CONDIÇÕES DE UMA TRANSIÇÃO PARA O PARADIGMA DO QUESTIONAMENTO DO MUNDO[1]

Yves Chevallard[2]
Heidi Strømskag[3]

Conceitos preparatórios

A questão geratriz de nosso estudo

Partiremos da seguinte grande questão: em que condições uma transição do paradigma de visita às obras para o paradigma de questionamento do mundo, local e globalmente é possível? Lembremos ao leitor que, na TAD, denominamos obra qualquer entidade criada por humanos. Observamos também que o que descrevemos a seguir diz respeito ao ensino secundário e superior, bem como a cada um de nós em nossas atividades de pesquisa. Mas, acreditamos que uma adaptação ao ensino fundamental seria possível. (Observe que na França a 6ª e a 7ª séries fazem parte do ensino secundário) A questão estudada é difícil e complexa, para a qual hoje só podemos dar algumas respostas, e de forma amplamente conjetural.

Paradigmas

É necessário, inicialmente, especificar o significado das expressões "paradigma da visita às obras" (Paradigma 1) e "paradigma do questionamento do mundo" (Paradigma 2), pois isso nos dará imediatamente uma ideia das transformações de profundidade implícitas na passagem do Paradigma 1 para o Paradigma 2.[4]

Para simplificar sem desfigurar a noção, diremos que um paradigma é um contrato que rege um determinado tipo de atividade humana. Podemos assim falar de um paradigma artístico, de um paradigma científico, de um paradigma desportivo; e, claro, de paradigma escolar ou de paradigma didático.

Para completar a definição anterior, é necessário ainda esclarecer o significado que atribuímos à palavra "contrato". Geralmente é um conjunto de cláusulas que dizem em que consiste a atividade que o contrato rege, qual é a sua finalidade e quais são os meios autorizados para essa

[1] Chevallard, Yves, Strømskag, Heidi. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. In Almouloud, Saddo Ag et al. (org.): Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: fundamentos teórico-metodológicos para a formação. Editora CRV, p. 27-58, 2022.
[2] Aix-Marseille University, 13007 Marseille, France. (Corresponding author), https://orcid.org/0000-0002-2870-5681 y.chevallard@free.fr
[3] Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematics, 7491 Trondheim, Norway, https://orcid.org/0000-0003-1658-0559 , heidi.stromskag@ntnu.no

[4] Para uma descrição concisa dos predecessores do Paradigma 1, consulte Chevallard (2015).

atividade e, em consequência, o que não pode ser feito sem "quebrar o contrato". Mas cuidado! Aqui, as "cláusulas" de um contrato geralmente não são formuladas explicitamente. No entanto, como Jean-Jacques Rousseau observou em Le Contrat Social (1762/2008, p. 9), "embora possam nunca ter sido formalmente declaradas", essas cláusulas são "tacitamente aceitas e reconhecidas em todos os lugares".

A seguir, enfocaremos o que será denominado de paradigmas escolares. Mais uma vez, é preciso esclarecer uma palavra, a de escola: por escola entendemos aqui um lugar (agora possivelmente virtual) onde, em determinados momentos, as pessoas vêm estudar. As questões sobre o que significa "estudo" e o que são os próprios objetos que estudamos estão no cerne da "grande questão" examinada aqui. Notamos que, em geral, as formas de estudo dependem dos objetos estudados, mas tendem a sobreviver a elas devido a uma certa inércia didática dos paradigmas escolares. Por outro lado, os objetos estudados dependem das formas de estudo adotadas e, portanto, no longo prazo, tendem a se perpetuar. É claro que esse "congelamento" curricular também é determinado por outros fatores que não são a mera inércia das formas de estudo.

O Paradigma 1 e suas variantes

A visita às obras: das aplicações aos exercícios

Para abordar a "grande questão" da transição histórica entre o Paradigma 1 e o Paradigma 2, simplificaremos ainda mais os dados do problema. No primeiro paradigma escolar que consideramos, P_1^0, que é uma variante do Paradigma 1, o objetivo é o estudo de obras $\mathcal{O}$ pertencentes a um conjunto $\mathcal{O}$ de obras. O essencial em P_1^0 é que a razão de estudar a obra $\mathcal{O}$ nada mais é do que a obra $\mathcal{O}$ em si. Dito de outra forma, $\mathcal{O}$ é considerada como uma obra de grande valor, reconhecida como tal pela tradição curricular, e cujo estudo é reconhecido como de alto valor formativo. O estudo, aqui, assume a forma de uma “visita”, como num museu, onde interessamo-nos pela obra $\mathcal{O}$ por si e por si mesma, e não pelo que ela permite pensar e fazer.

P_1^0 é de certa forma a variante "primitiva" do Paradigma 1. A variante P_1^+ atinge uma primeira evolução em direção ao Paradigma 2, embora esteja firmemente no Paradigma 1. Qual é a diferença entre P_1^0 e P_1^+? Enquanto na variante P_1^0 as obras $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, …, são consideradas em si e por si mesmas, numa abordagem quase estética, na variante P_1^+ aparecem aplicações destas obras, por vezes apresentadas sob a forma de exemplos típicos. Em outras palavras, tentamos - de forma desigual - especificar sua possível "utilidade", dizer para que elas podem "ser utilizadas", a fim de compreender o mundo e agir nele.

A variante P_1^+ é clássica, mas é relativamente frágil, pois as aplicações de uma obra mudam ao longo do tempo histórico. Aqui está um exemplo. O seguinte teorema foi ensinado há muito tempo: "Se a e b são números diferentes de zero, temos a igualdade $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Este é um trabalho que supomos que muitos professores de matemática hoje teriam dificuldade em citar uma aplicação realmente útil, que não foi inventado pela necessidade da causa. No entanto, esta é a razão do interesse que se poderia ter, há um século e mais, por esta igualdade. De uma forma geral, permitia transformar uma divisão, nomeadamente a / b, operação tradicionalmente considerada difícil e mesmo "erudita", numa multiplicação, nomeadamente $a \times (1 / b)$. Portanto, para calcular 57/8, calculamos 57 × 0,125; para calcular (aproximadamente) 89/11, calculamos 89 × 0,09 (ou 0,091); para dividir por 9, multiplicamos por 0,11 (ou 0,111); etc.[5]. Esta tecnologia (no sentido da TAD) possibilitou, em particular, fazer divisões pelo número π: então tivemos que memorizar o fato de que $1 / \pi \approx 0{,}32$ (ou 0,318), assim como há pouco tempo, tínhamos que memorizar o fato de que $\pi \approx 3{,}14$ (ou 3,1416). Para desenhar no chão, com uma corda, um círculo de 10 metros de comprimento, é necessário tomar um raio de comprimento $\frac{10\text{ m}}{2\pi} = \frac{5\text{ m}}{\pi} = 5\text{ m} \times (1 / \pi) \approx 5\text{ m} \times 0{,}32 = 1{,}6\text{ m}$. Claro, essa tecnologia está desatualizada hoje. A calculadora do Google, por exemplo, fornece imediatamente a seguinte aproximação:

(5 mètres) / pi =

1,59154943 mètre

Devido ao envelhecimento das "aplicações" ilustrado pelo exemplo anterior, a variante P_1^+ tende a se corromper e se reverter para a variante "primitiva" do Paradigma 1, a saber, P_1^0. É importante notar que uma forma de compensar - e de mascarar - esta “regressão” consiste em transformar as aplicações, agora privadas de sua função, em simples “exercícios” que visam formar os alunos para “manipular” a obra $\mathscr{o}$ ensinada - por exemplo, a igualdade $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. As aplicações de $\mathscr{o}$ tornando-se assim simples exercícios de treinamento não são mais "a aprender", mas "a fazer" - para garantir o "bom domínio" de $\mathscr{o}$. Assim, chegamos a uma variante do Paradigma 1 que denotaremos por P_1^{+-}.

A variante P_1^{+-} do Paradigma 1 tinha uma longa estabilidade: era placidamente dominante até pelo menos os anos 1960. Em comparação com a variante P_1^+, é menos sensível a possíveis críticas sobre a relevância praxeológica das “aplicações” estudadas - serão úteis para os alunos compreenderem o mundo e agirem nele? -, porque só importa a relevância didática dos exercícios em que serão transformados, se é que importa.

---

[5] Desde a mais remota antiguidade, tabelas de inversos estão disponíveis para isso.

O nascimento das atividades

Como veremos, para explicar a passagem de P_1^{+-} à variante do Paradigma 1 que denotamos por P_1^{++}, é necessário levar em consideração as condições e restrições que afetam a sociedade, ou melhor, a civilização onde a sociedade considerada está localizada. Para começar, dada uma obra $\mathcal{O}$, consideraremos aqui três posições institucionais principais: primeiro, a de criador da obra, depois a de usuário e, finalmente, a de visitante da obra. Na variante P_1^0, os alunos são visitantes da obra e até visitantes passivos, como visitantes de um museu, no seguinte sentido: lhes é apresentada a obra $\mathcal{O}$; eles devem aprender a conhecê-la, a comentar sobre ela, mas não podem "manipulá-la". Na variante P_1^+, os alunos são, pelo menos momentaneamente, supostos utilizadores da obra, que manipulam, por pouco que seja, no quadro das "aplicações" da obra. Na variante P_1^{+-}, os alunos deixam de ser supostos utilizadores utentes da obra: voltam a ser visitantes, mas visitantes "ativos", por meio das manipulações que efetuam no âmbito dos exercícios associados à obra.

