøkelse av teknologien, ser en at dette er tilfellet. De første reglene som presenteres i kapitlet i *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021, s. 160), er for derivasjon av polynomfunksjoner, men her er teknologien ikke tilstedeværende. Ser vi derimot på teknologien til denne MO-en i Adams og Essex (2018), bygger denne på definisjonen til den deriverte, noe som blir presentert i Kapittel 5.3.1.

5.2.2 Lokal MO: Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?

Mens den første lokale MO-en handler om å finne den deriverte, handler den andre lokale MO-en om å ta i bruk den deriverte i funksjonsdrøfting. Dette innebærer å finne egenskaper til en funksjon $f(x)$ i form av ekstremalpunkter, terrassepunkter, vendepunkter og krumning. Dette er viktige egenskaper ved en funksjon, samtidig som at disse egenskapene kan fortelle oss noe om hvordan grafen til $f(x)$ ser ut. I tillegg inneholder denne lokale MO-en oppgaver som innebærer å beskrive sammenhenger mellom en funksjon, den deriverte av funksjonen og den dobbeltderiverte av funksjonen. Den lokale MO-en har jeg valgt å kalle: «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?», og denne lokale MO-en består av følgende punkt-MO-er:

1. Finn ekstremal- og terrassepunkter til $f(x)$.[2]
2. Finn vendepunktet til $f(x)$.
3. Bestem krumningen til $f(x)$.[3]
4. Beskriv sammenhenger mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$.

Mens Punktene $1-3$ har ganske tydelige teknikker, inneholder Punkt 4 et vidt spekter av ulike oppgaver. Dermed er dette ikke en punkt-MO i den forstand at alle oppgavene er definert ved en entydig teknikk. Jeg har allikevel valgt å sette dette som én punkt-MO fordi teknikkene for oppgavene i denne punkt-MO-en har mye til felles. Oppgavene i denne punkt-MO-en inneholder blant annet oppgaver som «Gitt fortegnslinje for $f'(x)$, skisser hvordan grafen til $f(x)$ kan se ut», «Gitt grafen til $f(x)$, finn $f'(x) = 0$ og $f''(x) = 0$», «Gitt grafene for $f(x)$, $g(x)$ og

[2]Under denne kategorien har jeg også lagt til oppgaver om å finne kritiske punkter (9 oppgaver), siden det å finne kritiske punkter er et hjelpemiddel for å finne ekstremal- og terrassepunkter.

[3]Her inkluderer jeg også oppgaver om å beskrive monotoniegenskaper til f (7 oppgaver).

$h(x)$, og, i tilfeldig rekkefølge, grafene til $f'(x)$, $g'(x)$ og $h'(x)$, bestem hvilke grafer som hører sammen» og «Funksjonen som er gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 3$ har et toppunkt i $(-6, 57)$. Finn verdiene til a og b».

Teknologien til denne lokale MO-en er ikke like tydelig i *Mønster R1* som for den første lokale MO-en. Ser vi på Punkt 1, er teknikken i stor grad å undersøke de kritiske punktene på grafen. Det at den deriverte er lik null, knyttes opp mot at grafen har stigningstall null og at tangenten til grafen er horisontal i dette punktet. Det følgende presenteres i en blå boks i boken, der slike bokser «inneholder viktige setninger, begreper og definisjoner» (Kalvø et al., 2021, s. 6).

NÅR DEN DERIVERTE ER LIK NULL

- Grafen til f har et toppunkt når $f'(x)$ skifter fortegn fra positivt til negativt.
- Grafen til f har et terrassepunkt når $f'(x)$ er null uten å skifte fortegn.
- Grafen til f har et bunnpunkt når $f'(x)$ skifter fortegn fra negativt til positivt.

(Kalvø et al., 2021, s. 147)

En liknende blå boks er, i kapitlene om derivasjon i *Mønster R1*, blant annet brukt for å presentere den analytiske definisjonen av den deriverte og diverse derivasjonsregler. Siden det ikke er presentert et bevis rett etter den blå boksen, slik det er gjort med de fleste av derivasjonsreglene, kommer det ikke tydelig frem at dette er et resultat som krever et bevis, og ikke er en definisjon. Det er ikke begrunnet noe videre om hvorfor det stemmer, annet enn at det er trukket sammenhenger mellom at når $f'(x)$ skrifter fortegn fra positivt til negativt, så går grafen fra å stige til å falle og at derfor er dette et toppunkt. Teknologien til denne punkt-MO-en er dermed minimal i *Mønster R1*. For å undersøke hele teknologien til punkt-MO-en «Finn ekstremal- og terrassepunkter til $f(x)$», har jeg undersøkt hvordan dette beskrives av Lindstøm (2016). Som forklart i Kapittel 4.3, er resultatet av Fermats teorem for stasjonærpunkt at den deriverte er lik null i maksimums- og minimumspunkter, dersom punktet er deriverbart og ikke et endepunkt. Videre danner dette teoremet grunnlaget for at det er i kritiske punkter vi kan finne ekstremalpunkter.

Ser vi videre på de to neste punkt-MO-ene, «Finn vendepunktet til $f(x)$» og «Bestem krumningen til $f(x)$», er teknologien også her lite synlig i *Mønster R1*. I stedet for å bruke begrepene *konveks* og *konkav* slik det brukes i Lindstrøm (2016), defineres krumning ved begrepet «hul side» på følgende måte i *Mønster R1* (Kalvø et al., 2021, s. 211):

- Når f'' er negativ, er f' avtakende, og grafen til f vender hul side ned.
- Når f'' er positiv, er f' økende, og grafen til f vender hul side opp.

I likhet med presentasjonen for topp-, bunn- og terrassepunkt, er det ikke tydelig i boken at det ovenstående er et resultat og ikke en definisjon. Videre defineres *vendepunkt* som «punktet der grafen går fra å vende den hule siden opp til den hule siden ned (eller omvendt)» (Kalvø et al., 2021, s. 212). For å koble sammen krumning og fortegnet til den dobbeltderiverte av en funksjon bruker Lindstrøm (2016) middelverdisetningen slik som presentert i Kapittel 4.4. Siden vendepunktet er et ekstremalpunkt til $f'(x)$ og krumningen til $f(x)$ kan fortelle om et ekstremalpunkt på $f(x)$ er et minimums- eller maksimumspunkt (Adams & Essex, 2018, s.245), deler Punkt 2 og Punkt 3 mye av teknologien til Punkt 1.

Siden den siste punkt-MO-en, «Beskriv sammenhenger mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$», består av litt ulike teknikker, er det vanskelig å gi en konkret beskrivelse av teknologien. Oppgavene i denne punkt-MO-en handler i stor grad om hvordan en graf $f(x)$ ser ut og hvilke egenskaper denne har sammenlignet med $f'(x)$ og $f''(x)$, og innebærer anvendelser av teknikkene til de tre ovenstående punkt-MO-ene kombinert sammen. Derfor har Punkt 4 den samme teknologien som Punktene $1 - 3$, og det er denne felles teknologien som samler de fire punkt-MO-ene til en lokal MO.

5.2.3 Tekstoppgaver i den matematiske organiseringen

For å få med variasjoner i oppgavene med tanke på i hvor stor grad elevene må tolke innholdet i oppgavene og hente ut informasjon, har jeg valgt å ta hensyn til om oppgavene er tekstoppgaver eller ikke i kategorisering av oppgavene. Tekstoppgaver er definert i Kapittel 2.2, og som forklart der innholder tekstoppgaver naturlig språk og omhandler beskrivelser av problemer og omhandlende situasjoner. Et eksempel på en tekstoppgave fra *Mønster R1* er den følgende: (1) «På en øy i havet er det i dag om lag 1000 hjort. Bestanden er forventet å følge funksjonen $N(x)$ der x er antall år fra i dag ($x = 0$) og N er antall hjort på øya. Etter hvor mange år øker hjortebestanden mest?» (Kalvø et al., 2021, s. 269). Oversatt til matematisk språk og notasjon kan denne oppgaven skrives som: (2) «Finn vendepunktet til funksjonen $f(x)$». Jeg har valgt å ta hensyn til hvorvidt oppgaver er tekstoppgaver eller ikke fordi selv om Oppgavene 1 og 2 har samme teknikk, krever den første oppgaven at elevene knytter ordene *øker mest* opp mot *vendepunktet* til funksjonen som beskriver hjortebestanden. Oppgave 1 inneholder altså et ekstra steg som er vanskelig å generalisere inn i en teknikk eller algoritme, fordi det innebærer å innhente relevant informasjon fra oppgaven, og å koble ordene *øker mest* opp mot det matematiske begrepet *vendepunkt*, som beskriver en egenskap til en funksjon.

Både de oppgavene i boken som er tekstoppgaver og de som ikke er det, er kategorisert i punkt-MO-ene som er inneholdt i de lokale MO-ene «Finn den deriverte av $f(x)$» og «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» som presentert over. Tekstoppgavene i *Mønster R1* var kun inneholdt i fire av de ti punkt-MO-ene: «Finn $f'(x)$ og gi en praktisk tolkning», «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)», «Finn ekstremal- og terrassepunkter til $f(x)$» og «Finn vendepunktet til $f(x)$». Dermed var det ikke tekstoppgaver i noen av punkt-MO-ene «Er $f(x)$ deriverbar?», «Finn tangenten til $f(x)$ i $x = a$», «Finn den deriverte numerisk», «Finn den deriverte ved hjelp av definisjonen til den deriverte», «Bestem krumningen til $f(x)$» og «Beskriv sammenhenger mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$». Oppgavene og eksemplene i *Mønster R1* som ikke er tekstoppgaver, er innholdt i alle punkt-MO-ene utenom «Finn $f'(x)$ og gi en praktisk tolkning», og er dermed representert i nesten alle punkt-MO-ene.

5.2.4 Fordeling av oppgaver

I tillegg til å identifisere de eksisterende MO-ene i differensialregning i *Mønster R1*, har jeg kategorisert eksemplene og oppgavene i dette temaet inn i de ulike punkt-MO-ene. Denne kategoriseringen viser hvor mange eksempler og oppgaver det er innenfor hver punkt-MO, noe som kan bidra til å si noe om hvilke MO-er som er mest i fokus i boken. Jeg presenterer resultatet for oppgavene som ikke er tekstoppgaver og tekstoppgavene hver for seg i det følgende.

5.2.4.1 Ikke-tekstoppgaver

Tabell 5.1 viser hvordan de eksemplene og oppgavene i boken som ikke er tekstoppgaver fordeler seg utover i de ulike punkt-MO-ene. Her står A for den første lokale MO-en «Finn den deriverte av $f(x)$», og B for den andre lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» Numrene etter A og B står for nummereringen av punkt-MO-ene som er gitt i oversikten over MO-er i Kapittel 5.2.1 og Kapittel 5.2.2. Tallene i cellene i tabellen står for antall oppgaver innen den gjeldende kategorien.

Tabell 5.1

Fordeling av eksempler og oppgaver som ikke er tekstoppgaver

	$A1$	$A2$	$A4$	$A5$	$A6$	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
Eksempler:	4	2	5	1	19	4	4	2	3
Oppgaver:	22	18	27	10	136	35	35	26	33

Som vist i Tabell 5.1 er det tydelig flest eksempler og oppgaver for $A6$, «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)». Denne punkt-MO-en er en helt sentral del av differensialregning, samtidig som det å finne den deriverte er en nødvendighet for mange av oppgavene i $B1$, $B2$, $B3$ og $B4$. I tillegg er teknikken avhengig av hva slags type funksjon som skal deriveres, noe som krever mange ulike oppgaver innenfor denne punkt-MO-en for å dekke alle ulike typer funksjoner.

5.2.4.2 Tekstoppgaver

Tabell 5.2 viser hvordan tekstoppgavene i *Mønster R1* fordeler seg utover i de ulike punkt-MO-ene:

Tabell 5.2

Fordeling av tekstoppgaver i eksempler og oppgaver

	$A3$	$A6$	$B1$	$B2$
Eksempler:	9	2	3	4
Oppgaver:	11	13	11	9

Det er betydelig færre tekstoppgaver enn oppgaver som ikke er det. Resultatet av kategoriseringen viser at det er 44 eksempler og 342 oppgaver som ikke er tekstoppgaver, mens det er 18 eksempler og 44 oppgaver som er tekstoppgaver. Det er totalt 279 eksempler og oppgaver som hører til i den lokale MO-en «Finn den deriverte av $f(x)$», mens det er 169 eksempler og oppgaver som hører til i den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?».

5.2.5 Diskusjon av den matematiske organiseringen av differensialregning i *Mønster R1*

Den matematiske organiseringen er en modell for å presentere innholdet i differensialregning i *Mønster R1*, og gir en oversikt over hvilke matematiske elementer som er inneholdt i dette temaet. Kategorisering og undersøkelse av eksempler og oppgaver gir også en oversikt over hvilke oppgaver som det er lagt mest vekt på. Det er imidlertid noen utfordringer med en slik modell. Noen av punkt-MO-ene er ganske lite spesifikke, og som nevnt over gjelder dette spesielt $A6$ «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)» og $B4$ «Beskriv sammenhenger mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$». Den førstnevnte inneholder alle typer funksjoner, og det er mange ulike teknikker avhengig om det er en polynom-, logaritme- eller eksponentialfunksjon, eller om det er en brøkfunksjon, sammensatt funksjon eller en funksjon som er et produkt av to ulike funksjoner. Kategoriseringen tar altså ikke hensyn til hva slags funksjon elevene skal derivere, og hvilke av de mange teknikkene som må tas i bruk. Også punkt-MO-en «Beskriv sammenhenger mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$» inneholder mange ulike teknikker, siden det er et vidt spekter av ulike oppgaver. Det at disse punkt-MO-ene består av ulike teknikker fører til at det ikke er punkt-MO-er i den forstand at det er en entydig teknikk til hver av dem. Selv om teknikkene ikke er helt lik for alle oppgavene som er inneholdt i punkt-MO-ene, er det likheter både mellom oppgavene og teknikkene innad i hver av punkt-MO-ene. Videre er det lettere å få oversikt over temaet med litt færre punkt-MO-er som innebærer et litt videre spekter av oppgaver, enn veldig mange punkt-MO-er der teknikkene er veldig spesifikke.

