Trond Brandsar og Anna Krogstad

Elevar sine representasjonar i arbeid med figurmønster

Masteroppgåve i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 8.-10. trinn
Rettleiar: Eivind Kaspersen
September 2022

Masteroppgåve

NTNU
Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Trond Brandsar og Anna Krogstad

Elevar sine representasjonar i arbeid med figurmønster

Masteroppgåve i lærerspesialist - matematikkdidaktikk 8.-10. trinn
Rettleiar: Eivind Kaspersen
September 2022

Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Samandrag

Representasjon og kommunikasjon er eitt av seks kjerneelement i den nye læreplanen i matematikk, LK20. Å kunne bruke representasjonar og syne representasjonskompetanse er viktig med tanke på å utvikle elevane si kompetanse i utforsking og problemløysing i matematikk. Dette er også ein føresetnad for å førebu elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2022). I denne studien har vi sett på korleis ungdomsstegselevar nyttar ulike representasjonar i arbeid med figurmønsteroppgåver. Formålet med prosjektet var å få eit innblikk i kva for repertoar av representasjonar dei hadde, kva for representasjonar som var mest frekvente, og om dei synte representasjonsfleksibilitet. For å finne svar på forskingsspørsmåla har vi vore inne i ei 8. klasse og ei 10. klasse og aktivt observert og teke lydopptak av elevane når dei løyste figurmønsteroppgåver i små grupper.

Vi har hovudsakleg brukt Duval (2006) sitt rammeverk for semiotiske representasjonar som grunnlag for vår deduktive, tematiske analyse. Vi enda opp med fem kategoriar som beskriv representasjonsrepertoaret til elevane. Desse kategoriane samsvarar med Duval (2006) sitt representasjonssystem med unntak av kategorien *konkretar* som vi valte å sette som ein eigen kategori under dei multifunksjonelle representasjonane.

Forskingsprosjektet vårt var kvalitativt og vi kan derfor ikkje generalisere funna våre, men dei kan gje ein indikasjon på korleis ungdomsskuleelevar bruker representasjonar i samband med figurmønsteroppgåver. Funna våre tyder på at elevane har jobba med ulike representasjonar tidlegare, samt at dei syner at mange av elevane i både 8. og 10. klasse har utvikla breitt repertoar av representasjonar. Det var likevel tydeleg forskjell mellom klassane i representasjonsbruk. 8. klasse held seg mest innan dei multifunksjonelle semiotiske representasjonane, medan 10. klasse nytta både multifunksjonelle og monofunksjonelle representasjonar.

Abstract

“Representation and communication” is one of six core elements in the new mathematics curriculum, LK20. In order to develop their competence in problem solving, the pupils must meet different representations and develop representational competence. This will also help the students in meeting a developing society and working life (Utdanningsdirektoratet, 2022). In this study, we have looked at how junior high school students use different representations when working with figure pattern assignments. The purpose of the project was to get an insight into what kind of repertoire of representations they had, what kind of representations were used most frequent and whether they showed representational flexibility. To find answers to the research questions, we have observed 8th and 10th graders who solved figure pattern tasks in small groups.

We have mainly used Duval's (2006) framework for semiotic representations as a basis for our deductive, thematic analysis. We ended up with five categories that describe the representational repertoire of the pupils. These categories correspond to Duval's (2006) representation system. The exception is a category of manipulatives, which we chose to place as a separate category under the multifunctional representations.

Our research project was qualitative, and therefore we cannot generalize our findings. However, they can tell us something about how junior high school students use representations in connection with figure pattern tasks. Our findings indicate that the pupils have previously worked with different representations, and that many of the pupils in both 8th and 10th grade have developed a broad repertoire of representations. There was still a distinct difference between the classes in the use of representations. The 8th graders worked mostly within the multifunctional semiotic representations, while the 10th graders use both multifunctional and monofunctional representations.

Forord

Tre år med etterutdanning vert nå fullført med ei masteroppgåve. Åra har vore spennande, lærerike og utfordrande. Vi har erfart at å kombinere studie, jobb og familie krev prioriteringar og val som ikkje alltid er like lett å stå for. Vi er likevel glade for å ha fått sjansen til å vera studentar etter mange år i klasserommet. Nye læreplanar gjev retning til korleis vi skal leggje til rette for at elevane skal kunne skaffe seg god matematisk kompetanse. Det har vore interessant å ha fordjupa oss i kva for representasjonskompetanse elevar har og kor fleksible dei er i bruk av ymse representasjonar. Dette er også nyttig kunnskap å ha som matematikklærarar. Via våre forskarauge har vi tileigna oss utvida kompetanse som har gjort oss meir bevisste på kor viktig det er å stille kritisk og konstruktive spørsmål til eigen utøving av lærarrolla.

Fyrst ynskjer vi å takke vår rettleiar Eivind Kaspersen for konstruktiv og tydleg rettleiing. Du har stilt kritiske og naudsynte spørsmål undervegs, hjelpt oss til å avgrense og strukturere oppgåva, og kome med gode tips. Vi vil også takke elevane som deltok i studien, utan dykk hadde vi ikkje hatt datamateriell til forskinga. Vi vil takke familiane våre som har lagt til rette og støtta oss i arbeidet. Ein ekstra stor takk til Åsne, sambuar til Trond, som har bidrege både som språkkonsulent, kritisk venn, og til sist korrekturlesar – du har lyfta oppgåva for oss! Til slutt vil vi takke kvarandre for godt samarbeid.

Mot alle odds, vi kom i mål! Covid-19, husbygging, beinbrot, nye verdsborgarar og tap av verdsborgarar gjorde ikkje dette året optimalt for masterskriving. Vi finn att oss sjølve under kjerneelementet *Utforsking og problemløysing*, som mellom anna handlar om å løyse problem ein ikkje kjenner frå før. Å ta utfordringar, sjølv når det ikkje høver, vil og føre til utvikling og kompetansebyggjing.

Trond Brandsar og Anna Krogstad

Skjåk, september 2022

Innhald

Figurar

Tabellar

Forkortingar/symbol

LIST	«Lav Inngangsterskel, Stor Takhøyde»
LK20	Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020
NESH	Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora
NRICH	Mathematics resources for children, parents and teachers to enrich learning
NSD	Norsk senter for forskningsdata
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

1 Innleiing

1.1 Bakgrunn

Representasjonar er ein viktig del av den nye læreplanen i matematikk, LK20, og i denne studien vil vi sjå på korleis elevar bruker representasjonar i arbeidet sitt. Reglar og algoritmar har tradisjonelt hatt stort fokus i matematikkundervisninga (Skemp, 1976), medan LK20 legg vekt på elevane si forståing og at dei skal utforske, løyse problem og argumentere for framgangsmåtar og løysingar. I læreplanen står det blant anna at elevane skal utforske matematikk og leite etter mønster, finne samanhengar og diskutere seg fram til ei felles forståing (Utdanningsdirektoratet, 2022). Elevane må da bruke representasjonar som hjelp for å finne samanhengane og for å uttrykkje matematiske omgrep og problem.

Kvar dag møter elevane matematiske objekt. Duval (2006) seier at dei matematiske objekta er abstrakte, og at elevane må bruke representasjonar for å få tilgang til dei og for å kunne formidle matematiske idear til andre. Vidare hevder han at representasjonane kan vera teikningar, figurtal, tabellar, diagram, grafar, symbol eller naturleg språk som elevane brukar for å få fram sine matematiske tankar. I LK20 er representasjonar omtala som ulike måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på. Viktigheita av å forstå og kunne nytte representasjonar for å utvikle matematisk kompetanse kjem tydeleg fram i læreplanen ved at det har fått sitt eiget kjerneelement, nemleg *Representasjon og kommunikasjon* (Utdanningsdirektoratet, 2022). Stylianou (2011) meiner at representasjonane kan brukast som verkty for å forstå, utforske og løyse eit problem.

Forsking viser at elevar som utviklar eit bredt spekter av representasjonar også vil utvikle ei breiare forståing i matematikk. Enge og Valenta (2013) seier at forskjellige representasjonar har ulikt potensial for matematisk arbeid og matematikklæring, og dei gjev oss moglegheit til å forstå ulike aspekt ved det matematiske objektet. Dette blir også støtta av Steinbring (1997) som meiner det er viktig å arbeide variert med eit matematisk objekt, sidan ulike representasjonar og konkretar vil få fram objektet sine eigenskaper på ulike måtar. Vidare seier Enge og Valenta (2013) at ulike representasjonar ofte blir brukt i matematikkundervisninga, men at konkretar, teikningar og rekneforteljingar fort berre blir noko ein gjer utan å oppleve at ein forstår betre. Konkretiseringsmateriell er tradisjonelt nytta mykje i byrjaropplæringa, men etter kvart blir symbolske representasjonar brukt i større grad. Svingen (2018) meiner at konkretiseringsmateriell kan vera effektivt uansett alder, dersom det blir nytta rett. Ho meiner også at elevane sjølve må få moglegheit til å skape samanheng mellom representasjonen og det matematiske objektet. Om elevane ikkje ser samanhengen mellom representasjonane og det matematiske objektet blir det vanskeleg å utvikle matematisk forståing.

Matematiske objekt kan uttrykkjast ved hjelp av mange ulike representasjonar. Duval (2006) kallar representasjonane som blir brukt i matematikk for semiotiske representasjonar. Desse representasjonane har han delt inn i eit system som skil mellom *naturleg språk, ikoniske representasjonar, symbolsystem* og *todimensjonale figurar*. Han meiner at kunnskap om desse representasjonane kan styrke den matematiske forståinga til elevane, men også at variasjonen som finst i semiotiske representasjonar og arbeidet med desse kan føre til vanskar i innlæringa av matematikk. Sjølv om det finst mange ulike representasjonar kan ein ikkje konkludere med at ein representasjon egnar seg betre enn ein anna når ein skal løyse eit problem. Det er likevel ein fordel å ha kunnskap om ulike representasjonar og kvifor og korleis dei blir brukt (Stylianou, 2011). LK20 vektar relasjonell forståing som baserer seg både på kvifor og korleis ein skal løyse ulike oppgåver. Elevane skal «*bli gode problemløsere og oppdage sammenhenger i og mellom fagets kunnskapsområder og andre fags kunnskapsområder. Det er disse sammenhengene som legger til rette for dybdelæring og forståelse i faget. Faget legger også til rette for at elevene skal utforske matematikken og kommunisere om den. Læreplanene knytter seg tett til elevenes hverdag og skal forberede dem på et samfunn og arbeidsliv i stadig endring*» (Utdanningsdirektoratet, 2022). Utdraget syner at matematikk handlar om å forstå kvifor ulike metodar fungerer og korleis ein kan nytte matematikk i kvardagen. Det handlar ikkje berre om formlar, reglar og pugging av ulike metodar.

Det er ei utfordring at mange elevar har eit avgrensa utval av representasjonar, noko som vidare fører til mindre forståing i matematikk enn elevar som har eit breiare repertoar. Svingen (2018) seier at elevar som har kompetanse til å bruke ulike matematiske representasjonar av det same matematiske objektet vil lære meir enn elevar som berre kjenner til ein representasjonsform. Eit av kjerneelementa i LK20, *Utforsking og problemløysing,* syner at elevane skal utvikle metodar for å løyse ukjende problem. For å kunne gjere dette må dei ha kunnskap om ulike representasjonar. Dette støttes av Kilpatrick et al. (2001) som seier at som eit ledd for å meistre desse elementa og for å byggje opp forståinga i matematikk, må undervisninga bli tilrettelagt slik at elevane møter og får erfaring med mange ulike representasjonar. Bruk av ulike representasjonar vil gje elevar ei breiare matematiske forståing ved at dei kan forstå det abstrakte i matematikken betre. Ved å nytte ulike uttrykksformer av det matematiske objektet, samt utforske samanhengane mellom desse, vil elevane kunne bruke representasjonar meir fleksibelt i arbeid med matematiske problem (Soundy & Drucker, 2009).

Det er forska mykje på kor viktige representasjonar er for elevane si forståing, men vi veit lite om elevane sitt repertoar av representasjonar. Fleire studie viser at evna til å bruke ulike typar representasjonar fleksibelt har stor betyding for utvikling av omgrepsforståing i matematikk og problemløysingskompetanse (Enge & Valenta, 2013). Vi veit også at elevar som har fått undervisning der ulike representasjonsformar har vorte vektlagt har ei større breidde i sitt repertoar og fleire kort å spele på, enn elevar som har fått undervisning der kanskje berre symbolsystemet har vorte vektlagt. Vi veit derimot ikkje så mykje om kva for representasjonsformar elevane har gjort seg erfaringar med i løpet av grunnskulen. Vi er også usikre på om elevane ser samanhengane mellom representasjonane, om dei kan veksle mellom ulike representasjonar og om dei vel den mest formålstenlege representasjonen for å løyse eit problem. Gilje et al. (2016) skriv at elevane møter mange ulike representasjonar i lærebøker, men dersom samanhengen og overgangen mellom desse representasjonane ikkje blir løfta fram, blir dei nytta berre som ein prosedyre for elevane. Da blir den instrumentelle forståinga ivareteke og ikkje den relasjonelle. Det er på bakgrunn av denne kunnskapen at vi ynskjer å forske på kva for repertoar av representasjonar elevane har, om dei ser samanhengen mellom representasjonane og kor fleksible elevane er i bruken av representasjonsformer.

1.2 Forskingsspørsmål

Duval (2006) og Kilpatrick et al. (2001) meiner at det er viktig å ha kunnskap om representasjonar og å kunne vurdere kva for representasjon som er formålstenleg, ut i frå eigenskapane til representasjonane og målet for oppgåva. Med tanke på kor viktig representasjonar er for å utvikle den matematiske forståinga må elevane møte og få erfaring med ulike representasjonar. Dersom elevane klarer å vurdere kva for representasjonar som er mest formålstenleg å bruke i ulike situasjonar, kan dei også bli effektive problemløysarar. Vi er usikre på om elevane har for lite kunnskap om ulike representasjonar eller om dei har opparbeida seg eit breitt repertoar av representasjonar gjennom skuleløpet. Er elevane kreative i bruken av representasjonar eller har dei lært seg få representasjonar som blir nytta som prosedyre?

I denne forskinga ville vi at elevane skulle få moglegheit til å vise fram repertoaret sitt av representasjonar. Elevar har ulik erfaring med representasjonar, der nokre har eit breitt spekter som dei kan handtere, medan andre kanskje har kunnskap om berre nokre få. For at elevane skulle få vist fram repertoaret sitt måtte vi lage oppgåver som ikkje hadde opplagte og klare framgangsmetodar. Vi valte å bruke figurmønsteroppgåver som aktivitet. Slike oppgåver utfordrar elevane på å bruke forskjellige representasjonar, dei gjev rike moglegheiter til å samarbeide, vera kreative og utforskande (Torkildsen, 2020). Sidan vi var interesserte i å sjå på repertoaret av representasjonar til elevar valte vi å observere 8. og 10. klassingar, sidan dei sannsynlegvis har fått erfaringar med ulike representasjonar i løpet av skulegangen. Vi ynskte også å sjå på om det var forskjell på bruken av representasjonar i dei to klassane. Vi ynskte da spesielt samanlikne korleis elevane bruker representasjonane og sjå om 10. klassingane har meir representasjonskompetanse enn 8. klassingane. Dette har leia oss til følgjande forskingsspørsmål:

- Kva for repertoar av representasjonar syner 8. og 10. klassingar i arbeid med figurmønsteroppgåver?

- Kor frekvent brukar elevane dei ulike representasjonane?

- Kor fleksible er 8. og 10. klassingane er i bruken av representasjonar og kva for kombinasjonar bruker dei?

For å svara på forskingsspørsmålet observerte vi ei 8. klasse og ei 10. klasse som jobba med figurmønsteroppgåver. Vi meinte at figurmønsteroppgåver ga elevane store moglegheiter til å vera utforskande og kreative, samstundes som at elevane kunne bruke mange ulike representasjonar for å løyse oppgåvene.

1.3 Oppbygging av oppgåva

Denne oppgåva er bygd opp av seks kapittel. I kapittel 2 legg vi fram teori som er relevant for studien. I denne delen vil vi blant anna presentere teori om matematiske representasjonar, Kilpatrick et al. (2001) si skildring av matematisk kompetanse og Duval (2006) sitt representasjonssystem. Vidare kjem det eit metodekapittel der vi gjer greie for val av forskingsdesign, datainnsamling og analyse. Oppgåvene vi har brukt i forskingsprosjektet vil også bli presentert i denne delen. I kapittel 4 presenter vi funna våre frå datainnsamlinga. Funna blir deretter diskutert med bakgrunn av teori i det neste kapitlet. I dette kapitlet seier vi også noko om didaktiske implikasjonar, studien sine begrensingar og vegen vidare. Det siste kapitlet er ei avslutning, der vi blant anna om erfaringar vi har fått gjennom studien.

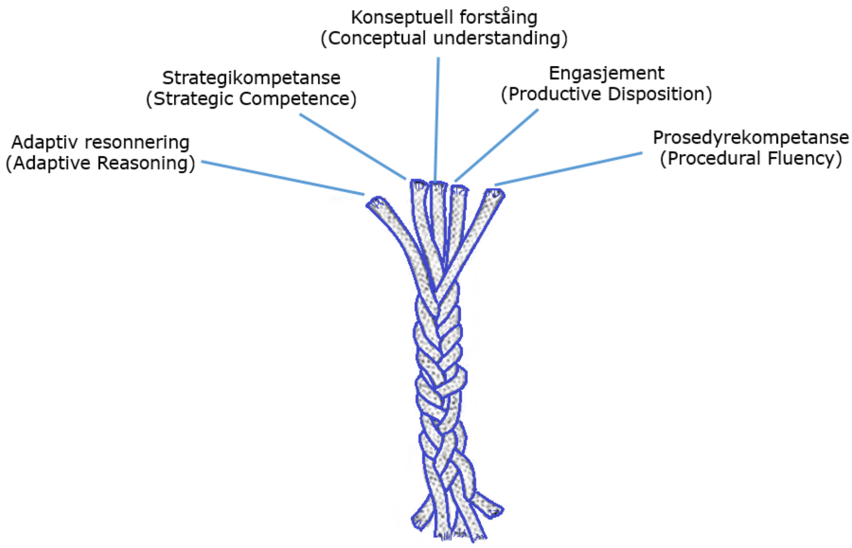
2 Teori

I dette kapitlet vil vi gjere greie for det teoretiske rammeverket rundt masteoppgåva vår. Vi vil fyrst presentere teoriar om matematisk kompetanse og forståing innan matematikk, og deretter kjem det ein del om fleksibilitet. Den tredje og største delen i dette kapitlet handlar om representasjonar, og vi har lagt vekt på kva Duval (2006) seier om semiotiske representasjonar og hans system for semiotiske representasjonar. Sidan elevane i dette forskingsprosjektet jobba med figurmønsteroppgåver kjem det også ein kort del om figurmønster til slutt.

2.1 Matematisk kompetanse og forståing

2.1.1 Matematisk kompetanse

Kilpatrick et al. (2001) skriv om matematisk kompetanse som ei samansetjing av ulike komponentar. Dei har utvikla ein modell som viser fem komponentar som dei meiner er naudsynte for å utvikle matematisk kompetanse. Som Figur 2.1 syner er desse komponentane *konseptuell forståing, strategikompetanse, adaptiv resonnering, prosedyrekompetanse* og *engasjement*. Komponentane er samanfletta og avhengige av kvarandre, og det er derfor viktig at elevane får moglegheit til å utvikle alle samtidig.



Figur 2.1: Dei fem trådane for matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

Engasjement (Productive Diposition) er i følgje Kilpatrick et al. (2001) viktig for at elevane skal utvikle dei andre trådane i modellen. Elevane må sjå at matematikk er nyttig, og dei må utvikle sjølvtillit innan matematikkfaget. Elevar som har ei positiv innstilling til matematikk vil ha lettare for å lære meir matematikk. *Konseptuell forståing* (Conceptual Understanding) dreiar seg om at elevane ikkje berre følgjer reglar og prosedyrar, men at dei ser samanhengar mellom matematiske idear, omgrep og operasjonar. Kilpatrick et al. (2001) skriv at når ein elev får større konseptuell forståing vil eleven vera meir fleksibel når nye problem skal løysast. Denne typen forståing kan samanliknast med det Skemp (1976) kallar *relasjonell forståing*.

Strategikompetanse (Strategic Competence) handlar om å formulere, representere og løyse matematiske problem. *Prosedyrekompetanse* (Procedural Fluency) inneber å ha kunnskap om og ferdigheitar til å utføre matematiske prosedyrar, samt å reflektere over bruken av desse. *Adaptiv resonnering* (Adaptive Reasoning) er evna til å gjere gode strategival og velje rett framgangsmåte i løysingsprosessar. Vi kjem attende til dei tre siste nemnde trådane i Kilpatrick sin trådmodell seinare i teorikapittelet.

2.1.2 Relasjonell og instrumentell forståing

Skemp (1976) seier at tradisjonell undervisning ofte blir knytt opp mot pugging av reglar og formlar. Elevane lærer seg fleire og fleire framgangsmåtar for korleis dei skal løyse problem. Dei lærer korleis dei skal løyse oppgåvene, men ikkje kvifor metoden fungerer. Denne forma for forståing blir kalla instrumentell forståing. Om elevane berre har instrumentell forståing for matematisk innhald og ikkje ser korleis ting heng i saman, vil det vera vanskeleg for dei å løyse matematiske problem dei møter i kvardagen. Ein fordel med å lære matematikk instrumentelt er at det er relativt fort gjort å lære seg ein regel eller ei oppskrift for korleis ein kan løyse eit problem, men ei ulempe er at ein fort kan gløyme oppskrifta att (Skemp, 1976).