Durante a década de 1960, em muitos países, a variante P_1^{+-} foi subvertida pelas mudanças socioeconômicas e suas repercussões culturais: os alunos devem ser emancipados de uma estrutura didática arcaica que reflete a velha ordem social em que os "sujeitos" se submetem a "mestres". Enquanto a aula tradicionalmente começava com a aula do mestre e era seguida de exercícios para os alunos, na nova variante, P_1^{++}, agora começa com uma atividade destinada a apresentar aos alunos, didática e praxeologicamente, a obra $\mathcal{O}$.

Se olharmos para a variante P_1^{++} como um ancestral do Paradigma 2, é, no entanto, decepcionante. Frequentemente, de fato, a atividade destinada a apresentar aos alunos $\mathcal{O}$ tem pouca conexão com $\mathcal{O}$ e aparece como um simples aquecimento preparatório para a apresentação subsequente do professor relativa à $\mathcal{O}$. A mudança, que promove uma variante que denotamos por P_1^{+++}, conduz ao estudo de uma questão q de um determinado tipo Q, para a qual a resposta r elaborada pela classe nas condições e restrições determinadas se baseia essencialmente em recorrer à obra $\mathcal{O}$ - que vai mostrar que $\mathcal{O}$ "serve" para responder questões do tipo Q.

Meio e adidatização: uma revolução conceitual

A variante P_1^{+++} do Paradigma 1 foi particularmente estudada por Guy Brousseau em sua *teoria de situações didáticas em matemática* (TSD; Brousseau, 1998). Uma questão importante neste contexto é: Quando os alunos estão ativamente estudando uma questão q, com o que eles alimentam sua atividade de estudo? Para isso, utilizam seus equipamentos cognitivos e seus equipamentos praxeológicos até então constituídos. Mas também utilizam um conjunto de recursos composto por obras diversas, materiais e imateriais, que constituem o que denominamos de meio M do estudo[6].

O professor y da classe c = [X, y] (onde X é o conjunto de alunos) é um elemento do meio M? Isso nos remete ao delicado problema da linha de demarcação entre o didático e o adidático e, de maneira mais geral, ao problema da luta entre a adidatização do mundo que os alunos devem realizar e a didatização do mundo que é o destino inevitável do professor - luta sobre a qual falaremos mais adiante.

Um aspecto importante da variante P_1^{+++} é o topos do professor. Na variante P_1^{++}, vemos o professor multiplicando as sugestões para X, muitas vezes na forma de perguntas pouco informativas, o que faz y parecer uma esfinge ou um adivinhador e os alunos parecem adivinhadores. Na variante P_1^{+++}, pelo contrário, o topos de y, durante uma "atividade", consiste em gerir a atividade, não no seu conteúdo, sobre o qual y não intervém, mas no seu desenvolvimento, em particular para lembrá-lo das instruções em torno da atividade. Para o resto da atividade, os alunos são encaminhados para a sua interação com o milieu.

Em muitos aspectos, a variante P_1^{+++} é o quadro de uma *revolução didática*, que perturba as paisagens paradigmáticas anteriores, e das quais duas palavras-chave são "*adidatização*" e "*meio*". Aqui chegamos ao ponto extremo além do qual se abre outra revolução, consubstancial ao Paradigma 2, que a *teoria antropológica do didático* (TAD) tematiza e que aprofunda a primeira revolução.

O Paradigma 2 e suas primeiras variantes

Um novo formato de estudo

A variante primitiva do Paradigma 2, P_2^0, é caracterizada pelo fato seguinte: o trabalho da aula começa com uma questão q que a classe investiga - a expressão americana aprendizagem baseada na investigação (*inquiry-based learning*) popularizou essa ideia. Do ponto de vista epistemológico, P_2^0 constitui uma regressão em relação a P_1^{++} e P_1^{+++}: muitas vezes, por trás da pergunta q há uma obra o que é a verdadeira aposta da aprendizagem e que, quando a "montagem" didática é adequadamente desenhado, constitui, para sala da aula, *o elemento chave* que falta para responder à questão q. Ainda, do ponto de vista didático, P_2^0 é contemporâneo da promoção de novas formas de estudo - o fato de fazer um inquérito.

O surgimento do Paradigma 2 tem um preço muito alto. A exigência formal de investigar uma questão q leva a propor questões que podem ter apenas uma conexão improvável com a obra o,

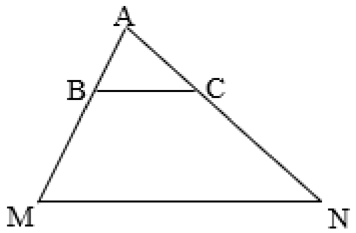
[6] Ver "Dialectic of conjecture and proof (or dialectic of media and milieus)" no glossário TAD apresentado por Chevallard (2020, p. Xxii).

cuja presença contínua atesta a sobrevivência mais ou menos sub-reptícia do Paradigma 1. A questão q então tende a ser o contraste de o, que continua sendo o personagem principal. Na variante P_1^{+++}, pelo contrário, dada uma obra o, a escolha da questão q é muitas vezes difícil porque está sujeita a fortes restrições, que podemos resumir, tomando emprestado da TSD, dizendo que o a questão q deve poder estar associada a um meio que possibilite a criação de uma situação adidática (na verdade, uma série de meios e uma série de situações adidáticas). Na variante P_2^0, o requisito formal de "começar com uma pergunta" leva ao abandono desses requisitos e ao retorno ao tradicional jogo de adivinhação na variante P_1^{++}. Mas esse esquecimento da dialética da didatização e da adidatização parece ter sido a condição para a entrada, muitas vezes inconsciente, no Paradigma 2.

Um exemplo de atividade de estudo e de pesquisa

A ruptura formal iniciada na variante P_2^0 será aprofundada no contexto de uma variante que denotaremos por P_2^+. Em primeiro lugar, definimos a noção de atividade de estudo e pesquisa (AEP), que consiste no estudo de uma questão q que, realizada sob certas condições e sob certas restrições, vai fazer encontrar uma obra σ normalmente determinado de antemão. Aqui está um exemplo "simples": como determinar graficamente (com a régua e o compasso) o produto x de dois comprimentos a e b? Esta é a pergunta q. No estudo de q, um primeiro passo é notar que a igualdade x = a × b não é dimensionalmente homogênea (um comprimento igual a um produto de *comprimentos*). Portanto, a reescrevemos 1 × x = a × b. Se não conhecemos nenhum teorema cuja conclusão contém uma igualdade de produtos de comprimentos, e se uma pesquisa na literatura prontamente disponível não teve sucesso, podemos reescrever a igualdade anterior como uma igualdade de proporções, por exemplo x / b = a / 1. Uma pesquisa na literatura geométrica elementar leva a conjeturar que o teorema de Tales poderia ser a chave da resposta r buscada. De fato, consideramos a figura 1, onde as retas (BC) e (MN) são paralelas e onde temos AM = a, AB = 1, BC = b.

Figura 1- Teorema dos pontos em um triângulo



Fonte: Autores

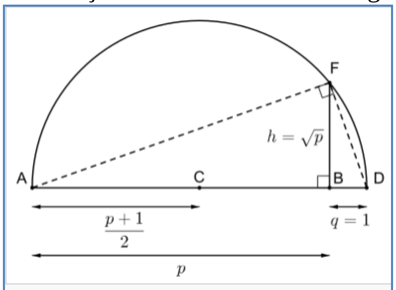
De acordo com o teorema de Tales, temos: MN / BC = AM / AB. Seja x = MN; portanto, temos x / b = a / 1, CQFD. Aqui, "a obra útil" $\mathcal{O}$ é assim - classicamente - o teorema de Tales (ver, por exemplo, ide Splitter Theorem, n.d., n.d.).

AEP e PEP

O exemplo anterior ilustra, como veremos, o ponto de partida da teoria das AEP e dos percursos de estudo e investigação (PEP) desenvolvidos na TAD e deixa ver nas sementes alguns dos principais problemas suscitados pelo desenvolvimento desta teoria. Assim, o que foi esclarecido no tratamento do problema de cálculo gráfico anterior partiu do pressuposto de que os alunos já teriam alcançado um grau bastante baixo de dependência didática do professor na área considerada. Por exemplo, pode-se imaginar de forma muito simples que eles possuem um livro didático de geometria contendo muitos teoremas e que, inicialmente, sua exploração para construir o meio M do estudo se limita a este corpus de obras, sem orientação específica do professor. Ao mesmo tempo, pode-se imaginar que o professor, indo além do seu papel de gestor da atividade, dispensa “conselhos” mais ou menos enigmáticos (“Aqui, existe um “teorema“ famoso ”que vai lhe servir”…”; etc. .). Encontramos então a luta mencionada acima entre a didatização e a adidatização. Observe que, nessa luta, alunos e professores podem pesar tanto de um lado quanto de outro. O professor pode ter uma tendência a didatizar incessantemente situações vividas, mas os alunos podem, ao mesmo tempo, exigir dele cada vez mais didatização ("Senhor, que teorema? Pitágoras? ..."). Por outro lado, o professor também pode procurar ajudar os alunos a diminuir a sua dependência da heterodidáctica, ou seja, da ajuda didática proveniente de outras pessoas (e em particular do professor, considerado o “mestre do saber”) para focar-se no autodidático e, assim, aumentar sua autonomia didática.