I tillegg til at noen av punkt-MO-ene inneholder litt flere ulike teknikker, er det flere av punkt-MO-ene som overlapper hverandre og er inneholdt andre punkt-MO-er. Dersom man for eksempel skal «finne ekstremal- og terrassepunkter til $f(x)$» ($B1$), så må man også «finne den deriverte av $f(x)$» ($A6$) og «vurdere om $f(x)$ er deriverbar» ($A1$) for alle x-verdier. Dermed vil en oppgave fra $B1$ innebære bruke teknikker fra både $A1$ og $A6$. Tilsvarende vil både å «finne vendepunktet til $f(x)$» ($B2$) og å «bestemme krumningen til $f(x)$» ($B3$) også innebære å «vurdere om $f(x)$ er deriverbar» ($A1$) og å «finne den deriverte av $f(x)$» ($A6$). Det er imidlertid noen av oppgavene om funksjonsdrøfting ($B1$, $B2$, $B3$) hvor å finne den deriverte er en egen deloppgave, slik at deloppgaven som ber oppgaveløseren om å finne krumning eller ekstremal-, terrasse- eller vendepunkt, ikke inneholder å finne den deriverte.

5.3 Den didaktiske transposisjonen av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)»

I dette kapitlet presenterer jeg en didaktisk transposisjonsanalyse av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)». Dette undertemaet har jeg valgt fordi det er et helt sentralt tema i derivasjon, og fordi det for denne punkt-MO-en er flere bevis som presenteres i *Mønster R1*, slik at logosblokka (særlig teknologien) til punkt-MO-en kommer tydelig frem i boken. Dette gir meg derfor mulighet til å analysere denne. Videre viste resultatet av den prakseologiske analysen at det var klart flest eksempler og oppgaver under denne punkt-MO-en, slik som presentert i Kapittel 5.2.4. For å analysere den didaktiske transposisjonen til denne punkt-MO-en har jeg delt opp analysen med hensyn til ulike derivasjonsregler: derivasjon av polynomfunksjoner (Kapittel 5.3.1), kjerneregelen (Kapittel 5.3.2), derivasjon av eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner (Kapittel 5.3.3), derivasjon av produkt (Kapittel 5.3.4) og derivasjon av brøkfunksjoner (Kapittel 5.3.5). Til slutt, i Kapittel 5.3.6, presenterer jeg teorien Θ til punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler». Jeg vil analysere presentasjonen av denne MO-en i *Mønster R1* i lys av historiske aspekter ved kunnskapen og lærebøkene *Kalkulus*, skrevet av Lindstrøm (2016), og *Calculus: A Complete Course*, skrevet av Adams & Essex (2018), som begge er innføringsbøker i matematisk analyse for universitetet. Som skrevet i Kapittel 3.2 presenteres det flere bevis for derivasjonsreglene i Adam og Essex (2018) enn i Lindstrøm (2016).

Som en oversikt over sentrale derivasjonsregler, presenterer jeg et utdrag fra Kapittel 6.1 *Derivasjon* i Lindstrøm (2016, s. 282–283):

> De deriverte av de vanligste funksjonene er kjent fra skolematematikken, men for ordens skyld tar vi med en liste her:
>
> > 6.1.3 **Derivasjon av elementære funksjoner** I disse reglene er a en konstant:
> >
> > $D[a] = 0$
> >
> > $D[x^a] = ax^{a-1}$
> >
> > $D[a^x] = a^x \ln a \ \ (a > 0)$, spesielt er $D[e^x] = e^x$
> >
> > $D[\ln|x|] = \dfrac{1}{x}$

$$D[\sin x] = \cos x$$
$$D[\cos x] = -\sin x$$
$$D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Et annet sett velkjente formler forteller oss om hvordan vi kan derivere kombinasjoner av funksjoner:

6.1.4 **Derivasjonsregler** Anta funksjonene f og g er deriverbare i punktet a, og at c er en konstant. Da er også funksjonene cf, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og (forutsatt at $g(a) \neq 0$) f/g deriverbare i a. Deres deriverte er gitt ved:

(i) $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$

(ii) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(iii) $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

(iv) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Men den aller viktigste derivasjonsregelen er kjerneregelen som forteller oss hvordan vi deriverer en sammensatt funksjon.

6.1.5 **Kjerneregelen** Anta at g er deriverbar i a og at f er deriverbar i $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f[g(x)]$ deriverbar i a, og

$$h'(a) = f'[g(a)]g'(a).$$

Alle reglene som her er gjengitt, er også sentrale i *Mønster R1* med unntak av de tre reglene som handler om derivasjon av trigonometriske funksjoner. De fleste reglene er oppgitt som kjente fra før i Lindstrøm (2016), og dermed er det heller ikke presentert noe bevis for dem. Unntaket er kjerneregelen, der bevis er motivert både med utgangspunkt i en geometrisk tolkning av derivasjon, og presentert som et formelt bevis «for dem som er interessert» (Lindstrøm, 2016, s. 284).

Disse derivasjonsreglene kan sies å befinne seg et sted mellom teknikk og teknologi i MO-en. Reglene settes sammen, avhengig av funksjonen som skal deriveres, til en teknikk for denne type funksjon. Skal vi for eksempel derivere en funksjon på formen $f(x) = x^n \cdot \ln x$, vil teknikken bestå av en sammensetning av reglene for derivasjon av polynomfunksjoner, logaritmefunksjoner samt produktregelen. Ved å bruke en kombinasjon av disse reglene kan vi finne at den deriverte blir $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \ln x + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1}(n \ln x + 1)$. Derivasjonsreglene er her ikke selve teknikken, men teknikken er satt sammen av derivasjonsregler. Skal vi gi en begrunnelse for hvorfor dette er den deriverte, er det ikke tilstrekkelig å si at det stemmer fordi vi har brukt derivasjonsreglene; derivasjonsreglene er dermed ikke den komplette teknologien. En fullstendig teknologi vil også måtte inneholde svar på hvorfor teknikken er korrekt, altså begrunnelser eller bevis for derivasjonsreglene. Dette er grunnen til at jeg i de følgende delkapitlene spesielt undersøker teknologien til hver av derivasjonsreglene.

Kapittel 3 i *Mønster R1* heter *Derivasjon*, og har fem delkapitler: 3.1 *Vekstfart og den deriverte*, 3.2 *Deriverbarhet*, 3.3 *Derivasjonsregler*, 3.4 *Derivasjon av omvendte funksjoner* og 3.5 *Numerisk derivasjon*. For å analysere punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)» slik den kommer frem i boken, er det hovedsakelig Kapittel 3.3 som er i fokus. Samtidig er det verdt å merke seg at forfatterne introduserer en grafisk forståelse med anvendelser av derivasjon, før derivasjonsreglene blir presentert. Dette innebærer blant annet den deriverte i et punkt som stigningstallet for tangenten i dette punktet, egenskaper til en graf når den deriverte er positiv, negativ eller lik null, definisjonen av den deriverte med en grafisk forståelse av denne som stigningstallet til en sekant som går mot stigningstallet til tangenten i punktet som grenseverdi, i tillegg til deriverbarhet og spørsmålet om når vi kan finne den deriverte til en funksjon. Ved at Kalvø et al. (2021) presenterer noe av bruksområdet til derivasjon først, kan dette bidra til at elevene selv ser nytten av å finne den deriverte. I tillegg kan det fremme at elevene i større grad forstår differensialregningens eksistensberettigelse, altså hvor dette kunnskapsområdet kommer fra og hvorfor det er nyttig, før elevene lærer å beregne den deriverte.

5.3.1 Derivasjon av polynomfunksjoner

I Adams og Essex (2018) er derivasjonsregler for polynomfunksjoner de første derivasjonsreglene som blir presentert, og derivasjonsregel for monomet x^r blir presentert på følgende måte: «Hvis $f(x) = x^r$, så er $f'(x) = rx^{r-1}$» (s. 103, min oversettelse). De presiserer videre at dette «gjelder for alle verdier r og x slik at x^{r-1} gir mening som et reelt tall» (s. 103, min oversettelse), og at dette kommer til å bevises i neste kapittel. Rett etter regelen er presentert følger et bevis som innebærer rekkeutvikling og binomialteoremet for å skrive om $(x+h)^n$ slik at de kan finne grenseverdien $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Rekkeutviklingen av $(x+h)^n$ er kun gyldig for positive heltall n, og dermed gjelder dette også for beviset. Videre velger Adam og Essex (2018) å bevise denne regelen på ulike måter gjennom kapitlet etter de har presentert andre derivasjonsregler, ettersom disse bevisene tar i bruk de andre derivasjonsreglene som blir presentert.

Etter at Adam og Essex (2018) har presentert produktregelen velger de å vise derivasjonsregelen for polynomfunksjoner ved induksjon, et bevis som også kun gjelder for positive heltall for eksponenten n og som krever bruk av produktregelen. Deretter bruker de regelen for derivasjon av $\frac{1}{f}$ til å verifisere regelen for negative heltall n. Senere i kapitlet beviser de derivasjonsregelen for x^r, der r er et rasjonalt tall, ved hjelp av implisitt derivasjon. Det er først i det neste kapitlet at derivasjonsregelen for x^a vises for alle reelle tall a. Dette vises på følgende måte, der $x > 0$ (Adams & Essex, 2018, s. 181):

$$\frac{d}{dx}x^a = \frac{d}{dx}e^{a\ln x} = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}$$

Dette beviset innebærer bruk av den algebraiske identiteten $x^a = e^{a\ln x}$, samt derivasjon av e^x, $\ln x$ og kjerneregelen.

Også i *Mønster R1* er derivasjonsreglene for polynomfunksjoner de første derivasjonsreglene som presenteres. Dette presenteres på følgende måte i starten av Kapittel 3.3 (Kalvø et al., 2021, s. 160):

> Vi kan regne ut den deriverte av en funksjon ved å bruke grenseverdien
>
> $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
>
> Dette er en tidkrevende måte. Vi har tidligere brukt stigningstallfunksjonen til å finne den deriverte. Dette ga oss derivasjonsreglene:

DERIVASJONSREGLER

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n & &\implies & f'(x) &= nx^{n-1} \\
f(x) &= u(x) \pm v(x) & &\implies & f'(x) &= u'(x) \pm v'(x) \\
f(x) &= a \cdot v(x) & &\implies & f'(x) &= a \cdot v'(x)
\end{aligned}$$

I denne introduksjonen til derivasjonsregler for polynomer regnes reglene som allerede kjent, og det er ikke noen begrunnelse eller bevis for disse reglene i *Mønster R1*. Reglene motiveres med at de er tidsparende, og at man slipper å bruke definisjonen av den deriverte for alle funksjoner. Kalvø et al. (2021) referer til at de «tidligere [har] brukt stigningstallfunksjonen til å finne den deriverte» (s. 160). For å undersøke teknologien til MO-en må vi derfor se på læreboken for matematikk $1T$, nemlig *Mønster: Matematikk 1T* (heretter *Mønster 1T*), skrevet av Kalvø et al. (2020). Begrepet *stigningstallfunksjon* brukes her kun som overskrift for Kapittel 5.4, der tittelen er *Den deriverte - stigningstallfunksjonen*. Videre beskrives det flere ganger gjennom kapittelet at den deriverte i et punkt gir oss stigningstallet til tangenten i punktet, og det er flere oppgaver der elevene skal finne en funksjon for stigningstallet til funksjonen, blant annet ved hjelp av tangenter i ulike punkter på grafen. Det presenteres ikke en definisjon for begrepet stigningstallfunksjonen, men det hentydes til at dette er det samme som den deriverte. Det kan tenkes at stigningstallfunksjon brukes for å bygge på begrepet *stigningstall* som elevene kan fra før, og som gir en beskrivelse av hva den deriverte forteller oss. Samtidig står det i *Mønster R1* at «Vi har tidligere brukt stigningstallfunksjonen til å finne den deriverte» (Kalvø et al., 2021, s. 160), noe som gir lite mening dersom stigningstallfunksjonen er lik den deriverte.

I *Mønster 1T* møter elevene først på derivasjonsregler for polynomer i en *utforsk-oppgave*, altså «aktiviteter som legger til rette for utforskende matematikk, diskusjon og samarbeid» (Kalvø et al., 2020, s. 6). Her skal elevene ved hjelp av CAS fylle ut en tabell med de deriverte av funksjonene x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 og x^7. Deretter skal de finne en generell regel for funksjoner på formen $f(x) = x^n$, altså skal de generalisere uttrykkene de ser i tabellen (Kalvø et al., 2020, s. 313). Denne aktivteten åpner for at elevene får utforske og stille spørsmål i forkant av at regelen blir presentert. Rett etter denne aktiviteten presenteres det følgende (Kalvø et al., 2020, s. 313):

> Vi har tidligere funnet et uttrykk for $f'(x)$. Vi kan også finne et uttrykk for den deriverte algebraisk, ved å se etter et mønster. Hvis $f(x) = x^4$, er $f'(x) = 4x^3$.