Relasjonell forståing derimot baserer seg på at ein både forstår korleis og kvifor ein kan løyse ei oppgåve. Elevane får ei djupare forståing for matematikk når dei ser på samanhengar og forstår kvifor ulike framgangsmåtar fungerer på gitte problem. For å oppnå den relasjonelle forståinga bør undervisninga leggjast opp til at ein har opne oppgåver utan ei bestemt løysingsmetode. Skemp (1976) seier at relasjonell tilnærming til matematikk er mest fornuftig, men ei ulempe er at det er tidkrevjande, og elevane kan bruke lang tid på å forstå kvifor ei løysingsmetode fungerer.

Elevar som har utvikla instrumentell forståing memorerer framgangsmåtar og lærer seg kva for problem dei fungerer for. Dei kjem fram til eit svar, men er ikkje i stand til å seie kvifor svaret blir slik. Derimot kan elevar som har utvikla relasjonell forståing løyse problem på ulike måtar, og dei ser samanhengen i prosessen som leier fram mot løysinga (Skemp, 1976).

2.1.3 Prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap

Hiebert og Lefevre (1986) skriv om to ulike formar for matematisk forståing, nemleg prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap. Dette er knytt til Skemp (1976) si skildring av instrumentell og relasjonell forståing. Prosedyrekunnskap kan samanliknast med instrumentell forståing, fordi desse omgrepa berre omhandlar kunnskap om kva for reglar og prosedyrar som blir brukt og korleis ein bruker desse. Konseptuell kunnskap er rik på relasjonar, og elevar som utviklar slik kunnskap vil vera i stand til å identifisere problem, tolke, forstå og bruke ulike representasjonar som passar situasjonen. Elevar treng både prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap. Prosedyrekunnskap treng dei for å framstille løysinga matematisk og konseptuell kunnskap for å tenkje strategisk i møte med matematiske problem (Hiebert & Lefevre, 1986).

2.2 Fleksibilitet

I følgje Newton et al. (2020) kan fleksibilitet bli definert som å ha kunnskap om ulike prosedyrar, saman med å bruke den prosedyren som er mest føremåltenleg. Ein fleksibel problemløysar er ein som kan tilpasse seg matematiske problem og velje den mest effektive metoden for å løyse problema. Utviklinga av fleksibilitet er ulik hjå elevar. Sjølv om elevane veit om betre måtar å løyse problem på, kan dei velje å bruke ein kjent metode som fungerer i alle tilfelle. Elevane bør derfor få erfaring med ulike representasjonar, og etter kvart lærer dei kva for representasjon som er best for eit gitt problem (Newton et al., 2020).

Kilpatrick et al. (2001) seier at det er viktig at elevane kan utføre prosedyrar riktig, effektivt og fleksibelt for å oppdage viktige matematiske samanhengar. Tråden *prosedyrekompetanse* i Kilpatrick sin modell inneber nettopp det å ha kunnskap om og ferdigheitar til å utføre matematiske prosedyrar, samt å reflektere over bruken av desse. Elevar som har denne kompetansen kan, sjølv om dei har funne ein framgangsmåte som fungerer, finne andre framgangsmåtar som med høg sikkerheit og effektivitet løyser eit gitt problem. Mangel på kompetanse kan gjere det vanskeleg for elevane å oppnå djup matematisk kompetanse. Eit anna viktig element i denne kompetansen er å ha kunnskap om og å kunne ulike matematiske hjelpemiddel. Utan den kompetansen vil ikkje elevane vera i stand til å utføre prosedyrar fleksibelt, nøyaktig eller effektivt (Kilpatrick et al., 2001).

Tråden *strategikompetanse* kan også koplast opp mot fleksibilitet. *Strategikompetanse* handlar om å formulere, representere og løyse matematiske problem. For at elevane skal byggje opp denne kompetansen må dei møte eit breitt utval av matematiske utfordringar, og dei må kjenne til ulike representasjonar. Elevane som har denne kompetansen vil vera fleksible og kunne bruke ulike strategiar for å løyse same problem. Elevane vil også vera i stand til å endre strategi eller bruke andre representasjonar undervegs for å effektivisere problemløysingsprosessen. Mange oppgåver har kjent struktur og krev derfor ikkje høg strategisk kompetanse, men denne kompetansen er spesiell nyttig når elevane møter problem som ikkje har ein klar løysingsmetode (Kilpatrick et al., 2001).

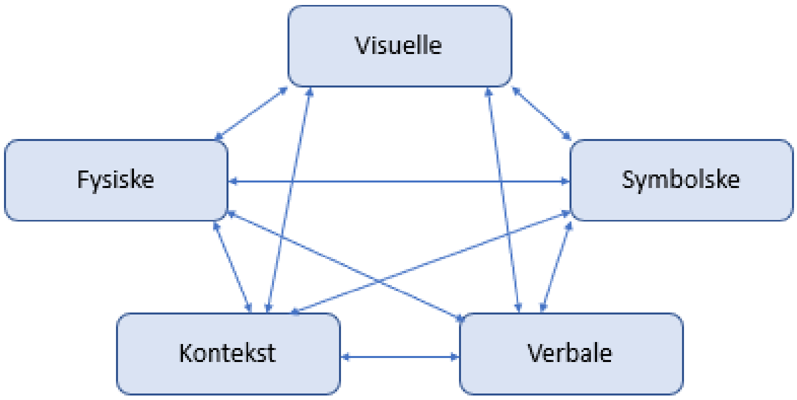
Heinze et al. (2009) seier at det å bruke fleire representasjonar og å fleksibelt kunne byte mellom representasjonar er ein viktig komponent for å kunne løyse matematiske problem. Dei seier vidare at elevar som får erfare mange representasjonar, og som lærer seg å byte fleksibelt mellom desse, har lettare for å forstå matematiske problem enn elevar som ikkje får erfaring med ulike representasjonar. For at elevar skal bruke representasjonar på ein vellykka og produktiv måte må dei i følgje de Jong et al. (1998, referert i Heinze et al., 2009) kunne operere flytande innanfor ulike representasjonar for same matematiske objekt. Dei må også kunne byte flytande mellom representasjonane. I tillegg må dei vera i stand til å velje den representasjonen som er mest formålstenleg kvar gong dei skal løyse eit problem. Det vil si at dei må kunne velje fleksibelt eller adaptivt mellom representasjonane dei har tilgjengeleg.

2.3 Representasjonar

Mykje av matematikken er abstrakt, og i følgje Duval (2006) er bruk av representasjonar heilt naudsynt for å kunne utøve matematikk. Duval seier at representasjonar er noko som står for noko anna. Når han seier «noko anna» meiner han den matematiske ideen som blir formidla eller eit matematiske objekt. Matematiske objekt er abstrakte og berre tilgjengelege via representasjonar. Det matematiske objektet «fem» kan til dømes bli representert ved å bruke sifferet «5», skrive med bokstavar «fem», uttrykkje munnleg «fem», fem på ei tallinje eller illustrert med fem prikkar: ●●●●●.

Niss og Jensen (2002) seier at representasjonskompetanse er å kunne forstå og nytte ulike representasjonar av matematiske objekt eller problem. Dei seier vidare at elevane må kunne sjå samanhengar og omsetje mellom representasjonane, og at dei i tillegg kan velje den representasjonen som passar best til eit formål. Dette kan sjåast i samanheng med ein av Kilpatrick sine fem trådar (Figur 2.1), nemleg *adaptiv resonnering* (Adaptive Reasoning). Adaptiv resonnering inneber evna til å gjere gode strategival og velje framgangsmåtar i løysingsprosessen. Elevane må kunne argumentere for og vurdere strategivala og løysingsmetodane sine. Elevane må også kunne sjå samanhengar mellom matematiske konsept og den verkelege situasjonen knytt til problemet (Kilpatrick et al., 2001). Tripathi (2008) meiner også at det å ha kunnskap om ulike representasjonar kan auke elevane si relasjonelle forståing innan matematikk. Ho samanlikna å bruke ulike representasjonar med å sjå på eit objekt gjennom ulike linser, og på denne måten få fram ulike eigenskapar av objektet. Elevane kan få hjelp til å forstå matematiske idear betre ved å bruke varierte representasjonar og sjå på samanhengen mellom desse.

Kilpatrick et al. (2001) seier at matematikkundervisning krev representasjonar. Dei seier også at representasjonar for matematiske objekt kan vera *konkretar, kontekst/kvardagssituasjonar, visuelle, symbolske* og *verbale representasjonar*. Desse er vist i Figur 2.2. Dei meiner at det er viktig å kunne bruke matematiske representasjonar og å kunne sjå samanhengen mellom representasjonane. Elevar som ser desse samanhengane vil utvikle ei djupare matematisk forståing. Dette blir støtta av Svingen (2018) som meiner at elevar som får tilgang til og som skjønar korleis dei skal bruke ulike representasjonar av same matematiske objekt vil oppnå meir læring enn dei som berre har tilgang til ein representasjon.



Figur 2.2: Ulike representasjonar for matematiske objekt.

Sidan ein representasjon kan eigne seg betre enn andre til å løyse eit bestemt problem er det ein fordel å ha representasjonskompetanse og representasjonsfleksibilitet. Nistal et al. (2009) seier at val av representasjonar ikkje berre heng saman med oppgåvene sin eigenart. Personlege eigenskapar og konteksten er også avgjerande faktorar som påverkar kva for ein representasjon elevar vel i ulike oppgåver/utfordringar. Elevane må kunne vurdere når ulike representasjonar er eigna eller formålstenlege for å utvikle matematisk forståing (Niss & Jensen, 2002; Kilpatrick et al., 2001; Svingen, 2018).

Stylianou (2013) meiner at representasjonar kan bli brukt som verkty til å utforske, forstå og løyse matematiske problem. Han seier vidare at representasjonar, som verkty, kan delast inn i seks kategoriar ettersom kva for funksjon dei har. Desse kategoriane er verkty for å kommunisere, samle informasjon, behandle informasjon, utforske, presentere og vurdere.

Representasjonen som fungerer som verkty for kommunikasjon blir brukt av elevane for å argumentere, forklare og skape meining rundt eit matematiske objekt. Når representasjonar blir brukt for å samle informasjon treng ikkje elevane ha all informasjonen inne i hovudet. Representasjonar som blir brukt for å behandle informasjon kan hjelpe elevane med å sjå samanhengar som kan bidra til å løyse problem. Representasjonar som blir brukt for å utforske eit problem kan endrast til nye representasjonar som gjev meir informasjon om problemet. Representasjonar som vurderingsverkty kan hjelpe elevane med å vurdere om ei løysing er rett. Den siste funksjonen, representasjonar som presentasjonsverkty, blir brukt for å dele informasjon om det matematiske objektet eller problemet (Stylianou, 2013).

2.3.1 Duval sitt system over semiotisk representasjonar

Duval (2006) meiner at representasjonar og visualisering er kjernen i matematikk. Han meiner at vi er heilt avhengige av representasjonar for å kunne utvikle matematisk tankegang, og at ein ikkje kan utføre ein matematisk prosess utan å bruke formar for semiotiske representasjonar. Vidare seier han at matematiske objekt kan vera tal, mengder, funksjonar, talfølgjer eller symbolske uttrykk. Dei matematiske objekta er abstrakte, og ein ikkje kan ta eller føle på dei. Eit matematisk objekt er derfor berre tilgjengeleg gjennom representasjonar. Desse representasjonane kan vera naturleg språk, bokstavar, teikningar og illustrasjonar som brukar i kvardagen. Dei kan også vera formell notasjon av algebra, funksjonar eller grafar som er meir spesielle for matematikken.

Duval (2006) meiner at det ikkje er nok å kjenne til ein representasjon for eit matematisk objekt. Han meiner, i samsvar med Tripathi (2008), at ulike representasjonar gjev oss moglegheit til å sjå og forstå ulike aspekt ved eit matematisk objekt. Vidare seier han at representasjonane har ulikt potensiale for matematisk arbeid og for å lære matematikk. Duval (2006) har laga ei oversikt over representasjonane ut i frå kva for eigenskapar dei har. Oversikta viser korleis han deler dei semiotiske representasjonane inn i forskjellige grupper.

Representasjonar har ulikt potensial, og dei bidreg på kvar sin måte til å gjere eit matematisk objekt tilgjengeleg. Ut i frå eigenskapane til representasjonane har Duval (2006) laga ei oversikt der han har delt inn representasjonane i ulike semiotiske system. Han har klassifisert representasjonane i fire system som ein kan sjå i Tabell 1.

Multifunksjonelle representasjonar Prosessen kan ikkje bli laga til ei algoritme.	**Naturleg språk:** • Munnlege forklaringar • Skriftleg: teorem og bevis	**Illustrasjonar:** • Teikningar, skisser og mønster • Geometriske figurar
Monofunksjonelle representasjonar Dei fleste prosessane er algoritmar.	**Symbolsystem:** • Berre skriftlege utrekningar og bevis	**Todimensjonale figurar:** • Tabell, grafar og diagram

Tabell 2.1: Vår omsetjing og tilpassing av Duval sitt representasjonssystem. Henta frå Duval (2006).

Dei fire systema Duval (2006) skil mellom er *naturleg språk, illustrasjonar, symbolsystem* og *todimensjonale figurar*. I dei forskjellige systema finn vi fleire ulike representasjonar. *Naturleg språk* er ikkje spesifikt ein representasjon i matematikk, men ein vanleg del av all tenking. Matematiske forklaringar og teorem er likevel døme på representasjonar som høyrer til dette systemet. Innan *illustrasjonar* finn vi teikningar, skisser, mønstre og geometriske figurar, og i *symbolsystemet* finn vi representasjonane skriftlege utrekningar og bevis. I det siste systemet, *todimensjonale figurar,* finn vi tabell, grafar og diagram.

Dei fire systema har ulike funksjonar, og Duval skil derfor også mellom monofunksjonelle og multifunksjonelle representasjonssystem. *Symbolsystemet* og *todimensjonale figurar* høyrer til monofunksjonelle representasjonar. At representasjonane er monofunksjonelle betyr at dei har ein einsidig funksjon, og at dei kan bli brukt til å kome fram til formlar og algoritmar som kan bli brukt for å løyse matematiske problem. Til dømes kan ein tabell leie fram til funksjonsuttrykk. *Naturleg språk* og *illustrasjonar* ligg under det multifunksjonelle representasjonssystem. Prosessar innanfor desse representasjonane kan ikkje gjerast om til algoritmar, men dei opnar for at elevane kan kommunisere ideane sine, resonnere, utforske og tileigne seg informasjon (Duval, 2006).

2.3.2 Konkretar

Konkretar blir brukt i matematikken for å synleggjere eit matematisk objekt (Svingen, 2018). Duval (2006) reknar ikkje konkretar som eit eige semiotisk system, men seier at dei kan fungere som ein overgangsrepresentasjon. Grunnen til at han ikkje reknar dei som eit semiotisk system er at det ikkje finst gitte reglar for korleis ein manipulerar konkretar. Derimot har også Kilpatrick et al. (2001) ei oversikt over representasjonar, og dei skildrar konkretar som eit eiget semiotisk system. Dei seier at konkretar kan vise korleis elevar har tenkt eller avdekkje framgangsmåtar som dei har brukt.

Representasjonane som er nemnd i avsnitta over viser alle det same matematiske objektet, men det er ingen representasjon som viser alle sidene til eit objekt. Alle dei ulike semiotiske systema kan representere same matematiske objekt, men på forskjellige måtar (Duval, 2006). Det kan derfor vera nødvendig å bruke fleire representasjonar samtidig for å få fram dei eigenskapane vi vil framheve i objektet. Variasjonen som finst i semiotiske representasjonar kan gjere elevar i stand til å handtere og løyse problem på ein effektiv måte. Dessverre kan variasjonen i representasjonar og arbeidet med desse også føre til vanskar i matematikkinnlæringa. Vanskane kan gå på å greie å halde fokus på det matematiske objektet når ein jobbar innan ein representasjon og i overgangen frå ein representasjon til ein annan (Duval, 2006).

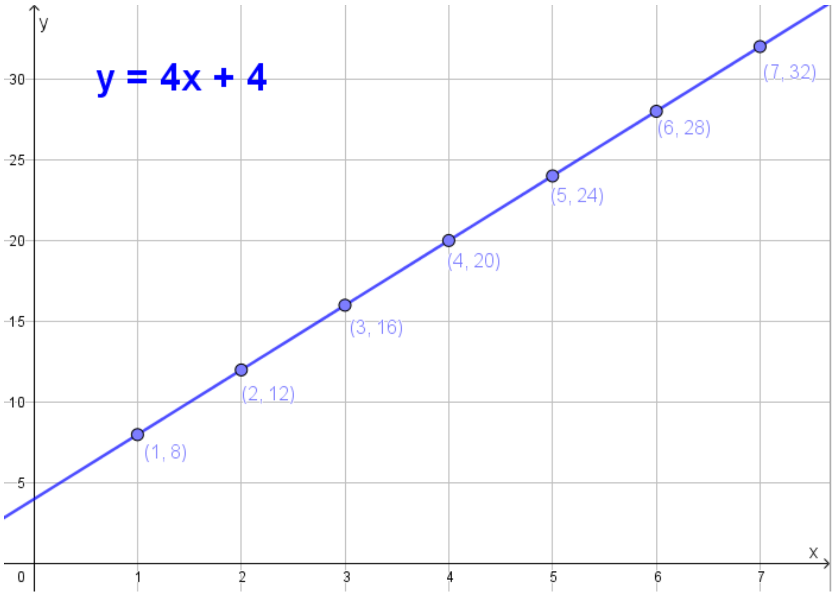
2.3.3 Transformasjonar av semiotiske representasjonar

Duval (2006) meiner at matematisk aktivitet handlar om å arbeide med matematiske objekt, og dette kallar han for transformasjonar på representasjonane. Han skil mellom to transformasjonar av semiotiske representasjonar, nemleg *behandling* og *omdanning*. *Behandling* er transformasjonar som skjer innanfor det same semiotiske systemet. Eit døme på behandling kan vera å utføre ein rekneoperasjon eller manipulere og forenkle uttrykk.

$13 + 12 = 10 + 10 + 2 + 3 = 10 + 10 + 5 = 20 + 5 = 25$

I dømet over er utgangspunktet 13 + 12, men dette reknestykket kan representerast på ulike måtar innanfor det semiotiske systemet symbol. Sidan transformasjonane her skjer innanfor det same semiotiske systemet, nemleg symbolsystemet, er dette eit døme på behandling (Duval, 2006).

Omdanning er transformasjonar der ein skiftar mellom ulike semiotiske system utan at ein endrar det matematiske objektet. Ei slik omdanning kan til dømes vera å gå frå det naturlege språket om eit forhold, til notasjon ved hjelp av bokstavar, eller å gå frå ein illustrasjon til eit symboluttrykk. Eit anna døme kan vera at ein går frå symbolsystemet til systemet for todimensjonale figurar ved å bruke ein formel til å lage ein graf for å uttrykkje eit matematisk objekt (Figur 2.3).

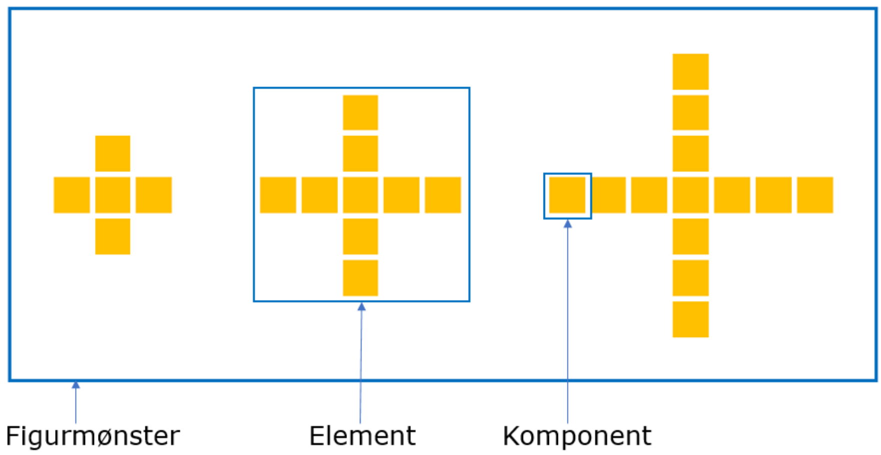


Figur 2.3: Omdanning frå formel (symbolsystemet) til graf (todimensjonale figurar).

Omdanning er meir kompleks enn behandling, og dette skyldast at byte mellom ulike representasjonar stiller krav til at ein kjenner att det matematiske objektet i fleire semiotiske system. Misoppfatningar i omdanninga mellom representasjonar kan føre til at elevar har utfordringar med læring og forståing. Dersom ein elev ikkje handterer omdanninga kan det hemme eleven si læring. Om elevane til dømes jobbar med figurmønster eller talfølgjer er det ikkje innlysande at ein illustrasjon som viser dei tre første figurane og eit funksjonsuttrykk kan representere det same matematiske objektet. Om ikkje elevane kjenner att det same matematiske objektet på tvers av representasjonssystema kan det føre til at elevane får problem med å beherske matematikken (Duval, 2006).

