Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Anne-Marte Hoelstad Mauset

Undervisningskompetanse i matematisk modellering.

En kvalitativ studie av to læreres opplevde utfordringer i arbeidet med en modelleringsaktivitet på 8. trinn.

Masteroppgave i Master lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 8-10.trinn
Veileder: Ole Enge
September 2022

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Anne-Marte Hoelstad Mauset

Undervisningskompetanse i matematisk modellering.

En kvalitativ studie av to læreres opplevde utfordringer i arbeidet med en modelleringsaktivitet på 8. trinn.

Masteroppgave i Master lærerspesialist, retning matematikkdidaktikk 8-10.trinn
Veileder: Ole Enge
September 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Matematisk modellering har de siste årene blitt aktualisert i Norge med innføringen av den nye læreplanen, LK20, der modellering og anvendelse er et av kjerneelementene i matematikk. Kjerneelementene er overordnet kompetansemålene og skal prege både undervisningen og vurderingen i faget. Flere forskere konkluderer med at det er læreren som har størst betydning når elevene skal tilegne seg modelleringskompetanse. Samtidig viser flere matematikkdidaktiske studier at matematisk modellering er langt mindre brukt i klasserommet enn det fagmiljøene ønsker. De samme studiene viser at lærerne synes det er krevende å undervise i matematisk modellering. Skal vi nå målene i den nye læreplanen, må det derfor sikres at lærerne innehar den nødvendige undervisningskompetansen i matematisk modellering.

Denne masteroppgaven ser på matematisk modellering fra lærerens perspektiv. Forskningsspørsmålet «*Hvilke opplevde utfordringer møter to lærere i arbeidet med en modelleringsaktivitet på 8. trinn?*» hadde som formål å få innsikt i hvilken kunnskap og erfaringer lærerne har med modelleringsaktiviteter, for bedre å forstå hvilke behov lærerne har for kompetanseheving innenfor matematisk modellering.

For å besvare forskningsspørsmålet ble datamaterialet innhentet gjennom intervjuer og observasjon. De to lærerne som deltok i studien ble intervjuet både før og etter arbeidet med modelleringsaktiviteten. I tillegg ble det gjort observasjon av klassen og tatt lydopptak av to fokusgrupper med elever under modelleringsaktiviteten. Datamaterialet ble analysert etter Braun og Clarke (2012) sin tematiske analyse. Rammeverket for analysen var Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) som har forsket på hvilken fagdidaktisk kunnskap lærerne trenger innenfor undervisningskompetanse i matematisk modellering. Analysen og tolkningen av datamaterialet ga meg tre funn.

Jeg fant ut at de to lærerne i undersøkelsen (1) hadde liten erfaring med matematisk modellering, både teoretisk og praktisk, (2) at lærerne opplevde det som utfordrende å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset elevgruppen og de aktuelle kompetansemålene i læreplanen, og (3) at det er krevende å forberede seg og stille gode spørsmål for å veilede elevene i modelleringsarbeidet.

Hovedfunnet i masteroppgaven er at lærernes manglende erfaring med modelleringsteori og modelleringsoppgaver legger hindringer for bruken av modelleringsaktiviteter i klasserommet. Resultatet viser med andre ord at det er behov for kompetanseheving hos lærerne for å nå intensjonene rundt kjerneelementet modellering og anvendelse i læreplanen.

Abstract

In recent years, mathematical modelling has become relevant in Norway with the introduction of the new curriculum, LK20, where modelling and application are one of the core elements of mathematics. The core elements are the main competence and shall characterize both the teaching and the assessment in the subject. Several researchers conclude that the teacher is the most important when the pupils acquire modelling competence. In contrary to the researchers' recommendations, didactic studies show that mathematical modelling is not being used enough in the classroom. The same studies point out that teachers find it challenging to teach mathematical modelling. If we are to achieve the goals of the new curriculum, it must therefore be ensured that the teachers gain the necessary teaching competence in mathematical modelling.

This master's thesis looks at mathematical modelling from the teacher's perspective. The research *question "What perceived challenges do two teachers face in the work on an 8th grade modelling activity?"* aimed to gain insight into the knowledge and experiences teachers have with modelling activities, to better understand what knowledge and competence the teachers need to obtain to teach mathematical modelling.

To answer the research question, the data was obtained through interviews and observation. The two teachers who participated in the study were interviewed both before and after the work on the modelling activity. During the modelling activity, the class was observed, and audio recordings were made of the two focus groups. The data was analyzed after Braun and Clarke's thematic analysis (2012). The framework for the analysis was Borromeo Ferri and Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) who have researched what didactic knowledge teachers need to teach mathematical modelling. The analysis and interpretation of the data gave me three findings.

I found that the two teachers in the survey (1) had little experience with mathematical modelling, both theoretically and practically, (2) that the teachers found it challenging to find modelling assignments that are adapted to the student group and current curriculum goals, and (3) that it is difficult to prepare and ask good questions to guide the pupils during the work with modelling activities.

The main finding in the master's thesis is that the teachers find their lack of experience in both theory and activities as an obstacle when it comes to using the modelling activities in the classroom. In other words, the results show the teachers have a need for expanding their competence to achieve the intentions of the core element of modelling and application in the curriculum.

Forord

Denne masteroppgaven avslutter min treårige lærerspesialistutdanning i matematikkdidaktikk 8-10 ved NTNU i Trondheim. Videreutdanningen har gitt meg mulighet til å fordype meg i ny forskning innenfor matematikk og matematikkdidaktikk, og ført til en bevisstgjøring rundt egen og skolens undervisningspraksis i matematikk. I denne prosessen ble jeg spesielt interessert i kjerneelementet modellering og anvendelse, som ble hovedtemaet i denne masteroppgaven.

Videreutdanning i kombinasjon med jobb og familie har til tider vært krevende, og jeg ønsker å rette en takk til de som har støttet og hjulpet meg underveis i arbeidet.

Først vil jeg rette en takk til lærerne og elevene som stilte som deltakere i datainnsamlingen. Spesielt lærerne som lot meg observere og intervju dem rundt et tema de hadde liten erfaring med.

Takk til veileder Ole for god støtte og konstruktive tilbakemeldinger.

Takk til ledelsen på skolen som har lagt til rette både for gjennomføring av datainnsamling og fleksibilitet under oppgaveskrivingen.

Takk til mine rause kollegaer som alltid er positive og støttende, og som har avlastet meg når det har stått på som mest.

Takk til Lars-Ivar, Annemieke, Siri og Marita for diskusjoner, innspill og korrekturlesing.

Den største takken går til familie og venner som har holdt ut med meg når tiden og fokuset har vært på masteroppgaven. Spesielt mannen min Lars Magne og barna våre Ada, Nora og Lars. Nå skal vi ta kveldene og helgene tilbake!

Anne-Marte Hoelstad Mauset

Stange, september 2022

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Modellering og anvendelse er et av de matematikkdidaktiske feltene som har blitt mest diskutert de siste årene (Blum & Borromeo Ferri, 2009). I Norge har temaet blitt aktualisert gjennom Kunnskapsløftet (LK20), der «matematisk modellering og anvendelse» er et av seks kjerneelementer i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020). I LK20 (2020) defineres matematisk modellering som en modell for å beskrive virkeligheten med et matematisk språk. Elevene skal få innsikt i hvordan modeller i matematikk blir brukt for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet.

Hensikten med en matematisk modell er gjerne å forstå en situasjon bedre for så å kunne ta gode beslutninger, for eksempel innenfor klimaspørsmål eller økonomi. Ved å bruke begrepene modellering og anvendelse vektlegges både det matematiske produktet og prosessen i overgangen mellom den virkelige situasjonen og matematikk (Blum, 2015).

Niss og Blum (2020) mener at det ikke lenger er et spørsmål *om* eller *hvorfor* modellering skal implementeres i skolen, men *hvordan* denne implementeringen skal gjennomføres. Til tross for dette viser studier at modelleringsaktiviteter blir langt mindre brukt i klasserommet enn det forskningsmiljøene ønsker (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Niss & Blum, 2020). En av hovedårsakene til den manglende bruken er at lærerne uttrykker at det er vanskelig å lede modelleringsaktiviteter i klasserommet (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Doerr, 2007). Escalante (2013) trekker fram utfordringen ved at lærerne selv har blitt undervist i matematikk på den tradisjonelle måten, og liten erfaring med å arbeide matematisk på den måten det er forventet at de skal undervise. Lærerne trenger derfor å utvikle kunnskaper, ferdigheter og verdier som er relevant innenfor matematisk modellering (Escalante, 2013). I tillegg viser forskning at matematisk modellering og anvendelse sjelden er en del av innholdet i lærerutdanning eller i videreutdanningskurs for lærere, noe som beskrives som en av de opprettholdende faktorene til den manglende bruken av modelleringsaktiviteter i klasserommet (Cetinkaya et al., 2016; Doerr, 2007).

Undervisningskompetanse i matematisk modellering betyr at læreren må kunne utføre modelleringsoppgaven som blir gitt, og i tillegg må læreren ha minst den samme matematiske og ekstra-matematiske kunnskapen som de forventer av elevene (Niss & Blum, 2020). *Ekstra-matematisk kunnskap* er kunnskap som ikke direkte vises i oppgaven, men som utarbeides fra personlige erfaringer knyttet til den gitte konteksten, ofte hentet fra andre fagfelt eller hverdagssituasjoner (Borromeo Ferri, 2018). Læreren må i tillegg kunne designe eller velge oppgaver som er tilpasset kompetansemålene i læreplanen. Oppgavene skal utfordre elevene, samtidig som de skal være tilpasset elevenes bakgrunn og forutsetninger. Læreren må kunne gjøre en kognitiv analyse av oppgaven for å forutse mulige hindringer for elevene, gjøre seg kjent med ulike løsningsmetoder og være bevisst sine egne preferanser for spesielle løsningsstrategier (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Doerr (2007) mener at lærerne i arbeid med modelleringsaktiviteter må engasjere seg i hvordan elevene tenker, lytte til elevene, trekke sammenhenger mot andre matematiske emner, respondere på ulike representasjoner og være forberedt på overraskende løsningsforslag. Borromeo Ferri (2013) refererer til internasjonale studier som konkluderer med at det er lærerens undervisningskompetanse i matematisk modellering som har størst betydning når elevene skal lære å jobbe med modelleringsoppgaver.

1.2 Forskningsspørsmål

Innholdet i LK20 tilsier at modellering og anvendelse skal ha en sentral plass innenfor både undervisning og vurdering i matematikkundervisningen. Internasjonal forskning viser at det har tatt lang tid å implementere modellering i klasserommet, og at bruken av modelleringsoppgaver er mindre enn det forskningsmiljøene ønsker (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Det er liten grunn til å tro at implementeringen av matematisk modellering vil gå lettere i Norge enn i andre sammenliknbare land. En av hovedårsakene som trekkes fram som argument for den manglende bruken av matematiske modellering i klasserommet, er at det oppleves krevende for lærere å lede modelleringsaktiviteter. Flere av disse utfordringene er å finne innenfor lærernes undervisningskompetanse i matematisk modellering (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2018; Niss & Blum, 2020).

Det er lite tilgjengelig forskning på norske læreres erfaring med modelleringsaktiviteter, og hvilken undervisningskompetanse i matematisk modellering lærerne innehar. I denne masteroppgaven ønsket jeg derfor å undersøke arbeidet med matematisk modellering sett fra lærerens perspektiv.

Jeg utarbeidet følgende forskningsspørsmål:

- *Hvilke utfordringer opplever to matematikklærere i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn?*

Forskningsspørsmålet er relevant for å innhente kunnskap om lærernes utfordringer i bruken av modelleringsaktiviteter i klasserommet. Verbet *opplever* i problemstillingen viser til at det er lærerens subjektive erfaringer som analyseres i datamaterialet og knyttes opp mot relevant teori. Ønsket er at denne kunnskapen skal være nyttig for å tilrettelegge for kompetanseheving av lærernes undervisningskompetanse innen matematisk modellering, både på egen arbeidsplass og på kommunalt nivå. Forhåpentligvis vil leserne av denne masteroppgaven også få ny innsikt innenfor fagfeltet.

1.3 Studiens oppbygning

Studien bygger på intervju av to lærere rundt matematisk modellering og observasjon av en modelleringsaktivitet i en klasse på 8. trinn. Datainnsamlingen er triangulert med intervju av både lærere og elever, observasjon av undervisning og lydopptak av to fokusgrupper med elever under arbeid med modelleringsaktiviteten. Datamaterialet ble transkribert og kodet etter stegene i Braun og Clark (2012) sin modell for analyse av kvalitative data, *tematisk analyse*.

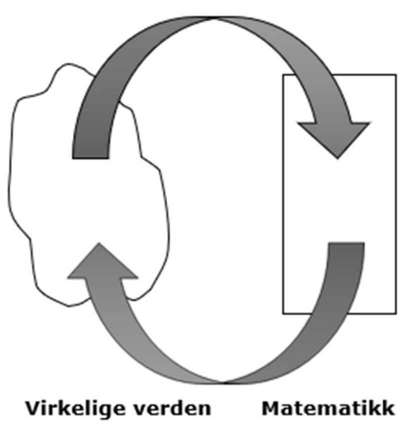
Oppgaven er bygget opp av seks hovedkapitler. Kapittel 2 inneholder relevant teori for studien, før det i kapittel 3 blir presentert og begrunnet valg av metode. I kapittel 4 legges funnene fra datamaterialet fram, som drøftes i kapittel 5. Oppgaven avsluttes med en oppsummering og forslag til aktuelle problemstillinger for videre forskning i kapittel 6.

2 Teori

I denne masteroppgaven undersøkes hvilke utfordringer to matematikklærere opplever i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn. Sentrale begreper i denne studien er matematisk modellering og undervisningskompetanse, og teoridelen er bygget opp med utgangspunkt i disse to hovedbegrepene. Kapittelet starter med en definisjon av matematisk modellering og modelleringskompetanse, før jeg går inn på teori innen undervisningskompetanse i matematisk modellering. Teorien rundt undervisningskompetanse i matematisk modellering er bygget opp rundt Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sitt rammeverk. Borromeo Ferri og Blum har identifisert fire dimensjoner som de trekker fram som sentrale innen undervisningskompetanse i matematisk modellering. I tilknytning til undervisningskompetansen i matematisk modellering vektlegges spesielt modelleringssyklusen til Blum og Leiβ (2007) som er relevant innenfor flere av dimensjonene i rammeverket.

2.1 Matematisk modell og matematisk modellering

I litteraturen finner vi ulike forståelser av matematisk modellering avhengig av hvilket teoretisk perspektiv studien og forskerne har (Kaiser & Sriraman, 2006). Enkelte teoretiske perspektiver ser på matematisk modellering som et verktøy for å lære matematikk sammen med matematiske begreper, mens andre fokuserer på modellering som en læreplanrettet kompetanse (Cetinkaya et al., 2016). Felles for alle perspektivene er at matematisk modellering er en systematisk prosess for å oversette et problem fra den virkelige verden til en matematisk modell, ved å beskrive, forstå, gjennomføre og kritisk anvende matematikk (Blomhøj, 2006; Blum & Borromeo Ferri, 2009). Figuren under er en forenklet illustrasjon av matematisk modellering som en prosess mellom den virkelige verden og matematikk.



Figur 1: Matematisk modellering (Borromeo Ferri, 2018). Egen oversettelse.

Matematisk modellering har vært et veletablert forskningsfelt innen matematikkdidaktikken de siste 40-50 årene. Spesielt de siste 10-15 årene har forskning innenfor matematisk modellering økt (Borromeo Ferri, 2018), og fått en mer sentral plass i flere lands læreplaner (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

Matematisk modellering skiller seg fra de tradisjonelle problemløsningsoppgavene, som ofte er omformulerte hverdagssituasjoner. Der problemløsningsoppgaver har som hensikt å øve på en spesifikk regneoperasjon, for eksempel addisjon eller subtraksjon, stimulerer modelleringsoppgaver til mer fleksibilitet og kreativitet hos elevene (Mousoulides et al., 2007). Henrik Pollak introduserte begrepet modellering og anvendelse i 1979, der han vektla både resultatet og prosessen i arbeidet med modelleringsoppgaver (Blum, 2015).

I alle situasjoner der vi anvender matematikk for å analysere eller beskrive en situasjon eller et hverdagsproblem bruker vi *matematiske modeller* (Scott et al., 2008). I arbeidet med å lage en matematisk modell er det mange valg og avgjørelser som må tas (Niss & Blum, 2020). Hensikten er gjerne å forstå en situasjon bedre, for igjen å kunne ta gode beslutninger, for eksempel innenfor klimaspørsmål eller smitteutvikling.

2.2 Matematisk modellering i skolen

I LK20 (2020) brukes Pollaks begreper modellering og anvendelse. Utdraget under viser at teorien over er gjenkjennbar i Kunnskapsdepartementets (2020) beskrivelse av innholdet i kjerneelementet:

> Ein modell i matematikk er ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk. Elevane skal ha innsikt i korleis modellar i matematikk blir brukte for å beskrive dagleglivet, arbeidslivet og samfunnet elles. Modellering i matematikk handlar om å lage slike modellar. Det handlar òg om å kritisk vurdere om modellane er gyldige, og kva avgrensingar dei har, vurdere modellane i lys av dei opphavlege situasjonane og vurdere om dei kan brukast i andre situasjonar. Anvendingar i matematikk handlar om at elevane skal få innsikt i korleis dei skal bruke matematikk i ulike situasjonar, både i og utanfor faget.

(Kunnskapsdepartementet, 2020)

LK20 (2020) ønsker at elevene gjennom modellering skal få innsikt i hvordan modeller i matematikk blir brukt i hverdagen. Gjennom arbeidet med matematisk modellering skal elevene øves til kritisk tenkning ved å vurdere ulike modeller. Ved å bruke begrepene modellering og anvendelse i læreplanen vises det til både den matematiske prosessen og det matematiske produktet i arbeidet med modelleringsaktiviteten (Blum, 2015).

Niss og Blum (2020) mener at det ikke lenger er et spørsmål *om* eller *hvorfor* modellering skal implementeres i skolen, men *hvordan* denne implementeringen skal gjennomføres. Fra nyere forskning trekker de fram to overordnede grunner til at modellering skal være en viktig del av matematikkundervisningen. Den første er *Matematikk for modelleringens skyld,* da det er et uttalt mål at elevene skal utdannes til å kunne ta del i det sosiale livet og bli uavhengige og fornuftige samfunnsborgere. Den andre er *modellering for matematikkens skyld,* der matematisk modellering er et verktøy for å få en dypere forståelse av matematikk (Blum, 2015; Niss & Blum, 2020). Blum og Niss (2020) sine argumenter samsvarer med Lesh og Caylor (2007), som skriver at matematisk modellering både kan være å løse problemer fra virkeligheten ved hjelp av matematikk, og å lære seg matematikk gjennom modelleringsaktiviteter.

Blomhøj (2006) gir tre argumenter for innføringen av matematisk modellering i skolen: *et samfunnsmessig, et undervisningsmessig og et læremessig perspektiv. Det samfunnsmessige perspektivet* handler om å avdekke den rollen som matematisk modellering har i samfunnet. *Det undervisningsmessige* perspektivet går ut på å begrunne og å utforme matematiske modeller som innhold i matematikkfaget på de ulike nivåene i utdanningssystemet, mens *det læringsmessige perspektivet* handler om å analysere de ulike mulighetene og utfordringene som er forbundet mellom matematikken og den virkelige verden. Det læringsmessige perspektivet inneholder også studier av vanskeligheter som er knyttet opp mot innlæringen av modelleringskompetanse (Blomhøj, 2006).

Å ta i bruk matematisk modellering i skolen har vist seg å være krevende. Niss og Blum (2020) oppsummerer i tre overordnede utfordringer som hindrer lærerne i å ta i bruk modellering i klasserommet:

1. At bruken av matematiske modeller i sosiale, kulturelle, teknologiske og forskningsbaserte kontekster og situasjoner i stor grad er usynlig for «ikke-eksperter».
2. At det er manglende modelleringskompetanse hos lærere, og
3. At rammeverk og krav som er satt for matematikklærere og undervisning, slik som kriterier, organisering av skolen og krav om summativ vurdering setter begrensninger.

(Niss & Blum, 2020, s. 90)

Det er viktig at læreren innehar den kompetansen som er nødvendig for å undervise i matematisk modellering (Niss & Blum, 2020). Matematisk modellering må av den grunn inkluderes i lærerutdanningen og videreutdanningskurs av lærere for å utfordre lærernes undervisningskompetanse, overbevisninger og hverdagsaktivitet i klasserommet (Niss & Blum, 2020).

2.3 Modelleringskompetanse

Modelleringskompetanse defineres ofte som en kompetanse i å identifisere relevante spørsmål, variabler, sammenhenger eller antagelser i en virkelig situasjon, og å oversette dette til matematikk. Videre skal den matematiske modellen tolkes, analyseres, valideres og kritisk vurderes opp mot situasjonen i oppgaven (Blomhøj & Jensen, 2007; Blum, 2015; Greefrath, 2015). Modelleringskompetanse er ifølge Niss og Blum (2020), evnen til å gjennomføre stegene i en modelleringsprosess. Underveis i modelleringsprosessen må elevene forstå oppgaven, lage en matematisk modell av situasjonen, gjøre beregninger og tolke resultatet. I tillegg må elevene analysere og sammenlikne de ulike modellene (Blum, 2015). Maaß (2006) oppsummere modelleringskompetanse som ferdigheter og evner til å utføre hele modelleringsprosessen, for deretter å ta resultatet i bruk.

I modelleringsaktiviteter er det behov for *ekstra-matematisk kunnskap.* Det er kunnskap som ikke direkte vises i oppgaven, men som utarbeides fra personlige erfaringer knyttet til den gitte konteksten (Borromeo Ferri, 2018). Ekstra-matematisk kunnskap hentes ofte fra andre fagfelt eller hverdagssituasjoner. Behovet for den ekstra-matematiske kunnskapen, i tillegg til fagspesifikk kunnskap, trekkes fram som spesielt utfordrende for lærerne når de skal undervise i at matematisk modellering (Blum, 2015).

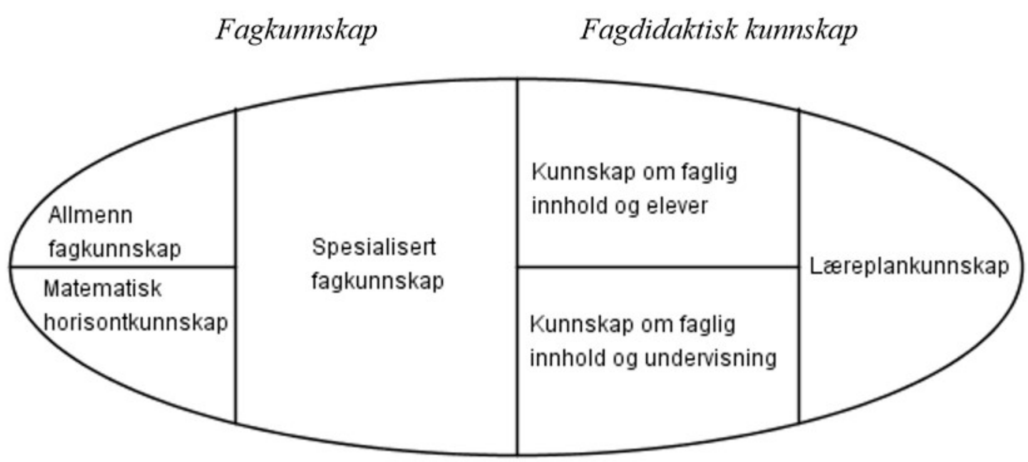
2.4 Undervisingskompetanse

Forskningslitteraturen innfor matematisk modellering peker på at lærerens rolle er uunnværlig i elevens arbeid med modelleringsoppgaver (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2013). I dette kapittelet redegjøres det for hvilken kompetanse læreren trenger for å gi elevene god undervisning i matematisk modellering. Kapittelet starter med teori rundt undervisningskompetanse i matematikk generelt, før det redegjøres for undervisningskompetanse i matematisk modellering spesielt.