> Dersom $f(x) = x^5$, er $f'(x) = 5x^4$. Vi ser at tallet foran x i den deriverte er lik tallet i eksponenten til $f(x)$. Eksponenten i den deriverte er én lavere enn eksponenten til $f(x)$.
>
> **DERIVASJONSREGEL**
> Når $f(x) = x^n$, er $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dette avsnittet forteller om en måte å «finne et uttrykk for den deriverte algebraisk», der resultatet er en generell derivasjonsregel. Her brukes to eksempler ($n = 4$ og $n = 5$) til å generalisere og si at «Vi ser at tallet foran x i den deriverte er lik tallet i eksponenten til $f(x)$». Det kommenteres ikke noe videre om at selv om dette stemmer for $n = 4$ og $n = 5$, er det ikke sikkert at det alltid stemmer, og at dette ikke er en fullstendig utledning av regelen. Samtidig får elevene konkretisert regelen i form av to eksempler før den generelle derivasjonsregelen presenteres, noe som kan gjøre det enklere for elevene å forstå betydningen av de ulike variablene i regelen.

Videre presenterer boken derivasjon av en sum av to funksjoner i det følgende utdraget (Kalvø et al., 2020, s. 313):

> La oss tenke oss at $u(x)$ og $v(x)$ er verdiene til to fond etter x uker. Dersom $u(x)$ vokser med 3000 kr per uke, og $v(x)$ vokser med 2000 kr per uke, vil den samlede vekstfarten være 5000 kr per uke:
>
> vekstfart i fond 1 + vekstfart i fond 2 = samlet vekstfart i begge fond
>
> Den samlede vekstfarten er $u'(x) + v'(x)$. Når vi deriverer et polynom, kan vi derfor derivere ledd for ledd.

Dette avsnittet fremstår som en begrunnelse for regelen $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ som presenteres lenger ned på samme side. Elevene får ved dette se en praktisk betydning av regelen, som kan gjøre betydningen mer tilgjengelig for elevene. På grunn av ordvalget *derfor* i siste setning av utdraget, hentyder forfatterne at regelen er gyldig fordi det stemmer for det ene eksempelet som presenteres. Dette minner om naiv empirisme, som er å hevde at en sammenheng er sann etter å kun ha verifisert den med noen få tilfeller, noe som er en utilstrekkelig begrunnelse (Balacheff, 1988). Videre begrunnes regelen $(a \cdot v(x))' = a \cdot v'(x)$ på tilsvarende måte.

Selv om Adams og Essex (2018) presenterer flere ulike bevis for derivasjon av monomet x^r, er det kun det første beviset med rekkeutvikling av $(x+h)^n$ som ikke bruker andre derivasjonsregler i beviset. Denne type rekkeutvikling kan en ikke regne med at elever i R1 har forkunnskaper om, i tillegg til at rekkeutviklingen, og dermed beviset, kun er gyldig for positive heltall n. Når regelen for polynomfunksjoner presenteres før noen av de andre reglene, er det vanskelig å gjøre beviset forståelig for elevene med de forkunnskapene elevene allerede har. Et bevis kunne ha vært presentert senere i kapitlet, men det kunne bli oppfattet som lite relevant for elevene dersom det var adskilt fra presentasjon av reglene for derivasjon av polynomfunksjoner. Kalvø et al. (2021) prøver å gi en begrunnelse for derivasjonsreglene selv om de ikke presenterer et matematisk bevis, men denne begrunnelsen bygger på å generalisere uttrykk ut fra ett eller to eksempler, noe som kan være problematisk når de ikke understreker at dette ikke er en gyldig generalisering.

5.3.1.1 Diskusjon av derivasjon av polynomfunksjoner

Teknologien for derivasjonsreglene for polynomfunksjoner er i *Mønster R1* minimal. Selv om det hevdes at disse reglene er kjent fra før, er også teknologien i *Mønster 1T*, der reglene presenteres for første gang, minimal. Regelen $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ begrunnes i *Mønster 1T* med noe som minner om naiv empirisme, uten å tydeliggjøre at dette ikke er et gyldig bevis. En slik begrunnelse viser ikke kun en manglende teknologi, men en ugyldig generalisering fra et konkret eksempel til alle funksjoner på formen $u(x) + v(x)$. Det er problematisk dersom elevene oppfatter denne begrunnelsen som et gyldig bevis. En mangelfull logosblokk for disse derivasjonsreglene kan komme av at det er vanskelig å bevise disse reglene med de forkunnskapene elevene allerede har, spesielt når reglene for polynomfunksjoner presenteres før noen av de andre derivasjonsreglene. Dersom reglene for derivasjon av polynomfunksjoner skal presenteres først, krever det et valg om bevis for reglene skal presenteres senere i kapitlet. Samtidig kan et bevis mot slutten av kapitlet oppfattes som lite relevant.

Utforsk-oppgaven i introduksjonen i *Mønster 1T* bidrar til en elevaktiv og utforskende stil. Med en slik oppgave kan elevene få utforske reglen for derivasjon av polynomfunksjoner før denne blir presentert, slik at elevene får mulighet til å selv stille spørsmål ved hvordan man finner den deriverte. Dette kan åpne opp for mer nysgjerrighet hos elevene, slik at elevene i større grad ser nyttigheten av regelen før den blir presentert. Rekkefølgen på delkapitlene i boken kan også bidra til at elevene ser behovet for å finne den deriverte. Den deriverte knyttes opp mot funksjonsdrøfting før noen av derivasjonsreglene blir presentert, slik at elevene kan lære om noen av bruksområdene til derivasjon før de lærer å finne den deriverte.

Kalvø et al. (2021) velger i forbindelse med innledningen til derivasjon av polynomfunksjoner å bruke begrepet stigningstallfunksjonen. Bruk av dette begrepet knytter sammen stigningstall og derivert, selv om det ikke kommer tydelig frem hvilken tilknytning stigningstallfunksjonen og den deriverte egentlig har. Dette, sammen med at stigningstallfunksjonen ikke er definert, fører til at dette begrepet blir brukt på en diffus måte der det hentydes til at begrepet har noe med den deriverte uten at dette skrives eksplisitt. Valget om å bruke stingingstall kan antas å bli brukt for å knytte sammen dette kjente begrepet med den deriverte, men uten en eksplisitt forklaring av hva stigningstallfunksjonen er kan det skape forvirring hos elevene.

5.3.2 Kjerneregelen

Som presentert tidligere hevder Lindstrøm (2016, s. 283) at kjerneregelen er den aller viktigste derivasjonsregelen. Både Newton og Leibniz brukte det vi i dag kaller kjerneregelen, selv om ingen av de presenterte den som en metode eller et teorem. I et memoar fra 1676 brukte Leibniz substitusjon for å regne ut $d\sqrt{a+bz+cz^2}$. Her satt han $x = a+bz+cz^2$, slik at

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{og} \quad dx = (b+2cz)dz.$$

Dermed er

$$d\sqrt{a+bz+cz^2} = \frac{(b+2cz)dz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}. \text{ (Edwards, 1979, s. 255)}$$

Med differensialnotasjonen som Leibniz brukte ble kjerneregelen et naturlig resultat av å forkorte et produkt av rater. Dersom $z = z(u)$ og $u = u(x)$, så kan kjerneregelen, ved hjelp av differensialnotasjonen til Leibniz, skrives som

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \text{ (Edwards, 1979, s. 232)}$$

Som forklart i Kapittel 4.5 endret forståelsen av begrepet funksjon seg fra et fokus på kurver og geometrisk forståelse, til større fokus på det analytiske. Sammen med dette endret også symbolbruken seg i tillegg til at begrepet *sammensatt funksjon* ble innført, som vi i dag skriver som $f(g(x))$ eller $(f \circ g)(x)$. Med dette ble kjerneregelen skrevet på formen $f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$, og noe av det intuitive i Leibniz sin symbolbruk forsvant.

Samtidig som at Cauchy introduserte begrepet grenseverdi og definerte derivert ved hjelp av dette, som beskrevet i Kapittel 4.2, introduserte og beviste han kjernereglen på en form som vi gjenkjenner i dag (som referert i Edwards, 1979, s. 313, min oversettelse):

> La nå z være en ytre funksjon (second function of x), bundet til den indre funksjonen (first function) $y = f(x)$ ved formelen
>
> $$z = F(y).$$
>
> z eller $F[f(x)]$ vil være det en kaller en funksjon av en funksjon av en variabel x; og, hvis en betegner de uendelige små endringene av x, y og z, med Δx, Δy, Δz, vil en finne
>
> $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$
>
> og ved å se på grenseverdiene,
>
> $$z' = y'F'(y) = f'(x)F'[f(x)].$$

I dette beviset blir det ikke tatt i betraktning tilfellet der $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ for små verdier av Δx. Denne utelatelsen fører til at dette beviset er ikke gyldig for sammensatte funksjoner $F[f(x)]$ der $f(x + h) - f(x) = 0$ for en h i nærheten av x. Dette gjelder i hovedsak konstante funksjoner, som ikke skaper noe behov for å bruke kjerneregelen, eller funksjoner som oscillerer rundt et punkt a slik at man alltid kan finne en x nærmere a slik at $f(x) = f(a)$. Et eksempel på en slik funksjon er den kontinuerlige funksjonen definert ved $f(x) = 0$ for $x = 0$ og $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ellers (Chain rule, 2022). I beviset gjør Cauchy et algebraisk triks ved å multiplisere med 1, eller mer konkret, gange med $\Delta y/\Delta y$. Dette fører til at det er vanskelig å få tak på den geometriske tolkningen av beviset, noe Cottrill (1999, s. 5–6) hevder at kan komme av at det er utfordrende å demonstrere sammensatte funksjoner grafisk.

Adam og Essex (2018) velger å presentere kjerneregelen også med notasjonen Leibniz brukte etter å ha presentert kjerneregelen på formen $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$. De bruker en slags intuitiv forklaring på kjernereglen, og knytter dette opp mot ratene $\frac{dy}{du}$ og $\frac{du}{dx}$ (Adams & Essex, 2018, s. 116–117, min oversettelse):

Ved bruk av Leibniz sin notasjon, hvis $y = f(u)$ hvor $u = g(x)$, så er $y = f(g(x))$, og:

ved u så endrer y seg $\dfrac{dy}{du}$ så fort som u endrer seg;
ved x så endrer u seg $\dfrac{du}{dx}$ så fort som x endrer seg.

Derfor, ved x, så endrer $y = f(u) = f(g(x))$ seg $\dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ så fort som x endrer seg. Det vil si

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \qquad \text{hvor } \frac{dy}{du} \text{ er evaluert i } u = g(x).$$

Denne tankegangen går også an å gjøre mer konkret og dermed kanskje mer intuitiv med et eksempel: «hvis en bil reiser dobbelt så fort som en sykkel, og sykkelen fire ganger så fort som en som går, så vil bilen reise $2 \cdot 4 = 8$ ganger så fort som den gående» (Simmons, 1996, s. 93, min oversettelse). Relatert til utdraget over vil y, u og x være posisjonene til henholdsvis bilen, sykkelen og den gående. Dermed vil endringsraten mellom posisjonen til bilen og sykkelen være $\frac{dy}{du} = 2$, og tilsvarende vil endringraten mellom posisjonen til sykkelen og til den gående være $\frac{du}{dx} = 4$. Dette gir oss at endringsraten mellom bilen og den gående vil være:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 2 \cdot 4 = 8.$$

Etter Adam og Essex (2018) har presentert kjernereglen med Leibniz sin notasjon, skriver de at de ønsker å bevise regelen ved å skrive $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ og se på grenseverdien når $\Delta x \to 0$, altså et bevis som likner Cauchy sitt bevis, men her med moderne notasjon. De understreker at et slik type bevis er riktig for de fleste sammensatte funksjoner, men ikke alle. Videre viser de et slikt bevis i en oppgave på slutten av delkapitlet, der oppgaveløseren skal finne ut hva som er galt med beviset. Beviset er som følger (Adams & Essex, 2018, s. 121, min oversettelse):

La $k = g(x+h) - g(x)$. Da vil $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$.Videre har vi

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

I likhet med Cauchy sitt bevis, tar dette beviset ikke hensyn til tilfellene der $k = g(x+h) - g(x) = 0$, og det er derfor ikke gyldig for alle funksjoner. Det kommer imidlertid tydelig frem at dette beviset ikke er gyldig for alle sammensatte funksjoner, og Adam og Essex (2018, s. 120) presenterer et bevis som er gyldig for alle sammensatte funksjoner $f(g(x))$ i slutten av delkapitlet.

I *Mønster R1* presenteres kjerneregelen etter derivasjon av polynomfunksjoner presenteres. Forfatterne starter her med å repetere hvordan funksjonsverdien til en sammensatt funksjon regnes ut, og skriver så funksjonen $f(x) = 2(x^2 + 3)^4$ ved substitusjonen $u = (x^2 + 3)$, slik at funksjonen skrives som $f(x) = 2u^4$. Videre knyttes dette opp mot derivasjon av en sammensatt funksjon (Kalvø et al., 2021, s. 162):

> Vi har skrevet funksjonen $f(x) = 2u^4$ på en form vi kan derivere med reglene vi kan fra før. Men siden u erstatter en del av uttrykket, viser det seg at vi også må multiplisere med den deriverte av uttrykket vi erstatter. Her er $u' = 2x$, og dermed får vi
>
> $$f(x) = 2u^4$$
> $$f'(x) = 2 \cdot 4u^{4-1} \cdot u' = 8 \cdot u^3 \cdot \underbrace{2x}_{u'} = 8 \cdot \underbrace{(x^2+3)^3}_{u} \cdot \underbrace{2x}_{u'} = 16x(x^2+3)^3$$
>
> **KJERNEREGELEN**
>
> La f være en sammensatt funksjon med g som ytre funksjon og $u(x)$ som kjerne:
>
> $$f(x) = g(u(x)) \implies f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Kjerneregelen knyttes her til elevenes tidligere kunnskap om sammensatte funksjoner, og konkretiseres gjennom et eksempel med funksjonen $f(x) = 2(x + 3)^4$. Her blir teknikken eksemplifisert før den blir presentert som en generell regel, noe som kan gjøre regelen mer konkret for elevene. Teknologien blir bygd opp ved et formelt bevis, men der det gjøres en forenkling om at $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \neq 0$, i likhet med Cauchy sitt bevis. Denne forenklingen gjør beviset mer tilgjengelig for elevene, samtidig som det er få tilfeller som elevene møter der denne forenklingen er et problem. Elevene presenteres ikke med derivasjon av trigonometriske funksjoner, og funksjoner som oscillerer rundt et punkt er et sjeldent syn i boken. Beviset som presenteres holder ikke for alle deriverbare funksjoner, men forenklingen om at $\Delta u \neq 0$ holder for de fleste av funksjonene elevene møter på. I tillegg gjør det at beviset er lettere å forstå for elevene, og at det dermed blir mer tilgjengelig for flere elever. Kalvø et al. (2021) unnlater å skrive at funksjonene g og u skal være deriverbare, og heller ikke at dersom de er deriverbare så er den sammensatte funksjonen $f(g(x))$ også deriverbar. Allikevel skriver de i beviset at «u er kontinuerlig og deriverbar», og bruker denne antakelsen aktivt i beviset.