A AEP relativa ao produto de dois comprimentos é dita "finalizada" no sentido de que tem um objetivo (um fim): fazer com que os alunos encontrem a obra o. Tal AEP será denotado por AEP_f. Mas podemos então observar o seguinte: a questão proposta q é uma amostra de um mapa de questões Q que pode ser enunciada da seguinte forma: Como determinar graficamente (com a régua e o compasso) o valor de f (a, b, c, ...) onde a, b, c, ... são comprimentos dados e onde f é uma determinada função? Após a questão $q1 = q$ pode-se, por exemplo, propor estudar a questão $q2$ em que f (a, b) = a / b ou a questão $q3$ em que f (a) = 1 / b, ou a questão $q4$ em que f (a) = $\sqrt{a}$ etc. Deixamos ao leitor verificar que o estudo de $q2$ ou $q3$ faz encontrar - sob as condições e restrições "usuais" - a obra $\mathcal{O}_1$ já encontrada durante o estudo de $q1$: o teorema de Tales. Mas consideremos a questão $q4$, seja a construção do comprimento a. Uma exploração superficial da literatura permite encontrar, por exemplo, isso no artigo "Teorema da média geométrica (Geometric Mean Theorem)" da Wikipedia), que resolve o problema (Figura 2):

Figura 2- Ilustração do Teorema da média geométrica



Construction of √*p* by setting *q* to 1

Fonte: Autores

Assim, descobrimos uma segunda obra, o2, relevante no estudo de Q: a altura h em um triângulo retângulo é a média geométrica dos segmentos p e q que corta na hipotenusa: $h^2 = p \times q$ ou $h = \sqrt{p \times q}$.. O resultado esperado é obtido para p = a e q = 1

A noção de inquérito e o processo definalização

Definalizar os PEP

Podemos agora, com cautela, fazer um balanço da noção inicial de PEP. Consideremos um mapa de questões $Q = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots\}$ colocada em estudo em uma classe [X, y]. A decisão de estudar Q cabe a y, após um possível debate em [X, y] (vamos estudar Q ou Q' ou Q''?, por exemplo). A ordem em que a classe aborda as questões $q_i \in Q$ (algumas eventualmente serão descartadas) é proposta por y com a concordância aparente de X. Feito isso, cabe a X, sob a direção de y, constituir e modificar (aumentando-o, tornando-o mais leve etc.), ao longo da duração do estudo, o meio M, que conterá as obras o_j para as quais a classe [X, y] terá utilizado ou consideraria recorrer. Deste ponto de vista, o esquema herbartiano semidesenvolvido $[S(X, y, q_i) ➦ M] ➥ r^{♥}$ deve ser parametrizado pelo tempo de estudo t, de modo que teremos: $[S(X, y, q_i) ➦ M_t] ➥ r_t^{♥}$[7] Acrescentemos que a classe [X, y] poderá estudar (parcialmente) durante a mesma sessão (de duas horas, por exemplo) duas ou mesmo três questões, cujo estudo está desigualmente avançado - mais uma vez, cabe a decisão final a y.

A transição do AEP isolado para o PEP conforme descrito até agora nos traz da variante P_2^{+} para a variante P_2^{++} do Paradigma 2. Ao final do estudo de uma questão q por uma determinada obra o é segue uma finalização por todo um conjunto de O de obras o - por exemplo, todas aquelas presentes no livro de geometria da classe ou nos artigos de geometria da enciclopédia Wikipedia. Tende então a ocorrer, para as questões $q \in Q$ em questão, uma certa *definalização* de seu estudo. Formularemos aqui a hipótese de que a finalização é um fator (entre vários outros) da adidatização do estudo, em particular porque torna mais incerto o fato, para o aluno,

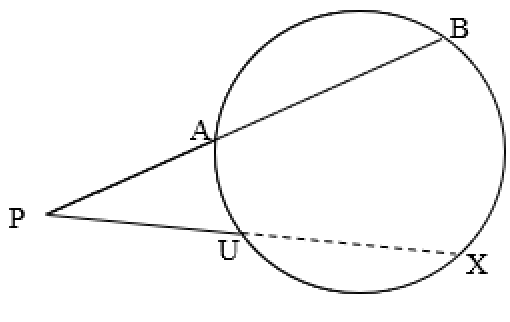
[7] A seta encurvada para cima ➦ pode ser lida "cria" e a seta encurvada para baixo ➥ "engendra".

de se questionar sobre as intenções didáticas do professor formuladas em termos das obras a serem visitadas.

A construção de meio não anunciado e adequado

A definalização é tanto mais assertiva quanto a busca por obras o que se revelem ferramentas eficazes para responder à pergunta conduzem a obras não listadas (ou que deixaram de estar) no currículo tradicional. Tomemos novamente a questão q_1 do produto de dois comprimentos a e b. Como um primeiro passo no inquérito, assumimos que nenhum teorema "*conhecido*" falava de um produto de comprimentos, que no corpus geométrico explorado apenas razões de comprimentos foram encontradas. Suponhamos, entretanto, que, em uma segunda etapa da investigação, se descubra uma propriedade relativa aos produtos de comprimentos, a saber, o teorema que define o que denominamos de potência de um ponto em relação a um círculo (ver "Potência de um ponto em relação a um círculo", *Wikipedia*, 2021), que a figura abaixo ilustra: a "potência" (aritmética) do ponto P é o produto PA × PB, que é *constante independentemente da reta que passa por P e que cruza o círculo em* A e B. Portanto, temos PA × PB = PU × PX (veja a figura 3). Se escolhermos U tal que PU = 1 e A e B tais que PA = a e PB = b, então o comprimento x = PX satisfaz 1 × x = a × b, que responde (de outra forma) à questão q_1 (desde que se sabe construir o círculo passando por três pontos não alinhados A, B, U).

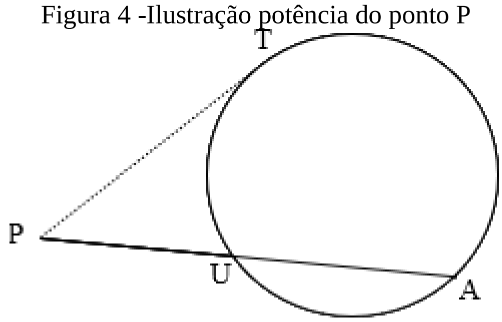
Figura 3- Ilustração da potência de um ponto



Fonte: Autores

Esta mesma obra o'_1 também permite responder à questão q_4 relativa à construção de $\sqrt{a}$: quando, na figurar 4, a reta (PT) é tangente ao círculo, temos PU × PA = PT^2. Se PU = 1, PA = a e x = PT, chega-se a $x^2 = 1 \times a = a$ e, portanto, $x = \sqrt{a}$.

Figura 4 -Ilustração potência do ponto P



Fonte: Autores

Esta definalização dos inquéritos permite, de uma forma mais geral, "ordenar" as obras presentes num determinado currículo, revelando obras que se encontram "ausentes", mas, no entanto, úteis e, pelo contrário, obras nunca utilizadas para responder às questões que nós colocamos. Trata-se de um mecanismo importante no processo de redefinição curricular capaz de combater o envelhecimento e o congelamento curricular.

Paradigma 2 e organizações didáticas

Princípios de base das organizações pedagógicas

Da variante P_2^{++} surgirá uma variante que denotaremos por P_2^{+++}, que levará ao levantamento dos principais problemas atuais (e futuros) da transição do Paradigma 1 para o Paradigma 2. No que segue, referimos a uma família de organizações didáticas, cuja estrutura básica vamos descrever, embora muitas vezes dando exemplos possíveis escolhidos por seu caráter inesperado e, portanto, em geral, inconscientemente descartados.

Seja c = [X, Y] uma classe, em que X é o conjunto de alunos e Y é o conjunto de professores da classe. Supomos que esta classe tem três tipos de agrupamentos: (a) em primeiro lugar a *reunião geral* da classe, onde, periodicamente, o conjunto X dos alunos e o conjunto Y dos professores se reúnem para fazer um balanço do trabalho realizado pela classe e confirmar, modificar ou estender seu programa de trabalho para o período atual ou futuro; (b) depois, o *seminário*, ao qual voltaremos; (c) por fim, *oficinas temáticas* possivelmente reunindo alunos de várias turmas da escola e para as quais também voltaremos. Veremos mais tarde que o seminário é o cerne do trabalho da classe.