Innen undervisningskompetanse i matematisk modellering beskrives Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sine fire dimensjoner som viser til hvilken fagdidaktisk kunnskap læreren trenger innenfor matematisk modellering. Dette rammeverket er i kapittel 3 brukt til å analysere datamaterialet.

2.4.1 Undervisingskompetanse i matematikk

Lee S. Shulman (1986) var en pioner i arbeidet med å identifisere hvilken del av lærerens kompetanse som er spesielt knyttet mot faglig kompetanse (Valenta, 2016). Han identifiserte fagkunnskap (*subject matter knowledge*) og fagdidaktisk kunnskap (*pedagogical content knowledge*), og han framhevet at disse henger tett sammen. Det er den fagspesifikke kunnskapen hos læreren som bygger bro mellom pedagogikk og det aktuelle faget, blant annet ved at læreren kan identifisere hva som er lett og krevende for elevene innfor fagfeltet (Shulman, 1986). Shulmans arbeid danner utgangspunkt for flere studier og ulike rammeverk for beskrivelse og analyse av hvordan matematikklærerkompetanse utvikles (Valenta, 2015). I Ball et.al (2008) vises det til et av disse studiene, der forskerne ser på hva som gjør undervisning i matematikk så spesielt, og hva som kreves av en lærer i faget. I begrepet undervisning ligger både å planlegge undervisningsøkter, evaluere elever, kommunisere med foresatte, lage og organisere hjemmearbeid, foreta tilpasninger og å forholde seg til føringer fra læreplanen (Ball et al., 2008). Ball et al. (2008) innførte begrepet *matematical knowledge for teaching*, på norsk oversatt til *undervisningskunnskap i matematikk*, som et overordnet begrep for å beskrive hvilken kompetanse som er nødvendig for å undervise i matematikk (Valenta, 2015). Ball et.al (2008) identifiserte seks hovedelementer i *undervisningskunnskap i matematikk* vist i figuren under:



Figur 2: Undervisningskunnskap i matematikk. Modellen er hentet fra Valenta (2015, s. 2)

Allmenn fagkunnskap er matematikk som er kjent for de som kan og bruker matematikk, men som ikke trenger å forklare «hvorfor». *Spesialisert fagkunnskap* i matematikk er kunnskap som er spesiell for matematikklæreren, men som ikke er nødvendig for andre. En viktig oppgave for læreren er å bryte ned faget for å gjøre innholdet tilgjengelig for elevene. Det handler også om å se muligheter i de ulike oppgavene, og å kunne vurdere og argumentere for forskjellige representasjoner. *Kunnskap om faglig innhold og elever* kombinerer fagkunnskap med elevkunnskap. En lærer trenger å forstå hvorfor en elev tenker som den gjør, kunne forutse elevsvar og strategier og ha kunnskap om hva elevene vil finne utfordrende eller interessant innenfor et emne*. Kunnskap om faglig innhold og undervisning* er kunnskap som brukes i planlegging av undervisning. Dette kan være valg av oppgaver, representasjoner, bruk av konkreter ol. En lærer som innehar denne kompetansen, er i stand til å knytte ulike elementer i faget sammen som et ledd i dybdeforståelsen (Valenta, 2015).

I tillegg til de fire kompetansene beskrevet over, identifiserte Ball et al. (2008) *læreplankunnskap* og *horisontkunnskap*. Disse to kan ses i sammenheng og er kunnskap om hvordan de matematiske emnene i læreplanene bygger på hverandre. Læreren har kjennskap til hva elevene skal ha lært på tidligere trinn, og hva de skal lære senere i utdanningsløpet (Ball et al., 2008; Valenta, 2015).

Oppsummert kan vi si at den kunnskapen matematikklæreren trenger for å undervise i faget har en matematisk og en didaktisk side som er tett knyttet sammen (Valenta, 2015). Læreren bør vurdere det faglige innholdet i aktiviteten for å avgjøre hvilke typer spørsmål, oppgaver eller arbeidsmåter som bør brukes (2015). Videre skal jeg se spesielt på hvilken kompetanse læreren trenger for å undervise i matematisk modellering.

2.4.2 Undervisingskompetanse i matematisk modellering

Fagdidaktisk kunnskap (*pedagogical content knowledge, PCK*) ses på som spesielt viktig når læreren skal undervise i matematisk modellering (Borromeo Ferri, 2018; Borromeo Ferri & Blum, 2009b; Doerr & English, 2006). Doerr (2007) argumenterer for at den kunnskapen læreren trenger for å undervise i matematisk modellering skiller seg fra tradisjonell matematikkundervisning på flere punkter. Hun trekker fram at læreren må engasjere seg i hvordan elevene tenker, lytte til elevene, trekke sammenhenger mot andre matematiske emner, respondere på ulike representasjoner, samt være forberedt på overraskende løsningsforslag. Niss og Blum (2020) viser til at matematisk modellering krever en undervisningsmetodikk med aktive elever som samhandler og kommuniserer med hverandre.

Escalante (2013) påpeker at de fleste lærerne har lært matematikk på den tradisjonelle måten, der problemløsning og modelleringsoppgaver ikke har vært en del av opplæringen. Dette betyr at lærerne ikke har lært å arbeide matematisk på den måten det er forventet at de skal undervise. Lærerne trenger derfor å utvikle kunnskaper, ferdigheter og verdier som er relevante innenfor matematisk modellering (Escalante, 2013), slik som verdien i elevenes ulike løsningsforslag og bruken av metakognitive spørsmål. Escalante (2013) viser spesielt til viktigheten av å danne læringsmiljøer som verdsetter og fremmer elevenes aktive deltakelse.

Undervisningskompetanse i matematisk modellering handler om at læreren må ha minst den samme matematiske og ekstra-matematiske kunnskapen som de forventer av elevene (Niss & Blum, 2020). Læreren må kunne designe og velge oppgaver som utfordrer elevene, samtidig som oppgaven skal være tilpasset elevenes bakgrunn og forutsetninger (Niss & Blum, 2020). Læreren må være kjent med ulike løsninger, samt være bevisst sine egne preferanser for spesielle løsningsstrategier (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Lærere som tilegner seg denne kunnskapen underviser bedre (Borromeo Ferri, 2018; Shahbari & Tabach, 2020). Denne innvirkningen på elevenes læring er illustrert i modellen under:

Figur 3: Fra lærerens kompetanse til elevenes læring (Borromeo Ferri, 2018). Egen oversettelse.

Borromeo Ferri (2013) refererer til internasjonale studier som viser at det er læreren som har størst betydning når elevene skal lære å jobbe med modelleringsoppgaver. Samtidig er gapet mellom utdanningsmiljøenes ønske om bruk av matematisk modellering i klasserommet og den reelle praksisen stor. Dette skyldes at lærerne opplever det som utfordrende å lede modelleringsaktiviteter (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Doerr, 2007). Det er en myte at lærerne vil tilegne seg nødvendig profesjonell kompetanse kun gjennom å undervise, og det er derfor nødvendig med en systematisk kompetanseheving (Blum, 2015). For at lærerskolestudenter og praktiserende lærere skal tilegne seg kunnskapen og forståelsen for matematisk modellering må de selv erfare å jobbe med modelleringsaktiviteter (Borromeo Ferri, 2018). Forskning viser imidlertid at matematisk modellering og anvendelse sjelden er en del av innholdet i lærerutdanningen eller i videreutdanningskurs for lærere, hvilket beskrives som en av årsakene til den manglende bruken av modelleringsaktiviteter i klasserommet (Cetinkaya et al., 2016; Doerr, 2007).

Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) har utarbeidet et rammeverk som ser på hvilke kompetanse lærere trenger for å gi elevene god undervisning i matematisk modellering.

2.5 Borromeo Ferri og Blum sine fire dimensjoner

Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) viser til hvilken kompetanse lærere trenger for å undervise i matematisk modellering. Disse funnene er basert på forskning gjort på lærerskolestudenter og videreutdanningskurs av lærere. Arbeidet er presentert i Borromeo Ferri og Blum (2009b) og utdypes i Borromeo Ferri (2018). Borromeo Ferri og Blum deler undervisningskompetansen inn i fire dimensjoner som anses som spesielt viktige i lærerens fagdidaktiske kunnskap innenfor matematisk modellering: *theoretical dimension, task dimension, instruction dimension* og *diagnostic dimension*. I mangel på norsk litteratur som beskriver dette rammeverket, har jeg oversatt disse begrepene til: *teoridimensjon, oppgavedimensjon, instruksjonsdimensjon og diagnostikkdimensjon*. De fire dimensjonene bygger på hverandre og må ses i sammenheng.

Teoridimensjon	• Kunnskap om modelleringssyklusen. • Kunnskap om hensikten og ulike perspektiver på modellering. • Kunnskap om ulike typer modelleringsoppgaver.
Oppgavedimensjon	• Kjenne til ulike løsningsstrategier på modelleringsoppgaven. • Kunne foreta en kognitiv analyse av modelleringsoppgaver. • Kunne designe modelleringsoppgaver.
Instruksjonsdimensjon	• Kunne planlegge og gjennomføre en modelleringsaktivitet. • Kunnskap om hensiktsmessige grep, støtte og tilbakemeldinger underveis i elevens modelleringsarbeid..
Diagnostikkdimensjon	• Evnen til å identifisere faser i modelleringsprosessen. • Kunne diagnostisere elevers vansker og feil i prosessen. • Kunne vurdere elevene i modelleringsaktiviteten.

Tabell 1: Borromeo Ferri og Blum sine fire dimensjoner (Borromeo Ferri, 2018; Borromeo Ferri & Blum, 2009b). Egen oversettelse.

Borromeo Ferri og Blum sitt rammeverk tilhørere den kognitive tilnærmingen til modellering, som betyr at den fokuserer på de kognitive prosessene som skjer i modelleringssyklusen (Borromeo Ferri, 2018). Den kognitive prosessen kan brukes til å analysere modelleringsoppgaver og elevenes modelleringsaktivitet. Rammeverket til Borromeo Ferri og Blum passet derfor godt som analyseverktøy av datamaterialet i denne masteroppgaven, der hensikten var å undersøke lærernes uttrykte utfordringer under en modelleringsaktivitet.

Videre presenteres Borromoe Ferri og Blum sitt rammeverk for undervisningskompetanse i matematisk modellering. Samtidig trekkes det inn relevant litteratur som støtter og utdyper de fire dimensjonene i rammeverket.

2.6 Teoridimensjon

Den første dimensjonen i modellen handler om hva matematisk modellering er, hvordan begrepet blir tolket internasjonalt og de ulike perspektivene på modellering.

Matematisk modellering er en komplisert prosess, og læreren må i tillegg til teori rundt ulike perspektiver på matematisk modellering tilegne seg forståelse av ulike modelleringssykluser (Borromeo Ferri, 2018).

I 2006 utviklet Kaiser og Srirman (2006) en klassifisering av de ulike perspektivene og retningene innen matematisk modellering. De skiller mellom de ulike perspektivene med bakgrunn i modellenes sentrale mål og bruken av de ulike modellene. De ulike teoretiske perspektivene av matematisk modellering er vist i tabellen under:

Navn på tilnærming	Sentrale trekk
Realistisk eller anvendt modellering	Målet er å løse og forstå problemer fra den virkelige verden, og å fremme modelleringskompetanse ved hjelp av autentiske eksempler. Problemene er ofte komplekse og er godt egnet til prosjektarbeid.

Kontekstuell modellering	Denne retningen har lange tradisjoner på det amerikanske kontinentet og handler om å matematisere virkeligheten (Lesh & Caylor, 2007). Her trekkes retningen "Model-Eliciting Activity" (MEA) fram. I MEA legges det like mye vekt på tolkningen av oppgaven som selve resultatet.
Utdanningsrettet eller pedagogisk modellering	Pedagogiske og fagrelaterte mål: a) Strukturering og utvikling av læringsprosesser. b) Introduksjon og utvikling av begreper. Dette er den mest brukte kategorien og det finnes flere modeller og studier som tilhører denne retningen. Kategorien kan omhandle å utvikle og evaluere utviklingsprosesser i matematisk modellering. Å lære seg modelleringskompetanse er et mål i seg selv.
Sosiokritisk modellering	Det pedagogiske målet er kritisk tenkning om, og forståelse av omverdenen. Dette perspektivet har først og fremst sitt opphav og utbredelse i Sør-Amerika, og særlig Brasil.
Epistemologisk eller teoretisk modellering	Denne retningen er teoriorientert der målet er å arbeide med og utvikle spesifikke teorier. Matematisk modellering brukes i denne kategorien først og fremst som et verktøy for å jobbe matematisk. Læring om modelleringsprosessen er ikke nødvendigvis så sentralt i denne retningen.
Metaperspektiv: Kognitiv modellering	Modellen brukes innen forskning til analyse og forståelse av de kognitive prosessene som finner sted under modelleringsprosessen. Det pedagogiske målet er å utvikle matematiske tankeprosesser ved bruk av modeller som bilder, eller ved å se på modellering som en mental prosess på lik linje med abstraksjon og generalisering.

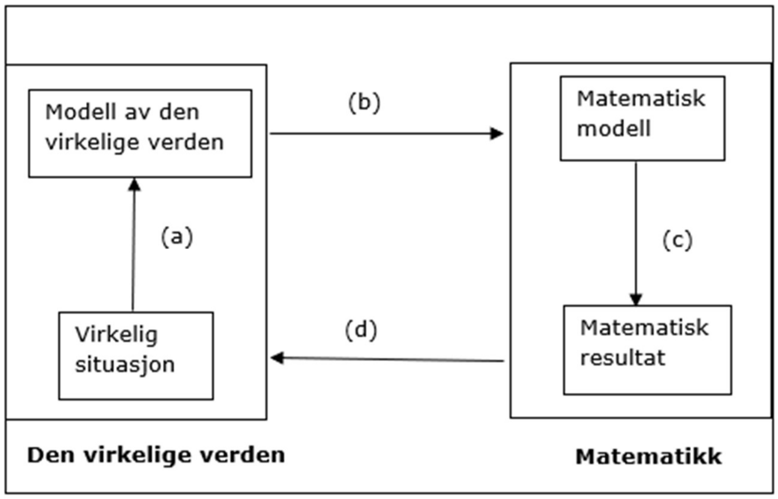
Tabell 2: De ulike teoretiske perspektivene av matematisk modellering (Borromeo Ferri, 2018, s. 18; Kaiser & Sriraman, 2006, s. 304). Egen oversettelse.

Selv om disse teoretiske perspektivene er definert fra et forskerperspektiv, kan kjennskap til de ulike perspektivene hjelpe læreren til å forstå og analysere intensjonen i læreplanverket. Læreren vil også få en dypere forståelse i valg av modelleringsoppgaver, planlegging av undervisning, og veiledning og vurdering av elevene (Borromeo Ferri, 2018).

2.6.1 Modelleringssyklussen til Blum og Leiβ

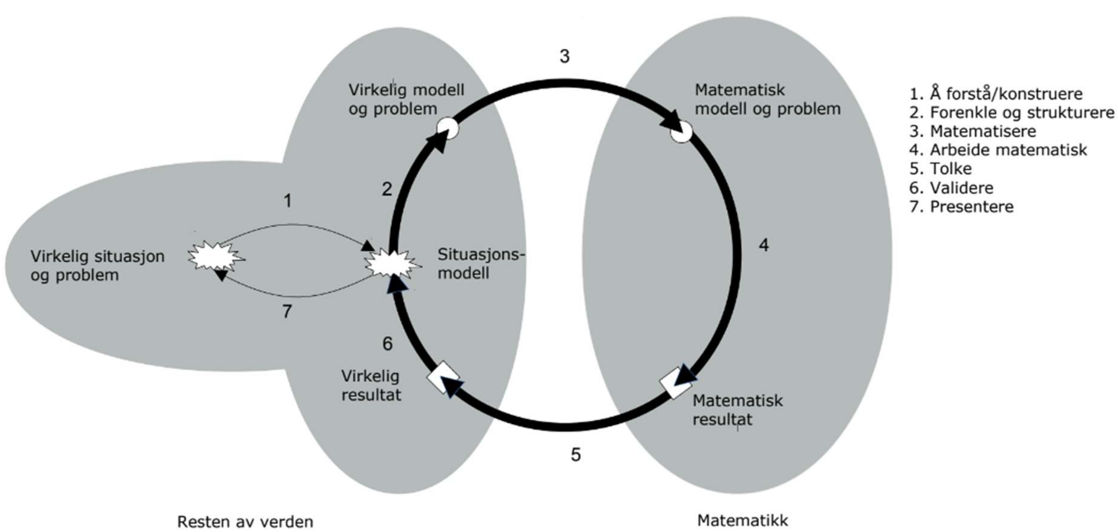
Det finnes mange ulike modelleringssykluser, avhengig av hvilket perspektiv på modellering, og i noen sammenhenger, hvor kompleks modelleringsoppgaven som blir brukt er (Borromeo Ferri, 2006). Borromeo Ferri (2013) mener det er lærerens ansvar å kjenne til noen av disse syklusene og bruke dem til å reflektere rundt potensialet til modelleringsaktiviteten. Borromeo Ferri (2018) påpeker at modelleringssyklusene bør knyttes opp mot implementeringen av modelleringsoppgaver i skolen, da en modelleringssyklus kan være et nyttig læringsinstrument for elevene og et diagnoseverktøy for lærere (Borromeo Ferri, 2018).

En av de tidligste modelleringssyklusene er den didaktiske representasjonen av Kaiser (1995) og Blum (1996). Denne representasjonen er basert på kognitiv psykologisk forskning rundt elevers arbeid med modelleringsoppgaver (Borromeo Ferri, 2006).



Figur 4: Egen oversettelse av Kaiser og Blum sin modelleringssyklus. Hentet fra Borromeo Ferri (2018).

Modellen til Kaiser og Blum har senere blitt bearbeidet og gjort mer detaljert av blant annet Blum og Leiβ (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Blum og Leiβ sin modelleringssyklus er kategorisert som en *diagnostisk modelleringssyklus/modelleringssyklus fra et kognitivt perspektiv* (Borromeo Ferri, 2018). Lester (2010) og Blum (2015) omtaler Blum og Leiβ sitt rammeverk som et konseptuelt rammeverk, som betyr at det bygger på ideer fra et variert utvalg av teorier. Rammeverket er anerkjent og mye brukt til analyse av elevers kognitive arbeid innen matematisk modellering (Blum, 2015; Lester Jr, 2010).



Figur 5: Blum og Leiß sin modelleringssyklus (2007). Egen oversettelse.

Modelleringssyklusen til Blum og Leiβ (2007) starter med et virkelig problem eller et problem som kunne vært hentet fra virkeligheten, som deretter går over i den matematiske verden. Mellomrommet mellom de to områdene i modellen illustrerer et skille mellom disse to verdenene. Modelleringssyklusen består av sju steg og kan brukes til å analysere modelleringsoppgaver eller til å forutse mulige hindringer i elevenes kognitive prosess. Under er en kort beskrivelse av disse sju stegene:

1. *Å forstå/konstruere:* Teksten og bilder i oppgaven må forstås av eleven, og en situasjon for modellen må lages. Elevens tidligere erfaringer fra virkeligheten vil påvirke hvordan problemet oppfattes (Borromeo Ferri, 2018).

2. *Forenkle og strukturere:* Situasjonen må forenkles, struktureres og gjøres mer presis. Dette leder til en virkelig modell av situasjonen. Eleven må avgjøre hva i situasjonen det er viktig å jobbe videre med.

3. *Matematisere*: Situasjonen må omformes til en matematisk modell. Eleven må i dette steget gjerne løse et eller flere matematiske problemer.

4. *Arbeide matematisk:* Eleven må for eksempel gjøre beregninger, lage uttrykk og løse likninger. Dette skal føre til et matematisk resultat.

5. *Tolke*: De matematiske resultatene skal tolkes opp mot det virkelige problemet, for å se om de matematiske modellene virkelig er modeller for den virkelige situasjonen.

6. *Validere*: Eleven må avgjøre om resultatet er gyldig opp mot modellen av situasjonen. Dersom den ikke er det, kan prosessen gjøres på nytt.

7. *Presentere*: Prosessen avsluttes ved at det endelige resultatet på problemet presenteres.

(Blum & Borromeo Ferri, 2009, s. 46)

I arbeidet med modelleringsaktiviteten vil ikke elevene følge den oppsatte modelleringssyklusen, men bevege seg mellom de ulike stegene i det som kalles individuelle *modelleringsruter* (Blum & Borromeo Ferri, 2009). I arbeidet med modelleringsaktiviteten kan det være behov for å gå i loop i denne modellen flere ganger. Hensikten med en modelleringsaktivitet er ikke bare å beskrive og forklare situasjonen, men også å forutse og skape deler av den virkelige hendelsen (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

2.6.2 Matematisk tankesett

For at læreren skal forstå elevenes modelleringsruter og løsningsstrategier, er det nødvendig at de har kunnskap om hvordan de selv møter modelleringsoppgaver, altså sitt eget matematiske tankesett (Borromeo Ferri, 2018). Begrepet *matematisk tankesett* refererer til individets eget ønske om hvordan presentere, forstå og tenke gjennom matematiske fakta og sammenhenger. Det matematiske tankesettet deles gjerne inn i tre hovedkategorier (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2018):

Visuelt tankesett: en visuell tenker bruker interne bilder og billedlige representasjoner for forståelse av matematiske fakta. De indre bildene påvirkes av assosiasjoner fra tidligere opplevde situasjoner.

Analytisk tankesett: en analytisk tenker er i stand til å forstå matematiske fakta gjennom bruk av matematiske symboler og verbale representasjoner, og foretrekker å arbeide med disse stegvis.

Integrert tankesett: individer med integrert tankesett kombinerer den visuelle og den analytiske måten å tenke på. De er i stand til fleksibelt å bytte mellom de ulike representasjonene.

Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; Borromeo Ferri & Blum, 2009a) viser til studier der tyske lærere ble observert i arbeid med modelleringsoppgaver. Det var gjennomgående i disse studiene at lærerne ikke reflekterte over hvordan de håndterte modelleringsoppgaver i klasserommet med tanke på deres egne foretrukne tankesett og foretrukne veiledning. Enkelte elever forklarte at de ikke forsto hva læreren prøvde å lære dem innen matematikk (Borromeo Ferri & Blum, 2009a). En årsak kan være at det matematiske tankesettet til læreren ikke matchet elevens, slik at de ikke snakket det samme matematiske språket (Borromeo Ferri & Blum, 2009a). Kjennskap til sitt eget og elevens tankesett kan hjelpe læreren til bedre å forstå elevenes individuelle modelleringsruter, og ut ifra denne kunnskapen velge hensiktsmessige modelleringsoppgaver (Borromeo Ferri, 2018).

2.7 Oppgavedimensjon

Oppgavedimensjonen er den andre dimensjonen i modellen. Oppgavedimensjonen handler om å forutse ulike løsningsstrategier i modelleringsoppgaven, og å kunne foreta en kognitiv analyse for å finne ut om oppgaven passer til målgruppen og hvilke utfordringer elevene kan møte. Oppgavedimensjonen handler også om å velge ut og designe egne modelleringsoppgaver.