5.3.2.1 Diskusjon av kjerneregelen

Kjerneregelen er et godt eksempel på at hvilken notasjon som er tatt i bruk er viktig både for hvor intuitiv en regel eller metode er, og for hvordan et bevis blir utformet. Det at verken Newton eller Leibniz presenterte kjerneregelen som en regel eller et bevis, kan komme av at regelen kom som et naturlig resultat ved hjelp av notasjonen som ble tatt i bruk. Slik som vist i starten av dette kapitlet (5.3.2) var det for Leibniz naturlig å erstatte dx med med den deriverte av x med hensyn på z, når x ble erstattet med et uttrykk med z som variabel. Når ny notasjon ble innført sammen med at det kom en ny forståelse av begrepet funksjon, ble noe av det intuitive både ved regelen og beviset borte. Sammen med at begrepet sammensatte funksjoner ble innført, krevde bruk av kjerneregelen også forståelse av dette begrepet, samt å kunne identifisere kjernen til en sammensatt funksjon.

Teknologien til kjerneregelen er i *Mønster R1* bygd opp ved et formelt bevis med utgangspunkt i den analytiske definisjonen av den deriverte. Beviset i boken likner beviset som Cauchy presenterte, men det inneholder flere ledd, slik at det er beskrevet i større detalj hva som blir gjort. Det algebraiske trikset kan, i likhet med hva som er gjort i Cauchy sitt bevis, gjøre det vanskelig å få en grafisk forståelse av hva beviset innebærer. Kjerneregelen er, utenom beviset, kun begrunnet ved hjelp av utregning av et konkret eksempel i *Mønster R1*. Det konkrete eksempelet med en bil, sykkel og en gående, som er presentert i Kapittel 5.3.2, er et forsøk på å gjøre kjerneregelen mer konkret og intuitiv. Samtidig er det vanskelig å demonstrere sammensatte funksjoner grafisk, noe som gjør det utfordrende å beskrive kjerneregelen på en intuitiv og grafisk måte.

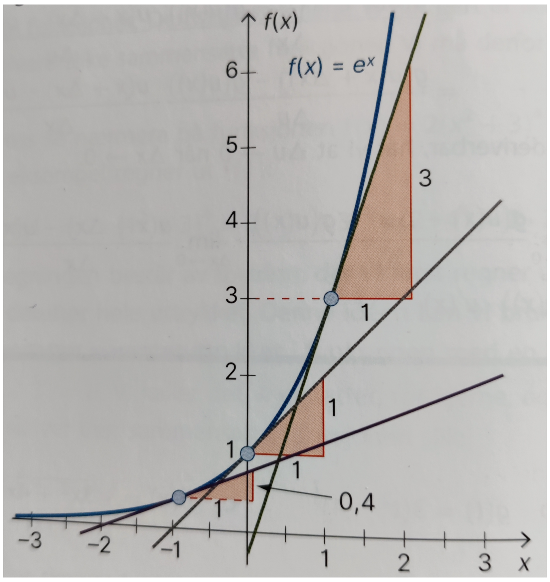
Beviset for kjerneregelen som presenteres i *Mønster R1* er ikke gyldig for alle funksjoner, og det er presisert at det gjøres en forenkling i beviset. Denne forenklingen gjorde også Cauchy i sitt bevis uten å kommentere på dette, og det antydes i Adam og Essex (2018) at det er ønskelig å bevise kjerneregelen på en tilsvarende måte. Siden forenklingen i liten grad påvirker de funksjonene elevene i R1 møter på, sammen med at den gjør beviset kortere og mer forståelig, er dette en forenkling som kan gjøre beviset og dermed teknologien mer tilgjengelig for elevene.

5.3.3 Eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjonen $\ln x$

Etter derivasjon av polynomer og kjerneregelen blir presentert i *Mønster R1*, presenteres derivasjon av eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjonen. Derivasjon av den naturlige eksponentialfunksjonen motiveres med en opptegnet graf av funksjonen $f(x) = e^x$ med tangenter der $f(x) = 0,4$, $f(x) = 1$ og $f(x) = 3$, slik som vist i Figur 5.1.

Figur 5.1

Grafen til $f(x) = e^x$ fra Mønster R1 med tangenter i tre punkter.



Merknad: Figuren er fra *Mønster: Matematikk R1* (s. 164), av Kalvø et al. (K. Skrindo, Gamma grafisk AS (V. Brekke og A. Moholt), Ill.), 2021, Gyldendal. Copyright 2021 ved Gyldendal. Gjengitt med tillatelse.

Deretter kobler forfatterene sammen stigningstallet til tangentene til den deriverte:

> Når vi undersøker grafen i punktet $(0, 1)$, ser vi at stigningstallet til tangenten er 1. På samme måte ser vi at stigningstallet til tangenten i de to andre punktene også er lik funksjonsverdien. Slik er det for alle punkter på grafen til funksjonen $f(x) = e^x$. Eksponentialfunksjonen har altså seg selv som den deriverte! (Kalvø et al., 2021, s. 164)

Her tar forfatterene utgangspunkt i den grafiske forståelsen av den deriverte som stigningstallet til tangenter på en graf. Denne koblingen bidrar til at elevene får se flere ulike representasjoner av den deriverte, som kan bidra til en bredere forståelse av den deriverte. Etter denne innledningen presenteres et formelt bevis med utgangspunkt i definisjonen av den deriverte, samt definisjonen av Eulers tall på formen $e = \lim_{\Delta x \to 0}(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$.

Når det kommer til logaritmefunksjonen innledes derivasjon av denne med en utforsk-oppgave, der elevene skal tegne grafen til $f(x) = \ln x$, og undersøke stigningstallet til ulike tangenter langs grafen og skrive ned koordinatene $(x, \text{stigningstall})$. Deretter skal elevene bruke regresjon til å finne en passende funksjon til disse koordinatene, og forklare at denne funksjonen er den deriverte funksjonen til logaritmefunksjonen $f(x) = \ln x$. Denne innledningen kan bidra til at elevene selv stiller spørsmålet om hvordan den deriverte av $f(x)$ ser ut før de får presentert en regel for det, noe som kan bidra til en mer undersøkelsesbasert læringsprosess. I tillegg brukes det her igjen en grafisk forståelse av den deriverte, og elevene får også presentert en alternativ måte å undersøke den deriverte på.

I tillegg til utforsk-oppgaven presenteres det en algebraisk måte å finne den deriverte av $f(x) = \ln x$ på, med utgangspunkt i den definisjonen av den naturlige logaritmen $e^{\ln x} = x$. Videre er det følgende utdrag:

> En likning har alltid samme verdi på høyre og venstre side. Når vi nå deriverer uttrykkene på hver side, må sidene fortsatt ha samme verdi. Høyre side derivert er lik 1. Det betyr at venstre side derivert også må være lik 1. Vi får da
>
> $$(e^{\ln x})' = x'$$
> $$(e^{\ln x})' = 1$$
>
> Vi bruker kjerneregelen:
>
> $$\begin{aligned} (e^{\ln x})' &= 1 \\ e^{\ln x} \cdot (\ln x)' &= 1 \\ x \cdot (\ln x)' &= 1 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$
>
> Den deriverte av $\ln x$ er altså $\dfrac{1}{x}$ (Kalvø et al., 2021, s. 166).

Her brukes det elevene kan fra før til å vise at den deriverte av $f(x) = \ln x$ er $\frac{1}{x}$. Denne matematiske begrunnelsen danner en solid teknologi.

Videre etter derivasjonsregel for logaritmefunksjonen presenteres, brukes et liknende bevis for den generelle eksponentialfunksjonen a^x:

> Vi bruker kjerneregelen for å derivere den generelle eksponentialfunksjonen a^x, der a er positiv og ikke lik 1. Vi har tidligere lært definisjonen av den naturlige logaritmen, $e^{\ln x} = x$.
>
> Vi bruker dette til å skrive funksjonsuttrykket med eulertallet, e, som grunntall:
>
> $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$
>
> I uttrykket over setter vi $u(x) = x \ln a$. Det gir $u'(x) = \ln a$.
> Vi bruker kjerneregelen og får
>
> $(a^x)' = (e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$ (Kalvø et al., 2021, s. 167)

De to bevisene for derivasjon funksjonene $f(x) = \ln x$ og $f(x) = a^x$ tar begge i bruk den algebraiske identiteten $x = e^{\ln x}$, sammen med kjerneregelen og regel for derivasjon av eksponentitalfunksjoner. Disse bevisene skiller seg fra flere av de andre bevisene for derivasjonsregler ved at beviset ikke tar utgangspunkt i den analytiske definisjonen av den deriverte. Bruk av identiteten $x = e^{\ln x}$ er ikke brukt i noen av de tidligere bevisene, og kan oppfattes som et litt tilfeldig algebraisk triks for elevene. Samtidig skal elevene ha forkunnskaper til å kunne forstå alle leddene i beviset, og det demonstrerer for elevene at det finnes ulike måter å bevis derivasjonsreglene på.

5.3.3.1 Diskusjon av derivasjon av eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjonen

De tre bevisene for derivasjon av funksjoner på formene $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$ og $f(x) = a^x$, skaper en solid teknologi for derivasjon av eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjonen. Mens beviset for derivasjon av funksjonen $f(x) = e^x$ tar utgangspunkt i den analytiske definisjonen til den deriverte, er bevisene for derivasjon av funksjoner på formene $f(x) = \ln x$ og $f(x) = a^x$ av mer algebraisk form. Siden disse bevisene ikke tar utgangspunkt i definisjonen til den deriverte, kan bevisene oppfattes litt mer tilfeldige for elevene, samt at det er vanskeligere å forstå det grafiske aspektet enn for det første beviset. Samtidig er dette med på å presentere elevene for ulike typer bevis, og skaper variasjon.

Det geometriske fokuset i innledning til derivasjonsreglene for e^x og $\ln x$ skaper variasjon i ulike representasjoner av den deriverte. Ved å knytte derivasjonsreglene opp mot stigningstallet til tangenter på en graf, understreker forfatterne den geometriske forståelsen av den deriverte. Her kobles funksjonsverdien i et punkt sammen med stigningstallet for tangenten i punktet, og ved å gjøre dette i flere ulike punkt på grafen oppdages det en sammenheng mellom disse. Utforsk-oppgaven i innledningen til derivasjon av logaritmefunksjoner åpner for at elevene selv kan oppdage sammenhenger mellom funksjonsverdien i et punkt og stigningstallet til tangenten i det samme punktet. Dette fører til at elevene kan utforske sammenhenger og mønster, som kan vekke nysgjerrighet hos elevene, samt at det geometriske fokuset kan styrke elevenes geometriske forståelse av den deriverte.

5.3.4 Derivasjon av produkt

Leibniz presenterte produktregelen med bevis i 1677, men før dette, i noen notater fra 1675, stilte han spørsmål ved om $d(uv) = (du)(dv)$, eller med moderne notasjon, om $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$. Dette motbeviste han ved å derivere x^2 og sammenligne dette med å bruke regelen $d(uv) = (du)(dv)$ med $u = x$ og $v = x$, der han ikke fikk samme resultat (Edwards, 1979, s. 254):

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2x\ dx + (dx)^2 = 2x\ dx$$
$$(dx)(dx) = (x + dx - x)(x + dx - x) = (dx)^2$$

Siden $d(x^2) \neq (dx)(dx)$ konkluderte Leibniz med at regelen $d(uv) = (du)(dv)$ ikke stemte. I 1677 hadde Leibniz kommet frem til den korrekte regelen for derivasjon av produktet av funksjoner, og Leibniz presenterte et bevis for produktregelen på formen $d(xy) = x\ dy + y\ dx$ (Edwards, 1979, s. 255):

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= x\ dy + y\ dx + dx\ dy \end{aligned}$$

Han bemerket at (som referert i Edwards, 1979, s. 255, min oversettelse) «utelatelsen av størrelsen $dx\ dy$, som er uendelig liten sammenlignet med resten, for det er antatt at dx og dy er uendelig små, vil etterlate $x\ dy + y\ dx$». Bruken av infinitesimaler og notasjonen Leibniz brukte førte til at beviset for regelen var ganske så rett frem, selv om det både på Leibniz tid og i etterkant var store diskusjoner om gyldighet, eksistens og bruk av infinitesimaler, som utledet i Kapittel 4.2.