2.4 Figurmønster

Bishop (2000) definerer figurmønster som ei rekkje av geometriske figurar, der figuren står for eit tal og kvar nye figur kan avleiast frå dei førre ved ein veldefinert regel. Strømskag (2017) støtter dette, og ho seier at skulematematikken er eit figurmønster representert ved geometriske konfigurasjonar som står på linje, der utviklinga av figurane kan tenkjast å fortsetje i det uendelege. Ein konfigurasjon blir kalla element i mønsterfølgja, og delane i kvart element blir kalla komponentar (Strømskag, 2017). Eit slik mønster kan vi sjå i Figur 2.4.



Figur 2.4: Dei tre fyrste elementa i eit figurmønster

Figurmønsteroppgåver er ein aktivitet som utfordrar elevane på å vera kreative i bruken av representasjonar. Slike oppgåver gjev rike moglegheiter til å samarbeide, til å tenkje nytt, og til å vera utforskande (Torkildsen, 2020). Sjølv om figurmønsteroppgåver gjev elevane moglegheit til å bruke mange forskjellige representasjonar kan dei også by på utfordringar. Elevane kan ha vanskar med å sjå og uttrykkje samanhengar i mønsteret. Elevane kan streve med å sette ord på det dei ser, og dei kan også ha problem med å visualisere figurmønster, uttrykkje generalisering med naturleg språk, og å omdanne mønsteret i tabellar med verdiar for å sjå etter samanhengar (Warren & Cooper, 2008).

3 Metode

I dette kapitlet vil vi gjera greie for dei forskingsmetodiske vala vi har teke i samband med forskingsprosjektet vårt. Dei metodiske vala vi tek må vera formålstenlege og støtte opp kring forskingsspørsmåla, og med resultat som bør vera så valide som mogleg. Våre forskingsspørsmål er:

- *Kva for repertoar av representasjonar syner 8. og 10. klassingar i arbeid med figurmønsteroppgåver?*
- *Kor frekvent brukar elevane dei ulike representasjonane?*
- *Kor fleksible er 8. og 10. klassingane er i bruken av representasjonar og kva for kombinasjonar bruker dei?*

Forskingsspørsmåla tilseier sjølvsagte krav til prosjektet, og utvalet vi forskar på er ungdomskuleelevar i arbeid med figurmønsteroppgåver. Figurmønsteroppgåver vart valt som aktivitet fordi dei gjev rom for utforsking og kreativitet, samstundes som elevane kan bruke mange ulike representasjonar for å løyse oppgåvene.

Datamaterialet vi innhentar må gje innsikt i kva for representasjonar elevane nyttar og gje grunnlag for å analysere matematiske samtalar og diskusjonar som utspelar seg mellom elevane. Materialet består av observasjonsnotat, lydopptak og innsamla elevplakatar. Datamaterialet er koda deduktivt og systematisert hovudsakleg utifrå Duval (2006) sitt rammeverk for semiotiske representasjonar med omsyn på å syne representasjonsrepertoaret som elevane nyttar.

I tillegg til dei metodiske vala vi har teke, vil vi seie noko om konteksten og presentere oppgåvene som elevane fekk. Deretter fylgjer ei beskriving av analyseprosessen, før vi mot slutten kjem inn på etiske og metodologiske betraktningar, samt refleksjon kring kor truverdig studiet er. Vi har nytta rammeverket til Guba (1981) for å sjå på korleis ein studie kan vera truverdig og på kva forskaren sjølv kan gjere for å sikre høg grad av truverd.

3.1 Forskingsdesign

Formålet til studien avgjer kva for metode som vert brukt i forskinga (Cohen et al., 2018), og det er vanleg å skilje mellom kvalitativ og kvantitativ forskingsmetode. Kvantitativ forskingsmetode er mest hensiktsmessig der forskinga skal utførast på mange deltakarar, den gjev målbare data, og ein bør også ha kategorisert og tenkt ut moglege variablar på førehand. Innan kvantitativ forsking er føringane ein legg for kva for ein informasjon ein vil hente frå deltakarane rigid, medan det i kvalitative metodar er data som gjev meining, oppleving og ord som ikkje kan målast (Cohen et al., 2018). Kvalitativ forskingsmetode er meir open og induktiv, har færre deltakarar, og har som formål å beskrive (Ringdal, 2013). Dette passar med våre forskingsspørsmål, og forskinga vår er kvalitativ. Postholm (2005) ytrar at kvalitativ forsking er ei undersøking av menneskelege/sosiale prosessar i deira naturlege setting. Vi skal inn i klasserommet og sjå på korleis elevar i 8. og 10. klasse jobbar med figurmønsteroppgåver. Vidare skal vi studere representasjonsrepertoaret deira og frekvensen i representasjonsbruk, samt sjå om dei er fleksible i bruk av representasjonar og kva for kombinasjonar av representasjonar dei bruker. Vi vil ha ei subjektivistisk tilnærming der vi ser etter det personlege, subjektive og unike som skjer mellom forskingsdeltakarane i ein gjeven kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018). Kunnskapen vi vil sitte att med om representasjonsrepertoaret elevane har i arbeid med figurmønster vil bli farga av oss, og ved å ha eit subjektivistisk tilnærming vil vi ha fokus på å utvikle forståing på korleis ulike individ tolkar og pregar verda dei er i. Kvalitative metodar ivaretek dette (Cohen et al., 2018). Motsetninga til subjektivistisk er ei objektivistisk tilnærming som hovudsakleg vil vera kvantitativ og meir oppteken av å finne og definere relevante element og studere samanhengen mellom dei (Cohen et al., 2011).

Kvalitative metodar inneber stor grad av fleksibilitet, og i kvalitativ forsking er målet å studere meiningar, haldingar, handlingar, intensjonar og oppførsel i detalj (Cohen et al., 2018). Forskaren ser fenomenet innanfrå, innhentar fleire opplysingar frå eit mindre utval, og studerer nøye kvar enkelt førekomst. Nilssen (2012) og Postholm (2005) seier at forskaren sjølv er det viktigaste instrumentet i kvalitativ forsking, fordi det er forskaren som samlar inn og konstruerer data, og det er han som tolkar og analyserer data. Forskaren dreg med seg subjektive meiningar inn i forskinga si, og dette treng ikkje vera negativt så lengje forskaren er klar over si eiga rolle og grunngjev val. Dette gjeld val av tema, metode, utval av deltakarar og forandringar som blir gjort undervegs i forskinga (Nilssen, 2012).

3.2 Praktiske førebuingar

3.2.1 Val av skule og trinn

Vi gjennomførte datainnsamlinga i ei 8. klasse og ei 10. klasse på ein middels stor ungdomsskule. I val av skule hadde vi nokre kriterium, og det fyrste var at vi ikkje ville ha nokon kjennskap eller relasjonar til elevane. Vi tok dette valet fordi vi ikkje ynskte at forskinga skulle bli farga av inntrykk av skulen, læraren eller elevane, samt at vi ikkje ville vite noko om det faglege nivået til elevane på førehand. Det einaste faglege kriteriet vi stilte var at elevane skulle ha arbeidd med figurmønster tidlegare, slik at dei visste kva eit figurmønster var. Det tredje kriteriet var at leiing, lærarar og elevar måtte vera positive til å la oss innhente datamateriale frå deira klassar. Vi tok kontakt med skulen, og rektor sette oss vidare i kontakt med dei to matematikklærarane som i likskap med rektoren var hjelpsame og positive til forskingsprosjektet vårt. Vi oppretta og utvikla eit samarbeid med desse lærarane, og alle elevane i 8. og 10. klasse sa seg viljuge til å delta i forskingsprosjektet.

3.2.2 Pilotering

For å få eit så godt datamateriale som mogleg fann vi det naudsynt å gjennomføre ei pilotering for å sjå om oppgåvene var eigna for å svara på forskingsspørsmåla vår. Hadde oppgåvene rett vanskegrad, og hadde dei potensial i seg slik at elevane vil nytte seg av ulike representasjonar under oppgåveløysing? Vi var også opptekne av at design og utforming av oppgåver ivaretok forskingsspørsmåla på ein slik måte at elevane fekk synt fram både representasjonsrepertoar og eventuell representasjonsfleksibilitet (Siegler, 1994). Grønmo (2004) skriv at pretesting av datainnsamlingsmetodane vil verke som korrektiv til hovudundersøkinga. Å kunne avdekkje eventuelle feil og manglar i innsamling av datamateriale i forkant, samt finne ut om oppgåvene trefte i høve vanskegrad og arbeidsmengde, vil gje oss ein god indikasjon for forskingsprosjektet vidare.

I samråd med valt skule kjørte vi pilotundersøkinga i to timar i 9. klasse med 20 elevar til stades. Elevane visste på førehand kva dei skulle vera med på, og både elevar og føresette var informert om forskingsprosjektet og piloteringa der vi skulle koma å observere elevane i arbeid med figurmønsteroppgåver. Vi presenterte oppgåvene til elevane, og vi hadde bede læraren deira om å dele dei inn i grupper på tre og tre der samansetninga var gjort med tanke på å at elevane kunne samarbeide godt. Elevane var plassert gruppevis rundt eit bord, og på bordet låg det både telefon med Nettskjema-Diktafon-app og iPad som skulle nyttast til opptak. Elevane fekk også oppgåvene skriftleg, og konkretiseringsmateriell som tellebrikkar, pinnar, rutenett, fargeblyantar og ymse datautstyr var tilgjengeleg i klasserommet. På kvart bord låg det også ein plakat der elevane skulle syne og forklare kva for representasjonar dei nytta for å løyse oppgåvene. Utover dette inntok vi rolla som passive observatørar, eller ikkje-deltakande observasjon, som Cohen et al. (2011) skriv, eit bevisst val med tanke på at vi ikkje skulle påverke korleis elevane ville løyse oppgåvene.

Etter avslutta pilot diskuterte og reflekterte vi kring ytringar og arbeid som elevane hadde gjort. Refleksjonane gjekk på om elevane hadde forstått kva ein representasjon var, om dei var klar over ulikskapen mellom strategi og representasjon, og om innsamla materiale var tilfredsstillande i forhold til analysen vi skulle gjennomføre. Vi erfarte mellom anna at når elevane fekk alle tre oppgåvene samstundes så jobba nokre av gruppene parallelt med oppgåvene, noko som ikkje var ynskjeleg med tanke på representasjonsfleksibilitet og representasjonsbruk. Vi gjekk gjennom feltnotat, innsamla datamateriale og transkriberingar, og kom fram til at vi ville gjera nokre justeringar. Vi fann ut at fyrste timen skulle starte med ei idémyldring kring kva for representasjonar elevane kjente til og notere ned deira innspel på tavla. Konkretiseringsmateriellet som elevane kunne nytte måtte også synleggjerast betre, slik at konteksten elevane var i innbaud til at dei fekk synt si representasjonskompetanse. Vi som forskarar erfarte frå piloten at vi ville endre observatørrolla frå å vera ikkje-deltakande til å bli deltakande i klasserommet, eit trekk vi ville gjera med tanke på å sikre oss det datamaterialet vi trengde for å kunne svara på forskingsspørsmålet. Ved å vera meir aktive kunne vi bli med i kvar enkelt gruppe og leggje til rette for at deira matematiske diskusjonar og samtalar omhandla bruk av representasjonar. Vi ville òg få høve til å spørje korleis dei hadde tenkt og kva som var «lurt» med tanke på å auke deira matematiske kompetanse. Utdraget nedanfor syner korleis ein som aktiv observatør, representert ved L1, er med i dialogen mellom tre elevar i arbeid med Oppgåve 1.

29. L1: Kan nokon av dykk seie kva de har funne ut til nå?
30. Lars: Oss tek figurnummeret gongar med 6 + 1, på 1 blir det 1x 6 + 1 som blir 7.
31. L1: Kvifor gangar du med 6, og kvifor legg du til 1?
32. Kari: For da finn du kor mange sirklar det er i figuren. Og det er svaret da. Men oss skulle finne ein annan løysing, men eg fylgde ikkje med akkurat da….(småskratt)
33. L1: Kvar kjem 1-talet frå da?
34. Mia: Einaren?
35. Kari: Fordi vi mangla 1 på kvar slik ting, og dermed pluss 1
36. L1: Og kvar i figuren er pluss 1?
37. Lars og Mia: Det er i midten, det midtarste.
38. Kari: Nå ser eg ein anna måte og, oss kan berre slå saman midten med den fyrste ringen…

Ei siste endring før vi skulle gjennomføre sjølve forskinga var at vi berre ville presentere ei figurmønsteroppgåve i kvar økt, slik at elevane ville få betre ro og fokus på eigenarten i kvar av dei tre oppgåvene. Vi erfarte frå piloten at tre av gruppene ikkje rakk å gjera Oppgåve 3, og ved å presentere oppgåvene enkeltvis ville oppgåvene kunne bli løyst på ein meir fullstendige måte der fleire typar representasjonar blir brukt. Oppgåveformulering og vanskegrad verka som tenkt. Ved å nytte oss av Five practices (Kilpatrick et al., 2001) bygde vi opp progresjonen slik at det fall mest naturleg for elevane å vektleggje dei multifunksjonelle representasjonane i Oppgåve 1, multifunksjonelle og monofunksjonelle representasjonar i Oppgåve 2. Oppgåve 3 kunne mest effektivt løysast ved å nytte seg av dei monofunksjonelle representasjonane i Duval (2006) sitt representasjonssystem. Gruppestorleik, samansetning av elevar og lydopptak fungerte godt, og derfor valte vi ikkje å endre på noko av dette.

3.2.3 Val av deltakarar

Utvalet av elevar til undersøkinga var utelukka basert på friviljugheit. Sidan samlege elevar stilte seg disponible i både 8. og 10. klasse fann vi i samråd med lærarane ut at vi ville observere alle elevane i klassane. Det vart sendt ut samtykkeskjema til føresette, og alle samtykka i at deira elev kunne delta i forskinga. Treargruppene frå piloten fungerte, og dermed vart det fem grupper i 8. klasse og sju grupper i 10. klasse i vårt forskingsprosjekt. Vi ba lærarane sette saman elevar som kunne samarbeide, slik at elevane både torde og evna å uttrykkje seg munnleg for at vi skulle få innsyn i elevane sine framgangsmåtar og tankesett i løysing av figurmønsteroppgåvene. Kriteria vart ikkje basert på deira matematiske nivå, men på at gruppene skulle fungere greitt, noko som ville sikre eit datamateriale vi kunne nytte i våre analysar. Cohen et al. (2011) kallar dette for eit formålstenleg utval fordi vi definerer gruppa vi vil observere utifrå bestemte kriterie slik at ho innfrir våre behov.

3.3 Datamateriale

Datamaterialet vårt består av lydopptak, som vart transkribert fortløpande, innsamla materiale frå elevgruppene, og observasjon i klasserommet. Elevane hadde gruppevis laga plakatar der dei synte kva for representasjonar dei hadde nytta i dei ulike oppgåvene. Ved å ha tilgang på plakatane samstundes som vi tok bilde av representasjonar dei synte ved bruk av fysisk konkretiseringsmateriell hadde vi eit breitt materiale som kunne hjelpe oss å forstå kva elevane hadde tenkt. I tillegg til det visuelle materialet hadde vi også lydopptak, observasjonar og notatar tekne undervegs gjennom arbeidet med figurmønsteroppgåvene. I etterkant av kvar økt sette vi av tid til å notere ned kva vi hadde erfart og observert i dialogen innad i elevgruppene. Vi registrerte også andre relevante moment som kunne ha innverknad på forskinga.

I forkant hadde vi avtala med læraren at vi kom til å hjelpe elevane dersom det var noko uklart i forhold til oppdrag og oppgåvetekst. Vi ville ikkje gje dei hjelp, berre støtte, dersom oppgåveløysing og framdrift stoppa opp. Gruppene fekk presentert ei oppgåve i gongen, og dei fleste gruppene brukte mellom 30 – 45 minutt på å løyse kvar enkelt oppgåve. Lydopptaket vart gjort ved å nytte Nettskjema–Diktafon, ein applikasjon som er spesialtilpassa for forsking– og undervisningsbruk (Universitetet i Oslo, 2022). På kvart gruppebord vart ein telefon med applikasjonen plassert, og all aktivitet frå oppgåva vart delt ut til dei såg seg ferdige med oppgåva vart teke opp. I tillegg låg det ein iPad på kvart bord som og tok opp lyd, dette for å ha ein back up i tilfelle Nettskjema-Diktafon svikta. Undervisningssituasjonen verka ikkje til å påverke elevane i særleg grad, noko læraren deira poengterte i etterkant av øktene. Den slutninga vart også støtta av det vi erfarte både utifrå transkriberinga i etterkant og observasjonar gjort i klasserommet. Dei skriftlege besvarelsane var i plakatform sidan elevane hadde i oppdrag å syne fram så mange ulike representasjonar som mogleg knytt til figurmønsteroppgåvene.

3.3.1 Observasjon

For å få innsikt i kva for representasjonar elevane brukte, samt kor frekvente og fleksible elevane var i bruken av desse i høvesvis 8. og 10. klasse, fann vi ut at vi ville observere elevar i arbeid med figurmønsteroppgåver. Observasjon som forskingsmetode gjev forskaren direkte tilgang til forskingsdeltakarane og fyrstehandsinformasjon som kan gje eit betre og meir autentisk datamateriale (Cohen et al., 2011). I tillegg ville observasjon vera eit nyttig supplement til den verbale kommunikasjonen i transkripsjonen av lydopptaka.

Postholm (2005) seier at den kvalitative forskaren er oppteken av å observere aktivitetar i sin naturlege gang, men at ho samtidig har eit fokus for observasjon basert på teori. Vi var mest opptekne av kva for representasjonar elevane nytta, om dei hadde eit visst repertoar av representasjonar, og om dei brukte ulike representasjonar i arbeidet med figurmønster. Cohen et al. (2011) kallar ein slik observasjon for ein semistrukturert observasjon sidan tematikken var kjend, samstundes som observasjonen ikkje var detaljplanlagt og systematisert i grupper eller kategoriar i forkant. Observasjon kan delast inn i ulike kategoriar utifrå kor strukturert observasjonen skal vera; frå strukturert til semistrukturert, og i andre enden ustrukturert observasjon.

Etter piloten korrigerte vi forskarrolla vår frå å vera passive observatørar til å bli deltakande observatørar. Hovudgrunnen til endringa var at vi ville sikre oss eit godt datamateriale, og ved å bli ein del av samtala kunne vi få ytterlegare informasjon og forklaringar ved behov. Elevane var plasserte i treargrupper rundt eit bord, og på bordet låg ein telefon med Diktafon-appen og ein iPad for å sikre lydopptaket. Cohen et al. (2011) skriv at lyd- og videoopptak kan overkome det ufullstendige i observatørane sitt syn på ei hending og tendensen mot å sjå berre hendingar som skjer ofte, noko som er med på å auka validiteten. Vi som aktive observatørar plasserte oss i enden av elevborda, slik at vi ikkje fanga for mykje av merksemda til elevane samstundes som vi kunne bli med i samtala ved høve. Vi la fram figurmønsteroppgåvene for elevane munnleg i tillegg til at dei fekk ei og ei oppgåve på ark. Elevane fekk jobbe utan at vi blanda oss inn i starten av kvar oppgåve, men utover i timen stilte vi spørsmål for å utfordre og oppklare noko av det dei hadde gjort og tenkt i forhold til val av representasjonar og kvifor dei nytta spesifikke representasjonar. Vi prøvde å skape kjente gruppearbeidssituasjonar for elevane, og ved å vera deltakande observatør kunne vi balansere mellom om å vera pådrivarar og nyfikne i forhold til utfordringane som skulle løysast. Elevane var i forkant informert om kva for rolle vi som forskarar skulle ha, og attendemeldingar frå læraren var at elevane var seg sjølve og verka lite påverka av forskingssituasjonen.

3.3.2 Lydopptak

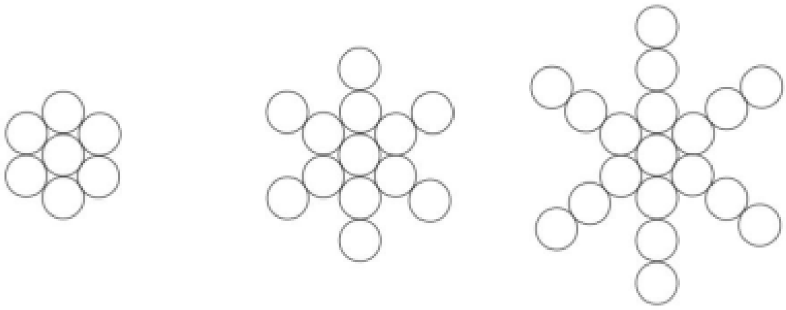
Lydopptak vart brukt som eit reiskap for å samle inn data, og dette gjorde at vi ikkje trengte å notere ned så mykje undervegs, men heller konsentrere oss betre om det som skjedde i interaksjonen mellom elevane. Tilgjengelege opptak er gunstig med tanke på analysen i etterkant, den blir mindre selektiv, og datamaterialet bør vera mest mogleg objektivt (Postholm, 2005). Lydopptak fann vi også føremålstenleg med tanke på den tematiske analysen som kjem i etterkant. Vi vurderte også å ta videoopptak, men fann det meir komplekst å handtere med omsyn både på det praktiske og det etiske med omsyn til personvern og bilethandtering. Norsk senter for forskningsdata, NSD, opererer med strengare krav til videoopptak enn lydopptak, og vi konkluderte med at lydopptak var tilstrekkeleg for vårt studie. Lydopptaket gjorde at vi som deltakande observatørar kunne konsentrere oss om elevane og deira representasjonskompetanse fordi vi visste at alt dei sa vart teke opp (Tjora, 2012). Nokre elevar ville oppleve det som ukomfortabelt å bli filma, noko som i neste steg ville kunne påverka elevane (Tjora, 2012). Vi fekk godkjenning av NSD for å ta lydopptak, og elevar og føresette fekk informasjon om kva lydopptaka skulle nyttast til, korleis dei skulle oppbevarast, og at dei ville bli sletta når studien er ferdig.