Arbeid med oppgaver er den viktigste aktiviteten for elevene i matematikktimer og tester, og elevenes matematikkompetanse øker i arbeid med oppgaver med passende vanskelighetsgrad (Blum, 2015). Læreren har her behov for kunnskap om modelleringssyklusen, for eksempel syklusen til Blum og Leiβ (2007), slik at hun kan foreta en kognitiv analyse av modelleringsaktiviteten for å vurdere om den er egnet for elevgruppen (Niss & Blum, 2020). Valg av oppgaver er essensielt for å fremme elevenes matematiske praksis og kompetanse, og oppgavene bidrar i tillegg til å strukturere timene og gir mulighet for ulike undervisningsmetoder (Borromeo Ferri, 2018). Modelleringsoppgaver defineres ved at de inneholder et hverdagsproblem. Lesh og Doerr (2003) er tydelig på at disse oppgavene ikke kan løses med standard algoritmer, og elevene trenger derfor strategier for hvordan de skal angripe og løse modelleringsoppgaver (Borromeo Ferri, 2018).

Matematikklærerne har en viktig jobb med å velge ut eller lage oppgaver som er tilpasset en gitt elevgruppe (Blum, 2015). Borromeo Ferri (2018) viser til at det er utfordrende for læreren å finne modelleringsoppgaver som dekker de ulike kompetansemålene i læreplanen, og det er lite tid til å lage egne oppgaver. Borromeo Ferri (2018) påpeker videre at tilgangen på modelleringsoppgaver er en begrensende faktor, og at lærere har behov for en ressursbank med undervisningsmateriell av god kvalitet. Antonius et. al. (2007) viser også til utfordringer rundt mangel på gode modelleringsoppgaver som samsvarer med læreplanens intensjoner og kompetansemål i sin forskning. Blum og Niss (2020) motsier dette i nyere studier der de trekker fram at modelleringsoppgaver er tilgjengelig på en rekke åpne internasjonale nettressurser. De argumenterer for at det ikke lenger bør være et problem å finne passende modelleringsoppgaver.

Å designe egne modelleringsoppgaver krever trening, helst som gruppearbeid, da arbeidet er utfordrende selv for erfarne lærere (Borromeo Ferri, 2018). I starten vil det ta mye tid å lage egne modelleringsoppgaver, og en aktivitet kan være å omarbeide problemløsningsoppgaver fra lærebøker til modelleringsoppgaver (Borromeo Ferri, 2018). Både når læreren skal velge ut, og når hun skal designe modelleringsoppgaver, må hun jobbe med å identifisere de ulike stegene i oppgaven knyttet opp mot modelleringssyklusen. Videre må læreren reflektere over de ulike løsningsstrategiene elevene kan komme til å bruke. Læreren må tenke over om konteksten passer til aldersgruppen, om arbeidsmengden er tilpasset tilgjengelig tid og om elevene har tilgang til det materiellet som er nødvendig for å løse oppgaven (Borromeo Ferri, 2018).

Borromeo Ferri (2018) refererer til en studie hun og Lesh gjennomførte i 2013 sammen med praktiserende lærere på flere nivåer i skolesystemet. I dette arbeidet ble det utarbeidet følgende kriterier for hva som er en god modelleringsoppgave:

Meningsfulle modelleringsoppgaver: Dersom elevene skal engasjere seg i modelleringsoppgaven må oppgaven oppleves som meningsfull å jobbe med.

Alderstilpasset og realistisk: Alle har ulike syn på hva som er realistisk og har gjort seg ulike erfaringer i livet. Elevene i en klasse er derfor heller ikke homogene. Læreren må bruke sin kjennskap til elevene for å vurdere hvilke oppgaver som passer i sin klasse.

Mulighet for utvidede spørsmål: En modelleringsoppgave bør gi elevene mulighet til å stille nye spørsmål ut fra oppgaven, både matematiske, kontekstuelle og realistiske ut fra situasjonen i oppgaven.

Stimulering av en helhetlig læring: En modelleringsoppgave kan gi mulighet til å «lære med flere sanser». Mange modelleringsoppgaver er designet for å kunne løses utenfor klasserommet.

Tilpasset språk: Modelleringsoppgaven må ha et språk tilpasset elevgruppen, for å unngå at begreper i oppgaven hindrer elevene i å lage mentale bilder av konteksten i oppgaven.

(Borromeo Ferri, 2018, s. 47)

Et eksempel på en modelleringsoppgave tilpasset norske elever er Bjarnes Bensindilemma. Denne er tilgjengelig på matematikksenterets ressursside MatteList[1] (Matematikksenteret, udatert).

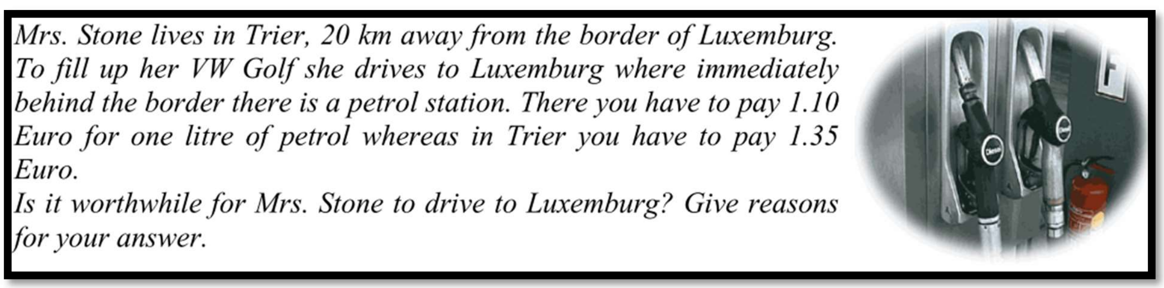
[1] MatteList er en samling med ressurser innenfor emner i tall og algebra, geometri og data og statistikk. Oppgavene skal være enkle å komme i gang med, samtidig som de kan gi utfordringer.

Bjarnes Bensindilemma

Bjarne Vik bor 20 km fra svenskegrensa, og når han skal fylle bensin på sin VW Golf, kjører han til Sverige for å fylle tanken. Det ligger nemlig en bensinstasjon like over grensa. I Sverige koster bensinen 13,50 kroner pr. liter. I Norge koster bensinen 15,50 kroner pr. liter. Er det verdt kjøreturene til Sverige for Bjarne? Begrunn svaret ditt.

Figur 6: Bjarnes Besindilemma hentet fra MatteList (Matematikksenteret, udatert).

Denne oppgaven er inspirert av «Filling up» som er presentert i Blum og Ferri (2009). «Filling up» er brukt i flere av de internasjonale studiene innen matematisk modellering. Se for eksempel Blum og Borromeo Ferri (2009) og Niss og Blum (2020).



Mrs. Stone lives in Trier, 20 km away from the border of Luxemburg. To fill up her VW Golf she drives to Luxemburg where immediately behind the border there is a petrol station. There you have to pay 1.10 Euro for one litre of petrol whereas in Trier you have to pay 1.35 Euro.
Is it worthwhile for Mrs. Stone to drive to Luxemburg? Give reasons for your answer.

Figur 7: «Filling up» hentet fra Blum og Borromeo Ferri (2009).

Bjarnes Bensindilemma er designet som en modelleringsoppgave der elevene må ta stilling til en del variabler underveis i prosessen. Elevene må bearbeide en situasjon fra virkeligheten, gjøre denne om til matematisk språk, behandle problemet og oversette tilbake til den virkelige situasjonen og validere svaret (Matematikksenteret, udatert).

Oppgaven kan ses på som *meningsfull* for elevene på ungdomstrinnet som nærmer seg øvelseskjøring. Den er *tilpasset aldersgruppe*n 15-16 år, både med tanke på konteksten og det matematiske potensialet. Matematikksenteret har koblet oppgaven opp mot kompetansemålet «*bruke funksjonar i modellering og argumentere for framgangsmåtar og resultat*» på 10. trinn (Matematikksenteret, udatert). Oppgaven gir rom for *utvidede spørsmål* som for eksempel *«Hvilke faktorer må endres for at elevene skal endre sin anbefaling til Bjarne?»* Oppgaven kan bidra til at elevene ser sammenheng mellom hverdagssituasjonen og matematikk. For å løse problemet må elevene bruke ekstra-matematisk kunnskap for å gjøre antakelser i oppgaven, som størrelsen på bensintanken og forbruket til en Golf.

Borromeo Ferri (2018) viser til viktigheten av at læreren jobber seg gjennom modelleringsoppgaven i forkant, for lettere å kunne forutse hvor elevene vil møte hindringer. Modelleringsoppgaver er åpne problemer, som gjør dem uforutsigbare for lærerne på flere områder, spesielt om vi sammenlikner med tradisjonelle matematikkoppgaver med faste regler og algoritmer. Matematisk modellering har et rikt potensial av matematikk og vil derfor utfordre både høyt og lavt presterende elever i det samme klasserommet (Borromeo Ferri, 2018). Lærere med liten erfaring med modelleringsoppgaver ser ofte på oppgavetypen som for krevende og komplekse for sine elever, en holdning som ifølge Borromeo Ferri endres i det læreren selv gjør seg erfaringer i bruk av modellering (2018). For å få erfaring innfor oppgavedimensjonen er det viktig at lærerskolestudenter og praktiserende lærer jobbe med å reflektere rundt modelleringsaktiviteter. Utprøvinger viser at dette utviklingsarbeidet gjøres best i samspill med andre studenter eller lærere (Borromeo Ferri, 2018).

2.8 Instruksjonsdimensjon

Under denne dimensjonen finner vi planlegging av undervisningsøkta med fokus på modelleringsaktiviteten. I instruksjonsdimensjonen trenger læreren den kunnskapen hun har tilegnet seg i teoridimensjonen, som kjennskap til ulike perspektiver på modellering og modelleringssykluser. Læreren må kunne gjøre en kognitiv analyse av modelleringsaktiviteten, slik at hun kan forberede kognitive og metakognitive spørsmål som kan utfordre og gi elevene gode tilbakemeldinger underveis i modelleringsprosessen (Borromeo Ferri, 2013; Niss & Blum, 2020).

Funn fra empiriske data viser fem viktige kriterier for undervisning i matematisk modellering (Blum, 2015; Borromeo Ferri, 2018; Niss & Blum, 2020). Disse kriteriene er: *effektivt og læringsorientert klasseromsmiljø, kognitiv aktivering av elevene, metakognitiv aktivering av elevene, oppmuntring av ulike løsningsstrategier og matematisk modellering som en langsiktig innlæringsprosess.*

Effektivt og læringsorientert klasseromsmiljø: God organisering av klasserommet gir elevene mulighet til å tenke selv, og det anbefales at elevene jobber i grupper. I planleggingen av en modelleringsaktivitet er det viktig å sikre at elevene får nok arbeidstid. Elevene trenger tid til å arbeide med oppgaven, tid til diskusjon på gruppen og refleksjon i hel klasse. Det må også settes av tid til evaluering og validering på slutten av økta. Lærerens oppgave er å observere elevenes progresjon i modelleringsaktiviteten. Læreren må være tydelig på at arbeidet med modelleringsoppgaver ikke er en vurderingssituasjon, men en læringssituasjon der misoppfatninger og feil er en mulighet for læring.

Kognitiv aktivering av elevene: I all undervisning bør målet være å aktivisere elevene kognitivt. Å delta kognitivt betyr at elevene er aktivt engasjert, ved å danne seg og dele egne ideer, ved å være aktive i grupper eller i hel-klassediskusjoner. Modelleringsaktiviteter kan stimulere elevene i disse fasene.

Metakognitiv aktivering av elevene: Metakognitiv aktivitet bør være en sentral del av matematisk modellering fra første møte med denne oppgavetypen. Elevene må gjøres bevisst sine egne tankeprosesser i valg av strategier gjennom refleksjon og diskusjon

(Maaß, 2006). Metakognitive spørsmål fra lærer kan være spørsmål som: «Hvilke ideer førte deg til denne matematiske modellen?» (Borromeo Ferri, 2018).

Oppmuntring av ulike løsningsstrategier: En modelleringsoppgave har ikke kun ett korrekt svar, men mange mulige løsninger. Elevenes mange løsningsstrategier, som ikke alltid er like innlysende, gjør det ofte krevende for læreren. En av hensiktene med modelleringsaktiviteter er at elevene skal oppmuntres til å bruke ulike løsningsstrategier knyttet opp mot deres preferanser. Det er viktig at læreren ikke påvirker elevene med sin egen favorittløsning. Forskning viser at elever som finner ulike løsningsstrategier lærer mer (Borromeo Ferri, 2018). Fra et metakognitivt aspekt kan et oppfølgingsspørsmål til elevene være «På hvilke andre måter er det mulig å løse denne oppgaven?».

Matematisk modellering som en langsiktig innlæringsprosess: Både læring og undervisning i modellering må ses på i et langtidsperspektiv. Modelleringsoppgaver må tas inn i hverdagsundervisningen, enten knyttet opp mot ulike temaer eller som spesifikk øving i modelleringskompetanse. Borromeo Ferri (2018) viser til at elevene trenger minst to modelleringsoppgaver i måneden for å få oppgavetypen «under huden».

Det er en stor forskjell mellom elever som jobber selvstendig med modelleringsoppgaver med støtte av lærer, og elever som jobber alene uten støtte fra lærer (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Blum og Borromeo Ferri (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2018) sine studier, som bekreftes i det tyske DISUM-prosjektet[2], trekker fram at god undervisning i matematisk modellering har en ideell balanse mellom elevenes selvstendige arbeid og veiledning fra læreren, inspirert av Marie Montessori sitt sitat *«Help me to do it by myself"* (Blum & Borromeo Ferri, 2009, s. 52). Læreren må kunne kjenne igjen og legge merke til om elevene gjør framskritt i modelleringsprosessen, samt vurdere om det er hensiktsmessig med inngrep eller ikke (Borromeo Ferri, 2018). Stillman (2015) refererer til Goos sine tre «røde flagg»-situasjoner innen metakognitive feil hos elevene; (a) mangel på progresjon, (b) feilsøking og (c) urealistiske svar, og at disse problemene kan oppstå i alle faser i modelleringsprosessen. Den beste balansen oppnås når veiledningen fra læreren er tilpasset og støtter elevenes selvstendige arbeid. Noe som betyr at lærerens veiledning til elevene bør gis på et metakognitivt nivå, som for eksempel: «Se for deg situasjonen!», «Hva er målet?», «Hvor langt har du kommet?», «Hva mangler fortsatt?», «Passer dette resultatet til den virkelige situasjonen?». Slike inngrep, der lærer utfordrer elevene til å reflektere over egen læringsprosess har vært lite verdsatt i tradisjonell matematikkundervisning (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Blum (2015) refererer til forskning som viser at selv erfarne læreres spontane inngrep i modelleringsoppgaver ikke er selvstendighetsskapende for elevene. I hverdagsklasserommet har læreren en tendens til å bruke oppgaverelaterte inngrep, ofte for å unngå hindringer eller feil før de oppstår. En typisk felle er at læreren gir fra seg sin favorittløsning, uten selv å være klar over det (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Lesh & Caylor, 2007).

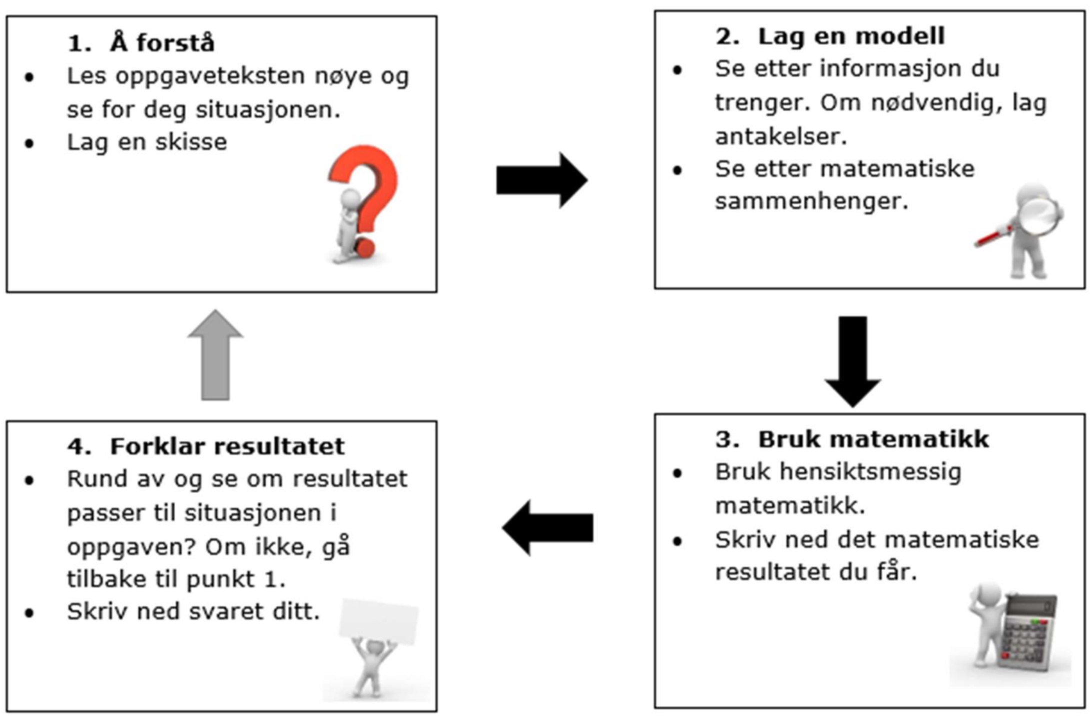
4-stegsmodellen som er beskrevet i neste avsnitt er et eksempel på hjelpemiddel som kan knyttes mot strategiske inngrep. Modellen kan være en god støtte for elevene i arbeidet med modelleringsaktiviteten, og øker muligheten for å gjennomføre modelleringsaktiviteten uten støtte fra lærer.

[2] DISUM-prosjektet er et tverrfaglig prosjekt mellom matematikkutdanning, pedagogikk og utdanningspsykologi i Tyskland med oppstart i 2002 (Blum & Leiß, 2007).

2.8.1 Modelleringssyklus som støtte for elevene

Erfaring fra forsøk i klasserommet har vist at elevene har hatt god nytte av å bruke en forenklet modell av modelleringssyklusen til Blum og Leiβ (2007) for å få overblikk og støtte til å forstå prosessen i matematisk modellering (Borromeo Ferri, 2018). DISUM-prosjektet har utarbeidet en 4-stegsmodell (Blum & Borromeo Ferri, 2009) der de bruker et språk som er tilpasset elevene. Modellen er tiltenkt elever med liten modelleringserfaring, da de senere vil ha nytte av en mer detaljert modell (Borromeo Ferri, 2018). DISUM sin «Solution plan», 4-stegsmodellen, må innføres gradvis, og elevene trenger stadig påminnelser om å bruke den på ulike oppgaver (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Modellen er ikke ment som et skjema som eleven skal følge slavisk, men som en veiledning, en metakognitiv støtte, når de møter hindringer (Blum, 2015). I modellen stilles elevene spørsmål som: «Les teksten nøye!», «Se for deg situasjonen!», «Lag en tegning!», «Hvordan tolker du dette?», «Hva mangler?», «Hvor langt har du kommet?» «Gir resultatet mening opp mot den virkelige situasjonen?»

Sammenlikner vi modelleringssyklusen til Blum og Leiβ (2007) med den forenklede 4-stegsmodellen, ser vi at det første steget i begge modellene er lik, *å forstå oppgaven*. Fra modelleringssyklusen til Blum og Leiβ finner vi igjen steg 2 og 3 under steg 2 (*lag en modell*) i 4-stegsmodellen. Matematisering ligger i den forenklede modellen under steg 3 (*bruk matematikk*), mens steg 5, 6 og 7 i Blum og Leiβ sin modell er samlet under steg 4 (*forklar resultatet)*.



Figur 8: «4-stegsmodellen». Hentet fra Blum og Borromeo Ferri (2009). Egen oversettelse.

Å lage matematiske modeller er vanskelig for elevene (Blum, 2015; Schaap et al., 2011), og Borromeo Ferri (2018) trekker fram elevenes mulighet til å reflektere over egne modelleringsprosesser på et metakognitivt-nivå som en av styrkene med en modelleringssyklus tilpasset elevene. Elevene er opplært i at matematikk er en samling av begreper, regler, algoritmer, teoremer og teorier som ikke har noe med den virkelige verden å gjøre (Niss & Blum, 2020). Elevenes tidligere erfaringer fra matematikkøkter gjør at de gjerne ikke ser på modelleringsoppgaver som matematikk. Lærerne må ta denne utfordringen på alvor og engasjere seg i samtaler med elevene for å endre den didaktiske kontrakten i klasserommet.

Støtten fra lærer vil ikke ha noen langtidseffekt om den kun knyttes opp mot en spesifikk situasjon, og elevene må derfor trenes i et variert utvalg av oppgaver. Elevene må selv se de ulike stegene i prosessen og stille seg spørsmål når de møter kognitive hindringer i ulike oppgaver: «Hvordan kan jeg hjelpe meg selv gjennom en slik hindring?», «Hvordan kan jeg løse en slik oppgave alene?». Når elevene kommer i vurderingssituasjoner, eller møter matematiske utfordringer i det virkelige livet, er det ingen lærer tilgjengelig. Elevene må da ha egne strategier for å løse problemet (Blum, 2015).

2.9 Diagnostikkdimensjon

Begrepet diagnostisk betyr å kartlegge elevenes modelleringsferdigheter og vurdere elevenes modelleringskompetanse. Å analysere elevenes arbeid med modelleringsoppgaver hjelper læreren til bedre å forstå elevenes prosess, og gir læreren mulighet til å gi systematiske tilbakemeldinger tilpasset eleven (Borromeo Ferri, 2018). Denne dimensjonen pekes ofte ut som den mest krevende i lærerens undervisningskompetanse innen modellering og er derfor plassert sist i modellen (Borromeo Ferri, 2018; Niss & Blum, 2020). Læreren må ha kunnskap fra alle de andre dimensjonene for å kunne diagnostisere elevenes modelleringsarbeid (Borromeo Ferri, 2018).

Diagnostisering deles inn i to hovedkategorier: *produktorientert diagnostisering* og *prosessorientert diagnostisering* (Borromeo Ferri, 2018). *Den produktorienterte diagnostiseringen* ser på elevens individuelle resultat. En matematikkprøve på slutten av et emne er eksempel på dette, og er den mest brukte formen for vurdering (Borromeo Ferri, 2018). *Prosessorientert diagnostisering* har som mål å forstå elevens tankeprosess bak resultatet, for å gi veiledning tilpasset eleven. Eksempler på denne formen for diagnostisering er loggbøker, diagnostiske intervjuer og hjemmearbeid. Prosessorientert diagnostisering ses på som langt mer tidkrevende enn produktorientert diagnostisering. Borromeo Ferri (2018) mener at det beste er å kombinere disse to formene for diagnostisering for å få en best mulig forståelse av elevens kompetanse og vanskeligheter i modelleringsprosessen.

Tidlig forskning på modellering viste interesse for vurdering av elevenes modelleringsarbeid. I Niss og Blum (2020) refereres det til Niss som i 1993 så på utfordringer med vurderingsarbeidet. Han påpekte at vurdering av elevenes arbeid må utformes og praktiseres på en slik måte at den er formålstjenlig, uten å ødelegge selve arbeidet med modelleringsoppgaven (Niss & Blum, 2020). Niss og Blum (2020) peker på erfaringer fra ulike studier som viser at krav til vurdering av elevenes arbeid ofte reduserer, fører til kompromisser eller ødelegger essensen av det som er hensikten med en modelleringsaktivitet. Derfor er det viktig at læreren skiller mellom oppgaver der elevene trenes i modelleringskompetanse, uten å bli vurdert, og oppgaver der elevene får erfaring med modelleringsoppgaver der de bli vurdert (Borromeo Ferri, 2018). Modelleringsoppgaver kan ikke bare blir brukt i undervisningen, men må også være en del av kartleggingsprøver og eksamener (Niss & Blum, 2020).