I Adams og Essex (2018) presenteres produktregelen rett etter derivasjon for sum av flere funksjoner, og det presiseres at produktregelen er litt mer komplisert enn derivasjon av summer, og at det ikke er slik at den deriverte av et produkt er produktet av de deriverte, slik som Leibniz satte spørsmål ved. Beviset de presenterer tar utgangspunkt i definisjonen av den deriverte (Adams & Essex, 2018, s. 111, min oversettelse):

> Vi setter opp Newtons kvotient for fg og så adderer 0 til telleren på en måte som lar oss involvere Newtons kvotienter for f og g hver for seg:
>
> $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$
>
> For å få den siste linjen brukte vi at f og g er deriverbare og at g derfor er kontinuerlig (Teorem 1), samt grenseverdireglene fra Teorem 2 i Seksjon 1.2.

I beviset brukes det, ikke så ulik som i beviset som er presentert for kjerneregelen i Kapittel 5.3.2, et algebraisk triks ved å legge til 0 i telleren. Dette gjør at beviset i stor grad består av algebraisk manipulasjon av uttrykket, der uttrykket til den deriverte av $f(x)$ og $g(x)$ gjenkjennes. Bruken av algebraisk manipulasjon i beviset distanserer beviset både fra en grafisk og geometrisk tolkning, noe som kan begrense påvirkningen beviset har på leserens relasjonelle forståelse av produktregelen. I tillegg til dette beviset presenterer de en skisse av et grafisk bevis der et rektangulært areal representerer $f(x)g(x)$, noe som kan bidra til en bredere forståelse av produktet av to funksjoner.

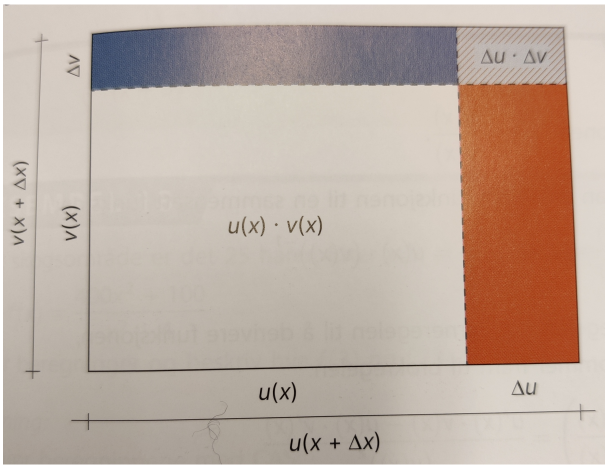
For å presentere hvordan derivasjon av et produkt gjøres, starter forfatterne i *Mønster R1* med å komme med et eksempel på en slik funksjon, $f(x) = x^2 \cdot 3x$. De understreker at denne funksjonen kan skrives på formen $f(x) = 3x^3$, men at det ikke er alle produkter som kan multipliseres og forkortes på denne måten. Ved hjelp av denne funksjonen illustreres det at resultatet ikke blir den deriverte av $f(x)$ dersom de to funksjonene x^2 og $3x$ deriveres hver for seg, for å deretter ta produktet av disse to deriverte funksjonene. Dette bruker de til å argumentere for at dersom $f(x) = u \cdot v$, så er ikke $u' \cdot v'$ den deriverte av $f(x)$, i likhet med hva Leibniz gjorde etter han stilte spørsmål ved det samme. Derimot skrives det at «For å derivere et produkt må vi bruke *produktregelen*, som gir: $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$» (Kalvø et al., 2021, s. 170). Ved hjelp av dette eksempelet hentyder forfatterne at det kanskje er intuitivt å derivere de to funksjonene hver for seg og så ta produktet av dette, slik som Leibniz først tenkte, og slik som også Adams og Essex (2018) hentyder med å understreke at produktregelen er litt mer komplisert enn derivasjon av summer. Ved å regne ut resultatet man får ved å derivere ved hjelp av regelen $u' \cdot v'$ i tillegg til å derivere ved hjelp av reglene for derivasjon av polynomfunksjoner viser de at regelen ikke stemmer. Ved hjelp av eksempelet eksemplifiserer de også produktregelen før den presenteres, og bruker her funksjoner som er relativt enkle å derivere.

Etter regelen er presentert og etter to eksempler, presenteres det i *Mønster R1* et bevis for produktregelen for en funksjon $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Dette beviset er for to voksende funksjoner $u(x)$ og $v(x)$, men det påpekes mot slutten av beviset at et tilsvarende argument kan brukes dersom en eller begge funksjonene er avtakende. Beviset inneholder to figurer som illustrerer at når x øker med Δx, så øker $u(x)$ med $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ og tilsvarende for $v(x)$. Videre i beviset forstås produktet av $u(x)$ og $v(x)$ som et rektangel, som vist i Figur 5.2. Dette beviset likner på det grafiske beviset som er skissert i Adams og Essex (2018, s. 111).

Rektangelet i Figur 5.2 blir brukt til å uttrykke arealet av det fargelagte området på to forskjellige måter. Den første er som «arealet av det store rektangelet minus arealet av det hvite rektangelet» (Kalvø et al., 2021, s. 173) som $A_1 = f(x + \Delta x) - f(x)$. Den andre måten er ved å finne «arealet av de fargelagte rektanglene minus det lille rektangelet i hjørnet» (Kalvø et al., 2021, s. 173) som $A_2 = \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x + \Delta x) \cdot \Delta v - \Delta u \cdot \Delta v$. Videre brukes disse to arealene (Kalvø et al., 2021, s. 173–174):

Figur 5.2

Geometrisk fremstilling av produktet av $u(x)$ og $v(x)$ i bevis for produktregelen fra Mønster R1.



Merknad: Figuren er fra *Mønster: Matematikk R1* (s. 173), av Kalvø et al. (K. Skrindo, Gamma grafisk AS (V. Brekke og A. Moholt), Ill.), 2021, Gyldendal. Copyright 2021 ved Gyldendal. Gjengitt med tillatelse.

De to måtene å regne ut arealet på gir samme areal:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_2 \\
f(x+\Delta x) - f(x) &= \Delta u \cdot v(x+\Delta x) + u(x+\Delta x)\cdot \Delta v - \Delta u \cdot \Delta v \qquad \mid : \Delta x \\
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x+\Delta x)\cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} - \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Vi lar nå $\Delta x \to 0$. Da vil venstre side gå mot $f'(x)$ og høyre side bli som vist under:

$$
\underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} = \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{v(x+\Delta x)}_{v(x)} + \underbrace{u(x+\Delta x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} - \underbrace{\Delta u}_{0} \cdot \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)}
$$

Dette gir det vi kaller produktregelen, når vi deriverer produktet av to funksjoner:

$$
f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \qquad \blacksquare
$$

Kalvø et al. (2021) har her tatt et valg om å bruke en geometrisk tilnærmelse til beviset fremfor et rent algebraisk bevis slik som i Adam og Essex (2018). Dette kan bidra til at det er lettere å visualisere hva beviset går ut på. I tillegg er det figurer som beskriver sammenhenger mellom Δx, Δu og Δv, slik at dette presenteres for elevene også med en grafisk representasjon. Samtidig har de andre bevisene elevene har blitt presentert for enten tatt i bruk definisjonen av den deriverte, eller funnet et uttrykk for den deriverte ved å bruke kjerneregelen og definisjonen av den naturlige logaritmen. Dette beviset har derfor en litt annen innfallsvinkel, og noen av stegene i beviset kan derfor kanskje virke litt tilfeldige og vanskelige å forstå for elevene. Dette fører imidlertid til at elevene blir presentert for et bredere spekter av ulike bevis.

5.3.4.1 Diskusjon av derivasjon av produktfunksjoner

I likhet med hva Leibniz først trodde, starter *Mønster R1* med å undersøke om den deriverte av produktet av to funksjoner er lik produktet av de deriverte av funksjonene, altså om $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$. Forfatterne tar på denne måten tak i noe av det som historisk var en utfordring, og begrunner og eksemplifiserer at denne intuitive tankegangen ikke stemmer for derivasjon av et produkt. Ved å motbevise denne antakelsen tar forfatterne tak i noe som kan bli en misoppfatning hos elevene, og understreker at dette er feil allerede før derivasjonsregelen blir presentert. Det geometriske beviset for produktregelen danner en solid teknologi, og bidrar til å presentere enda et type bevis for elevene. Dette beviset krever en geometrisk forståelse av funksjonen $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ som et rektangel for å forstå gyldigheten til beviset. Dette er en type representasjon av en funksjon som elevene ikke blir eksponert for i like stor grad som funksjoner på en algebraisk form og grafisk representasjon av funksjoner. Derfor er det sannsynlig at å representere en funksjon som et areal er relativt ukjent for elevene, og at det kan være en utfordring for mange av elevene. Samtidig kan dette være med å skape et bredere forståelse av hva en funksjon er, sammen med hva som er et gyldig bevis i matematikk.

5.3.5 Derivasjon av brøkfunksjoner

I likhet med at Leibniz stilte spørsmål ved om $d(uv) = (du)(dv)$, så han også på om $d(dv)/(du)$, eller med moderne notasjon om $\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)' = \frac{v'(x)}{u'(x)}$. Dette motbeviste han, og et par år senere presenterte han den korrekte regelen sammen med et bevis for å vise at (Edwards, 1979, s. 256, min oversettelse):

$$d\frac{y}{x} = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2},$$

der han skrev

$$d\frac{y}{x} = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + x\ dx},$$

«som blir (hvis vi skriver x^2 for $x^2 + x\ \ dx$, siden $x\ \ dx$ kan utelates som uendelig liten til sammenligning med x^2) lik $(x\ \ dy - y\ \ dx)/x^2$» (som referert i Edwards, 1979, s. 256, min oversettelse). Tilsvarende som ved produktregelen, førte Leibniz sin differensialnotasjon til et relativt enkelt forståelig bevis.

Før Adams og Essex (2018) presenterer brøkregelen, velger de å presentere en regel for å derivere $\frac{1}{f(x)}$. Dette viser de ved hjelp av definisjonen til den deriverte, men dersom kjerneregelen er presentert før brøkregelen, slik som i *Mønster R1*, så er dette et resultat av produktregelen og kjerneregeln. Videre utleder de brøkregelen ved å kombinere produktregelen og regelen for å derivere $\frac{1}{f(x)}$ på følgende måte (Adams & Essex, 2018, s. 113):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right) &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right)\\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

I *Mønster R1* bruker de et relativt likt bevis som i Adams og Essex (2018), men her er det gitt til elevene å vise regelen for derivasjon av funksjoner på formen $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ i en utforsk-oppgave. Oppgaven er som følgende (Kalvø et al., 2021, s. 174):

> Vi har brøkfunksjonen $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.
>
> 1. Forklar at vi kan omskrive funksjonen til en sammensatt funksjon:
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} = u(x) \cdot (v(x))^{-1}$$
>
> 2. Bruk produktregelen og kjerneregelen til å derivere funksjonen, og vis at du kommer fram til brøkregelen:
>
> $$f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$
>
>   Tips: Sett kjernen lik $v(x)$.

Forskjellen fra Adams og Essex sitt bevis er at i stedet for å først presentere en regel for derivasjon av $\frac{1}{f(x)}$, så viser *Mønster R1* at $\frac{1}{v(x)}$ kan skrives om til den sammensatte funksjonen $(v(x))^{-1}$, for å deretter bruke kjerneregeln for å derivere denne sammensatte funksjonen. Denne utforsk-oppgaven inviterer elevene til å ta en aktiv del av teknologien, ved å selv vise denne regelen. Ved en slik oppgave understrekes det at elevene selv har mulighet til å bevise matematiske sammenhenger, slik at bevis ikke kun er noe som elevene skal lese og forstå, eller at bevis kun er for de spesielt interesserte. I tillegg til denne oppgaven er det referert til en video i *Skolestudio*, Gyldendals digitale læringsverktøy tilknyttet boken, der brøkregelen vises på samme måte som i utforsk-oppgaven.

5.3.5.1 Diskusjon av derivasjon av brøkfunksjoner

Også når det kommer til derivasjon av brøkfunksjoner fører Leibniz sin differensialnotasjon til et kort bevis. Likheten mellom beviset i Adam og Essex (2018) og i Kalvø et al. (2021) viser en relativt lik teknologi i disse to lærebøkene. Ved at beviset er i en utforsk-oppgave ansvarliggjøres elevene til en viss grad å bevise regelen for derivasjon av brøkfunksjoner. I likhet med de andre utforsk-oppgavene fører dette til at leseren må ta en aktiv del i det som læres, og det understrekes med dette at elevene selv er i stand til å bevise reglene i boken og at dette ikke kun er for en liten elite. Ved at beviset tar i bruk både sammensatte funksjoner, produktregelen og kjerneregelen får elevene også tatt i bruk disse reglene på et generelt uttrykk, og ikke kun på konkrete funksjoner. Siden beviset presenteres i en video som er referert til og boken og som er tilknyttet til Gyldendal sitt digitale læringsverktøy, vil også de som ikke får til utforsk-oppgaven ha mulighet til å undersøke beviset.

5.3.6 Teori Θ for «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)»

Teorien Θ for punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)» er vanskelig å få tak på i *Mønster R1*, og er i stor grad fraværende. Teorien ville bestått av et system av definisjoner, aksiomer, lemma, korollarer og teoremer som bygget opp under teknologien til derivasjonsreglene. Den manglende teorien i *Mønster R1* tydeliggjøres ved at mange av derivasjonsreglene ikke presenteres med nødvendige antakelser, og dette gjelder spesielt for deriverbarhet. I presentasjon av den analytiske definisjonen til den deriverte utelates det å nevne at vi ikke alltid kan finne denne grenseverdien; det er først noen sider etter at det presenteres at ikke alle funksjoner er deriverbare. Når det kommer til presentasjon av kjerneregelen blir det ikke antatt at de to funksjonene $g(u)$ og $u(x)$ er deriverbare, men det brukes allikevel aktivt i beviset at «u er kontinuerlig og deriverbar» (Kalvø et al., 2021, s. 163). Dette er noe vi finner igjen i derivasjon av produkt, der det heller ikke er antatt at funksjonene $u(x)$ og $v(x)$ er deriverbare, selv om kontinuitet er en nødvendighet for argumentasjonen i beviset. For både kjernereglen og produktregelen er det heller ikke presentert at $g(u(x))$ og $u(x) \cdot v(x)$ er deriverbare dersom funksjonene g, u og v er deriverbare.