3.4 Oppgåver

Oppgåvene vi brukte i datainnsamlinga vår var dei tre figurmønsteroppgåvene som er presentert under i Figur 3.1. Oppgåvene har lik oppbygging med ein bevisst progresjon der den fyrste oppgåva var tenkt som ei «introduksjonsoppgåve» til representasjonsbruk der det er mest naturleg å bruke dei multifunksjonelle semiotiske representasjonane (Duval, 2006). Oppgåve 1 er designa for å nytte konkretar uavhengig av klassetrinn, og vi valte å bruke denne oppgåva for at elevane skulle få fram spekteret og variasjonar i bruk av representasjonar. Dersom vi hadde sett Oppgåve 2 eller 3 fyrst ville elevane truleg gå på dei monofunksjonelle representasjonane (Duval, 2006), og dermed redusere moglegheitene for at vi fekk fram både repertoar og variasjon i bruken av representasjonar hjå elevane. Vi kunne risikere å få eit meir snevert datamateriale å analysere, og dei monofunksjonelle representasjonane kunne dominert i større grad, særleg hjå 10. klassingane.

OPPGÅVE 1

Figuren nedanfor syner dei tre fyrste figurane i eit mønster.

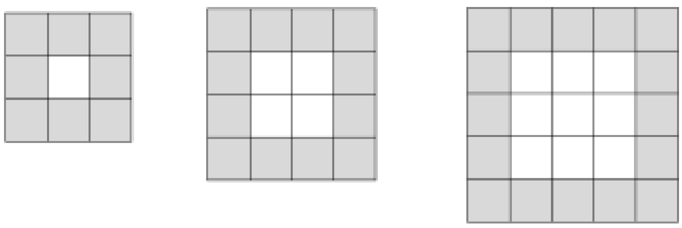


Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

a) Kor mange brikker treng vi til figur nr. 4 og 5?
b) Kan du forklare eller vise korleis du kan finne antalet for neste figur når du kjenner den føre?
c) Kan du forklare eller vise kor mange brikker som trengs til kva som helst figur (til dømes nr. 10 og nr. 35)?
d) Kan du finne andre måtar som syner utviklinga i mønsteret over? Vis korleis du har tenkt.

Oppgåve 2

Figuren nedanfor syner dei tre fyrste figurane i eit mønster.

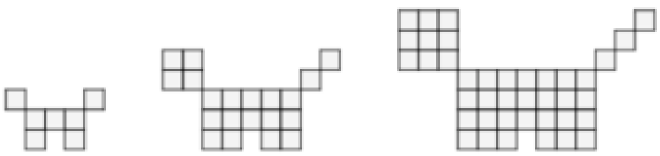


Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

a) Kor mange grå brikker treng vi til figur nr. 4 og 5?
b) Kan du forklare eller vise korleis du kan finne antalet for neste figur når du kjenner den føre?
c) Kan du forklare eller vise kor mange brikker som trengs til kva som helst figur (til dømes nr. 10 og nr. 35)?
d) Kan du finne andre måtar som syner utviklinga i mønsteret over? Vis korleis du har tenkt.

OPPGÅVE 3

Figuren nedanfor syner dei tre fyrste figurane i eit mønster.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Kor mange brikker treng vi til figur nr. 4 og 5?
b) Kan du forklare korleis du kan finne antalet for neste figur når du kjenner den føre?
c) Kan du vise eller forklare kor mange brikker som trengs til kva som helst figur (til dømes nr. 10 og nr. 35)?
d) Kan du finne andre måtar som syner utviklinga i mønsteret over? Vis korleis du har tenkt.

Figur 3.1: Oppgåvene elevane skulle løyse.

Felles for oppgåvene er at dei har kjent oppbygging for elevane der dei i deloppgåve (a) blir spurt etter eit konkret svar der dei ikkje treng å forklare eller vise samanhengar. Vanskegraden aukar utover i oppgåvene ved at dei både blir utfordra til å sjå samanhengar og til å gjera greie for utvikling av figurmønsteret. Designet innbyr til at elevane bør bruke ulike representasjonar utover i oppgåvene, eit bevisst val med tanke på å få datamateriale som kan gje svar på forskingsspørsmåla våre. I Oppgåve 2 har vi valt å ta med Rammeoppgaven, fordi ho frå tidlegare forsking og utprøving er kvalitetssikra og utprøvd av mellom anna NRICH og Matematikksenteret. Rammeoppgaven fell inn i kategoriane rik/open oppgåve, og blir også definert som ei LIST-oppgåve. LIST står for « Låg Inngangsterskel, Stor Takhøgde», og det tilseier at oppgåva skal vera enkel å kome i gang med, og alle skal kunne jobbe med same oppgåva samstundes som kvar enkelt elev skal oppleve meistring på sitt nivå. Oppgåva gjev også moglegheiter for å jobbe med utfordrande matematikk, og har rom for bruk av forskjellige løysningsstrategiar (Wæge & Nosrati, 2018). Dei to andre oppgåvene vi har teke med har same struktur og oppgåveordlyd, og som nemnt før er det ein bevisst progresjon på desse tre med tanke på representasjonsbruk og representasjonsfleksibilitet.

Figurmønsteroppgåvene er tenkt til å vera brubyggjar mellom ulike emne i matematikken. Med det meiner vi at oppgåvene ivaretek fleire av kjerneelementa i LK20, mellom anna *Representasjon og kommunikasjon, Abstraksjon og generalisering,* samt *Utforsking* og *problemløysing* (Utdanningsdirektoratet, 2022). Oppgåvene er også eigna som brubyggjar mellom ymse representasjonar, til dømes frå multifunksjonelle til monofunksjonelle semiotiske representasjonar, og for å knyte saman matematiske representasjonar og det dagleg språket. Duval (2006) seier at det er viktig at elevane må veksle mellom representasjonar og få erfaringar kring dette for å utvikle matematisk forståing. Oppgåvene er laga slik at dei kan løysast på fleire ulike måtar, og utifrå piloten såg vi at vanskegraden kunne passe.

3.5 Analysemetode

Cohen et al. (2011) seier at analyse av kvalitative data inneber å forklare, organisere og gjere greie for datamaterialet. Vårt materiale består av observasjonar og lydopptak, notat tekne undervegs og i etterkant av undervisninga, bilete av forskjellige representasjonar og innsamla elevplakatar. Etter kvar undervisningsøkt skreiv vi også ned tankar, meiningar og refleksjonar kring hendingar i undervisningsøktene, slik at vi kunne justere fortløpande og skape så optimale undervisningsøkter som mogleg. Var vi bevisste og dedikerte nok i rolla vår som aktive observatørar, og var det noko som mangla for å få elevane til å jobbe utforskande? Cohen et al. (2011) hevdar at ein bør skrive ned feltnotat så raskt som råd etter innsamling. Vi transkriberte etter kvar undervisningsøkt vi hadde vore inne og observert, slik at refleksjonar og informasjon vart så korrekt som mogleg. Dette er også formålstenleg med tanke på at erfaringane etter ein observasjon vart med å heva kvaliteten på neste. Dette førte til at fokuset vart skjerpa på det som vi ikkje hadde vore merksame nok på sist gong.

Fyrste ledd i prosessen med å analysere datamaterialet var å anonymisere og transkribere lydopptaka. Med dette som utgangspunkt, i tillegg til innsamla elevplakatar og notat, kategoriserte vi representasjonane og argumentasjonane som elevane hadde nytta med bakgrunn i Duval (2006) sitt rammeverk for semiotiske representasjonar.

3.5.1 Transkripsjon

Ved transkripsjon vert noko transformert frå ei form til ein annan, og det er utfordrande å få attgjevinga identisk med utgangspunktet. Vi prøvde å transkribere elevsamtalane så godt som mogleg, men det skjer ei form for abstrasjon av samtala sjølv om vi transkriberte fortløpande etter kvar undervisningsøkt. Ideelt sett bør transkripsjonen bli gjort så raskt som mogleg etter at opptaket er gjort, og helst før nye opptak (Nilssen, 2012), noko vi gjorde. Vi transkriberte kvar våre grupper, utveksla notat og kvalitetssikra hjå kvarandre. I transkripsjonen gav vi elevane fiktive namn slik at dei i etterkant ikkje kan bli identifisert, og vi prøvde heile vegen å fokusere på forskingsspørsmåla. Vi transkriberte alt som vart kommunisert i elevgruppene under løysing av figurmønsteroppgåvene. For å få ein godt gjennomarbeidd analyse samarbeida og koordinerte vi i byrjinga, slik at datamateriale vart behandla så likt som råd. Vi markerte pausar, utsegn og ytringar, slik som mmm, æhm, tja, osv, sidan dette kunne vera ein indikasjon på at elevane var einige, ueinige eller usikre. Målet var å få framstilt den reelle situasjonen på ein best mogleg måte.

3.5.2 Tematisk analyse

Vi valte tematisk analyse som analysemetode, og den legg vekt på å identifisere, analysere og tolke meiningsmønstre eller tema innanfor kvalitative data. I fylgje Braun og Clarke (2012) er tematisk analyse ein tilgjengeleg og fleksibel metode som kan brukast saman med ulike teoretiske tilnærmingar slik som Duval (2006) sitt rammeverk for semiotiske representasjonar. Tematisk analyse er fleksibel fordi den tillèt forskaren å fokusere på data på mange ulike måtar, til dømes ved å beskrive heile datasett, eller ved å velje ut særskilde delar som ein beskriv meir detaljert og nyansert (Braun & Clarke, 2012).

Braun og Clarke (2012) viser til at det er seks fasar innan tematisk analyse, og i fyrste fase fordjupar ein seg i datamaterialet. Samtalar mellom elevane vart transkribert. Vi skreiv ut alle transkripsjonane og las gjennom dei fleire gongar for å både bli kjent med innhaldet og få oversikt over materialet. Vi strukturerte materialet etter kva elevane hadde gjort og sagt, og datamaterialet vart sortert og eliminert utifrå kva som var hensiktsmessige informasjon utifrå forskingsspørsmåla. Eit døme på eliminasjon var at tre av gruppene i 8. klasse og ei i 10. klasse diskuterte strategiar i løysing av oppgåvene, noko som vi ikkje koda med tanke på at det ikkje fell inn under forskingsspørsmåla. For å få enda betre kjennskap til datamaterialet importerte vi transkripsjonane inn i NVivo (NTNU, 2022) for vidare analyse. NVivo er eit dataprogram som er laga for å analysere kvalitative data. Ved å nytte verktya inne i NVivo starta vi å kode data med å stille oss spørsmålet: «Kva er det elevane gjer for å kunne svara på oppgåvene?», og det hjalp oss over til fase to. I denne fasen såg vi gjennom datamaterialet for å leite etter felles kjenneteikn for så å generere kodar. Dette kallast koding av datamaterialet (Nilssen, 2012), og er kjerneaktiviteten i den kvalitative forskingsprosessen. I fase tre i den tematiske analysen vart kodane sett inn i ulike tema, og på dette steget hadde vi seks ulike tema i vår analyse. I den deduktive prosessen såg vi på kva for kodar som fell inn under tema vi hadde frå det teoretiske rammeverket til Duval (2006). Desse skreiv vi også ned på Post-it lappar som hjelp til oss sjølv for å få organisert og eventuelt slå saman nærliggjande tema. «*Denne prosessen som består i å samle grupper av begreper som ser ut til å dekke de samme fenomener, kalles kategorisering*» (Postholm, 2005, s.88). Eit døme på tema som fell utanfor valt rammeverk var munnlege forklaringar og konkretar, men i denne fasen tok vi dei med fordi det fell naturleg med tanke på å syne representasjonsfleksibilitet. I fase fire gjennomførte vi ein kvalitetskontroll for å sikre at alle tema/kategoriane var viktige for forskinga vår. Dette resulterte i ein reduksjon til fem kategoriar, munnlege forklaring fall bort som eigen kategori. I fase fem namngav vi tema vi sat att med, og desse kjem vi nærare inn på i resultatkapittelet, som da er fase seks i tematisk analyse.

Vår innhaldsanalyse hadde deduktiv tilnærming (Cohen et al., 2018). Deduktiv fordi vi har kategorisert etter Duval sitt rammeverk, og dei fem ulike kategoriane vi enda opp med fell saman med klassifiseringane Duval (2006) har i sitt representasjonssystem. Duval har ikkje med konkretar som eige system, men utifrå kor mykje elevane brukte dei har vi kategorisert konkretar som eiget semiotisk system, jamfør Kilpatrick et al. (2001). Vi har kategorisert frå Duval sitt teoretiske rammeverk, frå teori til empiri. Det motsette hadde vore ei induktiv tilnærming der ein går frå empiri til teori (Cohen et al., 2018).

3.6 Forskinga si truverd

Fleire forskarar tek for seg truverd i kvalitativ analyse, og i vårt forskingsprosjekt har vi valt å bruke rammeverket til Guba (1981). Rammeverket tek for seg korleis ein studie kan vera truverdig, og kva vi som forskarar kan gjera for at studien skal bli så truverdig som mogleg. Vi valte dette rammeverket fordi Guba nyttar omgrep som er retta mot ei naturalistisk tilnærming, noko Cohen et al. (2018) også støttar i høve kvalitative undersøkingar. Eit anna argument for å velje Guba som hovudrammeverk er at det tidlegare har vorte brukt av mange forskarar, ein indikasjon på at det er høgt akta innanfor kor truverdig ein studie er.

I alle forskingsrelaterte oppgåver skal det ein forskar på ha høg reliabilitet og høg validitet. Bakgrunnen for dette er å sikre at konklusjonane i studien er til å stole på, og at datainnsamling og analyse av data er rett gjennomført og har god kvalitet. Tjora (2012) seier at reliabilitet og validitet som kriterie opprinneleg vart laga for den kvantitative forskingsmetoden. Vårt studie er derimot kvalitativt, og kvalitetskriteria for kvalitative studie skil seg frå dei kvantitative fordi dei ikkje har målsetting om å gjennomføre statistiske generaliseringar. Andre parameterar må nyttast for å kvalitetssikre den kvalitative forskinga, og Guba (1981) erstatta reliabilitet og validitet som omgrep med «trustworthiness og authenticity», der «trustworthiness» vart delt inn i fire; truverd (*credibility*), overførbarheit (*transferability*), pålitlegheit (*dependability*) og berekraftheit (*confirmability*).

3.6.1 Truverd

Truverd er knytt opp til at forskinga vert utført på ein tillitsvekkjande måte, slik at ein ikkje er i tvil om at funna som er gjort er sanne og at resultata er pålitelege og meiningsfylte. Å etablere truverd inneber at studien blir gjennomført i forhold til god praksis. Vi skal vera opne på korleis forskinga er gjennomført, og vera sensitive på faktorar som kan påverke sjølve forskinga. Ved å bruke fleire innsamlingsmetodar, slik som lydopptak, observasjon og innsamling av elevplakatar kan vi beskrive elevane sin framgangsmåte og argumentasjon på ein grundig og utfyllande måte. Det er også viktig at vi bruker god tid på analysen av dei funna vi har gjort. Thagaard (1998) hevdar at observasjon supplert med lydopptak er med å styrke dette.

For å sikre truverda fann vi det formålstenleg å gjennomføre ei pilotering. Cohen et al. (2018) seier det er nyttig å gjennomføre ein pilot i studie der ein skal observere for å forsikre seg om at observasjonskategoriane er passande, tydlege og effektive for å operasjonalisere formålet med forskinga. Etter piloten fann vi ut at vi ville endre observasjonsmetode frå ikkje-deltakande til deltakande. Vi ville også få elevane med på ei idémyldring kring ulike representasjonar, med det som mål å få eit betre materiale å jobbe med tanke på å finne svar på forskingsspørsmåla våre. Vi var bevisste på at haldningar og kjennskap til elevane ikkje skulle påverke verken datainnsamlinga eller analysen av data, og det er viktig at forskaren er så nøytral som mogleg (Guba, 1981). I kvalitativ forsking er vår rolle som forskar så viktig, og derfor var vi i klassa to gongar før sjølve observasjonen for å skape tillit og relasjonar til elevane (Nilssen, 2012), eit bevisst val med tanke på å styrke truverda i studien.

3.6.2 Overførbarheit

Overførbarheit i kvalitativ forsking er relatert til ekstern validitet i kvantitativ forsking, og tek for seg kor generaliserbare og anvendelege funna er. Kan funn og tolkingar som er komne utifrå ein studie gjelde i andre samanhengar, er funna gjeldande for den verkelege verda? Vår kvalitative studie har ein kontekst som er unik i forhold til å sjå på representasjonsbruken hjå elevar i arbeid med figurmønster. Ved at vi som forskarar gjev ei grundig skildring og nok informasjon av konteksten vil lesarane sjølve trekkje eigne konklusjonar utifrå opplysningar som er gjevne, og dei vil sjå om det er mogleg for dei å overføre dette til andre kontekstar dei er kjend med (Guba, 1981).

3.6.3 Pålitelegheit

Pålitelegheit i kvalitativ forsking høyrer til under reliabilitet i kvantitativ forsking (Guba, 1981). Dette dreiar seg om det er mogleg å slå fast om funna i ein studie ville bli dei same dersom studien vart repetert i same kontekst der ulike variablar er så nær identiske som «originalen». Kriteriet handlar om kor påliteleg empirien er, og om uavhengige målingar og observasjonar av eit likt og same fenomen vil gje like resultat (Postholm, 2010). Cohen et al. (2018) endar med å stille spørsmålet; kan ein tru på funna? For å bevisstgjera truverdigheita i den kvalitative forskinga trekkjer dei fram fylgjande fire ledd. Desse er designstadiet, datainnsamlingsstadiet, dataanalysestadiet og rapporteringsstadiet. I dette prosjektet har vi vore gjennom alle fasane i innsamling av data. Design med kva og korleis har vi vore innom tidlegare, jamfør forskingsspørsmål og design av oppgåva til elevane. I datainnsamlingsstadiet var vi to som observerte elevane og visste kva vi spesielt skulle sjå etter under elevane sitt arbeid med oppgåvene. På denne måten kunne vi samanlikne og diskutere observasjonane, noko som er ein fordel både med tanke både på kvalitetssikring og at tolkinga ikkje blir subjektiv. Vi prøvde og å skape eit trygt miljø for elevane ved at dei var i eit kjent miljø. Vi har ettersteva objektivitet gjennom analysen, og vi har vore systematiske i klassifisering av ulike representasjonar. Det har vore viktig for oss å vise døme på elevsvar og referere elevsamtalar for å gje innsyn og vera opne for korleis vi har analysert og tolka elevsvar.

3.6.4 Berekraftheit

Guba (1981) knyt omgrepet berekraftheit i kvalitativ forsking til objektivitet i kvantitativ forsking. Forskaren bør halde eit så objektivt syn som mogleg gjennom datainnsamlinga og analysen, slik at eigne subjektive meiningar ikkje bidreg til å påverke funna. Ved å vera to personar som observerte, analyserte og transkriberte ville vi unngå særleg grad av subjektivitet. Ein annan indikasjon på berekraftheit er at funna utelukkande skal kome frå datainnsamlingane og ikkje frå forskaren sine fortolkingar og/eller meiningar (Guba, 1981), noko direkte og refererte sitat frå lydopptaka viser. Bruk av lydopptakar med tilhøyrande transkribering av opptaka skal elles gje så riktig informasjon som mogleg om kva respondentane har sagt. Vi fekk høve til å stille naudsynte og bekreftande spørsmål til elevane om vi hadde forstått riktig ved å endre observatørrolla frå passiv til å bli aktiv deltakande. Dette var eit val både med tanke på å sikre oss tilstrekkeleg datamateriale og for å kvalitetssikre berekrafta til studien (Tjora, 2012).

3.7 Etiske betraktningar

Forskinga baserer seg på datamateriale frå plakatar, lydopptak og observasjonar av elevar, og i alle studie som inneber direkte kontakt med dei personane vi studerer er det utarbeidd særskilde etiske retningslinjer. Postholm (2005) seier at det er det viktig at forskaren fylgjer dei etiske retningslinjene i heile forskingsprosessen. Forskaren må ha tenkt gjennom etiske spørsmål samt veta korleis ein på ein best mogleg måte skal ta vare på deltakarane før, under og i etterkant av forskinga. Deltakarane skal veta kva forskinga går ut på, og dei skal ha kjennskap til kva som er forventa at dei eventuelt skal bidra med. NESH, Den nasjonale forskingsetiske komité for samfunnsvitenskap og humanoria, har som oppgåve å sørge for at det til ein kvar tid er forskingsetiske retningslinjer som gode verkty for å fremje god og ansvarleg forsking (NESH, 2016). Vi må sjølv ta ansvar for å sikre at forskinga vi gjennomfører er god og ansvarleg, og retningslinjene som NESH har sett er forpliktande både for individ og institusjonar.