Det er krevende for læreren å vurdere elevenes arbeid med modelleringsoppgaver, da det ikke er som tradisjonelle matematikkoppgaver der svaret er rett eller galt, bra eller dårlig (Niss & Blum, 2020). Niss og Blum (2020) mener at den kognitive modelleringssyklusen til Blum og Leiβ (2007) kan brukes til å analysere elevenes steg i modelleringssyklusen, og at vurderingen av elevene går enklere om læreren ha jobbet seg gjennom oppgaven i forkant og identifisert hva elevene bør ha med innenfor de sju stegene i modelleringssyklusen. I Bjarnes bensindilemma (figur 6) kan læreren se etter følgende elementer i elevenes arbeid:

1. *Å forstå/konstruere:* Er det indikasjoner på at eleven reflekterer rundt summen Bjarne sparer dersom han fyller bensin i Sverige og utgifter han har på turen?

2. *Forenkle og strukturere:* Ser eleven hvilke variabler hun må arbeide med? Gjør hun antakelser rundt for eksempel bensintankens størrelse og forbruk? Klarer eleven å avgjøre hva det er viktig å arbeide videre med i oppgaven?

3. *Matematisere*: Ser eleven hvordan hun kan regne ut forbruket til bilen? Eller hvordan hun kan beregne hvor mye det koster å fylle en full tank?

4. *Arbeide matematisk:* Klarer eleven å regne ut hvor mye det koster å fylle en tank i Norge og i Sverige? Beregner hun riktig med korrekte måleenheter? Lager hun funksjonsuttrykk og framstiller resultatet grafisk?

5. *Tolke*: Tolker eleven resultatet opp mot den virkelige situasjonen? Er forbruket og kostnadene fornuftig beregnet og riktige benevninger benyttet? Er alle antakelser tatt hensyn til?

6. *Validere*: Vurderer eleven om resultatet er gyldig opp mot informasjonen i oppgaveteksten? Høres resultatet fornuftig ut?

7. *Presentere*: Er utregninger og svar godt begrunnet og argumentert for? Er resultatet ryddig presentert?

Dersom eleven gjør antakelser om at bensintanken til Golfen rommer 50 liter og forbruket til ca. 0,50 liter pr. mil, vil hun komme fram til at Bjarne sparer 100 kr ved å fylle full tank i Sverige.

Full tank i Norge: $50 \times 15{,}50 = 775\ kr$

Full tank i Sverige: $50 \times 13{,}50 = 675\ kr$

Spørsmålet eleven deretter må reflektere og begrunne er om det lønnsomt for Bjarne å kjøre de 40 milene tur/retur Sverige for å fylle. Her kan eleven for eksempel argumentere for forbruk og slitasje på bil og dekk, tiden han bruker og belastning på miljøet. Noen elever vil komme fram til at det lønner seg å fylle i Sverige, andre ikke. Begge svar kan anses som riktige, avhengig av hvor godt elevene begrunner og argumenterer for sine løsninger.

Niss og Blum (2020) trekker fram at det første og det siste steget i prosessen, å forstå oppgaven og valideringen, kan være vanskelige å identifisere i et skriftlig arbeid da disse prosessene skjer i elevens hode. Disse to fasene er langt enklere å identifisere under en muntlig vurdering, der eleven kan forklare hvordan hun har tenkt. Niss og Blum (2020) viser videre til at enkelte lærere liker å sette poeng på hvert steg i modelleringsprosessen for deretter å summere poengene. Niss og Blum påpeker at det er langt viktigere å se etter styrker og svakheter i elevens modelleringsarbeid og gi riktige tilbakemeldinger, enn å sette poeng. Teori fra blant annet Hodgen og Wiliam (2006) viser til at poeng kan virke mot sin hensikt ved å ta fokuset bort fra tilbakemeldingen. Besser et al. (2013) foreslår at tilbakemeldingene på modelleringsoppgaver deles i tre: (1) Styrke *(«Du har vært god til å løse …»)* (2) Svakhet *(«Du må fortsette å jobb med …»)* og (3) Hint *(«Hint til hvordan du kan forbedre …»)*. Disse fasene samsvarer med resultatene fra empirisk forskning innen effektiv vurdering presentert i Hatti og Timperley (2007). Denne vurderingsteorien gjenspeiles i vurderingspraksisen i LK20, som bygger på erfaringer fra den nasjonale satsingen «vurdering for læring» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Utdraget under er hentet fra Utdanningsdirektoratet sin nettside (udatert-b) og viser hvordan de definerer gode faglige tilbakemeldinger.

> For at en tilbakemelding skal bidra til å framme læring, bør den gi elevene og lærlingen en oversikt over: hvor de er i sin læring, hvor de skal og hva de bør gjøre for å komme videre i læringen.» (Utdanningsdirektoratet, udatert-b)

LK20 og dens krav om vurdering gjør diagnostikkdimensjonen krevende. Det er ikke bare matematikken i modelleringsoppgaven, men også matematisk modellering som kompetanse som skal vurderes. Denne tankegangen rundt vurdering er ny, og kommer tydelig fram i læreplanen der kjerneelementene er overordnet kompetansemålene (Hagelia, 2021).

I dette kapittelet er det presentert teori innen matematisk modellering og Borromeo Ferri og Blum sitt rammeverk for undervisningskompetanse i matematisk modellering, som i kapittel 4 vil bli brukt til å analysere datamaterialet. I kapittel 3 belyses de ulike valgene som er tatt underveis i forskningsprosessen.

3 Metode

I metodekapitlet presenteres og begrunnes valgene som ble tatt under arbeidet med forskningsprosjektet. Dette innebærer valg av forskningsdeltakere, metoder for datainnsamling, metode for analyse og forskningsetiske refleksjoner.

For å belyse forskningsspørsmålet *«Hvilke utfordringer opplever to matematikklærere i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn?»* ble det gjennomført intervjuer og observasjon som metoder for datainnsamling. Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sine fire dimensjoner innenfor undervisningskompetanse i matematisk modellering er brukt som rammeverk, og analysen er gjort etter stegene i Braun og Clark (2012) sin modell for analyse av kvalitative data, *tematisk analyse*.

3.1 Forskningsdesign

Hensikten med forskningsdesign og metode for datainnsamling er å skaffe informasjon om virkeligheten, og designet velges ut fra hva som best belyser forskningsspørsmålet (Postholm & Jacobsen, 2021). Datainnsamling blir ofte kategorisert i to hoveddeler, *kvalitative metoder* og *kvantitative metoder* (Postholm & Jacobsen, 2021). Kvalitative metoder brukes som regel når vi skal undersøke nært på mennesker og hvordan de samhandler med hverandre, mens kvantitative metoder ofte brukes når vi skal undersøke mer bredt for å få et representativt bilde av flertallet, for eksempel gjennom spørreundersøkelser (Postholm & Jacobsen, 2021). Mitt forskningsspørsmål har som hensikt å finne ut hvilke utfordringer to lærere opplever når de skal undervise i matematisk modellering, og kvalitative metoder er derfor godt egnet i dette studiet.

3.1.1 Kvalitativ forskning

De kvalitative forskningsmetodene intervju og observasjon ble brukt til å hente inn datamaterialet. Hensikten var å gå i dybden på hvilke erfaringer lærerne har fra tidligere, samt hvilke tanker og holdninger de har til matematisk modellering. En slik kombinasjon av datamateriale kalles triangulering, og den styrker både påliteligheten og gyldigheten i kvalitativ forskning (Postholm & Jacobsen, 2021). Intervjuene vil gi innblikk i lærernes kunnskap, erfaringer, tanker og synspunkter både i forkant av gjennomføringen av en modelleringsaktivitet og i etterkant. Observasjon av lærernes interaksjon med elevene under en modelleringsaktivitet vil gi innblikk i lærernes utfordringer i praksis. Observasjonen vil også kunne gi eksempler som vil styrke og supplere resultatene fra intervjuene.

3.2 Deltakere og metode

3.2.1 Valg av deltakere

Lærerne som deltok i studien er kollegaer på skolen der jeg jobber. Disse lærerne viste interesse for temaet som ble presentert og var positive til å bidra. Samtidig var det praktisk at disse to jobbet på samme trinn og allerede samarbeidet om undervisningen. Klassen på 8. trinn ble valgt etter anbefaling fra disse lærerne. Klassen kan kategoriseres som gjennomsnittlig for årstrinnet med elever på alle mestringsnivåer. Den valgte klassen kjennetegnes som positiv og har et godt samarbeidsklima, noe som var en fordel i denne studien. I undervisningsopplegget samtykket 19 elever i å delta, hvorav 7 elever godkjente å delta i fokusgruppe med lydopptak. Av disse 7 samtykket 5 til å delta i etter-intervjuet.

Deltakerne er anonymisert gjennom bruk av pseudonymer. Lærerne har fått navnene Einar og Tore. Elevene er kun nummerert, da disse har en birolle i forskningsprosjektet, fordi det er lærerens opplevelser av utfordringer i matematisk modellering som er det sentrale i datamaterialet.

Einar er utdannet lektor med mastergrad i naturfag og var ferdigutdannet i 2020. Einar har under utdanningen jobbet en del på barneskole, og etter fullført utdanning har han jobbet på 8. trinn på to ulike ungdomsskoler. Han begynte som vår kollega ved skolestart høsten 2021.

Tore er adjunkt med tilleggsutdanning og har et årsstudium i matematikk. Tore har jobbet 7 år som matematikklærer, og har erfaring fra hele ungdomstrinnet og fra to ulike ungdomsskoler. De siste 5 årene har han vært på nåværende skole. Tore har tidligere deltatt på en spørreundersøkelse[3] i regi av NTNU, som en del av min lærerspesialistutdanning høsten 2020. I denne spørreundersøkelsen var hensikten å kartlegge læreres forståelse av modelleringsbegrepet i den nye læreplanen. Tore ble da bevisstgjort begrepet og kjerneelementet modellering og anvendelse i LK20.

3.2.2 Metode for datainnsamling

Datainnsamlingen er gjort gjennom før-intervju av lærere, observasjon av undervisning, lydopptak av to fokusgrupper med elever under arbeidet med modelleringsaktiviteten og etter-intervju av både lærere og elever.

For å svare på hvilke utfordringer lærerne møter når de skal undervise i matematisk modellering er intervju en hensiktsmessig metode. I et kvalitativt forskningsintervju kan jeg få innsikt og forståelse av lærerens dagligliv, fra hans eller hennes perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2021). Valget falt på semistrukturerte intervjuer, der jeg som forsker i forkant hadde satt meg inn i litteraturen og designet intervjuguider (vedlegg 4 og vedlegg 5) for å sikre at de aktuelle temaene ble dekket.

Lydopptak ble valgt som instrument under intervjuene. Lydopptak gjør at en som forsker kan ha fullt fokus på deltakeren i intervjuet og gir et rikt datamateriale for analyse (Postholm & Jacobsen, 2021). Lydopptak ble i tillegg brukt under gjennomføringen i klasserommet for å fange opp dialogen mellom lærer og fokusgruppene, der hensikten var å kartlegge hvordan læreren veiledet elevene gjennom modelleringsprosessen.

Postholm og Jacobsen (2021) beskriver observasjon som et nyttig supplement til intervju i kvalitativ forskning. I kvalitativ forskning blir observasjoner gjennomført i naturlige situasjoner, for eksempel i klasserommet som i dette studiet. Under observasjonen fanger forskeren opp både menneskelig aktivitet og den fysiske settingen (Postholm & Jacobsen, 2021). Forskerens subjektivitet og antakelser vil være til stede i kvalitative observasjoner, og forskeren må derfor være bevisst sin rolle. I klasserommet var jeg *observatør-som-deltaker* (Gold, 1958), som betyr at jeg var i klasserommet uten å delta

[3] Spørreskjemaet «Modellering i matematikkundervisning» som en del av kurset SKOLE6222 Matematisk modellering og IKT i matematikkundervisningen ved NTNU, september 2020.

i undervisningen. Jeg var synlig og kommuniserte med elevene rundt min tilstedeværelse i klasserommet, men svarte ikke på henvendelser som gjaldt modelleringsaktiviteten.

3.3 Datainnsamling

I dette delkapittelet beskrives prosessen for datainnsamlingen. Datainnsamlingen startet med et før-intervju av de to lærerne. Hensikten med før-intervjuene var å kartlegge lærernes kunnskap om modelleringsbegrepet og tidligere erfaringer med modelleringsaktiviteter. Gjennomføringen av modelleringsaktiviteten i klasserommet og etter-intervjuene fokuserte på lærerens interaksjon med elevene, og hvilke utfordringer de opplevde i arbeidet med modelleringsaktiviteten.

Det ble gjort pilotering av før-intervjuet og modelleringsaktiviteten i klasserommet. Pilotering er viktig for å finne ut om intervjuet og modelleringsaktiviteten fungerer etter hensikten, og om det ønskede temaet kommer fram. Før-intervjuet ble testet på en annen lærer. I pilotintervjuet fikk jeg undersøkt om spørsmålene jeg hadde forberedt åpnet for dialog. Det ble også tatt opp lyd av pilotintervjuet, da det er en nyttig øvelse å transkribere pilotintervjuet for å lytte til hvordan spørsmål stilles og svar følges opp (Postholm & Jacobsen, 2021). Piloteringen av modelleringsaktiviteten ble gjort i en annen klasse på 8. trinn.

3.3.1 Før-intervju med lærere

I før-intervjuene var hensikten å kartlegge hvilke kunnskap og erfaringer de to matematikklærerne hadde innen modelleringsteori og bruk av modelleringsaktiviteter i undervisningen. Intervjuguiden (vedlegg 4) ble bygget opp etter Blum og Niss (2020) sin teori rundt hvilke utfordringer lærere møter i arbeidet med modelleringsoppgaver i klasserommet. I pilotintervjuet fungerte denne intervjuguiden tilfredsstillende, og jeg gjorde meg nyttige erfaringer ved å høre gjennom lydopptaket. Jeg merket meg spesielt behovet for å gi lærerne jeg intervjuet god tid til å tenke seg om, før jeg stilte neste spørsmål. Jeg var trygg på at det tekniske med lydopptak fungerte som det skulle.

Lærerne ble intervjuet individuelt med noen dagers mellomrom. Det ble benyttet et grupperom tilknyttet lærernes arbeidsrom der vi fikk sitte uforstyrret. Begge lærerne hadde på forhånd signert samtykkeskjema og godkjent bruk av lydopptak. Intervjuet med Einar ble foretatt først, deretter intervjuet med Tore. Hvert av intervjuene fikk en lengde på i overkant av 15 minutter hver.

3.3.2 Forberedelse til pilotering av modelleringsaktiviteten

Datamaterialet fra før-intervjuene viste at både Einar og Tore hadde liten modelleringserfaring, og derfor hadde de begrensede forutsetninger til å designe eller velge ut en modelleringsaktivitet på egenhånd. Jeg valgte derfor å bestemme hvilken modelleringsoppgave vi skulle pilotere, og la enkelte føringer for hvordan klasserommet skulle organiseres. Modelleringsoppgaven «Kjempens sko» ble valgt, da denne er mye brukt i forskningslitteraturen (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Niss & Blum, 2020) Oppgaven er nærmere beskrevet i kapittel 3.4. Jeg gjennomførte selv piloteringen med Einar som to-lærer.

Modelleringsaktiviteten ble gjennomarbeidet i forkant for å avdekke oppgavens potensiale. Det ble gjort en analyse av hvor i oppgaven elevene kunne møte hindringer og hvilke løsningsstrategier elevene potensielt ville velge. Med utgangspunkt i denne analysen ble det planlagt inngrep som kunne stimulere elevene til selvstendig arbeid.

Einar som skulle observere piloteringen var ikke kjent med forskers tanker rundt inngrep og veiledning til elevene. Det var et bevisst valg at han ikke skulle ha denne kunnskapen, da videre datainnsamling ville undersøke hans interaksjon med elevene under gjennomføringen av modelleringsaktiviteten i klasserommet.

3.3.3 Pilotering av modelleringsaktiviteten

Piloteringen ble gjennomført i min egen matematikklasse på 8. trinn. Dette valget ble gjort ut fra enkel tilgang, elevene var på samme alderstrinn som klassen der oppgaven skulle gjennomføres og elevene var trygge på oss som lærere. Det ble ikke hentet inn samtykke fra elevene i denne klassen, da jeg ikke så det som nødvendig å pilotere med lydopptak. Informasjonen fra piloteringen er av den grunn kun brukt til videre planlegging av gjennomføringen av undervisningsopplegget, og blir ikke referert til i oppgaven.

I matematikkundervisningen er vi ofte to lærere. Einar er derfor godt kjent med elevene klassen. Under piloteringen tok Einar rollen som en aktiv tolærer, mens jeg som forsker hadde hovedansvaret for undervisningen. I piloteringen hadde jeg forskerrollen som *fullstendig deltaker* (Gold, 1958), som betyr at jeg var en del av den undervisningen jeg selv observerte (Postholm & Jacobsen, 2021).

Klassen ble delt i tilfeldige grupper på 3-4 elever, etter anbefaling fra Liljedahl (2018). Vi hadde en felles oppstart der oppgaven ble presentert ved høytlesning for elevene, før elevene satte i gang med arbeid i grupper. Jeg hadde forutsett noen løsningsstrategier, og av den grunn tatt med målebånd som hjelpemiddel. Begge lærerne observerte, lyttet til og veiledet elevene gjennom modelleringsprosessen. Undervisningsøkta ble avsluttet med en felles gjennomgang av de ulike løsningsforslagene.

Etter undervisningsøkta ble elevene oppfordret til å gi ærlige tilbakemeldinger på hvordan de opplevde å jobbe med «Kjempens sko». Egne erfaringer, Einars observasjoner og tilbakemeldinger fra elevene ble lagt til grunn for videre planlegging av modelleringsaktiviteten.

Erfaringer fra piloteringen viste at gruppestørrelsen fungerte fint og at modelleringsaktiviteten passet godt for elevgruppen. Innenfor en 60 minutters økt fikk elevene god tid til å arbeide med oppgaven på grupper. I tillegg fikk vi tilstrekkelig tid til en felles valideringsprosess der gruppene delte sine løsningsforslag. Introduksjon av målebånd som et mulig hjelpemiddel ble fjernet, da dette viste seg å legge føringer og begrenset elevenes egen tankeprosess.

3.3.4 Forberedelse til gjennomføring i klasserommet

I etterkant av før-intervjuene og piloteringen ble elevene satt i hjemmeskole pga covid-19-utbrudd, etterfulgt av en lengre periode med mye fravær blant både lærere og elever. Gjennomføringen i klasserommet ble derfor utsatt en måneds tid. I denne pausen holdt Matematikksenteret kurs om den nye eksamensformen for matematikk i grunnskolen, og kjerneelementet modellering og anvendelse ble aktualisert. I rollen som lærerspesialist ble jeg oppfordret av kollegiet til å vise eksempler på modelleringsoppgaver, og jeg valgt å bruke en 60 minutters økt med matematikklærerne der de fikk noe innblikk i modelleringsteori og eksempler på modelleringsaktiviteter. Lærerne ble vist modelleringssyklusen til Blum og Leiβ (se kapittel 2.6.1) og 4-stegsmodellen (se kapittel 2.8.1), og vi drøftet hvilke utfordringer lærere og elever kan møte i arbeidet med en modelleringsaktivitet. Lærerne fikk ikke selv prøvd ut hvordan det er å jobbe med en modelleringsaktivitet.

Denne fellesøkta med introduksjon av kjerneelementet modellering og anvendelse førte til at Tore og Einar fikk økt sin modelleringskompetanse innen teoridimensjonen. Vi fikk i tillegg en større felles begrepsbank inn i planleggingen av gjennomføringen i klasserommet. Tore og Einar sin tidligere kunnskap og erfaringer var allerede kartlagt i før-intervjuet, derfor anså jeg ikke dette som ødeleggende for den videre datainnsamlingen. Gjennomføringen i klasserommet og etter-intervjuet hadde som hensikt å kartlegge de tre andre dimensjonene i rammeverket, oppgavedimensjonen, instruksjonsdimensjonen og diagnostikkdimensjonen.

Med bakgrunn i den tilegnede teoretiske kunnskapen og erfaringer fra piloteringen planla vi gjennomføringen av modelleringsaktiviteten i klasserommet. Erfaringer fra piloteringen førte til noen endringer. En endring var at elevgruppene ble bestemt i forkant. Dette ble gjort av praktiske hensyn, da elevene som hadde samtykket til deltakelse i fokusgrupper måtte samles i to fokusgrupper. Gruppene ble videre satt sammen med tanke på å få fram mest mulig dialog mellom elevene. Elevene på fokusgruppene ble i tillegg fordelt etter faglig nivå. Formålet med nivådelingen var å hente inn datamateriale av veiledning av elever med ulike matematiske forutsetninger.

Modelleringsaktiviteten ble analysert av Einar og Tore, og løsningsstrategiene jeg hadde forutsett før piloteringen ble supplert med erfaringer fra piloteringen, samt Einar og Tore sine tanker. Vi diskuterte mulige hindringer i elevenes modelleringsprosess og hvordan vi best kunne veilede elevene videre.

3.3.5 Gjennomføring av modelleringsaktiviteten

Modelleringsaktiviteten ble gjennomført innenfor en tidsramme på 60 minutter. Det ble gjort kvalitativ datainnsamling gjennom observasjon av aktiviteten i klasserommet og lydopptak av to fokusgrupper i arbeidet med modelleringsaktiviteten. Foresatte, elever og deltakende lærere ble godt informert om prosjektet i forkant, og kun elever med samtykke var til stede i klasserommet under modelleringsaktiviteten. Utvalget for datainnsamlingen besto av 19 elever, inkludert 7 elever som samtykket for deltakelse i fokusgruppe med lydopptak, og de to matematikklærerne som jeg fulgte i prosjektet. Elevene som hadde godkjent lydopptak ble fordelt i to fokusgrupper. Fokusgruppe 1 besto av 3 elever med middels til høy matematisk kompetanse, mens fokusgruppe 2 ble satt sammen av 4 elever med lav til middels matematisk kompetanse. De to gruppene ble plassert i hvert sitt hjørne av klasserommet, for å unngå mest mulig bakgrunnsstøy. Et nettbrett som tok opp lyden ble plassert midt på bordet til hver fokusgruppe. For å ufarliggjøre situasjonen forklarte jeg elevene på nytt hvorfor jeg ønsket lydopptak, og hvordan dette skulle behandles i etterkant. Fokusgruppe 1 lot seg ikke forstyrre av lydopptakeren, mens fokusgruppe 2 brukte noe tid på å bli komfortable. Jeg satte meg bakerst i klasserommet som en *observatør-som-deltaker*, som beskrevet i kapittel 3.2.2.

Tore, som var hovedlærer, introduserte oppgaven på storskjerm og presiserte at dette var en oppgavetype der det ikke finnes et fasitsvar. Han leste oppgaven høyt for elevene og avsluttet med «Det er oppgaven». Han ba deretter elevene tenke seg godt om først, før de startet opp med diskusjon på gruppene. Tore og Einar veiledet elevene på lik linje i arbeidet. Timen ble avsluttet med en felles gjennomgang av de ulike gruppenes løsningsforslag. Tore som hadde observert nøye i løpet av økta, hadde en bevisst rekkefølge på denne presentasjonen for å få best mulig dialog med klassen i valideringsprosessen.