Som presentert i Kapittel 5.3.2 inneholder beviset for kjerneregelen en forenkling. Denne forenklingen er nevnt i beviset, men det er ikke kommentert noe videre på hvilken betydning det har. Det finnes ingen kommentar på i hvilke tilfeller vi har $\Delta u = 0$, og heller ikke på hvilken betydning det har for gyldigheten til beviset. Videre er det ikke nevnt at logaritmefunksjoner og brøkfunksjoner ikke alltid er deriverbare for alle x-verdier. Det er ikke nevnt hva som skjer i $x = 0$ for den deriverte at logaritmefunksjonen, og heller ikke hva som skjer dersom $v(x) = 0$ i derivasjon av brøkfunksjonen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Denne løsrivelsen fra deriverbarhet og unnlatelsen av antakelser om deriverbarhet er noe av det som tydeliggjør en manglende teori for punkt-MO-en. Dette gjør presentasjonen av derivasjonsreglene upresis, samtidig som det kan føre til at elevene oppfatter deriverbarhet som noe som kun må tas stilling til i spesielle tilfeller, som for eksempel ved funksjoner med delt forskrift eller andre funksjoner med knekkpunkt.

Kapittel 6

Diskusjon

I dette kapitlet vil jeg diskutere analyseresultatene jeg presenterte i Kapittel 5 i lys av teorien jeg presenterte i Kapittel 2, for å besvare forskningsspørsmålet «Hvilke matematikkfaglige elementer består differensialregning i matematikk R1 av, og hvilke didaktiske transposisjonsprosesser har disse elementene gjennomgått?». Jeg diskuterer først den matematiske organiseringen av innholdet i differensialregning i *Mønster R1* i Kapittel 6.1. Videre, i Kapittel 6.2, diskuterer jeg den didaktiske transposisjonen av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler).»

Det er til min beste kjennskap lite eksisterende forskning på den matematiske kunnskapen i differensialregning slik det kommer frem i lærebøker. Dette kan underbygges av Park (2016) som hevder at selv om det finnes flere studier om elevers forståelse av den deriverte og hvordan derivasjon undervises, finnes det lite forskning på derivasjon i lærebøker. Både Wijayanti og Winsløw (2017) og Barbé et al. (2005) trekker frem at det er lite forskning på lærebøker med fokus på det matematiske innholdet, og spesielt med fokus på spesifikke typer matematiske oppgaver slik som i min studie. Jeg har derfor valgt å diskutere mine resultater i lys av de tre studiene jeg har utviklet deler av mine analyseverktøy ut ifra; Barbé et al. (2005), Wijayanti og Winsløw (2017) og González-Martín et al. (2013) (se Kapittel 3.4). Disse tre studiene inneholder alle prakseologiske analyser av det matematiske innholdet i lærebøker, og er derfor studier som er relevante for min studie. Som presentert i Kapittel 3.4 er det ingen av disse studiene som undersøker på det matematiske innholdet i differensialregning. Jeg inkluderer også perspektiver fra Strømskag og Chevallard (2022), ettersom de gjør en prakseologisk analyse av begrepet konkavitet i *Mønster R1*.

6.1 Matematisk organisering som beskriver elementene i differensialregning i matematikk R1

For å svare på første del av forskningsspørsmålet – «Hvilke matematikkfaglige elementer består differensialregning i matematikk R1 av?» – valgte jeg å analysere den matematiske organiseringen i differensialregning i *Mønster R1*. Denne matematiske organiseringen gir et konkret svar på denne første delen av forskningsspørsmålet, nemlig at differensialregning i R1 består av de to lokale MO-ene «Finn den deriverte av $f(x)$» og «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» sammen tilhørende punkt-MO-er. Det at innholdet er beskrevet ved hjelp av MO-er gjør at innholdet kan beskrives på en konkret og kort måte. Wijayanti og Winsløw (2017) trekker frem at å beskrive innholdet i en lærebok ved hjelp av typer oppgaver, er en objektiv måte å beskrive kjernen av det matematiske innholdet i det aktuelle temaet. Siden MO-ene er beskrevet i form av typer oppgaver er det viktig å understreke at oppgavene i seg selv ikke gir en tilstrekkelig beskrivelse av MO-ene, og at elevene ikke kun skal lære seg å løse oppgaver. For å få en fullstendig beskrivelse av MO-ene hører også teknikk, teknologi og teori med.

Teknikken og teknologien til MO-ene undersøkte jeg da jeg analyserte den matematiske organiseringen i *Mønster R1*. I likhet med at punkt-MO-er samles av samme teknikk, samles de lokale MO-ene av samme teknologi. Mens teknologien til den lokale MO-en «Finn den deriverte av $f(x)$» består av definisjonen til den deriverte sammen med den fysiske og geometriske forståelsen av den deriverte, består teknologien til den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» av litt flere ulike definisjoner og teoremer. Selv om teknologien består av flere teoremer og definisjoner, deler de ulike punkt-MO-ene denne teknologien. I tillegg har punkt-MO-ene mye av den samme eksistensberettigelsen, altså oppsto kunnskapen i takt med hverandre, og er nyttig av de samme grunnene. Alle punkt-MO-ene i den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» stammer fra ønsket om å finne maksimums- og minimumspunkter til grafer samt å forstå andre egenskaper til grafer, som forklart i Kapittel 5.2.2.

Ved å undersøke teknikk og teknologi da jeg analyserte organiseringen av innholdet i differensialregning i *Mønster R1* i punkt-MO-er og lokale MO-er, fikk jeg en oversikt over om

MO-ene er fullstendige, slik også González-Martín et al. (2013) undersøker i sin studie. Med dette mener jeg om de inneholder både praksisblokka og logosblokka, eller om praksisblokka er dominerende. For den lokale MO-en «Finn den deriverte av $f(x)$» er teknikkene i stor grad begrunnet og bevist, slik at både praksisblokka og logosblokka er tilstedeværende. Dette fikk jeg også undersøkt nærmere ved å gjøre en didaktisk transposisjonsanalyse av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)» som presentert i Kapittel 5.3. Når det gjelder den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» er teknologien mangelfull, slik at her er praksisblokka dominerende. Det krever imidlertid en grundigere undersøkelse for å presentere dette i detalj, noe som ikke har vært mitt hovedfokus for analysen. Samtidig er det verdt å merke seg hvilke deler av MO-ene som er tilstedeværende for å gi et fullstendig svar på hva innholdet i differensialregning i matematikk R1 består av.

En didaktisk transposisjonsanalyse av alle punkt-MO-ene har vært utenfor denne studien sin rekkevidde. Samtidig kan det at teknologien til den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» er mangelfull, underbygges av Strømskag og Chevallard (2022). De har undersøkt begrepet konkavitet av funksjoner i *Mønster R1*, og mer spesifikt den didaktiske transposisjonen fra akademisk kunnskap slik det er presentert i Lindstrøm (2016), til kunnskap som skal undervises i Matematikk R1, slik det er presentert i *Mønster R1*. Forstått gjennom den matematiske organiseringen av innholdet i differensialregning i *Mønster R1* presentert i Kapittel 5.2, undersøker de den didaktiske transposisjonen til punkt-MO-ene «Finn vendepunktet til $f(x)$» og «Bestem krumningen til $f(x)$». Strømskag og Chevallard (2022) trekker frem at konkavitet ikke er presentert med en presis definisjon i *Mønster R1*, men er presentert som en anvendelse av den andrederiverte. I tillegg understreker de at ved å ta i bruk begrepene *hul side opp* og *hul side ned* fremfor *konveks* og *konkav*, bruker forfatterne Kalvø et al. (2021) en naturalistisk tilnærming til konkavitet, der konkavitet blir presentert som noe som kan sees på grafen fremfor et begrep som må defineres. Dette hevder de fører til at begrepet er tilgjengelig for et bredere spekter av elever, samtidig som det fører til et tap av teknologi og en logisk oppbygning av begrepet.

Når det i *Mønster R1* er stor forskjell på logosblokka til de to lokale MO-ene, kan dette komme av ulikheter i kompleksiteten til logosblokkene. Som forklart i Kapittel 5.2.1 bygger mye av teknologien i den lokale MO-en til «Finn den deriverte av $f(x)$» på definisjonen av den deriverte, og dermed kan de fleste derivasjonsreglene bevises ved hjelp av denne. Når det kommer til den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?», krever en solid teknologi for denne MO-en flere hjelperesultat, som Fermats teorem for stasjonærpunkt, Rolles teorem og middelverdisetningen (se Kapitlene 4.3 og 4.4). Disse hjelperesultatene kan oppleves som irrelevante for elevene, og de krever en kompleksitet som Kalvø et al. (2021) har valgt bort til fordel for enkelhet. Valget om å ta bort matematisk kompleksitet går også igjen for punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)», noe jeg diskuterer videre i Kapittel 6.2. Dette er noe som imidlertid ikke går utover teknologien til denne punkt-MO-en i like stor grad som for den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?».

I min analyse av læreplanen i Matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2021b), fant jeg at innholdet i derivasjon i R1 kunne deles opp i de tre spørsmålene (1) *Hva ligger i begrepet?*, (2) *Hvordan kan vi finne den deriverte?* og (3) *Hvordan kan vi bruke derivasjon?* Dette er vist i Figur 4.4 i Kapittel 4.6. Relatert til de lokale MO-ene kan vi finne igjen Spørsmål 1 i begge de to lokale MO-ene, mens vi finner Spørsmål 2 i «Finn den deriverte av $f(x)$», og Spørsmål 3 i «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?». Dette viser et samsvar mellom læreplanen og læreboken, noe som kunne forventes ettersom *Mønster R1* har blitt skrevet med utgangspunkt i å dekke målene i læreplanen (Kalvø et al., 2021, s. 2). Samtidig kan læreplanen tolkes og forstås på ulike måter, og dermed er læreboken *Mønster R1* er kun ett mulig svar på hvordan de tre spørsmålene kan konkretiseres og presenteres. Når det kommer til logosblokka er denne, som underbygget i Kapittel 4.6, ikke uttrykt eksplisitt i kompetansemålene i læreplanen for matematikk R1. At logosblokka skal være tilstede i matematikk R kommer allikevel frem i kjerneelementet resonnering og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Det er derimot ikke konkretisert hvordan dette skal se ut, og i hvor stor grad elevene skal kunne begrunne og bevise innholdet i derivasjon. Denne mangelen på konkretisering av logosblokka i læreplanen åpner for stor variasjon i forståelse av hvordan dette skal realiseres.

I kompetansemålene for matematikk R1 står det at elevene skal kunne bruke derivasjon «for å løse praktiske problemer», noe som også kommer frem i kjerneelementet modellering og anvendelser (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Tekstoppgavene jeg har kategorisert inneholder som presentert i Kapittel 2.2 «verbale beskrivelser av problemer og tilhørende situasjoner» (Verschaffel et al., 2014, s. 642, min oversettelse), slik at mange av tekstoppgavene kan være praktiske problemer, modeller og anvendelser av derivasjon. Mens det er til sammen 386 eksempler og oppgaver som ikke er tekstoppgaver i derivasjon i *Mønster R1*, er det kun 62 oppgaver og eksempler som er tekstoppgaver. Dette tyder på et ganske lite fokus på tekstoppgaver i derivasjon. Samtidig finnes det noen oppgaver som ikke er tekstoppgaver, men som har en virkelighetsnær kontekst. Dette gjelder for eksempel den følgende oppgaven: «Vi planter en solsikke. Etter x dager er høyden i centimeter gitt ved $H(x) = 0,01 \cdot x^{2,7}$. (a) Finn $H'(x)$». Denne oppgaven er ikke kategorisert som en tekstoppgave siden oppgaveteksten er «Finn $H'(x)$» og ikke for eksempel «Finn et uttrykk som beskriver hvor mange centimeter solsikken vokser med per dag». Derfor vil det ikke kun være de oppgavene som jeg har kategorisert som tekstoppgaver som har en virkelighetsnær kontekst.

Selv om det er relativt få tekstoppgaver i differensialregning i *Mønster R1* er det stor variasjon i oppgavene. Som nevnt i Kapittel 5.2.5 er det flere av punkt-MO-ene som inneholder flere ulike teknikker og som dermed ikke er en punkt-MO i den forstand at den samles av en entydig teknikk. Dette er en egenskap som tyder på at det er stor variasjon i oppgavene, og det er dermed ikke nødvendigvis en ulempe. Dersom alle oppgavene hadde latt seg kategorisere i punkt-MO-er, hadde oppgavene i stor grad kun krevd at elevene fulgte en bestemt løsningsalgoritme for å løse de. González-Martín et al. (2013) fant i sin studie at de fleste oppgavene i lærebøkene de undersøkte var mulig å løse ved å reprodusere teknikker fra eksempler i boka. Når det i min studie er ganske mange oppgaver det har vært vanskelig å kategorisere i punkt-MO-er og noen av punkt-MO-ene er lite spesifikke, kan dette tyde på at det er flere oppgaver som krever at elevene er problemløsere som resonnerer og er kreative, siden de ikke kun kan følge en tydelig teknikk. Dette kan også tyde på inkludering av oppgaver som krever utforskning, et tema jeg kommenterer videre i Kapittel 7.3.