Vi meldte tidleg inn forskingsstudiet til Norsk senter for forskningsdata, NSD, noko som er lovpålagt dersom ein skal behandle personvernopplysningar. I tilknyting til innmeldinga utarbeidde vi eit informasjonsskriv og samtykkeskjema som NSD måtte godkjenne, sjå vedlegg 1. Elevane i studiet var mellom 13-15 år, og derfor måtte foreldra samtykke til at elevane kunne delta i tillegg til eleven sjølv. Vi informerte om forskingsstudiet i både klassane og på foreldremøte, slik at foreldra hadde høve til å spørje dersom noko var uklart. Vi informerte om kva som var formålet til studiet, kva det innebar å vera deltakar i studien, friviljug deltaking, og korleis personopplysingar og datamateriale skulle handterast. Vi fylgde Cohen et al. (2018) sitt utsegn som seier at som forskar er det viktig å gje elevane informasjon om studiet og gje dei ei tydleg moglegheit til å trekkje seg utan at det vert stilt spørsmål om kvifor, og å innhente samtykke frå forskingsobjekta og føresette. Vi la ekstra vekt på anonymiteten i studiet, at det var friviljug å delta, og at elevane når som helst kunne trekkje seg frå forskinga dersom dei ynskte det. Vi anonymiserte elevane ved å gje dei fiktive namn, og vi ga ikkje opp namn på skule, berre at elevane går i 8. og 10. klasse på ein middels stor ungdomsskule. Observasjonar og notat vart elles gjort i tråd med Norsk senter for forskningsdata sine retningslinjer (NSD, 2021).

4 Resultat

Utgangspunktet vårt var finne ut *kva for repertoar av representasjonar 8. og 10. klassingar synte i arbeid med figurmønsteroppgåver og kor ofte elevane brukte dei ulike representasjonane*. Vi ville også sjå på *kor fleksible 8. og 10. klassingar var i bruken av representasjonar* og *kva for kombinasjonar av representasjonar elevane brukte.* For å finne svar på desse spørsmåla samla vi inn datamateriale som består av lydopptak og transkripsjonar, observasjonsnotat, bilete og innsamla elevarbeid. Datamaterialet var grunnlaget for vår tematiske analyse, der vi har tematisert og kategorisert med utgangspunkt i Duval (2006) sitt representasjonssystem.

Funna våre i denne studien viser at både 8. og 10. klassingane har eit breitt repertoar av representasjonar. Elevane kjenner til og kan nytte ulike representasjonar, samt at dei kan kombinere ulike representasjonar og sjå samanhengen mellom dei. I begge klassane brukte elevane representasjonar frå alle dei semiotiske systema i Duval (2006) sitt representasjonssystem. Dei brukte *naturleg språk, illustrasjonar, symbolsystem* og *todimensjonale figurar*. Begge klassane nytta også *konkretar,* som Kilpatrick et al. (2001) nemner som eiget representasjonssystem.

Sjølv om begge klassane kjende til representasjonar frå dei fem semiotiske systema var det stor forskjell på bruken av representasjonar i klassene. I 8. klasse brukte dei aller fleste gruppene brikker (*konkretar)* og skriftlege forklaringar (*naturleg språk)* fyrst når dei jobba med oppgåvene. Tre av fem grupper brukte formlar og uttrykk innanfor *symbolsystemet*, medan berre ei gruppe brukte tabell (*todimensjonale figurar*). I 10. klasse derimot valte dei fleste gruppene å fyrst bruke *symbolsystemet* og *naturleg språk*. Berre tre av sju grupper valte å bruke konkretar i den fyrste oppgåva og ingen av gruppene brukte konkretar i dei andre oppgåvene. I arbeidet med oppgåvene skulle elevane jobbe i grupper og derfor var munnlege forklaringar, som er ein del av det semiotiske systemet *naturleg språk*, ein representasjon begge klassane brukte under arbeidet med dei tre oppgåvene.

Vi har valt å dele opp funna våre i tre hovudkategoriar som vi vil greie ut om i kvart sitt delkapittel. I det fyrste delkapittelet presenterer vi repertoaret av representasjonar elevane synte fram under arbeidet. I det andre delkapittelet ser vi på kor frekvent elevane brukte dei ulike representasjonane og i det tredje delkapittelet ser vi på kor fleksible elevane var i bruken av representasjonar og kva for kombinasjonar av representasjonar dei brukte. I kvart av desse delkapitla ser vi fyrst på funna i 8. klasse og deretter funna i 10. klasse. Til slutt kjem eit delkapittel om nokre av utfordringane vi støtte på når elevane arbeidde med oppgåvene.

4.1 Repertoar

4.1.1 Repertoar i 8. klasse

I 8. klasse deltok fem grupper à tre elevar i forskingsprosjektet. I fyrste undervisningsøkta fekk elevane moglegheit til å nemne alle representasjonane dei kjende til. Vi skreiv opp desse representasjonane på tavla. Elevane nemnde representasjonane Tal, Forklare munnleg, Teikning, Brikker/Klossar, Utrekning og Tabell. Dette resultatet viser at elevane i 8. klasse, samla sett, kjenner til eit breitt utval av representasjonar. Om vi sett desse representasjonane inn i Duval (2006) sitt representasjonssystem, ser vi at elevane er innom alle dei fire semiotiske systema. Vi finn Forklare munnleg i systemet *naturleg språk,* Teikning i *illustrasjonar,* Tal og Utrekning i *symbolsystemet* og Tabell i systemet *todimensjonale figurar*. I tillegg til desse representasjonane nemnde elevane Brikker/klossar. Vi har derfor valt å ta med det semiotiske systemet *konkretar* i Tabell 4.1.

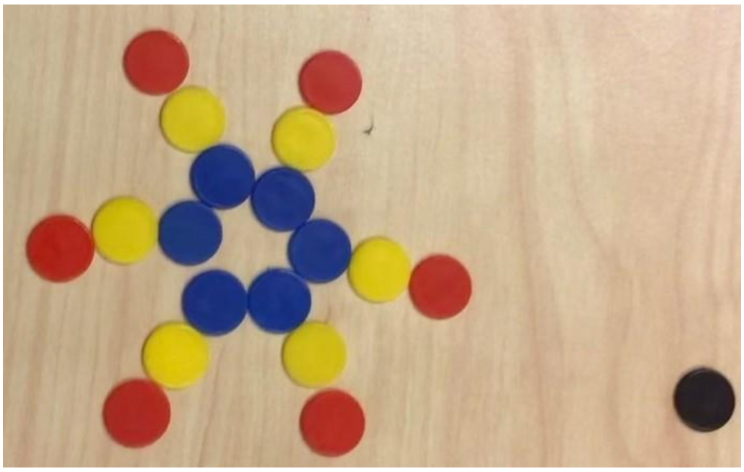
Multifunksjonelle representasjonar Prosessen kan ikkje bli laga til ei algoritme.	**Naturleg språk:** • Forklare munnleg	**Illustrasjonar:** • Teikning	**Konkretar:** • Brikker/klossar
Monofunksjonelle representasjonar Dei fleste prosessane er algoritmar.	**Symbolsystem:** • Tal • Utrekning	**Todimensjonale figurar:** • Tabell	

Tabell 4.1: Representasjonane som 8. klassingane nemnde.

Analysen synte likevel at ikkje alle gruppene i 8. klasse brukte representasjonar frå alle systema i arbeidet sitt. Alle gruppene brukte munnlege og skriftlege forklaringar (*naturleg språk*) og *konkretar*. Nedanfor kan vi sjå eit utdrag frå ein dialog mellom tre elevar, der dei jobbar med Oppgåve 1.

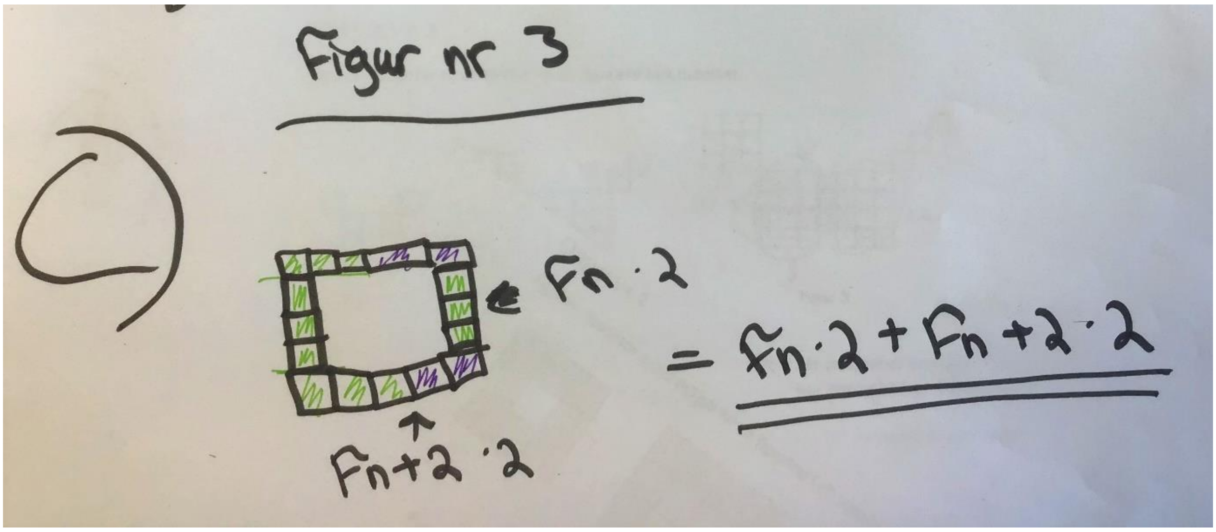
4. Are: to, tre, fire, fem, seks… Det er sju på den fyrste.
5. Beate: Det er ein i midten og seks rundt.
6. Calle: Skal vi plusse med seks for kvar nye figur?
7. Beate: Blir det?
8. Calle: Ja, det blir det.
9. Beate: Da blir det den gange den pluss ein, osv.
10. Beate: Da blir det tretten der?
11. Calle: Ja
12. Are: Tretten pluss seks. Kva blir det? Nitten?
13. Beate: Ja, det blir det.
14. Are: Nitten pluss seks. Kva er det?
15. Beate: Eg har funne ut måten….
16. (litt småsurring)
17. Calle: Eg veit kva det blir! Tre gonger seks pluss ein.
18. Are: Hæ?
19. Calle: Figurnummeret gonger seks pluss ein, så finn du kva nummeret er. Da har du det!
20. Beate: Det blir tjuefem, trettiein osv.
21. Are: Men plussar du ikkje berre med seks for kvar gong da?
22. Calle: Ja, men viss du skal finne ein lettare måte. Kva som helst slags tal.
23. Beate: Da blir det fire gonger seks pluss ein, og så fem gonger seks pluss ein.

I utdraget ovanfor ser vi at elevane brukar munnlege forklaringar for å kome fram til eit svar. Dei skreiv også ei skriftleg forklaring: *«For å finne ut kor mange brikker du treng for å lage kva som helst figur tek du figurnummeret gonger seks pluss ein».* I tillegg til dette brukte dei brikker, som vi kan sjå i Figur 4.1, for å løyse oppgåva. Den svarte brikka vart lagt på sida, i staden for i midten av figuren, for å vise at den var *«pluss ein».*



Figur 4.1: Bruk av konkretar for å løyse Oppgåve 1.

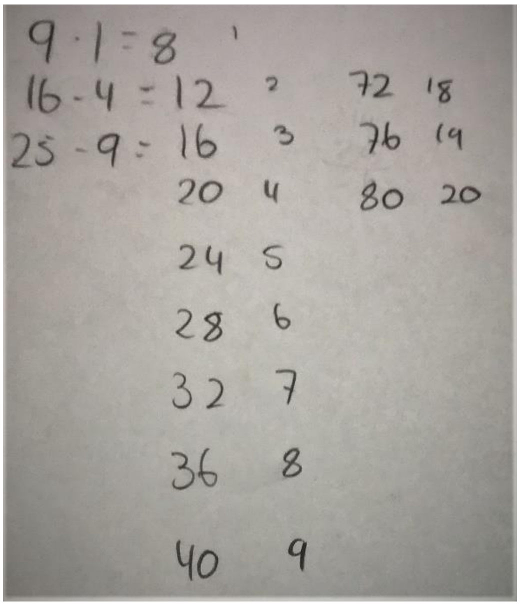
Alle gruppene i 8. klasse nytta representasjonen teikningar (*illustrasjonar)* i Oppgåve 2. Fleire grupper valte å bruke teikningar for å finne samanhengen mellom figurnummeret og talet på grå brikker i figurane. I Figur 4.2 kan vi sjå korleis ei gruppe har brukt teikning for å få fram samanhengen mellom figurnummeret og grå brikker.



Figur 4.2: Bruk av illustrasjonar og symbolsystemet for å løyse Oppgåve 2.

I Figur 4.2 kan vi også sjå at elevane har brukt teikninga for å kome fram til ein formel for å løyse oppgåva. Formlar finn vi att i *symbolsystemet.* Det var berre tre grupper i 8. klasse som brukte formlar under arbeidet med dei tre oppgåvene.

Det siste semiotiske systemet 8. klassingane brukte var *todimensjonale figurar*. Ei gruppe brukte tabell for å løyse Oppgåve 1 og 2, medan ei anna gruppe også valte denne representasjonen for å løyse Oppgåve 2. Denne tabellen kan vi sjå i Figur 4.3.



Figur 4.3: Tabell som representasjon for å løyse Oppgåve 2.

4.1.2 Repertoar i 10. klasse

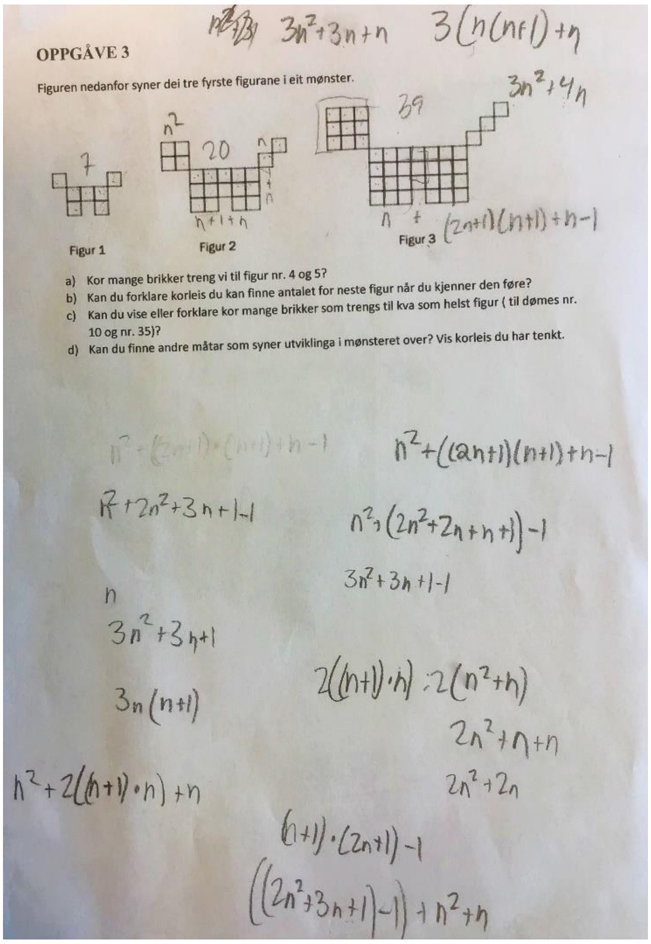
Undervisningsøktene i 10. klasse var lagt opp på same måte som i 8. klasse. I denne klassa var det sju grupper à tre personar som deltok. Vi starta med å få ei oversikt over kva for representasjonar klassa kjende til og skreiv desse representasjonane på tavla. Elevane nemnde representasjonane Formlar, Tabell/graf, Munnleg og skriftleg forklaring, Konkretisering, Bevis, Teikning/Figur og Utrekning og uttrykk. Resultatet syner at dei kjende til eit breitt utval av representasjonar. Som ein kan sjå i Tabell 4.2 nemnde også 10. klassingane representasjonar frå dei fem representasjonssystema som vi var interessert i å undersøkje i dette prosjektet.

Multifunksjonelle representasjonar Prosessen kan ikkje bli laga til ei algoritme.	**Naturleg språk:** • Munnleg og skriftleg forklaring • Bevis	**Illustrasjonar:** • Teikning/figurar	**Konkretar:** • Konkretisering
Monofunksjonelle representasjonar Dei fleste prosessane er algoritmar.	**Symbolsystem:** • Formlar • Utrekning og uttrykk • Bevis	**Todimensjonale figurar:** • Tabell/grafar	

Tabell 4.2: Representasjonane som 10. klassingane nemnde.

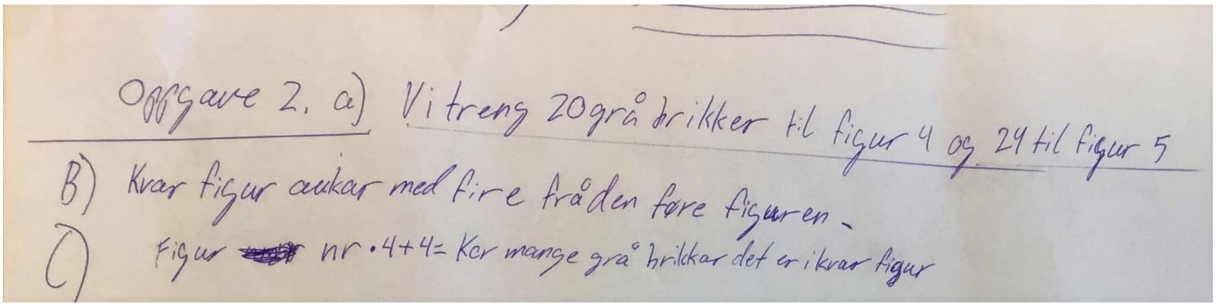
10. klassingane nemnde Munnleg og skriftleg forklaring som vi kan plassere i systemet *naturleg språk.* Dei nemnde Teikning/figur som vi finn i systemet *illustrasjonar,* Formlar og Utrekning og uttrykk i *symbolsystemet*, Tabell/graf i systemet *todimensjonale figurar* og Konkretisering som er i systemet *konkretar*. Dei sa også at Bevis kunne vera ein representasjon, og Bevis kunne vi plassert i både systemet *naturleg språk* og *symbolsystem*. Bevis kunne også vore plassert i *illustrasjonar* og *konkretar*, med tanke på visuelle bevis (Grabiner, 2012).

10. klassingane brukte representasjonar frå alle dei fem semiotiske systema i arbeidet sitt, men som i 8. klasse brukte ikkje alle gruppene alle systema. Alle gruppene i 10. klasse brukte representasjonar frå *symbolsystemet* i arbeidet sitt. Når dei fekk oppgåvene prøvde dei fleste å finne ein formel før dei prøvde andre representasjonar. I Figur 4.4 ser vi døme på at ei gruppe prøver å finne ein formel som gjev løysinga på Oppgåve 3.



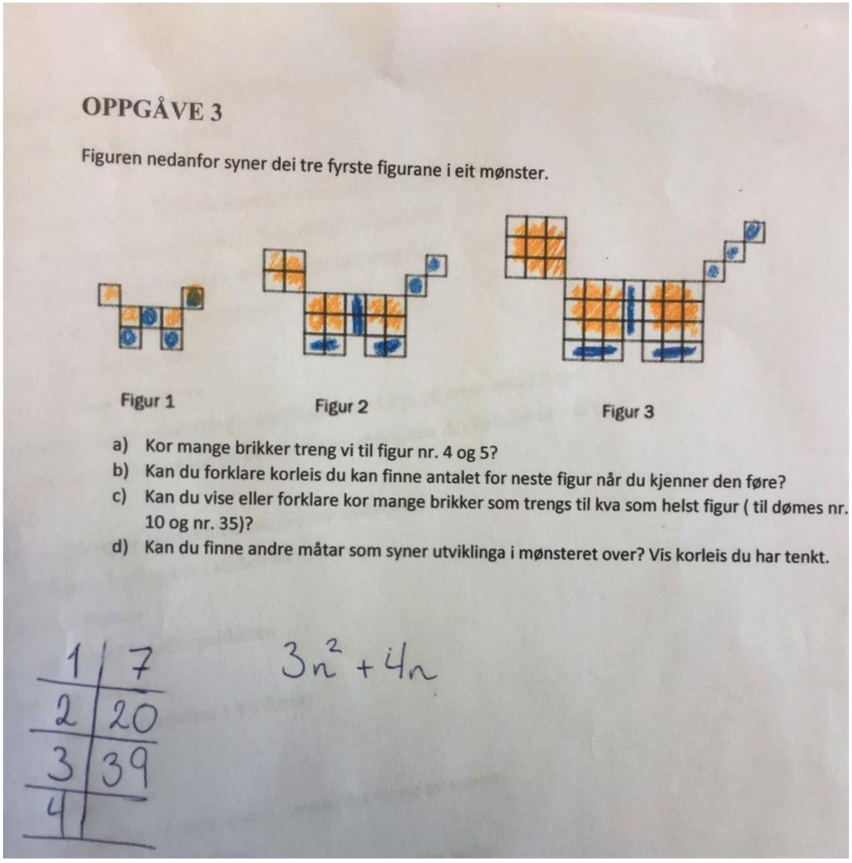
Figur 4.4: Formlar som representasjon.

Alle gruppene i 10. klasse brukte *naturleg språk,* nemleg munnlege og skriftlege forklaringar. Dei skriftlege forklaringane var ofte korte og sa anten noko om endringa frå figur til figur eller korleis ein kunne finne talet på brikker i ein tilfeldig figur. Ei gruppe diskuterte Oppgåve 2 og kom fram til ei skriftleg forklaring som er presentert i Figur 4.5.



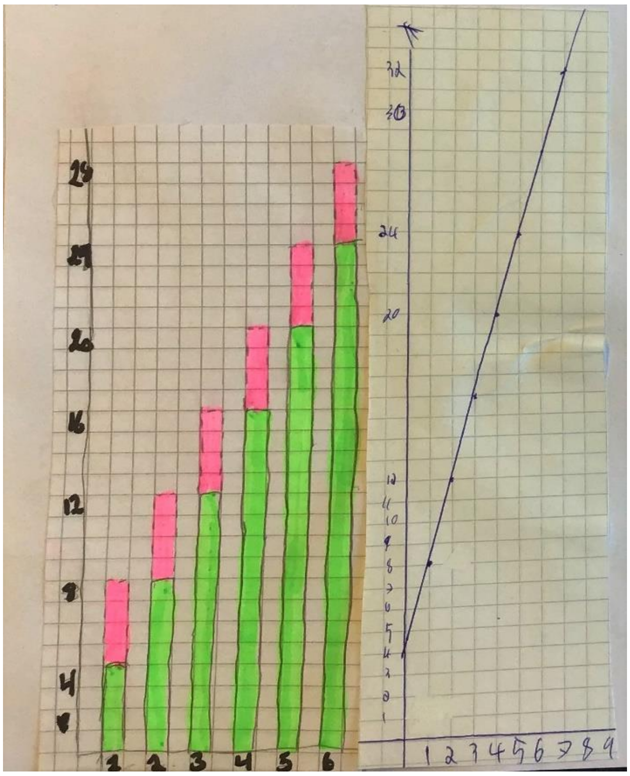
Figur 4.5: Den skriftlege forklaringa til ei gruppe i 10. klasse.

Fem av sju grupper brukte representasjonen Teikning (*illustrasjonar).* Nokre av gruppene som valte denne representasjonen brukte den for å finne samanhengen mellom figurnummeret og talet på brikker i figurane, og deretter finne fram til ein formel. I Figur 4.6 kan vi sjå korleis ei gruppe har brukt teikning for å kome fram til ein formel. Denne gruppa har også brukt ein tabell for å sjå på utviklinga frå figur til figur.



Figur 4.6: Ei gruppe i 10. klasse brukte representasjonane illustrasjonar, symbol og todimensjonale figurar.

Fem av dei sju gruppene brukte *todimensjonale figurar* i form av tabellar, diagram og grafar. I Figur 4.7 kan vi sjå korleis ei gruppe har brukt diagram og graf for å vise utviklinga av figurane i Oppgåve 2.



Figur 4.7: Bruk av søylediagram og graf som representasjon.

Berre tre grupper i 10. klasse brukte *konkretar* når dei løyste oppgåvene. Felles for alle desse tre gruppene var at dei berre brukte konkretar i Oppgåve 1 og at dei ikkje brukte konkretar fyrst, men for å vise andre måtar å løyse oppgåva på.

4.1.3 Samanlikning av repertoaret i 8. og 10. klasse

Båe klassane syner at dei har eit breitt repertoar av representasjonar. Dei nytta representasjonar frå alle dei semiotiske system. Det var liten forskjell innad i dei to klassane når det gjeldt kva for representasjonar som vart brukt i kvar enkelt oppgåve, men stor forskjell klassane seg imellom. Både 8. og 10. klassingane brukte *naturleg språk* i form av munnlege forklaringar i arbeidet sitt. Dette var naturleg da oppgåvene skulle løysast i grupper. Om vi ser bort i frå dei munnlege forklaringane ser vi at 8. klassingane ofte valte *konkretar* eller *illustrasjonar* som fyrste representasjon. Desse representasjonane kombinerte dei med andre representasjonar, som skriftlege forklaringar eller formlar for å kome fram til løysingar på oppgåvene. I 10. klasse nytta derimot ingen av gruppene *konkretar* som fyrste representasjon i nokon av oppgåvene. Dei gruppene som brukte konkretar gjorde det berre i fyrste oppgåva og berre for å vise at det gjekk an å løyse oppgåva på andre måtar.

10. klassingane brukte stort sett formlar (*symbolsystemet*) som fyrste representasjon. I Oppgåve 2 og 3 brukte også dei fleste gruppene todimensjonale figurar, i form av tabellar og grafar for å vise utviklinga av figurane og for å forklare korleis dei hadde kome fram til ein formel. I 8. klasse var det to grupper som brukte tabell. Den eine gruppa gjorde det berre i den fyrste oppgåva og den andre gruppa gjorde det på dei to fyrste oppgåvene.

4.2 Frekvens

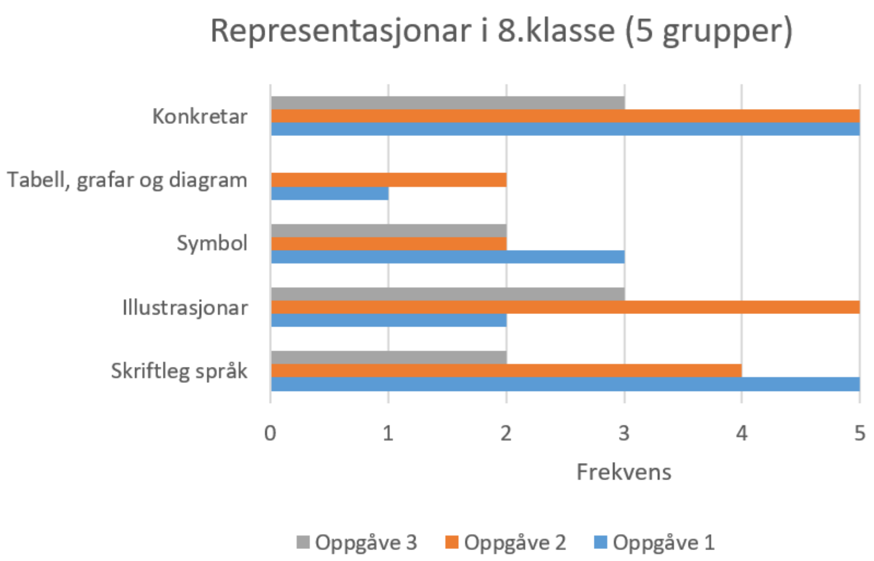
4.2.1 Ulike representasjonar sin frekvens i 8. klasse

Alle gruppene i 8. klasse brukte skriftlege forklaringar og konkretar under løysinga av figurmønsteroppgåvene. Dei viste at de hadde forstått oppgåvene ved å kombinere det naturlege språket med konkretar, og elevane nytta konkretar fyrst før dei forklarte tankesettet skriftleg. Tabell 4.3 viser at elevane hadde relativt lik bruk av semiotiske representasjonar i Oppgåve 1 og 2, medan Oppgåve 3 scora annleis. Grunnen til dette var at det vart mest munnleg aktivitet på oppgåve 3, noko som skuldast begrensa tid, høgare vanskegrad på oppgåva, samt at elevane i 8. klasse ikkje har jobba særleg med dei monofunksjonelle representasjonane, symbolsystem og todimensjonale figurar, tidlegare.

Representasjon	Frekvens Oppg.1	Frekvens Oppg.2	Frekvens Oppg.3
Skriftleg språk	5	4	2
Illustrasjonar	2	5	3
Symbol	3	2	2
Tabell, grafar og diagram	1	2	0
Konkretar	5	5	3

Tabell 4.3: 8. klassingane sin frekvenstabell.

Alle gruppene i 8. klasse var innom Teikning (*illustrasjonar)* i Oppgåve 2, og i same oppgåva var det og to grupper som brukte Tabell (*todimensjonale figurar)* som representasjon. Tre grupper brukte Utrekningar og formlar (*symbol),* og to av gruppene brukte også *symbolsystem* som semiotisk representasjon i alle tre oppgåvene.



Figur 4.8: Representasjonar 8. klassingane nytta i oppgåvene.

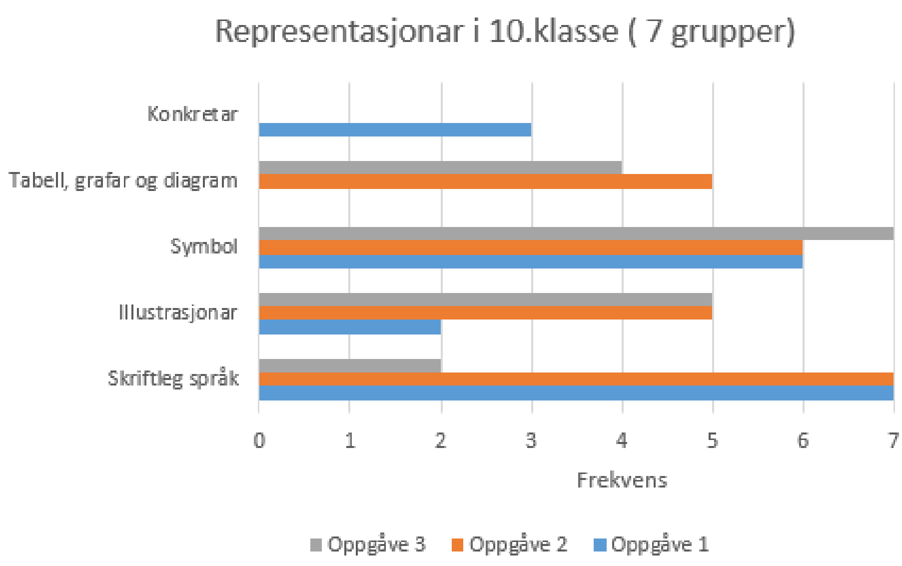
4.2.2 Ulike representasjonar sin frekvens i 10. klasse

Alle gruppene i 10. klasse valte å bruke skriftlege forklaringar (*naturleg språk)* i Oppgåve 1 og 2. I dei same oppgåvene vart symbol og formlar (*symbolsystemet)* nytta av seks av sju grupper, og i Oppgåve 3 brukte alle gruppene symbolsk notasjon for å finne rekursiv formel for det gitte figurmønsteret. Innad i 10. klasse var det liten forskjell på kva for semiotiske representasjonar dei ulike gruppene valte å bruke. Det var utforminga av figurmønsteret som utløyste kva for representasjon dei nytta. Oppgåve 1 var enkel for elevane, og dermed tok dei ikkje i bruk tabellar, grafar og diagram for å løyse oppgåva. Som vi kan sjå i Tabell 4.4 var det også berre to av sju grupper som brukte *illustrasjonar*.

Representasjon	Frekvens Oppg.1	Frekvens Oppg.2	Frekvens Oppg.3
Skriftleg språk	7	7	2
Illustrasjonar	2	5	5
Symbol	6	6	7
Tabell, grafar og diagram	0	5	4
Konkretar	3	0	0

Tabell 4.4: 10. klassingane sin frekvenstabell.

Det mest interessante når ein ser på frekvensen av semiotiske representasjonar hjå 10. klasse er kor lite dei brukte konkretar. Som vist i Figur 4.9 var det berre tre grupper nytta konkretar i Oppgåve 1. Ut i frå observasjonar og transkripsjonar såg vi at desse gruppene brukte konkretar for å bevise at dei hadde kome fram til riktig svar, ikkje for å finne ut eller forklare (Grabiner, 2012; Hanna, 1989).

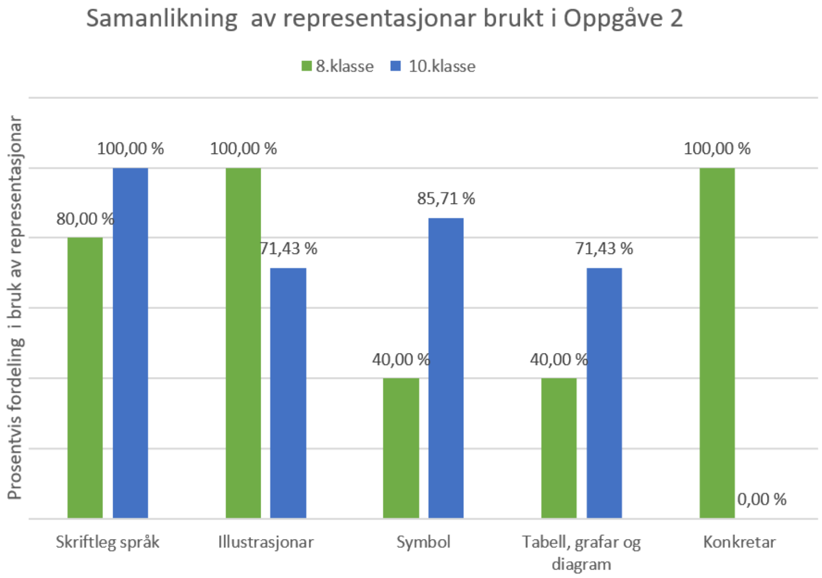


Figur 4.9: Representasjonane 10. klassingane nytta i oppgåvene.

4.2.3 Samanlikning av ulike representasjonar sin frekvens i 8. og 10. klasse

Resultata frå 8. klasse viste at frekvensen av nytta representasjonar ikkje varierte i særleg grad i dei tre oppgåvene dei løyste, i motsetning til 10. klasse som var meir selektive i sine val av representasjonar. 10. klassingane brukte også færre representasjonar per oppgåve. Konteksten og oppgåveformulering styrte kva for representasjonar 10. klasse fann formålstenlege. Dette kan indikere at elevane utviklar fleksibilitet i bruk av representasjonar frå 8. til 10. klasse, men vi har for lite kvantitativt data til å seie noko generelt om denne utviklinga.

Sidan Oppgåve 1 var enkel for 10. klasse, samt at 8. klasse ikkje fekk nok tid på Oppgåve 3, har vi valt å bruke Oppgåve 2 som utgangspunkt for å samanlikne representasjonsfrekvensen. I Figur 4.10 ser vi at ein stor del av elevane både i 8. klasse og 10. klasse bruker representasjonane skriftleg språk og illustrasjonar for å løyse Oppgåve 2, medan ingen av elevane i 10. klasse vel å nytte konkretar. 10. klassingane hadde og betrakteleg høgare score på dei monofunksjonelle representasjonane Symbol (*symbolsystem)* og Tabell, grafar og diagram (*todimensjonale figurar*). 10. klassingane har truleg brukt formlar og algebraisk notasjon på liknande oppgåver før. Dei hugsar dette og brukar desse representasjonane og ikkje konkretar som 8. klassingane gjer.

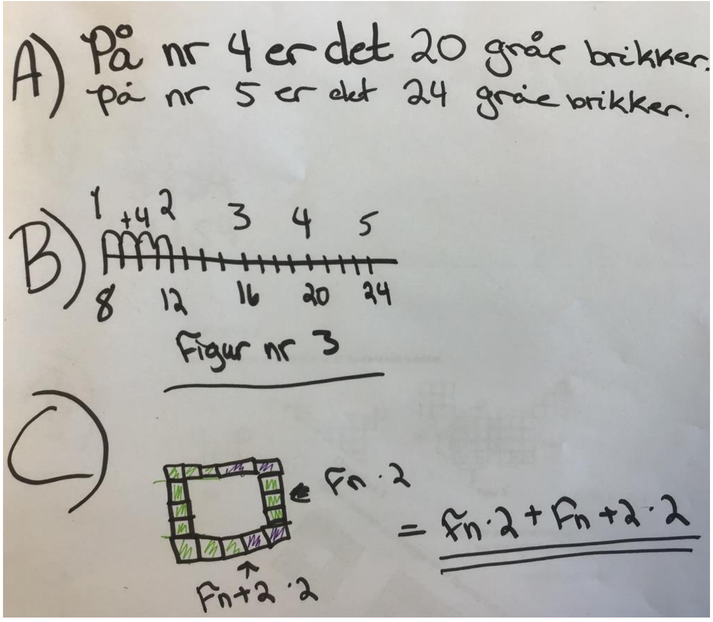


Figur 4.10: Representasjonane 8. og 10. klassingane nytta i Oppgåve 2.

4.3 Fleksibilitet

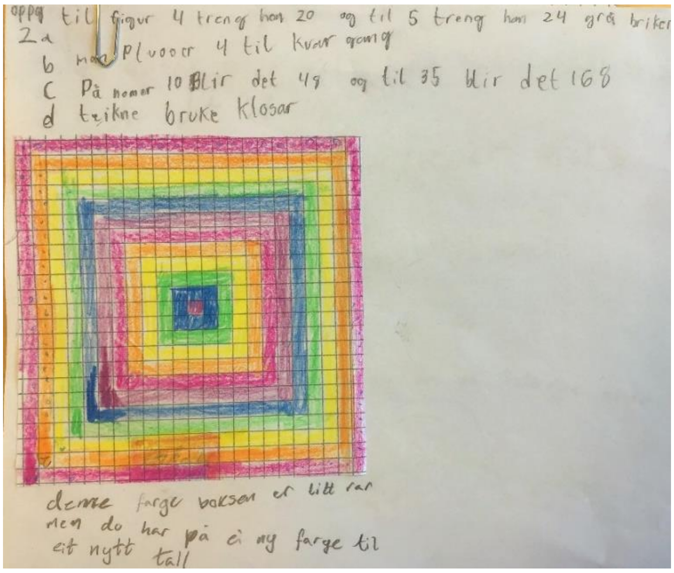
4.3.1 Fleksibilitet i 8. klasse

Figurmønsteroppgåver kan representerast på mange måtar, og elevane synte fleksibilitet i representasjonsbruk. 8. klassingane nytta seg fyrst og mest av konkretar (brikker) kombinert med skriftleg forklaringar, og av å kombinere representasjonane illustrasjonar og skriftleg språk. Elevane viste at dei kunne skifte mellom representasjonane, og dei verka til å utvikle forståinga av representasjonar som omgrep, slik at dei både kunne bruke og omdanne mellom dei ulike representasjonstypane. I Figur 4.11 ser vi døme på korleis ei gruppe brukte ulike representasjonar, som skriftleg forklaring, tallinje, teikning og formel for å kome fram til ei løysing i Oppgåve 2.



Figur 4.11: Ei gruppe brukte ulike representasjonar i Oppgåve 2.

Elevane valte den representasjonen som for dei var mest formålstenleg utifrå oppgåva dei skulle løyse, og dette seier de Jong (1998, referert i Heinze et al., 2009) er ein føresetnad for å vera fleksibel. Likevel såg vi i funna at ikkje alle representasjonsformane som vart kopla saman førte fram, jamfør teikninga i Figur 4.12. Elevane har skrivi ei forklaring som handlar om at ein må leggje til fire nye brikker for kvar figur, men dei har ikkje klart å lage ei teikning som hjelper dei med å sjå utviklinga i mønsteret.



Figur 4.12: Døme på "representasjonssvikt" i omdanning mellom illustrasjon og naturleg språk.

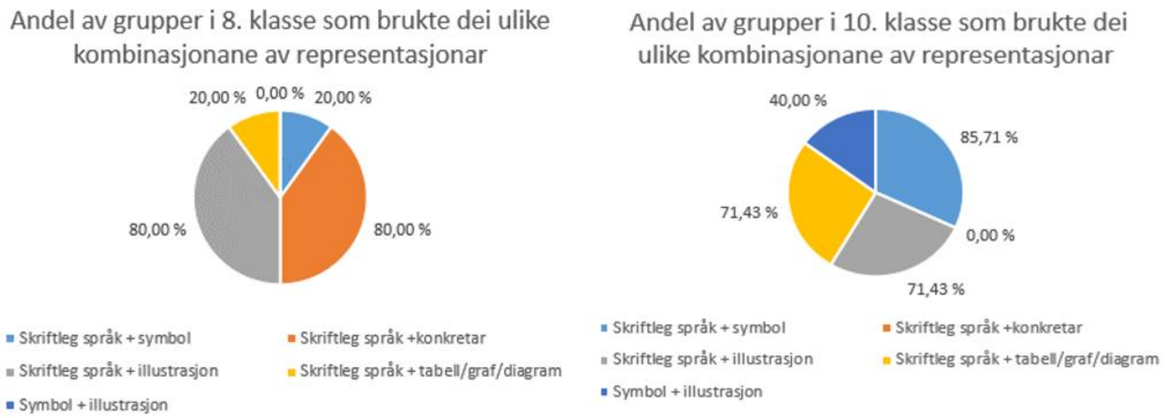
Sett bort frå at ei gruppe kombinerte skriftleg språk med bruk av tabell, var det liten forskjell mellom gruppene i forhold til korleis dei valte å løyse oppgåva. Elevane heldt seg innanfor dei multifunksjonelle representasjonane i Duval (2006) sitt rammeverk, samt at dei brukte konkretar.

4.3.2 Fleksibilitet i 10. klasse

10. klassingane sin representasjonsbruk synte at også dei er fleksible, men dei nytta andre kombinasjonar av representasjonar. Seks av sju grupper brukte skriftlege forklaringar saman med formlar. Fem av sju grupper kombinerte skriftleg språk med illustrasjonar, og det same for kombinasjonen skriftleg språk og bruk av tabell/graf og/eller diagram. Elevane opererte innanfor alle dei fem semiotiske systema vi undersøkte, men dei nytta ikkje konkretar i det heile i Oppgåve 2 og 3. I 10. klasse gjekk dei direkte inn i *symbolsystemet* og fann formlar og algoritmar for å effektivt kunne løyse oppgåvene. Det naturlege språket kom undervegs eller etterkvart som formlane vart utleia. 10. klassingane nytta representasjon som eit middel og ikkje som eit mål i seg sjølv, noko de Jong (1998, referert i Heinze et al., 2009) seier syner grad av fleksibilitet. 10. klassingane valte semiotiske representasjonar spesifikt utifrå konteksten til kvar oppgåvene, dei tenkte strategisk og adaptivt.

4.3.3 Samanlikning av fleksibilitet i 8. og 10. klasse

Båe klassane viste fleksibilitet under løysing av figurmønsteroppgåvene. Det var ein markant forskjell på korleis dei løyste dei tre oppgåvene med tanke på representasjonsbruk både i forhold til kva for representasjon på kva for oppgåve, men også korleis representasjonane vart kombinert. 8. klasse nytta fleire typar representasjonar i kombinasjon, medan 10. klasse stort sett kombinerte to representasjonar. 10. klasse tok meir strategiske val av representasjonsbruk utifrå eigenarten til kvar oppgåve. Som ein kan sjå i Figur 4.13 synte innsamla data frå Oppgåve 2 at 8. klasse kombinerte skriftleg språk med konkretar og/eller illustrasjonar. Dei nytta i liten grad kombinasjonar med symbolbruk, berre ei av fem grupper brukte symbolsystemet i kombinasjon med naturleg språk, i kontrast til 10. klasse der seks av sju grupper kombinerte desse representasjonane. 10. klassingane opererte hyppigare innanfor dei monofunksjonelle representasjonane, noko som vart synleggjort ved at dei nytta algoritmar. Det naturlege språket vart brukt av 10. klasse også, men bruken av konkretar var fråverande. Figur 4.13 synte at 10. klassingane ikkje nytta seg av denne representasjonen i kombinasjon med andre semiotiske representasjonar.



Figur 4.13: Kombinasjonar av representasjonar som elevane brukte i Oppgåve 2.

Figurmønsteroppgåver kan som synt i dei førre delkapitla representerast på mange måtar. Ein kan sjå på eigenskapane ved figurmønstra ut i frå dei ulike representasjonane, noko 10. klassingane syner i større grad enn 8. klassingane.

4.4 Utfordringar

Ei av utfordringane i dette forskingsprosjektet var at nokre elevar ikkje såg poenget med å løyse oppgåva på mange ulike måtar. Når dei hadde løyst oppgåva ved hjelp av ein eller to representasjonsformar var dei tilfreds og følte at dei var ferdige.

Ei anna utfordring var at nokre elevar gjekk lei av å utforske og finne nye løysingsmetodar etter kvart. Utdraget, som er vist nedanfor, kjem frå ein diskusjon mellom tre elevar i 10. klasse. Gruppa hadde løyst Oppgåve 2 ved hjelp av både ei skriftleg forklaring og ved bruk av formel. I samtala viser dei at dei har kjennskap til fleire representasjonar som dei kunne brukt, men det er tydeleg at to av elevane byrjar å bli uengasjerte.

31. Dina: Oss kan leggje inn formelen i geogebra og, så …
32. Erlend: Treng ikkje gjera det meir avansert.
33. Dina: Ja, men da viser vi det på fleire måtar…
34. Fred: Får ikkje karakter på dette, så det er berre å roe det ned…..

    (Lett skratt av alle)

59. Dina: Går det ikkje an å løyse det i Excel?
60. Erlend: Jau, det går.
61. Fred: Så tungvint…
62. Erlend: Ja, eg skjønar ikkje kvifor vi må ta alle måtane.
63. Dina: Fordi det står her.
64. Fred: Tungvint og talentlaust….

Sjølv om nokre elevar var utolmodige og mindre motiverte var dei aller fleste gruppene engasjerte. Spesielt i 8. klasse var elevane ivrige etter å løyse oppgåvene med bruk av mange forskjellige representasjonar.

Ei tredje utfordring vi støtte på var at det er ting som tyder elevane var på ulikt representasjonskompetansenivå. Dette førte til at det oppsto vanskar når elevane skulle kome fram til ei felles forståing av problemet. Nokre elevar hadde god kontroll på omdanningane mellom representasjonane og brukte dette aktivt for å løyse oppgåvene. Dei utførte behandlingar innanfor same semiotiske system og dei omdanna frå eit semiotisk system til andre. Når ein elev gjorde desse transformasjonane var det ikkje alltid at dei andre på gruppa forsto kvifor han gjorde det. Det var også vanskeleg for eleven å forklare kva han hadde tenkt til dei andre.

5 Drøfting

Hensikta med denne studien var å finne ut kva for repertoar av representasjonar 8. og 10. klassingar synte i arbeid med figurmønsteroppgåver, kor ofte elevane brukte dei ulike representasjonane, om det var forskjell på kor fleksible 8. og 10. klassingane var i bruken av representasjonar og kva for kombinasjonar av representasjonar dei brukte. I dette kapitlet vil vi drøfte funna våre opp mot teori som vi har presentert i oppgåva.

5.1 Oppsummering og drøfting av funn

Forskingsprosjektet vårt er kvalitativt og vi kan derfor ikkje generalisere funna våre, men dei kan gje ein indikasjon på korleis ungdomsskuleelevar bruker representasjonar i samband med figurmønsteroppgåver. For å finne svar på forskingsspørsmålet observerte vi kva for representasjonsrepertoar elevane i 8. og 10. klasse viste i arbeid med figurmønsteroppgåver og kor ofte dei brukte dei ulike representasjonane. I tillegg såg vi på kor fleksible elevane var i bruken av representasjonar og kva for kombinasjonar av representasjonar dei brukte.

5.1.1 Repertoar

Båe klassene synte at dei har eit breitt representasjonsrepertoar, der dei var innom *konkretar* og alle dei semiotiske representasjonane i Duval sitt rammeverk. Dette er eit godt utgangspunkt for å imøtekome den nye læreplanen, LK20. I overordna del står det at elevane skal få utfalde skaparglede, engasjement og utforskartrong (Utdanningsrektoratet, 2022), og det å utvikle representasjonskompetanse er eit element i dette. Kjerneelementet *Representasjon og Kommunikasjon* presiserer også kor viktig det er å forstå og nytte representasjonar for å utvikle ei heilskapleg matematisk kompetanse.

Funna våre indikerer at elevane har jobba med ulike representasjonar tidlegare, samt at dei syner at elevane har utvikla representasjonskompetanse. Representasjonskompetansen elevane syner er nyttig for at dei skal utvikle djupare matematisk forståing og sjå ulike sider ved eit matematisk objekt (Kilpatrick et al. 2001; Tripathi, 2008; Svingen, 2018). Erfaringa elevane har med bruk av ulike representasjonar kan også ha ført til at dei har oppnådd meir læring enn elevar som berre har hatt tilgang til ein representasjon (Svingen, 2018).

5.1.1.1 Stor forskjell mellom klassane, men liten forskjell innad i klassane

Det var tydeleg forskjell mellom klassane i representasjonsbruk. 8. klasse held seg mest innan dei multifunksjonelle semiotiske representasjonane, medan 10. klasse nytta både multifunksjonelle og monofunksjonelle. 8. klassingane brukte konkretar i større grad enn 10. klassingane, og ein grunn til det kan vera at konkretar blir mest brukt i dei yngste trinna på skulen og i innlæringa av ein ny læringssekvens. Bruken avtek ettersom elevane blir mindre avhengige av støttemateriell (Olafsen & Maugesten, 2009). Ostad (2013) seier at utviklinga frå det konkrete til det symbolske er naudsynt, og dette er stadfesta ut i frå undersøkingar som er gjort på barn si utvikling av talrepresentasjonar i hjerna. Ein annan grunn til at 10. klassingane ikkje brukte konkretar i like stor grad som 8. klassingane kan vera at dei i større grad vurderte kva tid ulike representasjonar var formålstenlege, noko som indikerer at dei har utvikla meir representasjonskompetanse enn 8. klassingane.

I 8. klasse brukte alle gruppene munnlege og skriftlege forklaringar (*naturleg språk*) og *konkretar*. Alle gruppene nytta også teikningar, der dei meinte det var formålstenleg. 8. klasse synte dermed at dei har ei viss representasjonskompetanse (Niss & Jensen, 2002). Dei såg samanhengen og omsette mellom representasjonane, og dei valte den representasjonen som passer best til formålet ut i frå deira eigne føresetnader. Funna våre tyder på at alle gruppene i 8. klasse meistra å transformere innad i dei multifunksjonelle representasjonssystema. Transformasjonen frå ein multifunksjonell til ein monofunksjonell representasjon var utfordrande for 8. klassingane, noko som er naturleg med tanke på abstraksjonsnivå og at dei truleg ikkje har jobba så mykje med overgangar til formlar og algoritmar. Duval (2006) sine representasjonar har ulikt potensial i seg, men på kvar sin måte gjer dei eit matematisk objekt tilgjengeleg. 8. klassingane fann dei multifunksjonelle og deira eigenskapar best eigna frå deira ståstad, sjølv om det ikkje er desse representasjonane som har størt potensial (Duval, 2006).

10. klassingane varierte i større grad på kva for representasjon dei brukte på kvar enkelt oppgåve, dei valte representasjon ut i frå situasjonen. Dei nytta både multifunksjonelle og monofunksjonelle representasjonar i Duval (2006) sitt representasjonssystem. 10. klassingane synte konseptuell kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Elevane viste dette ved at dei i kvar enkelt oppgåve identifiserte kva som var utfordringa, tolka og vurderte, og valte den representasjonen som passa best. Tre grupper i 10. klasse nytta *konkretar* i Oppgåve 1 for å bevise at dei hadde rett svar, ikkje for å finne ut eller forklare. Her avvik 10. klasse frå Kilpatrick et al. (2001) sitt semiotiske system, der dei seier at konkretar kan vise elevane sin tankegang og framgangsmåte. 10. klassingane synte også at dei beherska komplekse omdanningar ved at dei til dømes meistrar å finne funksjonsuttrykk for figurmønster berre ved å sjå på illustrasjonane i oppgåvene. Dette er ein indikasjon på at 10. klassingane kjenner att det same matematiske objektet på tvers av representasjonssystema (Duval, 2006).

8. klasse som gruppe synte ikkje same kunnskapsnivå, dei nytta omtrent same framgangsmåte eller prosedyre på dei tre oppgåvene. 8. klassingane viste at dei ikkje hadde same representasjonskompetanse som 10. klassingane. Dei mangla erfaring i å sjå og handtere dei matematiske objekta slik som fleirtalet i 10. klasse gjorde. For majoriteten i 8. klasse fell det matematiske objektet for abstrakt, og dette førte til at omdanningane dei utførte var mindre komplekse. 8. klassingane beherska omdanningar av representasjonar, men dei held seg mest innad i det multifunksjonelle semiotiske systemet. Er det slik at 8. klassingane, i motsetning til 10. klasse, syner prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986), kunnskap som omhandlar kva for framgangsmåte som kan brukast når, men som ikkje seier noko om kvifor? 10. klassingane gjekk rett på dei monofunksjonelle representasjonane i Duval (2006) sitt rammeverk, og tidlegare erfaringar og erverva kunnskap gjorde dei meir effektive og fleksible, jamfør Heinze et al. (2009). Forskjellen på 8. og 10. klasse si representasjonskompetanse er naturleg ut frå erfaring, alder og utvikling av abstraksjonsnivå. Med tanke på LK20 og at *Representasjon og kommunikasjon* er eit eige kjerneelement blir det interessant å sjå om framtidige 8. klassingar vil ha ein annan relasjonskompetanse, og om dei i tråd med den nye læreplanen er komne lengre i si utvikling av relasjonell forståing (Skemp, 1976).

5.1.2 Frekvens

Resultata frå 8. klasse syner at frekvensen av nytta representasjonar ikkje varierte mykje i dei tre oppgåvene dei løyste. Elevane brukte ofte fyrst konkretar og deretter ein anna representasjon. 10. klassingane var meir selektive i sine val av representasjonar. Dei brukte også færre representasjonar per oppgåve. 10. klassingane viste i arbeidet med figurmønsteroppgåvene at dei har utvikla representasjonskompetanse og at dei kan ulike framgangsmåtar for slike oppgåver. Dei fleste brukte ikkje meir tid enn naudsynt og valte «rett» metode. 10. klasse vurderte representasjonane og valte den representasjonen som var mest formålstenleg ut i frå kva som er mest effektivt. For dei verka det unaturleg å gå om konkretar, teikningar og illustrasjonar for å kome fram til ein formel. Konteksten og oppgåveformulering styrte kva for representasjonar 10 .klasse fann formålstenleg.

Ein anna tenkjeleg grunn til at elevane i 10. klasse valte meir effektive metodar enn 8. klasse kan vera at læraren og undervisninga i 10. klasse kan ha fokusert mykje på utvikling av matematisk fleksibilitet, medan 8. klasse sin lærar og undervisning har fokusert mindre på det (Hickendorff, 2018). Men dette blir berre spekulasjonar. Uansett er det viktig at det blir lagt til rette for at elevane møter ulike og varierte representasjonar, og på denne måten får moglegheit til å utvikle eit breitt representasjonsrepertoar.

5.1.3 Fleksibilitet og ulike kombinasjonar

Både 8. og 10. klasse synte fleksibilitet under løysing av figurmønsteroppgåvene, men dei var fleksible på kvar sin måte. Heinze et al. (2009) hevdar at å bruke fleire representasjonar og å byte fleksibelt mellom representasjonane er viktig for å løyse matematiske problem. I 8. klasse var dei avhengig av det visuelle og konkrete for å kome vidare i oppgåveløysinga. 10. klassingane såg betre korleis dei skulle angripe oppgåvene, og dei synte større variasjon i framgangsmåtar. 10. klassingane gjekk meir på tvers i Duval (2006) sitt representasjonssystem enn 8. klassingane, som bevega seg horisontalt i dei multifunksjonelle representasjonane. 10. klassingane prioriterte meir strategisk i val av semiotisk representasjon og synte større strategisk kompetanse enn 8. klassingane (Kilpatrick et al., 2001). I løysinga av Oppgåve 2 syner 10. klassingane fleksibilitet ved å nytte monofunksjonelle semiotiske representasjonar direkte (4 av 7 grupper), og 8. klassingane ved å nytte konkretar saman med skriftlege forklaringar og illustrasjonar. Dei vel ulikt utifrå erfaring og kompetanse, men vala er tekne frå kva dei meiner er mest effektivt og riktig; dei viser fleksibilitet (Newton et al., 2020). Dersom elevane har erfaring med representasjonar frå før vil dei bruke ein kjent metode, og det er her 10. klassingane forsvarar sine val. Etterkvart vil elevane erfare bruk av ulike representasjonar og kva for representasjon som er best eigna i ulike situasjonar.

Tre grupper i 10. klasse synte prosedyrekompetanse ved at dei i Oppgåve 2 brukte konkretar for å bevise at deira algebraiske uttrykk var korrekt. Å ha kunnskap om og å kunne handtere ulike matematiske hjelpemiddel viser at dei utfører prosedyrane fleksibelt, nøyaktig eller effektiv i fylgje Kilpatrick et al. (2001). I dømet i Figur 4.11 viser 8. klassingane at dei kan tenkje fleksibelt i måten dei løyser oppgåve på. Dei viser også at kan skifte mellom ulike semiotiske system, utan at det matematiske objektet blir endra (Duval, 2006).

Det var tydeleg forskjell mellom klassane i kva for kombinasjonar av representasjonar dei brukte. 8. klassingane held seg mest innan dei multifunksjonelle semiotiske representasjonane, medan 10. klassingane nytta både multifunksjonelle og monofunksjonelle. 10. klassingane kombinerte ofte to og to representasjonar, hyppigast naturleg språk kombinert med ein monofunksjonell representasjon, medan 8. klassingane brukte fleire representasjonar i kombinasjon, men held seg ofte innan dei multifunksjonelle representasjonane. Båe klassane synte at dei beherska transformasjonar innan kjende representasjonar. Å skifte mellom representasjonar er utfordrande i fylgje Duval (2006), og for ein del av 8. klassingane var det utfordrande å gå frå eit semiotisk representasjonssystem til eit anna utan hjelp.

Kva for informasjon kan vi hente frå at 8. klassingane brukte fleire typar representasjonar i kombinasjon og at 10. klassingane stort sett berre kombinerte to representasjonar? I 8. klasse var elevane opptekne av å finne flest mogleg representasjonar i kvar oppgåve. Dette gjorde at dei kunne miste fokuset på å sjå samanhengen mellom dei ulike representasjonane, og sjølv om dei kombinerte representasjonane på ein måte så framstod dei som fragmentert. Figurmønsteroppgåver innbyr til kreativitet, oppgåvene er rike, men elevane i 8. klasse mista kanskje fokuset på å sjå samanhengen mellom representasjonane fordi dei vart ivrige etter å bruke flest mogleg representasjonar (Torkildsen, 2020). Hadde vi unngått dette ved å ha ein annan oppgåveordlyd, eller at vi hadde sett som eit kriterie at dei hadde jobba med representasjonar før forskinga tok til?

Å tolke ulike representasjonar og å veksle mellom kva for representasjonar ein nyttar betyr mykje for å utvikle matematisk forståing (Verschaffel et al., 2000), likeeins kombinasjonar av representasjonar. Figur 4.13 viser kva for kombinasjonar elevane i 8. og 10. klasse nyttar, og sidan ingen representasjon syner alle sidene til eit matematisk objekt (Duval, 2006) er kombinasjonar hensiktsmessig. Å kombinere representasjonar, samt nytte potensialet som finst i dei ulike representasjonane, gjer det mogleg for elevane å løyse problem effektivt.

5.1.4 Utfordringar

Dei fleste elevane var motiverte og ivrige etter å løyse oppgåvene ved å bruke forskjellige representasjonar, men nokre såg ikkje poenget med å løyse oppgåvene på mange ulike måtar. Hadde elevane rett i at det ikkje er vits i å løyse oppgåvene med andre metodar? Ut i frå forsking meiner vi at elevane har nytte av å løyse oppgåver ved hjelp av ulike representasjonar. Enge og Valenta (2013) seier at evna til å bruke ulike typar representasjonar fleksibelt har stor betyding for utvikling av omgrepsforståing i matematikk og problemløysingskompetanse. Elevar som har fått undervisning der ulike representasjonsformar har vorte vektlagt har ei større breidde i sitt repertoar og fleire kort å spele på seinare, enn elevar som ikkje har fått denne typen undervisning (Soundy & Drucker, 2009).

Nokre elevar gjekk lei av å utforske og finne nye løysingsmetodar etter kvart. Når dei hadde løyst ei oppgåve ved hjelp av ein eller to representasjonsformar var dei tilfreds og følte at dei var ferdige med oppgåva. Det er viktig at elevane er motiverte og engasjerte for at dei skal utvikle den matematiske kompetansen sin. Kilpatrick et al. (2001) sin tråd *Engasjement* beskriv nettopp at engasjement er avgjerande for at elevane skal sjå at matematikk er nyttig og for at dei skal utvikle sjølvtillit i faget. Utan engasjement er det også vanskeleg å utvikle dei andre trådane i modellen deira. Det er også viktig at elevane får moglegheit til å utvikle representasjonskompetanse slik at dei forstår korleis dei kan nytte ein representasjon for å vise eit matematisk objekt (Niss & Jensen, 2002). Dei må kunne bruke ulike verkty for å utforske matematiske problem, og Stylianou (2013) seier at representasjonar kan brukast som utforskingsverkty. Elevane kan endre frå ein representasjonsform til andre og dermed få meir informasjon om problemet. Kjerneelementet *Representasjon og Kommunikasjon* presiserer også kor viktig det er å forstå og nytte representasjonar for å utvikle ei heilskapleg matematisk kompetanse (Utdanningsrektoratet, 2022).

Elevane var også på ulikt representasjonskompetansenivå og dette førte til vanskar i kommunikasjonen mellom elevane. Når ein elev gjorde transformasjonar med representasjonane var det ikkje alltid at dei andre på gruppa forsto kvifor han gjorde det. Det var også vanskeleg for eleven å forklare kva han hadde tenkt til dei andre. I følgje Duval (2006) kan ulike representasjonane føre til at det blir vanskeleg for elevane å kjenne att objektet. Han seier også at for å utvikle djup forståing i matematikk må ein klare å sjå samanhengar mellom dei ulike semiotiske representasjonane. Det å omdanne frå eit semiotisk system til eit anna er ofte den kritiske terskelen for læring og problemløysing (Duval, 2006). Det at nokre elevar sleit med omdanningar mellom semiotiske system kan vera ein indikasjon på at elevane ikkje har høg nok representasjonskompetanse eller ikkje har utvikla djup nok forståing enno.

5.2 Didaktiske implikasjonar

Funna våre viser at 8. klassingane stort sett bruker dei same representasjonane i alle oppgåvene, og varierer i liten grad kva for representasjon dei vel fyrst. Dei valte ofte konkretar fyrst, sjølv om dette kanskje ikkje var ein effektiv metode for å løyse oppgåvene. 10. klassingane, derimot, valte representasjonar ut frå kontekst og oppgåveformulering. 10. klassingane vurderte representasjonane og valte den representasjonen som var mest formålstenleg ut i frå kva som er mest effektivt. Forsking seier at både lågt-, middels- og høgtpresterande elevar føretrekk effektive strategiar og at dei har kunnskap til å vurdere kva for strategiar som er effektive (Newton et al., 2020). Det kan da vera naturleg å tenkje at elevane i både 8. og 10. klasse ville valt å bruke dei mest effektive representasjonane i alle oppgåvene, men forsking syner også at faktorar som eleven sitt kjønn, alder og matematiske prestasjonsnivå kan ha betyding for eleven si evne til å velje den mest effektive strategien (Hickendorff, 2018). Dette kan indikere at elevane utviklar fleksibilitet i bruk av representasjonar frå 8. til 10. klasse, men vi har for lite kvantitativt data til å seie noko generelt om dette.

8. klassingane synte at dei kunne byte mellom ulike semiotiske representasjonar, noko som indikerer at dei har operasjonalisert kunnskap ved at dei omset automatisk mellom konkretar, skriftleg språk og illustrasjonar, jamfør de Jong (1998, referert i Heinze et al., 2009). 8. klasse transformerte meir innanfor dei multifunksjonelle semiotiske systema enn 10. klasse. I fylgje Duval (2006) er transformering meir utfordrande innan dei multifunksjonelle semiotiske representasjonane. Han seier dette med bakgrunn i at elevane ikkje berre kan bruke bestemte algoritmar i desse systema, og at prosessen kan ikkje bli laga til ei bestemt oppskrift. Med bakgrunn i Duval sitt utsegn, og ut i frå observasjonar og transkripsjon, var 8. klassingane både meir utforskande og kreative enn 10. klassingane. Kanskje bør vi korrigere oss sjølve og seie at 8. klasse også har større representasjonskompetanse enn vi trudde? Er ikkje dette indikasjonar på at 8. klassingane har tileigna seg konseptuell kunnskap?

5.3 Studien sine begrensingar

I vårt forskingsprosjekt er det nokre aspekt som er kritikkverdige, og det fyrste er omfanget til studien. Studien tek utgangspunkt i observasjon av to klassar der vi har vore inne tre økter i kvar klasse og observert. Utvalet er lite, og dermed blir ikkje resultata like generaliserbare på same måte som ei kvantitativ tilnærming ville gjort. På bakgrunn av tilgjengeleg tid, samt utfordringar kring Covid-19, var ikkje lengre prosess mogleg. Å erstatte vår kvalitative metode med ein kvantitativ hadde ikkje gjeve oss den heilskapelege og grundige datamaterialet som vi har frå informantane, noko som vidare hadde ført til at vi ikkje ville fått gode nok svar på forskingsspørsmåla våre.

Det er bortimot umogleg med fullstendig nøytralitet i kvalitativ forsking (Tjora, 2012), men ved å vera to forskarar vil graden av subjektivitet minske. Uansett vil ein kvalitativ studie bli påverka av dei som deltek, og av oss som forskarar. Tjora (2012) kallar påverknaden forskaren og forskingsprosjektet har på dei som blir studert for forskingseffektar. Både at vi var deltakande observatørar og at det i klasserommet var utstyr til lydopptak vil ha påverka åtferda til elevane og dermed skapt forskingseffektar.

Vi valte å ta lydopptak av elevane når dei løyste jobba i grupper med oppgåvene, noko som betyr at vi kan ha gått glipp av nonverbal kommunikasjon som vi kunne fått tilgang til ved å ta videoopptak. Ved å ha fleire innsamlingsmetodar som feltnotat, elevplakatar, samt at vi var deltakande observatørar, så meiner vi at vi fekk med oss mykje av denne kommunikasjonen likevel. All elevdiskusjon vart transkribert, og vi to gjorde dette saman med dei fyrste gruppene, slik at transkriberinga vart gjennomført på same måte. Frå den tematiske analysen, som vart kategorisert med utgangspunkt i Duval (2006) sitt rammeverk, valte vi ut dei elementa som var interessante og relevante for forskingsspørsmålet vårt. Vala vi tok, og tolkingane av dei, vil vera farga av vår praktiske og teoretiske bakgrunn. Det kan derfor vera interessante deler av dei matematiske diskusjonane som har vorte oversett, trass i at vi båe har vore gjennom alt av datamateriale fleire gongar. Vi har prøvd å etterkome råd frå Postholm og Jacobsen (2018) som seier at det er viktig å sjå på datamaterialet frå ulike synsvinklar, og at ein er så open som mogleg for det det vert forska på.

5.4 Vegen vidare

Vi har forska på få elevar i denne studien, men det har vore interessant å sjå på kva for representasjonar elevane kjenner til og korleis dei jobbar med desse representasjonane for å løyse problem. Det har også vore interessant å sjå på korleis elevane kombinerer ulike representasjonar og transformerer mellom desse. Eit av funna våre indikerer at dei eldste elevane har større representasjonskompetanse og bruker representasjonane meir fleksibelt enn dei yngre elevane. Dette kan samanliknast med forsking på reknestrategiar som viser at dei eldste elevane bruker reknestrategiar meir effektivt enn yngre elevar (Ostad, 2013).

For vidare forsking hadde det vore interessant å inkludere fleire elevar for å sjå om funna vi har no er gjeldane også for eit større omfang. Det kunne også vore interessant å sjå om elevane hadde vist det same repertoarregisteret om dei hadde jobba ein og ein i staden for i grupper.

Eit anna spørsmål som har dukka opp undervegs i forskinga er om elevane ikkje berre er fleksible, men også adaptive. For å undersøkje adaptivitet hjå elevane kunne vi til dømes brukt eit choice/no-choice design, der elevane i steg 1 løyser oppgåver med den representasjonen dei vil, og i steg må elevane løyse oppgåvene med bestemte representasjonar. I steg to noterer ein kva for representasjon som var den mest effektive, og samanliknar dette med representasjonen elevane brukte i steg 1. På denne måten kunne vi sett om elevane er adaptive og faktisk bruker den mest effektive representasjonen for å løyse problem. Vi kunne også samanlikna 8. og 10. klassingar i eit slik studie, og sett om 10. klassingane er meir adaptive enn 8. klassingane.

6 Avslutning

Gjennom arbeidet med masteroppgåva har vi erfart kor viktig det er å kunne bruke representasjonar. Det er heilt avgjerande å sjå samanhengen mellom ulike representasjonar og det matematiske objektet. Elevar som ikkje ser samanhengen kan få vanskar med å utvikle matematisk forståing (Svingen, 2018). For at elevane skal kunne sjå desse samanhengane er det viktig at dei får moglegheit til å utvikle representasjonskompetanse. Ved å utvikle denne kompetansen vil dei etter kvart kunne velje den representasjonen som passar best til eit formål (Niss & Jensen, 2002).

Vi har også sett at å skifte mellom representasjonar er utfordrande for mange elevar. Undervisninga bør leggjast opp slik at elevane får eit så breitt spekter av representasjonar som mogleg. Vi må også tilretteleggje for at elevane får transformere mellom representasjonar. Ved å gje elevane fleire verkty dei kan nytte legg vi til rette for at dei utviklar ei djupare forståing for matematikk. LK20 ynskjer at elevane skal vera aktive, nyfikne og undrande, og ved å arbeide med figurmønsteroppgåver gjev vi dei moglegheit til å vera akkurat dette parallelt med at dei utvidar si representasjonskompetanse. Duval (2006) seier at det viktigaste i undervisninga ikkje er å velje den «beste» semiotiske representasjonen, men å gjere elevane i stand til å bruke forskjellige representasjonar og sjå samanhengen mellom desse.

Vi såg ein markant forskjell mellom 8. og 10. klassingane i val av hensiktsmessige semiotiske representasjonar under arbeid med figurmønsteroppgåvene. Representasjonsfleksibiliteten var høgare hjå dei eldste elevane, naturleg nok. Fleire studie har vist at evna til å bruke ulike representasjonar fleksibelt har stor innverknad for utvikling av omgrepsforståing i matematikk og problemløysingskompetanse (Enge & Valenta, 2013). Elevane må ha kompetanse om ulike representasjonar for å kunne velje forskjellige løysingsmetodar ut i frå kva utfordringane er. Kompetansen om representasjonar kan ha positiv påverknad på deira matematiske utvikling.

Vi meiner at studien vi har gjennomført kan overførast til andre emne eller tema i matematikk, til dømes kva for strategiar elevar nyttar, eller kva for strategikompetanse som vert kravd for å møte utfordringar i framtida. Strategisk og fleksibel tenking er eigenskapar som både dagens og framtidas samfunn etterspør. Vi meiner også at studiet har overføringsverdi til oss lærarar slik at vi tenkjer gjennom korleis og kva vi vektlegg i undervisninga. Legg vi til rette for at elevane kan utvikle representasjonskompetanse og/eller strategikompetanse? Korleis blir oppgåvene presentert, legg vi dei fram slik at elevane ikkje berre byggjer opp strategisk kompetanse, men også dei andre komponentane som er naudsynte for å utvikle den matematiske kompetansen (Kilpatrick et al., 2001)? Elevar lærer korleis oppgåver skal løysast, men tek vi oss tid til å forklare kvifor metoden fungerer?

Det er tidkrevjande å byggje opp den relasjonelle forståinga hjå elevane (Skemp, 1976), men fornuftig med tanke på djubdelæring og formålet med matematikkfaget. Elevar med solide mentale strukturar vil sjølve vera i stand til å drive aktiv matematisk utforsking og diskutere løysingsstrategiar med kvarandre. Å gjera feil undervegs blir ein del av læringa, og samtaler og diskusjonar mellom elevane er viktig for å utvikle ytterlegare matematisk kompetanse. Oppgåver som ikkje har bestemte løysingsmetodar legg opp til at elevane etter kvart utviklar strategiar og blir effektive problemløysarar. Viss ein har fokus på relasjonell forståing og lærer elevane å bruke forskjellige verkty, som representasjonar og strategiar, vil elevane ha større moglegheiter til å løyse og meistre utfordringar på eiga hand. Utforskings- og problemløysingskompetansen elevane tileignar seg vil også førebu elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling, i tråd med læreplanens fagrelevans og sentrale verdiar.

Referansar

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal volume 12*, 107-126.

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher, *APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (ss. 57-71). American Psychological Association.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education.* Routhledge.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education (8. utg.).* Routledge.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61(1/2)*, 103-131.

Enge, O. & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten, 24(1)*, 8-12.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ark og app: Bruk av læremidler og ressurser på tvers av arbeidsformer.* Oslo: Universet i Oslo.

Grabiner, J. V. (2012). Why proof. A Historian's Perspective. *New ICMI Study Series (Vol. 15)*, 147-167.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder.* Bergen: Fagbokforlaget.

Guba, E. G. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries. *Educational Communication and Technology Journal, 29 (2)*, 75-91.

Hanna, G. (1989). Proof that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)*, 45-51.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education 41*, 535-540.

Hickendorff, M. (2018). Dutch sixth graders' use of shortcut strategies in solving multidigit arithmetic problems. *European Journal of Psychology of Education, 33(4)*, 577-594.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (ss. 1-23). New York: Routledge.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academies Press.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Forskningsetiske komiteer.

Newton, K. J., Lange, K. E. & Booth, J. (2020). Mathematical Flexibility: Aspects of a Continuum and the Role of Prior Knowledge. *The Journal of Experimental Education, 88(4)*, 503-515.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier - den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* København: Undervisningsministeriets forlag.

Nistal, A. A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J. & Verschaffel, L. (2009, juni 16). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: A critical review. *ZDM Mathematics Education (41)*, 627-636.

NSD. (2021, Mai 11). *Personverntjenester*. Henta frå Norsk senter for forskningsdata: https://www.nsd.no/personverntjenester/

NTNU. (2022, januar 12). *NVivo*. Henta frå ntnu.no: https://i.ntnu.no/wiki/-/wiki/Norsk/nvivo

Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2009). *Matematikkdidaktikk i klasserommet.* Oslo: Universitetsforlaget.

Ostad, S. A. (2013). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring: med fokus på elever med matematikkvansker (2. oppl. [i.e.rev.utg.]. ed.).* Trondheim: Læreboka forlag.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Oslo: Cappelen Damm AS.

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold: Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode, 3. utgave.* Bergen: Fagbokforlaget.

Siegler, R. S. (1994). Cognitive variability: A Key to Understanding Cognitive Development. *Psychological Science, 3*, 1-5.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 20-26.

Soundy, C. S. & Drucker, M. F. (2009). Drawing Opens Pathways to Problem Solving for Young Children. *Childhood Education, 86(1)*, 7-13.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 32 (1)*, 49-92.

Strømskag, H. (2017). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet, 22(2). *Nordisk matematikkdidaktikk*, 71-91.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 265-280.

Stylianou, D. A. (2013). An Examination of Connections in Mathematical Processes in Students' Problem Solving: Connections between Representing and Justifying. *Journal of Education and Learning 2*, 23-35.

Svingen, O. E. (2018). *Representasjoner i matematikk.* Trondheim: Matematikksenteret - Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.

Thagaard, T. (1998). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Torkildsen, S. H. (2020). *Mønster, sammenhenger og argumentasjon.* Trondheim: Matematikksenteret - Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School 13(8)*, 438-445.

Universitetet i Oslo. (2022, januar 30). *Nettskjema-diktafon mobilapp*. Henta frå uio.no: https://www.uio.no/tjenester/it/adm-app/nettskjema/hjelp/diktafon.html

Utdanningsdirektoratet. (2022). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems.* Lisse: Swetz & Zeitlinger B.V.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics volume 67*, 171-185.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring

Vedlegg 2: Oppgåvene elevane jobba med

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring (3 sider)

Vil du delta i forskingsprosjektet

Representasjonar og figurmønster

Dette er eit spørsmål til deg om å delta i eit forskingsprosjekt der føremålet er å sjå på korleis elevar jobbar med ulike representasjonar i arbeid med figurmønster. I dette skrivet gjev vi deg informasjon om måla for prosjektet og om kva deltaking vil innebere for deg.

Føremål

I samband med utdanninga vår som lærarspesialist i matematikk ved NTNU skal vi gjennomføre eit masterprosjekt. Dette prosjektet har som føremål sjå på korleis elevar på ulike klassesteg jobbar med representasjonar i arbeid med figurmønster.

Kven er ansvarleg for forskingsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærarutdanning er ansvarleg for prosjektet.

Kvifor får du spørsmål om å delta?

Grunn til at vi har valt å bruke ungdomsskuleelevar til studiet vårt er at vi vil sjå om det er forskjell på korleis 8. og 10. klassingar arbeider med figurmønster. Ein annan grunn til at vi valte denne gruppa er at vi trur ungdomsskuleelevar har ulik erfaring med representasjonar frå tidlegare. Representasjonar har ein stor del i den nye læreplanen i matematikk og det er derfor interessant å sjå på korleis elevane uttrykkjer matematiske begrep, samanhengar og problem.

Kva inneber det for deg å delta?

Deltakinga inneber at elevane deltek i ei undervisningsøkt som varar i 1,5 timer. Elevane vil få oppgåver med figurmønster som dei skal jobbe med i små grupper, der dei skal løyse oppgåvene på ulike måtar og forklare til kvarandre. Lærarane fungerer som rettleiarar og aktive observatørar i læringsprosessen. For å kunne analysere undervisningsøkta i etterkant vil vi bruke elevsvar, notatar og lydopptak. Resultata av studien vil bli brukt i vår masteroppgåve ved NTNU.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Dersom du vel å delta, kan du når som helst trekkje samtykket tilbake utan å gje nokon grunn. Alle personopplysingane dine vil då bli sletta. Det vil ikkje føre til nokon negative konsekvensar for deg dersom du ikkje vil delta eller seinare vel å trekkje deg.

Ditt personvern – korleis vi oppbevarer og bruker opplysingane dine

Vi vil berre bruke opplysingane om deg til føremåla vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandlar opplysingane konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Vi og rettleiaren vil ha tilgang til datamaterialet (elevsvar, notatar og lydopptak)
- Lydopptak vil bli lagra på NTNU si sky. Alt av elevsvar blir anonymisert.
- Namn blir ikkje nemnt, men deltakarane kan kjenne at teikningar eller skrift om det kjem med i oppgåva.

Kva skjer med opplysingane dine når vi avsluttar forskingsprosjektet?
Opplysingane blir anonymiserte når prosjektet er avslutta/oppgåva er godkjend, noko som etter planen er i september 2022. Da vil alt datamateriell som er innhenta bli destruert. Dei einaste personopplysingane som er relevante for vårt prosjekt er elevane sin alder.

Dine rettar
Så lenge du kan identifiserast i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i kva opplysingar vi behandlar om deg, og å få utlevert ein kopi av opplysingane,
- å få retta opplysingar om deg som er feil eller misvisande,
- å få sletta personopplysingar om deg,
- å få utlevert ein kopi av eleven sine personopplysningar (dataportabilitet), og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlinga av personopplysingane dine.

Kva gjev oss rett til å behandle personopplysingar om deg?
Vi behandlar opplysingar om deg basert på samtykket ditt.

På oppdrag frå NTNU, Institutt for lærarutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlinga av personopplysingar i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dersom du har spørsmål til studien, eller om du ønskjer å vite meir eller utøve rettane dine, ta kontakt med:

- Lærar/masterstudent Trond Brandsar (trond.brandsar@skjaak.kommune.no)
- Lærar/masterstudent Anna Krogstad (anna.krogstad@skjaak.kommune.no)
- Rettleiar Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)
- Vårt personvernombod ved NTNU Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)

Dersom du har spørsmål knytt til NSD si vurdering av prosjektet kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Venleg helsing

Eivind Kaspersen, Trond Brandsar og Anna Krogstad

Samtykkeerklæring

Eleven sitt namn:_______________

Eg har motteke og forstått informasjon om prosjektet *Representasjonar og figurmønster* og har fått høve til å stille spørsmål. Eg samtykker til at:

- ☐ barnet mitt kan å delta i undersøkinga.

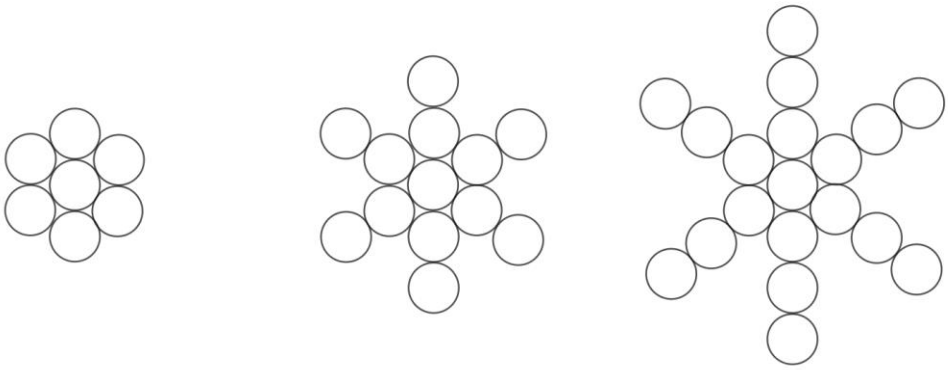
Eg samtykker til at opplysingane om barnet mitt kan behandlast fram til prosjektet er avslutta i september 2022.

(Signert av føresett, dato)

Vedlegg 2: Oppgåvene elevane jobba med (2 sider)

OPPGÅVE 1

Figuren nedanfor syner dei tre fyrste figurane i eit mønster.

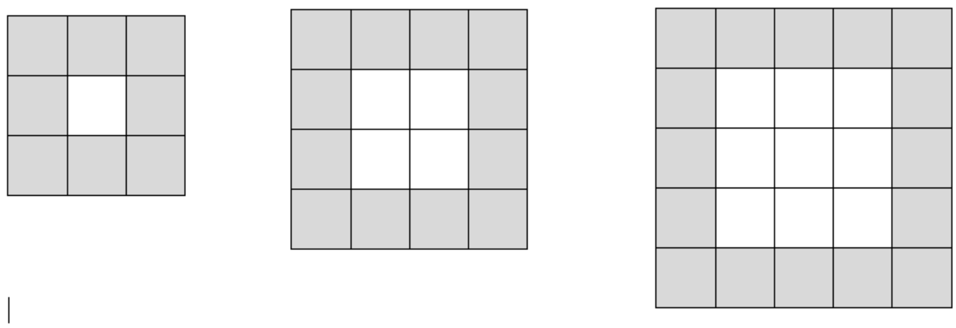


Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

a) Kor mange brikker treng vi til figur nr. 4 og 5?
b) Kan du forklare eller vise korleis du kan finne antalet for neste figur når du kjenner den føre?
c) Kan du forklare eller vise kor mange brikker som trengs til kva som helst figur (til dømes nr. 10 og nr. 35)?
d) Kan du finne andre måtar som syner utviklinga i mønsteret over? Vis korleis du har tenkt.

Oppgåve 2

Figuren nedanfor syner dei tre fyrste figurane i eit mønster.

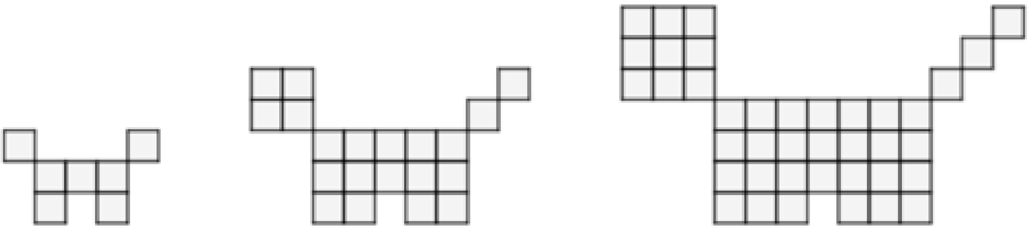


Figur nr. 1 Figur nr. 2 Figur nr. 3

a) Kor mange grå brikker treng vi til figur nr. 4 og 5?
b) Kan du forklare eller vise korleis du kan finne antalet for neste figur når du kjenner den føre?
c) Kan du forklare eller vise kor mange brikker som trengs til kva som helst figur (til dømes nr. 10 og nr. 35)?
d) Kan du finne andre måtar som syner utviklinga i mønsteret over? Vis korleis du har tenkt.

OPPGÅVE 3

Figuren nedanfor syner dei tre fyrste figurane i eit mønster.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Kor mange brikker treng vi til figur nr. 4 og 5?
b) Kan du forklare korleis du kan finne antalet for neste figur når du kjenner den føre?
c) Kan du vise eller forklare kor mange brikker som trengs til kva som helst figur (til dømes nr. 10 og nr. 35)?
d) Kan du finne andre måtar som syner utviklinga i mønsteret over? Vis korleis du har tenkt.

NTNU

Kunnskap for ei betre verd