Hensikten var å gjennomføre observasjonen som en strukturert observasjon, med et ferdig utarbeidet observasjonsskjema (vedlegg 6), bygget opp etter 4-stegsmodellen. Dette viste seg å være krevende da det foregikk hendelser i klasserommet som ikke passet inn i observasjonsskjemaet. Observasjonen ble i stedet en semistrukturert observasjon (Cohen et al., 2018), da jeg valgte å følge opp interessante momenter underveis. Etter gjennomføringen i klasserommet fikk jeg tilgang til lydopptak fra 2 fokusgrupper, egne observasjonsnotater og elevenes notatark.

3.3.6 Etter-intervju

Etter gjennomføringen i klasserommet hadde jeg etter-intervjuer. Jeg hadde utarbeidet intervjuguider til begge etter-intervjuene (vedlegg 4 og 5), men lot samtalene tre naturlig fram. Jeg stolte på at lydopptakeren fikk med seg hele intervjuet, og noterte ned aktuelle oppfølgingsspørsmål underveis.

Det ble gjort gruppeintervju med 5 elever i klasserommet rett etter gjennomføringen av modelleringsaktiviteten. Klasserommet ble valgt, da en naturlig ramme skaper trygghet for deltakerne (Postholm & Jacobsen, 2021). I gruppeintervjuet med elevene var hensikten å kartlegge i hvilke grad elevene hadde arbeidet med modelleringsaktiviteter tidligere, og hvordan de følte at denne oppgavetypen samsvarte eller kom i konflikt med deres tidligere erfaringer med matematikkøkter.

Intervjuet med lærerne ble gjennomført som en samtale mellom meg som forsker og lærerne. Dette ble gjort på et grupperom tilknyttet lærernes arbeidsværelse senere samme dag som gjennomføringen av modelleringsaktiviteten. I etter-intervjuet med lærerne var ønsket å kartlegge de to lærernes opplevde utfordringer innen oppgavedimensjon, instruksjonsdimensjonen og diagnostikkdimensjon i rammeverket til Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b).

3.4 Modelleringsaktiviteten

For å belyse forskningsspørsmålet «*Hvilke utfordringer opplever to matematikklærere i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn?*» hentet jeg en modelleringsoppgave fra Borromeo Ferri og Blum (2009) og oversatte denne til norsk (figur 9). Oppgaven som ble valgt, «Kjempens sko», er mye brukt i forskningslitteraturen innenfor matematisk modellering.

3.4.1 Valg av oppgave

Borromeo Ferri og Blum (2009) knytter i sin forskning modelleringsaktiviteten «Kjempens sko» opp mot modelleringssyklusen til Blum og Leiβ og 4-stegsmodellen (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Modelleringsaktiviteten er godt egnet til dette forskingsprosjektet da den har et tidsperspektiv som går innenfor en undervisningsøkt, og ikke krever bruk av ressurser utenfor klasserommet. Oppgaven har en kort og konsis tekst og inneholder få begreper som kan skape usikkerhet hos elevene. Oppgaven ble derfor vurdert til å passe godt for elever med liten modelleringserfaring.

I teoridelens kapittel 2.7 beskrives oppbygningen av en god modelleringsoppgave. Ser vi på «Kjempens sko» opp mot disse kriteriene er oppgaven åpen i den grad at kjempens høyde ikke har noen bestemte krav, men er i tillegg kompleks da elevene selv må undersøke sammenhenger mellom skostørrelser og kroppens høyde. Oppgaven vil oppleves realistisk da elevene kan relatere til sin egen kropp. Den er også autentisk, da det ikke er en oppgave som kun er oppkonstruert som en skoleoppgave. Skoen finnes på ordentlig. Oppgaven inneholder et problem som elevene kan løse ved hjelp av ulike strategier, og legger til rette for at elevene kommer innom de ulike stegene i modelleringssyklusen (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

Figur 9: «Kjempens sko» hentet fra Blum og Ferri (2009). Egen oversettelse.

3.4.2 Modelleringsoppgavens matematiske potensiale

Det matematiske temaet i oppgaven kan knyttes mot læreplanmålet for 8. trinn *«lage og forklare rekneuttrykk med tal, variablar og konstantar knytte til praktiske situasjonar»* som i læreplanen er underlagt kjerneelementet modellering og anvendelse (Kunnskapsdepartementet, 2020). Elevene vil arbeide med forholdstall, og i valideringsprosessen, der elevene vil presentere ulike tall på kjempens høyde, er det i tillegg hensiktsmessig å trekke inn gjennomsnitt. Fokus på bruk av gjennomsnittsregning vil synliggjøre at mennesker er ulike og at resultater ofte er mer troverdige ved innhenting av flere målinger.

I oppgaven må eleven finne ut omtrent hvor høy en kjempe må være for at en av verdens største skopar skal passe. Skoen har en bredde på 2,37 meter og en lengde på 5,29 meter. Skoen er utformet som på bildet i oppgaveteksten (se figur 9).

Situasjonen i oppgaven må forstås og forenkles gjennom matematisering. Her kan eleven ta utgangspunkt i sine egne kroppsmål eller lage antakelser med utgangspunkt i et tenkt menneske. Eleven kan velge å måle sin egen kropp med sin egen sko for å finne ut hvor mange skolengder kroppen er, for deretter å overføre dette til kjempens mål. Matematisk kan eleven gjøre antakelser og anslå en kroppslengde på for eksempel 1,80 meter og en fotlengde på 0,30 meter. Den matematiske modellen vil da gi forholdstallet $1{,}80 \div 0{,}30 \approx 6$. Videre kan eleven jobbe matematisk med forholdstallet og regne seg fram til det matematiske resultatet $(5{,}29 \times 6 \approx 32)$, og finner da ut at kjempen kan være omtrent 32 meter høy. Det matematiske resultatet knyttes deretter opp mot situasjonen i oppgaven og valideres.

Læreren kan bruke modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) til å forutse mulige utfordringer for eleven i arbeid med oppgaven, og samtidig forberede aktuelle spørsmål for å hjelpe eleven videre i prosessen. Under vises eksempler på utfordringer eleven kan møte i de ulike stegene i modelleringsprosessen.

1. *Å forstå/konstruere:* Har eleven forstått at hun skal finne høyden til kjempen basert på lengden av foten?

2. *Forenkle og strukturere:* Er forenklingene gjort av eleven fornuftige? Har hun identifisert relevante variabler og sammenhenger? Er antakelsene fornuftige? Har eleven laget en skisse av situasjonen?

3. *Matematisere:* Har lengder og variabler i oppgaven blitt oversatt til matematikk som kan brukes til å regne ut et forhold mellom målene?

4. *Arbeide matematisk:* Er de matematiske utregningene og antakelsene riktige? Gir utregningene svar på kjempens høyde?

5. *Tolke:* Har det matematiske resultatet blitt riktig tolket og fått korrekt måleenhet? Er tallet hensiktsmessig avrundet og ferdig til å presenteres?

6. *Validere*: Har eleven validert og evaluert resultatet sitt opp mot situasjonen i oppgaveteksten?

7. *Presentere:* Klarer eleven å presentere og forklare hvordan hun har kommet fram til svaret? Blir resultatet presentert på en strukturert måte?

En slik oversikt over de ulike stegene i modelleringsprosessen er et godt hjelpemiddel dersom modelleringsoppgaven skal vurderes. Vurdering av elevenes modelleringsarbeid var ikke innfor rammen til denne studien.

3.5 Analyse av datamateriale

Hensikten med kvalitativ dataanalyse er å få en oversikt over datamaterialet slik at det kan presenteres i en skriftlig tekst. I denne fasen letes det etter mønster slik at materialet kan kategoriseres eller tematiseres, som videre danner skjelettet for analysearbeidet (Postholm & Jacobsen, 2021). Når materialet struktureres og gjøres leservennlig kalles det *deskriptiv analyse* (Postholm & Jacobsen, 2021). Jeg brukte et teoretisk rammeverk i analysen av datamaterialet, noe som gir struktur og hjelp til å finne gode forskningsspørsmål (Cohen et al., 2018; Lester Jr, 2010).

3.5.1 Tematisk analyse

I analysen av datamaterialet har jeg fulgt stegene i Braun og Clark (2012) sin modell for analyse av kvalitative data, *tematisk analyse*. Hensikten med tematisk analyse er å systematisere og organisere datamaterialet for å identifisere svar som kan knyttes opp mot forskningsspørsmålet. Braun og Clark anbefaler at det arbeides med hele datamaterialet gjennom seks faser. Kort oppsummert går disse fasene ut på å (*1) gjøre seg kjent med datamaterialet, (2) generere koder som er relevante for forskningsspørsmålet, (3) søke etter temaer, (4) gjennomgå potensielle temaer, (5) definere og navnsette temaer og (6) produsere en rapport.*

Jeg brukte en *deduktiv* tilnærming til datakodingen og analysen av datamaterialet, da begreper, koder og temaer ble hentet fra det teoretiske rammeverket. Intervjuguiden til før-intervjuet var bygget opp etter Niss og Blum (2020) sine funn av hindringer i implementeringen av modelleringsoppgaver i klasserommet, se teori i kapittel 2.2, og følgende temaer og koder var tenkt til bruk i analysearbeidet:

Tema	**Koder**
Kunnskap om matematisk modellering	Læreplankunnskap. Opplæring/kursing. Erfaring.
Utfordringer i klasserommet	Valg av oppgave. Organisering. Tidsbruk. Vurdering.

Tabell 3: Temaer og koder etter Blum og Niss (2020).

Under før-intervjuene av lærerne og den første gjennomhøringen av disse intervjuene kom det fram at lærerne hadde liten kunnskap om modellering og bruk av modelleringsoppgaver. Jeg innså da at de tenkte kodene ikke var detaljert nok for å analysere datamaterialet, og rammeverket ble byttet ut til Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sitt rammeverk rundt matematikklærerens undervisningskompetanse i matematisk modellering. Borromeo Ferri og Blum sitt rammeverk inneholder fire dimensjoner innen undervisningskompetanse i matematisk modellering: *teoridimensjon, oppgavedimensjon, instruksjonsdimensjon og diagnostikkdimensjon*, og er beskrevet i teorikapittelet.

Analyseprosessen foregikk ved at lydopptakene ble hørt gjennom mens jeg tok notater. Deretter startet transkriberingen av materialet. Observasjonsnotatene ble raskt renskrevet og systematisert i en observasjonslogg. Lærerne og elevene er i loggen og transkripsjonen anonymisert. I transkripsjonen er linjene nummerert slik at leseren kan følge hvor i prosessen vi befinner oss. Kodingen ble gjort med NTNU sitt analyseverktøy NVivo (NTNU, udatert), for enklere å organisere og analysere datamaterialet. Resultatene i forskningsprosjektet ble utformet fra denne analysen.

Tabellen under viser hvilke temaer og koder som ble brukt i analysen av datamaterialet. Disse temaene er hentet fra Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b). Jeg viser et eksempel hentet fra datamaterialet innenfor hvert tema. Gjeldende kode som er knyttet til eksemplet er satt i *kursiv.*

Tema	**Koder**	**Eksempler**
Teoridimensjon	*Kunnskap om modellering og modelleringssykluser.* Læreplankunnskap. Opplæring og erfaring.	Matematisk modellering det handler vel om ehhh … at å ha litt praktisk tilnærming til matten. Få litt virkelighetsnære oppgaver der elevene skal utforske og på en måte prøve å

		resonnere seg fram til et svar kontra å følge standard algoritmer.
Oppgavedimensjon	Forutse løsningsstrategier. *Kognitiv analyse av oppgaver.* Oppgavedesign.	Og hvis noen kommer og presenterer ei modelleringsoppgave så kanskje det tenkes at – *«Nei, den oppgaven her så vanskelig ut! Her var det mye matte å ta tak i for en 13 åring, og dette her kommer ikke de til å ha kapasitet til eller kunnskap til å få til»*
Instruksjonsdimensjon	Planlegging og gjennomføring. *Interaksjon med elevene.*	Jeg tenker jo at det vanskeligste er å stille spørsmål som kan hjelpe de dårlige gruppene på vei uten å si «bare ta skoen din og mål liksom»
Diagnostikkdimensjon	Diagnostisering. *Vurdering*.	Det er jo vanskeligere for oss å vurdere det også, så lenge det ikke er noe fasitsvar på det, som vi bare kan sette på en R eller en V med en gang på en måte.

Tabell 4: Oversikt over temaer og koder i dataanalysen med eksempler.

3.5.2 Gyldighet i kvalitativ forskning

Før datainnsamlingen startet reflekterte jeg over min egen rolle i prosjektet, og var bevisst på hvilken informasjon som ble gitt til forskningsdeltakerne rundt vår relasjon og hensikten med prosjektet. Postholm og Jacobsen (2021) viser til viktigheten av denne bevisstgjøringen, og at lærere som forsker på egen skole har en utfordring med å gjøre det kjente ukjent, slik at det kan analyseres og forstås. Videre påpeker Postholm og Jacobsen (2021) at *den interne gyldigheten* i enkeltstudier, som denne, er stor, men at det er vesentlig å stille spørsmål om denne informasjonen også vil være av interesse for andre. Det er derfor viktig å tenke på den *eksterne gyldigheten*, kort sagt i hvilken grad, og med hvilken sikkerhet, vi kan påstå at funn fra denne konteksten også er gyldig i en annen kontekst (Postholm & Jacobsen, 2021).

Guba (1982) argumenterer for at gyldigheten i kvalitativ forskning baserer seg på fire aspekter: *troverdighet*, *overførbarhet*, *pålitelighet* og *objektivitet*. Gyldigheten i kvalitativ forskning handler med andre ord om i hvor stor grad vi kan vite at vi faktisk forsker på det vi skal forske på.

For å sikre *troverdighetene* i forskningsprosjektet har jeg valgt lærere som selv viste interesse for å delta i prosjektet. At jeg kjente disse fra før, gjorde det også lettere å tolke resultatet. Klassen ble valgt ut i samarbeid med disse lærerne, og anses som representative for årskullet. Klassen består av elever fra fire ulike barneskoler, og har elever på alle mestringsnivåer i matematikk. Klassen kjennetegnes ved at elevene har en positiv innstilling til nye utfordringer, og lærerne har erfart at de samarbeidet godt når de jobber i mindre grupper. Denne klasseromskulturen er en stor fordel i dette forskningsprosjektet for å hente ut et rikt datamateriale gjennom lydopptak og observasjon.

Overførbarhet handler om å samle inn detaljert datamateriale, og å gi leseren informasjon om resultatet som kan overføres til egen praksis. Det ble valgt lydopptak både under intervjuene og av to fokusgrupper under gjennomføringen i klasserommet for å få et rikt datamateriale. Lydopptakeren som ble brukt var Nettskjema-diktafon

(Universitetet i Oslo, 2017) som er godkjent av Norsk senter for forskningsdata (NSD, udatert). Lydopptakene er hovedkilden til datamaterialet i analysen, supplert av observasjonsnotatene.

Bruk av både lydopptak og observasjon er med på å styrke *påliteligheten* i forskningsprosjektet. Forskeren skal her vise at det er samsvar mellom forskningsspørsmålet, metoden, analysen, funn og konklusjon. Et teoretisk rammeverk ble valgt til bruk i den kvalitative analysen. Et rammeverk gir struktur og hjelp til å finne gode forskningsspørsmål, som kan tolkes og begrunnes ut fra tidligere brukt teori (Cohen et al., 2018; Lester Jr, 2010).

I kvalitativ forskning er forskeren aldri *objektiv* (Postholm & Jacobsen, 2021), blant annet gjennom sin relasjon til de det forskes på. Av den grunn valgte jeg å ikke bruke mine egne elever, men elever som kjenner meg tilstrekkelig til at situasjonen føltes naturlig og trygg. Jeg har i tillegg vært bevisst min relasjon til lærerne og elevene under kodingen og analysen av lydopptaket, slik at min relasjon til deltakerne skulle påvirke resultatet i datamaterialet minst mulig.

3.5.3 Forskningsetiske retningslinjer

Det er den enkelte forskers ansvar å opptre forsvarlig, og de forskningsetiske retningslinjene er et verktøy for å sikre dette (NESH, 2021). Jeg har gjennom hele prosessen forholdt meg til NESH (2021) sine forskningsetiske retningslinjer, både i planleggingsfasen, gjennomføringen av datainnsamlingen og publiseringen av masteroppgaven.

3.5.4 Håndtering av personvernopplysninger

Før oppstart av datainnsamlingen ble det foretatt etiske refleksjoner rundt valg av datainnsamling og utarbeidet en datahåndteringsplan. Det ble sendt søknad til Norsk senter for dataforskning (NSD, udatert), som godkjente gjennomføring av lydopptak, observasjon og innsamling av skriftlig materiale. Godkjenningen fra NSD ligger som vedlegg 1.

Elevene som deltok i studien var under 15 år, og det ble derfor innhentet samtykke både fra eleven selv og foresatte. Informasjon om forskningsprosjektet ble gitt både gjennom samtykkeskjemaet (vedlegg 3) og en informasjonsmelding til foresatte sendt via skolens kommunikasjonskanal. Lærerne som deltok ble også godt informert om hensikten med oppgaven og sine rettigheter, og samtykkeskjemaer ble signert (vedlegg 2). Samtykkeskjemaene ble lagret sikkert etter innsamling, og vil bli makulert når oppgaven er godkjent.

Lydopptakene ble gjennomført med Nettskjema-diktafon (Universitetet i Oslo, 2017), som er godkjent av NSD (udatert) som en sikker lagringsløsning for lydfiler. Deltakerne ble anonymisert ved transkriberingen og lydopptakene ble deretter slettet.

3.5.5 Metodekritikk

I løpet av studien har jeg måttet ta en del valg som kan ha vært avgjørende for resultatet av forskningsprosjektet. Noen valg er tatt bevisst, mens andre valg har vært utenfor min kontroll. Valg av deltakere ble gjort ut fra tilgjengelighet og interesse fra kollegaer. Disse to lærerne er både av samme kjønn og forholdsvis unge lærere, og er ikke representative for matematikklærerne på ungdomstrinnet. Likevel mener jeg at funnene gir et godt grunnlag for refleksjon opp mot aktuell litteratur, og at det kan brukes videre i arbeidet med kompetanseheving av læreres modelleringskompetanse. Jeg har heller ingen garanti for at den valgte 8. klassen er representativ, men da elevene er sammensatt fra fire ulike barneskoler er dette elever med ulike matematiske erfaringer.

På grunn av utbrudd av covid-19 i perioden datainnsamlingen ble gjennomført, ble det et større tidsintervall mellom før-intervjuene og piloteringen til realiseringen i klasserommet enn planlagt. I denne perioden jobbet matematikkollegiet en fellesøkt på 60 minutter med kjerneelementet modellering og anvendelse, og lærerne fikk derfor noe økt kunnskap. Jeg tror ikke dette påvirket resultatet nevneverdig, da før-intervjuene som kartla lærernes tidligere erfaringer allerede var gjennomført.

Jeg valgte å gi læreren en ferdig modelleringsoppgave. Ved at denne oppgaven ble brukt, tok jeg bort en av utfordringene til lærerne, nemlig å finne en modelleringsoppgave tilpasset elevene (Borromeo Ferri, 2018; Niss & Blum, 2020). Årsaken til at jeg bestemte oppgaven, var et ønske om å fokusere forskningen på lærernes interaksjon med elevene i klasserommet. På denne måten ble usikkerhet rundt oppgavevalg unngått. Lærerens utfordringer rundt valg av modelleringsoppgaver var allerede kartlagt i før-intervjuet.

Under observasjonen i klasserommet ble det brukt lydopptak av to fokusgrupper. Her kunne jeg valgt videoopptak i tillegg for å få med de non-verbale kommunikasjonene. Video ble ikke sett på som nødvendig i dette forskningsprosjektet, da lydopptakene ble supplert med observasjon. Jeg vurderte det som mer sannsynlig å få samtykke fra elever og foresatte ved kun bruk av lydopptak. Bruk av video ville i tillegg krevd trening i forkant, for at elevene ikke skulle la seg forstyrre og at situasjonen skulle føles naturlig. Elevene er vant til å bruke lydopptak under fagsamtaler, men den ene fokusgruppen lot seg allikevel distrahere av lydopptakeren. Jeg anser avgjørelsen med kun bruk av lydopptaker som fornuftig.

Min relasjon til kollegene som ble intervjuet og observert kan kritiseres, da jeg som forsker kan være farget av denne. For å sikre at jeg har tolket datamaterialet riktig, leste lærerne kritisk over resultatdelen av oppgaven og godkjente innholdet. Analysen av datamaterialet er presentert i neste kapittel.

4 Resultat

I resultatkapittelet presenterer og analyserer jeg sentrale funn fra datamaterialet for å belyse forskningsspørsmålet *«Hvilke utfordringer opplever to matematikklærere i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn?».* Analysen er gjort etter Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sitt rammeverk for undervisningskompetanse i matematisk modellering. Dette rammeverket er utarbeidet basert på forskning gjort på undervisning av lærerskolestudenter og videreutdanningskurs av lærere. Rammeverket er presentert i teorikapittelet.

Funnene i forskningsprosjektet er basert på datamaterialet fra før-intervjuer av lærerne, observasjon av en modelleringsaktivitet, lydopptak av to fokusgrupper i arbeid med modelleringsaktiviteten og etter-intervju av lærere. Datainnsamlingen besto i tillegg av skriftlig materiell fra elevene og etter-intervju av en elevgruppe på 5 elever. Disse to sistnevnte datamaterialene inneholdt ikke informasjon som var aktuelt for å belyse forskningsspørsmålet, og er derfor ikke en del av analysen. Utsagnene i datamaterialet er nummererte, slik at leseren kan følge kronologien. Resultatene er i hovedsak hentet fra lærernes utsagn, da det er lærerens opplevde utfordringer som er fokuset i studien.

Intervjuguiden (vedlegg 4) til før-intervjuet ble bygget opp etter Blum og Niss (2020) sine funn av utfordringer for lærerne i arbeidet med modelleringsoppgaver, med vekt på punktene: (1) manglende modelleringskompetanse hos lærere, (2) rammeverk og krav som er satt for matematikklærere og undervisning, slik som kriterier, organisering av skolen og vurderingskrav. Ved første gjennomhøring av før-intervjuet, kom det tydelig fram at lærerne hadde liten erfaring med matematisk modellering, både teoretisk og praktisk. Denne manglende erfaringen bidro til at kodingen av datamaterialet ble endret og spisset inn på Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sitt rammeverk for undervisningskompetanse i matematisk modellering. Prosessen rundt valg av rammeverk er beskrevet i metodekapittelet.

Dimensjonene i Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b) sitt rammeverk henger nøye sammen. I analysearbeidet er derfor lærernes opplevde utfordringer identifisert i alle de fire dimensjonene i rammeverket: *teoridimensjon, oppgavedimensjon, instruksjonsdimensjon og diagnostikkdimensjon,* og resultatkapittelet er bygget opp etter disse fire hoveddelene.

4.1 Teoridimensjon

Denne dimensjonen handler om lærerens kunnskap om matematisk modellering, både innenfor forskningsfeltet og læreplanen. Dette innebærer lærerens kunnskap om matematisk modellering, stegene i modelleringssyklusen og ulike typer modelleringsoppgaver. Som vist i metodekapittelet, ble teoridimensjonen delt inn i tre koder:

Tema	Koder
Teoridimensjon	Kunnskap om modellering og modelleringssykluser. Læreplankunnskap. Opplæring og erfaring.

Tabell 5: Oversikt over kodene under teoridimensjonen.