6.2 Didaktisk transposisjon av «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)»

Den andre delen av forskningsspørsmålet – «hvilke didaktiske transposisjonsprosesser har disse elementene gjennomgått?» – har jeg undersøkt ved en didaktisk transposisjonsanalyse av punkt-

MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)». Gjennom analysen har jeg undersøkt hvordan denne kunnskapen er omgjort fra den akademiske kunnskapen i noen universitetsbøker, og sammenlignet dette med hvordan kunnskapen ble til, som beskrevet i noen bøker om matematikkens histore. Det er viktig her å kommentere at også universitetsbøkene jeg har benyttet i min analyse har gjennomgått en didaktisk transposisjon, og det jeg her kaller akademisk kunnskap er ikke noe universelt, men avhengig av valg av dokumenter som undersøkes. Winsløw (2022) hevder at den matematiske analysen som ofte presenteres på universiteter er et resultat av en didaktisk transposisjon av kalkulus fra 1700-tallet. De to universitetsbøkene jeg har undersøkt i denne studien, har ganske ulike presentasjoner av innholdet i differensialregning. Den akademiske kunnskapen jeg presenterer er dermed en sammensetning av hva som er presentert i disse to universitetsbøkene.

Gjennom den didaktiske transposisjonanalysen av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)» har jeg, for å undersøke logosblokka, sett spesielt på teknologien til punkt-MO-en. Dette har jeg gjort ved at jeg har sett på hvordan de ulike derivasjonsreglene begrunnes og bevises i læreboken. Denne teknologien er i stor grad solid med tanke på at det er matematiske begrunnelser og bevis for de fleste derivasjonsreglene. Derivasjon av polynomfunksjoner er derimot kun begrunnet ved hjelp av noen eksempler, noe som kan være problematisk når det ikke er tydeliggjort at dette ikke er gyldige bevis. Slike eksempler på naiv empirisme finner også González-Martín et al. (2013) i sin studie av introduksjon av reelle tall i lærebøker fra Brasil. I likhet med introduksjonen av derivasjon av polynomfunksjoner i *Mønster R1*, finner de at det ikke er informert i lærebøkene at disse eksemplene ikke er gyldige bevis. Utenom denne begrunnelsen viser Kalvø et al. (2021) varierte begrunnelser og bevis for de ulike derivasjonsreglene. Plasseringen til begrunnelsene og bevisene i læreboken vitner om at det er forventet at elevene undersøker disse. Bevisene er stort sett plassert rett etter en regel er presentert, og flere av begrunnelsene, slik som for funksjonene $\ln(x)$ og a^x, er plassert i forkant av at regelen blir presentert, som en introduksjon til reglene.

Selv om det er matematiske bevis for de fleste derivasjonsreglene som dermed bygger opp deler av logosblokka, er det et relativt lavt matematisk presisjonsnivå, noe som tydeliggjør en fraværende teori i *Mønster R1*. Dette blir blant annet synlig ved manglende antakelser i resultater som presenteres. Når elevene skal, som presentert i Kapittel 4.6, «begrunne og bevise gyldigheten til framgangsmåter, resonnementer og løsninger» (Utdanningsdirektoratet, 2019), er det viktig at de vet under hvilke antakelser resultatene er gyldige. I tillegg unnlater Kalvø et al. (2021) å presentere resultater om deriverbarhet i derivasjonsreglene, som for eksempel at en sammensatt funksjon er deriverbar dersom både den ytre og den indre funksjonen er deriverbar. Disse utelatelsene tar bort viktig informasjon som frarøver elevene å gjøre en vurdering av den matematiske gyldigheten til resultatene som presenteres.

Disse utelatelsene bidrar også til at derivasjonsreglene i stor grad er isolert fra spørsmål om deriverbarhet. En slik isolasjon av matematiske spørsmål i matematikkundervisning på videregående skole finnner også Barbé et al. (2005) i sin studie. De argumenterer for at matematikkunnskapen som undervises i skolen ofte ikke er knyttet til opprinnelsen til kunnskapen, som kan føre til at kunnskapen blir isolert fra andre relaterte kunnskapsområder. I studien har de blant annet observert undervisning om grenseverdier av funksjoner i videregående skole i Spania. De hevder at det i denne undervisningen var presentert lite motivasjon for studie av grenseverdier, og at dette er en konsekvens av isolering av kunnskapsområder. Kontinuitet, som kunne vært en slik motivasjon, presenteres som en anvendelse av grenseverdier, og ikke som et problematisert spørsmål. Strømskag og Chevallard (2022) hevder, som presentert i Kapittel 6.1, at konkavitet presenteres som en anvendelse av den andrederiverte i *Mønster R1*. Dette er nok et eksempel fra differensialregning i *Mønster R1*, på kunnskap som er isolert både fra opprinnelsen til kunnskapen og fra andre kunnskapsområder.

Selv om deler av kunnskapen i *Mønster R1* oppleves som isolert fra andre kunnskapsområder, bidrar de ulike representasjonene og forståelsene av derivasjon til at elevene har mulighet til å utvikle en bred forståelse av hva derivasjon innebærer. Her kommer det også frem at Kalvø et al. (2021) har stort fokus på det visuelle, blant annet ved at derivasjon presenteres grafisk før den analytiske definisjonen av den deriverte blir presentert. Ved hjelp av det grafiske fokuset kommer også noe av derivasjonsreglenes eksistensberettigelse frem. Som beskrevet i Kapittel 4.5 var det nettopp en geometrisk og grafisk forståelse av funksjoner som var ledende på den tiden mange av de tidlige ideene om derivasjon ble utviklet. Selv om fokuset på derivasjon er flyttet mer over på det analytiske med tiden, er utgangspunktet for derivasjon blant annet et geometrisk problem ved å finne tangenter til kurver. Utgangspunktet for derivasjon var også å finne maksimums- og minimumspunkter til funksjoner (se Kapittel 4.2), noe som også kommer frem i *Mønster R1* ved at den deriverte kobles til funksjoners egenskaper før derivasjonsreglene blir presentert.

Derivasjon sin eksistensberettigelse har jeg undersøkt ved å inkludere et historsk perspektiv på kunnskapen. Ved hjelp av dette historiske perspektivet på hvordan kunnskapen ble til for kjerneregelen, produktregelen og derivasjon av brøkfunksjoner, har det også blitt tydelig hva som tidlig var utfordringer sammen med hvordan kunnskapen har utviklet seg. Spesielt når det gjelder kjernereglen kommer differensialnotasjonen til Leibniz til sin rett, ved at kjernereglen blir mer intuitiv med denne notasjonen som vist i Kapittel 5.3.2. Også bevisene for produktregelen og derivasjon av brøkfunksjoner viser seg korte og enkle med differensialnotasjonen. Samtidig har det siden Leibniz sin tid vært store endringer i forståelsen av funksjonsbegrepet, noe som har flyttet et geometrisk fokus på kurver over til en analytisk forståelse av funksjoner. Dette har igjen hatt påvirkning på notasjonen som brukes og hvordan kunnskapen presenteres. Spesielt for produktregelen ser vi at det som historisk var en utfordring for en av de største matematikerne på 1600-tallet viser seg å fortsatt være aktuell. Leibniz lurte tidlig på om $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$, noe som tas opp av både Adams og Essex (2018) og Kalvø et al. (2021). Å sette seg inn historien til kunnskapen kan altså bidra til å forstå utfordringer elevene kan møte på.

Et historisk perspektiv kan også bidra til å forstå hvilke problemer som har vært viktige for utvikling av kunnskap, noe som igjen kan være et utgangspunkt for utforskning. Ved hjelp av utforsk-oppgavene i *Mønster R1* får elevene mulighet til å selv stille spørsmål ved ulike problemstillinger, blant annet får de undersøke hvordan man finner den deriverte av ulike funksjoner før reglene blir presentert. Dersom elevene med litt hjelp fra utforsk-oppgavene oppdager derivasjonsregler, kan dette bidra til at elevene i større grad ser på seg selv som oppdagere av kunnskap fremfor at de mottar kunnskap som boken eller en lærer presenterer. Utforskoppgavene, sammen med at flere av bruksområdene til derivasjon presenteres før reglene presenteres, bidrar til en utforskende stil på innholdet som presenteres.

Gjennom at mye av teorien er fraværende sammen med at det er et fokus på det visuelle, vil jeg argumentere for at Kalvø et al. (2021) har tatt bort noe av den matematiske presiseringen og kompleksiteten til fordel for enkelhet og det visuelle. Dette er også noe som kommer frem i begrepsbruken i boken. Kalvø et al. (2021) velger ved flere tilfeller å bruke begreper som er nær hverdagsspråket, slik som vekstfart fremfor endringsrate, hul side opp og hul side ned fremfor konveks og konkav og begrepet stigningstallfunksjonen i forbindelse med introduksjonen til derivasjon. Begrepene hul side opp, hul side ned og stigningstallfunksjonen er ikke definert på en presis måte i *Mønster R1*. Disse begrepene er etterlatt til å «snakke for seg selv», siden begrepene til en viss grad er kjent for elevene fra før. Strømskag og Chevallard (2022) hevder at bruk av hverdagslige begreper som beskriver de matematiske fenomenene sine egenskaper muliggjør at begrepene brukes uten en rigid definisjon. Ved å bruke begrepene uten en rigid definisjon forsvinner også noe av den matematiske kompleksiteten. De hverdagslige begrepene kan skape assosiasjoner for elevene, noe som kan knytte de nye begrepene opp mot det de allerede kan. Samtidig kan dette føre til en upresis bruk av begrepene, spesielt hvis elevene har assosiasjoner til begrepene som går på akkord med meningen forfatterne har lagt i dem.

Kapittel 7

Perspektivering

I dette kapitlet ser jeg på mulige didaktiske implikasjoner av studien min, i tillegg til at jeg foreslår fokus for videre forskning innen dette forskningsfeltet.

7.1 Betingelser og begrensninger for undervisning av differensialregning

Ved å undersøke kunnskap som skal undervises i differensialregning i matematikk R1, har jeg i denne studien sett på valg og transformasjoner som gjøres i *noosfæren*, og spesielt av lærebokforfattere og av de som lager læreplanen. Både læreplanen og lærebøker kan skape betingelser og begrensninger for det som skjer i matematikklasserommet, ved at de bidrar til å avgjøre hvilken kunnskap som skal læres i skolen. Knyttet til skalaen av didaktisk medbestemmelse (presentert i kapittel 2.1), beskriver *didaktiske systemer* undervisning og læring som skjer i klasserom i matematikk. De didaktiske systemene blir påvirket av *pedagogikken*, som gjerne igjen påvirkes av lærebøker som tas i bruk i undervisningen. Lærebøker blir utvalgt på *skolene*, og læreplanen, som bestemmes på nivåene *sivilisasjon* og *samfunn*, har stor innflytelse spesielt på lærebøker som lages for ett spesielt fag i skolen. Gjennom å undersøke det matematiske innholdet i læreplanen og i en lærebok har jeg derfor undersøkt omstendigheter som har betydning for hva som skjer i klasserommet.

7.2 Bruk av matematikkhistorie i didaktikken

Matematikkens historie kan fortelle oss noe om hvordan matematisk kunnskap ble til, hvordan den har utviklet seg og hva som historisk sett var store utfordringer. I min studie har jeg blant annet sett på hvordan tidligere dominerende notasjon kan forenkle både resultater og bevis i forhold til nyere notasjon. Den historiske antakelsen Leibniz kom med, og som han forøvrig motbeviste, at den deriverte av et produkt er produktet av de deriverte – $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ – fremstår som fortsatt aktuell for elever som skal lære seg hva den deriverte av et produkt er.

Rodriguez og Lopez Fernandez (2010) trekker frem at historiske undersøkelser av den matematiske kunnskapen som skal undervises, kan bidra til å avdekke utfordringer med å lære seg denne kunnskapen, samt til å finne optimale strategier for å undervise kunnskapen. De undersøker undervisning av kjerneregelen, der de spesielt trekker frem fordeler med differensialnotasjonen til Leibniz for å lære seg kjerneregelen. I tillegg ser de utfordringer med at ideen om sammensatte funksjoner ble utviklet lenge etter de første publikasjonene om kjerneregelen, noe som fører til at forståelsen av hva kjerneregelen innebærer, må være svært forskjellig fra den forståelsen som matematikere på 1600-tallet hadde. De hevder også at dette viser at å forstå sammensatte funksjoner krever et høyere nivå av abstraksjon enn selve kjerneregelen. Videre trekker de frem at selv om paradigmeskifter i matematikk gjerne bidrar til å løse aktuelle nye problemer, så er disse skiftene ikke nødvendigvis positive for matematikkundervisning.

7.3 Utforskning i *Mønster R1*

Som presentert i Kapittel 6 er det flere elementer i *Mønster R1* som bidrar til at elevene har mulighet til å utforske kunnskapen. I fagfornyelsen er det et fornyet fokus på utforskning, noe som blant annet kommer frem i kjerneelementet utforskning og problemløsning. I tillegg er begrepet *utforskning* brukt i flere kompetansemål, for eksempel skal elevene kunne «utforske, analysere og derivere ulike funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2021b). Knyttet til paradigmet som innebærer å stille spørsmål om verden, som Chevallard (2015) lanserer (se Kapittel 2.4), ser vi flere elementer fra dette paradigmet i *Mønster R1*. Dette gjelder blant annet at bruksområdet til derivasjon presenteres før derivasjonsreglene, noe som bidrar til at elevene får vite noe om eksistensberettigelsen til derivasjon, som dermed kan gjøre det lettere å trekke linjer mellom ulike arbeider. I tillegg åpner utforsk-oppgavene til at elevene får utforske kunnskapen. Samtidig har utforskoppgavene ofte en på forhånd bestemt målkunnskap, slik at dette er en litt annerledes undersøkende undervisning enn det Chevallard presenterer innenfor paradigmet som innebærer å stille spørsmål om verden.