Um outro mundo didático

Um fragmento de uma sessão de seminário

Imagine o que poderia acontecer se os alunos tivessem mais liberdade para fazer o que quisessem. Um aluno x_1 começa por considerar que, pegando 6 caixas de cada vez, ele pode transportar primeiro 6 × 6 = 36 ovos, depois novamente 36 ovos, o que dá 72 ovos, aos quais são adicionados 36 ovos, ou seja, todos os 108 ovos, acrescidos de outros 36 ovos, quer dizer ... 144 ovos. Vendo que o lote de 250 ovos ainda está longe e sem saber bem onde se encontra em termos de número de caixas, e parou aí: para ele, o inquérito começou, mas parece ter parado. Uma aluna x_2 procede de outra forma. Como 6 × 8 = 48, 8 caixas podem carregar 48 ovos, deixando 202 ovos para transporte. Como 6 × 7 = 42, 7 novas caixas deixarão 160 ovos para serem transportados. Com 10 novas caixas, restarão apenas 100 ovos para o transporte. Com 10 caixas novamente, restam apenas 40 ovos. Ao pegar 6 novas caixas, ainda haverá 40 - 36 = 4 ovos para transportar. Desta vez, x_2 tem o número de caixas usadas: 8 + 7 + 10 + 10 + 6 = 41 caixas; ao mesmo tempo, ela descobre que ainda há ovos a serem transportados: para transportar esses 4 ovos, é necessária mais uma caixa, o que dará um total de 42 caixas. Este resultado, que parece promissor, é apresentado no Seminário. Mas é "sólido"? Uma aluna, x_3, observa que 6 × 42 = 252 e, portanto, que 42 caixas podem transportar 250 ovos, enquanto, como 6 × 41 = 246, 41 caixas não. O seminário aprova. Um aluno x_4 sugere que se considere em primeiro lugar, não 8 caixas ou 10 caixas, mas “diretamente” 40 caixas, o que permite transportar 240 ovos, de forma a que fiquem dez ovos a transportar, ou seja 6 + 4, o que requer mais duas caixas: encontramos assim as 42 caixas já calculadas ... O professor y pergunta então a x_4 como conseguiu chegar “diretamente” às 40 caixas; o aluno responde que utilizou o primeiro resultado apresentado no Seminário. O professor pergunta: “E se, em vez de 250, tivermos 115 ovos para transportar? "O aluno x_4 parece hesitar; y observa que, como técnica de descoberta, o que x_4 oferece não avança realmente o inquérito. Podemos fazer "melhor" do que fizemos até agora? Outra aluna, x_5, intervém: "Senhor, posso usar uma planilha? O professor: “Você pode usar uma planilha no sentido de que você tem o direito de fazê-lo: aqui você só tem que justificar razoavelmente tudo o que você faz. Se você pode usar uma planilha, isso depende, suponho, das operações que você deseja fazer com ... "A aluna especifica que gostaria de exibir os múltiplos de 6 até que excedam 250. O professor:" É uma ideia. O inquérito continua. Até a próxima sessão do Seminário!"

O seminário continua

Podemos ainda imaginar que, à medida que o Seminário prossegue, a aula chega a uma primeira técnica, τ_1, por meio de uma planilha. Para calcular o número de caixas, primeiro escolhemos um múltiplo de 6 "próximo" ao número n de ovos a serem transportados. Para n = 115, pode ser 66 = 11 × 6, por exemplo; para n = 250, podemos escolher 300 = 50 × 6. Chegamos então ao seguinte (abaixo à esquerda da tabela xxx, onde as duas primeiras colunas aumentam de cima para baixo, enquanto as outras duas diminuem).

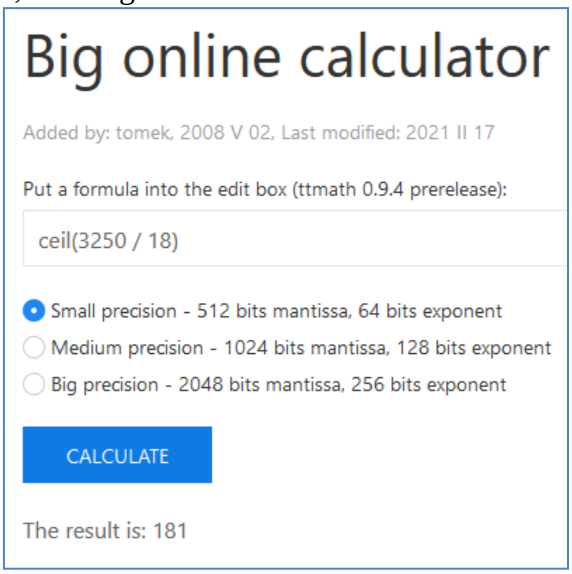
Tabela 1- Múltiplos de 6 próximos de 250

11	**66**		**50**	**300**
12	72		49	294
13	78		48	288
14	84		47	282
15	90		46	276
16	96		45	270
17	102		44	264
18	108		43	258
19	114		42	252
20	120		41	246
21	126		40	240
22	132		39	234

190	3420
189	3402
188	3384
187	3366
186	3348
185	3330
184	3312
183	3294
182	3276
181	3258
180	3240
179	3222

Fonte: Dados da pesquisa

Tudo isso é válido quando, de forma mais geral, as caixas são de m ovos, por exemplo m = 18. Para n = 3.250 ovos, a partir de 3600 = 200 × 18, temos, portanto, o que vemos na parte direita da tabela 1. Usando vários testes numéricos, o inquérito pode então chegar as seguintes conclusões: (a) se denotarmos por $B_m(n)$ o número de caixas de m ovos necessários para transportar n ovos, $B_m(n)$ é o menor múltiplo de m maior que ou igual a n; (b) se chamarmos a função teto a função que atribui a qualquer número x do intervalo] k, k + 1] o valor $\lceil x \rceil$ = k + 1, temos $B_m(n) = \lceil n / m \rceil$ (consulte "Floor and ceiling functions", 2021). A Big Online Calculator, que pode ser encontrada em https://www.ttmath.org/online_calculator, que denota a função de teto por "ceil", dá o seguinte resultado



Obtemos assim uma nova técnica, τ_2, da qual uma variante, τ_2', pode, como vimos, prescindir da função teto, sob o risco de alguns caírem na armadilha "didática" em que vimos alunos da terceira série (nono ano no Brasil) cair.

Aprofundar e terminar nosso exemplo de estudo

Ao escrever o capítulo (ou subcapítulo) do livro da classe apresentando o estudo da questão q, pode-se fazer os ajustes finais. Assim, no que diz respeito à técnica τ_1, podemos, por exemplo, especificar o que chamamos de "escolha" do múltiplo de m a partir do qual determinaremos $B_m(n)$. Supomos que queremos determinar B_{37} (8912). Esse número inteiro não deve ser muito diferente de 10000/40 ou 250. Temos 37 × 250 = 9250. Ao tomar múltiplos de 37 decrescentes sucessivos a partir de 37 × 250, chegamos a B_{37} (8912) = 241, como veremos abaixo. (Na verdade, temos : 8912/37 = w 240,864864865.)

Tabela 2 -Múltiplos de 37 menor que 8912

k	37*k*	37*k* - 8912
250	**9250**	338
249	9213	301
248	9176	264
247	9139	227
246	9102	190
245	9065	153
244	9028	116
243	8991	79
242	8954	42
241	8917	5
240	8880	-32
239	8843	-69

Fonte: Dados da pesquisa

Também veremos a evolução da diferença $n - mk$: a 141ª caixa terá 5 lugares livres (e, portanto, conterá apenas 32 ovos). Supomos agora que queremos determinar B42 (11057). Novamente, esse número inteiro não deve ser muito diferente de 10000/40 ou 250. Temos 42 × 250 = 10500. Tomando múltiplos crescentes sucessivos de 42, chegamos a B_{42} (11057) = 264, como veremos (Tabela 3) a seguir. (Na verdade, temos: 11057/42 = w 263,261904762.) Também veremos a evolução da diferença $n - mk$: a 264ª caixa terá 31 lugares livres (e, portanto, conterá apenas 11 ovos).

Tabela 3- Múltiplos de 42 de acordo com as restrições impostas

k	42*k*	42*k* - 11057
250	**10500**	-557
251	10542	-515
252	10584	-473
253	10626	-431
254	10668	-389
255	10710	-347
256	10752	-305
257	10794	-263
258	10836	-221
259	10878	-179
260	10920	-137
261	10962	-95
262	11004	-53
263	11046	-11
264	11088	31
265	11130	73

Fonte: Dados da pesquisa

Deve-se notar que a técnica utilizada faz a economia da operação de divisão. O que precede chama a atenção para o sistema (não tradicional) $n = m\tilde{q} - \tilde{r}$, $0 < \tilde{r} \leq m$ onde $\tilde{r}$ é o número de casas deixadas vazias na caixa q̃-ésima (se r̃ = m, este "última" caixa não é usada). A redação do relatório do estudo da questão q deve conter não só a resposta precisa $r^{\heartsuit}$ a que a classe [X, y] terá chegado, mas também as indicações úteis sobre todos os trabalhos usados ou encontrados, sem ceder à tentação de um estudo que seja "exaustivo" dessas obras - no que diz respeito à planilha utilizada, portanto, apenas as operações essenciais serão especificadas, sem a pretensão de "estudar (exaustivamente) a planilha utilizada". Posto isto, talvez seja o momento de sublinhar um fato importante: qualquer inquérito deve trazer a quem o conduz a sensação de que muda a sua relação com alguns dos objetos encontrados durante o inquérito - e em particular, conhecimentos "novos", para X, mas também, às vezes, para y, são assim trazidos à luz, mesmo quando se trata de trabalhar sobre uma questão q considerada "elementar" ou "bem conhecida" por certas pessoas e instituições, cujo próprio inquérito poderia questionar as " certezas ". Isso também se aplica, é claro, ao pesquisador ξ.

No caso dos alunos do 3º (nono ano do Brasil), x_i, que responderam que o número de caixas de 6 ovos necessários para transportar 250 ovos não era inteiro, sua relação $R(x_i, q)$ era didatizada pelo fato de que sua resposta era esperada por y, do qual interpretaram didaticamente a expectativa à sua maneira e procuraram satisfazê-la mostrando, aqui, que "sabiam" fazer uma divisão! Podemos generalizar essa conclusão formalizando-a um pouco. Seja $S_q = S(X, y, q)$. Denominamos o grau de didatização da relação R (x, q), onde x ∈ X, o grau em que x depende da relação R (x, R (y, S_q)), ou seja, de sua relação com a relação de y a $S_q = S(X, y, q)$. Mas cuidado! Não é anormal que R (x, q) seja construído levando em consideração R (y, q) (desde que $R(x, R(y, q)) \neq \emptyset$)Nesse sentido, R (x, q) é dependente de R (x, R (y, q)) - por exemplo se uma das respostas $r^{\Diamond}$ é de fato a resposta $r_y^{\heartsuit}$. Mais geralmente, se a pessoa z (que pode ser um colega de classe, pai etc.) é o autor de uma resposta $r^{\Diamond}$, então R (x, q) irá (parcialmente) depender de R (z, q) por intermédio da relação R (x, R (z, q)). Repetimos aqui que o sucesso do inquérito sobre q repousa, portanto, na superação da tensão dialética entre a adidatização que x deve buscar constantemente (e da qual o processo de definalização do estudo q é um fator chave) e a didatização que y necessariamente realiza cumprindo sua missão.

Princípios básicos das organizações didáticas

A atividade da classe c= [X, Y] tem como princípio orientador o estudo ou o inquérito sobre as chamadas questões geratrizes". (A origem destas questões será examinada mais tarde.) O estudo de tal questão q tendo sido decidido (no âmbito de uma ou mais reuniões gerais da classe), um sistema didático $S_q = S(X_q, Y_q, q)$, onde $X_q, \subseteq X$ et $Y_q, \subseteq Y$ é formado (no âmbito do seminário).

(Se y_μ for o professor de matemática, poderíamos ter, por exemplo, Y$\mathcal{q}$ = {y_μ}.). O objetivo de $\mathcal{S}\mathcal{q}$ é investigar $\mathcal{q}$ e enviar relatórios regulares, como parte do seminário da classe, apresentando o estado da resposta $\mathcal{r}$ em construção com vista à sua validação. O relatório final do estudo de $\mathcal{q}$, validado pela classe, será um dos capítulos do livro da classe do ano considerado. (As principais rubricas que constituem este relatório final serão especificadas posteriormente. Mas notemos a partir de agora que, ao lado da apresentação e da análise da resposta final da classe, $\mathcal{r}^\heartsuit$, deverá apresentar e analisar as questões geradas pelo estudo de $\mathcal{q}$, as respostas que lhes foram dadas e as obras $\mathcal{o}$ utilizadas.) O exame interno da classe incidirá sobre todo ou parte do livro da classe.
Consideramos de novo o esquema herbartiano semidesenvolvido $[S(X_\mathcal{q}, Y_\mathcal{q}, \mathcal{q}) \rightarrow M] \hookrightarrow \mathcal{r}^\heartsuit$. Na variante P_2^{+++}, dada uma questão $\mathcal{q}$ a estudar, o sistema didático $\mathcal{S}_\mathcal{q} = S(X_\mathcal{q}, Y_\mathcal{q}, \mathcal{q})$ tem duas tarefas intimamente relacionadas a cumprir: a primeira, que é uma ferramenta, é a construção continuada do meio M; a segunda, que é o fim, é a construção da resposta final $\mathcal{r}^\heartsuit$. Em princípio, dizer que $\mathcal{S}\mathcal{q}$ constrói M significa que X$\mathcal{q}$ ∪ Y$\mathcal{q}$ constrói M. Nas variantes anteriores, em particular na variante P_1^{+++}, parece que a construção de M é uma prerrogativa de Y$\mathcal{q}$, à qual X$\mathcal{q}$ não tem quase nenhuma participação. Ao construir um meio supostamente adidático, os professores desempenham uma parte essencial de sua função: ao invés de ensinar diretamente aos alunos, o fazem por meio da mediação do meio. Em contraste, uma característica distintiva da variante P_2^{+++} é que a construção de M cai para X$\mathcal{q}$ - como sempre, sob a responsabilidade de Y$\mathcal{q}$ (que pode pedir a X$\mathcal{q}$ justificar, pelo menos até certo ponto, as escolhas feitas). Essa mudança topogenética é um fato didático essencial.

Didatização e adidatização

Um topos novo para o aluno

A mudança topogenética em questão reduz drasticamente o topos de Y$\mathcal{q}$, e correlativamente aumenta o topos de X$\mathcal{q}$ em que surge um tipo de tarefas inéditas para os alunos, que os professores até então realizavam sem a sua presença - preparando, por vezes, demoradamente, seu ensino. Notemos neste ponto que o que foi chamado de processo de adidatização acima afeta de fato a relação do aluno x com uma obra $\mathcal{o}$: é esta relação $R(x, \mathcal{o})$ que se adidatiza - ou, pelo contrário, se didatiza - relativamente a y. Isso significa que x desiste de acreditar que as obras $\mathcal{o}'$ que compõem M trazem consigo, de forma enigmática, sugestões ou mesmo injunções de y que x deveria tentar identificar. Pode, entretanto, acontecer que, ao contrário, a relação $R(x, \mathcal{o})$ se "didatiza" de mais, isto é, que x afunda na expectativa de que M inclua indicações sub-reptícias de y. Posto isto, é razoável pensar que a redefinição indicada do topos do aluno seja, em geral, de molde a promover o ensino da sua relação com as obras em jogo.

Investigar e adidatizar: um exemplo não tradicional

Detenhamo-nos em um exemplo. Consideramos a seguinte questão q: "Um fazendeiro deve

enviar um lote de 250 ovos em caixas que podem conter 6 ovos cada. Quantas caixas ele[8] precisa?» Um professor pede ao aluno x para resolver este problema. Que relação x pode ter com a situação s assim criada? (A palavra "situação" é entendida, na TAD, como se referindo ao *estado* em um determinado tempo t de um complexo de instituições, de posições institucionais e de pessoas sujeitas a essas posições.) Antes de examinar essa questão, imagine que substituamos o aluno x por um funcionário x̄ de uma empresa contratada para realizar os cálculos necessários ao funcionamento da empresa e y pelo chefe ȳ de x̄. Portanto, ȳ pede a x̄ para determinar o número de caixas de 6 ovos necessárias para transportar 250 ovos. Este gesto de ȳ não é considerado por x̄ como um gesto didático, mas, sem dúvida, como um *gesto não didático*. Observemos, porém, que as circunstâncias podem ser tais que x̄ se equivoca, no seguinte sentido: ȳ considera realmente seu gesto como didático com relação à x̄ sobre tal e tal obra o. (Do ponto de vista da TAD, qualquer gesto pode ser considerado didático por algumas instâncias.) Dito isso, pode ser para x̄ uma tarefa de um tipo que realiza com frequência e de forma rotineira: x̄ então responde rapidamente a ȳ que, nesse caso, ele vai precisar de 42 caixas.

Se voltarmos a x e y, pode muito bem ser que x tenha a mesma relação com a questão q que demos a x̄ acima. Em geral, a relação R (x, q) depende do equipamento cognitivo e praxeológico de x, do meio M que x poderá constituir, da atitude do professor y, e, mais amplamente, da situação ambiental. Todas essas condições e restrições, que diferem de uma situação para outra, podem gerar relações R (x, q) muito diferentes. Por exemplo, a questão q colocada por y a x pode aparecer a x como um enigma, ao qual x pensa que só pode ser respondido por suposição: "20 caixas? 30? Mais? ... "Ao contrário, a questão proposta aparecerá a x̄ como uma tarefa de tipo bem conhecido, para a qual ele tem uma técnica rotineira: se por exemplo se trata de transportar 3250 objetos idênticos em caixas de capacidade 18, x̄ calcula o

quociente 3250/18 usando a calculadora do Word, $\mathbb{w}$, que exibe o seguinte resultado: 180,555555556; x̄ conclui que a resposta é 181. Mas para um estudante de colegio, esse tipo de tarefa não existe necessariamente: o que existe, em geral, é o tipo, cujo espécime "representativo" consistiria em

---

[8] Utilizaremos o gênero masculino para nos referir a uma pessoa genérica.

determinar para quantas pessoas pode-se distribuir 6 objetos (6 balas etc.) se tiver 250 desses objetos. Portanto, é necessário que o tipo de tarefas associadas a $\mathcal{q}$ passe a existir e uma técnica adequada seja criada. Este é o problema - que veremos a seguir que está relacionado, embora distinto, ao problema da divisão de inteiros.

Aqui está um caso observado várias vezes em uma classe de nona série: os alunos respondem propondo um dos números não inteiros 41,6, 41,66 ou 41,666, etc., obtidos com sua calculadora $\mathbb{c}$. (Por exemplo, para $\mathbb{c} = \mathbb{w}$: 250/6 = $_{\mathbb{w}}$ 41,6666666667.) Tudo foi feito como se esses alunos não soubessem da pergunta feita, que requer um número inteiro como resposta. Sua relação $R(x, \mathcal{q})$ é didatizada pelo fato de que sua resposta é esperada por y, que eles interpretam a expectativa que buscam satisfazer, aqui, mostrando que "sabem" fazer uma divisão. Aqui, esta obra $\mathcal{o} = \mathcal{d}$ que é a operação de divisão, notada a / b, é poderosamente atraente, ao contrário da operação que notaríamos hoje $\lceil a / b \rceil$, que permanece amplamente desconhecida na cultura da escola elementar - onde as coisas são uniformemente distribuídas entre várias "instâncias", mas onde, aparentemente, essas coisas não são transportadas de um lugar para outro! Observe que o meio M é então reduzido essencialmente à $\mathcal{d}$ e à calculadora $\mathbb{c}$, que pode ser mais ou menos fortemente didatizada: se o resultado dado for contestado (por exemplo, por y), alguns alunos podem ser tentados a se defender invocando a calculadora como se o que ela diz (ou melhor, exibe) os livrasse de sua responsabilidade epistêmica, exatamente como eles se defenderiam dizendo: "Foi o professor que quis isso!"

Faremos agora uma hipótese que completa a anterior sobre o papel da definalização do estudo no processo de adidatização das relações $R(x, \mathcal{q})$: o fato de propor aos alunos um meio M "pronto" não favorece a didatização de R (x, $\mathcal{q}$), mas este processo é ainda mais reforçado e tem mais probabilidade de aderir a um determinado roteiro em suas interações com M. A tentação de "liderar" de perto os alunos é um caso especial da tentação que os "superiores" podem sentir em qualquer instituição de controlar de perto a ação daqueles que consideram subordinados, ou mesmo algoritmizar sua ação para que se torne mais previsível e controlável. Por exemplo, em engenharia didática, pode haver a tentação de projetar produtos que se revelem "à prova dos professores" ou mesmo "à prova dos alunos". Em contraste com esta tentação de "super-direcionar" os alunos, a noção de inquérito desenvolvida na TAD requer que a classe reserve um tempo para o inquérito e investigar (no que diz respeito à construção do meio M e sua utilização) mais livremente do que é habitual no trabalho escolar tradicional.

A questão das questões

Uma diferença crucial

Voltamos aqui ao que denominamos de questão das questões: quais questões *q* estudar? O princípio essencial - mas não o único - que distingue o Paradigma 2 do Paradigma 1 a este respeito pode ser apresentado desta forma. No Paradigma 1, o professor y (ou o engenheiro didático ξ*) parte de uma obra *o* a ser ensinado (por estar devidamente registrado no programa de estudos "oficial") e então busca uma pergunta *q* cujo estudo, sob certas condições e sob certas restrições, deve levar a classe [X, y] a conhecer, usar e estudar tanto quanto for relevante no inquérito em curso, a obra *o*. No Paradigma 2, a classe estuda, sob certas condições e sob certas restrições, uma questão *q* escolhida (por uma determinada instância î) pela sua relevância formativa (voltaremos a esta noção) e descobrimos no decorrer do inquérito sobre *q* as obras $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, …, que ela estudará o quanto for necessário para poder utilizá-las adequadamente. Pode-se pensar que o paradigma da visita das obras tende a gerar uma relação R (x, *q*) com a questão proposta que é tendencialmente didatizada pela questão: "Que obra *o* o professor y quer que ali nos encontremos e estudemos fazendo-nos esta pergunta? Essa desconfiança sistêmica desaparece ou pelo menos se acalma no Paradigma 2. "O que você quer nos ensinar? O aluno pergunta desconfiado. "Nada", responde y. "Trata-se de dar uma resposta *r* à questão *q*", continua. E acrescenta: "Cabe a nós ver como ..."

Uma pergunta ingênua e aberta colocada para a classe

Começaremos com algumas observações simples, mas importantes. Nossa primeira observação é a seguinte: uma questão *q* a estudar é mais frequentemente uma questão "ingênua", ou pelo menos parecerá assim após o inquérito sobre ela ter sido concluído. Isso é verdade em qualquer caso: antes de se tornarem especialistas, os pesquisadores são novatos se a questão que estão estudando é realmente uma questão aberta em sua área de especialização.
Nossa segunda observação é a seguinte: qualquer questão *q* - mesmo que pequena - pode dar origem a um inquérito significativo, produtivo não apenas de uma resposta *r* útil, mas também de conhecimentos até então inexplorados. A questão dos ovos a serem transportados é, desse ponto de vista, um exemplo revelador, ao qual não voltaremos aqui.
Qualquer que seja a instância î que a execute, a escolha de uma questão ***q*** que uma classe [X, y] deve estudar não deve se restringir às questões que esses alunos "se perguntam". Deve ser estendido prioritariamente às questões que eles enfrentam - sem necessariamente estarem cientes disso. O questionamento do mundo exige uma ética realista que lute contra o confinamento em si mesmo provocado pelo egoísmo existencial comum. De forma mais ampla

ainda, para ajudar o aluno x a vir a ocupar a posição de pessoa indicada por x̄ acima e y a de ȳ, pode-se criar, no âmbito do Seminário, um "uma unidade de conselho e de pesquisa" que recebe encomendas de "clientes" (denotados î acima). Note-se que o corpus dos problemas aritméticos tradicionais se baseia em tal organização que se supõe administrar as relações entre o interior e o exterior (mais ou menos imaginário) da classe. É, mais uma vez, o que a pergunta dos ovos nos faz lembrar: não é o aluno que deve transportar 250 ovos, mas "um camponês", que é o "cliente" da unidade de conselho e de pesquisa da classe - um 'ator objetivo' imaginário, localizado fora da sala de aula. Portanto, existem as questões que x se faz, as que x deve enfrentar (que x queira ou não), e as que o outro deve enfrentar: passa-se, assim, do indivíduo para a sociedade.

Um labirinto de perguntas

Para reconstruir os sistemas educacionais em todo o mundo, devemos realizar um levantamento permanente dessas três categorias (não disjuntas) de questões: aquelas que esses alunos se perguntam, aquelas que pesam sobre esses alunos sem que eles percebam, aquelas que surgem em outros e as quais esses mesmos alunos devem ajudar o mundo ao seu redor a responder. Esse inquérito permanente constitui um projeto coletivo e colaborativo, sobre o qual faremos apenas algumas observações aqui.

Independentemente da instância î que escolhe uma questão *q*, os critérios de seleção não devem incluir o fato de que o estudo de *q* levaria a classe a encontrar tal ou qual obra aparecendo na obra *o* currículo ainda existente (típico do paradigma da visita das obras), que se trata justamente de “rejuvenescer”, tornando-a mais adequada às necessidades cognitivas e praxeológicas vivenciadas em todos os inquéritos realizados. Pelo contrário, devemos ignorar resolutamente, de antemão, uma questão que só surgiria no inquérito sobre a questão *q* e que é, portanto, uma questão *q*k gerada pelo inquérito, que iremos considerar oportunamente. Para tal, é aconselhável admitir o caso em que, ao estudar uma questão *q*, a classe se depara com uma obra *o* que parece ser uma ferramenta de estudo adequada, mas que também parece claramente fora de alcance dado o equipamento praxeológico médio da classe - o que não significa em caso algum que a investigação deva ser abandonada. Poderíamos, por exemplo, pensar no caso de uma turma do 3º (nono ano no Brasil) investigando o número básico de reprodução R_0 de uma epidemia: será possível que ele domine a fórmula elementar $P = 1 - 1/R_0$, que dá a proporção mínima P em uma população que deve ser imunizada para prevenir o desenvolvimento de uma epidemia. Mas, sem dúvida, dificilmente será capaz de ir mais longe (ver por exemplo Jones, 2007).

Em geral, é aconselhável estudar uma questão q olhando para ela como uma questão gerada pelo estudo (real ou potencial) de uma questão $\bar{q}$ "dominante", que especifica a problemática do estudo de q. Para a questão dos ovos, portanto, a questão dominante $\bar{q}$ pode ser, por exemplo, $\bar{q}_1$ = "Quais são os problemas matemáticos do transporte de mercadorias e como eles podem ser resolvidos?" "Ou $\bar{q}_2$ =" Quais são os problemas matemáticos da vida cotidiana e como podem ser resolvidos? " Dependendo de se q for considerado parte do estudo de $\bar{q}_1$ ou $\bar{q}_2$, seu estudo poderia ser realizado de forma diferente, sob a responsabilidade do órgão encarregado de conduzir o inquérito (em uma classe, geralmente é o professor). A aplicação deste princípio deve, no entanto, limitar-se a questões $\bar{q}$ que não são, nas condições vigentes, muito fortemente polémicas: porque a intensidade do debate poderia então dificultar, simplificando ou mesmo bloqueando o processo de estudo, por exemplo, impondo "respostas" prontas que não seriam adequadamente analisadas e postas à prova pela dialética das mídias e dos meios.

Do que professores precisam para questionar o mundo?

A estranha composição do saber de cada um de nós

Estudar uma questão q como se fosse uma questão gerada pelo estudo de uma questão geratriz dominante $\bar{q}$ pode envolver apenas quase um campo do conhecimento, por mais extenso que seja - por exemplo, a matemática. No entanto, muitas vezes, essa questão $\bar{q}$ refere-se espontaneamente a várias áreas mais ou menos extensas do conhecimento (física, biologia, história etc.). Sem dúvida, esse será o caso se, por exemplo, $\bar{q}$ for a pergunta esmagadora "Quais são as causas do aquecimento global?" "E q é a pergunta" Como o aumento da temperatura média depende do nível de CO2 na atmosfera? " Da classe [X, y], ou melhor, [X, yμ], passamos então para a classe com seu conjunto Y de professores, ou seja, [X, Y]. O inquérito sobre q será realizado por um sistema didático que poderemos escrever, como vimos, $\mathcal{S}_q = S(X_q, Y_q, q)$, onde $X_q \subseteq X$ et $Y_q \subseteq Y$. Aqui, Y_q idealmente, durante o curso da investigação, deverá haver um "especialista" de cada uma das disciplinas $\mathcal{D}$ que estará envolvida no estudo de q. É possível? Antes de responder, observemos que o que se espera da equipe de alunos X_q é, não que seja, mas que se torne, como coletivo, "especialista" (até certo ponto), não em matemática, física, biologia, história etc. em geral, mas em questões de matemática, física etc., que X_q encontrará em seu inquérito sobre q. É a mesma lógica que deve se aplicar a Y_q como coletivo: quando a equipe de professores Y_q dirige o inquérito sobre q, ela deve se tornar um "especialista", na esteira da equipe de alunos X_q, no que diz respeito às múltiplas questões que os membros de Y_q nunca estudaram antes, seja porque essas questões não são da competência de "sua" disciplina, ou porque nunca as encontraram neste contexto. Darei aqui um dos exemplos mais simples possíveis do equipamento praxeológico dos professores de matemática do ensino secundário. A fórmula $x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ irá lembrá-los de algo, a saber, a expressão bem conhecida das raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, que é escrita $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Mas que fórmula é essa? Quem usa e por quê? Muitos dos professores de hoje, ao que parece, não conseguem responder a essas perguntas - que deixaremos para a perspicácia do leitor.

A aproximação de "professores" e "alunos" que acabamos de fazer pode chocar o leitor, sujeito a uma instituição onde a distinção dessas posições anda de mãos dadas com uma distinção intrínseca entre professores e alunos: - professores sabem, alunos não saber (ainda) - em vez de uma distinção funcional - o professor ensina, o aluno aprende, ou melhor, o aluno estuda para aprender, o professor ajuda o aluno a estudar - e, para isso, o professor deve ter aprendido e muitas vezes tem que estudar mais para continuar aprendendo. Para combater a visão intrínseca tradicional no paradigma da visita das obras, podemos considerar, por exemplo, o caso de um aluno do terceiro (nono ano no Brasil) que dá aulas particulares a um aluno do sexto ano: o primeiro atua como "professor", o segundo como "aluno" - aqui como em outros locais prevalece a ficção de que o professor "sabe" e de que o aluno deve aprender. Podemos também considerar o caso de um curso de formação continuada para um grupo de professores X em que o formador é um "especialista" da universidade vizinha - que, por vezes, vai descobrir que, decididamente, estes professores secundários são bastante ignorantes em pontos que este formador achou que eles deveriam ser avisados. Mas observemos o seguinte: se, por algum truque do destino, esse especialista universitário, que supomos fazer uma tese em matemática, se descobrisse na semana seguinte tendo que ensinar matemática para alunos do ensino secundário, provavelmente teria que trabalhar muito para aprender muitas coisas que são estranhas para ele, incluindo matemática!

De maneira mais geral, é necessário ter uma visão lúcida e realista do que costuma ser o equipamento praxeológico e, mais particularmente, o equipamento matemático de um professor de escola secundária - mas o seguinte se aplica a todos os casos (da escola primária à universidade). O equipamento matemático de todos depende das condições e restrições sob as quais esse equipamento foi formado e continua a se formar. Por exemplo, nas variantes "clássicas" do Paradigma 1, o professor deve ser capaz de fazer uma apresentação "apropriada" para cada uma das obras $\mathcal{o}$ designadas pelo currículo oficial: o professor sabe, não "a matemática", mas apresentações sobre obras matemáticas. Pode-se facilmente imaginar, porém, que seu repertório de "aulas" evoluirá com o tempo, por exemplo, porque certas obras caem em desuso ou algumas de suas "propriedades" são sub-repticiamente descartadas com o passar do tempo. A mesma observação é ainda mais válida no que diz respeito, nas variantes "modernas" do Paradigma 1, o repertório de "atividades" que compõem o equipamento matemático ideal da posição de professor: esse repertório leva muito tempo para se formar; e, quando esse processo é bem-sucedido, seu resultado geralmente fica parcialmente obsoleto. A passagem do tempo é destrutiva e, na melhor das hipóteses, parcialmente regenerativa. Qualquer equipamento praxeológico pode aparecer como uma estranha mistura de obras às vezes amputadas de algumas de suas partes. Aqui está um exemplo muito simples. Qualquer professor de matemática sabe (e pode ensinar) que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seu ponto médio. O teorema segundo o qual esta propriedade caracteriza os paralelogramos é um trabalho (matemático) bem conhecido. Mas parece que hoje, pelo menos na França, dificilmente qualquer um deles possa dizer de imediato para que esse teorema é (ou foi) útil e por quê.

Que relação com o conhecimento e a ignorância?

Como o equipamento cognitivo e praxeológico da posição de professor no Paradigma 2 difere daquele da posição de professor no Paradigma 1? A distinção fundamental, mais geral, diz respeito à relação que uma instância î pode ter com o conhecimento (e, portanto, com a ignorância), uma relação que denotamos por R (î, Ε), onde î é uma pessoa ou uma posição institucional, a letra Ε sendo a maiúscula grega épsilon, que aqui designa o conhecimento (em grego, ἐπιστήμη, episteme). Analisaremos (parcialmente) R (î, Ε) em termos de atitudes: o sujeito ideal do Paradigma 2, seja ele professor ou aluno, ou não, é definido por cinco atitudes. A primeira, $\hbar_1$, é a atitude de problematização que consiste em reconhecer a "problemática" das situações vividas ou observadas, ou seja, em colocar questões sobre elas. Esta é obviamente uma atitude essencial, da qual surgem tanto a questão $\mathcal{q}$ geratriz do inquérito como as questões geradas $\mathcal{q}_k$. A segunda atitude relevante, mesmo sine qua non, é a atitude herbartiana $\hbar_2$, que consiste em não fugir de qualquer questão $\mathcal{q}$ enquanto tal (negando-a, ignorando-a, reprimindo-a) e, concretamente, em doar-se para seu estudo aqui e agora ou, pelo menos, para colocar seu estudo em espera. A terceira atitude é a atitude procognitiva, $\hbar_3$, que se opõe à atitude retrocognitiva típica do Paradigma 1, que nos faz "olhar para trás" para os conhecimentos adquiridos até agora, os quais são por vezes duvidosos (quando não foram expulsos de nossa memória), dando lugar ao reflexo retrocognitivo. Por outro lado, a atitude $\hbar_3$ consiste em projetar-se para a frente, de forma a alcançar os conhecimentos que se revelarão úteis para o inquérito em curso e que talvez não tenhamos encontrado até agora, numa tensão procognitiva pelo conhecimento. De fato, consideraremos que, quando abordamos uma questão “aberta” (para si mesmo, mas muitas vezes também para algumas outras pessoas), não é anormal “não saber nada” ou saber apenas um pouco sobre isso, não mais do que ferramentas - respostas

$r_i^\Diamond$outras obras o_j, questões q_k - que seu estudo pode exigir que sejam colocadas em jogo. É a questão q que conta, não o fato de se ter ou não, quando estamos prestes a começar nosso estudo, ferramentas relevantes - cuja relevância dificilmente pode ser conhecida com antecedência.

A quarta atitude, $\hbar_4$, é a *atitude exotérica*, que se opõe à ilusão esotérica de quem pensa que sabe tudo (pelo menos em certa área). Em contrapartida, a atitude *exotérica* consiste em se olhar *sempre* como tendo que *estudar* para *aprender mais* ou, já, para verificar ou questionar o que se pensa saber. A atitude exotérica é baseada em dois princípios que devem reger a relação pessoal ou institucional com o conhecimento e a ignorância: (1) em seu campo de "especialização", se houver); (2) abster-nos-emos de enfrentar a nossa ignorância, seja *qual for o campo* (mesmo que este nos pareça completamente estranho), para progredir tanto quanto possível e quanto nos for útil para um equipamento praxeológico adequado ao inquérito que este equipamento se destina a servir.

A quinta atitude, $\hbar_5$, é a do enciclopedista comum. Consiste em ver-se como não alheio ao conjunto de campos praxeológicos possíveis, mesmo que seja com um "grau de exotericidade" próximo de zero, enquanto se esforça constantemente para fazê-lo crescer, tanto quanto seja útil, o dito grau de exotericidade. Para dar uma imagem mais concreta deste princípio, imaginamos que cada instância î possui e administra uma enciclopédia E (î) composta por livros que listam as praxeologias encontradas em diferentes áreas da atividade humana: para qualquer disciplina ou subdisciplina $\mathcal{D}$, e para î dado, esta enciclopédia conterá um livro de $\mathcal{D}$, notado B (î, $\mathcal{D}$), a letra B sendo a letra grega beta maiúscula (em grego, βιβλίον, biblion, significa "livro"). B (î, $\mathcal{D}$) é frequentemente vazio (B (î, $\mathcal{D}$) = ∅) ou quase vazio (B (î, $\mathcal{D}$) ≈ ∅). A "boa gestão" dos livros B (î, $\mathcal{D}$) é obviamente um requisito essencial para o bom andamento dos levantamentos a realizar ou a dirigir.

Em geral, para estar em harmonia com o Paradigma 2 é necessário ter (ou desenvolver) uma relação com o conhecimento e a ignorância organizada pelas cinco atitudes $\hbar_1$, $\hbar_2$, $\hbar_3$, $\hbar_4$ e $\hbar_5$, ou seja, deve-se estar "problematizador", herbartiano, procognitivo, exotérico e enciclopedista comum - ao invés de "erudito distinto". Neste contexto, os aspirantes professores ou professores em exercício terão que desenvolver seus equipamentos praxeológicos em duas direções. Em primeiro lugar, esses professores terão que aprender a identificar e formular questões q (construindo assim a atitude $\hbar_1$), depois estudá-las identificando e estudando as respostas disponíveis $r_i^\Diamond$, as obras úteis o_j, as questões geradas q_k (por apelando para $\hbar_2$, $\hbar_3$, $\hbar_4$), finalmente dar conta de tudo isso com clareza e concisão (de acordo com $\hbar_5$). Depois, esses professores terão que aprender a estimular, orientar e conduzir à conclusão (de forma provisória) de tais inquéritos feitos, desta vez, pelos próprios alunos. Insistamos neste fato que aquilo que um professor deve "saber", adquirirá realizando pessoalmente inquéritos e supervisionando inquéritos realizados pelos alunos, e não pelo estudo descontextualizado de obras que a história dos sistemas escolares tornou provisoriamente prestigiosas. Como exemplo final, propomos esta questão (monodisciplinar, ao invés de codisciplinar): "Uma função derivada é contínua?" Ou pode ter um número finito de pontos de descontinuidade? Para o "especialista", essa formulação parecerá - muito normalmente - "ingênua"; mas é com base nessa formulação que o inquérito deve ser feito.

Qual avaliação fazer da formação adquirida?

Procognição e aprendizagem futura

Um elemento essencial do problema aqui levantado é o seguinte: qual é *a instância avaliadora* $\hat{v}$? Uma questão essencial é obviamente: qual entidade é avaliada? Vamos começar com um caso "simples": em uma classe c = [X, Y], uma equipe de alunos Xq, estuda, sob a supervisão de uma equipe de professores Yq, uma determinada questão q. Independentemente da sua extensão, o seu relatório do inquérito, validado pela classe, constitui um capítulo do livro da classe c. É então este livro da classe que é sujeito a uma avaliação por um órgão avaliador v̂ que pode ser o conjunto Y dos professores da classe ou uma parte desse conjunto. Claro, e voltando a uma questão já abordada, y ∈ Y devem ser formados neste tipo de avaliação, que em regra geral é de natureza codisciplinar, mesmo que a nossa crença espontânea na nossa capacidade de avaliar qualquer situação pareça ser uma habilidade adaptativa de nosso tipo ... Mas a instância v̂ também pode ser um corpo de inspetores das escolas e de classes. Aqui tocamos numa dificuldade essencial, que surge ao nível da sociedade (e, portanto, da civilização): o reconhecimento do valor da educação adquirida pelo questionamento do mundo, por oposição à educação adquirida pela visita de obras.
Como avaliar essa educação? A resposta tradicional é: avaliando o que sabem as pessoas que receberam essa formação, ou seja, suas realizações praxeológicas, em termos de práxis e logos. Resumindo, trata-se de avaliar o que x aprendeu (e ainda não desaprendeu). No paradigma do questionamento do mundo, o critério é outro: o que importa não é exatamente o que x terá aprendido e poderá fazer com isso, mas o que poderá aprender de novo. Claro, o que x é capaz de aprender depende em parte do que ele aprendeu, mas apenas em parte, porque muitas praxeologias - ou seja, muitos "conhecimentos" - que foram "adquiridos são ou se tornam, de fato, improdutivo.
Qualquer avaliação supõe uma instância î, ou seja, uma pessoa x ou uma posição institucional (I, p), e um sistema de obras $\mathcal{O}$. O que é avaliado é a relação R (î, $\mathcal{O}$). Para avaliar essa relação,

$\hat{v}$ deve analisar o poder do pensamento (logos) e da ação (práxis) que R ($\hat{\imath}$, $\mathcal{O}$) confere a $\hat{\imath}$. É aqui que duas escolhas são possíveis. Iremos mencioná-los assumindo, para simplificar, que temos $\hat{\imath}$ = x. A primeira é a escolha *retrocognitiva*: consiste em fazer x responder às questões q que se supõe que x tenha estudado previamente. Nesse caso, x investigou q (em princípio), mesmo que essa investigação consistisse simplesmente na leitura de relatórios de inquéritos em que x não teria participado pessoalmente. A segunda escolha é a escolha procognitiva: consiste em pedir a x para produzir uma resposta r a uma questão q que x não deveria ter estudado - x terá que levar o inquérito de qualquer maneira para o exame ao qual deve proceder.

Maltratar perguntas?

Antes de prosseguir, uma observação geral é necessária. A maioria das pessoas se pergunta - com mais ou menos frequência - uma ampla variedade de questões. Notemos aqui que, se alguma resposta r deve ser "sólida" - isto é, deve ter resistido à dialética dos meios de comunicação e dos meios tão exigentes quanto possível dados os recursos disponíveis -, nenhuma questão q pode em princípio ser excluída, por exemplo, com o fundamento de que seria fútil. Dito isso, quando uma pessoa x faz uma questão q, várias possibilidades podem surgir. O mais comum, ao que parece, é esta: a questão q é ignorada quase assim que ocorre à mente de x e nunca será estudada por x - é uma espécie de natimorto.
O "destino" de uma questão q não é necessariamente morrer assim que nasce. Muitas vezes acontece que x é minimamente herbartiano e busca uma resposta r ouvindo ou consultando "mídias" (no sentido da dialética das mídias e meios) de fácil acesso, por exemplo, pessoas próximas consideradas "seguras" por x, ou " boato público ", ou um dicionário etc. O problema essencial, com efeitos devastadores, é que muitas pessoas se contentam com uma resposta superficial (o que deixa muitas questões geradas sem resposta) e insuficientemente validada (o funcionamento da dialética das mídias e dos meios permanece muito limitado). É claramente essa atitude "fracamente herbartiana" e os obstáculos que ela promove que a educação para questionamento do mundo deve superar.

Um critério simples, mas inegável

É claro que não é suficiente para x desistir de ficar satisfeito com boatos. Aqui, tomaremos um critério grosseiro: o tempo gasto no inquérito q. Você estudou esta questão por 5 minutos, 50 minutos, 5 horas, 50 horas, 500 horas, 5.000 horas, 50.000 horas? No primeiro caso, geralmente estamos muito próximos de uma resposta r resultante de um simples boato. Nos dois casos seguintes, deparamo-nos com uma duração muitas vezes adotada para os exames formais. O quarto caso, que representa cerca de 4 meses de estudo a uma taxa de 4 horas por dia por

exemplo, corresponde mais ao tempo de inquérito de uma dissertação de mestrado. Deixaremos o leitor imaginar o que pode corresponder às duas outras durações.
Dependendo da instituição que deseja avaliar o que x pode aprender pedindo-lhe que investigue uma questão q, a duração e, mais amplamente, o tipo de exame podem, sem dúvida, variar muito: teste supervisionado de uma hora ou cinco horas, prova domiciliar para ser devolvido dentro de um tempo especificado (um dia, por exemplo), etc. O que importa antes de tudo para tornar possível um inquérito, ou já para iniciá-lo, são obviamente os recursos (de todos os tipos) à disposição do investigador x. Tornou-se costume disponibilizar para x um arquivo composto por uma soma de documentos impressos (incluindo livros), que pode, no entanto, produzir um efeito de didatização em vez de adidatização. Tudo isso não pode ser decidido sem maiores esclarecimentos sobre as condições e restrições prevalecentes. Nós pessoalmente recomendaríamos, como exemplo, um exame supervisionado de - digamos - três horas de duração, com cada candidato tendo uma conexão com a Internet considerada uma biblioteca potencialmente "universal". A cada vez, o inquérito sobre a questão proposta q terá sido realizada com antecedência por pessoas y que desempenham o papel de cobaias, a fim de possivelmente ajustar a questão e especificar melhor as condições e restrições que devem prevalecer durante a prova. Mas tudo isso não poderia ser feito sem que, dentro da sociedade como um todo, os envolvidos na transição para o paradigma de questionamento do mundo se submetessem à disciplina que consiste primeiro em fazer eles próprios inquéritos, depois, tentar na medida do possível, dirigir tais inquéritos. O leitor matemático poderá fazer isso em conexão com a questão levantada acima sobre a continuidade e as possíveis descontinuidades das funções derivadas.

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Éds. & Trad.). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Éd.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Berlin : Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Chevallard, Y. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 12*, 71–114.

Disponible à https://www.jasme.jp/hjme/download/05_Yves%20Chevallard.pdf

Chevallard, Y. (avec Bosch, M.). (2020). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Éds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education: A comprehensive casebook* (pp. xviii-xxxvii). London : Routledge.

Floor and ceiling functions. (2021, 13 juillet). In *Wikipedia*. Récupéré de https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Floor_and_ceiling_functions&oldid=1033433042. Accédé le 29 juillet 2021.

Geometric mean theorem. (2021, 12 juillet). In *Wikipedia*. Récupéré de https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometric_mean_theorem&oldid=1033315775. Accédé le 27 juillet 2021.

Jones, J. H. (2007, 1er mai). Notes on R_0. Récupéré de https://web.stanford.edu/~jhj1/teachingdocs/Jones-on-R0.pdf. Accédé le 29 juillet 2021.

Rousseau, J.-J. (2008). *Du contrat social ou principes du droit politique*. São Paulo : ΜεταLibri. (Ouvrage original publié en 1762) Disponible à http://www.ibiblio.org/ml/libri/r/RousseauJJ_ContratSocial_p.pdf

Puissance d'un point par rapport à un cercle (2021, 10 juillet). In *Wikipedia*. Récupéré de https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Puissance_d%27un_point_par_rapport_%C3%A0_un_cercle&oldid=184513187. Accédé le 2 août 2021.

Side splitter theorem. (n.d.). Math Warehouse. Récupéré de https://www.mathwarehouse.com/geometry/similar/triangles/side-splitter-theorem.php. Accédé le 27 juillet 2021.