Det tidsmessige oppholdet i gjennomføringen, jf. kapittel 3.3.4, gjorde at lærerne fikk et teoretisk påfyll mellom før-intervjuet og resten av datainnsamlingen. Resultatene knyttet opp mot teoridimensjonen er derfor hentet fra før-intervjuene. Kunnskapen fra disse intervjuene la føringer for det videre forskningsarbeidet.

Før-intervjuene viste tydelige funn på at lærerne hadde manglende teoretisk kunnskap om modellering og modelleringssykluser. Begge lærerne hadde kunnskap om modellering og anvendelse som et kjerneelement i læreplanen. De definerte modellering som begrep, men nevner ingen kjennskap til ulike retninger innenfor modellering, modelleringssykluser eller ulike typer modelleringsoppgaver. Einar hadde i sitt arbeid med masteroppgaven i naturfag satt seg inn i modelleringsbegrepet i LK20. Han uttrykte forståelse for sammenhengen mellom matematikk og den virkelige verden i sin beskrivelse:

> 11. Einar: Nnn, ja.. Matematisk modellering det handler vel om ehhh.. at å ha litt praktisk tilnærming til matten. Få litt virkelighetsnære oppgaver der elevene skal utforske og på en måte prøve å resonnere seg fram til et svar kontra å følge standard algoritmer. (…) at det er mange måter å løse det på og at det får, slik at det, oi matte kan ha litt rot i virkeligheten.

Einar ser ut til å ha tilegnet seg en grunnleggende forståelse av begrepet gjennom arbeidet med sin masteroppgave. Tore uttrykte at han kun hadde møtt modelleringsbegrepet i arbeid med LK20 sammen med kollegaer. En kartlegging av meg, som en del av et arbeidskrav i lærerspesialistutdanningen høsten 2020, viste at samtlige matematikklærere på skolen trodde at modellering handlet om *«å modellere gode svar for elevene».* Tore viser til denne undersøkelsen i sitt før-intervju, og den bevisstgjøringen og endringen av forståelse han da fikk av begrepet.

> 131. Tore: Det, etter hvert har jeg forstått litt mer hva det er, men i begynnelsen tenkte jeg at det var at jeg skal stå og vise alt som skal skje, og at elevene skulle kopiere alt jeg gjorde. Men det er vel det. Det jeg vet nå, er vel mer at de får en åpen oppgave med en forholdsvis enkel inngang, så alle iallfall skal få mulighet til å komme i gang. Også er det de selv som skal finne ut oppgaven på sitt vis, at det ikke er slik at det er en spesiell fasit på hvordan de skal gjøre det. De skal prøve seg fram og komme fram til en løsning.

Tore fikk gjennom denne spørreundersøkelsen et annet syn på hva det betyr å undervise i modellering i matematikk, men har ikke jobbet videre med kjerneelementet sammen med kollegaer. Til spørsmålet om Tore har satt seg videre inn i modelleringsbegrepets betydning i læreplanen svarer han:

> 133. Tore: ikke så veldig godt.

Utsagnene fra lærerne over viser at de på ulike måter har tilegnet seg en begrepsforståelse av matematisk modellering. Einar har gjennom arbeidet med masteroppgaven i naturfag en bredde i begrepsforståelsen mellom matematikk og den virkelige verden. Tore har fått presentert en definisjon gjennom en spørreundersøkelse som har endret hans forståelse av begrepet, og der igjennom fått et mer bevisst forhold til hva modellering innebærer.

Når det kommer til opplæring og erfaring med modelleringsoppgaver gir både Einar og Tore uttrykk for at den har vært liten, både når det gjelder Einar sin nylige fullførte lærerutdanning og mulighet for kompetanseheving for den mer erfarne læreren Tore. Einar, som var ferdig utdannet i 2020, beskriver sin erfaring med lærerskolens manglende fokus på matematisk modellering slik:

11. Einar: Ehh.. Vi hadde veldig lite. Ehh.. Det var jo, jeg ble ferdigutdannet akkurat til den nye læreplanen trådde i kraft, og min opplevelse av lærerstudiet var ikke at dem var noe ivrig etter å ta i bruk den nye læreplanen i undervisningen. Det var mer foreleseravhengig enn institusjonsavhengig.
12. Forsker: Mmm
13. Einar: Så vi var innom det litte grann, eh.., men veldig lite rettet inn mot grunnskolen og hvordan bruke det i undervisning.

Einar viser her til at det er liten sammenheng mellom undervisningen han har fått på lærerhøgskolen og intensjonene i den nye læreplanen. Han har derfor med seg liten erfaring i bruk av modelleringsoppgaver inn i sin egen undervisning. I oppfølgingsspørsmålet spurte jeg Einar om han hadde gjort seg noen erfaringer rundt modellering på egenhånd eller gjennom utviklingsarbeid etter at han begynte å praktisere som lærer. Han trakk da fram arbeidet med sin egen masteroppgave, der han måtte lese seg opp på modellering innenfor naturfag.

> 25. Einar: Ehm.. og, ja! Gjennom egen master så skrev jeg jo om ny læreplan og da var jeg jo inne i, måtte jeg jo innom begrepet. Jeg fikk kjennskap til det der og har på en måte prøvd, i hvert fall til enn viss grad, å ta det med meg inn i egen undervisning.

Einar har med andre ord tilegnet seg noe kunnskap om modellering innfor naturfag på egenhånd, men denne kunnskapen har ikke blitt videreutviklet gjennom utviklingsarbeid inn mot matematikk etter at han begynte å undervise.

Med utgangspunkt i lærernes utsagn innenfor teoridimensjonen tolker jeg det til at begge har en begrepsforståelse av matematisk modellering knyttet opp mot definisjonen i LK20, men ingen utvidet teoretisk forståelse av ulike modelleringsperspektiver eller modelleringssykluser. Borromeo Ferri (2018) viser til at denne manglende kunnskapen og erfaringen vil sette begrensninger for lærerens forutsetninger for å gjennomføre de tre neste dimensjonene i modellen for undervisningskompetanse i matematisk modellering.

4.2 Oppgavedimensjon

Oppgavedimensjonen tar for seg lærerens kjennskap til ulike løsningsstrategier som kan brukes i arbeidet med en modelleringsoppgave. Læreren må kunne analysere modelleringsaktiviteten for å se hvilke kognitive hindringer elevene kan møte, og designe eller tilpasse en modelleringsoppgave slik at den passer den aktuelle elevgruppen. Tabellen viser kodene som ble brukt under analysen av datamaterialet.

Tema	Koder
Oppgavedimensjon	Forutse løsningsstrategier. Kognitiv analyse av oppgaver. Oppgavedesign.

Tabell 6: Oversikt over kodene under oppgavedimensjonen.

I før-intervjuet kom det fram at begge lærerne hadde liten erfaring med modellering, og ingen av dem kan referer til oppgaver de selv har jobbet med eller brukt i egen undervisning. Resultatet under oppgavedimensjonen er derfor mest basert på lærernes tanker og refleksjoner rundt modelleringsoppgaver. Lærerne reflekterer også over utfordringer og årsaker til den manglende bruken av modelleringsaktiviteter i klasserommet.

Å forutse løsningsstrategier er arbeid lærerne har erfaring med i forbindelse med problemløsningsoppgaver, og de trekker sammenhenger inn mot modelleringsoppgaver. Både Einar og Tore har erfart at det å forutse løsningsstrategier gjør det lettere å identifisere elevenes kognitive vansker med oppgaven, for deretter å veilede dem videre. Dette refererer Tore til med bakgrunn i arbeid med problemløsningsoppgaver.

> 178. Tore: Ja, at vi løser den selv også. At vi sannsynligvis har forskjellige måter å løse oppgaven på. Det er ikke sikkert at vi, at jeg klarer å se flere løsninger selv, men at alle vi mattelærerne faktisk jobber oss gjennom oppgaven.
>
> (…)
>
> 180. Tore: Vi har jo lagt merke til det på oppgaver før, at vi gjør det på forskjellige måter.

Tore trekker fram gode erfaringer ved å se på ulike løsningsstrategier, men har ikke jobbet med ulike løsningsstrategier innen modelleringsoppgaver. Dette henger sammen med manglende bruk av oppgavetypen generelt, som blir en hindring i Tores mulighet til å analysere modelleringsoppgaver. Selv om Tore ikke har kjennskap til modelleringsteori er han her inne på viktigheten av at lærerne er bevisst på ulike tankesett, samtidig som det lurt at lærerne deler sin måte å løse oppgaven på med hverandre. Erfaringen han har fra problemløsningsoppgaver har overføringsverdi til modelleringsoppgaver.

Einar er inne på den kognitive analysen av modelleringsoppgaver ved å snakke om lærerens manglende tro på elevenes kompetanse. Han mener at lærerne ofte tviler på elevenes ferdigheter i arbeid med åpne oppgaver, og velger derfor bort modelleringsoppgaver i undervisningen.

> 91. Einar: (…) Og hvis noen kommer og presenterer en modelleringsoppgave så kanskje det tenkes at – *«Nei, den oppgaven her så vanskelig ut! Her var det mye matte å ta tak i for en 13 åring, og dette her kommer ikke de til å ha kapasitet til eller kunnskap til å få til»* også legger du det bort fordi du tenker for lite om elevene dine. Men det kan jo hende at det er nettopp slike oppgaver som gjør at elevene har mulighet til å vise det de faktisk kan da.

Tore er også inne på denne tankegangen rundt troen på elevenes ferdigheter i arbeid med åpne oppgaver i sitt før-intervju. Han uttrykker tydelig usikkerhet på om modelleringsaktiviteter er gjennomførbare i den ene klassen han underviser. Tore opplever denne klassen som lite selvgående og avhengig av bekreftelser på at svaret er riktig.

> 152. Tore: jeg tror også at noen av de klassene vi har på trinnet nå, at det ikke fungerer i det hele tatt i noen klasser.
>
> 153. Forsker: Mmm. Hvorfor ikke det?
>
> 154. Tore: Fordi da må den inngangen være så veldig enkel da, for at de skal komme noen vei, og det tror jeg ikke er lett å gjøre i den ene klassen jeg har. (…) De er veldig opptatt av *«Er dette riktig?»* på alt av oppgaver.

Tore ser her en utfordring i å få elevene til å forstå situasjonen i oppgaven og er redd de allerede i den første overgangen i modelleringssyklusen vil stoppe opp. Han viser til at elevene er opplært i at matematikkoppgaver skal ha et fasitsvar og at det er krevende å endre denne tankegangen hos elevene.

Å designe modelleringsoppgaver eller tilpasse eksisterende modelleringsoppgaver til elevgruppen krever kunnskap fra teoridimensjonen. Læreren må i dette arbeidet kjenne til modelleringssyklusen og ulike typer modelleringsoppgaver. Selv om analysen av teoridimensjonen viser at både Tore og Einar har liten modelleringserfaring, har begge tro på at de kan designe eller tilpasse modelleringsoppgaver, bare de tar seg tid til det. Einar sin beskrivelse viser tydelig at han ikke har lagt så mye innsats i å finne modelleringsoppgaver som er egnet i undervisningen. I før-intervjuet er Einar inne på bruken av modelleringsoppgaver og sammenlikner det med forsøk i naturfag. Han uttrykker at han ser likheter mellom et forsøk i naturfag og modelleringsoppgaver, og at det fort blir en aktivitet som er vanskelig å knytte opp mot kompetansemål.

> 51.Einar: Det kan være vanskelig noen ganger å skjønne hva er det vi egentlig har gjort. Jeg har i allfall opplevd, tenkt noen ganger, for meg selv når jeg har sett på slike modelleringsoppgaver, hva er det egentlig vi skal lære av det?
>
> (…)
>
> 59.Einar: Det blir nesten slik som forsøk i naturfagen der det kan bli litt slik, ja nå har vi et forsøk. Nå har vi det gøy og gjør noe annet. Så skal vi tilbake til klasserommet å ha teori etterpå.

Dette er et eksempel på at Einar ikke har analysert modelleringsoppgavens matematiske potensiale og funnet koblinger mot kompetansemål i læreplanen. På spørsmål om han kan gi noen konkrete eksempler på modelleringsoppgaver viser Einar til modelleringsoppgaven utarbeidet til eksempeleksamen av Utdanningsdirektoratet (udatert-a). Einar mener at denne oppgaven ufarliggjør arbeidet med å designe sine egne modelleringsoppgaver.

> 94. Einar: Der har jeg ikke gjort voldsomt med research! Skal jeg være ærlig, men det finnes jo. Det er jo, googler du modelleringsoppgaver så finner du jo, da får du eksempler på modelleringsoppgaver. Du har jo den eksempeloppgaven som har kommet med forslaget til eksamen. Den viser jo på en måte at det ikke nødvendigvis er så vanskelig å lage en modelleringsoppgave selv heller. Du bare tar den som utgangspunkt og bare tenker at ehh.., her skal du rett og slett bare lage en liten fortelling som inneholder litt matte også skal elevene vise alle sine mattekunnskaper ut ifra den oppgaven. Det er jo, burde være overkommelig å lage den type oppgaver selv.
>
> 97. Forsker: Mmm
>
> 98. Einar: Uten at jeg som sagt har helt oversikt over hvor mange slike oppgaver som finnes ute på nettet så finnes det jo noe. Og det burde jo være mulig å lage egne.

Einar viser god selvtillit i både å finne og designe modelleringsoppgaver, men innrømmer at han har liten erfaring i å vurdere ferdige oppgaver og har aldri laget oppgaver selv.

Tore som har flere års undervisningserfaring uttrykker at han syns det er krevende å finne oppgaver som passer til bruk i klasserommet.

> 134. Tore: Vi er vel prøvd noen ganger, men det er det å finne gode og åpne oppgaver- det er det som er vanskelig egentlig, å finne oppgavene.

Tore viser til at han generelt har jobbet lite med modelleringsaktiviteter, og ved spørsmål om han føler seg godt nok rustet til å lage og jobbe med modelleringsoppgaver, svarer han at han fortsatt har en vei å gå for å bli trygg på egen undervisningskompetanse.

> 148. Tore: Ehhh, litt både og kanskje. Jeg hadde nok fått det til, men har det ikke helt i ryggmargen hvordan det skal gjennomføres enda.

Lærerne opplevde det som utfordrende å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset elevgruppen og kompetansemål, og dette blir en begrensende faktor for bruken av modelleringsaktiviteter i klasserommet. Lærerne har heller ikke erfart å jobbe med modelleringsoppgaver, eller sett nok eksempler til å ta initiativ til å søke opp eller designe modelleringsoppgaver selv.

4.3 Instruksjonsdimensjon

Instruksjonsdimensjon handler om hvordan læreren legger opp undervisningsøkta og hva som er god veiledning av elevene underveis i modelleringsprosessen. Resultatene fra denne dimensjonen er i hovedsak hentet fra etter-intervjuet av lærerne og gjennomføringen i klasserommet der dialogen mellom lærerne og fokusgruppene ble fanget opp på lydopptak. Kodene som ble brukt for å analysere instruksjonsdimensjonen er vist i tabellen under.

Tema	Koder
Instruksjonsdimensjon	Planlegging og gjennomføring. Interaksjon med elevene.

Tabell 7: Oversikt over kodene under instruksjonsdimensjonen.

Med bakgrunn i lærernes manglende erfaring med modelleringsoppgaver bestemte jeg som forsker hvilken modelleringsoppgave elevene skulle jobbe med. Lærerne var med på å planlegge gjennomføringen av modelleringsaktiviteten. Fokusgruppene ble med hensikt satt sammen slik at gruppene hadde ulike faglige nivåer, og behovet for interaksjon fra lærerne ble derfor forskjellig. Fokusgruppe 1, sammensatt av elever med høy til middels matematiske ferdigheter, forsto situasjonen og startet raskt opp med å matematisere. Fokusgruppe 1 fikk en matematisk modell for utregning av kjempens sko, men validerte ikke svaret opp mot andre typer sko eller elever. Behovet for veiledning fra lærer var derfor størst i valideringsfasen. Fokusgruppe 2, som besto av elever med middels til svak matematisk kompetanse, klarte ikke å avgjøre hvilken matematikk som skulle benyttes for å lage en matematisk modell. Denne gruppen klarte derfor ikke å gjøre utregninger for å finne kjempens høyde på egenhånd, og lærer måtte veilede elevene allerede de første stegene i modelleringsprosessen. Fokusgruppe 2 ignorerte situasjonen i oppgaven og gikk rett på tallene i oppgaveteksten. Denne strategien var forutsett i planleggingen av modelleringsaktiviteten. Lærerne valgt å la elevene jobbe en stund med denne løsningen før de gjorde inngrep.

> 462. Tore: Hvordan skal dere klare å finne ut av det? Hvor mye høyere er dere enn skoa deres?
>
> 463. Elev 5, fokusgr. 2: Da må vi sikkert måle oss?

Ved at Tore stilte et metakognitivt spørsmål konkluderte elevene med at de måtte måle. Elevene satte i gang med å måle høyden til en av elevene på gruppen. Gruppen fikk to tall som de ikke visste hvordan de skulle arbeide med matematisk. Einar observerte etter hvert at gruppen satt fast og foretok et inngrep for å hjelpe dem videre. Han spurte elevene hva de hadde gjort og hvordan de skulle bruke opplysningene de hadde.

> 521. Elev 5, fokusgr. 2: Ja, de målte meg og jeg fatter ikke hvorfor.
>
> 522. Elev 7, fokusgr. 2: Vi fikk bare beskjed om å måle.
>
> 523. Einar: Ok, nå har dere målt høyden på elev 5. Det var 1,79. Var det ikke det dere sa?
>
> 524. Elev 7, fokusgr. 2: Ja.
>
> 525. Einar: Hva skal dere med det da? Elev 5 er ingen kjempe?
>
> 526. Elev 5, fokusgr. 2: Vi fikk beskjed om det av Tore.

Den tidligere veiledningen til Tore hadde ført til at elevene hadde gjort en handling, men elevene hadde ikke fått eierforhold til det de hadde gjort. Einar prøvde å få elevene til å reflektere over hva de måtte gjøre videre. Det hadde oppstått en «rødt flagg»-situasjon, da elevene manglet forståelse for situasjonen og hadde stoppet opp i modelleringssyklusen. Einar prøvde med flere metakognitive spørsmål for å veilede elevene over hindringen.

> 537. Einar: Ok. Hvorfor må dere måle skoa til elev 5?
>
> (…)
>
> 569. Einar: Hva skal dere med de to verdiene?
>
> (…)
>
> 582. Einar: Har dere noen av de målene på kjempen?

Etter flere mindre vellykkede forsøk fra elevene på å finne en matematisk modell, ga Einar elevene et konkret tips på hvordan de kunne bruke resultatene fra målingene sine. Han prøvde å visualisere ved å måle elevens kroppslengde med skoen for å finne ut hvor mange sko det gikk oppover kroppen, for deretter å sammenlikne dette med kjempens sko og kropp.

> 633. Einar: Hvor mange sko … Hvis dere hadde lagt elev 5 på gulvet. Hvor mange sko hadde det gått?
>
> 634. Elev 8, fokusgr. 2: 6
>
> (…)
>
> 638. Einar: så om dere hadde lagt kjempen på gulvet da?
>
> 639. Elev 8, fokusgr. 2: ja
>
> 640. Einar: Hvordan kunne vi funnet høyden ved hjelp av skoen?

Elevene så fortsatt ikke sammenhengen mellom egen kropp og kjempens kropp, og Einar fortsatte derfor å beskrive sin tankegang for elevene og brukte elevens sko og sin egen kropp som konkretiseringsmateriell. Det gikk nå opp for elevene hvordan de kunne arbeide matematisk med tallene sine.

> 655. Einar: Og han *(viser med skoen oppover kroppen*), trenger 6 sko for å finne sin høyde.
>
> 656. Elev 8, fokusgr. 2: Da må han gange med 6 for å finne sin høyde.
>
> 657. Elev 7, fokusgr. 2: Var det derfor vi regnet sånn i stad?!

Selv om begge lærerne prøvde å unngå det, gav Einar til slutt opp da han veiledet den svakeste gruppen og ga fra seg sin «favorittløsning» for å få elevene over hindringen i modelleringssyklusen.

I etter-intervjuet reflekterte lærerne og forskeren sammen rundt gjennomføringen av modelleringsaktiviteten. Tore og Einar var enige i at utfordringer rundt veiledning av elevene opplevdes som det mest krevende underveis i modelleringsaktiviteten. Vi observerte at både grupper som løste oppgaven raskt og var fornøyd med svaret sitt, og grupper som slet med å komme i gang ble passive om lærer ikke raskt var på plass for å hjelpe dem videre. Lærerne opplevde spesielt veiledningen av fokusgruppen med elever med lavest matematisk kompetanse som krevende.

> 770. Tore: jeg tenker jo at det vanskeligste er å stille spørsmål som kan hjelpe de dårlige gruppene på vei uten å si «*bare ta skoen din og mål liksom*»

(…)

775. Einar: kanskje å veilede uten å gi svar. Ja, definitivt! Fordi, du blir jo, det blir jo veldig fort lærerstyrt og vår tankegang, og greia her er jo at eleven skal få prøvd ut sine metoder og da utvikle en egen tankegang uten at vi skal legge noen føringer. Det blir jo veldig lett føringer hvis vi skal prøve å tipse om hva vi ville ha gjort da!

(…)

804. Einar: ja, også begynner grupper å prate sammen eller overhører hverandre. Også oppdager de at, oi, vi har ikke samme tall. Også blir de enda mer usikre. Det er jo også en utfordring her, å trygge elevene på at selv om de har ulike svar så kan de ha tenkt helt likt og helt riktig.

Utsagnene over tyder på at lærerne ønsket å veilede elevene på et metakognitivt nivå, men opplevde det som krevende. Einar satte ord på det som ofte skjer i veiledning, spesielt blant uerfarne lærere i modellering, at læreren gir fra seg sin favorittløsning. I veiledningen av fokusgruppe 2, som startet med å multiplisere tallene i oppgaven, kan vi se at både Tore og Einar prøvde å gi elevene metakognitive spørsmål, men endte etter hvert med å gi gruppen konkrete tips for å få dem videre i modelleringsprosessen.

Etter-intervjuet ble avsluttet med refleksjon om hva vi kunne gjort annerledes, og det er forberedelsen av gode spørsmål som trekkes fram.

813. Forsker: Er det noe vi kunne gjort annerledes? I forhold til planleggingen eller noe, om vi skulle gjort det en gang til? Er det noe vi skulle tenkt på?

814. Tore: Det er jo eventuelt det å ha gode spørsmål, for å komme i gang med de som står helt fast og ikke får til noen ting. Som har prøvd å gange og dele og som bare tuller med tall uten at det gir mening. Eller bare sitter der.

(…)
839. Einar: Kanskje en spørsmålsbank. På hva som er lurt å spørre om. Det vil jo selvfølgelig variere fra oppgave til oppgave, men det å stille gode spørsmål for å få elevene til å komme i gang, kontra det å tipse om hvor de skal starte.

Lærerne uttrykte en utfordring rundt den kognitive analysen av elevenes arbeid med modelleringsoppgaver. Tore og Einar opplever det utfordrende å stille elevene de riktige spørsmålene for å veilede dem videre, uten å gi fra seg svaret på oppgaven.

Utfordringer knyttet til den kognitive analysen av elevenes arbeid fører oss over til den siste dimensjonen i rammeverket, diagnostikkdimensjonen.

4.4 Diagnostikkdimensjon

Diagnostikkdimensjonen handler om å gi elevene systematiske tilbakemeldinger over tid, dette gjelder både på modelleringskompetansen og matematikken i oppgavene. Niss og Blum (2020) viser til at denne dimensjonen ofte blir sett på som den mest krevende innen undervisningskompetansen i modellering, og derfor hindrer lærere å ta i bruk modellering i klasserommet. I kodingen skiller jeg mellom diagnostisering, der prosessen er i fokus, og vurdering der det handler om å sette en sluttvurdering på elevenes produkt.

Tema	Koder
Diagnostikkdimensjon	Diagnostisering. Vurdering.

Tabell 8: Oversikt over kodene under diagnostikkdimensjonen.

I kodingen diagnostisering er det lagt vekt på det Borromeo Ferri (2018) omtaler som prosessorientert diagnostisering. Hensikten med denne diagnostiseringen er å forstå elevens tankeprosess.

I før-intervjuet reflekterte Tore rundt vurdering av elevenes arbeid med modelleringsoppgaver, og viste samtidig til behovet for kompetanse innenfor kognitiv analyse av modelleringsoppgaver. Han viste til viktigheten av at vi som lærere har forutsett hvilke løsninger elevene kan komme med, og sammen vurderer hvilke av disse som er fornuftige å knytte opp mot situasjonen. Tore trakk også fram eksempler fra vurdering av problemløsningsoppgaver, der matematikkollegaene har erfaring med å forutse ulike typer løsninger.

> 174. Tore: Det er jo vanskeligere for oss å vurdere det også, så lenge det ikke er noe fasitsvar på det som vi bare kan sette på en R eller en V med en gang på en måte.
>
> 175. Forsker: Mmm
>
> 176. Tore: Men det var jo, så lenge vi har funnet forskjellige typer løsninger på svare selv, så var det greit nok å rette det. Selv om det er litt vanskeligere.

I etter-intervjuet forteller Tore om hvordan han observerte fokusgruppe 2 og la merke til hvordan elevene reflekterte rundt oppgaven. Han viser til at observasjonen av en av elevene som presterer på lavt nivå i faget ga han et godt innblikk i denne elevens tankegang

> 830. Einar: Ja, *(referer til elev)* var jo helt klink på hva som måtte skje i praksis, men så er det jo vanskeligere for han å uttrykke seg med matten. Hm, og hvis vi på en måte bare ser på det som havner på papir så er det jo vanskelig å skulle vurdere, da blir det liksom bare en helhet, da blir det vanskelig å vurdere hver enket elev ja.
>
> 831. Forsker: Mmm
>
> 832. Einar: men når du har mulighet til å høre litt på hva som blir sagt og følge litt med, så får du jo kanskje i større grad dratt fram de litt mer svake elevene. For de sterkeste elevene vil jo gjerne få dokumentert kunnskapen sin på arket uansett.

Einar viser til at det er en utfordring å fange opp elevenes matematiske kompetanse når de jobber med modelleringsoppgaver, spesielt de elevene som ikke får ned tankene sine på papiret. Einar trekker fram viktigheten av at vi tar oss tid til å lytte til samtalene mellom elevene og spørre dem hvordan de tenker.

Selv med liten erfaring i bruk av modelleringsaktiviteter reflekterte lærerne over hva som vil være viktig innen vurdering av modelleringsoppgaver. Einar så spesielt på utfordringen ved å lære elevene å kommunisere tydelig nok skriftlig slik at kompetansen blir synliggjort.

> 859. Einar: Ja, jeg tenker jo at når vi får, ikke bare når vi får det mer under huden, men når elevene får det også (…) Dette her er en genial måte å kunne vurdere elevene på også. Fordi, jo mer de skriver jo lettere er det for oss og vurder dem. Hm, så da vil det jo være en annen måte å vurdere elevene på enn en standard prøvesituasjonen.

Vurdering av elevene er også en utfordring som knyttes opp mot læreplanen og krav om vurdering i form av standpunktvurdering, muntlig-praktisk eksamen og skriftlig eksamen (Kunnskapsdepartementet, 2020). Denne formen for vurdering kategoriseres som produktorientert diagnostisering (Borromeo Ferri, 2018), som betyr at elevene må få vurdering på sitt individuelle arbeid.

Erfaringer fra andre emner i matematikk og vurderingspraksisen som lærerne har jobbet med har overføringsverdi til modelleringsaktiviteter. Lærerne er bevisste på at diagnostisering av elevenes arbeidsprosess er viktig for å få et riktig bilde av elevens utfordringer og kompetanse. Dette fokuset tyder på at lærerne er noe forberedt på vurdering av elevenes modelleringsarbeid når kompetansen i å bruke modelleringsaktiviteter i klasserommet er på plass.

4.5 Oppsummering av resultatene

I dette kapittelet er det lagt fram eksempler på situasjoner som beskriver de ulike temaene og kodene i analysearbeidet. Analysen av datamaterialet kan oppsummeres i tre hovedfunn.

Det første, og overordnede funnet, handler om lærernes kunnskap og erfaring med matematisk modellering.

- *Lærerne uttrykte at de har fått lite opplæring innen modellering, herunder modelleringssykluser og ulike typer modelleringsoppgaver.*

Funnet er tydeligst under teoridimensjonen, men påvirker også de andre dimensjonene i rammeverket. Analysen viser at lærerne ikke har forutsetninger til å vurdere eller analysere modelleringsoppgaver eller elevenes kognitive modelleringsprosess, da lærerne mangler både erfaring og teoretisk kunnskap innen matematisk modellering.

Lærernes uttrykte utfordringer rundt tilgangen på modelleringsoppgaver er det andre funnet som ble identifisert. Under oppgavedimensjonen kom det fram at ingen av lærerne hadde designet eller tilpasset modelleringsoppgaver til sine elever. Lærerne uttrykte også utfordringer rundt det å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset den aktuelle elevgruppen og samtidig knyttet opp mot kompetansemål i LK20.

- *Lærerne opplevde det som utfordrende å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset elevgruppen og aktuelle kompetansemål.*

Det tredje funnet handler om kognitiv analyse av modelleringsoppgaver og elevenes mulig utfordringer i modelleringsarbeidet. Lærerne uttrykte at det var spesielt krevende å veilede elevene gjennom modelleringsaktiviteten. Lærerne ønsket å stille gode spørsmål til elevene uten å gi for mange hint og føringer. Dette funnet er identifisert under instruksjonsdimensjonen og lærernes interaksjon med elevene. Funnet kan også knyttes opp mot analysen av modelleringsoppgaver under oppgavedimensjonen, og veiledning og vurdering av elevenes modelleringsprosess under diagnostikkdimensjonen.

- *Lærerne uttrykte at det er krevende å forberede seg og stille gode spørsmål for å veilede elevene i modelleringsarbeidet.*

I diskusjonskapittelet ser jeg nærmere på hvordan disse funnene bygger på hverandre, og drøfter dem opp mot relevant teori.

5 Diskusjon

Analysen av datamaterialet har gitt innsyn i forskningsspørsmålet «*Hvilke utfordringer opplever to matematikklærere i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn?*»

I dette kapittelet presenteres hovedtrekkene av funnene som er gjort. Resultatene fra analysen blir tolket og diskutert opp mot teorien som er presentert i kapittel 2.

Det ble indentifisert tre funn i datamaterialet:

Hovedfunn: Opplæring og erfaring

- *Lærerne uttrykte at de har fått lite opplæring innen modellering, herunder modelleringssykluser og ulike typer modelleringsoppgaver.*

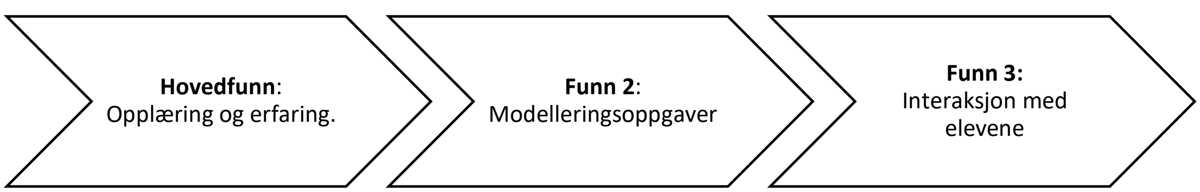
Funn 2: Modelleringsoppgaver

- *Lærerne opplevde det som utfordrende å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset elevgruppen og aktuelle kompetansemål.*

Funn 3: Interaksjon med elevene

- *Lærerne uttrykte at det er krevende å forberede seg og stille gode spørsmål for å veilede elevene i modelleringsarbeidet.*

Lærernes uttrykte mangel på opplæring kan ses på som en overordnet utfordring i datamaterialet, og fører til manglende kunnskap som spiller inn i de to neste funnene. Derfor diskuteres lærernes opplevde mangel på opplæring først, noe som samsvarer med oppbyggingen av rammeverket til Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b). I lys av dette drøftes lærernes utfordringer i å finne godt egnede modelleringsoppgaver og god interaksjonen med elevene i klasserommet. Figuren under illustrerer oppbyggingen av diskusjonskapittelet og sammenhengen mellom funnene:



Figur 10: Funn i oppgaven. Pilene illustrerer hvordan funnene henger sammen.

5.1 Hovedfunn: Opplæring og erfaring

Lærerne uttrykte at de har fått lite opplæring innen modellering, herunder modelleringssykluser og ulike typer modelleringsoppgaver.

Datamaterialet viser at både den nyutdannede læreren og den mer erfarne mangler opplæring i modellering, og begge uttrykker at de har liten erfaring med modelleringsoppgaver. Denne manglende erfaringen med matematisk modellering, som i hovedsak er plassert innenfor teoridimensjonen, gir ringvirkninger og er årsaken til flere av utfordringene lærerne peker på i senere steg i arbeidet med modelleringsaktiviteten.

Analysen av datamaterialet viser at begge lærerne har liten kjennskap til modelleringsteori, men har en forståelse av læreplanens bruk av begrepet matematisk modellering. Denne begrepsforståelsen har Einar tilegnet seg på egenhånd, mens Tore fikk kjennskap til den gjennom en undersøkelse gjort av meg som en del av min lærerspesialistutdanning. Videre kommer det fram at ingen av dem har jobbet med begrepet sammen med kollegaer eller lest seg opp ytterligere på egenhånd.

Einar, som ble ferdig utdannet samtidig som innføringen av LK20 startet, viser til at det ble brukt få modelleringsoppgaver i hans matematikkundervisning på høgskolen. Einars erfaringer stemmer med internasjonale studier som peker på at det er stor variasjon i lærerutdanningen, og at manglende modelleringsopplæring i lærerutdanningen er en av årsakene til at det blir brukt langt mindre modellering i hverdagsundervisningen enn det som er ønsket fra forskningsmiljøene (Doerr, 2007). Den erfarne læreren, Tore, har ikke fått tilbud om etterutdanning eller kursing innen matematisk modellering, og ansvaret for å tilegne seg modelleringskompetanse er derfor lagt på læreren selv. Forskere fraråder denne praksisen, da det er krevende for lærerne å tilegne seg både den matematiske og den ekstra-matematiske kunnskapen som er nødvendig i modelleringsaktiviteter på egenhånd (Niss & Blum, 2020).

Internasjonale studier viser til at det er læreren som har størst betydning når elevene skal lære å jobbe med modelleringsaktiviteter (Borromeo Ferri, 2013). For at undervisningen i modellering skal ha god kvalitet må læreren ha pedagogisk kompetanse, fagdidaktisk kompetanse og ekstra-matematisk kompetanse (Borromeo Ferri, 2018). I analysen tolker jeg det til at begge lærerne har god pedagogisk og fagdidaktisk kompetanse i matematikk. De utøver god klasseledelse og innehar tilstrekkelig matematisk kompetanse for å tolke og veilede elevene i deres arbeid med matematikken. Det er modelleringskompetansen, som begge lærerne mener at de kan tilegne seg på egenhånd, som er den største utfordringen under modelleringsaktiviteten.

Lærernes beskrivelse av manglende opplæring og erfaring med modelleringsoppgaver viser at det er behov for kompetanseheving. Lærerne i denne undersøkelsen uttrykker at de ikke har sett behov for kompetanseheving, noe som er en utfordring i seg selv og samsvarer ikke med forskeres erfaring. Forskere er tydelig på at det er en myte at lærerne kan tilegne seg nødvendig profesjonell kompetanse kun gjennom egen undervisning (Blum, 2015). Blum (2015) viser videre til viktigheten av at kompetanseheving skjer systematisk i samspill med kollegaer for å få fram refleksjon og diskusjon rundt modelleringsaktiviteten.

5.2 Funn 2: Modelleringsoppgaver

Lærerne opplevde det som utfordrende å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset elevgruppen og aktuelle kompetansemål.

Analysen av datamaterialet viser at mangel på lett tilgjengelige modelleringsoppgaver er en utfordring for begge lærerne. I før-intervjuet kunne verken Einar eller Tore umiddelbart referere til modelleringsoppgaver de hadde brukt i egen matematikkundervisning. Lærerne har ingen modelleringsoppgaver i sin «oppgavebank», ei heller ingen erfaring med å designe egne oppgaver. Lærerne peker på at det er vanskelig å finne oppgaver som passer til de aktuelle kompetansemålene, og de er redde for at en modelleringsoppgave bare blir en «happening» uten å ha sammenheng med det andre elevene jobber med i matematikk. Lærernes uttrykte utfordringer samsvarer med tidligere forskning som sier at lærerne syns det er krevende å velge ut modelleringsoppgaver som er knyttet opp mot aktuelle matematiske temaer (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2018; Doerr, 2007). Antonius et. al (2007) peker også på at det er få gode modelleringsoppgaver som samsvarer med læreplanenes intensjoner og kompetansemål tilgjengelig.

Einar og Tore ser på elevenes kompetanse som en utfordring i bruk av modelleringsaktiviteter. Begge kommenterer at de ikke har troen på egne elevers kompetanse for å løse ikke-tradisjonelle oppgaver, uten et fasitsvar. Denne holdningen vil gjøre det utfordrende for dem å finne modelleringsoppgaver som er tilpasset elevgruppen. Manglende tro på egne elever kan knyttes opp mot kognitiv analyse av modelleringsoppgaver, altså erfaring med å forutse hvilke utfordringer elevene kan møte i oppgaven. Funn av blant annet Borromeo Ferri (2018) bekrefter at uerfarne modelleringslærere ofte anser modelleringsoppgaver som for vanskelige og komplekse for sine elever. Hun mener videre at en slik holdning vil endres etter hvert som læreren selv erfarer bruken av modelleringsoppgaver, noe som forhåpentligvis vil være tilfelle hos lærerne i denne studien også.

Tore og Einar har tro på at de kan lage egne modelleringsoppgaver, men sier at de ikke har prøvd. Mangel på tilgang og bruk av modelleringsoppgaver fører til at elevene ikke får jevnlig drypp av denne oppgavetypen, slik forskning sier er mest hensiktsmessig (Borromeo Ferri, 2018). Selv om Blum og Niss (2020) mener at liten tilgang på modelleringsoppgaver ikke lenger er et argument, vil jeg påstå at dette fortsatt er en hindring for matematikklærere i Norge. Etter det jeg erfarer er det noen få modelleringsoppgaver i Matematikksenterets digitale-oppgavesamling[4], ellers må lærerne søke opp på engelskspråklige nettsider og oversette og tilpasse disse til eget klasserom. Jeg ser behov for at lærerne får tilgang til kvalitetssikrede modelleringsaktiviteter innenfor ulike temaer, gjerne også innenfor de tverrfaglige temaene i LK20. Bruk av modelleringsaktiviteter innenfor de tverrfaglige temaene vil i tillegg synliggjøre at matematikk er en viktig del av andre fagfelt. Modelleringsaktiviteter som blir utarbeidet av fagmiljøer, om det er Matematikksenteret eller lærebokforfattere, bør ha instruksjoner som veileder lærerne gjennom modelleringsprosessen. Bjarnes bensindilemma, som er beskrevet i kapittel 2.7, har en slik instruks og vil bidra til å hjelpe uerfarne modelleringslærere.

Det er flere faktorer som kan bidra til at tilgangen på modelleringsoppgaver skal oppleves som mindre utfordrende for lærerne. Lærerne må selv erfare og arbeide med modelleringsaktiviteter, og samtidig bruke erfaringene til å designe eller tilpasse modelleringsoppgaver de finner i lærebøker eller på internett. Utgivere av læremidler må også distribuere modelleringsaktiviteter som er knyttet opp mot mål i læreplanen, gjerne med gode instruksjoner slik som i Bjarnes Bensindilemma. På den måten vil terskelen for å ta i bruk modelleringsaktiviteten føles overkommelig for lærerne.

5.3 Funn 3: Interaksjon med elevene

Lærerne uttrykte at det er krevende å forberede seg og stille gode spørsmål for å veilede elevene i modelleringsarbeidet.

[4] Mattelist.no

Gjennomføringen av undervisningsopplegget og etter-intervjuet med lærerne viste at veiledning av elevene gjennom modelleringsprosessen var krevende, spesielt i gruppen med middels til lav matematisk kompetanse.

Før gjennomføringen fikk læreren en kort presentasjon av modelleringssyklusen til Blum og Leiβ og 4-stegsmodellen, men ingen praktisk erfaring med modelleringsaktiviteter. Denne teoretiske gjennomgangen førte til at lærerne ble noe mer bevisst elevenes kognitive prosess. Likevel var den så kortfattet at den ikke påvirket lærernes egen modelleringskompetanse i betydelig grad. Et resultat av den korte teoretiske innføringen var at vi under refleksjonen av gjennomføringen av modelleringsaktiviteten, hadde tilgang til et felles språk innen matematisk modellering.

I kapittel 2.8 beskrives fem kriterier som sier noe om organiseringen av klasserommet og interaksjonene mellom lærer og elev. Lærerne i denne studien ble ikke presentert for denne forskningen. Tore og Einar dannet likevel et godt læringsorientert klasseromsmiljø der elevene fikk nok tid til å reflektere over modelleringsoppgaven på gruppen, veiledning underveis og modelleringsaktiviteten ble avsluttet med en klasseromssamtale der ulike løsningsforslag ble validert. I etter-intervjuet med elevene, som ikke er en del av analysematerialet, bekrefter elevene at modelleringsaktiviteten var en ukjent arbeidsform. Det å ikke ha et fasitsvar opplevdes som uvant og frustrerende. Endringen av den didaktiske kontrakten med elevene, fra at matematikk er et fag med korte oppgaver med rette og gale svar, til et fag der det er rom for diskusjon og der feil svar ses på som en god anledning for læring, anser jeg som en viktig og positiv endring i matematikkfaget. Dette gjelder ikke bare i arbeid med modelleringsaktiviteter, men med matematiske temaer generelt.

Både Tore og Einar opplevde at det var krevende å analysere elevenes kognitive utfordringer i modelleringsaktiviteten og forberede gode spørsmål. I resultatkapittelet ser vi tydelig at lærerne fanger opp fokusgruppe 2 sine «røde flagg»-situasjoner i form av mangel på progresjon i modelleringsoppgaven. Lærerne hadde ikke forberedt gode spørsmål til disse situasjonene slik at de fikk veiledet elevene over hindringen. Resultatet ble at lærerne la føringer for elevene ved å gi fra seg sin egen favorittløsning. Selv om begge lærerne prøvde å veilede ved bruk av metakognitive spørsmål, endte begge opp med å gi konkrete tips for å hjelpe elevene videre. Denne veiledningen kan knyttes opp mot manglende teoretisk erfaring ved at vi ikke hadde gjort en god nok kognitiv analyse av modelleringsaktiviteten i forkant av gjennomføringen. God undervisning i modellering forutsetter at læreren utfordrer elevene både kognitivt og metakognitivt ved å gripe inn og gi elevene riktige tilbakemeldinger, uavhengig av elevens faglig nivå (Borromeo Ferri, 2013; Niss & Blum, 2020).

Å forutse ulike løsningsstrategier i problemløsningsoppgaver er en vanlig arbeidsmetode for både Einar og Tore. Tore trekker fram viktigheten av dette arbeidet i modelleringsoppgaver også. Å forutse mulige hindringer for elevene er en utfordring, og den kan knyttes til funnet rundt fravær av kjennskap til modelleringssykluser, og vil bli enklere med økt kunnskap og erfaring. Analysen viser at lærerne ser nytten av at flere lærere løser oppgaven for å få fram flest mulig innfallsvinkler. Å sammenlikne ulike innfallsvinkler til oppgaver er et godt utgangspunkt for å bevisstgjøre seg ulike tankesett. På den måten kan man tilpasse veiledningen til elevene.

Den kognitive analysen av elevenes modelleringsprosess, som kreves for å gi eleven best mulig tilpasset veiledning, er også gjeldende i diagnostikkdimensjonen. Elevene skal veiledes både på prosess og produkt. I tillegg kommer krav om vurdering både av elevens matematiske kompetanse og modelleringskompetanse.

Fleksibiliteten som er nødvendig for å håndtere elevenes uforutsette ideer og vanskeligheter i arbeidet med modelleringsaktiviteter, ses på som en av de største utfordringene for lærerne (Niss & Blum, 2020). Det bekrefter datamaterialet der Tore og Einar uttrykker at det var spesielt krevende å veilede fokusgruppe 2, med elever med middels til lav matematisk kompetanse. For at læreren skal kunne oppdage utfordringer og stille gode kognitive og metakognitive spørsmål til elevene underveis i modelleringsaktivteten, er det nødvendig at læreren gjort en kognitiv analyse av modelleringsoppgaven på forhånd. Dette arbeidet krever god undervisningskompetanse i matematisk modellering.

5.4 Oppsummering av diskusjonen

Funnene kan oppsummeres med at manglende teoretisk kunnskap og erfaring med modellering gjør det utfordrende for lærerne å ta i bruk modelleringsaktiviteter i klasserommet. Lærerne har ikke fått den nødvendige opplæringen innen matematisk modellering. Tore og Einar har av den grunn ikke gode nok forutsetninger til å designe eller velge ut modelleringsoppgaver, eller god nok kunnskap til å analysere elevenes kognitive hindringer i modelleringsarbeidet.

I tillegg til lærernes begrensede kunnskap innen matematisk modellering, vil jeg si at det ligger en utfordring i lærernes selvtillit. Jeg tolker det som at både Einar og Tore har så god tro på sin egen undervisningskompetanse at de ikke ser behov for kompetanseheving innen matematisk modellering. De har begge tro på at de selv kan tilegne seg modelleringskompetansen som er nødvendig gjennom å undervise. Å tilegne seg modelleringskompetanse på egenhånd bryter med forskningslitteraturen av blant annet Blum (2015), som poengterer at det er en myte at lærere kan opparbeide seg modelleringskompetanse på egenhånd kun ved hjelp av egen undervisning. Som nevnt under metoden, er ikke Einar og Tore representative for den gjennomsnittlige matematikklæreren. Det er grunn til å tro at denne utfordringen ved å ikke se behov for hjelp til kompetanseheving ikke gjelder flertallet av lærerne.

Jeg konkluderer med at det er et behov for kompetanseheving av praktiserende lærere på et overordnet nivå. Det må også sikres at matematisk modellering er en del av matematikklærerutdanningen. Kompetansehevingen av praktiserende lærere bør ledes av en lærer med erfaring innenfor modelleringsteori og praktisk bruk av modelleringsaktiviteter i klasserommet. Det er viktig at lærerne selv erfarer hvordan det er å jobbe med modelleringsaktiviteter, for å tilegne seg den kompetansen som er nødvendig både pedagogisk og fagdidaktisk. Den ekstra-matematiske kompetansen er her spesielt viktig, fordi den referer til temaer utenfor matematikken. Gjennom egne erfaringer med modelleringsaktiviteter vil lærerne lettere kunne vurdere aktuelle oppgaver og foreta kognitive analyser for å forberede undervisningen. Den kognitive analysen av elevenes mulig hindringer gjør det lettere for læreren å forutse mulige løsningsstrategier, forberede gode spørsmål og vurdere elevenes modelleringsarbeid.

I arbeidet med denne masteroppgaven har jeg fått bedre innsikt og høyere teoretisk kompetanse om matematisk modellering, spesielt innenfor undervisningskompetanse. I oppgavens siste kapittel ønsker jeg å dele tanker rundt funnene i oppgaven og refleksjon rundt videre arbeid innenfor fagfeltet.

6 Avslutning

Denne masteroppgaven har handlet om matematisk modellering med fokus på lærernes undervisningskompetanse. Jeg har arbeidet med forskningsspørsmålet *«Hvilke utfordringer opplever to matematikklærere i gjennomføringen av en modelleringsaktivitet på 8. trinn?».* Kjerneelementet modellering og anvendelse i LK20 setter nye krav til undervisning og vurdering i matematikk. Jeg ønsket å undersøke hvilken kunnskap og erfaring lærerne hadde innenfor dette fagfeltet, og hvilken kompetanse lærerne må tilegne seg for å være gode modelleringslærere.

Datamaterialet ble samlet inn gjennom intervju og observasjon. Intervjuene med lydopptak, ga informasjon om to læreres forkunnskaper om matematisk modellering. Intervjuene fanget også opp refleksjon etter gjennomføringen av en modelleringsaktivitet i klasserommet. Under modelleringsaktiviteten ble det i tillegg til observasjon tatt lydopptak av 7 elever, fordelt på to fokusgrupper. Lydopptakene fanget opp dialogen mellom elevene på gruppa og mellom elevene og lærerne. Lydopptakene fra intervjuene og fokusgruppene ble transkribert og analysert for å avdekke hvilke utfordringer lærerne uttrykte at de opplevde i arbeidet med modelleringsaktiviteten.

6.1 Svar på forskningsspørsmålet

Min konklusjon ut fra analysen av datamaterialet og diskusjonen i denne masteroppgaven, er at matematikklærerne i dette studiet uttrykte manglende undervisningskompetanse i matematisk modellering. Lærerne har dermed behov for kompetanseheving for å kunne nå intensjonen i LK20 innenfor kjerneelementet modellering og anvendelse.

Analysen av datamaterialet viste at lærerne har liten teoretisk kunnskap og praktisk erfaring med matematisk modellering. Hovedfunnet, manglende opplæring og erfaring, har rot i teoridimensjonen i rammeverket til Borromeo Ferri og Blum (Borromeo Ferri, 2018; 2009b). En konsekvens av manglende teoretisk kunnskap var at lærerne opplevde det som krevende å finne passende modelleringsaktiviteter. Lærerne hadde heller ingen erfaring med å analysere elevenes kognitive hindringer i modelleringssyklusen, og de møtte derfor utfordringer i veiledningen av elevene underveis i modelleringsarbeidet.

Postholm og Jacobsen (2021) påpeker at den interne gyldigheten i enkeltstudier som denne, er stor, men at det er vesentlig å stille spørsmål om denne informasjonen vil være av interesse for andre. Selv om denne studien kun undersøkte to læreres opplevelser i arbeidet med en modelleringsaktivitet, mener jeg at resultatene har ekstern gyldighet. Mine to informanter framsto som godt faglig oppdaterte og viste interesse for utviklingsarbeid. Når Tore og Einar mangler undervisningskompetanse i matematisk modellering, anser jeg sannsynligheten som stor for at det samme gjelder mange av våre matematikkollegaer rundt om i landet. Jeg tror at behovet for kompetanseheving blant lærerstanden innenfor matematisk modellering er stort, både når det gjelder innholdet i lærerutdanningen og videreutdanning av praktiserende lærere.

6.2 Studiens plass i forskningsfeltet og veien videre

Kjerneelementet modellering og anvendelse har kommet inn i norsk skole gjennom innføringen av LK20. I min litteraturstudie i tilknytning til denne masteroppgaven har jeg funnet lite forskning som sier noe om arbeidet med matematisk modellering i norsk skole. Jeg har derfor støttet meg til studier gjort i sammenliknbare land, som Danmark (Niss, Blomhøj og Jensen), Tyskland (Blum, Borromeo Ferri og Kaiser) og USA (Doerr og Lesh). Flere av disse internasjonale studiene ble gjort i perioden 2005-2010, men samsvarer godt med mine funn. Dette er ikke overraskende, da Norge ligger tilsvarende mange år etter når det gjelder implementeringen av matematisk modellering i skolen. I likhet med funnene av blant annet Doerr (2007) og Borromeo Ferri og Blum (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2018) er det behov for en systematisk kompetanseheving av matematikklærerne i Norge, fordi undervisningskompetanse i matematisk modellering ikke tilegnes kun gjennom egen undervisning. Som en forlengelse av denne masteroppgaven ville det vært interessant å gjennomføre studier på hvordan ulike lærerutdanningsinstitusjoner i Norge jobber med matematisk modellering, for å forberede nye lærere på hverdagen i klasserommet. Det samme gjelder hvilke tilbud som blir gitt til lærere som allerede underviser i skolen.

Skal vi tro studiene som er teorigrunnlaget i denne masteroppgaven, vil det ta mange år før matematisk modellering får en selvfølgelig plass i norske klasserom, om det ikke tilrettelegges for systematisk kompetanseheving. Et annet interessant forskningsprosjekt vil derfor være å undersøke hvordan denne kompetansehevingen kan gjennomføres i praksis.

6.3 Avsluttende kommentar

I arbeidet med denne masteroppgaven har jeg fått et godt innblikk i teori innen både matematisk modellering og undervisningskompetanse i matematisk modellering. Jeg har erfart hvilke utfordringer to av mine kollegaer opplevde i arbeidet med en modelleringsaktivitet, og hvordan disse utfordringene gjenspeiler seg i litteraturen. Jeg anser mine kollegaer som dyktige matematikklærere, og mener at Freudenthal (1973) sitt sitat *«The mathematics teacher does not know how mathematics is applied, and we cannot blame him for this ignorance. Where should he have learned it?"* (1973, s. 73) er treffende for konklusjonen i denne masteroppgaven. Det er behov for at lærerstudenter og lærere får mulighet til å tilegne seg modelleringskompetanse og undervisningskompetanse i matematisk modellering gjennom systematisk opplæring.

Selv om regjeringen i Hurdalsplattformen har vedtatt å avvikle lærerspesialistordningen i den formen den er i dag (Utdanningsdirektoratet, udatert-c), har kommunen signalisert at min kompetanse fra lærerspesialistutdanningen er viktig. Jeg håper at erfaringer fra denne masteroppgaven kan brukes i fagsamarbeid både på egen skole og innad i kommunen for å videreutvikle lærernes undervisningskompetanse i matematisk modellering.

Referanseliste

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H., Niss, M., & Burkhardt, H. (2007). Classroom Activities and the Teacher. I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 295–308). New York: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Besser, M., Blum, W., & Klimczak, M. (2013). Formative assessment in everyday teaching of mathematical modelling: Implementation of written and oral feedback to competency-oriented tasks. I G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Red.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to reseach and practice* (s. 469–478). Springer.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for modellering. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes?:- Om matematikklæring* (s. 80–109). Malling Beck.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss abaout competencies? I W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 45–56). New York: Springer.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? I S. J. Cho (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). Investigating quality qathematics teaching: The DISUM project. I C. Bergsten & B. Grevholm (Red.), *Proceedings of MADIF 5* (s. 3–16).

Blum, W., & Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Red.), *Mathematical modelling: education, engineering and economics. ICTMA 12* (s. 222–231). Chichester: Horwood.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM: International journal on mathematics education*, *38*(2), 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical Modeling-The Teacher's Responsibility. I B. Dickman & A. Sanfratello (Red.), *Conference on Mathematical Modeling* (s. 26–31). https://journals.library.columbia.edu/index.php/jmetc/article/view/660/106

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing.

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2009a). Insights into teachers' unconscious behaviour in modeling contexts. I R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Red.), *Modeling students' mathematical modeling competencies - Proceedings of CERME 6* (s. 423–432). New York: Springer.

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2009b). Mathematical modelling in teacher education - Experiences from a modelling seminar. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Red.), *CERME 6 - Working Group 11* (s. 2046–2055). http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg11-01-borromeo.pdf

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper, D. Camic, L. Long, A. . Panter, D. Rindskopf, & K. . Sher (Red.), *APA handbook of research methods in psychology* (Bd. 2, s. 57–71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Cetinkaya, B., Kertil, M., Erbas, A. K., Korkmaz, H., Alacaci, C., & Cakiroglu, E. (2016). Pre-service teachers' developing conceptions about the nature and pedagogy of mathematical modeling in the context of a mathematical modeling course. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 287–314. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219932

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eight). Routledge.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? I *Modelling and applications in mathematics education* (s. 69–78). New York: Springer.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2006). Middle grade teachers' learning through students' engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 5–32. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9004-x

Escalante, C. C. (2013). Secondary Teachers Learn and Refine Their Knowledge During Modeling Activities in a Learning Community Environment. I *Modeling students' mathematical modeling competencies* (s. 459–469). Springer, Dordrecht. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-6271-8_39

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Gold, R. L. (1958). Toward a Social Interaction Methodology for Sociological Field Observation. *Social Forces*, *36*(3), 217–223.

Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modelling. I G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Beimbengut (Red.), *Mathematical modelling in education research and practice* (s. 173–183). Springer International Publishing AG.

Hagelia, M. (2021). *Kjerneelementene - det virkelige nye i fagfornyelsen*. Bedre skole. https://www.utdanningsnytt.no/bedre-skole-fagartikkel-fagfornyelse/kjerneelementene--det-virkelig-nye-i-fagfornyelsen/290318

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Hodgen, J., & Wiliam, D. (2006). *Mathematics inside the black box : assessment for learning in the mathematics classroom.* London: GL Assessment.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2021). *Det kvalitative forskningsintervju* (3.utgave,). Gyldendal akademiske.

Lesh, R., & Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*(3), 173–194. https://doi.org/10.1007/s10758-007-9121-3

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism. Models and modeling* *perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Routledge.

Lester Jr, F. K. (2010). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. I B. Sriraman & L. D. English (Red.), *Theories of Mathematics Education* (s. 67–85). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2

Liljedahl, P. (2018). Building Thinking Classrooms. I A. Kajander, J. Holm, & E. J. Chernopp (Red.), *Teaching and learning secondary school mathematics* (s. 307–316). Springer International Publishing AG. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-92390-1_29

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Matematikksenteret. (udatert). *Bjarnes Bensindilemma | Mattelist*. Hentet 23. august 2022, fra https://www.mattelist.no/434

Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling the emergence of models and modelling perspectives. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *12*(1), 23–47. https://www.researchgate.net/publication/242173430

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. 16.12.21. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Niss, M., & Blum, W. (2020). *Learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

NSD. (udatert). *NSD - Norsk senter for forskningsdata*. Hentet 2. mai 2021, fra https://www.nsd.no/

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2021). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm akademisk.

Scott, J., Schou, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2008). Matematiske modeller og modellering - hvad er det, og hvorfor undervises der i dem? I *Matematik for lærerstuderende - Stokastik* (s. 21–44). Samfundslitteratur.

Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2020). Features of modeling processes that elicit mathematical models represented at different semiotic registers. *Educational studies in mathematics*, *105*(2), 115–135. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09971-2

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.2307/1175860

Stillman, G. A. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? I S. J. Cho (Red.), *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (s. 791–805). Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44

Universitetet i Oslo. (2017). *Nettskjema-diktafon-appen*. 16.12. 2021. https://www.uio.no/tjenester/it/adm-app/nettskjema/hjelp/diktafon.html

Utdanningsdirektoratet. (udatert-a). *Eksempeloppgaver i matematikk for 10.trinn*. Hentet 15. april 2021, fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/eksempeloppgaver/eksempeloppgaver-i-matematikk-grunnskolen/

Utdanningsdirektoratet. (udatert-b). *Gi gode faglige tilbakemeldinger*. Hentet 24. februar 2022, fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/underveisvurdering/tilbakemeldinger/

Utdanningsdirektoratet. (udatert-c). *Lærerspesialistordningen avvikles gradvis*. Hentet 1.

juni 2022, fra https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/etter-og-videreutdanning/larerspesialistordningen-avvikles-gradvis/

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Erfaringer fra nasjonal satsing på vurdering for læring (2010-2018)*. https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/erfaringer-fra-nasjonal-satsing-pa-vurdering-for-laring-2010-2018/

Valenta, A. (2015). *Matematikklærerkompetanse*. 1–8. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta Matematikklærerkompetanse.pdf

Valenta, A. (2016). *Aspekter ved tallforståelse*. 1–17. https://beta.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Valenta_Tallforståelse.pdf

Vedlegg

Vedlegg 1: Vurdering fra NSD

Vedlegg 2: Samtykkeskjema til lærere

Vedlegg 3: Samtykkeskjema til elever

Vedlegg 4: Intervjuguide til lærere

Vedlegg 5: Intervjuguide til elever

Vedlegg 6: Observasjonsskjema

Vedlegg 7: Transkriberingskoder

Vedlegg 1

Vurdering

Referansenummer

512475

Prosjekttittel

SKOLE6906 Masteroppgave lærerspesialist - matematikkdidaktikk 8-10

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig

Ole Enge

Student

Anne-Marte Hoelstad Mauset

Prosjektperiode

19.10.2021 - 01.10.2022

Dato	**Type**
23.11.2021	Standard

Kommentar

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så framt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg 23.11.2021. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger fram til 01.10.2022.

LOVLIG GRUNNLAG FOR UTVALG 1

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG FOR UTVALG 2

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen

• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål

• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med

prosjektet

• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og ataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet i tråd med den behandlingen som er dokumentert.

Kontaktperson hos NSD: Olav Rosness, rådgiver.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2

Vil du delta i forskningsprosjektet *Matematisk modellering?*

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor ***formålet er å undersøke hvordan arbeid med matematisk modellering kan innføres i klasserommet.*** Deltagelse i prosjektet vil gi både lærere og elever muligheten til å være med på en godt planlagt modelleringsaktivitet.

I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Modellering og anvendelser er et nytt kjerneelement i læreplanen i matematikk. Modelleringsoppgaver er oppgaver der elevene skal lage modeller for å beskrive virkeligheten med et matematisk språk. Dette kan være situasjoner fra dagliglivet, arbeidslivet eller samfunnet generelt. Formålet med studien er å få mer kunnskap om hvilke utfordringer lærere og elevene møter i innføringen av en slik modelleringsoppgave i klasserommet. Prosjektet er en del av en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Institutt for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du er lærer på den aktuelle skolen. Det er gjort avtale med skolens ledelse og klassens kontaktlærere om å få gjennomføre undervisningsopplegget.

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du er delaktig i et undervisningsopplegg som gjennomføres 2 x 1 undervisningsøkt. Forsker vil observere og samle inn skriftlig data. Det vil i tillegg bli tatt lydopptak av en fokusgruppe med elever.
- Hvis du velger å delta på intervju og samtale, vil det bli et i intervju i forkant og opptak av evalueringene i etterkant av undervisningsoppleggene. Det vil bli tatt lydopptak av intervjuet og samtalene.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Skriftlig arbeid skal ikke inneholde sporbare navn. Lydopptaket vil bli gjort via en app med sikker lagring i sky, ikke på enheten. Lydfilene vil så raskt som mulig bli transkribert og slettet. Transkripsjonen vil ikke inneholde sporbare navn til noen av deltakerne. Det er kun forsker/student Anne-Marte H. Mauset og hennes veileder/prosjektansvarlig Ole Enge som vil ha tilgang til, og bearbeide dataene som samles inn.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er i utgangen av september 2022. Datamaterialet vil da bli slettet.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- student, Anne-Marte H. Mauset, (lannmaus@skole.ringsaker.kommune.no)
- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Ole Enge (ole.enge@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anne-Marte H. Mauset	Ole Enge
Student	*Veileder/prosjektansvarlig*

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet matematisk modellering, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til (flere alternativer kan kombineres):

- ☐ å delta i undervisningssituasjonen der det blir gjort observasjon og lydopptak.
- ☐ å delta i intervju og samtale med lydopptak.

Jeg vi samtykker til at mine opplysninger behandles fram til prosjektet er avsluttet.

____

(Signert av lærer, dato)

Vedlegg 3

Vil du delta i forskningsprosjektet *Matematisk modellering?*

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å ***undersøke hvordan arbeid med matematisk modellering kan innføres i klasserommet.*** Deltagelse i prosjektet vil gi både lærere og elever muligheten til å være med på en godt planlagt modelleringsaktivitet.

I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Modellering og anvendelser er et nytt kjerneelement i læreplanen i matematikk. Modelleringsoppgaver er oppgaver der elevene skal lage modeller for å beskrive virkeligheten med et matematisk språk. Dette kan være situasjoner fra dagliglivet, arbeidslivet eller samfunnet generelt. Formålet med studien er å få mer kunnskap om hvilke utfordringer lærere og elevene møter i innføringen av en slik modelleringsoppgave i klasserommet. Prosjektet er en del av en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Institutt for matematiske fag er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du er elev på 8. trinn på den aktuelle skolen. Det er gjort avtale med skolens ledelse og klassens kontaktlærere om å få gjennomføre undervisningsopplegget.

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du er delaktig i et undervisningsopplegg som gjennomføres på 1 undervisningsøkt. Forsker vil observere og samle inn skriftlig data.
- Hvis du godkjenner å delta i lydopptak kan du bli en del av en fokusgruppe der det skriftlige arbeidet analyseres sammen med den matematiske samtalen på gruppa.
- Hvis du godkjenner intervju, kan du bli plukket ut til å delta i et intervju der det bli gjort lydopptak av samtalen. Samtalen vil handle om hvordan du opplevde å jobbe med modelleringsoppgaven. Foresatte kan se spørsmål på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. De som ikke ønsker å delta vil få ordinært undervisningsopplegg i et annet klasserom.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Skriftlig arbeid skal ikke inneholde sporbare navn. Lydopptaket vil bli gjort via en app med sikker lagring i sky, ikke på enheten. Lydfilene vil så raskt som mulig bli transkribert og slettet. Transkripsjonen vil ikke inneholde sporbare navn til noen av deltakerne. Det er kun forsker/student Anne-Marte H. Mauset og hennes veileder/prosjektansvarlig Ole Enge som vil ha tilgang til, og bearbeide dataene som samles inn.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er i utgangen av september 2022. Datamaterialet vil da bli slettet.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- student, Anne-Marte H. Mauset, (lannmaus@skole.ringsaker.kommune.no)
- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Ole Enge (ole.enge@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anne-Marte H. Mauset	Ole Enge
Student	*Veileder/prosjektansvarlig*

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet matematisk modellering, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til (flere alternativer kan kombineres):

- ☐ å delta i undervisningssituasjonen der det blir gjort observasjon.
- ☐ at mine skriftlige besvarelser samles inn.
- ☐ å delta i fokusgruppe der det gjøres lydopptak.
- ☐ å delta i intervju med lydopptak.

Jeg/vi samtykker til at mitt/vårt barn sine opplysninger behandles fram til prosjektet er avsluttet.

______________________________ ____________________________________

(Signert av barnet, dato) (Signert av barnets foresatte, dato)

Vedlegg 4

Intervjuguide til lærere

Intervjuet med matematikklærere vil være et ustrukturert intervju. Det vil bli gjort i to omganger, et før og et etter gjennomføringen av undervisningsopplegget. Det legges opp til en samtale der lærer snakker mest mulig fritt. Intervjuet i forkant vil være knyttet opp mot lærernes forståelse av matematisk modellering og tidligere erfaringer med modelleringsoppgaver, mens intervjuet i etterkant vil være en refleksjon rundt gjennomføringen av undervisningsopplegget.

Aktuelle spørsmål til samtalen i forkant av undervisningsopplegget.

- Hva forstår du med begrepet «matematisk modellering»?
- Har du tidligere jobbet med modelleringsoppgaver med elevene?
- Har du satt deg inn betydningen av matematisk modellering og anvendelse som et kjerneelement i LK20?
- Ser du noen gode grunner til å bruke matematisk modellering i matematikkundervisningen?
- Ser du noen utfordringer ved å bruke matematisk modellering i matematikkundervisningen?

Aktuelle spørsmål til samtalen i etterkant av undervisningsopplegget.

- Hvordan syns du eleven jobbet med modelleringsoppgaven, sammenliknet med en tradisjonell undervisningsøkt?
- Hvilke utfordringer møtte elevene i løpet av oppgaven?
- Hvilke utfordringer møtte du i løpet av økta?
- Hvordan opplevde du å veilede elevene videre i en slik type oppgave? Hvilke erfaringer tar du med deg videre?
- I hvilken grad har vi mulighet til å vurdere elevenes matematiske kompetanse gjennom arbeidet med modelleringsoppgaven?

Vedlegg 5

Intervjuguide til elever

Intervjuet med elevene vil være et ustrukturert intervju. Det legges opp til en samtale der elevene snakker mest mulig fritt. Hensikten er å finne ut hvilke erfaringer elevene har med matematisk modellering, hvordan de opplevde å jobbe med matematisk modellering og hvilke utfordringer i møtte. Intervjuet vil bli styrt av datamateriale som blir samlet inn under gjennomføringen av undervisningsopplegget.

Aktuelle spørsmål til samtale i etterkant av undervisningsopplegget.

- Har du jobbet med en slik type oppgave tidligere?
- Hvordan likte du å jobbe med modelleringsoppgaven?
- Syns du det var annerledes å jobbe med denne oppgaven, i forhold til en vanlig matematikkøkt?
    - Evt hva var annerledes?
- Hvordan synes du det var å komme i gang med oppgaven?
    - Hva var utfordrende?
    - Hvorfor var den enkel å starte med?
- Møtte dere noen utfordringer underveis i oppgaven?
    - Hvordan løste dere disse?
- Hva tenkte du/dere her? (Spørsmål knyttet dirkete opp mot modellen elevene leverer)
- Hvordan tenker du at modellen dere laget passer med den virkelige situasjonen?
- Hva lærte du av dette arbeidet?
- Føler du at du fikk vist matematisk kompetanse?

Vedlegg 6

Observasjonsskjema

Introduksjon og organisering.	**Hva gjør læreren?**	**Observasjon**
Presentasjon av oppgaven.	Hvordan introduseres oppgave? Sier læreren noe som gir føringer for oppgaven?	
Organisering i klasserommet.	Hvordan legger læreren til rette for arbeide med oppgaven? • Gruppeinndeling? • Utstyr?	
Arbeid i grupper.		
Didaktiske kontrakten.	Respons på elevenes reaksjon på oppgavetypen og organiseringen.	
Å forstå oppgaven. *Steg i modelleringssyklusen: 1*	Identifiserer lærerne hindringer? Hvilke typer spørsmål stiller lærer? Hvilke typer svar gir lærer?	
Lag en modell *Steg i modelleringssyklusen: 2 og 3*	Identifiserer lærerne hindringer? Hvilke typer spørsmål stiller lærer? Hvilke typer svar gir lærer?	
Bruk matematikk *Steg i modelleringssyklusen: 4*	Identifiserer lærerne hindringen? Hvilke typer spørsmål stiller lærer? Hvilke typer svar gir lærer?	
Forklar resultat *Steg i modelleringssyklusen: 5, 6 og 7*	Identifiserer lærerne hindringer? Hvilke typer spørsmål stiller lærer? Hvilke typer svar gir lærer?	

Vedlegg 7

Transkriberingskoder

..	Nøling
()	Det som blir sagt er uhørlig
<u>Ord</u>	Trykk på ytringen
«*Kursiv*»	Sitat i ytringen
(…)	Hoppet over en del av ytringen
(*tekst i kursiv*)	Beskrivelse av non-verbal aktivitet

NTNU

Norwegian University of
Science and Technology