Selv om vi ser spor av utforskning i *Mønster R1*, vil nok boken i størst grad være i paradigmet som innebærer å besøke arbeider. Jeg vil argumentere for at flere av premissene til læreboken vanskeliggjør en slik utforskning som Chevallard (2015) argumenterer for. For det første består læreplanen av kompetansemål som sier noe om hvilken målkunnskap elevene skal undersøke, noe som gjør at en lærebok som er laget ut i fra en slik læreplan vil ha som intensjon å inneholde disse målkunnskapene. En læreplan i paradigmet som innebærer å stille spørsmål om verden ville bestått av spørsmål fremfor bestemte målkunnskaper. I tillegg krever en undersøkelsesbasert undervisning som Chevallard fremmer, at elevene har ulike arbeider å undersøke, samt at kunnskapen som undersøkes bestemmes av de avledede spørsmålene elevene stiller. Denne type tilnæring er vanskelig å få til i en bok, fordi boken gjerne består av et bestemt svar på spørsmålene som stilles.

7.4 Videre forskning

Denne studien gir ved en prakseologisk analyse et innblikk i innholdet i differensialregning i matematikk R1, og den didaktiske transposisjonsanalysen gir en undersøkelse av hvordan kunnskapen som skal undervises er konstruert og hvilke valg som er tatt i denne konstruksjonen. Dette er verktøy som er nyttige for meg som matematikklektor i skolen for å identifisere hva elevene skal lære sammen med utfordringer elevene kan møte på. Tilsvarende kan disse verktøyene være viktige for alle formidlere av kunnskap, som også innebærer lærebokforfattere. I tillegg er det viktig å undersøke og problematisere kunnskapen som skal læres i skolen, for å gi både lærere og elever et utgangspunkt som er best mulig.

Denne studien begrenser seg til én lærebok for matematikk R1, og gir derfor derfor ikke en universell beskrivelse av kunnskapen som skal undervises i differensialregning i matematikk R1, men kun ett mulig svar på hva denne kunnskapen innebærer. Det kunne som en utvidelse av denne studien vært interessant å undersøke flere læremidler, for å få et mer fullstendig svar på innholdet i kunnskapen som skal undervises. I tillegg kunne en slik undersøkelse også identifisere likheter og forskjeller mellom innholdet og presentasjonen av kunnskapen i de ulike læremidlene. Wijayanti og Winsløw (2017) trekker frem at det å beskrive innholdet i lærebøker eksplisitt ved hjelp av prakseologiske elementer $(T, \tau, \theta, \Theta)$, er en objektiv og detaljert metode for både historiske og komparative analyser av lærebøker i matematikk.

De didaktiske transposisjonsprosessene jeg har analysert i denne oppgaven (se Kapittel 2.3), handler om overgangen fra akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises. Som en videre undersøkelse vil det være interessant å samle inn data fra klasserom for å også undersøke de to siste leddene i den didaktiske transposisjonsprosessen. Dette innebærer overgangen til kunnskap som undervises i en utdanningsinstitusjon til kunnskapen elevene lærer som illustrert i Figur 2.1. Hvordan ser egentlig kunnskapen som elevene lærer ut i forhold til kunnskap som skal undervises og kunnskap som undervises på skolen? Barbé et al. (2005) bruker nettopp begrepet matematisk organisering for å beskrive den didaktiske transposisjonen av temaet grenseverdier av funksjoner i den spanske videregående skolen. De undersøker overgangen mellom akademisk kunnskap til kunnskap som skal undervises slik det kommer frem i læreplanen og lærebøker, og videre til kunnskap som undervises i klasserom i den videregående skolen. Både ved undersøkelse av flere lærebøker og ved forskning i et klasserom, kan de analytiske verktøyene jeg har benyttet i denne studien tas i bruk.

Kapittel 8

Avslutning

Gjennom min analyse av innholdet i differensialregning i *Mønster R1*, har jeg funnet at innholdet kan beskrives med utgangspunkt i de to lokale MO-ene «Finn den deriverte av $f(x)$» og «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» sammen med de tilhørende punkt-MO-ene. Innholdet i disse MO-ene samsvarer i stor grad med min analyse av læreplanen i matematikk R1, som resulterte i at innholdet i differensialregning kan beskrives med de tre spørsmålene «Hva ligger i begrepet derivasjon?», «Hvordan kan vi finne den deriverte?» og «Hvordan kan vi bruke derivasjon?» Disse MO-ene gir en oversikt over hvilke typer oppgaver elevene skal kunne løse, sammen med teknikker for å løse disse oppgavene.

Ved å se på MO-ene sine logosblokker har jeg også undersøkt i hvilken grad teknikkene blir begrunnet i *Mønster R1*, og funnet ut at dette varierer i stor grad. For den lokale MO-en «Finn den deriverte av $f(x)$» er de fleste teknikkene godt begrunnet, og det er stor variasjon i typer bevis. Dette undersøkte jeg nærmere i den didaktiske transposisjonsanalysen av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)». Teknikkene for den lokale MO-en «Hva forteller $f'(x)$ og $f''(x)$ oss om egenskapene til $f(x)$ og hvordan grafen ser ut?» er derimot ganske løst begrunnet, og logosblokka er lite fremtredende. Denne MO-en handler om hvordan derivasjon kan brukes i funksjonsdrøfting. Mens teknologien til den første lokale MO-en i stor grad er konkret og bygd opp av matematiske bevis, er teknologien til den andre lokale MO-en mer innviklet. For å bygge opp en rigid teknologi til den andre lokale MO-en kreves det flere definisjoner og teoremer, samt sammenhenger mellom disse. I stedet for å innføre disse definisjonene og teoremene har Kalvø et al. (2021) valgt å bruke en mer visuell tilnærming, der de i større grad kan se egenskapene til grafen i stedet for at de er matematisk forankret. Dette blir blant annet tydelig ved at forfatterne innfører konkavitet som noe som kan sees på grafen med begrepene hul side opp eller hul side ned, fremfor å definere den matematiske forståelsen av konveks og konkav. Dette fører til at innholdet er tilgjengelig for et større spekter av elever, samtidig som at det blir vanskelig for elevene å vurdere gyldigheten av relevante resultater.

Min didaktiske transposisjonsanalyse av punkt-MO-en «Finn den deriverte (ved derivasjonsregler)» viste stort sett en variert og grundig logosblokk. Alle derivasjonsreglene bygges på den analytiske definisjonen til den deriverte, sammen med andre aktuelle matematiske sammenhenger som $e^{\ln x} = x$ og $e = \lim_{\Delta x \to 0}(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$. Samtidig viste analyseresultatene en fraværende teori. Kalvø et al. (2021) har her valgt å redusere presisjonsnivået i resultatene til fordel for en enklere fremstilling, noe som blant annet kan bidra til isolering av kunnskapsområder. Det historiske perspektivet i analysen viste hvordan matematikkens historie kan brukes til å forstå fremstillingen av kunnskap. Dette gjelder både bruk av tegnsetting og symboler, og historiske utfordringer. Mye av det som historisk sett var store utfordringer viser seg å være fortsatt aktuelt for elever som skal lære seg denne kunnskapen i dag. I tillegg kan undersøkelse av matematikkhistorien bidra til å forstå hvordan paradigmeskifter i matematikken kan skape vanskeligheter i læring av matematikkkunnskap.

I min studie har jeg opplevd at verktøy fra ATD har vært nyttige i undersøkelse av kunnskap i matematikk. Disse verktøyene vil jeg ta med meg videre i arbeid som matematikklærer. Undersøkelse av matematisk kunnskap som skal undervises, samt transformasjoner denne kunnskapen har gjennomgått, kan avdekke vanskeligheter når det gjelder undervisning av denne kunnskapen. Samtidig er det i et undervisningsperspektiv viktig å forstå hvor kunnskapen kommer fra og hvorfor det er viktig å lære nettopp denne kunnskapen.

Referanser

Adams, R.A. & Essex, C. (2018). *Calculus: A complete course* (9. utg.). Pearson.

Aubert, K.E. (2018). *Differensialregning. I Store norske leksikon.* Hentet fra `https://snl.no/differensialregning` (Hentet 30.november 2021)

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–230). London: Hodder and Stoughton.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1–3), 235–268.

Borgan, Ø., Borge, I.C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T.T. & Vie, S.M. (2021). *Matematikk R1* (4. utg.). Aschehoug.

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (red.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (s. 67–83). Springer.

Bowen, G.A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27–40.

Chain rule. (2022, 7.mai). *I Wikipedia.* Hentet fra `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Chain_rule&oldid=1086720817`

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. I S.J. Cho (red.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 173–187). Springer.

Chevallard, Y. (2019). On using the ATD: Some clarification and comments. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(4).

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2020a). Anthropological theory of the didactic (ATD). I S. Lerman (red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 53–61). Springer.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2020b). Didactic transposition in mathematics education. I

S. Lerman (red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 214–218). Springer.

Cirade, G. & Crumière, A. (2020). The study of teachers mathematical and didactic praxeologies as a tool for teacher education. I M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. García & J. Monaghan (red.), *Working with the antropological theory of the didactic in mathematics education* (s. 159–168). Routledge.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). Routledge.

Cottrill, J.F. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions* (Upublisert akademisk avhandling). Purdue University.

Edwards, C. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer.

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics* (6. utg.). Saunders College Publishing.

Gilje, Ø. (2021). På nye veier: Læremidler og digitale verktøy fra kunnskapsløftet til fagfornyelsen. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift*, *105*, 227–241.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK&APP: Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* UiO.

González-Martín, A.S., Giraldo, V. & Souto, A.M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230–248.

Juuhl, G.K., Hontvedt, M. & Skjelbred, D. (2010). *Læremiddelforskning etter LK06: Eit kunnskapsoversyn.* Høgskolen i Vestfold.

Kalvø, T., Opdahl, J.C.L., Skrindo, K. & Weider, Ø.J. (2021). *Mønster : Matematikk R1*. Gyldendal.

Kalvø, T., Opdahl, J.C.L., Weider, Ø.J. & Skrindo, K. (2020). *Mønster : Matematikk 1T*. Gyldendal.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Knudsen, S.V., Graf, S., Hansen, J.J, Hansen, T.I., Haugen, L.I., Honvedt, M., Insulander, E., Maagerø, L.H., Olsen, H.K., Radtka, C., Selander, S., Solberg Runestad, A.K., Wahlmann Olsen, L. & Wikman, T. (2011). *Internasjonal forskning på læremidler –En kunnskaps-*

status. Høgskolen i Vestfold.

Kongelf, T.R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra* (Upublisert akademisk avhandling). Universitetet i Agder.

Lindstrøm, T. (2016). *Kalkulus* (4. utg.). Universitetsforlaget AS.

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.* Hentet 28.mars 2022 fra `https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/`

NOU 1995: 18. (1995). *Ny lovgivning om opplæring– «... og for øvrig kan man gjøre som man vil».* Kunnskapsdepartementet. Hentet 18.mars 2022 fra `https://www.regjeringen.no/contentassets/7d09fca038a04a419859a40c83103407/no/pdfa/nou199519950018000dddpdfa.pdf`

Nóoζ. (2022, 24.april). *I Wiktionary.* Hentet fra `https://en.wiktionary.org/w/index.php?title=%CE%BD%CF%8C%CE%BF%CF%82&oldid=66501843`

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Gufstafsson, E. & Jacobsen, R.B. (2021). *Sinus R1: Matematikk* (4. utg.). Cappelen Damm.

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa.* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. Hentet 18.mars 2022 fra `https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_10`

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 395–421.

Patton, Q.M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3. utg.). Sage publications.

Rodriguez, O.H. & Lopez Fernandez, J.M. (2010). A semiotic reflection on the didactics of the chain rule. *The Mathematics Enthusiast*, *7*(2–3), 321–331.

Simmons, G.F. (1996). *Calculus with analytical geometry* (2. utg.). The McGraw–Hill Companies.

Stewart, J. (2012). *Calculus: Early transcendentals* (8. utg.). Cengage Learning, Inc.

Strømskag, H. & Chevallard, Y. (2022). *Didactic transposition of concavity of functions: From scholarly knowledge to mathematical knowledge to be taught in school.* [Manuskript innsendt for publikasjon]. Institutt for matematiske fag, NTNU.

Utdanningsdirektoratet. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk.* Hentet 22.mars 2022 fra https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Hva er kjerneelementer?* Hentet 23.mai 2022 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01).* Hentet 20.september 2021 fra https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Utdanningsdirektoratet. (2021a). *Læremidler og læringsteknologi i skole og opplæring.* Hentet 18.mars 2022 fra https://www.udir.no/om-udir/tilskudd-og-prosjektmidler/tilskudd-til-laremidler/begrepsavklaring-skole/

Utdanningsdirektoratet. (2021b). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R) (MAT03-02).* Hentet 20.september 2021 fra https://www.udir.no/lk20/mat03-02

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *Veileder for vurdering av læremidler i matematikk (for lærere).* Hentet 22.mars 2022 fra https://reflex.udir.no/egenvurdering/egenvurderingstema/Laerer/195/innhold

van den Ham, A.-K. & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, *59*, 133–140.

Verschaffel, L., Depaepe, F. & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. I S. Lerman (red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 641–645). Springer.

Wijayanti, D. & Winsløw, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *6*, 307–330.

Winsløw, C. (2022). Mathematical analysis at university. I Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (red.), *Advances in the anthropological theory of the didactic* (s. 295–305). Springer.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden