

Tord Sæle  
Anders S. Stendal

# Parametrisk modellering av fortannet trebjelke

Masteroppgave i Bygg- og miljøteknikk  
Veileder: Francesco Mirko Massaro  
Juni 2022



Tord Sæle  
Anders S. Stendal

# Parametrisk modellering av fortannet trebjelke

Masteroppgave i Bygg- og miljøteknikk  
Veileder: Francesco Mirko Massaro  
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Fakultet for ingeniørvitenskap  
Institutt for konstruksjonsteknikk



Kunnskap for en bedre verden





## MASTEROPPGAVE 2022

|                                    |                     |                                  |
|------------------------------------|---------------------|----------------------------------|
| FAGOMRÅDE:<br>Konstruksjonsteknikk | DATO:<br>09.06.2022 | ANTALL SIDER:<br>80 + 30 vedlegg |
|------------------------------------|---------------------|----------------------------------|

TITTEL:

### Parametrisk modellering av fortannet trebjelke

Parametric modelling of a notched timber beam

UTFØRT AV:

Tord Sæle

Anders S. Stendal



SAMMENDRAG:

Denne oppgaven tar utgangspunkt i et bjelkekonsept i tre som går ut på å mekanisk forbinde to bjelkekomponenter, ved bruk av fortanning. Sammenkoblingen skjer ved at over- og underdel bøyes opp, låses sammen i en bøydd tilstand, som gir en varig overhøyde. Ved bruk av denne metoden økes bjelkens kapasitet og lim unngås som forbindelsesmiddel. Ettersom det er behov for utvidet kunnskap om konstruksjonsmessig oppførsel av konseptet, er det valgt å utarbeide en FEM-modell i ABAQUS. Denne skal gi en bedre forståelse av spenningsforløpet i bjelken, og etterligne den reelle bjelken i størst mulig grad.

For å verifisere FEM-modell, sammenlignes numeriske resultater mot eksperimentell data for reell bjelke. Stivhet og kapasitet for eksemplarer av konseptet ble bestemt eksperimentelt. Hensikt med FEM-modell var å produsere numeriske resultater for tilsvarende situasjon. Resultatene som ble beregnet ved FEM-modellen har i stor grad samsvart med laboratorieforskene.

Det er gjort detaljerte analyser av spenningsforløpet ved bruk av FEM-modellen. Dette har gitt en bedre forståelse av bjelkens konstruksjonsmessige oppførsel. Fire ulike bruddmekanismer anses aktuelle for dette bjelkekonseptet: Bøyningsbrudd, skjærbrudd i fortanning, skjærbrudd i tverrsnitt og trykkbrudd som følge av kontaktspenninger. Det er gjort analyse av ved hvilket lastnivå en, teoretisk, oppnår kritisk nivå ved bruk av FEM-modellen. Samtlige forsøk som ble gjort i laboratoriet gikk til brudd ved enten bøyningsbrudd eller skjærbrudd i fortanning. Dette er også tilfellet ved FEM-modellen. Lastnivåene ved brudd er tilnærmet like ved laboratorieforsøk og FEM-modell.

Modellen er parametrisk styrt, som gir mulighet for å undersøke effekten av geometriske endringer av fortanningen. Formålet med dette var å etablere en optimalisert geometri for å gi en økt kapasitet. Det ble brukt to metoder for å optimalisere geometri: Visuell optimalisering og numerisk optimalisering. Visuell optimalisering gikk ut på å anslå den optimale verdien for hver parameter individuelt, og kombinere dem. Numerisk optimalisering gikk ut på å undersøke et stort antall fornuftige geometribestemmelser, og beregne hvilken geometri som ga størst bruddlast. Den visuelt optimaliserte geometrien ga en kapasitetsøkning på +8%, mens den numerisk optimaliserte geometrien ga en kapasitetsøkning på +27%, sammenlignet med geometri benyttet i laboratorieforsøk.

FAGLÆRERE: Haris Stamatopoulos og Francesco Mirko Massaro

VEILEDER: Francesco Mirko Massaro

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU

---

## Forord

Denne masteroppgaven er skrevet for Institutt for Konstruksjonsteknikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Trondheim. Temaområdet omhandler trekonstruksjoner. Oppgaven er skrevet og utarbeidet av Tord Sæle og Anders S. Stendal, vårsemesteret 2022.

Da temaområdet ble framstilt som en mulig vinkling for masteroppgaven, vekket det interesse fra første sekund. Modellering og analyse er interesseområde for begge studentene og muligheten til å kombinere tradisjon og innovasjon var overbevisende.

Arbeidet har i stor grad bestått av å utarbeide en parametrisk modell i ABAQUS, ved bruk av python-skript. Dette var noe vi ikke var kjent med på forhånd. I løpet av arbeidet har vi opparbeidet oss en god kunnskap og forståelse av dette, takket være vår veileder Francesco Mirko Massaro.

Vi vil takke Rennebu-Bjelken AS, ved Roger Skaret, som introduserte oss for konseptet om tannet bjelke. Turen til Berkåk for å se hvordan bjelker beregnes, produseres og behandles var av stor betydning for konseptforståelse.

Vi ønsker videre å takke Haris Stamatopoulos for god faglig støtte i semesteret som har vært. Til slutt vil vi takke vår veileder, Francesco Mirko Massaro, for god veiledning, både i og utenom oppsatte møter.

Vi ønsker med dette å takke for vår tid på NTNU

---

## Sammendrag

Denne oppgaven tar utgangspunkt i et bjelkekonsept i tre som går ut på å mekanisk forbinde to bjelkekomponenter, ved bruk av fortanning. Sammenkoblingen skjer ved at over- og underdel bøyes opp, låses sammen i en bøydd tilstand, som gir en varig overhøyde. Ved bruk av denne metoden økes bjelkens kapasitet og lim unngås som forbindelsesmiddel. Etttersom det er behov for utvidet kunnskap om konstruksjonsmessig oppførsel av konseptet, er det valgt å utarbeide en FEM-modell i ABAQUS. Denne skal gi en bedre forståelse av spenningsforløpet i bjelken, og etterligne den reelle bjelken i størst mulig grad.

For å verifisere FEM-modell, sammenlignes numeriske resultater mot eksperimentell data for reell bjelke. Forsøkene ble utført av Norsk Treteknisk Institutt, i samarbeid med Rennebu-Bjelken AS. Stivhet og kapasitet for eksemplarer av konseptet ble bestemt eksperimentelt. Hensikt med FEM-modell var å produsere numeriske resultater for tilsvarende situasjon. Resultatene som ble beregnet ved FEM-modellen har i stor grad samsvart med laboratorieforsøkene.

Det er gjort detaljerte analyser av spenningsforløpet ved bruk av FEM-modellen. Dette har gitt en bedre forståelse av bjelkens konstruksjonsmessige oppførsel, som gjør at en kan forutse opptredende spenninger. Fire ulike bruddmekanismer anses aktuelle for dette bjelkekonseptet: Bøyningsbrudd, skjærbrudd i fortanning, skjærbrudd i tverrsnitt og trykkbrudd som følge av kontaktspenninger i fortanningen. Det er gjort analyse av ved hvilket lastnivå en, teoretisk, oppnår kritisk nivå ved bruk av FEM-modellen. Samtlige forsøk som ble gjort i laboratoriet gikk til brudd ved enten bøyningsbrudd eller skjærbrudd i fortanning. Dette er også tilfellet ved FEM-modellen. Lastnivåene ved brudd er tilnærmet like ved laboratorieforsøk og FEM-modell.

Modellen er parametrisert, som gir mulighet for å undersøke effekten av geometriske endringer av fortanningen. Formålet med dette var å etablere en optimalisert geometri for å gi en økt kapasitet. Det ble brukt to metoder for å optimalisere geometri: Visuell optimalisering og numerisk optimalisering. Visuell optimalisering gikk ut på å anslå den optimale verdien for hver parameter individuelt, og kombinere dem. Numerisk optimalisering gikk ut på å undersøke et stort antall fornuftige geometribestemmelser, og beregne hvilken geometri som ga størst bruddlast. Den visuelt optimaliserte geometrien ga en kapasitetsøkning på +8%, mens den numerisk optimaliserte geometrien ga en kapasitetsøkning på +27%, sammenlignet med geometri benyttet i laboratorieforsøk.

---

## Abstract

This thesis is based on a beam concept for timber structures. The concept involves mechanically connecting two beam components using notches. The connection is made by bending the upper and lower parts individually and then forcing them together while still bent. It results in permanent cambering. This method results in an increase in beam capacity and, at the same time, avoids structural adhesives.

A FEM model has been created in ABAQUS to comprehend the structural behaviour of the concept. To verify the model, numerical results are compared with experimental data. The experiments were performed by the Norwegian Institute of Wood Technology, in collaboration with Rennebu-Bjelken AS. Stiffness and capacity were determined based on the results of 29 notched beams. The purpose of the FEM model was to produce numerical results for a similar geometry and loading. For the final model, the numerical results matched the experimental results sufficiently.

Stress distributions have been analyzed in the FEM software. When analyzing results, stresses close to notched were of interest to comprehend the effects of the peculiarities related to the concept. The results may be used to predict occurring stresses in real beams. Four different failure modes are considered as most relevant for this beam concept: bending failure, shear failure in notches, shear failure in cross-section and compression failure due to contact stresses in the notches. To predict the critical load value for each failure mode, analytical stresses were presented against their respective capacities. For experimental tests, only the first two failure modes occurred. This matches the results presented in the numerical analysis. The value of the failure loads was approximately similar for experimental and numerical results.

The model is parametrically controlled. This facilitates a parametric study of the geometry of the notches. How the different geometrical parameters of each notch affect the stresses in the beam is established as a base for geometrical optimization. Two methods were introduced to determine geometries with greater load-carrying capacity than the beam used in the lab. Visual optimization, where the optimal value for each parameter was decided individually, after which the most reasonable values were combined for a new geometry. The second method was based on numerical optimization. 140 different geometries were loaded until failure. By comparing the critical failure loads for each geometry, the optimal notch designs were presented.

The visually optimized geometry resulted in an increase of capacity by +8 %, while the numerically optimized geometry resulted in an increase of capacity by +27 %, compared to the geometry used in laboratory experiments.



---

# Innhold

|                                                                  |             |
|------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Figurer</b>                                                   | <b>iv</b>   |
| <b>Tabeller</b>                                                  | <b>viii</b> |
| <b>1 Innledning</b>                                              | <b>1</b>    |
| 1.1 Problemstilling . . . . .                                    | 2           |
| 1.2 Oppgavestruktur . . . . .                                    | 2           |
| 1.3 Konseptbeskrivelse . . . . .                                 | 2           |
| 1.4 Metode . . . . .                                             | 3           |
| 1.5 Tidligere forskning . . . . .                                | 3           |
| <b>2 Teoretisk bakgrunn</b>                                      | <b>4</b>    |
| 2.1 Materialelegenskaper . . . . .                               | 4           |
| 2.2 Effekt av overhøyde . . . . .                                | 6           |
| 2.3 Organisk materiale . . . . .                                 | 7           |
| 2.4 Kapasiteter . . . . .                                        | 8           |
| 2.4.1 Materialstyrker . . . . .                                  | 8           |
| 2.4.2 Aksialspenninger . . . . .                                 | 10          |
| 2.4.3 Skjær . . . . .                                            | 10          |
| 2.4.4 Strekkspenning normalt på fiberretning . . . . .           | 11          |
| 2.4.5 Kombinerte spenninger . . . . .                            | 12          |
| 2.4.6 Kontaktspenninger . . . . .                                | 15          |
| 2.4.7 Kontaktkrefters effekt på opptredende spenninger . . . . . | 16          |
| 2.5 Beregningsmodell . . . . .                                   | 18          |
| 2.6 FEM-modell . . . . .                                         | 18          |
| <b>3 Eksperimentell data fra labforsøk</b>                       | <b>19</b>   |
| <b>4 Modellutvikling</b>                                         | <b>20</b>   |
| 4.1 Parametrisk modellering . . . . .                            | 20          |
| 4.1.1 Geometri . . . . .                                         | 20          |
| 4.1.2 Last og grensebetingelser . . . . .                        | 22          |
| 4.1.3 Materialelegenskaper . . . . .                             | 23          |
| 4.1.4 Interaksjonsegenskaper . . . . .                           | 23          |
| 4.1.5 Mesh . . . . .                                             | 24          |
| 4.1.6 Dataeksportering . . . . .                                 | 26          |

---

|          |                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------|-----------|
| 4.2      | 3D- vs 2D-modell . . . . .                      | 27        |
| 4.3      | Konvergenstudie . . . . .                       | 29        |
| 4.4      | Sensitivitetsanalyse . . . . .                  | 31        |
| 4.5      | Elastisk studie . . . . .                       | 36        |
| 4.6      | Irregulære områder . . . . .                    | 37        |
| <b>5</b> | <b>Resultat</b>                                 | <b>40</b> |
| 5.1      | Referansegeometri . . . . .                     | 40        |
| 5.1.1    | Sammenligning med eksperimentell data . . . . . | 40        |
| 5.1.2    | Spenningsfordeling . . . . .                    | 42        |
| 5.1.3    | Bruddmekanismer . . . . .                       | 52        |
| 5.2      | Parametrisk studie . . . . .                    | 57        |
| 5.2.1    | Visuelt optimalisert geometri . . . . .         | 63        |
| 5.2.2    | Numerisk optimalisert geometri . . . . .        | 63        |
| <b>6</b> | <b>Diskusjon og konklusjon</b>                  | <b>64</b> |
| 6.1      | Feilkilder . . . . .                            | 64        |
| 6.2      | Referansegeometri . . . . .                     | 64        |
| 6.2.1    | Sammenligning med eksperimentell data . . . . . | 64        |
| 6.2.2    | Spenningsfordeling . . . . .                    | 65        |
| 6.2.3    | Bruddmekanismer . . . . .                       | 69        |
| 6.3      | Optimalisering av tanngemetri . . . . .         | 72        |
| 6.3.1    | Parameterstudie . . . . .                       | 72        |
| 6.3.2    | Visuelt optimalisert geometri . . . . .         | 76        |
| 6.3.3    | Numerisk optimalisert geometri . . . . .        | 78        |
| 6.4      | Konklusjon . . . . .                            | 79        |
| 6.5      | Videre arbeid . . . . .                         | 80        |
|          | <b>Litteraturliste</b>                          | <b>81</b> |

---

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Vedlegg</b>                                               | <b>83</b> |
| A Spenningsfordeling av tannkontakt . . . . .                | 83        |
| B Konvergenstudie av strekkspenning ved fortanning . . . . . | 85        |
| C Sensitivitet . . . . .                                     | 90        |
| D Spenningsfordeling over og under fortanning . . . . .      | 91        |
| E Parametrisk optimalisering . . . . .                       | 93        |
| F Python-kode for modellering av bjelke . . . . .            | 96        |
| G Python-kode for å hente resultat fra FEM-modell . . . . .  | 111       |
| H Python-kode for parametrisk studie . . . . .               | 114       |

---

## Figurer

|      |                                                                         |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Bjelkegeometri . . . . .                                                | 2  |
| 2.1  | Kraft-deformasjons-diagram for materialer av ulik duktilitet . . . . .  | 4  |
| 2.2  | Maxwells modell for relaksasjon . . . . .                               | 5  |
| 2.3  | Buet bjelke . . . . .                                                   | 6  |
| 2.4  | Radielle trykkspenninger i krummet bjelke . . . . .                     | 6  |
| 2.5  | Aksialspenningsfordeling fra moment i rektangulært tverrsnitt . . . . . | 10 |
| 2.6  | Skjærspenningsfordeling i tverrsnitt . . . . .                          | 10 |
| 2.7  | To sentrale bruddformer . . . . .                                       | 13 |
| 2.8  | Enkel forbindelse . . . . .                                             | 15 |
| 2.9  | Fortannet forbindelse . . . . .                                         | 16 |
| 2.10 | Skjærbrudd og trykkbrudd i fortanning . . . . .                         | 16 |
| 2.11 | Opphopning av skjærspenning ved tannhjørne . . . . .                    | 17 |
| 4.1  | Parametere for å styre geometri . . . . .                               | 20 |
| 4.2  | Bjelkegeometri . . . . .                                                | 20 |
| 4.3  | Tanngemetri . . . . .                                                   | 21 |
| 4.4  | Samvirke i FEM-modell . . . . .                                         | 21 |
| 4.5  | Samvirke i reell bjelke . . . . .                                       | 21 |
| 4.6  | Parametere for å styre lastsituasjon . . . . .                          | 22 |
| 4.7  | Lastoppsett . . . . .                                                   | 22 |
| 4.8  | Parametere for å styre materialegenskaper . . . . .                     | 23 |
| 4.9  | Problematisk interaksjon . . . . .                                      | 23 |
| 4.10 | Separat interaksjon . . . . .                                           | 23 |
| 4.11 | Mesh-soner . . . . .                                                    | 24 |
| 4.12 | Eksempel på mesh-struktur . . . . .                                     | 24 |
| 4.13 | Parametere for å styre mesh-struktur . . . . .                          | 24 |
| 4.14 | Modelltre . . . . .                                                     | 25 |
| 4.15 | Konvergenskurver for nedbøyning . . . . .                               | 27 |
| 4.16 | Konvergenskurver for bøyespenning . . . . .                             | 28 |
| 4.17 | Konvergenskurver med CPS4-elementer . . . . .                           | 29 |
| 4.18 | Konvergenskurve, CPU-tid . . . . .                                      | 29 |
| 4.19 | Konvergenskurve for kontaktspenninger . . . . .                         | 30 |
| 4.20 | Resultater med varierende $E_L$ . . . . .                               | 32 |
| 4.21 | Resultater med varierende $E_R$ & $E_T$ . . . . .                       | 33 |

---

|      |                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.22 | Resultater med varierende $G_{LR}$ & $G_{LT}$ . . . . .                                       | 34 |
| 4.23 | Resultater med varierende friksjonskoeffisient, $\mu$ . . . . .                               | 35 |
| 4.24 | Last-deformasjonsdiagram . . . . .                                                            | 36 |
| 4.25 | Problematiske områder . . . . .                                                               | 37 |
| 4.26 | Spenningskonsentrasjon ved opplegg . . . . .                                                  | 37 |
| 4.27 | Fordeling av trykkspenning langs overkant av bjelke . . . . .                                 | 38 |
| 4.28 | Spenningskonsentrasjon ved lastpåføring . . . . .                                             | 38 |
| 4.29 | Spenningskonsentrasjon ved fortanning . . . . .                                               | 39 |
| 5.1  | Nedbøyning fra labforsøk og FEM-modell . . . . .                                              | 41 |
| 5.2  | Momentdiagram . . . . .                                                                       | 42 |
| 5.3  | Strekkspenning langs underside av bjelke . . . . .                                            | 42 |
| 5.4  | Aksialspenninger i tverrsnitt . . . . .                                                       | 43 |
| 5.5  | Fordeling av aksialspenning ved midten av bjelken . . . . .                                   | 43 |
| 5.6  | Skjærkraftdiagram . . . . .                                                                   | 44 |
| 5.7  | Sti UF og OF . . . . .                                                                        | 44 |
| 5.8  | Skjærspenningsfordeling for venstre bjelkehalvdel. [UF] . . . . .                             | 45 |
| 5.9  | Gjennomsnittlig skjærspenning for hver tann. [UF] . . . . .                                   | 45 |
| 5.10 | Skjærspenningsfordeling langs tannlengde for tenner i venstre bjelkehalvdel. [UF] . . . . .   | 46 |
| 5.11 | Relativ størrelse på maksverdi og gjennomsnittsverdi mot teoretisk skjærspenning . . . . .    | 46 |
| 5.12 | Skjærfordeling i bjelkehøyde. Sti langs kontaktflate for nedre komponent . . . . .            | 47 |
| 5.13 | Skjærfordeling langs sti 2 . . . . .                                                          | 47 |
| 5.14 | Stier for skjærfordeling i tverrsnitt . . . . .                                               | 47 |
| 5.15 | Skjærspenningsfordeling langs bjelkehøyde, hentet midt i tannlengde . . . . .                 | 48 |
| 5.16 | Spenning normalt på fiberretning for venstre bjelkehalvdel [UF] . . . . .                     | 49 |
| 5.17 | Spenninger normalt på fiberretning, tann for tann [UF] . . . . .                              | 49 |
| 5.18 | Fargerkart for strekkspenninger normalt på fiberretning . . . . .                             | 49 |
| 5.19 | Skjærspenninger og spenninger normalt på fiberretning . . . . .                               | 50 |
| 5.20 | Skjær- og strekkspenning kombinert ved hver tann . . . . .                                    | 50 |
| 5.21 | Kontaktspenninger i tenner . . . . .                                                          | 51 |
| 5.22 | Relevante bruddmekanismer . . . . .                                                           | 52 |
| 5.23 | Bøyespenninger ved brudd . . . . .                                                            | 53 |
| 5.24 | Maks skjærspenning ved brudd . . . . .                                                        | 53 |
| 5.25 | Maks strekkspenning ved brudd . . . . .                                                       | 54 |
| 5.26 | Kombinert skjærspenning og aksialtrekk normalt på fiberretning basert på formel 2.9 . . . . . | 54 |

---

---

|      |                                                                                                     |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.27 | Kombinert skjærspenning og aksialstrekk normalt på fiberretning ved snittspenningsmetoden . . . . . | 55 |
| 5.28 | Maks skjærspenning i tverrsnitt ved brudd . . . . .                                                 | 55 |
| 5.29 | Maks kontaktspenning ved brudd . . . . .                                                            | 56 |
| 5.30 | Parametrisk studie av tannhøyde . . . . .                                                           | 57 |
| 5.31 | Skjærspenning i diagonal del av tann . . . . .                                                      | 58 |
| 5.32 | Skjærspenning i diagonal del av tann . . . . .                                                      | 58 |
| 5.33 | Parametrisk studie av tannlengde . . . . .                                                          | 59 |
| 5.34 | Parametrisk studie av fortanningslokasjon . . . . .                                                 | 60 |
| 5.35 | Fordeling av skjærspenning i tverrsnitt med ulik $z/H$ . . . . .                                    | 60 |
| 5.36 | Parametrisk studie av vinkel på kontaktflate . . . . .                                              | 61 |
| 5.37 | Parametrisk studie av tannstørrelse . . . . .                                                       | 62 |
| A.1  | 4 elementer i høyden . . . . .                                                                      | 83 |
| A.2  | 12 elementer i høyden . . . . .                                                                     | 83 |
| A.3  | 16 elementer i høyden . . . . .                                                                     | 84 |
| A.4  | 26 elementer i høyden . . . . .                                                                     | 84 |
| A.5  | 100 elementer i høyden . . . . .                                                                    | 84 |
| B.1  | Utsnitt av mesh-struktur 1 . . . . .                                                                | 85 |
| B.2  | Horisontal strekkspenningsfordeling . . . . .                                                       | 86 |
| B.3  | Vertikal strekkspenningsfordeling . . . . .                                                         | 86 |
| B.4  | Utsnitt av mesh-struktur 1 . . . . .                                                                | 87 |
| B.5  | Horisontal strekkspenningsfordeling . . . . .                                                       | 87 |
| B.6  | Vertikal strekkspenningsfordeling . . . . .                                                         | 88 |
| B.7  | Utsnitt av mesh-struktur 1 . . . . .                                                                | 88 |
| B.8  | Horisontal strekkspenningsfordeling . . . . .                                                       | 89 |
| B.9  | Vertikal strekkspenningsfordeling . . . . .                                                         | 89 |
| C.1  | Resultater med varierende tverrkontraksjon . . . . .                                                | 90 |
| D.1  | Skjærspenninger under fortanning . . . . .                                                          | 91 |
| D.2  | Skjærspenninger over fortanning . . . . .                                                           | 91 |
| D.3  | Spenninger normalt på fiberretning under fortanning . . . . .                                       | 91 |
| D.4  | Spenninger normalt på fiberretning over fortanning . . . . .                                        | 92 |
| D.5  | Sammenheng mellom normaliserte skjær- og aksialspenninger . . . . .                                 | 92 |
| F.1  | Modellkode 1 av 15 . . . . .                                                                        | 96 |
| F.2  | Modellkode 2 av 15 . . . . .                                                                        | 97 |
| F.3  | Modellkode 3 av 15 . . . . .                                                                        | 98 |

---

---

|      |                                     |     |
|------|-------------------------------------|-----|
| F.4  | Modellkode 4 av 15 . . . . .        | 99  |
| F.5  | Modellkode 5 av 15 . . . . .        | 100 |
| F.6  | Modellkode 6 av 15 . . . . .        | 101 |
| F.7  | Modellkode 7 av 15 . . . . .        | 102 |
| F.8  | Modellkode 8 av 15 . . . . .        | 103 |
| F.9  | Modellkode 9 av 15 . . . . .        | 104 |
| F.10 | Modellkode 10 av 15 . . . . .       | 105 |
| F.11 | Modellkode 11 av 15 . . . . .       | 106 |
| F.12 | Modellkode 12 av 15 . . . . .       | 107 |
| F.13 | Modellkode 13 av 15 . . . . .       | 108 |
| F.14 | Modellkode 14 av 15 . . . . .       | 109 |
| F.15 | Modellkode 15 av 15 . . . . .       | 110 |
| G.1  | Resultatkode 1 av 3 . . . . .       | 111 |
| G.2  | Resultatkode 2 av 3 . . . . .       | 112 |
| G.3  | Resultatkode 3 av 3 . . . . .       | 113 |
| H.1  | Parametrisk studie 1 av 2 . . . . . | 114 |
| H.2  | Parametrisk studie 2 av 2 . . . . . | 115 |

---

## Tabeller

|      |                                                                                       |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Bøyefasthet og elastisitetsmodul for utvalg av konstruksjonsvirke og limtre . . . . . | 5  |
| 2.2  | Variasjonskoeffisient for utvalgte kapasiteter. t: Trevirke. l: Limtre . . . . .      | 9  |
| 2.3  | Karakteristisk- og middelvei for kapasiteter for GL30c . . . . .                      | 9  |
| 2.4  | Enhetssystem . . . . .                                                                | 18 |
| 3.1  | Geometri ved labforsøk . . . . .                                                      | 19 |
| 3.2  | Oppsummering av resultater fra labforsøk . . . . .                                    | 19 |
| 4.1  | Mesh-parametere . . . . .                                                             | 25 |
| 4.2  | Eksporterte resultater . . . . .                                                      | 26 |
| 4.3  | Elementtyper i 2D- og 3D-modell . . . . .                                             | 27 |
| 4.4  | Parametere for mesh-struktur . . . . .                                                | 30 |
| 5.1  | Parametere for referansegeometri . . . . .                                            | 40 |
| 5.2  | Lasttilfelle fra labforsøk . . . . .                                                  | 40 |
| 5.3  | Stivheter og nedbøyning fra FEM-modell . . . . .                                      | 40 |
| 5.4  | Differanse mellom gjennomsnitt av labforsøk og FEM-modeller med ulik stivhet . .      | 41 |
| 5.5  | Laststørrelser for studie av spenningsfordeling . . . . .                             | 42 |
| 5.6  | Differanse fra teoretisk skjærkraft . . . . .                                         | 48 |
| 5.7  | Stivheter . . . . .                                                                   | 52 |
| 5.8  | Visuelt optimalisert geometri . . . . .                                               | 63 |
| 5.9  | Optimalisert . . . . .                                                                | 63 |
| 5.10 | Parameterintervaller for numerisk optimaliseringsstudie . . . . .                     | 63 |
| 5.11 | Utdrag av resultater fra numerisk optimalisert geometri . . . . .                     | 63 |
| A.1  | Geometriske parametre . . . . .                                                       | 83 |
| A.2  | Laster . . . . .                                                                      | 83 |
| B.1  | Geometriske parametre . . . . .                                                       | 85 |
| B.2  | Laster . . . . .                                                                      | 85 |
| B.3  | Strekkspenninger ved mesh 1 . . . . .                                                 | 85 |
| B.4  | Strekkspenninger ved mesh 1 . . . . .                                                 | 87 |
| B.5  | Strekkspenninger ved mesh 1 . . . . .                                                 | 88 |
| E.1  | Resultater fra parametrisk optimalisering . . . . .                                   | 95 |



---

# 1 Innledning

Trekonstruksjoner er en av de eldste formene for bæresystem, og har tradisjon i norsk byggemasse. Tre er et organisk og fornybart materiale, som gjør det attraktivt i mange situasjoner. I tillegg har materialet relativ stor strukturell styrke sammenlignet med vekt. Lav vekt medfører også at materialet er enkelt å håndtere i byggeprosess. Dette er grunner for at trematerialer er dominerende ved bygging av nye boliger [1]. Utvikling av treprodukter og beregningsmetoder har skjedd gradvis mellom treets introduksjon som strukturelt materiale og dagens situasjon. Konstruksjonsprodukter som limtre, parallelfiner og massivtre har blitt introdusert og utviklet ved bruk av moderne teknologi. Komponenter av slike produkter er utbredt på markedet. Nå benyttes moderne teknologi for å re-introdusere tradisjonelle byggemåter. Dette har Rennebu-Bjelken AS gjort, ved å produsere tradisjonelle tannbjelker. En tannbjelke består av to komponenter, som overfører krefter ved bruk av tenner.

Det finnes allerede flere etablerte konstruksjonsprodukter i tre som kan benyttes til bjelkeformål, i tillegg til standard skurlast. Av interesse er da å studere hva en tannbjelke kan tilføre eksisterende marked. Felles for flesteparten av produkter som kombinerer trekomponenter, er betydningen av festemidler. For nevnte konstruksjonsprodukter har lim en sentral posisjon. Lim er ikke gunstig for miljøregnskap og reduserer da den miljømessige fordel ved bruk av tre [2]. Å kunne sammenkoble komponenter uten bruk av lim, vil da følgelig være av klimamessig fordel.

Eksklusjon av lim kan ha flere positive effekter. Det muliggjør ikke-destruktiv demontering av bjelke. Mulighet for å gjenbruke en komponent strukturelt i et annet prosjekt kan da forekomme og dermed forlenge materialets levetid. Klimaaspektet tilknyttet forlenget levetid kan anses som betydelig [2].

Konseptet med fortannet bjelke er et tradisjonelt konsept. I nyere tid har konseptet blitt benyttet i blant annet broprosjekter av Rennebu-Bjelken AS. At konseptet er fungerende i praksis er dermed etablert. For at konseptet skal kunne vurderes på lik linje med konkurrerende bjelkekonsepter, må troverdige beregningsmetoder og modeller ligge til grunn. Det tilsier analytiske resultater som stemmer overens med bjelkens virkelige oppførsel, i tillegg til kapasiteter og kontroller med grunnlag i standarder. En numerisk modell i dataprogram som baserer seg på elementmetoden (FEM), kan benyttes som grunnlag for å forstå et slikt konsept

Det er lite utbredt forskning på konseptet med tannbjelke. Denne oppgaven tar for seg studie av konseptet, og vil være supplement til Rennebu-Bjelken AS sin forskning.

---

## 1.1 Problemstilling

Hovedformål med denne oppgaven er å bidra til utvidet kunnskap om et tannbjelkekonsept. Det vil fokuseres på å skape forståelse av konseptets strukturelle oppførsel. Ved å utarbeide en numerisk FEM-modell, skal spenningsfordelinger og -verdier kunne predikeres. Analyse av strukturell oppførsel i området med tenner (fortanning) er av spesiell interesse. Ved hjelp av modell og tidligere forskning skal det framstilles metoder for å anslå bruddlast.

Eksperimentell data fra laboratorieforsøk skal benyttes som sammenligningsgrunnlag for utarbeidet FEM-modell. Ved tilstrekkelig samsvar mellom modell og reell bjelke, kan verifisert modell benyttes til å forutse bjelkeoppførsel for vilkårlig geometri og lasttilfelle. Sammenligning mot bjelke uten fortanning (regulær bjelke), bidrar videre til forståelse av konseptets særegenheter.

Ved å utarbeide FEM-modellen parametrisk skal det tilrettelegges for å studere bjelkeoppførsel for ulike geometrisammensetninger. Betydning av geometriske parametere skal betraktes for å skape et grunnlag for optimalisering av geometri. Dette skal benyttes for å skape utvidet forståelse for utforming av fortanning og da videreføre forskningen på konseptet.

For å bidra til en utvidet kunnskap om konseptet ved tannbjelke, formuleres oppgavens problemstilling følgende:

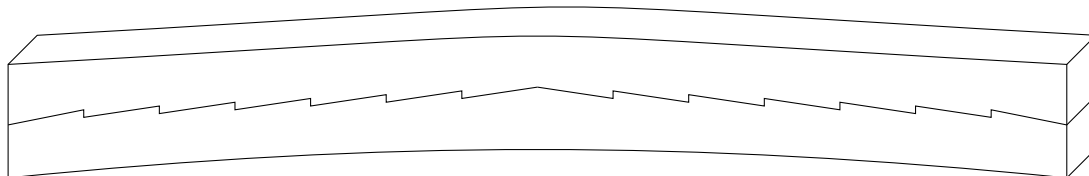
*Framstille spenningssituasjon og betydning av geometriske parametere i fortannet trebjelke ved å utvikle parametrisk FEM-modell*

## 1.2 Oppgavestruktur

Oppgaven inneholder en numerisk studie av eksisterende bjelkekonsept. Studien baserer seg på teori, forsøksresultater og analyse av numerisk modell med grunnlag i elementmetoden. Som grunnlag for å generere resultater produseres modell basert på geometri fra labforsøk (referansegeometri). Ved resultatproduksjon er oppgaven todelt. Første del tar for seg analyse av bjelkeoppførsel med referansegeometri benyttet i labforsøk. Andre del tar for seg betydningen av utvalgte geometriske parametere og optimalisering av geometri. Deretter diskuteres resultatene. Utfall fra studie samles i konklusjon og sees i sammenheng med relaterende feilkilder og behov for videre arbeid.

## 1.3 Konseptbeskrivelse

Konseptet går ut på å mekanisk forbinde to bjelkekomponenter for å øke høyde og kapasitet. Samvirke oppstår ved hjelp av utskårede tenner som overfører horisontale krefter mellom komponentene. Komponentene settes sammen ved at de bøyes opp og låses i en oppbøyd tilstand. Komponentene fastholdes i vertikal retning, ved hjelp av radiale trykkrefter som følge av oppbøyningen. Konseptet er tiltenkt bærende bjelker og kan benyttes for blant annet infrastruktur og bygg. Prinsipp og utforming er tilpasset fritt opplagt bjelke over ett spenn. Visuell framstilling av konseptet er å finne i figur 1.1.



Figur 1.1: Bjelkegeometri

---

## 1.4 Metode

Denne oppgaven er basert på en numerisk metode. Resultater tar utgangspunkt i numerisk FEM-modell. Modellen etableres i ABAQUS, ved bruk av skript som skrives i programmeringsspråket python. Videre forklaring av modellutvikling er beskrevet i kapittel 4.

Resultater fra FEM-modell sammenlignes med resultater fra laboratorieforsøk. Forsøkene er gjennomført av Norsk Treteknisk Institutt, i samarbeid med Rennebu-Bjelken AS i 2021. Litteratur og lignende forskning brukes for å underbygge teori og drøfting. Resultater fremstilles ved hjelp av tabeller laget i LaTeX og grafer laget i Jupyter Notebook. Skisser er produsert ved bruk av LaTeX.

## 1.5 Tidligere forskning

Bjelkekonsept med fortanning er å finne i eksisterende forskning. Litteratur som omhandler historisk bruk av tilsvarende konsept er tilgjengelig. Dette er ikke av interesse for oppgavens problemstilling. Av interesse for problemstilling er å studere strukturell forskning på lignende konsepter.

Et eksempel er bruk av fortanning som forbindelsesmiddel i tre-betong-kompositt (TCC). Dette diskuteres blant annet av Müller og Frangi fra ETH Zürich i artikkelen “Micro-notches as a novel connection system for timber-concrete composite slabs” [3]. Der benyttes mikrotenner, benevnt “micro-notches”, for å sammenkoble tre- og betongkomponent. Kompositten har ulik materialkombinasjon og mindre tannstørrelse enn konseptet for denne oppgaven. Forskingen vil fremdeles være relevant for forskningen, da det omhandler kontinuerlig skjæroverføring uten ekstra festemidler. Fra forskning framkommer det at forbindelsens utnyttelse styres i stor grad av tanndimensjoner. Best utnyttelse framkom ved kort tannlengde og lav tannhøyde, mens vinkel på kontaktflate ikke var av betydning. [3]

Boccorde et al. framstiller relevant forskning i artikkelen “Analysis of shear transfer and gap opening in timber-concrete composite members with notched connections” [4]. Tilsvarende omhandler dette konseptet også TCC. Her diskuteres problematikken rundt skjærbrudd ved fortanning, og samler framgangsmåter og formler for slike brudd. I forskningen er tennene rektangulære framfor triangulær form, men framgangsmåter fremdeles.

---

## 2 Teoretisk bakgrunn

Dette kapittelet tar for seg grunnleggende teori som er relevant for denne oppgaven. I tillegg presenteres en innføring av modelleringsverktøy.

Utvalgte standarder vil være aktuelle for problemstilling, og er gjengitt nedenfor.

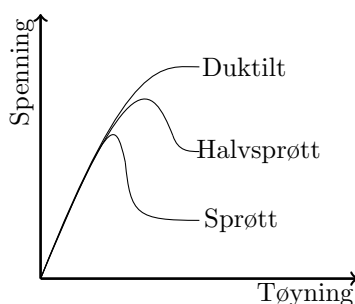
- NS-EN 1990 - Eurokode: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner [5]
- NS-EN 1995-1-1 - Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner - Del 1-1 [6]
- NS-INSTA 142 - Nordiske regler for visuell styrkesortering av trelast [7]
- NS-EN 14080 - Trekonstruksjoner: Limtre og limt laminert heltre [8]
- NS-EN 338 - Konstruksjonstrevirke - Fasthetsklasser [9]

### 2.1 Materialegenskaper

Tre er et anisotropisk materiale. Det tilsier at strukturelle egenskaper avhenger av fiberens orientering. Fibrene er hovedsakelig orientert i treets lengderetning. Det er betydelig forskjell i styrkeegenskaper, avhengig av orientering i forhold til fiberretning. Det er da hensiktsmessig å studere egenskaper for tre ulike orienteringer; lengderetning (L), radiell retning (R) og tangentiell retning (T). Det gjør at tre anses som et ortotropisk materiale. Det tilsier at, i et vilkårlig punkt vil en kunne skille egenskaper i tre hovedretninger normalt på hverandre. Det er betydelig differanse mellom egenskaper i lengderetning og de to resterende retningene. Av den grunn skilles det mellom egenskaper parallelt med fiberretning, betegnet med  $X_0$ , og normalt på fiberretning,  $X_{90}$ . [10]

Tre kan defineres som et delvis sprøtt materiale. Duktiliteten til et materiale er styrende for når og hvordan brudd oppstår. Hvor duktilt et materiale er, tilsier dets evne til plastisk deformasjon. Altså hvor mye det kan deformeres uten at det oppstår brudd. Et sprøtt materiale har liten evne til plastisk deformasjon. Sprøbrudd kan da forekomme uten forvarsel, i form av deformasjon, når kapasitet overskrides. For duktile materialer vil spenninger nå et punkt hvor elastisk kapasitet oppnås. Deretter vil materialet få plastiske deformasjoner, framfor å gå til brudd. [11]

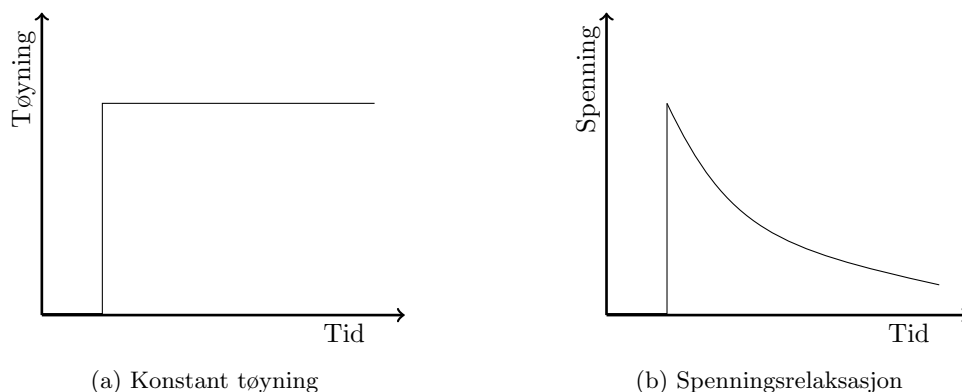
For tre, vil oppførsel være et sted mellom duktilt og sprøtt. "Bruddformer for delvis sprøe materialer samsvarer i stor grad med situasjoner for sprøe materialer, men i mindre dramatisk format" [12]. Det oppstår små sprekker i trekomponenter når belastning nærmer seg kritisk last. Dette skjer nært eksponerte hjørner eller sprekker. Ved økende belastning forsterkes slik småsprekkdannelse. Det har innvirkning på lokal spenningsfordeling og styrke. Spenninger fordeles utover og lokal spenningskonsentrasjon. Det medfører redusert økning av spenning og deformasjon. Altså vil forholdet mellom kraft og deformasjon ha ikke-lineær oppførsel før brudd. Denne effekten er vist i figur 2.1. Det kan ansees som at fibrene myknes opp og spenninger omfordeles.



Figur 2.1: Kraft-deformasjons-diagram for materialer av ulik duktilitet

Videre har tre viskoelastiske egenskaper. Altså en kombinasjon av elastiske og viskøse egenskaper. Når elastiske materialer avlastes, vil utsatt komponent tilbakeføres til opprinnelig form, dersom elastisk kapasitet ikke overskrides. For viskøse materialer vil komponenter oppleve permanent endring i form for samme situasjon. At tre er viskoelastisk tilsier at det har tidsavhengige egenskaper (kryp og relaksasjon), som har innvirkning på deformasjon og spenning. Kryp medfører ekstra tidsavhengig deformasjon på grunn av ytre belastning. Relaksasjon medfører at en komponent påført konstant tøyning, får redusert spenning med tiden. [10]

En måte å predikere betydning av relaksasjon på, er å benytte Maxwells modell. Her benyttes forholdet mellom tid,  $t$ , og en beregnet relaksasjonstid,  $\tau$ . Sistnevnte bestemmes av materialets viskositet og stivhet. En komponent med påført konstant tøyning, vil få en initial spenning som avtar eksponentielt. Konseptet visualiseres i figur 2.2 [13]



Figur 2.2: Maxwells modell for relaksasjon

Kilde: [13]

I punkt 3.1.2 i EC5 etableres grunnlag for sammenheng mellom spenninger og tøyninger. Hovedprinsippet er at relasjon mellom spenning og tøyning betraktes lineær fram til brudd. Det gir at fastheter til komponenter også skal bestemmes fra dette lineære forholdet. Elastisitetsmodul (E-modul), er en verdi for nevnte forhold, altså en faktor for materialstivhet. Verdier for utvalgte klasser av trekonstruksjoner er gjengitt i tabell 2.1. Både deformasjon og spenning påvirkes av denne materialegenskapen.

| Klasse             | Bøyefasthet [MPa] | E-modul [MPa] |
|--------------------|-------------------|---------------|
| Konstruksjonsvirke |                   |               |
| C18                | 18                | 9 000         |
| C24                | 24                | 11 000        |
| C30                | 30                | 12 000        |
| Limtre             |                   |               |
| GL28c              | 28                | 12 500        |
| GL30c              | 30                | 13 000        |
| GL32c              | 32                | 13 500        |

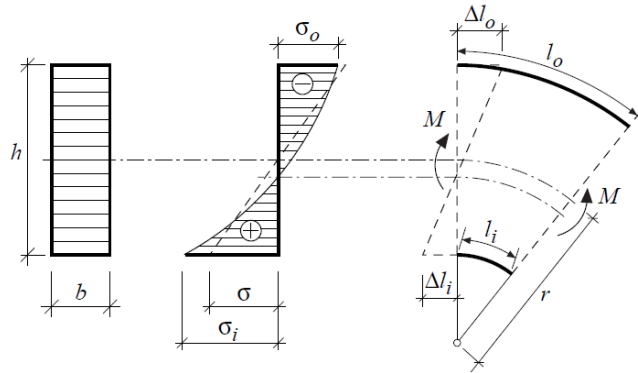
Tabell 2.1: Bøyefasthet og elastisitetsmodul for utvalg av konstruksjonsvirke og limtre

Kilde: [8], [9]

---

## 2.2 Effekt av overhøyde

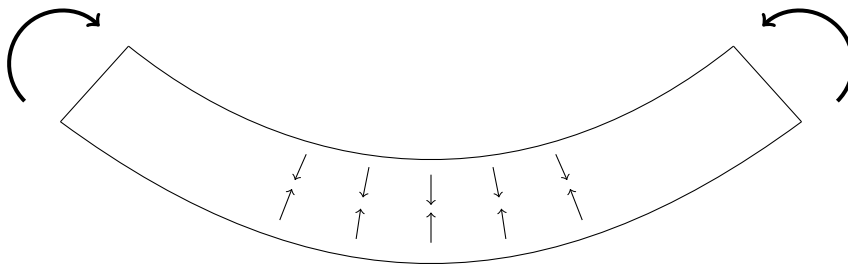
Den primære effekten av overhøydedimensjonering er reduksjon av endelig nedbøyning. Det vil også ha effekt på spenningsfordeling og oppførsel av bjelke. Som visualisert i figur 2.3, vil underkant ( $l_i$ ) være kortere enn overkant ( $l_o$ ) av bjelke. Endring av fiberlengde, vil påvirke bøyesspenning og fører til hyperbolsk, ikke-lineær spenningsfordeling gjennom tverrsnittet, visualisert i midtre figur. Både størrelse og fordeling av spenninger er avhengig av kurvatur på bjelke. Det følger videre at spenningene påvirkes av materialets anisotropi fører til økte spenninger i underkant når bjelken bøyes opp. Spenninger påført ved oppspenning må kontrolleres i den krummede delen, hvor de blir dimensjonerende. [10]



Figur 2.3: Buet bjelke

Kilde: [10]

Ved krumning av bjelke introduseres bøyemoment og aksialspenning. Når den krumme bjelken påføres eksterne bøyemomenter, vil det gi radielle spenninger. Dersom påsatt last medvirker til krumning, vil det medføre radielle trykkspenninger, som presentert i figur 2.4. Slike spenninger vil bidra til å holde to separate bjelkekomponenter sammen. [14]



Figur 2.4: Radielle trykkspenninger i krummet bjelke

Kilde: [14]

---

## 2.3 Organisk materiale

Særegent for tre som strukturelt materiale er dets organiske egenskaper. Materialets egenskaper påvirkes i stor grad av tresort, vekstvilkår og intern sammensetning. Innunder intern sammensetning kategoriseres årringtetthet, fiberhelning og kvist, noe som vil være definerende for styrken. Variasjon i strukturelle egenskaper vil da forekomme mellom eksemplarer. Dette gir en viss usikkerhet, som tas hensyn til, i form av sikkerhetsfaktorer og visuelle tester. Det er krav til gjennomføring av enten visuell eller maskinell kontroll av konstruksjonsmaterialer. [7]

Limtre vil i likhet med konstruksjonsvirke ha usikkerhet tilknyttet egenskaper, men i mindre grad enn konstruksjonsvirke. Svakheter vil fordeles ut i produksjonsprosessen og bli av mindre betydning. Dette medfører at kvaliteten på limtrekomponenter er mer forutsigbar.

For de ulike materialklassene er det definert begrensninger for svakheter i materialet. Det gjelder blant annet tillatt kviststørrelse og -plassering og maksimal fiberhelning. Begrensninger er definert i NS-INSTA 142. Kvisten er den svakheten som i størst grad påvirker styrken til komponenten. For limtre må det sørges for at slike svake områder ikke er i nærhet av fingerskjøter, en kritisk del av komponenten. Det er definert i NS-EN 14080 at områdene innen  $3 \times d$  fra fingerskjøten skal være fri for kvist. Her er  $d$  diameter av kvist.

Ettersom områder ved forbindelser anses som kritiske, er betydningen av kvist og fiberhelning av ekstra betydning. Kapittel 10.4 i EC5 omhandler mekaniske forbindelser for trekonstruksjoner. Her vektlegges det at svakheter som kvist må unngås i områder nært mekaniske forbindelser. Det skal sikres at forbindelsens kapasitet ikke reduseres grunnet svakhet i sammenkobling.

---

## 2.4 Kapasiteter

En bærende bjelke må kunne motstå alle kritiske bruddmekanismer. Hvor og når det oppstår brudd avhenger av materialvalg, geometri og lastsituasjon. Ved en dimensjoneringsprosess undersøkes det ved hvilke lastnivå de ulike bruddmekanismene forekommer. For en fortannet bjelke som er fritt opplagt, er følgende spenningsformer prioritert for studie av bruddmekanismer:

- Aksialspenninger grunnet moment,  $\sigma_0$
- Kontaktspenninger i tannflater,  $\sigma_c$
- Skjærspenninger,  $\tau$
- Strekkspenninger normalt på fiberretning,  $\sigma_{90}$
- Kombinasjon av de to sistnevnte

Med unntak av spenninger med opphav i moment, vil interesseområde for de andre spenningsformene være i, eller ved fortanningen. Hvordan den irregulære geometrien påvirker kapasitetsberegninger er da av interesse.

For bærende konstruksjonskomponenter skal krav til dimensjonering være i henhold til NS-EN 1990. Krav satt for bruddgrense (ULS) og bruksgrense (SLS), må være oppfylt. ULS-krav skal sikre trygghet for folk og struktur. SLS-krav skal sikre funksjonalitet, komfort og det visuelle i strukturen ved normal bruk [5].

### 2.4.1 Materialstyrker

Verdier som bestemmer materialets styrke, er basert på en rekke labforsøk som gir utgangspunkt for statistiske fordelinger. Relevante forsøk har enten normalfordeling eller logaritmisk normalfordeling. Sannsynlighetsfordelingen er utgangspunktet for å definere kapasiteter for ulike dimensjonerings situasjoner. Middelerdi og standardavvik brukes for å beskrive størrelse og form på fordeling. Forholdstallet mellom nevnte faktorer betegnes med en variasjonskoeffisient, COV [15].

For konstruksjonsvirke er nevnte verdier å finne i NS-EN 338 og for limtre i NS-EN 14080. Kapasiteter oppgis hovedsakelig med karakteristiske verdier, som tilsvarer nedre 5%-fraktil ( $X_{0,05}$ ) i den statistiske kapasitetsfordelingen. Ved dimensjonering av strukturelle komponenter er det hensiktsmessig å ta utgangspunkt i karakteristiske kapasiteter,  $X_k$  med ulike faktorer. Når resultater basert på labforsøk skal kontrolleres opp mot kritiske kapasiteter vil det være nødvendig å kontrollere mot middelerdier,  $X_{smitt}$ . Etersom 5%-fraktil bestemmes ut fra middelerdi og standardavvik, kan framgangsmåten reverseres for å definere middelerdi.

Joint Committee on Structural Safety (JCSS) har en artikkel kalt *Model Code 3*. Her samles relevante statistiske egenskaper, blant annet for strukturelle kapasiteter. Statistisk fordelingsform og varianskoeffisient presenteres i tabell 2.2 [16].



---

|            | Fordeling  | COV      |
|------------|------------|----------|
| $f_m$      | Log-normal | 0.25 [t] |
|            |            | 0.15 [l] |
| $f_{t,0}$  | Log-normal | 0.30 [t] |
|            |            | 0.18 [l] |
| $f_{c,0}$  | Log-normal | 0.20 [t] |
|            |            | 0.12 [l] |
| $f_{c,90}$ | Normal     | 0.25 [t] |
|            |            | 0.15 [l] |
| $f_v$      | Log-normal | 0.25 [t] |
|            |            | 0.15 [l] |

Tabell 2.2: Variasjonskoeffisient for utalgte kapasiteter.  
t: Trevirke. l: Limtre

I tabell 2.3 er forholdet mellom karakteristiske- og middelveier eksemplifisert for limtre, GL30c.

| GL30c      | $f_k$<br>[MPa] | $f_{snitt}$<br>[MPa] |
|------------|----------------|----------------------|
| $f_m$      | 28.0           | 38.8                 |
| $f_{t,0}$  | 19.5           | 26.6                 |
| $f_{c,0}$  | 24.0           | 30.0                 |
| $f_{c,90}$ | 2.5            | 3.0                  |
| $f_{t,90}$ | 0.5            | 0.9                  |
| $f_v$      | 3.5            | 4.5                  |

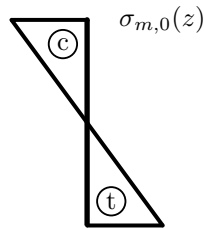
Tabell 2.3: Karakteristisk- og middelveier for kapasiteter for GL30c

Kilde: [8]

---

### 2.4.2 Aksialspenninger

Aksialspenningsfordeling fra moment for rektangulær bjelke er som vist i figur 2.5. Maksimale verdier opptrer i bunn og topp av bjelke.



Figur 2.5: Aksialspenningsfordeling fra moment i rektangulært tverrsnitt

En fritt opplagt bjelke med nedadrettede laster, har strekk ( $t$ ) i underkant og trykk ( $c$ ) i overkant. For en komponent i bøyning skal spenning ( $\sigma_{m,0}$ ) kontrolleres mot formel (2.1).

$$\sigma_{m,0} \leq f_m \quad (2.1)$$

For en komponent i rent trykk eller rent strekk skal spenning ( $\sigma_{c,0}$  og  $\sigma_{t,0}$ ) kontrolleres for henholdsvis formel (2.2) eller formel (2.3).

$$\sigma_{t,0} \leq f_{t,0} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{c,0} \leq f_{c,0} \quad (2.3)$$

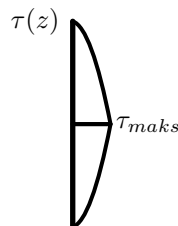
### 2.4.3 Skjær

Karakteristisk skjærkapasitet,  $f_{v,k}$  er gitt i NS-EN338 for konstruksjonsvirke og i NS-EN14080 for limtre. Det oppstår lokalt skjærbrudd dersom skjærkrefter i et plan parallelt med fiberretning overskrider skjærkapasiteter for materialet.

For skjærspenninger må betingelsen i EC5 6.1.7 være oppfylt. Det tilsier at skjærspenninger ikke skal overskride skjærfasthet,  $\tau \leq f_v$ . For regulær, rektangulær bjelke kan formel (2.4) benyttes for å bestemme  $\tau$ .

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{V}{b_{ef} h} \quad (2.4)$$

Her er  $b_{ef}$  en effektiv bredde som tar hensyn til sprekker i materialet og  $V$  er skjærkraft. Skjærkrefter i topp og bunn av en bjelke vil være lik null, i samsvar med lokale likevektsligninger. Maksimale skjærspenninger,  $V$ , er å finne ved tverrsnittets nøytralakse for et rektangulært tverrsnitt. For en rektangulær bjelke vil da skjærfordelingen se ut som i figur 2.6.



Figur 2.6: Skjærspenningsfordeling i tverrsnitt

---

#### 2.4.4 Strekkspenning normalt på fiberretning

Grunnet treets anisotropiske egenskaper tilknyttet fiberstruktur, vil spennings vinkel på fiberretning ha innvirkning på styrkeegenskaper. Treets motstand mot strekkrefter normalt på fiberretning er relativt lav, sammenlignet med parallelt med fiberretning. Spesielt for bjelker med irregulær geometri kan slike spenninger oppstå. Dette gjelder blant annet ved fortanning.

Karakteristisk kapasitetsverdi for strekkspenning vinkelrett på fiberretning er vist i tabell 2.3 for GL30c. Her framkommer karakteristisk verdi for limtre på 0.5 MPa, som er 2.6 % av kapasitet for strekk parallelt med fiberretning. Av retningslinjer for dimensjonering etter EC5 er informasjon samlet i 6.1.3, hvor det poengteres: “Det skal tas nødvendig hensyn til innflytelsen av konstruksjonsdelens størrelse”. Faktoren  $k_{vol}$  introduserer størrelsesinnflytelsen. I foreløpig revisjon av EC5 foreligger det at det skal tas hensyn til regler i delkapittelet som omhandler krumme bjelker og bjelker med varierende tverrsnitt. I nevnte delkapittel introduseres formel for  $k_{vol}$ . For konstruksjonsvirke settes denne faktoren lik 1.0, mens for limtre og LVL benyttes formel (2.5). Her er  $V_0$  referansevolum, lik  $0.01 \text{ m}^3$ , og  $V$  er det tverrstrekkbelastede volumet i toppunktet.

$$k_{vol} = \left( \frac{V_0}{V} \right)^{0.2} \quad (2.5)$$

Videre omhandler del 8.1.4 i EC5 strekkspenninger som opptrer med en vinkel på fiberretning. Formel (2.6) definerer tillatte spenninger for nevnt lastsituasjon. Det framkommer tre definerende faktorer. Strekkapasitet, både parallelt og normalt på fiberretning, i tillegg til vinkel,  $\alpha$ . Dersom last er rettet normalt på fiberretning ( $\alpha = 90^\circ$ ) og volumfaktoren ( $k_{vol}$ ) inkluderes, vil formelen formuleres som formel (2.7).

$$\sigma_{t,\alpha} \leq \frac{f_{t,0} f_{t,90}}{f_{t,0} \sin^2 \alpha + f_{t,90} \cos^2 \alpha} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{t,90} \leq k_{vol} f_{t,90} \quad (2.7)$$

Spenninger normalt på fiberretning kan danne sprekker parallelt med fiberretning. Hvor og hvordan sprekk dannes, er avhengig av materialegenskaper. Ved sprøtt materiale vil all bruddutvikling forekomme i ende av sprekk. For et delvis sprøtt materiale som tre, vil ikke bruddutvikling være begrenset til enden, men vil spre seg over en lengde. I dette området kan materialet myknes i prosessen. Resultat av dette er redusert bruddenergi, som fører til økt bruddmotstand. Materialets oppførsel når det blir belastet på denne måten vil føre til at bruddmotstanden er ikke-lineær.[17]

---

### 2.4.5 Kombinerte spenninger

Dersom skjærspenning ( $\tau$ ) og strekkspenning normalt på fiberretning ( $\sigma_{90}$ ) virker sammen skal det tas hensyn til korrelasjonen mellom dem. Det finnes forskning på nevnte område, blant annet av R. Stieger et al [18]. Her diskuteres samhandling mellom skjær- og normalspenninger og det foreslås ulike framgangsmåter for å betrakte samhandlingen.

Et alternativ er å studere forholdstallet mellom spenning og kapasitet for  $\tau$  og  $\sigma_{90}$ . Opphavet til dette kriteriet er tilknyttet Norris. Norris' kriterium er en kvadratisk formulering som undersøker om total utnyttelse for spenninger parallelt og normalt på fiberretning kombinert med skjærspenninger overskrider kombinert kapasitet. Dersom summen av de kvadrerte utnyttelsene er større eller lik 1.0, forventes brudd.

Dette kriteriet behandler strekk- og trykkspenning likt. Første ledd i Norris' kriterium omhandler spenninger parallelt med fiberretning. Dersom aksialspenninger er lave sammenlignet med kapasitet, kan første ledd neglisjeres. I midten av et rektangulært tverrsnitt er hovedsakelig aksialspenninger lave i forhold til skjærspenning. Da framkommer en direkte kontroll av kombinerte skjær- og normalspenninger. Dette er gjengitt i formel (2.8).

$$\left(\frac{\sigma_{90}}{f_{90}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{f_v}\right)^2 = 1 \quad (2.8)$$

Alternativ fremgangsmåte for kontroll av kombinerte spenninger er å finne i sveitsisk trestandard, SIA 265 [19]. Kravet tar utgangspunkt i skjærspenning,  $\tau$  og spenning normalt på fiberretning,  $\sigma_{90}$ , som vist i formel (2.9). Kapasiteter for både trykk og strekk normalt på fiberretning er sentrale for bruddkriteriet.

$$\left(\frac{f_{c,90} + \sigma_{90}}{f_{c,90} + f_{t,90}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{f_v}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{f_{c,90}}{f_{c,90} + f_{t,90}}\right)^2\right] = 1 \quad (2.9)$$

I revidert versjon av EC5 (foreløpig under utvikling), inkluderes flere punkter for dimensjonering av nevnte spenningskombinasjon. I punkt 8.1.11.4 diskuteres kombinasjon av skjær og strekk normalt på fibrene, presentert i ligning (2.10). Her inkluderes størrelsesfaktoren,  $k_{vol}$ . Dette er faktoren som er av betydning når det forekommer strekk normalt på fiberretning, som diskutert i delkapittel 2.4.4.

$$\frac{\tau}{f_v} + \frac{\sigma_{t,90}}{k_{vol,t} f_{t,90}} \leq 1 \quad (2.10)$$

---

## Snittspenningsmetode for kombinerte spenninger

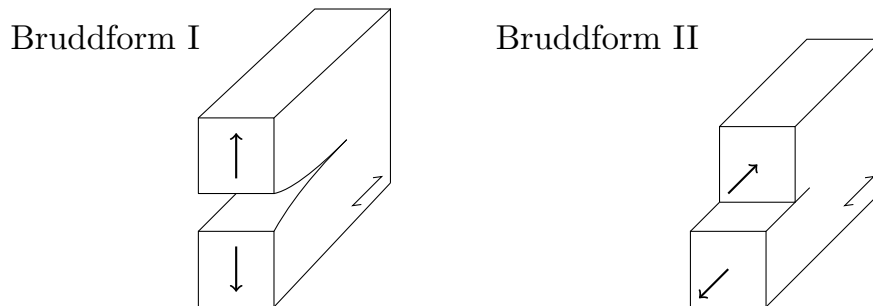
For komponenter med irregulær geometri kan det være områder hvor det oppstår høy konsentrasjon av spenninger. Det kan da dannes en ikke-lineær spenningsfordeling mot et problematisk punkt. Ved en FEM-modell er dette spenninger med singulære verdier. Slike verdier er ugunstig å bruke for sammenligning mot kapasitet, siden de er relativt høye. Som et alternativ til de tidligere nevnte bruddkriteriene, kan metoder basert på bruddmekanikk og bruddenergi benyttes. Dette er framstilt av P.J. Gustafsson [20].

Bruddmekanikk benyttes for å forutse materialbrudd med utgangspunkt i sprekkdannelse og sprekkutvikling. Her inkluderes singulære spenningsverdier uten å være en direkte kontroll for bruddkriteriet. Metoden går ut på at det dannes sprekker når spenningen overskrider elastisk kapasitet. Sprekker fører til at spenningen fordeler seg ut en viss lengde, som reduserer spenningstoppen. Framfor å kontrollere om én lokal spenningsverdi overskrider gitt kapasitet, er denne fremgangsmetoden basert på om spenninger i et gitt område danner kritisk sprekk. To sentrale faktorer innen bruddmekanikk er spenningsintensitetsfaktor,  $K$ , og frigjøringshastighet for energi,  $G$  (engelsk: energy release rate). Spenningsintensiteten styres av last og oppsprekningsgeometri. Tilsvarende er motstand mot kritisk sprekk benevnt med  $K_c$ . Motstandsverdien baseres på labforsøk for materialer. [21]

Fremgangsmåter presentert videre kan baseres på lineær-elastiske bruddmekanismer (LEFM) og ikke-lineære bruddmekanismer (NLFM). Tre har ikke-lineære egenskaper for visse spenningsformer. For strekk,  $\sigma_{90}$ , og skjær,  $\tau$ , ved flytespenningskapasitet er treets ikke-lineære egenskaper av betydning. Det framkommer at når kapasiteten overskrides, myknes fibre og spenningsøkning avtar ved økende belastning [22]. NLFM fører dermed til større utbredning av spenninger ved betydelig belastning og da redusert maksimum.

Et kriterium innunder bruddmekanikk er Wus kriterium, presentert i formel (2.11). Bruddkriteriet styres av faktorer for spenningsintensitet,  $K_I$  og  $K_{II}$ , sammen med kritisk verdi for intensitetene,  $K_{IC}$  og  $K_{IIC}$ . Denotasjonene I og II tilsier hvilke bruddform som opptrer, visualisert i figur 2.7. Bruddform (I) vil være dominert av strekk normalt på fiberretning,  $\sigma_{90}$ , mens (II) styres av skjær,  $\tau$ . Etersom spenningene ofte opptrer sammen, kan bruddform være en kombinasjon av (I) og (II), som tas hensyn til i formel (2.11). [20]

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \left( \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right)^2 = 1.0 \quad (2.11)$$



Figur 2.7: To sentrale bruddformer

Kilde: [23]

Snittspenningsmetoden er en metode som kombinerer kriterier fra tradisjonell spenningsanalyse og kriterier for bruddmekanikk. Denne metoden kan benyttes både med og uten singulære punkter. Da kan eksempelvis Norris' kriterium (formel (2.8)) kombineres med Wus kriterium (formel (2.11)) for sprekkdannelse. Ved snittspenningsmetoden tilpasses Norris' kriterium presentert i formel (2.8) til en gjennomsnittsspennning, framfor å basere seg på singulær ekstremalverdi. Et bestemt bruddområde identifiseres basert på materialdata, og en snittverdi for arealet benyttes i kriteriet. Norris' kriterium kan da reformuleres for snittspenninger, som i formel (2.12).

$$\left(\frac{\overline{\sigma_{90,w}}}{f_{90}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{\tau_w}}{f_v}\right)^2 = 1 \quad (2.12)$$

Her er  $\overline{\sigma_{90,w}}$  gjennomsnittlig spenning normalt på fiberretning og  $\overline{\tau_w}$  er gjennomsnittlig skjærspenning. Snittspenningene kan bestemmes numerisk, eksempelvis med FEM. Fra formel (2.13) og (2.14) framkommer det at snittspenninger avhenger av en lengde,  $a$ , i tillegg til  $K$ -variabler. I denne sammenhengen er  $a$  lengde langs sprekkeflaten.

$$\overline{\sigma_{90,w}} = \sqrt{\frac{2K_{II}^2}{\pi a}} \quad (2.13)$$

$$\overline{\tau_w} = \sqrt{\frac{2K_I^2}{\pi a}} \quad (2.14)$$

Hvor stort område spenning fordeles over ( $a$ ) bestemmes av materialeegenskaper og spenningskombinasjon. Framgangsmåte for å definere  $a$  presenteres i formel (2.15). Parameterene som benyttes kan grupperes inn under  $E$ ,  $f$ ,  $G$  og  $k$ . Parametere benevnt med  $E$  bestemmes av materialeegenskaper,  $f$  er materialkapasiteter og  $G$  bestemmes av frigjøringshastighet for energi og dets kapasitet. Faktor  $k$  er forholdstallet mellom skjærspenning og strekkspenning normalt på fiberretning,  $\overline{\tau_w}/\overline{\sigma_{90}}$ . Det tilsier altså om bruddform er nærmest bruddform I eller II. [20]

$$a = \frac{2}{\pi} \frac{E_I G_{IC}}{f_t^2} \frac{E_x}{E_y} \left(\frac{G_{IIC}}{G_{IC}}\right)^2 \frac{1}{4k^4} \left[ \sqrt{1 + 4k^2 \sqrt{\frac{E_y}{E_x} \frac{G_{IC}}{G_{IIC}}}} - 1 \right]^2 \left[ 1 + \frac{k^2}{(f_v/f_t)^2} \right] \quad (2.15)$$

For limtre og skurlast er verdier for  $a$  tabulert for geometri- og spenningssituasjoner i Gustaffsons forskningspapir [20]. For sammenlignbar geometri benyttes verdier mellom 19 og 22 mm.

Denne tilnærmingen tar hensyn til at konstruksjonstre er et halvsprøtt materiale. Det oppstår først et lokalt brudd ved utsatt punkt, men for at komponenten skal gå til brudd må det oppstå sprekkdannelse over et sprekkeområde.

---

## Forenklet snittspenningsmetode

Tilsvarende framgangsmåte for spenningsfordeling, som presentert tidligere, kan benyttes i en forenklet metode. Her vil det ikke introduseres bruddenergi i form av faktorer for spenningsintensitet og deres kritiske verdier, som i Wus kriterium. Metoden vil derimot basere seg på opptredende spenninger, presentert med snittverdi. Framgangsmåten er framstilt av H.Danielsson. [23]

Metoden baserer seg på å fordele spenninger over et tilsvarende areal som framstilt for snittspenningsmetoden, altså  $a*b$ , hvor  $b$  er bredden. Intensjonen er å finne en snittverdi over bruddområdet for både  $\tau$  og  $\sigma_{90}$ . Dette gjøres etter formel (2.16) og (2.17).

$$\bar{\tau} = \frac{1}{a} \int_0^a \tau(x) dx \quad (2.16)$$

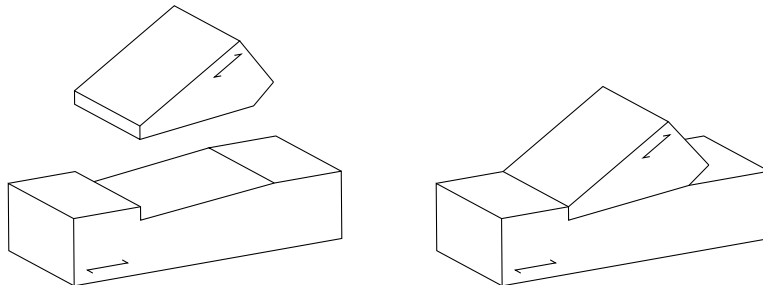
$$\overline{\sigma_{90}} = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma(x) dx \quad (2.17)$$

Snittspenningene  $\bar{\tau}$  og  $\overline{\sigma_{90}}$  benyttes i Norris' kriterium som tidligere presentert. Bruddkriteriet blir da tilsvarende som i formel (2.12), gjengitt i formel (2.18).

$$\left(\frac{\overline{\sigma_{90}}}{f_{90}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}}{f_v}\right)^2 = 1 \quad (2.18)$$

### 2.4.6 Kontaktspenninger

Mekanisk forbindelse kan benyttes for å overføre krefter fra én komponent til en annen. Kraftoverføring kan skje i form av trykkrefter parallelt med fiberretning. Da overføres krefter mellom komponentenes kontaktflater og trykkspenninger oppstår. Eksempel på en slik forbindelse er vist i figur 2.8.



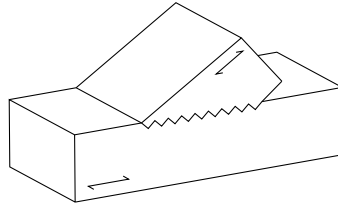
Figur 2.8: Enkel forbindelse

Kilde: [10]

Hvor store spenninger som oppstår, avhenger av størrelse og retning på kraft i tillegg til areal av kontaktflate. For krefter langs fiberretning bestemmes opptredende spenninger etter formel (2.19).  $A$  betegner areal av kontaktflate, bestemt av tannens høyde og bredde.  $F_{c,0}$  er trykkraft i tann.

$$\sigma_{c,0} = \frac{F_{c,0}}{A} \quad (2.19)$$

Tas kontaktflatens størrelse til betraktning, er det flere måter å utforme mekanisk trykkforbindelse. Forbindelse med flere små kontaktflater, reduserer trykkrefter på hver tann, men også arealet spenningen fordeler seg på. Eksempel på slik utforming er vist i figur 2.9. Ved slik utforming kan hele komponentens tverrsnitt utnyttes til å overføre krefter. Da kan kraftoverføring utføres med mindre dyp fortanning.



Figur 2.9: Fortannet forbindelse

Kilde: [10]

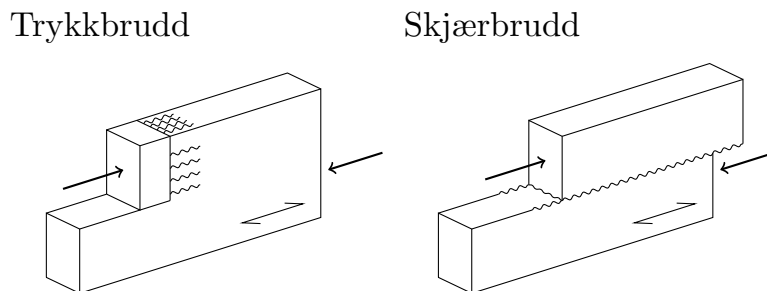
Dersom trykkapasitet overskrides, kan fiberknusing oppstå. Grosse beskriver denne bruddformen som kompleks ettersom knekkbånd kan oppstå, og at materialet fastner når det utsettes for relativt store aksialspenninger [12]. Overskridelse av elastisk kapasitet tilsvarer altså ikke brudd, men overgang til plastisk spenningsfordeling. Tilleggskapasitet for slik bruddform kan da påregnes.

Komponentens motstand mot trykkbrudd er gitt ved  $f_{c,0}$ . Kapasitetskontroll gjøres etter formel (2.20) [10]. Dersom kraft ikke går parallelt med fiberretning, erstattes  $\sigma_{c,0}$  og  $f_{c,0}$  med  $\sigma_{c,\alpha}$  og  $f_{c,\alpha}$ . Utfallet er redusert kapasitet, grunnet materialets anisotropi.

$$\frac{\sigma_{c,0}}{f_{c,0}} \leq 1 \quad (2.20)$$

#### 2.4.7 Kontaktkrefters effekt på opptredende spenninger

Kraftoverføring mellom komponenter forekommer i hovedsak som trykkrefter i fortanning. To aktuelle bruddmekanismer ved lokale trykkrefter er da skjærbrudd i underkant av tann, og trykkbrudd i tannen. Dette er et forskningsområde diskutert av blant annet Boccoadoro et al [4]. Dette delkapittelet baserer seg på denne forskningen. Figur 2.10 visualiserer nevnte bruddmekanismer.



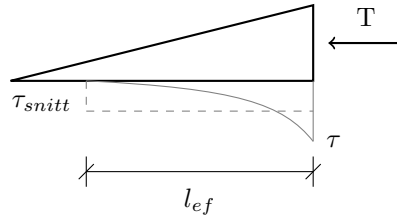
Figur 2.10: Skjærbrudd og trykkbrudd i fortanning

Kilde: [12]

Trykkrefter i tannforbindelse gir skjærspenninger i et horisontalt snitt mellom tann og resterende materiale. Overskrider spenning kapasitet, vil det oppstå skjærbrudd i denne flaten. Hvor stor flate som betraktes, har da betydning for skjærkapasitet. Dette er et omdiskutert område, sammenfattet av Boccoadoro et al. Hvor stor lengde spenning fordeles over,  $l_{ef}$  er det ulike forslag til. Foreslått er å definere  $l_{ef}$  som 8 eller 12 ganger tannens høyde, alternativ er å benytte hele tannlengden. [4]



Teoretisk skjærfordeling ved en slik fortanning, har maksverdi ved eksponert hjørne og avtar eksponentielt med økende avstand fra kontaktflate. Fordeling er markert ved  $\tau$  i figur 2.11. Som nevnt kan det benyttes en tilnærming hvor skjærspenninger fordeler seg over en gitt flate. Dette er i sammenheng med materialets delvis sprø oppførsel. Det påvirker fordeling av spenning, og da også forholdet mellom spenning og tøyning [4]. Ved dimensjonering for skjærspenning med denne tilnærmingen, tiltenkes det en konstant spenning,  $\tau_{snitt}$ .



Figur 2.11: Opphopning av skjærspenning ved tannhjørne

Boccardo et al framstiller forslag til framgangsmåte for å bestemme gjennomsnittlig spenning, gjengitt i formel (2.21). Spenning bestemmes da av trykkraft i kontaktflate,  $T$ , og effektiv skjærflate,  $l_{ef} * b$ .

$$\tau_{snitt} = \frac{T}{l_{ef}b} \quad (2.21)$$

Eksentrisitet mellom lastsenter for kontaktkrefter og bruddlinje medfører en vertikal last normalt på fiberretning,  $\sigma_{90}$ , i hjørne av tann. Formel (2.22) kan benyttes for å estimere slike spenninger. Hele tannens lengde ( $l_n$ ), høyde ( $t_N$ ) og bredde ( $b$ ) er da styrende for hvor store strekkspenninger kontaktkraften medfører.

$$\sigma_{90} = \frac{3t_N T}{l_n^2 b} \quad (2.22)$$

Om spenningen er strekk eller trykk, avhenger av rotasjonen kontaktkreftene medfører. Ved lastsituasjon som i figur 2.11, vil  $\sigma_{90}$  være strekk. Ved kombinasjon med skjærspenning, er strekkspenning ugunstig, mens trykkspenning gunstig.

For kontroll av slike spenninger alene kan formel basert på kapasitet for skjær,  $\tau_{snitt}$ , og aksialspenning normalt på fiberretning,  $\sigma_{90}$ , benyttes for å bestemme kapasitet. Slik kontroll kan gjøres etter formel (2.23). Dette er en omskriving av formel (2.9).

$$\tau_{snitt} \leq f_v \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{f_{c,90} + \sigma_{90}}{f_{c,90} + f_{t,90}}\right)^2}{1 - \left(\frac{f_{c,90}}{f_{c,90} + f_{t,90}}\right)^2}} \quad (2.23)$$

---

## 2.5 Beregningsmodell

Kapittel 5 i EC5 er grunnlag for konstruksjonsanalyse. Her defineres krav og anbefalinger for hva som bør ligge til grunn for modeller og analyser. Dette bygger oppunder kravene definert i NS-EN 1990 som presenterer generelle krav til beregningsmodell for konstruksjonsanalyser.

Her poengteres det at modellen som benyttes må, med tilstrekkelig nøyaktighet, kunne forutsi konstruksjonens oppførsel. Hvilken modell en benytter skal være tilpasset de grensetilstandene en ønsker å kontrollere. Benyttede modeller må være robust nok til å være tilstrekkelig nøyaktig når håndverksmessig utførelse og pålitelighet av informasjon legges til grunn.

Videre defineres det at konstruksjonens oppførsel i modell skal baseres på elastisk oppførsel når relevante lastvirkninger legges til grunn. Dersom duktilitet i relevante forbindelser er tilstrekkelig, kan det åpnes for plastisk kraftfordeling og da beregne indre krefter ved elastisk-plastisk beregningsmetode. Dette vil være aktuelt for komponenter i trykk.

## 2.6 FEM-modell

Ved modellering og numeriske beregning av den fortannede bjelken, ble programmet ABAQUS tatt i bruk. Det finnes ulike produkter av ABAQUS til ulik bruk. I denne oppgaven brukes ABAQUS CAE (Komplett ABAQUS-miljø), som er en pakke med et grensesnitt laget for å modellere, beregne og evaluere resultater. Programmet er basert på FEM (Finite Element Method), som vil si at modellen er en sammensetning av et bestemt antall elementer og frihetsgrader. Delkapittel 4.3 beskriver mer om hvilke elementtyper som brukes i denne oppgaven. [24]

I ABAQUS er det ikke et definert enhetssystem, som gjør at en må være oppmerksom på hvilke enheter som benyttes som utgangspunkt. For at resultatene skal være riktig, må forholdene mellom enhetene stemme overens. I denne oppgaven brukes enhetene som er vist i tabell 2.4. Data som blir hentet fra beregninger i ABAQUS vil dermed være oppgitt med en av disse enhetene.

| Størrelse | SI-enheter              |
|-----------|-------------------------|
| Masse     | Tonn                    |
| Lengde    | mm                      |
| Tid       | S                       |
| Spenning  | MPa = N/mm <sup>2</sup> |

Tabell 2.4: Enhetssystem

I ABAQUS brukes python som programmeringsspråk. Det vil si at hver handling som blir gjort i grensesnittet aktiverer en bestemt python-kode. Kodene blir loggført i en egen fil som gjør det mulig å spore hvilke kommandoer som tidligere er utført. Siden hver kommando har en tilhørende python-kode, er det mulig å utføre en rekke kommandoer ved å kjøre et eksternt skript. Et slikt skript er med på å gjøre modellering og innhenting av data mer effektivt, og åpner muligheten til å utføre parametriske modelleringer.

---

### 3 Eksperimentell data fra labforsøk

Rennebu-Bjelken AS har, i samarbeid med Norsk Treteknisk Institutt, gjennomført mekanisk testing av forspente limtrebjelker (GL30c), med tannet forbindelse i Rennebu-Bjelken AS sine lokaler. Her ble 29 bjelker med tilsvarende geometriske egenskaper og lastsituasjon testet til brudd. Geometri er vist i tabell 3.1. Endelig overhøyde etter oppspenning ble målt, definert  $d_1$ . Deretter ble det gjennomført en testlast på omtrent 3800 kg, tilsvarende 60 % av bruddlast. Nedbøyning fra endelig overhøyde ble målt,  $d_T$ . Bjelkene ble deretter belastet frem til 0 mm overhøyde og last registrert,  $P_2$ . Til slutt ble bjelkene belastet frem til brudd ved bruddlast,  $P_b$ . Siden lasten ble påført manuelt og lastpåføring måtte pauses for å registrere last og deformasjon, er de fleste reelle bruddlastene noe høyere enn den registrerte.

| L       | B     | H      |
|---------|-------|--------|
| 6480 mm | 90 mm | 342 mm |

Tabell 3.1: Geometri ved labforsøk

Det ble gjennomført kontroll av veieceller som ble brukt ved labforsøkene, i samarbeid med NTNU. Her ble kalibrerte veieceller brukt til å sammenligne resultater med veieceller hos Rennebu-Bjelken AS. Justering av registrerte resultater var nødvendig for å øke nøyaktighet.

Tabell 3.2 viser en oppsummering fra de 29 labforsøkene som ble gjennomført, justert etter kontroll av veieceller. Her ekskluderes målinger fra bjelker hvor det ble registrert grove materialfeil. Tabellen viser snittverdi fra forsøk, i tillegg til høyeste og laveste verdi, sammen med beregnet standardavvik.

Typisk registrerte materialfeil var dårlig liming mellom lameller og kvister ved fingerskjøt. Ettersom det er krav til kontroll for slike svakheter, er dette er feil som unngås under vanlig produksjon.

Resultater presentert her vil brukes til sammenligning med utarbeidet FEM-modell.

|               | Endelig overhøyde<br>$d_1$ [mm] | Tilbake til 0 overhøyde<br>$P_2$ [kg] [korrigert] | Korrigert bruddlast<br>$P_b$ [kg] |
|---------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Gjennomsnitt  | 53.4                            | 3970                                              | 5915                              |
| Lavest verdi  | 50.6                            | 3760                                              | 4628                              |
| Høyest verdi  | 57.6                            | 4300                                              | 7572                              |
| Standardavvik | 1.9                             | 157                                               | 682                               |

Tabell 3.2: Oppsummering av resultater fra labforsøk

---

## 4 Modellutvikling

Dette kapittelet tar for seg hvordan modellering av fortannet bjelke er gjennomført ved bruk av FEM-programmet ABAQUS og python-skript. Det beskriver hvordan skriptet er utarbeidet for å tilrettelegge for parametrisk modellering. For å sikre en stabil og troverdig modell, er det gjennomført konvergenstudie og sensitivitetsanalyse.

### 4.1 Parametrisk modellering

Manuell modellering av FEM-modell er omfattende og lite fleksibelt når det kommer til endring av geometri. Det ble dermed utarbeidet et python-skript som genererer modell med forhåndsdefinerte parametere i ABAQUS.

Parametrisk modellering, sammenlignet med manuell modellering, gir redusert tidsbruk og sikrer konsistent modellering. Skriptet muliggjør flere etterfølgende modelleringer og beregninger i samme gjennomgang.

Nedenfor beskrives ulike parametere som er aktuelle å endre underveis.

#### 4.1.1 Geometri

Aktuelle geometriske parametere er vist i figur 4.1. Visuell framstilling av parameterene er å finne i figur 4.2 og 4.3.

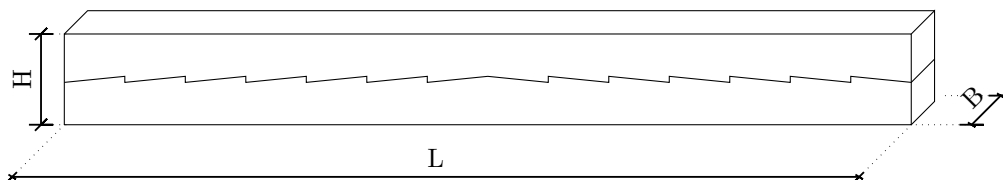
```
32 #-Geometri
33 L = 6400.0 #Lengde, mm
34 H = 342.0 #Hoyde, mm
35 B = 90.0 #Bredde, mm
36 c = 200.0 #Tannlengde, mm
37 d = 20.0 #Tannhoyde, mm
38 hpar = 0.5 #Plassering av fortanning i hoyden, z/H
39 ang = 0.0 #Vinkel paa tann, alpha
```

Figur 4.1: Parametere for å styre geometri

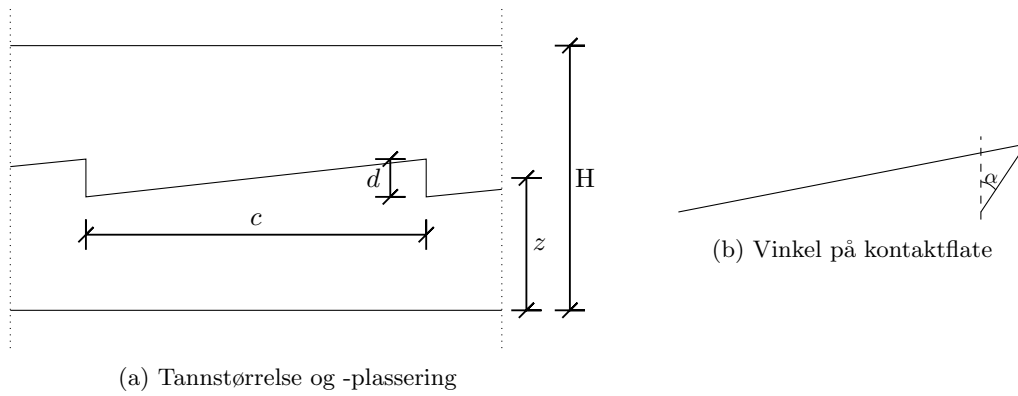
Antall tenner,  $n$  bestemmes av forholdet mellom bjelkelengde og tannlengde, og rundes ned til nærmeste partall.

$$n = \frac{L}{c}$$

Resterende lengder,  $s$ , fordeles i hver ende av bjelke, som vannrette flater uten tenner. Normalt brukes lengde på bjelke og tenner for å unngå slike resterende lengder. I skriptet er  $hpar$  definert som  $z/H$  og beskriver fortanningens plassering i bjelkehøyden. Figur 4.3b viser positiv vinkel på kontaktflate,  $\alpha$ , som i skriptet er definert som  $ang$ .



Figur 4.2: Bjelkegeometri

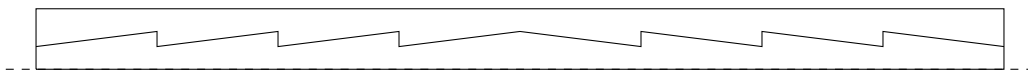


Figur 4.3: Tanngeometri

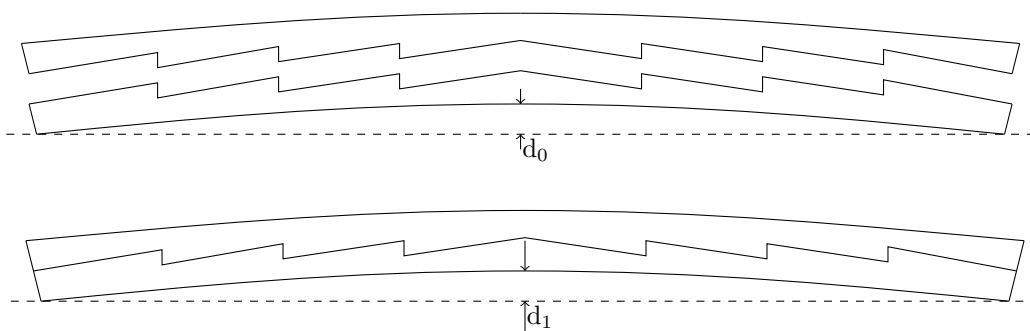
Med utgangspunkt i geometriske parametere beregnes koordinater som definerer bjelkens geometri i 2D-plan. Mellom koordinatene tegnes linjer som utformer bjelkens to komponenter. I FEM-modellen er komponentene definert i hver sin *part*.

### Forenkling av geometri

I modell er det tilsvarende tanndimensjoner på øvre og nedre komponent. Det gjør at bjelken fungerer som et samvirke [allerede] ved null overhøyde, vist i figur 4.4. Den reelle bjelken har, derimot, varierende tanndimensjoner som gjør at den fungerer som et samvirke etter den er oppspent til en viss overhøyde,  $d_0$ , vist i figur 4.5. I en ubelastet situasjon vil den reelle bjelken ha overhøyde,  $d_1$ , mens i modellen er bjelken rett. Forskjellen gjør at nedbøyning og spenninger i utgangspunktet vil avvike noe i modell, sammenlignet med reelle bjelken. Tas relaksasjon i betraktning (diskutert i delkapittel 2.1) antas det at spenningene i oppspent tilstand er relativt lave og at avvikene ikke blir særlig betydelige. Forenklingen av geometri gjør prosessen ved modellering mindre omfattende.



Figur 4.4: Samvirke i FEM-modell



Figur 4.5: Samvirke i reell bjelke

#### 4.1.2 Last og grensebetingelser

Aktuelle laster i modell er bjelkens egenlast og påsatte punktlaster på topp av bjelke. Dette er for å kunne etterligne lastsituasjon som er brukt ved labforsøk, både for plassering og styrke. Parametere for å styre lastsituasjon er vist i figur 4.6. Verdien  $F_{Press}$ , tilsier total last fordelt på punktlastene. For å unngå høy konsentrasjon av spenninger i utsatte noder ved lastpåføringspunkt, blir punktlaster fordelt over en liten bredde, som kan justeres i skriptet.

Plasseringen av punktlaster bestemmes ut ifra en liste med parametere som definerer posisjon av senter av lastareal, i forhold til bjelkens lengde. Listen er vist i figur 4.6, definert  $posF$ . Listen avgjør også hvor mange lastpunkter det skal være, avhengig av antall parametere.

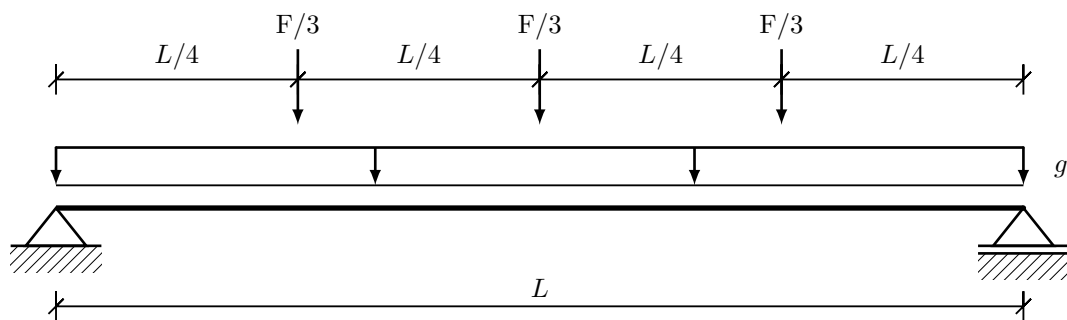
Bjelkens egenlast legges inn med enheten  $\text{kg}/\text{m}^3$  og omgjøres til  $\text{N}/\text{mm}^3$ , ved relasjonen  $1.0 \text{ kg} = 9.81 \text{ N}$ .

Bjelken er fritt opplagt med mulighet til å bestemme om én eller begge ender skal fastholdes i lengderetning. Det er også mulig å justere bredde på opplagerflate. Dersom den settes lik null, vil kun hjørner fastholdes. Dersom fastholdingen er bestemt på en bredde ( $sl$ ) vil det gi delvis fastholding mot rotasjon i oppleggene. Det kommer av at bredden gir en eksentrisitet ved fastholding i høyderetning. Denne virkningen er ikke realistisk. Dermed benyttes hovedsakelig fastholding kun i hjørnene.

```
41  #-Last
42  FPress = 40.0          #Laststorrelse (TOTAL), kN
43  l1 = 50.0             #Lastbredde, mm
44  posF = [0.25,0.50,0.75] #Senterposisjon for punktlaster, parametere x/L
45
46  #-Egenvekt
47  gkWood = 450.0       #kg/m^3
48
49  gdWood = gkWood*9.81/10e9
50
51  #-Opplager
52  sl = 0.0              #Opplager-bredde, mm
53  SupR_X=False         #False:Glidelager True:Fastholdt i x-retning.
```

Figur 4.6: Parametere for å styre lastsituasjon

Ved lastplassering ( $posF$ ) og glidelager i høyre opplegg ( $supR_X$ ) som i figur 4.6, vil lastsituasjon bli som skissert i figur 4.7.



Figur 4.7: Lastoppsett

---

### 4.1.3 Materialegenskaper

Modellens materialegenskaper er satt til ortotropisk med elastisitetsmodulene  $E_L$ ,  $E_R$  og  $E_T$ , og skjærmodulene  $G_{RT}$ ,  $G_{LT}$  og  $G_{LR}$ . Tangentielle og radielle stivheter settes lik hverandre ( $E_T = E_R$ ,  $G_{LR} = G_{LT}$ ). Materialegenskaper tilegnet modell er vist i figur 4.8.

Orienteringen av fiberretning settes i utgangspunktet parallelt med bjelkelengde, med mulighet for justering.

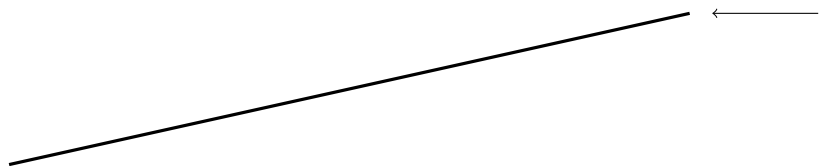
```
269 #-Lastegenskaper
270 Grt=70.0
271 Glt=1200.0
272 Glr=Glt
273 Er=700.0
274 Et=Er
275 El=12000
276
277 WOODMAT=MODEL.Material(name='WoodMat')
278 WOODMAT.Density(table=((7.5e-10, ), ))
279
280 WOODMAT.Elastic(table=((El, Er, Et, 0., 0., 0., Glr, Glt, Grt), ), type=
ENGINEERING_CONSTANTS)
```

Figur 4.8: Parametere for å styre materialegenskaper

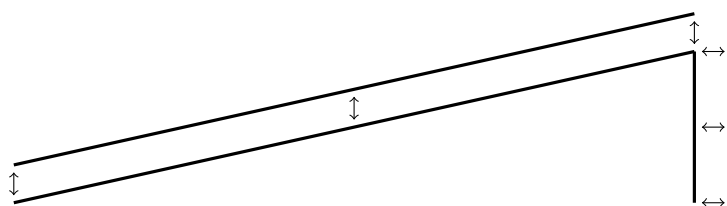
### 4.1.4 Interaksjonsegenskaper

For at bjelkekomponenter skal kunne føre krefter mellom hverandre, er det nødvendig å tilegne interaksjon. Mellom komponentene overføres det i realiteten spenninger på to måter; trykk i normal retning og friksjon i tangentiell retning. For å oppnå slik interaksjon i ABAQUS, benyttes diskontinuerlig grensebetingelse mellom kontaktflatene, definert som *surface-to-surface contact*. Den er diskontinuerlig ettersom den kun er aktivert når det er en fysisk kontakt mellom flatene. Grensebetingelse deaktiveres dersom det ikke er kontakt. For å etterligne bjelkens realistiske oppførsel, brukes funksjonen kalt *allow separation after contact*. Denne funksjonen gjør at det ikke overføres strekkspenninger mellom flatene, og kontaktflatene kan separeres etter kontakt. [25]

I hvert hjørne av tenner hvor to kontaktflater møtes, vil det være problematisk tilknyttet interaksjon. En infinitesimal del av topp av tann vil påvirkes av kontaktspenning fra vertikale side av motsatt komponent. Problematikk er vist i figur 4.9. For å håndtere dette, separeres kontaktflatene, slik at kun de tilhørende flatene fra hver komponent har interaksjon mellom hverandre, vist i figur 4.10. Det medfører økt modelleringstid, men misvisende kontaktspenningsdata unngås.



Figur 4.9: Problematisk interaksjon

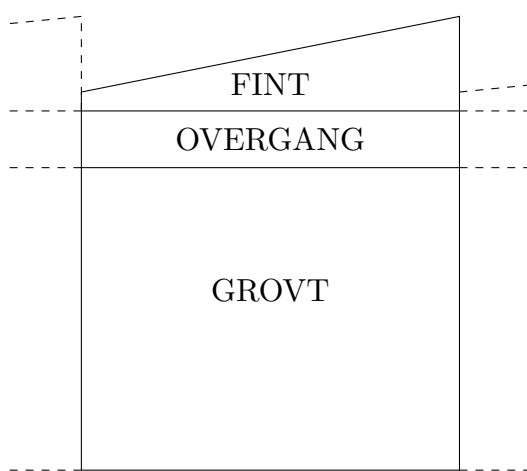


Figur 4.10: Separat interaksjon

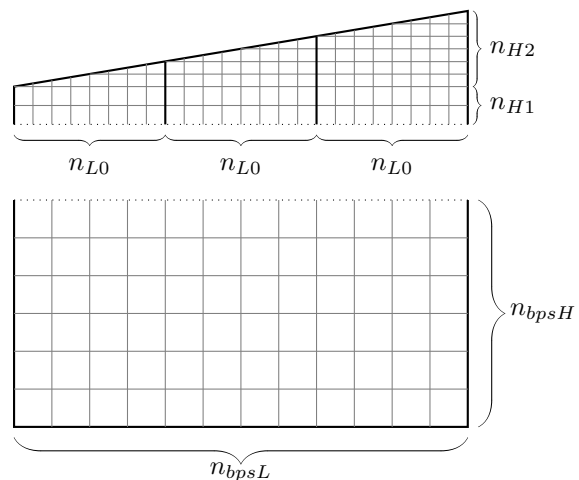
#### 4.1.5 Mesh

Mesh-struktur er bestemt for å gi gunstige og realistiske resultater ved områder av interesse. De aktuelle områdene er hvor det antas å ha kritiske spenninger. Det vil si langs over- og underside av bjelke, langs tverrsnitt i midt av bjelke og ved kontaktflater i fortanning. I tillegg er det aktuelt å se på spenninger like over og under fortanning. Skriptet er utformet slik at mesh-struktur kan forfines i nevnte områder.

For å danne et konsistent mesh, deles bjelken inn i mindre deler. Bjelken deles opp i lengden, med intervall tilsvarende tannlengde. Deretter deles hver av delene på en tannlengde inn i tre soner. Dette er visualisert i figur 4.11. De tre sonene har ulike bestemmelser for mesh-struktur, hvor øverste og nederste sone skal sikre rette elementer. Inndelingen medfører store elementer i grov sone, og finere elementer i fin sone. I denne sonen er det ønskelig med mange små elementer ettersom det er nødvendig å få en detaljert oversikt over spenningsfordelingen i fortanningsområdet. Overgangssonen er nødvendig for å muliggjøre et ulikt antall elementer i lengderetning for grov og fin sone. I figur 4.12 presenteres eksempel på hvordan mesh kan se ut i fin og grov sone.



Figur 4.11: Mesh-soner



Figur 4.12: Eksempel på mesh-struktur

Det er lagt til rette for å endre antall noder langs de ulike inndelingene av soner. Antall noder avgjør antall og størrelse på elementer. Parameterene bestemmes i skriptet, presentert i figur 4.13. Ved dette eksempelet er  $n_{L0} = 8$ ,  $n_{H1} = 2$ ,  $n_{H2} = 6$ ,  $n_{bpsH} = 6$  og  $n_{bpsL} = 12$ . Betydning av de ulike mesh-parametrene presenteres i tabell 4.1.

```

57     n_H1=2                # antall elementer i hoyden under fortanning
58     n_H2=8                # antall elementer i hoyden av tann
59     n_dH=3                # |n_dH > n_H2/(len(teethPartitions)-1)|
60     n_L0=max(int(3/200*c),3) # antall elementer i hver tanninndeling
61
62     teethPartitions=[0.25,0.375,0.5,0.625,0.75] # Parametere for inndelinger paa
63     tannlengden (min 5 i liste)
64     n_bpsL=max(int(18/200*c),18) # Antall elementer horisontalt i den grove
65     delen
66     n_bpsH_U=int(36*(1-hpar)) # Antall elementer vertikalt i den grove delen,
67     overdel
68     n_bpsH_L=int(36*hpar) # Antall elementer vertikalt i den grove delen,
69     underdel
70     meshsize=50.0 # mm
71     m_under=10 # Lengde fra tannhjerne til overgangssone
72     d_m_under=40 # Hoyde paa overgangssone

```

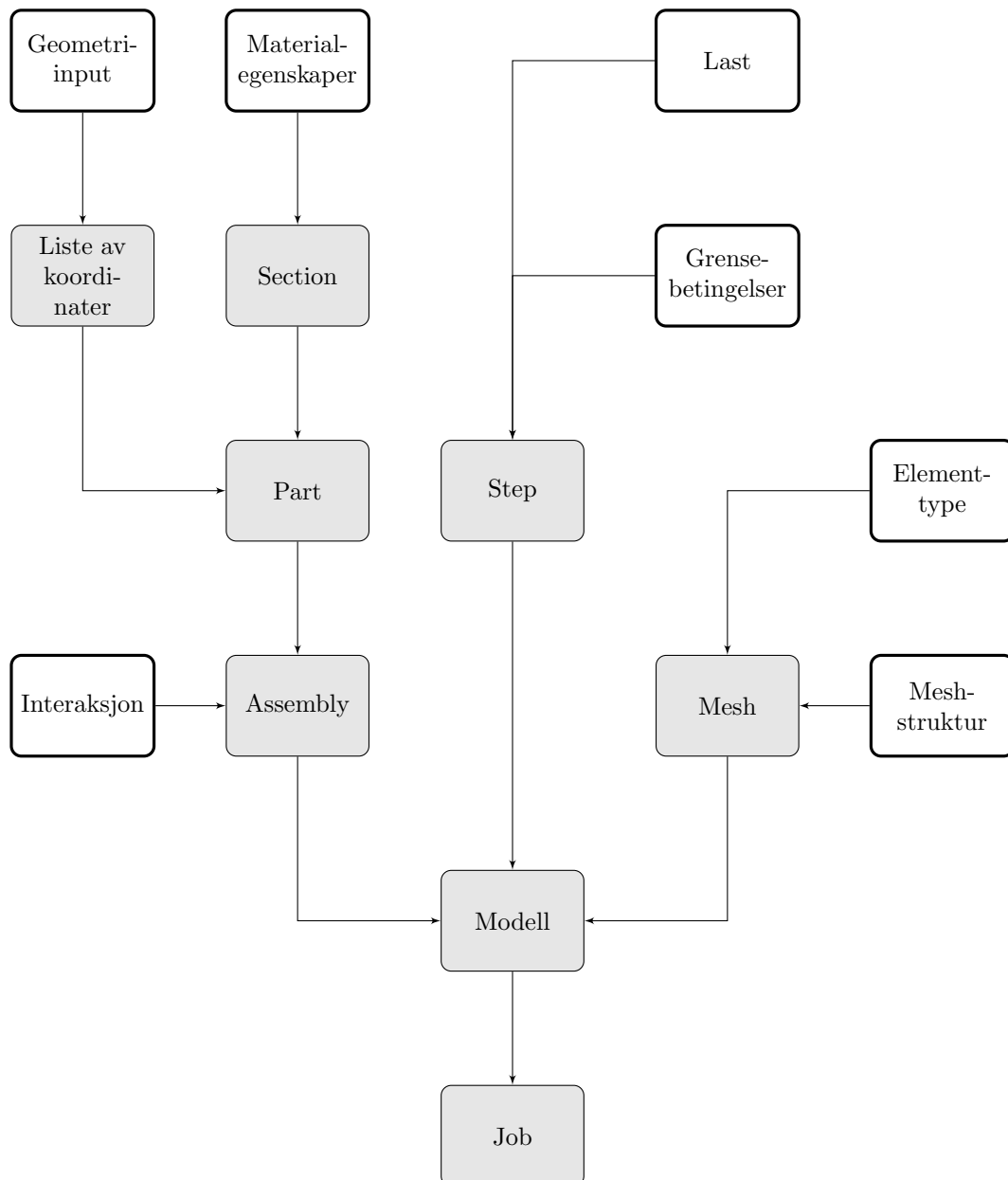
Figur 4.13: Parametere for å styre mesh-struktur



| Parametere | Beskrivelse                                          |
|------------|------------------------------------------------------|
| $n_{H1}$   | Antall elementer i høyden, under fortanning          |
| $n_{H2}$   | Antall elementer i høyden, over fortanning           |
| $n_{L0}$   | Antall elementer i hver tanninndeling                |
| $n_{bpsL}$ | Antall elementer horisontalt i den grove inndelingen |
| $n_{bpsH}$ | Antall elementer vertikalt i den grove inndelingen   |

Tabell 4.1: Mesh-parametere

ABAQUS produserer en fullstendig modell ved hjelp av skriptet og parameterene presentert. Oppbygning av modell beskrives ved hjelp av modelltre, vist i figur 4.14. Hvite bokser er egenskaper hvor det er tilrettelagt for endring i skriptet. Ut ifra den fullstendige modellen kan ABAQUS prosessere en "Job" som, etter en beregningsprosess, resulterer i en resultatfil (odb-fil).



Figur 4.14: Modelltre

---

#### 4.1.6 Dataeksportering

Etter beregninger i ABAQUS er gjennomført, kjøres et skript som er laget for å registrere og lagre aktuelle data fra resultatfil. Skriptet lagrer data i et individuelt tekstdokument for hver "Job" som gjennomføres. Data registreres på to ulike måter, basert på hvor fra og hvordan det er hensiktsmessig å hente data. Det kan enten være fra en sti eller direkte fra node-verdier.

En sti er definert som en linje mellom bestemte noder. Dette brukes som regel når en skal visualisere fordeling av spenning eller forskyvning. Funksjonen *Include intersections* benyttes for å skape sti mellom to noder. Ved bruk av denne funksjonen samles data fra samtlige noder stien går gjennom. Det gjør det nødvendig å tilpasse mesh, for å skape rette linjer med noder hvor spenninger skal hentes ut. Det er presentert i delkapittel 4.1.5.

Alternativ måte å samle resultater på er å hente ut spesifikke node-data. Denne måten å hente resultater på blir brukt for kontaktspenninger.

Tabell 4.2 viser hvilke data som lagres og hvilken metode som benyttes for å hente data. Dette presenteres sammen med notasjoner som brukes i ABAQUS og de som brukes i denne oppgaven. Nedbøyning er definert med benevning mm, mens resten er definert som spenning med benevning MPa.

| Resultater                                            | Metode     | Notasjon          |
|-------------------------------------------------------|------------|-------------------|
| Nedbøyning                                            | Sti        | U2 $d$            |
| Aksialspenning langs underkant av bjelke              | Sti        | S11 $\sigma_0$    |
| Aksialspenning langs overkant av bjelke               | Sti        | S11 $\sigma_0$    |
| Aksialspenning i tverrsnitt                           | Sti        | S11 $\sigma_0$    |
| Kontaktspenning                                       | Node-verdi | CPRESS $\sigma_c$ |
| Skjærspenning i tverrsnitt                            | Sti        | S12 $\tau$        |
| Skjærspenning over og under fortanning                | Sti        | S12 $\tau$        |
| Aksialspenning normalt på fiberretning ved fortanning | Sti        | S22 $\sigma_{90}$ |

Tabell 4.2: Eksporterte resultater

CPRESS er definert i ABAQUS som absoluttverdi til normalspenning i kontaktflate. Den gir altså samme fortegn for kontaktspenning ved både trykk og strekk. Siden interaksjonsegenskaper kun er definert som trykk-kontakt (etablert i delkapittel 4.1.4), representerer alle verdier for CPRESS i denne modellen trykk. [24]

## 4.2 3D- vs 2D-modell

Målet i dette delkapittelet er å undersøke om en 2D-modell gir tilsvarende resultater som en 3D-modell med tilsvarende geometri og lastsituasjon. Bjelkens geometri er konstant gjennom bredden. Ved aktuell geometri og lastsituasjon vil det da være konstant spenning langs bjelkebredde. Det argumenteres for at modellering i 2D er tilstrekkelig. En konvergenstudie gjennomføres for 2D- og 3D-modell, hvor resultater fra nedbøyning og bøyenspenning sammenlignes.

Formål med studien er å kunne verifisere at framtidige beregninger kan baseres på 2D- framfor 3D-modell. Bakgrunnen for dette er å redusere beregningstid (CPU-tid). 2D-modell vil også være mer fleksibel for geometriske endringer.

Ettersom formålet med studie er å sammenligne oppførsel mellom 2D- og 3D-modell, benyttes standard mesh-generator i ABAQUS. Modellen blir ikke like presis som ved strukturert mesh, men oppførsel av elementtyper etableres.

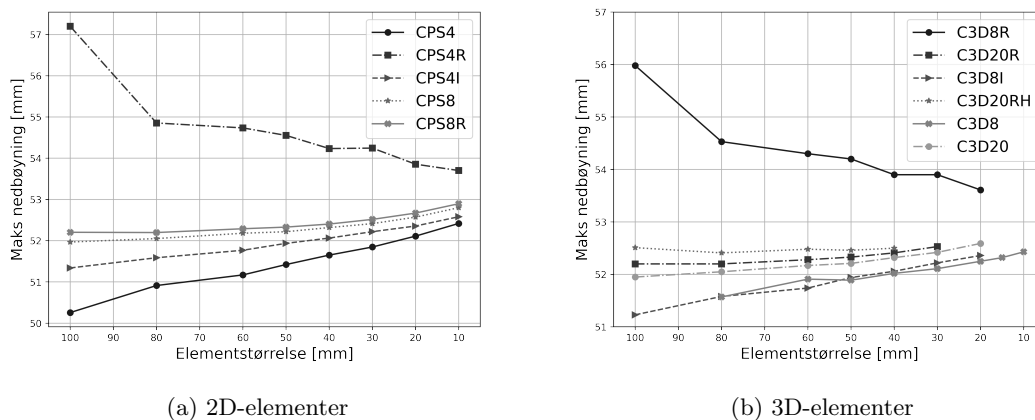
Relevante elementtyper for studien er lineære og kvadratiske elementer, både for 2D- og 3D-elementer. I tillegg inkluderes det varianter av elementer med redusert integrasjon (R) og inkompatible noder (I). For 3D-elementer inkluderes også hybrid-elementet C3D20RH. I tabell 4.3 framstilles benyttede elementtyper.

|            |              | 2D    | 3D      |
|------------|--------------|-------|---------|
| Lineær     | Generell     | CPS4  | C3D8    |
|            | Redusert     | CPS4R | C3D8R   |
|            | Inkompatibel | CPS4I | C3D8I   |
| Kvadratisk | Generell     | CPS8  | C3D20   |
|            | Redusert     | CPS8R | C3D20R  |
|            | Hybrid       |       | C3D20RH |

Tabell 4.3: Elementtyper i 2D- og 3D-modell

### Nedbøyning

Nedbøyning for 2D-elementer, vist i figur 4.15a, har en felles trend for samtlige elementer, bortsett fra det reduserte, lineære elementet, CPS4R. Dette skyldes at elementet er utsatt for *hourglass*-effekt, som medfører instabilitet i mesh-struktur og gjør elementet lite effektivt for bøyning. Tilsvarende framstilling for 3D-elementer presenteres i figur 4.15b. Også her skiller det reduserte lineære elementet seg ut, mens resterende elementer følger en felles trend med tilnærmet like verdier som for 2D. [26]

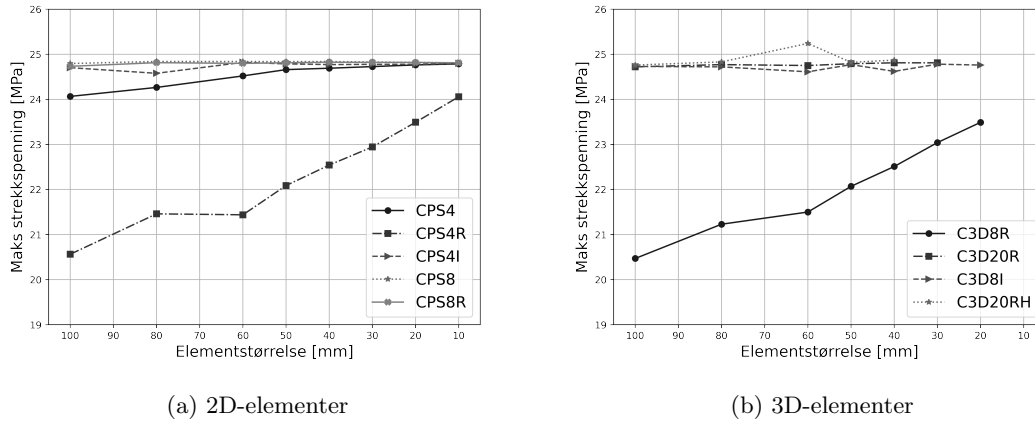


Figur 4.15: Konvergenkurver for nedbøyning

---

## Bøyespenning

Som nevnt, er de reduserte elementene CPS4R og C3D8R lite effektive ved bøyningssituasjoner. Dette gjenspeiles også ved bøyespenninger for både 2D- og 3D-modell, som vist i henholdsvis figur 4.16a og 4.16b. Her ser en på strekkspenninger i underkant av bjelke.



Figur 4.16: Konvergenskurver for bøyespenning

Ut ifra konvergensstudiene framkommer det at 2D- og 3D-modell gir tilsvarende resultater. Lineære, reduserte elementer (CPS4R og C3D8R) gir lavere nøyaktighet, sammenlignet med andre elementtyper. Resterende elementtyper gir samsvarende resultater.

Resultatene indikerer ikke tydelig konvergens for nedbøyning, men antydning på at 2D- og 3D-modell samsvarer. Mangel på konvergens kan komme av at antall elementer ikke er tilstrekkelig og at mesh-struktur ikke er optimalisert. Et nærmere konvergensstudie vil gjennomføres med egendefinert mesh-struktur.

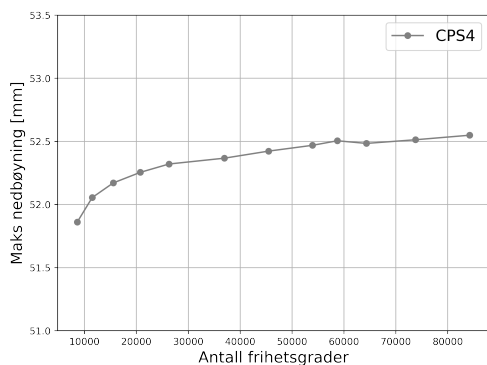
Det konkluderes at 2D-modell kan tas i bruk som referanse i videre arbeid. Dette gir redusert CPU-tid og høyere fleksibilitet sammenlignet med 3D-modell.

### 4.3 Konvergenstudie

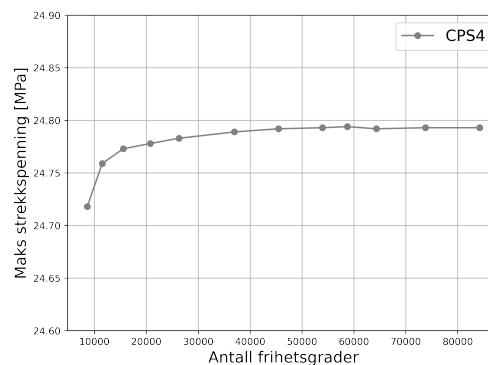
Det er gjennomført en konvergenstudie for en 2D-modell, hovedsakelig bestående av lineære 4-noders elementer (CPS4). Det er også brukt lineære 3-noders elementer (CPS3) i overgang mellom grovt og fint mesh, som forklart i kapittel 4.1.5. Elementene som brukes er “plan spenning”-elementer og har to frihetsgrader i hver node. Lineære elementer er utvalgt for å få en reell representasjon av kontaktspenning i fortanning. Det er vist i delkapittel 4.2 at lineære elementer gir konvergens for bjelkebøyning.

“Plan spenning”-elementer brukes som regel når modellens tykkelse er relativt liten, sammenlignet med dimensjoner i planet. Ved denne typen element, er normalspenninger og skjærspenninger ut av planet lik null. Elementtypen er passende ettersom det er tøyninger og spenninger i planet som er av interesse. De lineære elementene er første ordens elementer, som vil si at de representerer lineær variasjon av spenning og tøyning over hvert element. Derfor er det nødvendig å ha tilstrekkelig antall elementer i høyden for å kunne beskrive bøyning av bjelken nøyaktig. [27]

Med økende antall frihetsgrader og følgende økning av nøyaktighet, viser figur 4.17a maksimal nedbøyning av bjelke. Denne viser konvergens ved rundt 60 000 frihetsgrader. Med tilsvarende antall frihetsgrader konvergerer resultatet for bøyenspenninger, vist figur 4.17b.



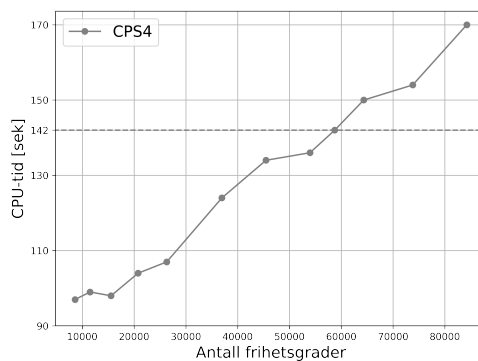
(a) Nedbøyning



(b) Strekkspenning

Figur 4.17: Konvergenkurver med CPS4-elementer

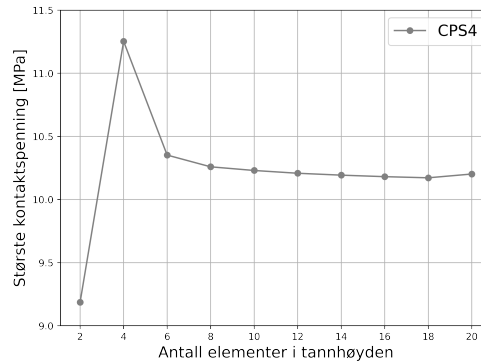
Det viser seg at dette antallet frihetsgrader medfører totalt 28 252 elementer og CPU-tiden i det tilfellet er 142 sekunder. Dette presenteres i figur 4.18. CPU-tid inkluderer også tiden det tar å generere modellen med mesh i ABAQUS.



Figur 4.18: Konvergenkurve, CPU-tid

Det er videre gjort studie på konvergering av kontaktspenninger i vertikal del av hver tann. Det studeres hvor mange elementer som er nødvendig å ha i høyde av tann. Dette er presentert i vedlegg A. Fordelingen av kontaktspenning viser at noder nær tannhjørner er problematiske og verdi vil øke ved økende antall elementer i høyden. Som visualisert, vil spenningsfordeling i høyden være konstant, bortsett fra divergerende verdier nær singulære punkter. Ved økende antall elementer i høyden, blir den konstante delen i økende grad dominerende og konvergerer mot en verdi. Resultater tilsier altså konstant spenningsfordeling av kontaktkrefter i vertikal flate. For å presentere data uten singularitetspåvirkning, bestemmes kontaktspenninger som et gjennomsnitt av de tre midterste nodene i tannhøyden.

Graf 4.19 viser resultater for kontaktspenning ved økende antall elementer i tannhøyden. Verdi for kontaktspenninger konvergerer ved åtte eller flere elementer i høyden. Det tilsier når  $n_{H1}$  og  $n_{H2}$  tilsammen er minst åtte.



Figur 4.19: Konvergen skurve for kontaktspenninger

Resultat fra gjennomførte konvergen studier gir mesh-struktur med parameterene som er vist i tabell 4.4. Mesh-strukturen er tilpasset referansegeometri fra labforsøk og vil ikke være optimal for alle geometrier. Dermed tilrettelegges det for å justere elementantall i ulike fordelinger for geometri som avviker for referansegeometri. Dette ble vist i figur 4.13 under delkapittel 4.1.5.

CPS4 benyttes som elementtype, basert på delkapittel 4.2 og resonnement presentert i dette delkapittelet. Antall elementer i høyden,  $n_{H1} + n_{H2}$  bestemmes basert på figur 4.19, og resterende mesh-parametere er basert på figur 4.17 og generelle studier for å sikre konvergen av relevante spenninger.

| Mesh-parametere |          |          |          |            |            |
|-----------------|----------|----------|----------|------------|------------|
| Elementtype     | $n_{H1}$ | $n_{H2}$ | $n_{L0}$ | $n_{bpsL}$ | $n_{bpsH}$ |
| CPS4            | 2        | 8        | 3        | 18         | 18         |

Tabell 4.4: Parametere for mesh-struktur

---

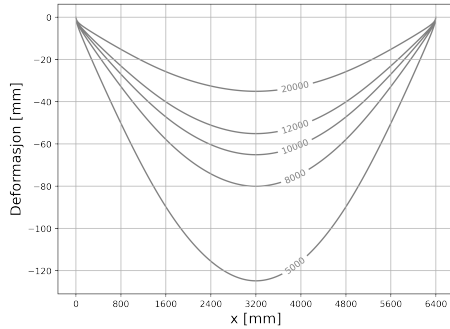
## 4.4 Sensitivitetsanalyse

Dette delkapittelet tar for seg analyse av hvordan endring av ulike materialparametere vil påvirke modellens oppførsel. Det skal studeres hvordan deformasjon, bøyespenning, kontaktspenning og skjærspenning påvirkes av materialparameterene listet nedenfor. Maksimale spenninger er av interesse, sammen med spenningsfordelinger. Det vil senere diskuteres singulære punkters påvirkning på skjærspenninger, så for denne spenningsformen er fordeling av større interesse enn maksverdi.

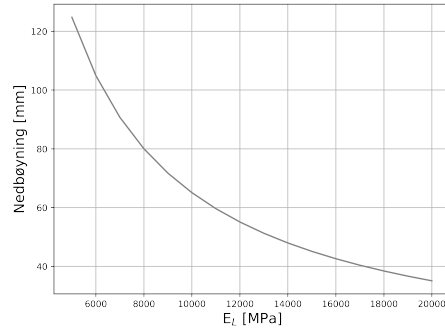
- E-modul langs fiberretning,  $E_L$
- E-modul i radiell og tangentiell stivhet,  $E_R$  og  $E_T$
- Skjærmoduler,  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  og  $G_{RT}$
- Friksjonskoeffisient,  $\mu$
- Tverrkontraksjon,  $\nu$

## E-modul langs fiberretning, $E_L$

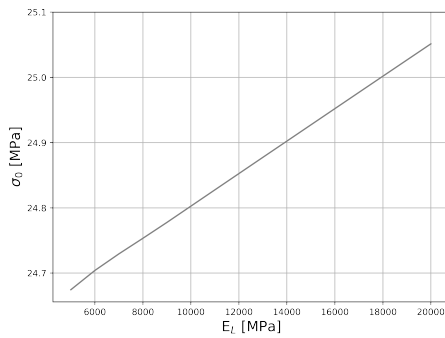
$E_L$  undersøkes for verdier mellom 5000 og 20000 MPa, med intervall på 1000 MPa. Som figur 4.20 viser, påvirker bjelkens langsgående stivhet både spenninger og deformasjon. Høy  $E_L$  tilsier stiv bjelke med lite nedbøyning, som vist i figur 4.20a og 4.20b. Bøyenspenninger øker lineært med økende  $E_L$ . For kontaktspenninger, vist i figur 4.20d, framkommer det noe økning for tenner, utenom tann 1, men betydning kan ansees som minimal. For skjærspenninger under tann vil påvirkning av E-modul presenteres i figur 4.20e.



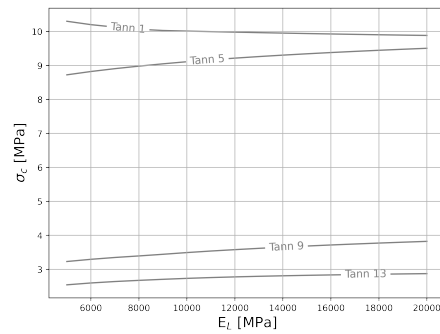
(a) Nedbøyningskurve



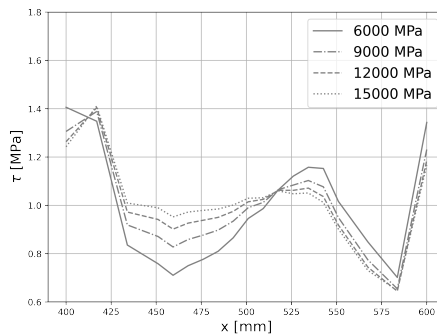
(b) Maksimal nedbøyning



(c) Maksimal bøyenspenning



(d) Kontaktspenninger i tenner



(e) Skjærspenning 5 mm under tann 3

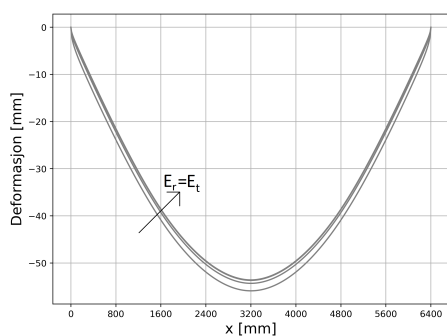
Figur 4.20: Resultater med varierende  $E_L$



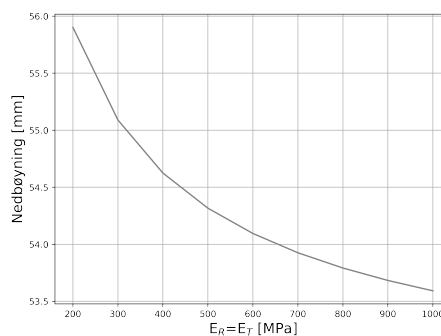
## E-modul i radiell og tangentiell retning, $E_R = E_T$

I modell legges det ikke opp til tverrkontraksjoner, så tverrkontraksjonsfaktor,  $\nu$ , settes lik null. Det medfører at radiell og tangentiell stivhet settes lik hverandre. Dermed endres nevnte stivheter sammen med tilsvarende verdi. Det er gjort beregninger med verdier mellom 100 og 1000 MPa, med intervaller på 100 MPa. Resultater for dette er vist i figur 4.21.

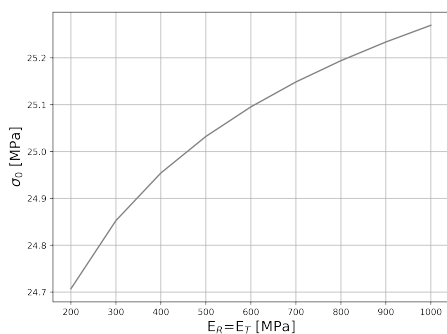
Tilsvarende som for lengderetningens stivhet, vil økt verdi av radiell og tangentiell stivhet medføre redusert deformasjon. Samtidig framkommer det at effekten er betydelig mindre enn for stivhet i lengderetning. Videre vil også maksimale bøyespenninger økes noe med økende stivhet. Tilsvarende som ved endring av  $E_L$ , vil betydning for kontaktspenninger ikke være stor, men det framkommer motsatt utvikling ved å øke nevnte stivheter. Kontaktspenninger i tann 1 øker, mens de resterende reduseres. For skjærspenninger under tann vil påvirkning av radiell og tangentiell E-modul være motsatt enn for lengderetning.



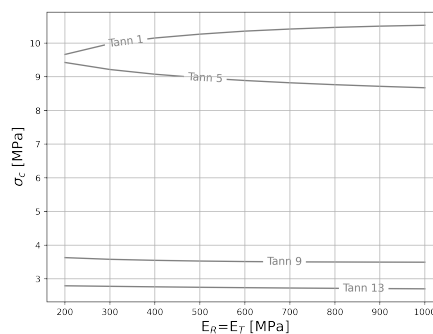
(a) Nedbøyningskurve



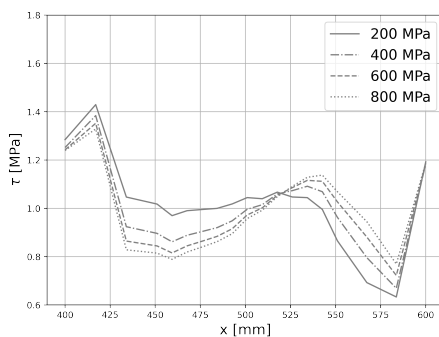
(b) Maksimal nedbøyning



(c) Maksimal bøyespenning



(d) Kontaktspenninger i tenner



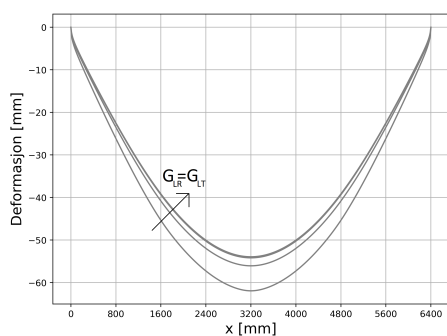
(e) Skjærspenning 5 mm under tann 3

Figur 4.21: Resultater med varierende  $E_R$  &  $E_T$

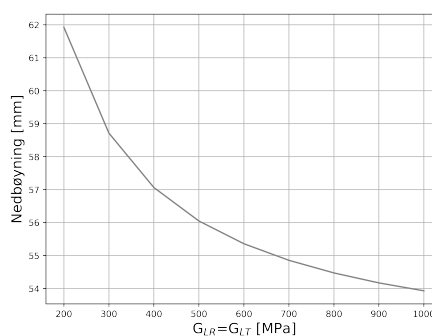
## Skjærmoduler, $G_{LR} = G_{LT}$

Skjærmodulene,  $G_{LR}$  og  $G_{LT}$ , beholdes også lik hverandre, siden det ikke inkluderes tverrkontraksjon. Skjærmodulene endres fra 100 MPa til 1000 MPa, med intervaller på 100 MPa. Resultater for dette er vist i figur 4.22.

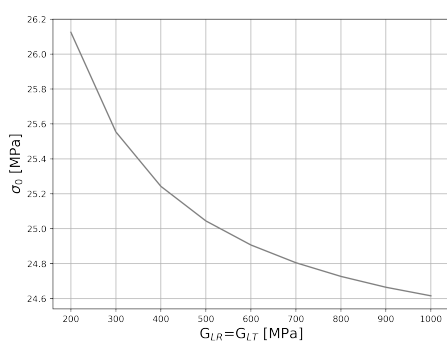
Resultater framviser hvordan økende skjærmoduler medfører redusert deformasjon. For bøyepenninger framkommer betydelig større betydning av skjærmoduler enn forekommende parametere. Ved skjærmoduler over 400 MPa vil verdiene samsvare med verdier fra andre studier, mens for lavere skjærmoduler blir spenningene betydelig større. Ved så lave skjærmoduler blir spenninger fra punktlaste i liten grad spredd utover i bjelke. Det medfører små spenningstopper for strekkspenninger i bunn av bjelke, lokalisert under punktlaste. Dette gir utslag på maksimale aksialspenninger i figur 4.22c. Resultater for under 400 MPa, må da sees i sammenheng med dette. For resterende kontroller har skjærmodulene lite påvirkning.



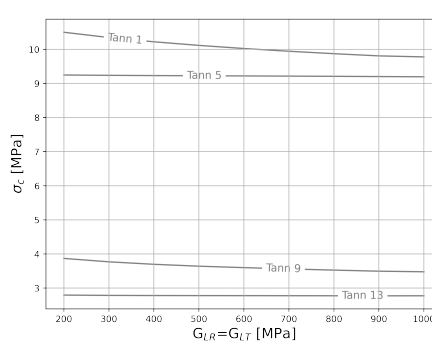
(a) Nedbøyningskurve



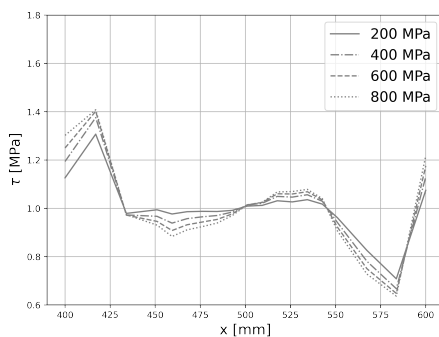
(b) Maksimal nedbøyning



(c) Maksimal bøyepenning



(d) Kontaktspenninger i tenner



(e) Skjærspenning 5 mm under tann 3

Figur 4.22: Resultater med varierende  $G_{LR}$  &  $G_{LT}$

---

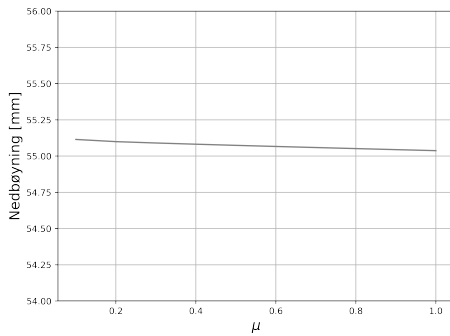
## Skjærmodul, $G_{RT}$

Ved endring av skjærmodul i radiell-tangentiell retning,  $G_{RT}$ , framkommer ingen endring i relevante resultater og påvirkning av nevnte modul kan neglisjeres. Dette er forventet for modell uten tverrkontraksjon,  $\nu$ .

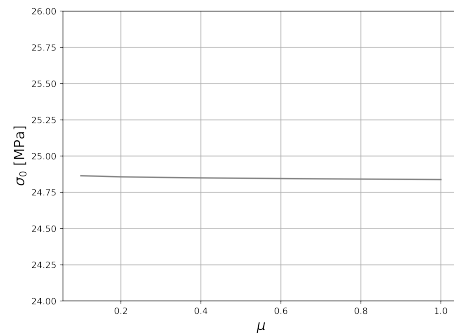
## Friksjonskoeffisient, $\mu$

Resultater ved variasjon av friksjonskoeffisient, framvist i figur 4.23, gir ingen betydelige endringer i nedbøyning og spenning.

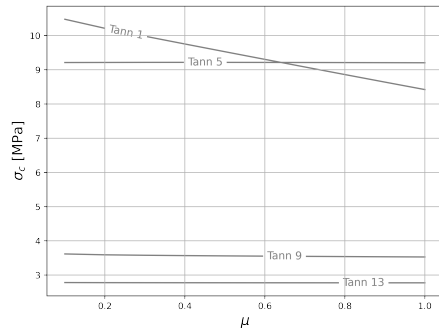
At resultater varierer minimalt ved endring av friksjonskoeffisient, viser at bjelken er lite avhengig av friksjon mellom komponentene. Det betyr at samvirke mellom komponentene, i hovedsak, baserer seg på kraftoverføring i fortanningens kontaktflater.



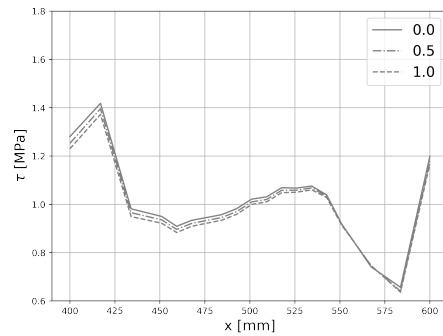
(a) Maksimal nedbøyning



(b) Maksimal bøyespenning



(c) Kontaktspenninger i tenner



(d) Skjærspenning 5 mm under tann 3

Figur 4.23: Resultater med varierende friksjonskoeffisient,  $\mu$

## Tverrkontraksjon

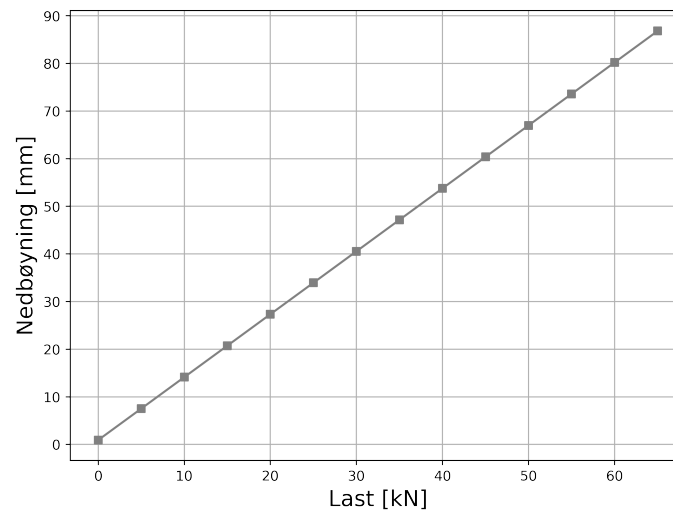
Resultater presentert i dette delkapittelet er beregnet uten tverrkontraksjon. For å analysere effekten av tverrkontraksjonen, ble  $\nu$  tilegnet en verdi på 0.6 for alle retninger ( $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  og  $\nu_{23}$ ). Resultatene påvirkes minimalt av verdi på tverrkontraksjon. Resultater fra sensitivitetstudien ved denne tverrkontraksjonsfaktoren presenteres i vedlegg C.

---

## 4.5 Elastisk studie

Dette delkapittelet tar for seg studie av sammenheng mellom nedbøyning og påsatt last i FEM-modell. Hensikten er å studere om bjelken har elastisk oppførsel i sammenheng med påført last. Som vist i figur 4.24, er nedbøyningen til bjelken lineært økende med lasten. Dette tyder på at bjelken oppfører seg elastisk, og vil etter fjerning av last returnere til sin opprinnelige form, så lenge den ikke har nådd bruddlast. Dermed er FEM-modellen forutsigbar når det kommer til sammenhengen mellom last og nedbøyning.

Ved reell bjelke kan det forekomme plastiske deformasjoner, spesielt ved høye laster. Dette vil, i motsetning til elastisk deformasjon, føre til en varig deformasjon



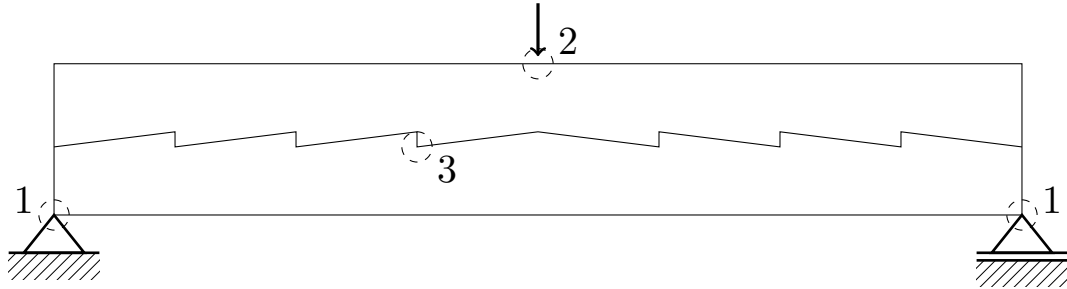
Figur 4.24: Last-deformasjonsdiagram

---

## 4.6 Irregulære områder

Modellen består av flere områder utsatt for irregularitet og singularitet. Områdene kan utsettes for spenningskonsentrasjon, som ikke nødvendigvis stemmer overens med realiteten. Det er utfordrende å unngå slike problematiske områder. Det er da viktig at en er oppmerksom på hvor dette kan oppstå og tar hensyn ved analyse.

Modellen har tre ulike kategorier av irregulære områder, som vist i figur 4.25. De kan oppstå flere steder i modellen, og beskrives videre.

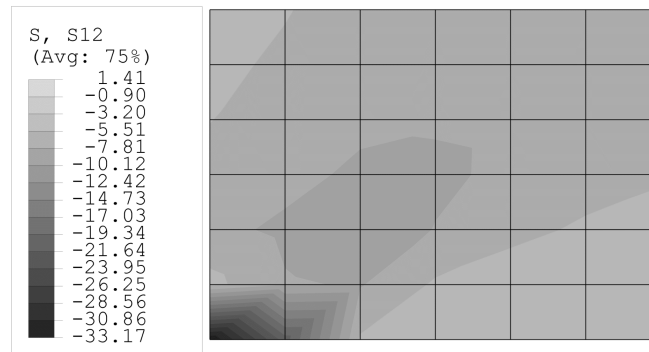


Figur 4.25: Problematiske områder

### 1 - Grensebetingelser

Det er ett opplegg i hver ende av bjelke, som hovedsakelig er definert i hjørnenodene. Det medfører at oppleggskreftene er fordelt på et infinitesimalt område. Effekten av dette er høy spenningskonsentrasjon i og rundt hjørnenodene. Dette er visualisert i figur 4.26, som viser fordeling av skjærspenninger i venstre opplegg, hentet fra ABAQUS.

En måte å løse dette på er å definere grensebetingelsen på en flate, altså på flere noder enn kun én. Dette medfører et nytt problem ved at fastholding i vertikal retning på horisontal flate vil skape motstand for bøyning i opplegget. Dette ble diskutert i delkapittel 4.1.2 og er ikke ønskelig. Dermed defineres grensebetingelser kun i hjørnenoder, og de høye spenningene neglisjeres.



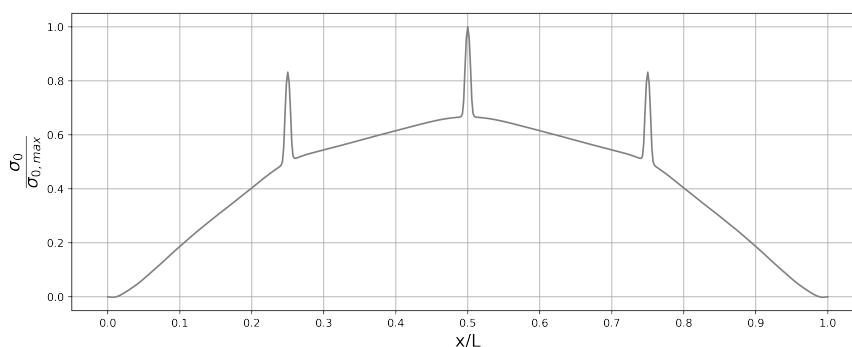
Figur 4.26: Spenningskonsentrasjon ved opplegg

---

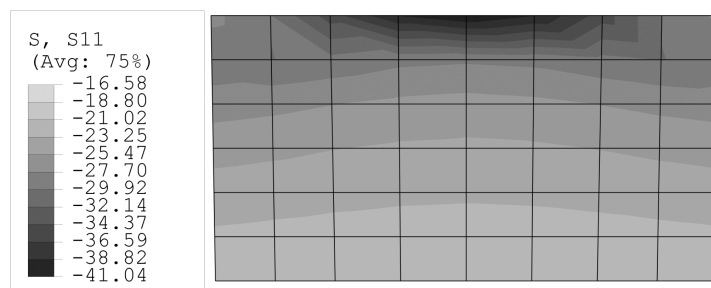
## 2 - Lastpåføringspunkt

Et annet tilfelle med høy spenningskonsentrasjon er ved lastpåføringspunktene på toppen av bjelke. I realiteten vil det dannes en viss spenningskonsentrasjon ved lastpåføringen, men betydningen vil ikke være like sentral som numeriske resultater tilsier. I modellen er punktlaster fordelt over en definert overflate for å redusere konsentrasjonen. Spenningskonsentrasjonen ved lastpåføringsområdet er vist i figur 4.28.

Når en ser på fordeling av trykkspenning langs overside av bjelke, er lastpåføringspunkter et problem. Ved hver lastpåføring vil grafen gjøre et hopp. Dette er visualisert i figur 4.27. I delkapittelet 5.1.2 blir det vist at aksialspenningen i tverrsnittet er tilnærmet lik som for en rektangulær bjelke, når fortanningen er plassert ved  $H/2$ . Det vil si at maksimal trykkspenning er lik maksimal strekkspenning. Dermed kan trykkspenning antas lik strekkspenning og lokal spenningskonsentrasjon fra lastpåføringen neglisjeres.



Figur 4.27: Fordeling av trykkspenning langs overkant av bjelke



Figur 4.28: Spenningskonsentrasjon ved lastpåføring

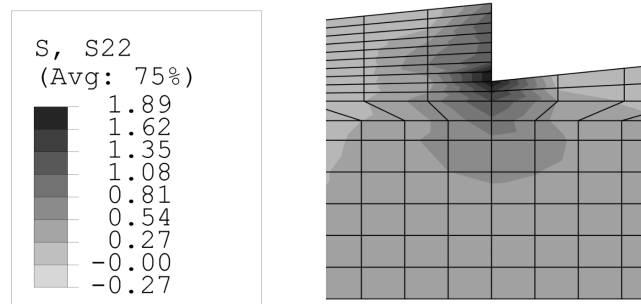
---

### 3 - Fortanning

Ved fortanning er det flere singulære punkter med høy spenningskonsentrasjon. Siden dette er områder av interesse for studie av spenningsnivå, er det viktig at en er klar over problematikken og tar hensyn til singularitet. Singularitet ved fortanningen påvirker data for kontaktspenning, skjærspenning og aksialspenning normalt på fiberretning.

Som vist i vedlegg B er hjørnepunktet i hver tann et problem for måling av aksialspenning normalt på fiberretning, S22, visualisert i figur 4.29. Den samme effekten skjer også med fordeling av skjærspenning, S12. For å løse problemet, ble det valgt å plassere sti for spenningsmålinger 5 mm over og under hjørne av tenner, for både S12 og S22. Vedlegg B viser at dette området er mindre problematisk, samtidig som det framstiller troverdige spenningsfordelinger.

Vedlegg A viser hvordan kontaktspenningen fordeler seg langs den vertikale delen av tennene. Der kan en se at hver ende av tannhøyden er problematiske, og det konkluderes med at det er fornuftig å hente gjennomsnittlig resultat fra midt av tannhøyde. Dermed blir resultater for kontaktspenning konsistente.



Figur 4.29: Spenningskonsentrasjon ved fortanning

---

## 5 Resultat

Dette kapittelet tar for seg resultater fra beregninger gjort i FEM-modell. Kapittelet er todelt. Første del tar for seg resultater tilknyttet referansegeometri, mens andre del tar for seg studie av geometriske parametere.

### 5.1 Referansegeometri

Følgende delkapittel framstiller resultater tilknyttet bjelke i FEM-modell som skal etterligne bjelke benyttet i labforsøk. I tabell 5.1 presenteres geometriske parametere benyttet i FEM-modell. Ekstern bjelkegeometri er bestemt av lengde, bredde og høyde ( $L, B, H$ ). Geometri og lokasjon av fortanning styres av resterende parametere.

| Referansegeometri |       |        |        |       |          |       |
|-------------------|-------|--------|--------|-------|----------|-------|
| L                 | B     | H      | c      | d     | $\alpha$ | $z/H$ |
| 6400 mm           | 90 mm | 342 mm | 200 mm | 20 mm | 0°       | 0.5   |

Tabell 5.1: Parametere for referansegeometri

#### 5.1.1 Sammenligning med eksperimentell data

Strukturell oppførsel av modellert referansebjelke sammenlignes med eksperimentell data. Geometri av bjelke benyttet i labforsøk er presentert i tabell 3.1. [Lengden,  $L = 6400$  mm er 1.25 % kortere enn ved labforsøke for å kunne få et helt antall tannlengder på  $c = 200$  mm.] Påsatte laster i modellverifiseringsstudie er basert på data fra sammenlignende labforsøk og er presentert i tabell 5.2.

| Last, P |      | Egenlast             |
|---------|------|----------------------|
| [kg]    | [kN] | [kg/m <sup>3</sup> ] |
| 3970    | 38.9 | 450                  |

Tabell 5.2: Lasttilfelle fra labforsøk

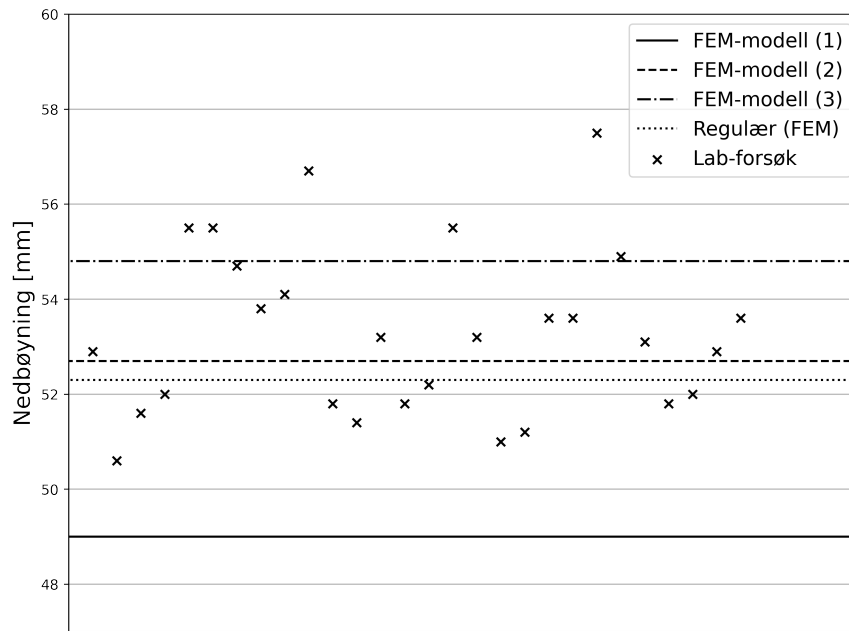
Limtre av kvalitet GL30c ble benyttet i eksperimentelle forsøk. I tabell 5.3 framstilles stivhetsparametere for limtre i FEM-modell, med variasjoner av stivhetsmodul i lengderetning. For de tre variantene av GL30c presenteres resulterende nedbøyning for etablert lastsituasjon beregnet i FEM-program. Tilsvarende resultater for regulær bjelke uten fortanning inkluderes.

|            | FEM-modell (1)<br>GL30c | FEM-modell (2) | FEM-modell (3) | Regulær<br>FEM |
|------------|-------------------------|----------------|----------------|----------------|
| $E_L$      | 13 000 MPa              | 12 000 MPa     | 11 500 MPa     | 12 000 MPa     |
| $E_R$      | 300 MPa                 | 300 MPa        | 300 MPa        | 300 MPa        |
| $E_T$      | 300 MPa                 | 300 MPa        | 300 MPa        | 300 MPa        |
| $G_{LR}$   | 650 MPa                 | 650 MPa        | 650 MPa        | 650 MPa        |
| $G_{LT}$   | 650 MPa                 | 650 MPa        | 650 MPa        | 650 MPa        |
| $G_{RT}$   | 65 MPa                  | 65 MPa         | 65 MPa         | 65 MPa         |
| Nedbøyning | 49.0 mm                 | 52.7 mm        | 54.8 mm        | 52.3 mm        |

Tabell 5.3: Stivheter og nedbøyning fra FEM-modell

Beregnete nedbøyninger presenteres visuelt i figur 5.1 sammen med målinger fra labforsøk. Gjennomsnittlig nedbøyning for samtlige labforsøk er 53.3 mm. I tabell 5.4 presenteres avvik i nedbøyning i FEM-modeller fra labresultatenes gjennomsnitt.





Figur 5.1: Nedbøyning fra labforsøk og FEM-modell

|       | (1)    | (2)    | (3)    |
|-------|--------|--------|--------|
| Avvik | -8.7 % | -1.1 % | +2.8 % |

Tabell 5.4: Differanse mellom gjennomsnitt av labforsøk og FEM-modeller med ulik stivhet

$E_L = 12000$  MPa brukes videre i oppgaven.

---

### 5.1.2 Spenningsfordeling

I følgende delkapittel presenteres spenningsfordeling av relevante spenninger. Fordeling av bøy- og skjærspenninger presenteres langs bjelkelengde og -høyde. Spenninger normalt på fiberretning presenteres langs fortanningslengde og kontaktspenninger tann for tann. Spenningsfordelinger normaliseres for maksverdi.

Lasttilfelle er som presenter i figur 4.7, med tre punktlaster i tillegg til bjelkens egenlast. Laststørrelser benyttet er gjengitt i tabell 5.5.

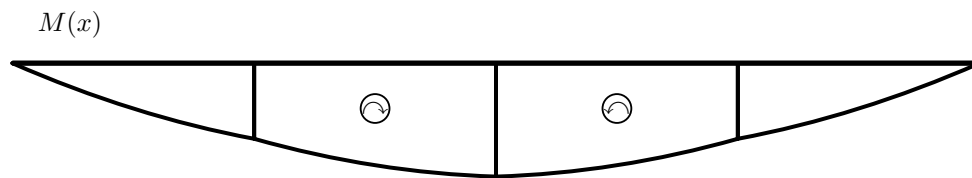
| Last, $F$ | Egenlast, $g$         |
|-----------|-----------------------|
| 40 kN     | 450 kg/m <sup>3</sup> |

Tabell 5.5: Laststørrelser for studie av spenningsfordeling

### Bøyepenninger

Teoretisk bøyemoment i midtspenn av bjelke ved gitt lasttilfelle gis av formel (5.1). Lasttilfellet gir et momentdiagram som skissert i figur 5.2.

$$M = \frac{1}{6}FL - \frac{gL^2}{8} \quad (5.1)$$

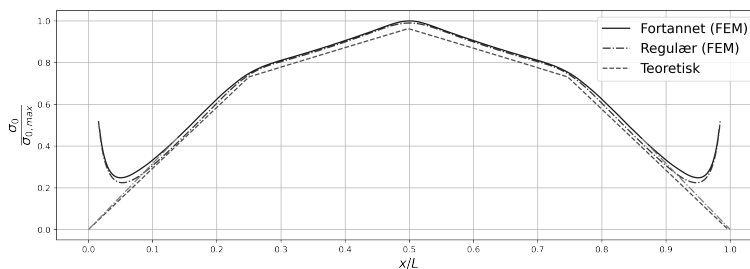


Figur 5.2: Momentdiagram

For massiv, rektangulær bjelke bestemmes teoretisk bøyepennung fra formel (5.2). Variasjon i avstand fra tverrsnittets tyngdepunkt,  $z_t$ , gir spenningsfordeling langs bjelkehøyde. Variasjon av moment,  $M$ , gir spenningsfordeling langs bjelkelengde. I formel (5.2) er  $I$  tverrsnittets treghetsmoment.

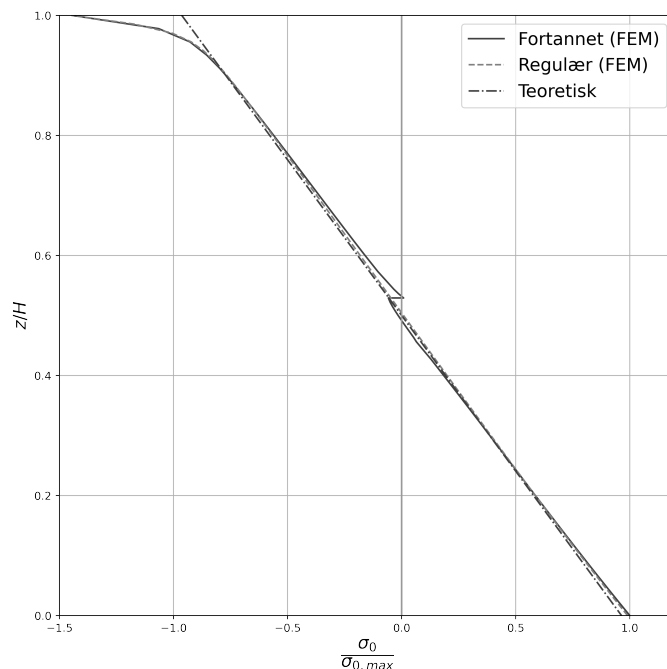
$$\sigma_0 = \frac{M}{I} z_t, I = \frac{1}{12}bh^3 \quad (5.2)$$

Teoretisk spenningsfordeling langs bjelkens lengde bestemmes fra formel (5.2) med varierende  $M$  og konstant  $z_t = -H/2$ . Strekkspenningsfordeling for fortannet og regulær bjelke presenteres i figur 5.3 sammen med teoretiske verdier. Verdiene er normalisert for maksimal verdi for fortannet bjelke.



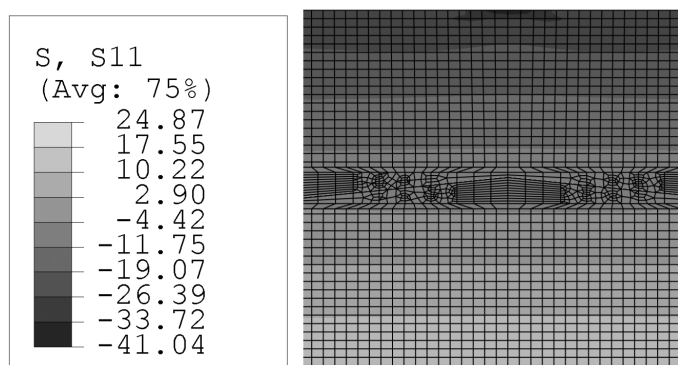
Figur 5.3: Strekkspennning langs underside av bjelke

Spenningsfordeling i tverrsnitt presenteres ved største moment,  $M$ , altså i feltmidt ( $x = L/2$ ). Formel (5.1) gir teoretisk moment 43.4 kNm. For teoretisk aksialspenning etter formel (5.2) benyttes konstant  $M$ , med varierende  $z_t$ . Aksialspenningsfordeling for fortannet og regulær bjelke presenteres i figur 5.4, sammen med teoretiske verdier. Verdiene er normalisert for maksimal verdi for fortannet bjelke.



Figur 5.4: Aksialspenninger i tverrsnitt

Figur 5.5 presenterer fordeling av aksialspenning i aktuell del av FEM-modell. Data presentert i figur 5.4 hentes fra vertikal sti i midten av dette området.



Figur 5.5: Fordeling av aksialspenning ved midten av bjelken

---

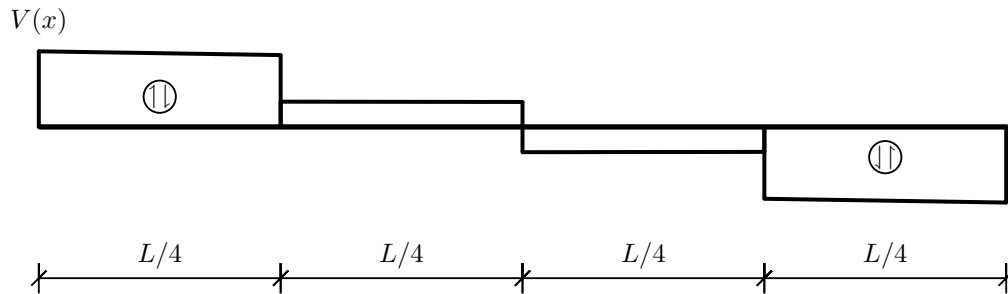
## Skjærspenninger

For skjær presenteres to separate spenningsfordelinger. Fordeling langs bjelkelengde nær tverrsnittets tyngdepunkt og fordeling langs bjelkens høyde.

Teoretisk skjærspenning bestemmes fra formel (5.3). Skjærkraft,  $V$  varierer langs bjelkens lengde og er styrende for spenningsfordeling i lengderetning. Spenningsfordeling langs bjelkehøyde styres av avstand tverrsnittets tyngdepunkt,  $(1 - z^2/h^2)$ .

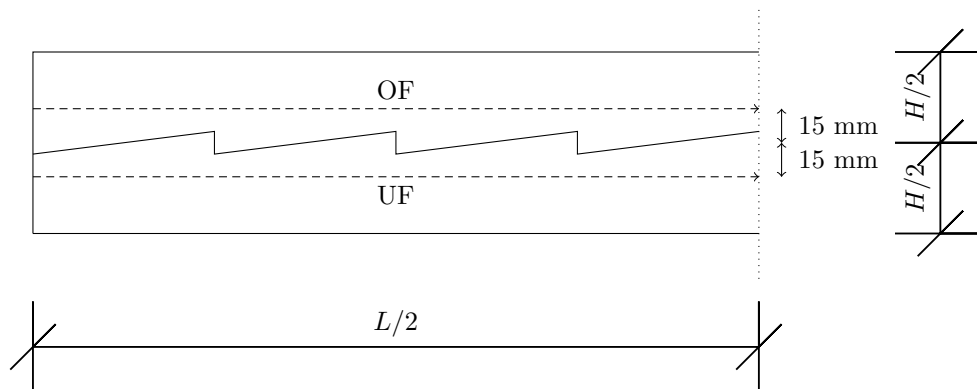
$$\tau = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (5.3)$$

Teoretisk fordeling av skjærkrefter langs bjelkelengde skissert i figur 5.6.



Figur 5.6: Skjærkraftdiagram

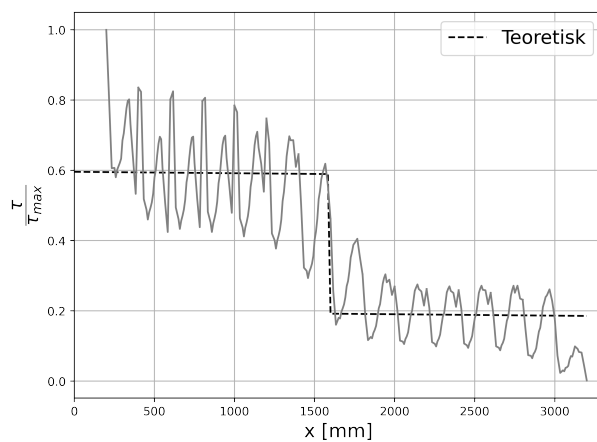
Numeriske verdier fra FEM-analyse hentes langs sti over og under fortanning, markert i figur 5.7. Spenningsfordeling for skjær framstilles med verdier fra stien under fortanning (UF). Tilsvarende grafer for sti OF presenteres i vedlegg D. For teoretisk skjærverdi langs bjelkens lengde benyttes tverrsnittets maksverdi. Teoretisk differanse i verdi fra maks skjær midt i høyde,  $\tau_{d,max}$  til verdi ved UF er neglisjerbar (0.2%) etter formel (5.3).



Figur 5.7: Sti UF og OF

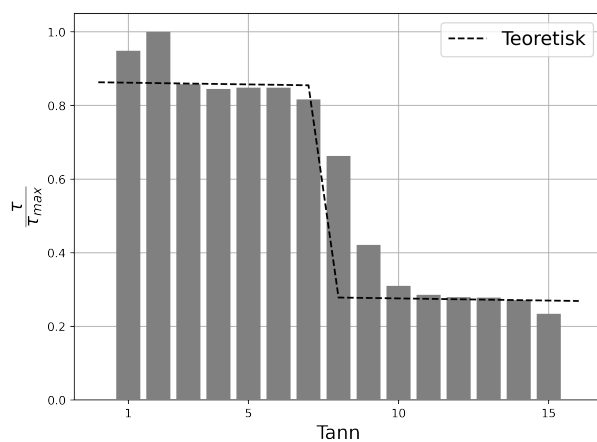
---

I figur 5.8 visualiseres skjærspenninger fra FEM-program i UF, sammen med teoretisk verdi. Symmetri i spenningsfordeling gjør det tilstrekkelig å framvise spenninger for halv bjelke. Data fra venstre bjelkehalvdel presenteres. Første tannlengde ekskluderes grunnet opplagers påvirkning.



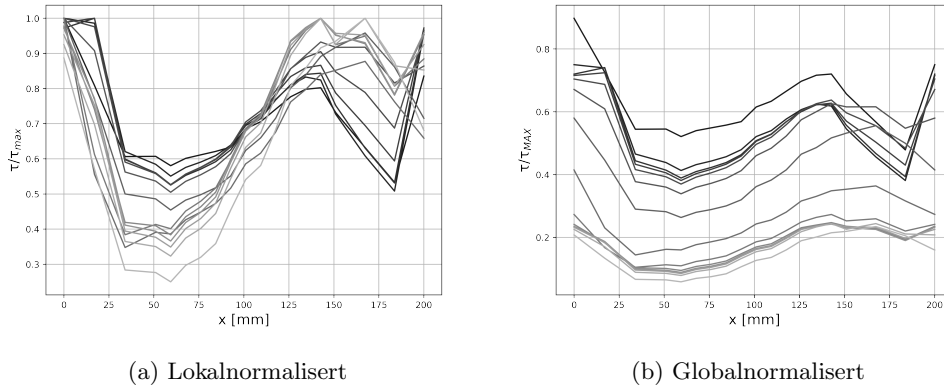
Figur 5.8: Skjærspenningsfordeling for venstre bjelkehalvdel. [UF]

Videre presenteres spenninger tannlengde for tannlengde. Første framstilling presenterer gjennomsnittlige skjærspenninger for hver tann. Relative størrelsesforskjeller mellom nevnte spenninger presenteres, sammen med teoretisk skjærspenning i figur 5.9.



Figur 5.9: Gjennomsnittlig skjærspenning for hver tann. [UF]

Intern spenningsfordeling innad i hver tann visualiseres i figur 5.10. Hvor mørk en kurve er, tilsier hvor nært opplager tannen er. I graf (a) framstilles verdier normalisert for maksverdi i egen tann. Da presenteres spenningsfordeling internt i enkelttenner. I graf (b) er kurvene normalisert for global maksverdi, altså største verdi i fortanningen. Grafene visualiserer størrelsesforhold mellom tenner.

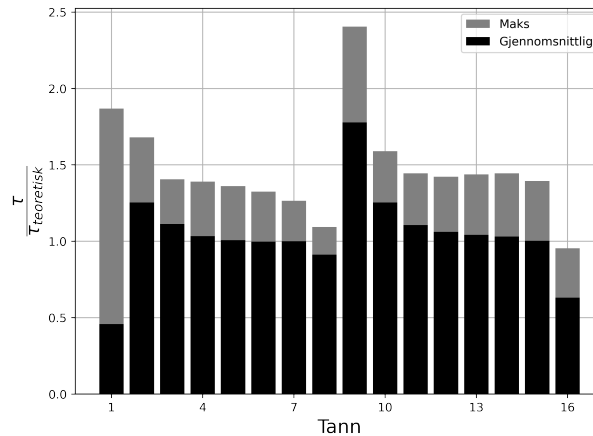


Figur 5.10: Skjærspenningsfordeling langs tannlengde for tenner i venstre bjelkehalvdel. [UF]

I figur 5.11 presenteres størrelsesforhold mellom gjennomsnittlige spenninger presentert i figur 5.9 og teoretisk skjær ved samme tann,  $\tau_{snitt}/\tau_{teoretisk}$ . Tilsvarende framstilling for størrelsesforhold mellom hver enkelt tanns maksverdier og dens teoretiske verdi,  $\tau_{maks}/\tau_{teoretisk}$  presenteres i samme figur. Svarte stolper markerer forholdstall for gjennomsnittspenninger og grå stolper for maksimale spenninger. Sett bort fra tenner påvirket av opplager eller konsentrerte laster framkommer følgende forholdstall.

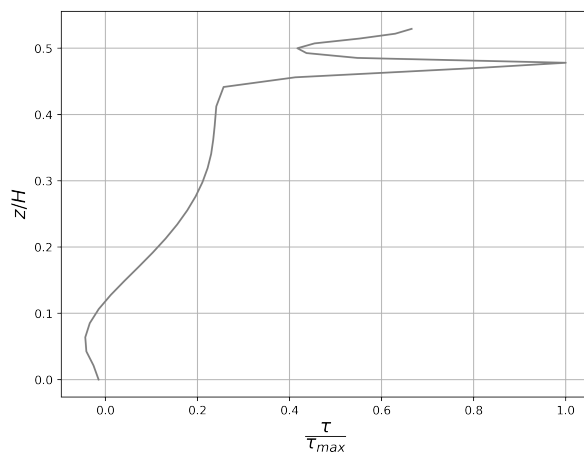
$$\tau_{snitt} \approx \tau_{teoretisk}$$

$$\tau_{maks} \approx 1.5 * \tau_{teoretisk}$$



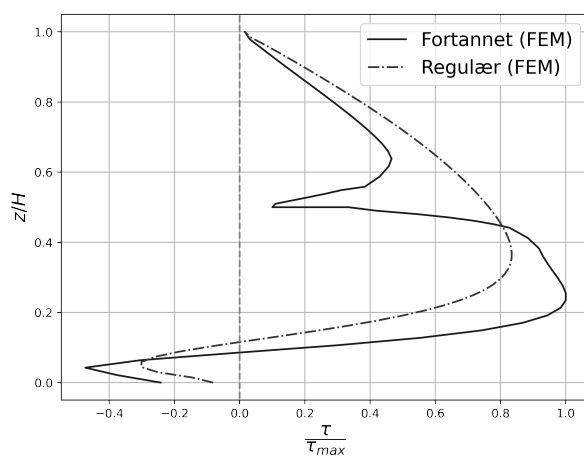
Figur 5.11: Relativ størrelse på maksverdi og gjennomsnittsverdi mot teoretisk skjærspenning

Hvordan skjærspenninger fordeles i tverrsnitt påvirkes av hvor i tann data hentes ut. Figur 5.12 framstiller skjærfordeling i nedre komponent for sti lokalisert ved kontaktflate. Verdiene er normalisert for maksimal verdi.

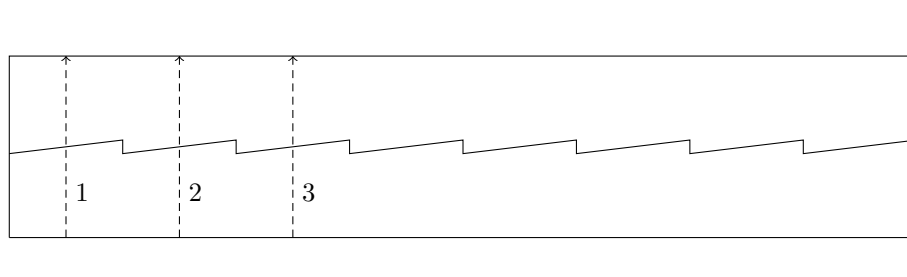


Figur 5.12: Skjærfordeling i bjelkehøyde. Sti langs kontaktflate for nedre komponent

Fordeling i figur 5.13 framkommer ved snitt midt i tannlengde. I samme figur framstilles spenningsfordeling for bjelke uten fortanning i FEM-program. Verdiene for begge tilfeller er hentet fra sti nummer 2, markert i figur 5.14. Verdiene er normalisert for maksimal verdi for fortannet bjelke.



Figur 5.13: Skjærfordeling langs sti 2



Figur 5.14: Stier for skjærfordeling i tverrsnitt

Teoretisk skjærkraft,  $V$ , kan sammenlignes mot total skjærkraft fra analytiske skjærspenningsfordelinger fra figur 5.13. Analytisk skjærkraft bestemmes ved å integrere data over høyde i utvalgt snitt, og multiplisere med bjelkebredde. Framgangsmåten presenteres i formel (5.4), hvor  $n$  er antall datapunkter. Teoretisk skjærkraft ved definert lastsituasjon bestemmes etter formel (5.5).

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i) \quad (5.4)$$

$$V = \frac{F}{2} + \frac{g}{2}(L - c) \quad (5.5)$$

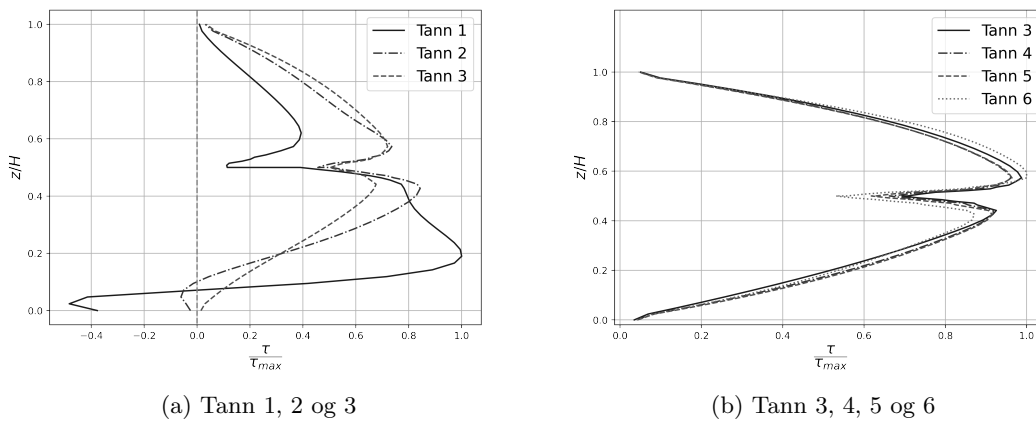
Tabell 5.6 presenterer avvik fra teoretisk skjærkraft, ved FEM-modeller (fortannet og regulær bjelke).

|                        | Differanse |
|------------------------|------------|
| Fortannet bjelke [FEM] | -0.64 %    |
| Regulær bjelke [FEM]   | -0.02 %    |

Tabell 5.6: Differanse fra teoretisk skjærkraft

Variasjon i fordeling og størrelse på skjærspenninger framstilles i figur 5.15a for tann 1, 2 og 3. Nummerering følger framstilling i figur 5.14.

Tilsvarende framstilling for tann 3, 4, 5 og 6 presenteres i figur 5.15b. Tilsvarende nummerering som for tann 1, 2, 3 i 5.14 gir grunnlag for videre nummerering.

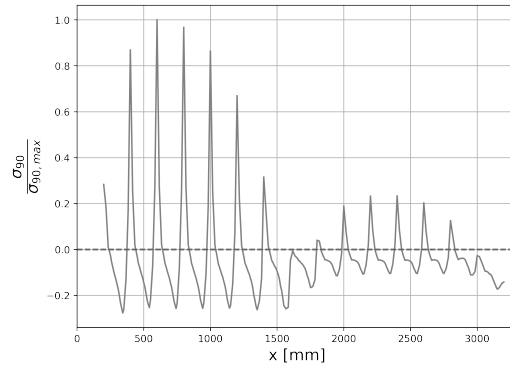


Figur 5.15: Skjærspenningsfordeling langs bjelkehøyde, hentet midt i tannlengde



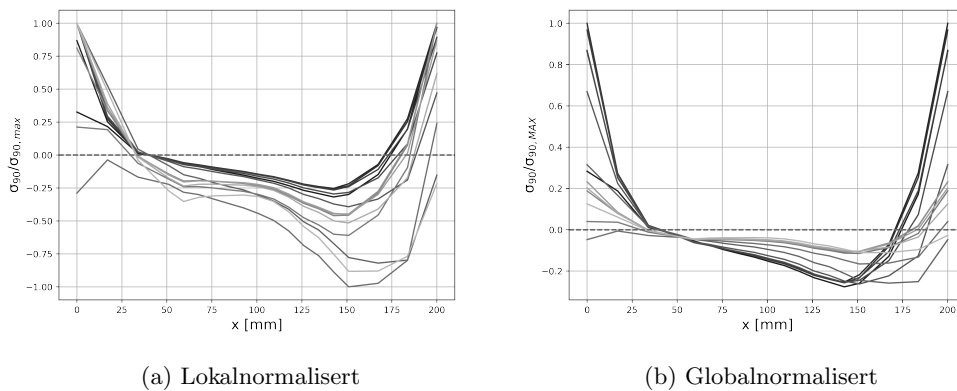
## Aksialspenninger normalt på fiberretning

Spenninger normalt på fiberretning,  $\sigma_{90}$ , opptrer i fortanningsområdet. Slike spenninger langs sti UF presenteres i figur 5.16. Positive verdier tilsier strekk normalt på fiberretning, mens negative verdier tilsier trykk. Grunnet symmetri i spenningsfordeling ekskluderes data fra høyre halvdel av bjelke.



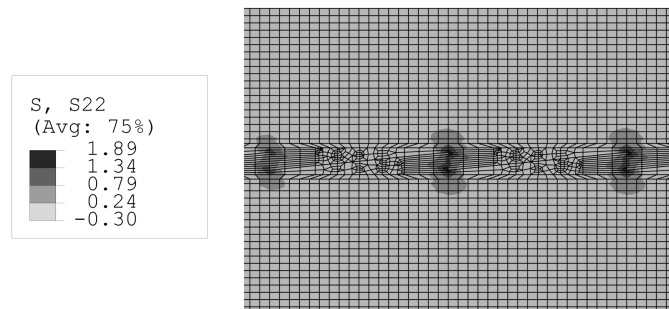
Figur 5.16: Spenning normalt på fiberretning for venstre bjelkehalvdel [UF]

Tilsvarende som for skjærspenninger, presenteres data tann for tann for å framvise spenningsfordeling innad i tann. Dette gjøres i figur 5.17. Spenninger er normalisert for største verdi og presenteres langs tannens lengde,  $c$ . Hvor mørk en kurve er bestemmes av hvor nært tann er opplager.



Figur 5.17: Spenninger normalt på fiberretning, tann for tann [UF]

Figur 5.18 visualiserer fordeling av strekkspenninger normalt på fiberretning, S22, fra ABAQUS.

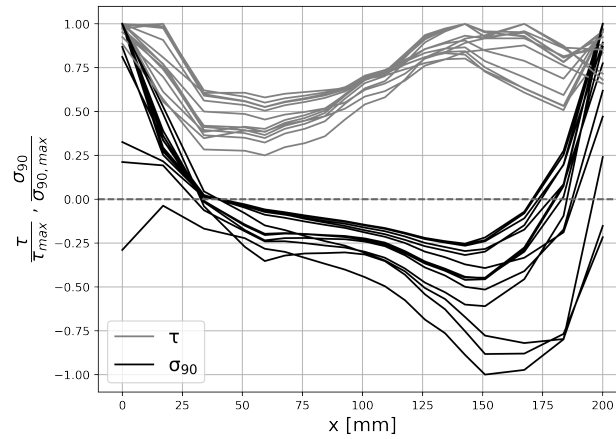


Figur 5.18: Fargekart for strekkspenninger normalt på fiberretning

---

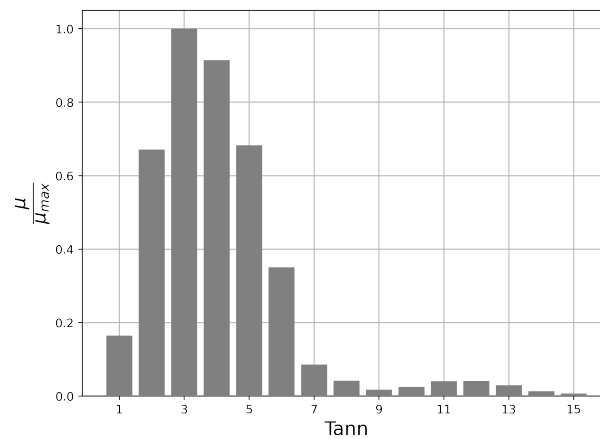
## Skjær i kombinasjon med spenninger normalt på fiberretning

I figur 5.19 er normaliserte grafer for de nevnte spenningsformene presentert sammen. Grå kurver representerer skjærspenninger, mens spenning normalt på fiberretning markeres med sorte kurver. Normalisering baseres på egen maksverdi.



Figur 5.19: Skjærspenninger og spenninger normalt på fiberretning

Figur 5.20 viser fordeling av utnyttelse ved gjennomsnittlig skjær- og strekkspenning kombinert for hver tann etter formel (2.18). Resultatet er normalisert for tann med størst utnyttelse. Her benyttes  $a = 20$  mm, med grunnlag i delkapittel 2.4.5.

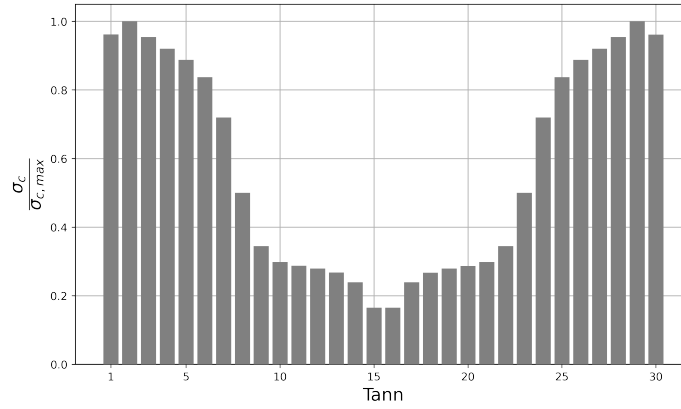


Figur 5.20: Skjær- og strekkspenning kombinert ved hver tann

---

## Kontaktspenninger

Figur 5.21 presenterer kontaktspenninger i hver enkelt tanns vertikale kontaktflate. Figur framstiller størrelsesforhold mellom tenner nær ende av bjelke og tenner nær bjelkemidt. Tannnummerering følger framgangsmåte i figur 5.14.



Figur 5.21: Kontaktspenninger i tenner

Det er også gjort undersøkelser av kontaktspenninger på hellende del av tann. Kontaktspenninger i denne delen viser seg å være neglisjerbare ( $< 0.1$  MPa).

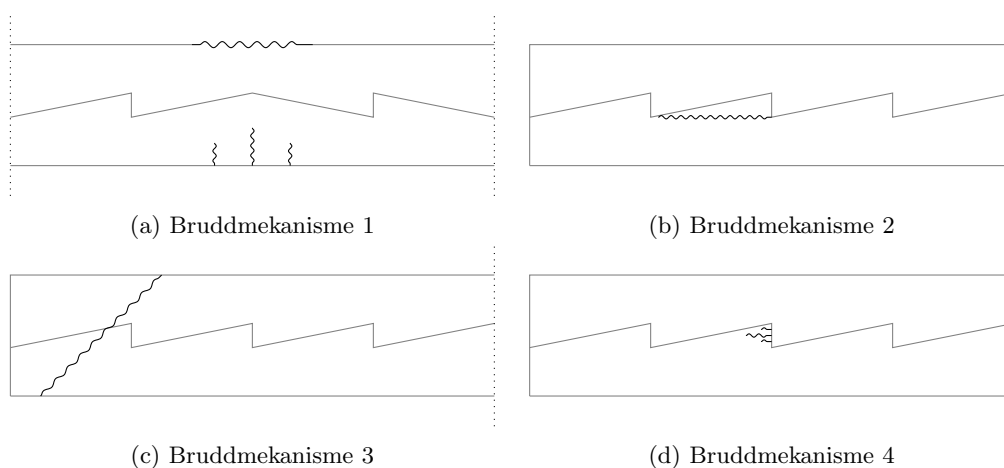
### 5.1.3 Bruddmekanismer

Fire relevante bruddmekanismer analyseres. Spenningsnivå ved økende belastning presenteres opp mot eksperimentell data og tilhørende materialkapasitet. Laststørrelser markerer samlet verdi for tre punktlaster, med lastsituasjon som etablert i figur 4.7. Kapasitet markeres med horisontal, stiplet linje i grafer. Eksperimentell data presenteres statistisk med vertikale, heltrukne linjer for middelerverdi og standardavvik,  $\sigma$ . Intervall som inneholder samtlige relevante labforsøk markeres i lys grå farge.

De fire aktuelle bruddmekanismene er:

1. Bøyespenningsbrudd (figur 5.22a)
2. Skjærbrudd i tann (figur 5.22b)
3. Skjærbrudd i tverrsnitt (figur 5.22c)
4. Trykkbrudd i tann (figur 5.22d)

Figur 5.22 viser bruddmekanismene.



Figur 5.22: Relevante bruddmekanismer

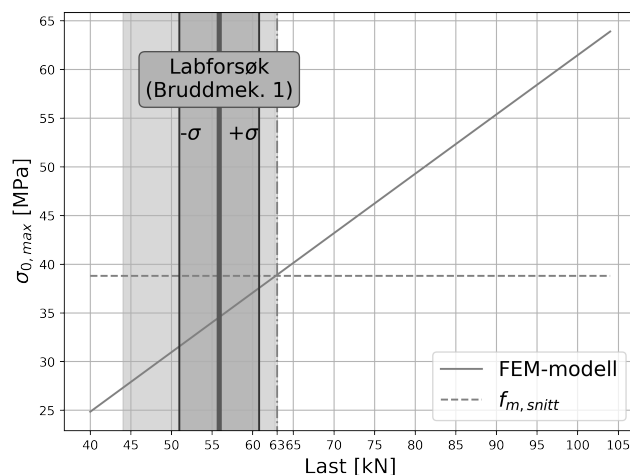
FEM-modell tilegnes stivhetene vist i tabell 5.7 for studie av bruddspenninger.

|          |            |
|----------|------------|
| $E_L$    | 12 000 MPa |
| $E_R$    | 300 MPa    |
| $E_T$    | 300 MPa    |
| $G_{LR}$ | 650 MPa    |
| $G_{LT}$ | 650 MPa    |
| $G_{RT}$ | 65 MPa     |

Tabell 5.7: Stivheter

## Bruddmekanisme 1

Bøyespenningsverdier benyttet i studie av bruddmekanismer hentes fra bunn av tverrsnitt, i feltmidte ( $x = L/2$ ,  $z = 0$ ). Her befinner største spenninger seg, etter delkapittel 5.1.2. Maksimale bøyespenninger ved økende belastning presenteres i figur 5.23 sammen med bruddformens relevante labresultater og kapasitet.

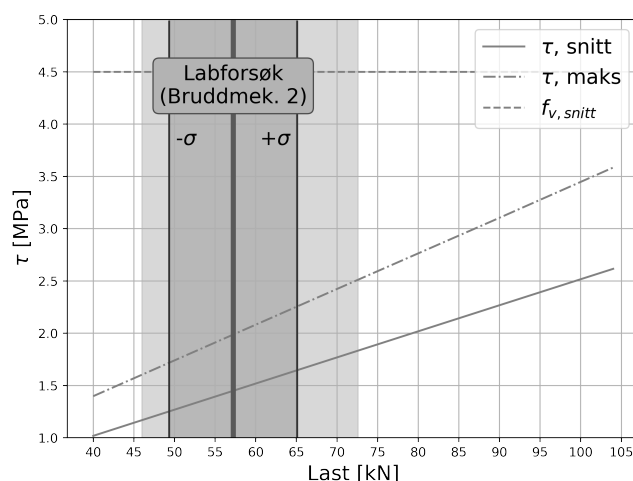


Figur 5.23: Bøyespenninger ved brudd

## Bruddmekanisme 2

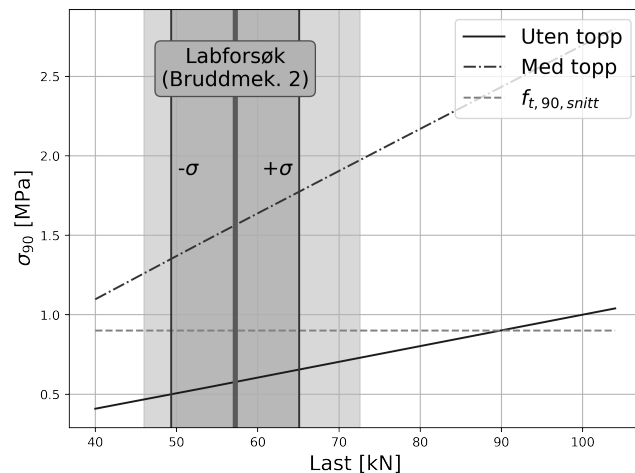
Bruddmekanisme 2 forutsetter skjærbrudd i fortanning. Ulike framgangsmåter for å predikere slikt brudd er presentert i delkapittel 2.4. Fire spenningsgrafer med utgangspunkt i framgangsmåtene presenteres videre. Spenninger hentes fra sti UF, ved mest utsatte tann.

I figur 5.24 presenteres skjærspenninger mot skjærkapasitet på 4.5 MPa. Heltrukken linje representerer gjennomsnittlige verdier for skjærspenning, tidligere presentert i figur 5.9. Stiplet linje markerer maksimale verdier, som framstilt i figur 5.10.



Figur 5.24: Maks skjærspenning ved brudd

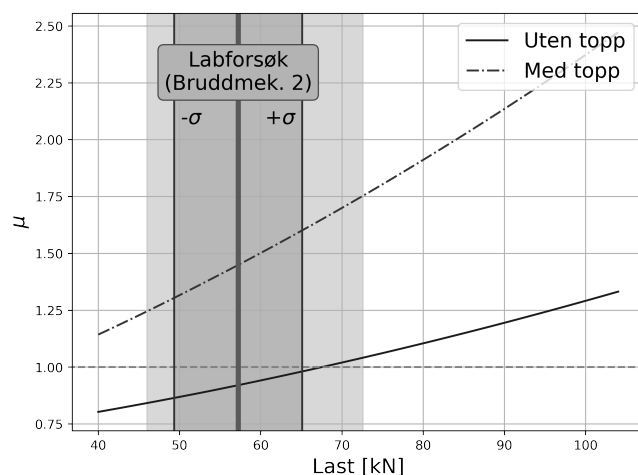
Tilsvarende framstilling for maksimale strekkspenninger normalt på fiberretning, i samme område, presenteres i figur 5.25. Tabell 2.3 tilsier kapasitet for slike spenninger på 0.9 MPa. Tilsvarende som for skjær, presenteres ulike spenningsframstillinger. Stiplet linje baserer seg på største spenningsverdi (topp) i kritisk tann. Heltrukken linje ekskluderer første verdi (uten topp), av hensyn til singularitet.



Figur 5.25: Maks strekkspenning ved brudd

Skjær- og normalspenninger må videre sees i sammenheng. De to neste grafene framstiller de to ulike framgangsmåtene for å kombinere spenningene presentert i delkapittel 2.4. Data presenteres for kapasitetsutnyttelse,  $\mu$ , for denne form for spenningskombinasjon. Verdi over 1.0 tilsier altså brudd.

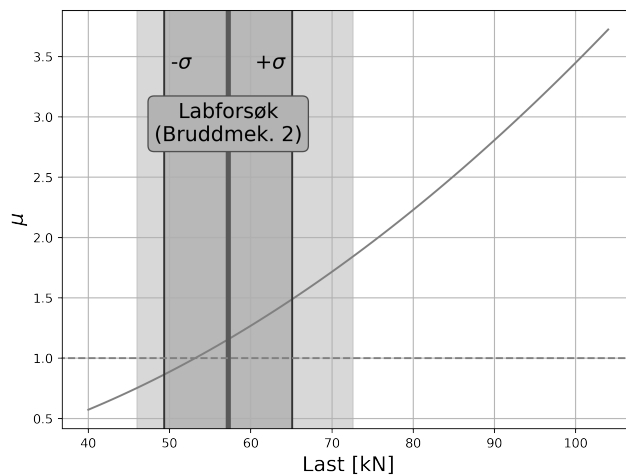
I figur 5.26 er Norris' kriterium for kombinerte spenninger etter formel (2.9) visualisert for økende belastning. Utnyttelse er presentert både med og uten største strekkspenningsverdi (topp) nært tannhjørne, av hensyn til singulære punkter.



Figur 5.26: Kombinert skjærspenning og aksialtrekk normalt på fiberretning basert på formel 2.9

---

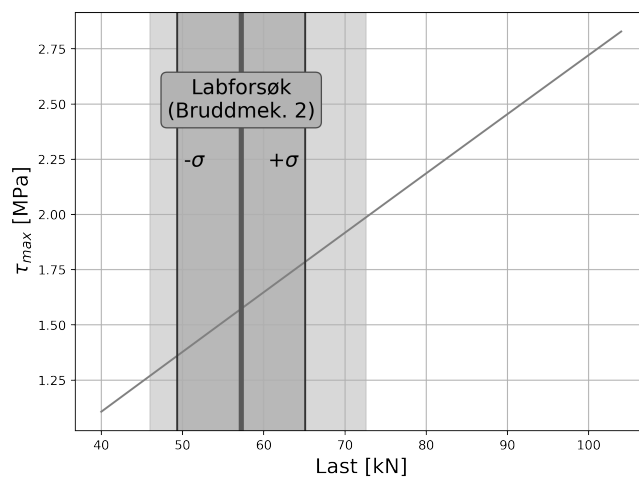
Tilsvarende spenningsframstilling basert på formel 2.18 for snittspenningsmetoden, presenteres i figur 5.27. Spenningsfordelingslengde,  $a$ , er bestemt til 20 mm, basert på delkapittel 2.4.5.



Figur 5.27: Kombinert skjærspenning og aksialtrekk normalt på fiberretning ved snittspenningsmetoden

### Bruddmekanisme 3

Skjærspenninger i tverrsnitt er styrende for bruddmekanisme 3. Største verdi, uansett plassering i bjelke, presenteres for økende laster i figur 5.28. Kapasitet for skjærspenninger er 4.5 MPa, gitt i tabell 2.3 og havner over området for presentert data.

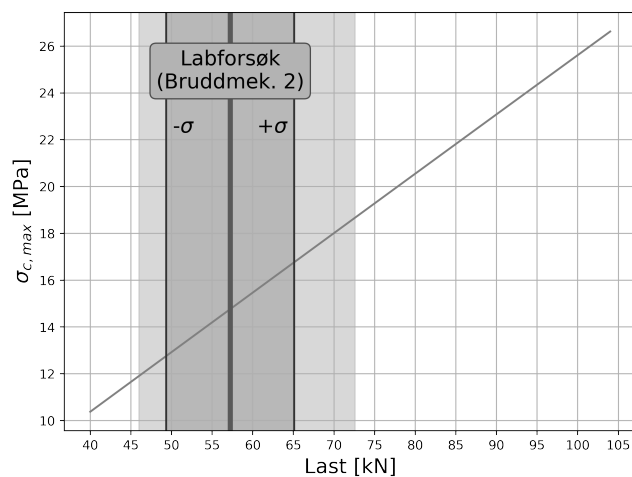


Figur 5.28: Maks skjærspenning i tverrsnitt ved brudd

---

#### Bruddmekanisme 4

Maksimale kontaktspenninger ved økende belastning,  $\sigma_{c,max}$  er visualisert i figur 5.29. Kapasitet for trykk parallelt på fiberretning er 30 MPa etter tabell 2.3. Stiplet linje for kapasitet havner utenfor presentert data. Ingen labforsøk er påvist for denne bruddmekanismen, men kontaktkrefters tilknytning til skjærbrudd gjør at slike labforsøk inkluderes i graf.



Figur 5.29: Maks kontaktspenning ved brudd



## 5.2 Parametrisk studie

Nedenfor presenteres fem geometriske parametere som endres individuelt, for å studere deres spenningsbetydning. De fem parameterene er:

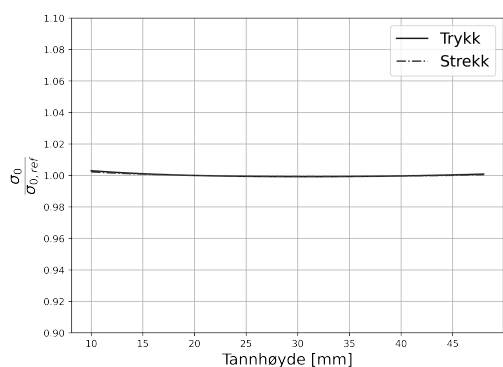
- Tannhøyde,  $d$
- Tannlengde,  $c$
- Lokasjon av fortanning i bjelkehøyde,  $z/H$
- Vinkel på kontaktflate,  $\alpha$
- Tannens størrelse,  $d + c$

Parameterstudie tar utgangspunkt i referansegeometri, tidligere presentert i 5.1. Presentert data normaliseres for resultater for referansegeometri.

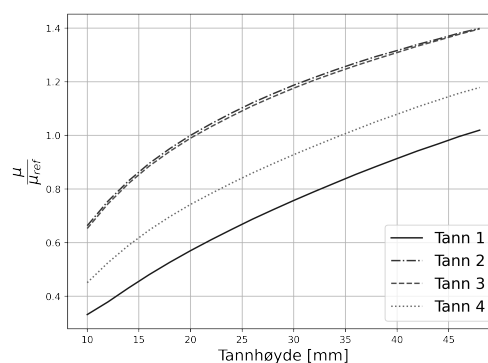
Forenklet snittspenningsmetode, presentert i delkapittel 2.4.5, benyttes for kontroll av bruddmekanisme 2.

### Endring av tannhøyde

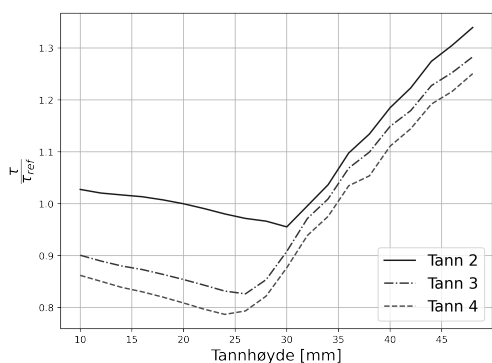
Høyde på tann,  $d$ , varierer fra 10 til 50 mm med intervaller på 2 mm. Resultat er presentert i figur 5.30. Referansehøyde er 20 mm.



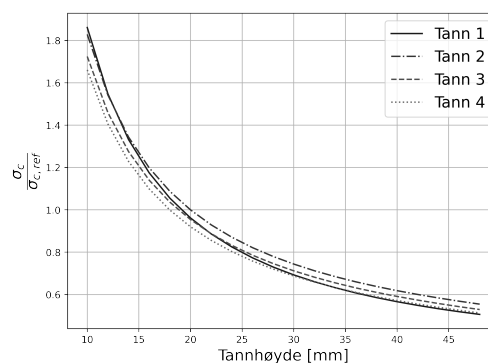
(a) Bruddmek. 1 - Trykk- og strekkspenning



(b) Bruddmek. 2 - Snittspenning



(c) Bruddmek. 3 - Skjærspenning i tverrsnitt

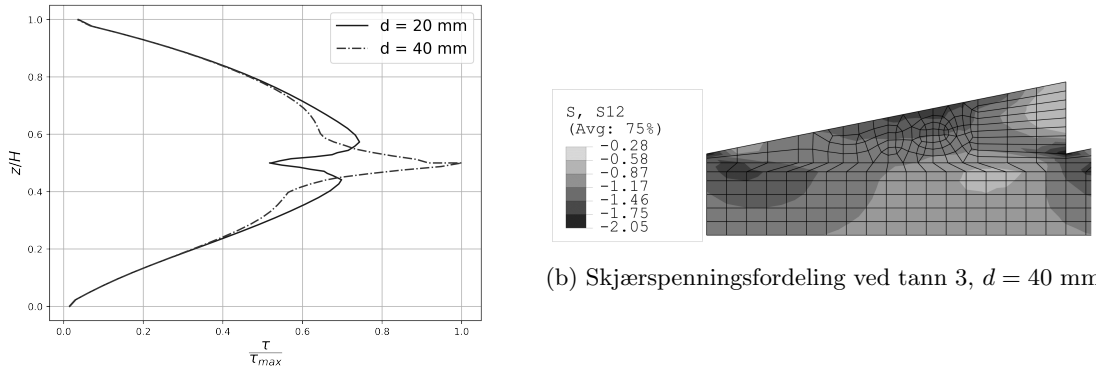


(d) Bruddmek. 4 - Kontaktspenning

Figur 5.30: Parametrisk studie av tannhøyde. Normalisert for referansegeometri

Figur 5.31 presenterer konsentrasjon av skjærspenninger i diagonal del av tann, avhengig av tannhøyde. I figur 5.31a presenteres fordeling av skjærspenning i tverrsnitt for tannhøyde på 20 og 40 mm. Figur 5.31b framstiller spenningskonsentrasjon ved tannhøyde på 40 mm i spenningsfordeling fra ABAQUS.

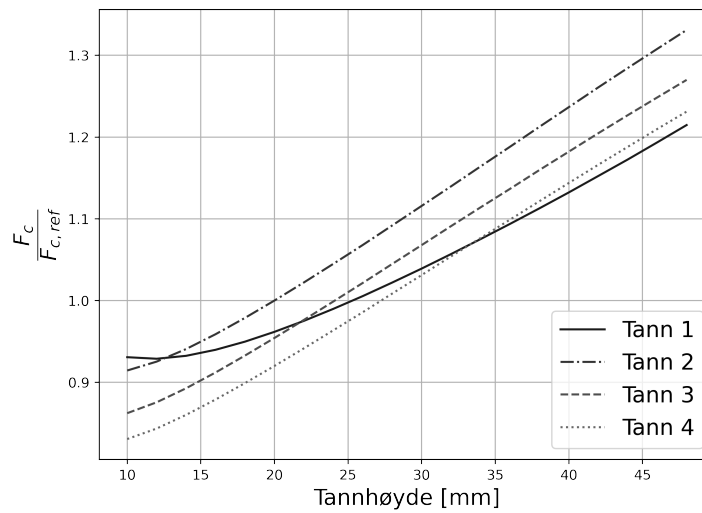
Figur 5.32 viser kontaktkraft for ulike tannlengde, normaliser for kritisk tann ve referansegeometri.



(a) Skjærspenningsfordeling i tverrsnitt ved tann 3

(b) Skjærspenningsfordeling ved tann 3,  $d = 40$  mm

Figur 5.31: Skjærspenning i diagonal del av tann

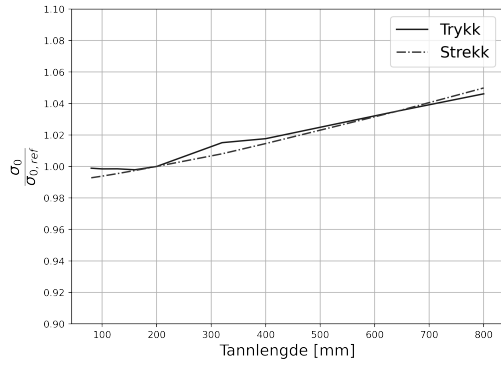


Figur 5.32: Skjærspenning i diagonal del av tann

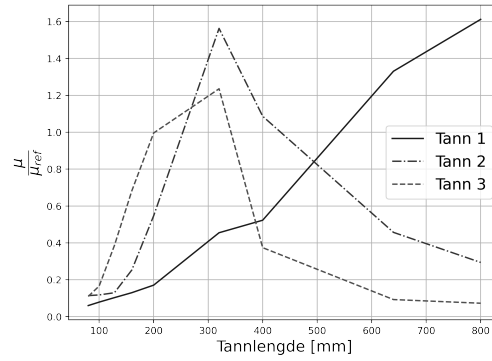
## Endring av tannlengde

Lengde på tann,  $c$ , bestemmes for å gå opp med bjelkelengde. Tannlengder som studeres er: 80, 100, 128, 160, 200, 320, 400, 640 og 800 mm.

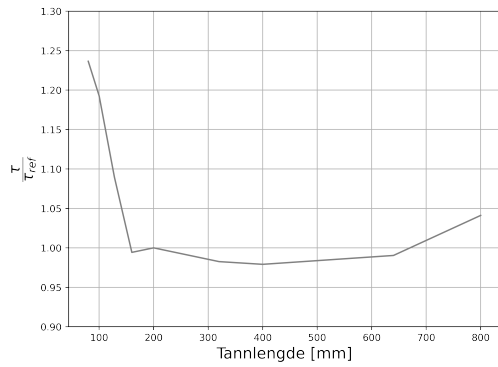
Resultater er presentert i figur 5.33. Tannlengde i referansegeometri er 200 mm.



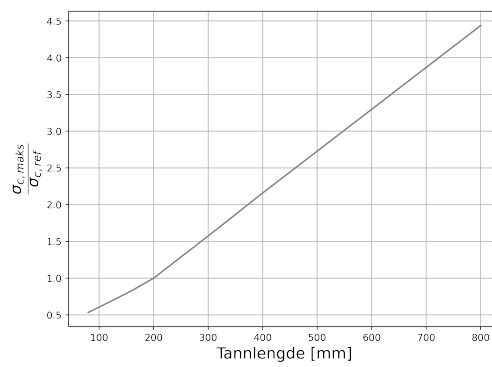
(a) Bruddmek. 1 - Trykk- og skjærspenning



(b) Bruddmek. 2 - Snittspenning



(c) Bruddmek. 3 - Skjærspenning i tverrsnitt



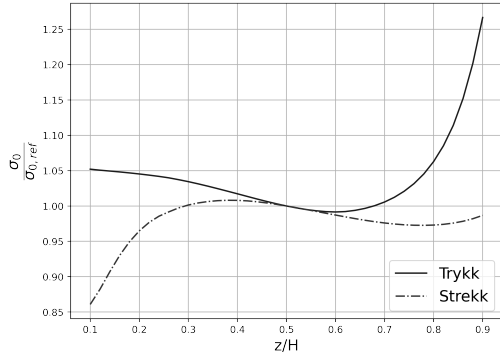
(d) Bruddmek. 4 - Kontaktspenning

Figur 5.33: Parametrisk studie av tannlengde. Verdier normalisert for referansegeometri

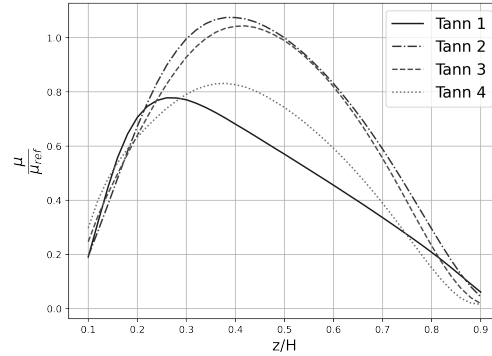
## Endring av fortanningslokasjon

Fortanningens lokasjon i tannhøyden,  $z/H$ , varierer fra 0.1 til 0.9 med intervaller på 0.02. Resultatet er presentert i figur 5.34. I referansegeometri er fortanning midt i bjelkehøyde,  $z/H = 0.5$ .

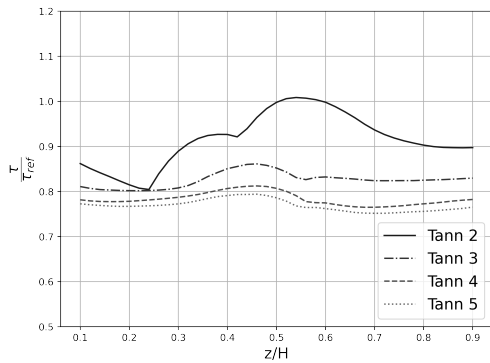
Figur 5.35 viser fordeling av skjærspenning i tverrsnitt med ulik  $z/H$ .



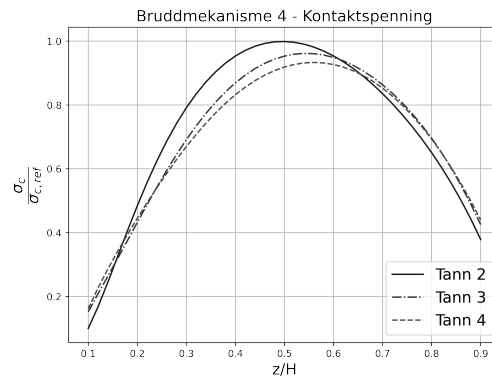
(a) Bruddmek. 1 - Trykk- og strekkspenning



(b) Bruddmek. 2 - Snittspenning

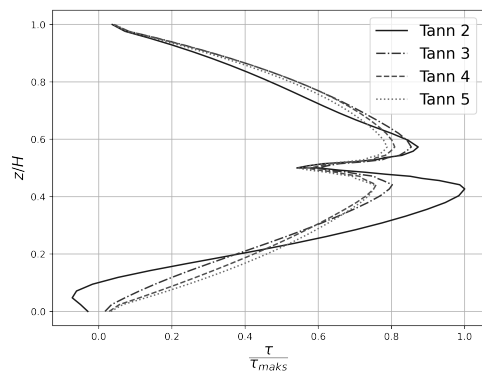


(c) Bruddmek. 3 - Skjærspenning i tverrsnitt

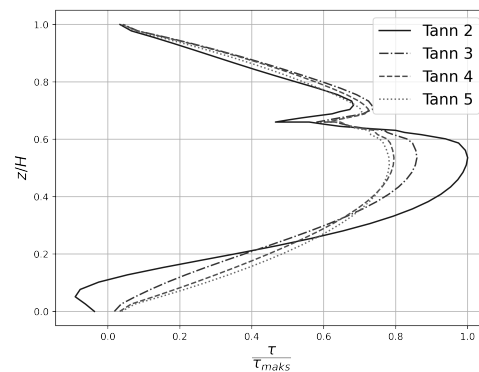


(d) Bruddmek. 4 - Kontaktspenning

Figur 5.34: Parametrisk studie av fortanningslokasjon. Verdier normalisert for referansegeometri



(a)  $z/H = 0.50$

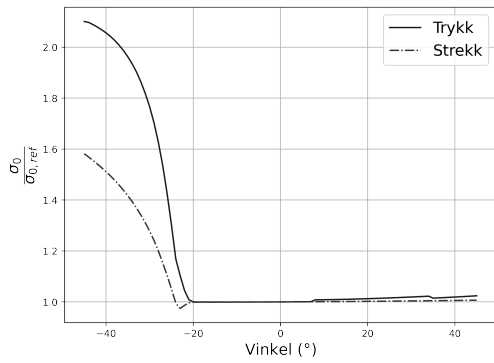


(b)  $z/H = 0.66$

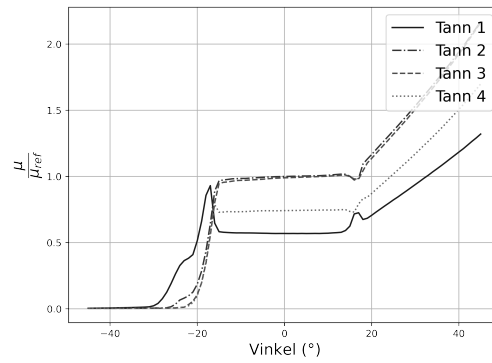
Figur 5.35: Fordeling av skjærspenning i tverrsnitt med ulik  $z/H$

## Endring av vinkel

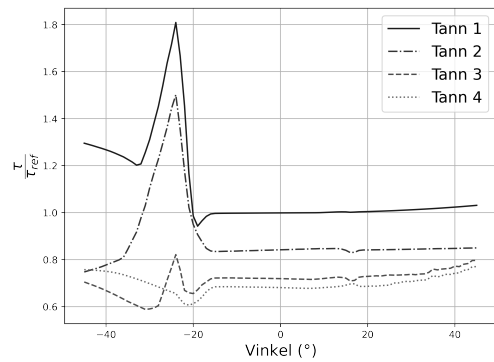
Vinkel,  $\alpha$ , varierer mellom  $-45^\circ$  og  $+45^\circ$  med intervaller på  $1^\circ$ . Resultatet er presentert i figur 5.36. I referansegeometri er kontaktflaten uten helning,  $\alpha = 0^\circ$ .



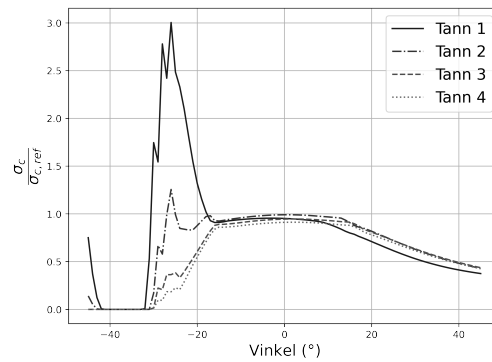
(a) Bruddmek. 1 - Trykk- og strekkspenning



(b) Bruddmek. 2 - Snittspenning



(c) Bruddmek. 3 - Skjærspenning i tverrsnitt



(d) Bruddmek. 4 - Kontaktspenning

Figur 5.36: Parametrisk studie av vinkel på kontaktflate. Verdier normalisert for referansegeometri

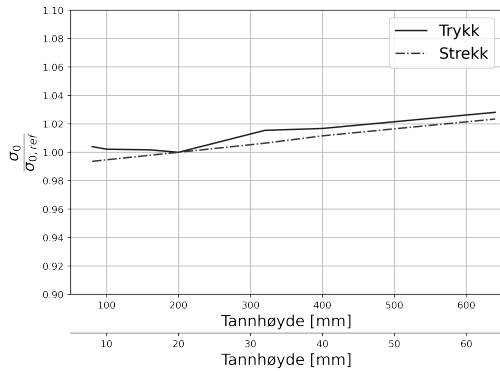
## Endring av tannstørrelse

Størrelsen på tennene varierer, med konstant forhold  $d/c = 1/10$ . Parameterverdier benyttet, baseres på tannlengde som skal gå opp i tannlengde. Det gir følgende verdier:

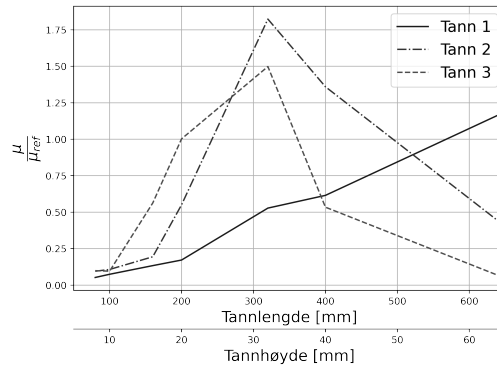
$$c = [80, 100, 160, 200, 320, 400, 640] \text{ mm}$$

$$d = [8, 10, 16, 20, 32, 40, 64] \text{ mm}$$

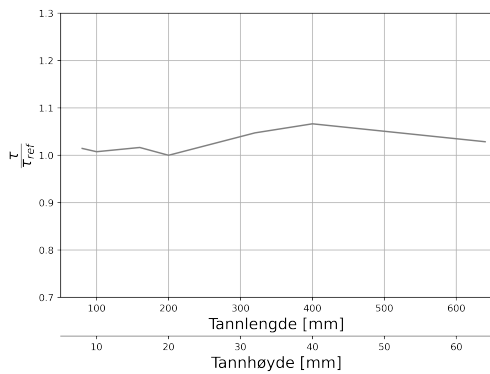
Resultatet er presentert i figur 5.37. I referansegeometri er tannlengde 200 mm og tannhøyde 20 mm.



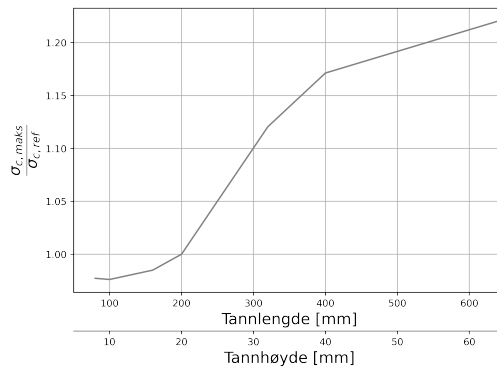
(a) Bruddmek. 1 - Trykk- og strekkspenning



(b) Bruddmek. 2 - Snittspenning



(c) Bruddmek. 3 - Skjærspenning i tverrsnitt



(d) Bruddmek. 4 - Kontaktspenning

Figur 5.37: Parametrisk studie av tannstørrelse. Verdier normalisert for referansegeometri

### 5.2.1 Visuelt optimalisert geometri

Parameterstudie gir utgangspunkt for visuell optimalisering av geometri. Parametere som utgjør visuelt optimalisert geometri presenteres i tabell 5.8. Tabell 5.9 viser differanse i relativ utnyttelse for visuelt optimalisert geometri, sammenlignet med referansegeometri.

| $c$    | $d$   | $\alpha$ | $z/H$ |
|--------|-------|----------|-------|
| 400 mm | 20 mm | 0 °      | 0.65  |

Tabell 5.8: Visuelt optimalisert geometri

| Bruddmek. 1 |        | Bruddmek. 2 | Bruddmek. 3 | Bruddmek. 4 |
|-------------|--------|-------------|-------------|-------------|
| Trykk       | Strekk |             |             |             |
| -1.0 %      | -1.3 % | -15.3 %     | -6.2 %*     | +85.5 %     |

\* Usikkerhet ved resultat

Tabell 5.9: Optimalisert

### 5.2.2 Numerisk optimalisert geometri

For studie av numerisk optimalisering av geometri er utvalgte parametere som skal varieres presentert i tabell 5.10. Det samme er intervallene parameterene skal varieres mellom.

| $c$        | $d$      | $z/H$      |
|------------|----------|------------|
| 100-400 mm | 10-40 mm | 0.5 - 0.65 |

Tabell 5.10: Parameterintervaller for numerisk optimaliseringsstudie

Et utdrag av resultater fra numerisk optimalisert geometri er presentert i tabell 5.11. I tabell framvises bruddlast, geometri og prosentvis utnyttelse av hver bruddform. Fullstendig tabell for 140 unike geometrier er inkludert i vedlegg E.

| Bruddlast<br>[kN] | $z/H$ | Geometri |          | Bruddmekanismer [%] |       |      |      |
|-------------------|-------|----------|----------|---------------------|-------|------|------|
|                   |       | $c$ [mm] | $d$ [mm] | 1                   | 2     | 3    | 4    |
| 66                | 0.6   | 100      | 25       | 102.8               | 90.8  | 56.7 | 30.5 |
| 66                | 0.65  | 100      | 30       | 102.0               | 93.7  | 57.3 | 26.0 |
| 66                | 0.65  | 160      | 20       | 102.6               | 102.9 | 40.9 | 44.2 |
|                   |       |          | ⋮        |                     |       |      |      |
| 56                | 0.65  | 400      | 20       | 88.4                | 100.0 | 32.2 | 89.5 |
|                   |       |          | ⋮        |                     |       |      |      |
| 52                | 0.5   | 200      | 20       | 83.0                | 102.0 | 31.8 | 44.8 |

Tabell 5.11: Utdrag av resultater fra numerisk optimalisert geometri

---

## 6 Diskusjon og konklusjon

Resultater presentert i kapittel 5 skal analyseres og diskuteres med utgangspunkt i teori presentert i kapittel 2 og eksperimentell data fra kapittel 3.

Hoveddel av diskusjon følger samme inndeling som for resultater. Én del for diskusjon av resultater for referansegeometri og én del for diskusjon av resultater tilknyttet optimalisering av geometri. I tillegg presenteres relevante feilkilder tilknyttet studien, og forslag til videre arbeid. Oppdagelser gjort i studie som svarer på oppgavens problemstilling, presenteres i en avsluttende konklusjon.

### 6.1 Feilkilder

Ved bruk av FEM-modell for modellering og kalkulasjon, medfører det feilkilder og usikkerhetsmomenter som skal tas hensyn til. Etersom FEM er en metode som baserer seg på numerisk tilnærming, avviker modellen fra den reelle, fysiske oppførselen. Struktur på mesh har også betydning for riktighet av resultater fra en FEM-modell. Det er mulig å øke antall elementer og frihetsgrader for å redusere usikkerhet, men det fører til mer omfattende modell som vil medføre lengre CPU-tid.

Som forklart i delkapittel 4.6 er det områder i FEM-modellen som er ansett som problematiske. De medfører usikkerhet rundt resultatene når det kommer til spenningsfordeling og -verdi. Det gjelder spesielt i områder ved fortanning.

Når det kommer til sammenligning av FEM-modell med laboratorieforsøk, er det gjort en forenkling ved bjelkens lengde i modell. Modellbjelke er 1.25% kortere enn bjelke benyttet i laboratorieforsøk. Som nevnt i delkapittel 5.1.1, er hensikten med dette å få et helt antall tannlengder på 200 mm til å gå opp i bjelkelengde. Geometrisk ulikhet har betydning for spenninger i bjelke, men vil ikke være av stor betydning ved neglisjerbare differanser.

Bjelker som ble benyttet i laboratorieforsøk, var oppspennet med overhøyde før forsøkene ble utført. I FEM-modell er det gjort en geometrisk forenkling, hvor bjelke ble modellert uten overhøyde. Resultater tilsier at forenkling gir god etterligning av reell bjelke, men en slik forenkling medfører usikkerhet tilknyttet resultater.

### 6.2 Referansegeometri

Resultater for bjelke med referansegeometri er presentert i delkapittel 5.1. Tre hovedområder av resultat er presentert. Det vil være grunnlag for diskusjonsinndeling. Alle tar utgangspunkt i resultater fra modellert bjelke, men med ulike vinklinger. Analytiske resultater skal sammenlignes med eksperimentell data for å verifisere modell. For verifisert modell skal da både spenningsfordelinger og -verdier undersøkes.

#### 6.2.1 Sammenligning med eksperimentell data

Dette delkapittelet tar for seg en sammenligning av resultat fra FEM-modell med resultat fra labresultater, som beskrevet i kapittel 3. Formålet er å sammenligne nedbøyning i FEM-modell og labforsøk for tilsvarende lastsituasjon. Som forklart i delkapittel 4.1.1 er det gjort forenklinger ved geometri i FEM-modell. Bjelken fra labforsøkene har i utgangspunktet overhøyde, mens FEM-modellen baseres på en rett bjelke. Nedbøyningen som måles er framstilt relativt til utgangspunktet.



---

Det er sammenlignet tre FEM-modeller med ulik stivhet i fiberretning,  $E_L$ . Grunnen til det er at det er usikkerhet tilknyttet hva som er korrekt stivhet å benytte. Det ønskes å se hvilken variasjon av nedbøyning det gir. Materialet som ble brukt ved forsøkene var GL30c (limtre) som har en stivhet  $E_L = 13000$  MPa, i NS-EN 14080. Norsk Treteknisk Institutt bruker stivheten  $E_L = 12000$  MPa, mens Rennebu-Bjelken AS har lagt til grunn stivhetstall  $E_L = 11500$  MPa. De ulike tilnærmingene blir undersøkt.

E-modulene presentert gir noe variasjon i nedbøyning, vist i tabell 5.3. En økning av  $E_L$  fra 11500 MPa til 12000 MPa (+4.2%) gir en tilnærmet lik reduksjon i nedbøyning (-4.0%). Tilnærmet like variasjonene forekommer dersom  $E_L$  økes fra 12000 MPa til 13000 MPa. Dette kan sammenlignes med teori for rektangulær bjelke, som tilsier omvendt proporsjonal sammenheng mellom nedbøyning og stivhet. Med dette kan en si at den fortannede bjelken oppfører seg tilnærmet likt som en regulær bjelke, når det kommer til forhold mellom bøyestivhet og nedbøyning.

Som vist i figur 5.1 samsvarer FEM-modell godt med gjennomførte målinger i lab. Samtlige resultater er innenfor en fornuftig toleranse, sammenlignet med labforsøk. Gjennomsnittet av målingene fra labforsøkene er 53.3 mm. Med  $E_L = 12000$  MPa er det et avvik på -1.1%. For de tre ulike E-modulene som ble brukt, er det denne som gir en nedbøyning likest resultater fra labforsøk. Dermed benyttes E-modul lik 12000 MPa videre i oppgaven.

Som diskutert, samsvarer resultat fra FEM-modell godt med resultat fra labforsøk. Det kan tyde på at effekten av å unnlate overhøyde for forenkling av geometri ikke påvirker egenskaper tilknyttet nedbøyning i stor grad. Som nevnt er data presentert relativt til starthøyde, så endelig overhøyde for tilfellene vil være ulik. Hensikten var å studere oppførsel av modellert bjelke uten overhøyde, og se om egenskaper er overførbare til bjelke med overhøyde. For nedbøyningsegenskaper er det etablert at modell uten overhøyde samsvarer godt med reell bjelke. Tilnærming er da foreløpig akseptabel.

Nedbøyning av en regulær bjelke i FEM-modell, med tilsvarende geometri ( $L, B, H$ ), sammenlignes også med numeriske og eksperimentelle resultater. Denne nedbøyningen er 52.3 mm, som er omtrent 1 % lavere enn for fortannet bjelke fra FEM-modell (52.7 mm) og 2 % lavere enn gjennomsnitt fra labforsøk (53.3 mm). Differansen presentert tilsier at fortanning av bjelke ikke er av merkverdig betydning for nedbøyning av bjelke.

## 6.2.2 Spenningsfordeling

Delkapittel 5.1.2 framstiller relevante spenningsfordelinger i områder av interesse. Likt som for regulær bjelke, er det interessant å se på områder hvor det er maksimal bøyespenning og skjærspenning. For dette bjelkekonseptet er det også av interesse å inkludere spenninger som oppstår i og rundt fortanning. Der er det sett på skjærspenninger ( $\tau$ ), aksialspenninger normalt på fiberretning ( $\sigma_{90}$ ) og kontaktspenninger ( $\sigma_c$ ). Referansegeometri, som vist i tabell 5.1, brukes som utgangspunkt for å beskrive spenningsfordelingene i FEM-modellen.

### Aksialspenninger

Aksialspenninger parallelt med fiberretning ( $\sigma_0$ ) i over- og underkant av bjelke, stammer i hovedsak fra bjelkens bøyemoment. Det maksimale bøyemomentet oppstår i midt av bjelkens spenn og avhenger av påsatte punktlaster og egenvekt av bjelken, gitt ved formel (5.1). For en regulær, rektangulær bjelke regnes de teoretiske aksialspenningene fra dette momentet etter formel (5.2).

For å framstille fordelingen av aksialspenning langs bjelkelengde i FEM-modell, er strekkspenninger langs underkant av bjelke studert. Det er også aktuelt å se på trykkspenning i overkant, men her oppstår det lokale spenninger fra lastpåføringen som har innvirkning på aksialspenningene. Nevnte spenningskonsentrasjoner er visualisert i figur 4.28.

---

En rektangulær, massiv bjelke skal i prinsippet ha like stor trykkspenning som strekkspenning på henholdsvis over- og underkant. Det er også tilfellet for fortannet bjelke, som vist i figur 5.4. Fordeling av aksialspenninger i tverrsnittet er tilnærmet lik for FEM-modell av fortannet og regulær bjelke. Det samme gjelder for teoretisk fordeling av spenninger. De økte trykkspenningene i topp av figur kommer av de nevnte spenningskonsentrasjonene fra punktlaster. De kan neglisjeres når en ser på fordeling av spenning fra bøyemoment. Som følge av at størrelse på trykkspenning er tilsvarende som for strekkspenning, fokuseres det bare på strekkspenning når fordeling av aksialspenning langs bjelken betraktes.

Som figur 5.3 viser, er fordeling av strekkspenning langs underkant av en fortannet bjelke tilnærmet lik som for en regulær bjelke i FEM-analyse. Differansen mellom maksimale strekkspenninger er neglisjerbare (1%). Den teoretisk beregnede spenningen avviker i litt større grad fra beregninger i FEM-modellene (4%), men følger samme trend. For FEM-modellene framkommer tilleggsspenninger i bjelkeendene. De kommer av at oppleggene gir konsertert spenning i området. Dette er definert som problematiske områder i delkapittel 4.6, og avvik kan neglisjeres.

Basert på at det er tilnærmet lik fordeling av aksialspenning i fortannet og regulær bjelke, kan teoretisk aksialspenning beregnes fra moment etter formel (5.2). Ved kapasitetskontroller kan det dermed være tilstrekkelig å kontrollere den teoretiske bøyepeningen når det kommer til kontroll av bøyemoment.

### Skjærspenninger

Som nevnt i resultater, er det av interesse å se på skjærspenningsfordeling, både i tverrsnitt og langs fortanning. Dermed studeres skjærspenninger langs en vertikal sti (langs tverrsnitt) og en horisontal sti (langs fortanning). Resultatene er etablert i delkapittel 5.1.2 og sammenlignes med teoretisk beregnede verdier for regulær bjelke.

For skjærspenningene langs fortanningen er det, som nevnt i delkapittel 4.6, nødvendig å se på spenningene en liten avstand fra fortanningen for å unngå singulære verdier. Derfor er stiene lokalisert 15 mm over og under midt av bjelkehøyde. Det tilsvarer 5 mm under hjørne av tann. Etter sammenligning av skjærspenninger framkom det fordeling og størrelse på spenninger var tilsvarende over og under fortanningen, med ett unntak. Unntaket var ved områder nær punktlaster. Her ble spenningene over fortanning i større grad forstyrret av lastpåføring. Derfor inkluderes kun resultater fra under fortanningen, med forbehold om at spenningene over fortanning er tilnærmet lik.

Skjærkraftdiagrammet fremstilt i resultatkapittelet er tilnærmet konstant mellom hver punktlast (figur 5.6). Dette kommer av at materialets egenvekt har liten innvirkning på spenninger, sammenlignet med punktlastene. Skjærkraften varierer dermed i størst grad ved punktlastene. Største skjærkrefter er lokalisert ved oppleggene, men vil være nesten like store fram til nærmeste punktlast.

Fra fordeling av skjærspenning under fortanning, framkommer en sammenheng mellom teoretiske og analytiske verdier. To sentrale punkter er verdt å legge merke til:

- Middelerdi for beregnede verdier er sammenfallende med teoretisk verdi
- Teoretisk skjærspenning er tilnærmet konstant, mens numeriske verdier går i bølger med verditopper ved begge ender av samtlige tenner.

For å tydeliggjøre korrelasjon mellom middelerdi og teori er det, i figur 5.9, framstilt resultantskjær for hver tann, altså en gjennomsnittsverdi for individuelle tenners skjærspenning. For tenner som ikke er forstyrret av opplager eller last, er differansen mellom gjennomsnittlig- og teoretisk verdi neglisjerbar. Det tydeliggjøres av det framstilte forholdstallet mellom dem på omtrent 1.0.

---

Differansen mellom regulær og fortannet bjelke er den irregulære geometrien midt i tverrsnittet. Som framstilt av blant annet Boccadoro et al, vil et innsnitt i geometri føre til lokal opphopning av skjærspenninger ved eksponert hjørne [4]. Dette ble introdusert i figur 2.11 i delkapittel 2.4.3. I modellen vil maksimale skjærspenninger forekomme ved tannhjørner, som predikert. Figur 5.10 visualiserer hvordan spenning fordeler seg like under hver tann, for tenner på venstre halvdel av bjelke. I figur 5.10a er spenningene normalisert med utgangspunkt i egen maksverdi. Her tydeliggjøres tendens med maksimale spenninger ved tann-ende. Etttersom det er et gjentakende mønster med tenner, vil det oppstå opphopning av spenninger, både i front og ende av tann. Det er motsetning til visualisering for én enkelt tann i figur 2.11. Figur 5.10b framstiller spenninger normalisert for største spenningsverdi i fortanning. Det tydeliggjør at tenner nær opplegg opplever største skjærspenninger. Spenninger synker gradvis tann for tann, med en tydelig reduksjon når en ser på motsatt side av punktlast ( $x > L/4$ ).

For å forstå særegenheter ved dette konseptet, er det nødvendig å studere hvordan størrelse på analytiske spenninger er, sammenlignet med teoretiske verdier. Altså hvor mye høyere eller lavere skjærspenninger som oppstår i bjelken grunnet fortanningen. I figur 5.11 er det samlet data for dette størrelsesforholdet. Ved verdier større enn 1.0 vil betydning av fortanning da være økte skjærspenninger. Forholdstallet mellom spenning og teori er presentert både for gjennomsnittlige verdier og for maksimale (singulære) verdier. Av størst interesse er å studere tenner hvor innvirkning av opplager og last ikke er dominerende. Svarte stolper markerer at forholdstallet mellom gjennomsnittsverdier og teoretiske verdier ligger rundt 1.0, som poengtert. Grå stolper tilsier at maksverdier er omtrent 50 % større enn hva teoretiske verdier tilsier. Det medfører at ved en gitt lastsituasjon, vil største verdi for skjærspenning være 50% høyere i en slik fortannet bjelke, enn for en regulær bjelke.

Videre diskuteres skjærspenningsfordeling i tverrsnitt. Som etablert, vil hjørnene ved tannens vertikale kontaktflate ha problematiske punkter, hvor numeriske verdier ikke er konvergerende. Det medfører at framstillingen påvirkes av hvor i tanngemetrien snittet plasseres. Dersom spenningsfordeling hentes ved kontaktflatene, vil det være tydelig hopp i verdier nær tverrsnittets tyngdepunkt. Denne oppførsel er visualisert i figur 5.12. Hentes verdier fra tverrsnitt midt i tannens lengde, vil problematiske punkter ikke ha samme innvirkning, vist i figur 5.13. Studien handler om å framstille spenninger for skjærbrudd i tverrsnitt. Det er da ønskelig å unngå påvirkning av spenninger i kontaktflate. Med grunnlag i dette, og for å unngå spenningssingulariteter, er det fornuftig å ta utgangspunkt i fordeling av skjærspenning i midten av hver tann.

Figur 5.13 indikerer hvordan fortanning påvirker spenningsfordeling, sammenlignet med situasjon for tilsvarende bjelke uten fortanning. Teori for rektangulær bjelke tilsier parabolisk fordeling med én topp i tverrsnittets tyngdepunkt. Fra figur framkommer det at bjelke med fortanning vil derimot ha én topp i hver av de to komponentene, med et lokalt minimum i fortanning. Det medfører at maksimale verdier er større enn for regulær bjelke. Ved studier av spenningsfordeling i tverrsnitt, tann for tann, kommer det fram at de to nærmeste tennene til opplager får større spenningsstopp i nedre bjelkedel enn øvre. Dette følger av spenningens kraftgang ned til opplager. For resterende tenner, framkommer det to like store topper fordelt på bjelkekomponentene. Toppene forekommer i område hvor stiene UF og OF, fra figur 5.7, er lokalisert.

Den teoretiske skjærkraften ved tann 1, regnet etter formel (5.5), blir 20.4 kN. Selv om skjærspenninger påvirkes av opplager i dette området, samsvarer verdi for resulterende skjærkraft med teoretisk verdi (0.6% differanse). Det medfører at når maksverdi øker grunnet nærhet til opplager, vil spenninger andre steder i snittet reduseres.

---

## Spenninger normalt på fiberretning

Som forklart i delkapittel 2.4.4, er det aktuelt å analysere aksialspenninger som oppstår normalt på fiberretning ved fortanningen,  $\sigma_{90}$ . Det er av størst interesse å fokusere på strekkspenningene, ettersom de vil ha ugunstig effekt i kombinasjon med skjærspenninger. Spenningene oppstår grunnet kontaktkrefter i fortanningen og vil da ikke forekomme i en regulær bjelke.

Aksialspenningene,  $\sigma_{90}$ , er hentet fra samme sted som skjærspenning (UF og OF). Som forklart i delkapittel 4.6, er dette et område hvor singularitet påvirker resultatet, i likhet med for skjærspenning. Ettersom både størrelse og fordeling er tilnærmet like for  $\sigma_{90}$  over og under fortanning, er det valgt å fokusere på  $\sigma_{90}$  under fortanning. Det er videre hensiktsmessig å hente  $\tau$  og  $\sigma_{90}$  fra samme område. Dermed er verdier for begge spenningsformene hentet fra sti under fortanning.

Fordeling av  $\sigma_{90}$  viser variasjon mellom strekk- og trykkspenninger. Det framkommer skille i størrelse og form ut ifra hvilken side av punktlast som undersøkes. I likhet med for skjærspenning, vil  $\sigma_{90}$  ha større verdier nær opplager ( $x < L/4$ ), enn nær feltmidt ( $x > L/4$ ). Ved etablert lastsituasjon vil påsatte krefter presse de to komponentene sammen. Det tilsier trykkrefter normalt på fiberretning. Fra figur 5.16 framkommer dette for mesteparten av tannlengden, men nær tannender forekommer endring over til strekkspenninger. I figur 5.18 er det tydeliggjort at strekkspenningene normalt på fiberretning kun oppstår rundt hjørne av tann. Strekkspenningene oppstår grunnet kontaktkrefter mellom tenner. Kontaktspenninger vil medføre roterende krefter, grunnet eksentrisitet til lasttyngdepunkt. For å motvirke rotasjon må motsatt rettede strekkspenninger oppstå. Korrelasjon mellom  $\sigma_c$  og  $\sigma_{90}$  ble framstilt i delkapittel 2.4.7. I formel (2.22) ble det etablert lineært forhold mellom størrelse på kontaktkraft og strekkspenning normalt på fiberretning. Figur 5.17b visualiserer at  $\sigma_{90}$  har største verdier nær opplager. Som framstilt i figur 5.21, vil største kontaktspenninger oppstå i tenner nær opplager.

Selv om størst andel av hver tann er i trykk, er det strekkspenningene som er av størst interesse. Større maksverdi og lavere materialkapasitet for strekk- enn trykkspenninger er grunnlag for dette.

## Skjær i kombinasjon med spenninger normalt på fiberretning

Korrelasjon mellom skjærspenninger ( $\tau$ ) og trykk- og strekkspenninger ( $\sigma_{90}$ ), som etablert i teorigapittel, skal betraktes. Strekkspenninger er ugunstig i kombinasjon med skjærspenninger, mens trykkspenninger har motsatt effekt, som presentert i delkapittel 2.4.7. Å studere spenninger som virker normalt på fiberretning ved fortanning sammen med skjærspenninger i samme område, er dermed aktuelt. I figur 5.19 er normaliserte grafer for  $\sigma_{90}$  og  $\tau$  plottet sammen. Det framkommer at lokalisering av maksimale spenninger for de to spenningsformene er sammenfallende. Områdene hvor dette skjer, er ved front og ende av hver tann. Der vil maksimale verdier forekomme, og spenninger vil avta kvadratisk mot midt av tann. Felles for spenningsformene er maksimale verdier i tenner nært opplegg.

Ved bruk av snittspenningsmetoden (delkapittel 2.4.5) for kombinasjon av spenningene, er det vist at tann 3 er mest kritisk. Det er framstilt i figur 5.20. Fra resultater kommer det fram at spenningsnivået er betraktelig lavere på høyre side av første punktlast ( $x > L/4$ ).

## Kontaktspenninger

Som presentert, er kontaktspenning ( $\sigma_c$ ) bestemt ved å regne gjennomsnittlig verdi fra de tre midterste nodene i kontaktflaten. De største kontaktspenningene framkommer ved begge ender av bjelken, som vist i figur 5.21. Figuren viser også at det er en symmetrisk fordeling langs bjelkelengden. Likt som ved resultantskjær, er det tann nummer 2 som har størst kontaktspenning. Det er et tydelig skille mellom tann 6 og tann 9. Der er en punktlast lokalisert. Korrelasjon mellom  $\sigma_c$  og spenninger  $\tau$  og  $\sigma_{90}$  framkommer. Det begrunnes av teori presentert i delkapittel 2.4.7.

I figur lokaliseres største spenninger. Det er vist at spenning i tenner nær feltmidt ikke er kritisk for denne bruddmekanismen. Liten andel av krefter overføres mellom komponentene her. For de mer utsatte tennene, nært opplager, framkommer gradvis økning av spenninger mot ende. Når kritiske spenninger skal kontrolleres, vil det være hensiktsmessig å kontrollere verdi i tenner nær opplager.

---

Spenningsfordelingene presentert i resultater er basert på én bestemt geometri. For andre geometribestemmelser er det grunn til å tro at spenningsfordelingene har tilsvarende tendenser. Tanngeometrien som er brukt som referanse, danner et samvirke mellom komponentene som gjør at den fortannede bjelken oppfører seg tilsvarende som en regulær bjelke. Det medfører at det kan antas at endring av  $L$ ,  $B$  og  $H$  vil ha samme effekt som for en regulær bjelke.

### 6.2.3 Bruddmekanismer

Delkapittel 5.1.3 tar for seg resultater tilknyttet relevante bruddmekanismer. Her analyseres det ved hvilket lastnivå brudd kan forventes for de ulike bruddmekanismene.

Resultater fra laboratorieforsøk viser at samtlige testbjelker gikk til brudd ved enten bruddmekanisme 1 (52%) eller 2 (48%). Det er derfor forventet at resultater fra FEM-modell vil tilsi en lavere kapasitet for nevnte bruddmekanismer, sammenlignet med bruddmekanisme 3 og 4.

#### Bruddmekanisme 1

Figur 5.23 viser at med kapasitet på 39 MPa for bøyespenning, vil det teoretisk oppstå brudd ved last lik 63 kN. Til sammenligning var gjennomsnittlig bruddlast for labforsøk hvor bjelken gikk til brudd i fingerskjøt på 52 kN. Analytisk kapasitet er dermed 13 % høyere. Som presentert tidligere, er det tre faktorer som gjør at forskjellen reelt sett er mindre. I kapittel 3 forklares det at bruddlast fra labforsøk i realiteten er høyere enn hva som brukes som resultat. Det forklares også at det er betydelige feil ved materialet, som spesielt går ut over kapasitet for bruddmekanisme 1. Delkapittel 5.1.1 beskriver at lengden til bjelken i FEM-modell er noe kortere enn ved labforsøkene. De tre faktorene bidrar til å øke forskjellen mellom analytisk bruddlast ved FEM-modell og målt bruddlast fra labforsøk.

Faktorene tatt i betraktning, kan det antas at differansen mellom resultat fra FEM-modell og labforsøk er relativt lav.

Delkapittel 5.1.2 presenterer fordeling av aksialspenning i tverrsnitt for fortannet, regulær og teoretisk bjelke. Maksimale verdier er tilnærmet like for alle tilfeller. Det kan dermed forventes at den fortannede bjelken har tilnærmet lik kapasitet for bruddmekanisme 1 som teori for regulær bjelke tilsier.

Som presentert i delkapittel 2.2, vil bjelken få aksialspenninger ved oppspenning. De vil være motsatt rettet enn hva påsatte laster medfører og dermed være gunstige. Som etablert vil maksimale spenninger fra FEM-modell uten overhøyde, samsvare med resultater for bjelke i lab med overhøyde. Det tilsier at de initiale spenningene, fra oppspenningen, har lav effekt. Relaksasjon, presentert i delkapittel 2.1, er av betydning for dette. At resultater fra modell uten overhøyde samsvarer med labresultater, når det kommer til bruddlast, argumenterer for at det er tilstrekkelig å modellere uten overhøyde.

#### Bruddmekanisme 2

For bruddmekanisme 2 brukes kapasitet for både skjærspenning ( $f_{v,snitt}$ ) og strekkspenning normalt på fiberretning ( $f_{90,snitt}$ ). Kapasitetene er henholdsvis 4.5 MPa og 0.9 MPa for GL30c, etter tabell 2.3. I resultatet betraktes opptredende spenninger,  $\tau$  og  $\sigma_{90}$  både individuelt og i kombinasjon.

Figur 5.24 viser maksimal og gjennomsnittlig skjærspenning ved økende last. Sammenlignet med kapasitet,  $f_{v,snitt}$ , er verdiene relativt lave. For bruddlast definert fra labforsøk for bruddmekanisme 2, er gjennomsnittlig og maksimal skjærspenning henholdsvis 32% og 44% av  $f_{v,snitt}$ . Betydelig differanse mellom spenning og kapasitet tydeliggjør at det ikke er rene skjærbrudd som oppstår. Skjærspenning må betraktes i sammenheng med opptredende strekkspenning,  $\sigma_{90}$ , for at bruddmekanismen skal kunne forklares.

---

Maksimal strekkspenning,  $\sigma_{90}$ , ved økende belastning presenteres i figur 5.25. I likhet med skjær, vil singulære spenningsverdier forekomme i tannhjørner. Derfor inneholder figuren resultater både med og uten maksimalverdi (topp). Figuren viser betydelig forskjell mellom resultatene. Dette er forventet grunnet spenningskonsentrasjon lokalt ved tannhjørne. Inkluderes topp i resultater, vil spenninger overskride strekkkapasitet,  $f_{90,snitt}$  for alle presenterte laster. Ved å følge lineær kurve kapasitetslinje, framkommer det at kapasitet nås ved pålastning på 35 kN. Denne lasten er 37% lavere enn gjennomsnittlig bruddlast fra lab for bruddmekanisme 2. Ved tilsvarende analyse for resultater uten topp, overskrider  $\sigma_{90}$  strekkkapasiteten ved 90 kN. Det er 47% høyere enn gjennomsnittlig bruddlast fra for bruddmekanisme 2. Siden ingen av labforsøkene gikk til brudd ved kun strekkspenning,  $\sigma_{90}$ , er det av større hensikt å studere slike spenninger i kombinasjon med skjær.

I figur 5.26 er bruddkriteriet for kombinerte spenninger, etter formel (2.9), visualisert for økende belastning. Bruddkriteriet inkluderer kombinasjon av  $\tau$  og  $\sigma_{90}$ . Som diskutert, er singulære spenninger et aktuelt tema for begge spenningsformene, grunnet fortanningens geometri. Dermed vil singularitet være av betydning for dette bruddkriteriet og utnyttelse for både med og uten topp er markert med egen kurve i figuren. Ved inkludering av topp framkommer det at brudd vil oppstå før betydelig belastning. Det er tydelig at slik teori og labresultat ikke stemmer overens. Dersom topp ekskluderes, vil utnyttelsen bli som i nederste kurve. Slike spenninger er mer overensstemt med utfall av labresultater.

Det kan argumenteres for at resultater, både med og uten topp, er lite egnet for forståelse av opptredende bruddmekanisme. Dersom topp inkluderes, samsvarer modellerte resultater dårlig med virkelig oppførsel av bjelke. Dersom topp ekskluderes, baseres resultater på en tilnærming som styres av modellutforming og utformet mesh, framfor å styres av opptredende spenninger.

Fra figur med snittspenningsmetoden (figur 5.27), framkommer korrelasjon mellom teoretiske verdier og labresultater. Ettersom kontroll er basert på Norris' kriterium hvor spenningsforhold er kvadrert, øker utnyttelsen kvadratisk med lineært økende last. Figuren viser at det forventes skjærbrudd i fortanning ved last lik 53 kN. Dette er 8% lavere enn gjennomsnittlig bruddlast fra labforsøk for bruddmekanisme 2.

Som introdusert i delkapittel 2.4.5 er ikke-lineær spenningsfordeling ved slike spenninger mulig. Grunnet tilnærmet versjon av snittspenningsmetode er det besluttet å basere analyse på lineær-elastisk spenningsfordeling. Hensikten er å ikke benytte seg av reduserte spenninger når det er usikkerhet tilknyttet resultat. Altså en konservativ tilnærming. Samtlige kontroller for bruddmekanisme 2 baseres da på lineær-elastisk bruddmekanikk (LEFM).

Snittspenningsmetoden blir prioritert i videre studier. Det anses som mest hensiktsmessig når det omhandler spenningssingularitet. I tillegg til at denne metoden samsvarer best med eksperimentell data, er det også metoden som i størst grad tar hensyn til materialets egenskaper. Metoden tar hensyn til materialets delvis sprøe egenskaper i form av spenningskontroll over bruddflate, framfor i ett bruddpunkt, som diskutert i delkapittel 2.1. Gunstig spenningsomfordeling ved høy belastning gir høyere kapasitet for denne bruddformen. Det medfører at numeriske verdier stemmer overens med forsøk fra lab. Videre vil slik kontroll inkludere alle kritiske spenninger, uten at singulære spenninger ekskluderes.

---

### Bruddmekanisme 3

Som tidligere forklar, hentes skjærspenning i tverrsnitt fra midten av hver tann. For å unngå forstyrrelser fra opplager ekskluderes tann 1. Basert på spenningsfordelinger presentert, er det da tann 2 som har størst skjærspenning i tverrsnittet.

Som resultat presentert i figur 5.28 viser, er det lav sannsynlighet for at det vil oppstå brudd som følge av skjærspenninger i tverrsnitt. Dette vises også ved laboratorieforsøk. Med lineær økning av skjærspenning, er det forventet å nå bruddmekanisme 3 ved last rundt 160 kN. Dette er en urealistisk høy bruddlast, og som vist i resultater vil brudd forekomme tidligere for en av de andre bruddmekanismene.

I delkapittel 5.1.2 beskrives sammenligningen av skjærspenning i fortannet og regulær bjelke. Der er det vist at slike spenninger i den fortannede bjelken er omtrent 20% høyere enn i den regulære. Derfor kan det antas at den fortannede bjelken har noe lavere kapasitet når det kommer til skjærbrudd i tverrsnitt, sammenlignet med ordinær bjelke.

For kontroll av skjærspenninger skal faktoren  $b_{ef}$  benyttes, som teoretisk presentert i delkapittel 2.4.3. Dette kan medføre reduksjon av effektiv bjelkebredde, og dermed en reduksjon av skjærkapasitet.

### Bruddmekanisme 4

Det var ingen labforsøk som tilsa at bruddmekanisme 4 var kritisk. Det gjenspeiles i figur 5.29. Kapasitet for trykkspenninger i fiberretning er definert til 30 MPa. Dette er betydelig høyere enn spenninger som oppstår ved realistisk belastning.

Ved lineær økning av kontaktspenning,  $\sigma_c$ , er det forventet at spenning overskrider kapasitet ( $f_{c,0}$ ) ved last lik 117 kN. I tillegg vil slik trykkbelastning kunne medføre plastisk spenningsfordeling og da ekstra kapasitet. Dette tydeliggjør at en kan forvente brudd ved en av de andre bruddmekanismene før denne.

Som diskutert er det kontaktkrefter i form av trykk som overfører krefter mellom de to bjelkekomponentene. Størrelsen på kontaktspenningene vil da være tydelig indikator på hvilke spenninger som opptrer. Både skjærspenninger under fortanning og strekkspenninger normalt på fiberretning bestemmes i stor grad av disse kontaktspenningene. Det er grunnen til at kurven presenteres opp mot labresultater for bruddmekanisme 2, i figur 5.29. Sammenheng mellom  $\sigma_c$  og  $\tau$  og  $\sigma_{90}$  presenteres i henholdsvis formel (2.21) og (2.22). Begge formlene tilsier lineær spenningsøkning ved økt lastøkning. Slik lineær økning av framkommer fra figur 5.29. Det medfører mer forutsigbarhet for bruddmekanisme 2.

---

## 6.3 Optimalisering av tanngeometri

Dette delkapittelet tar for seg drøfting rundt optimalisering av fortanningsgeometri ( $c$ ,  $d$ ,  $z/H$  og  $\alpha$ ). Bjelkens ytre geometri ( $L$ ,  $B$  og  $H$ ) beholdes lik som referansegeometrien. Lastsituasjonen er også tilsvarende.

En eksisterende bjelke med fortanning har til nå blitt modellert og modellen har blitt validert av data fra labforsøk. Videre formål er å utnytte parametrisk utforming av modell. Hensikten er å bestemme de ulike geometriparameternes betydning på kapasitetsutnyttelse. Ved optimal geometrisammensetning skal utfall tilsvare bjelke med optimal utnyttelse. Optimal bjelke vil ha høyest bruddlast.

### 6.3.1 Parameterstudie

Ettersom hensikten er å utforme bjelken for optimal spenningsfordeling, vil de fire definerte bruddmekanismene være utgangspunktet for optimaliseringsstudien. Det er etablert at bruddmekanisme 1 og 2 er mest kritiske, og vil da vektas ekstra. Ønsket utfall med parameterstudien er å etablere betydning av utvalgte geometriparametere for maksimale spenninger.

#### Endring av tannhøyde

Figur 5.30a tydeliggjør at tannens høyde ikke er av betydning for bruddmekanisme 1. Som etablert, vil strekk- og trykkspenninger i topp og bunn av bjelke oppføre seg tilsvarende som for regulær bjelke. Så lenge størrelse på tannhøyde er innenfor et intervall hvor de to komponentene samhandler som ønsket, vil da slike spenninger oppføre seg som ved en bjelke uten fortanning.

For bruddmekanisme 2 kommer det fram at økende tannhøyde ( $d$ ), gir økende spenninger ved snittspenningsmetoden. Som figur 5.30b viser, kommer det i størst grad av at strekkspenning,  $\sigma_{90}$  øker. Grunnen til at  $\sigma_{90}$  øker kommer av at eksentrisiteten til kontaktkraften øker. Med en større tannhøyde vil avstand fra tannhjørne til senter av kontaktkraft være lengre. Lav  $d$  er dermed gunstig når det kommer til bruddmekanisme 2.

For bruddmekanisme 3 er resultatet todelt (figur 5.30c). I intervallet fra  $c = 10$  til 30 mm er det en svak reduksjon av maksimal skjærspenning, etterfulgt av større økning ved høyere tenner ( $d > 30$  mm). Av størst interesse er å fokusere på venstre halvdel av graf ( $d < 30$  mm). Når  $d$  øker, øker helningen på topp av tann ( $\theta = d/c$ ). Den økende skjærspenningen må betraktes i sammenheng med økende  $\theta$ . Helningen styrer hvordan skjærspenninger oppfører seg midt i tann. Ved referansegeometri ( $\theta = 1/10$ ) vil det være reduserte spenninger rundt  $H/2$ . Det blir tilsvarende innhuk som framkommer i figur 5.15a og 5.15b. Når  $d$  øker vil det være motsatt virkning, vist i figur 5.31. Grunnet stor helning oppstår det konsentrerte skjærspenninger i midt av tann, framfor reduserte spenninger. Dette forklarer økningen som framkommer i resultatet. Den økte skjærspenningen skjer når  $d \geq 28$  mm, altså når  $\theta \geq 1/8$ . Resultatet viser at  $d \approx 25$  mm er gunstig for bruddmekanisme 3.

For bruddmekanisme 4 framkommer tydelig reduksjon i kontaktspenninger med økt  $d$ . Som vist i figur 5.32, øker kontaktkraft med økende  $d$ . Grunnen til at spenningen reduseres kommer av at arealet til kontaktflaten øker, som gir større flate å fordele kraften på. Eksempelvis vil halvering av tannhøyde fra referansegeometrien, tilnærmet doble kontaktspenning. For å redusere kontaktspenningene er det dermed gunstig med høy  $d$ .

Fra parameterstudie av tannhøyde framkommer påvirkning på spenninger for bruddmekanisme 2, 3, og 4. Som diskutert har bruddmekanisme 3 og 4 lav utnyttelse ved referansegeometri, mens bruddmekanisme 2 er i større grad kritisk. Å redusere  $d$  kan da være av interesse for å optimalisere geometri. Eksempelvis kan  $d$  reduseres til 10 mm for å redusere utnyttelse av bruddmekanisme 2 med 25%, men da dobles kontaktspenninger. En slik omfordeling av spenninger kan være gunstig.



---

## Endring av tannlengde

Endring av tannlengde ( $c$ ) medfører en mer fundamental endring av bjelkeutforming enn ved endring av høyde,  $d$ . Antall tenner er direkte proporsjonal med lengden på hver tann. Dersom tannlengde halveres, vil det medføre doubling av antall tenner. Flere tenner gir flere sammenkoblingspunkter mellom komponentene. Videre vil endring av tannlengde påvirke lokalisering av målingspunkt. Jo lengre en tann er, desto lengre avstand fra opplegg er første målingspunkt. Å sammenligne verdier for tenner hver for seg, vil påvirkes av dette. Endring av tannlengde vil også ha betydning for data presentert i graf ettersom det kun benyttes tannlengder som går opp med bjelkens lengde. Utfallet blir at det er tettere mellom målinger i venstre halvdel av graf, siden det ikke er like mange lengder som går opp i bjelkens lengde ved større  $c$ . Ved stor  $c$  blir det da et grovere estimat.

Resultater for bruddmekanisme 1 presenteres i figur 5.33a. Kurve for strekk og trykk øker tilnærmet lineært med økende tannlengde. Økningen er relativt lav. Firedobling av  $c$ , som er en betydelig geometriendring, gir 5% økning av opptredende spenninger. En slik stigning gjør at det er av liten betydning, for bruddmekanisme 1, å endre  $c$ .

Tannlengde har større betydning for bruddmekanisme 2. Figur 5.33b viser stor variasjon av resultat. Det må igjen poengteres betydningen av at målepunkt forflyttes. Det er valgt å kun fokusere på tann 1, 2 og 3, ettersom de antas å være mest kritisk. Figur 5.20 viser at tann 3 er den mest kritiske ved referansegeometri for denne bruddmekanismen. Det forventes at ved høyere tannlengder ( $c > 200$  mm), vil tann 1 og tann 2 bli mer kritisk, siden hjørne av tann lokaliseres lengre bort fra opplegg. For  $c < 200$  mm viser resultatet en tydelig nedgang av opptredende spenninger. Det kommer av at kontaktkreftene fordeles over et større antall tenner. For bruddmekanisme 2 viser resultatene at det er gunstig å redusere tannlengden for å fordele spenningene i større grad.

Variasjoner for skjærspenninger i bruddmekanisme 3 kan forklares likt som for endring av tannhøyde. Korte tannlengder gir større helning,  $\theta$ , som fører til spenningskonsentrasjon midt i tann. Dette skjer ved  $c \leq 160$  mm. For helning tilsier det når  $\theta \geq 1/8$ , altså ved samme helning som presentert for tannhøyde. Det kan dermed antas at  $\theta > 1/8$  er ugunstig for en vilkårlig størrelse på tann, for denne bruddmekanismen.

I intervallet  $160 \leq c \leq 640$  mm er det lite variasjon av største skjærspenning. Fra  $c = 640$  til 800 mm er det en liten økning av skjærspenning (+5%), som kan komme av redusert samvirke mellom komponentene. Ved  $c = 800$  mm viser skjærspenningsfordelingen større differanse av maksimal verdi i hver komponent, som kan tyde på at én komponent er mer belastet enn den andre. Tannlengde innenfor følgende intervall er dermed gunstig for bruddmekanisme 3:

$$160 \leq c \leq 640 \text{ mm}$$

For bruddmekanisme 4 framkommer en lineær økning i kontaktspenninger ved økende tannlengde. Grunnleggende årsak for slik utvikling, er antall kontaktflater krefter fordeler seg på. Når uforandret pålastning skal fordeles på færre antall kontaktflater, tilsier det større spenning per kontaktflate. Dette gjenspeiler grafen, som er plottet for maksverdier. For bruddmekanisme 4 er det dermed gunstig med flere og kortere tenner enn ved referansegeometrien.

Fra tannlengdestudien framkommer altså at lengden styrer hvor mange tenner som fordeler krefter fra øvre komponent til nedre. Lange tenner fører til betydelig større kontaktspenninger, men som tidligere diskutert er det for denne bruddmekanismen liten utnyttelse i utgangspunktet. For bruddmekanisme 2, som er mer kritisk, kan utnyttelse reduseres ved å redusere tannlengde til under 200 mm. Å øke antall tenner å fordele krefter på, kan dermed virke hensiktsfullt. Det må da vurderes om lengder under 200 mm vil være av tilstrekkelig størrelse for å ha fungerende samvirke.

---

## Endring av fortanningslokasjon

For å undersøke hvordan fortanningens lokasjon i høyden ( $z/H$ ) påvirker resultater, er det valgt å analysere verdier innenfor følgende intervaller:

$$0.1 \leq z/H \leq 0.9$$

For hvert av ytterpunktene er én komponent betydelig mer dominerende enn den andre. Det må derfor vurderes om bjelken opptrer som en sammensatt bjelke, eller om den ene komponenten opptrer i størst grad alene og blir styrende for kapasitet.

Fortanningslokasjon er av betydning for fordeling av aksialspenninger og hvordan de fordeler seg på de to komponentene. Figur 5.34a viser at størst variasjon skjer utenfor intervallet:

$$0.35 \leq z/H \leq 0.65$$

Grunnen til det, kommer av at én komponent blir mer dominerende enn den andre, som tidligere forklart. Det antas derfor at for en bjelke med fortanning utenfor dette intervallet ikke vil være et tilstrekkelig samvirke.

Som etablert, er verdiene for trykk- og strekkspenning like store ved midtstilt fortanning. For  $z/H \neq 0.5$ , er verdiene ulike, grunnet ulik høyde på komponentene. Uavhengig av hvor fortanning plasseres, må trykkrefter fra pålastning overføres fra øvre til nedre komponent. Dersom fortanningen er i øvre sjikt av bjelkehøyde, blir det et mindre areal å fordele kreftene på, og dermed større trykkspenninger i topp. Dette blir tydelig når  $z/H$  er større enn 0.7. Tilsvarende framkommer tydelig reduksjon i strekkspenninger i bunn av bjelke når  $z/H$  er mindre enn 0.3. Siden krefter skal føres til opplagere og fortanning er lavt plassert, vil spenninger føres mot opplager i øvre komponent. Da tas mindre spenninger opp i nedre komponent. For verdier innenfor intervallet,  $0.35 \leq z/H \leq 0.65$ , er det lav variasjon ( $\pm 3\%$ ).

For bruddmekanisme 2 er det største verdier ved  $z/H = 0.4$ , omtrent 5% høyere enn ved referansegeometri. For  $z/H$  høyere og lavere enn 0.4 er verdiene avtagende. Etersom det for en teoretisk bjelke vil være maks skjærspenninger ved midten av bjelkehøyde, kan være med på å forklare resultater. Som visualisert i 5.34d, vil det også være største kontaktspenninger når fortanning er midtstilt. Som diskutert, er det nær sammenheng mellom slike spenninger og de relevante spenningene for bruddmekanisme 2. Ved å forflytte fortanning opp fra  $H/2$  reduseres spenninger for bruddmekanisme 2 ( $\tau$  og  $\sigma_{90}$ ). Eksempelvis vil  $z/H = 0.6$  gi 20% reduksjon, sammenlignet med referansen. Fortanningslokasjon under tverrsnittets tyngdepunkt anses ikke som relevant for denne bruddmekanismen, da plassering må være under  $z/H = 0.3$  for å få spenninger lavere enn referanse.

Som etablert, har nærhet til opplager betydning for skjær i tverrsnitt. Dette gjenspeiles i bruddmekanisme 3 for tann 2. Den skiller seg ut med jevnt over høyere verdier, ettersom tann påvirkes av krefter som skal ned til opplager. Når fortanning er i nedre halvdel av bjelke vil ikke tann 2 i like stor grad påvirkes av krefter som føres ned til opplager. Resterende tenner har lite variasjon i denne studien.

For bruddmekanisme 4 vil største kontaktspenninger forekomme ved fortanning midt i høyden ( $z/H = 0.5$ ). Det kan sees i sammenheng med at lokasjon av maksimale skjærspenninger sammenfaller med lokasjon av fortanning. Ved fortanning midt i bjelkehøyden vil det være tydelig skille mellom én komponent i strekk og én i trykk. De står i spenn mot hverandre, og krefter overføres som trykkrefter i fortanningen.

Resultater viser at det er gunstig å plassere fortanningen over  $H/2$ .

---

### Endring av vinkel på kontaktflate

Resultatene for endring av vinkel ( $\alpha$ ) på kontaktflate tilsier stor variasjon når  $\alpha$  nærmer seg  $\pm 20^\circ$ . Det er grunnet interaksjon mellom komponentene. Når  $\alpha$  blir for stor, vil det i modellen oppstå gliper mellom komponentene, som er av betydning for samhandling. Resultater tilsier at problematikken oppstår rundt  $\pm 18^\circ$ . Av den grunn er det av interesse å skille mellom oppførsel i og utenfor intervallet:

$$-18^\circ \leq \alpha \leq +18^\circ$$

Resultater innenfor dette intervallet er tilnærmet upåvirket av endring av vinkel. Det gjelder for alle bruddmekanismer. Forskning på mikrotenner, presentert i tidligere forskning (delkapittel 1.5), resulterte i tilsvarende konklusjon. Altså at vinkel på kontaktflate ikke er av relevant betydning [3]. At resultater stemmer overens med tidligere forskning, forsterker denne studiens troverdighet.

Fra parameterstudien av kontaktflatevinkel, kan det tolkes at  $\alpha$  bør være innenfor definert intervall for å sikre samvirke. Videre kan det med hensyn til praktisk utforming være problematisk å utføre sammenkobling ved store helninger. Dersom det skulle bli ønskelig å ha vinkel på kontaktflatene, tilsier studien at det ikke vil gi reduserte kapasiteter, med vinkel innenfor intervallet. Utfallet av denne studien samsvarer godt med litteratur presentert tidligere.

### Endring av størrelse på tann

Ved denne studien endres størrelsen på tann, med konstant helning ( $\theta = 1/10$ ). Det vil si at  $c$  er alltid lik  $10d$ . Med denne helningen er det vist at en unngår spenningsoppbygning midt i tann for bruddmekanisme 3.

Endring av tannens størrelse gir samme virkninger som ved endring av lengde, når det kommer til forskjøvet målingspunkt og antall tenner.

Ved studier av modell og resultater, framkommer det at opptredende aksialspenninger i bunn av bjelke og skjærspenninger i tverrsnitt ikke endres betydelig ved endring av tannstørrelse. Bruddmekanisme 1 og 3 påvirkes dermed ikke nevneverdig av denne parameteren.

Bruddmekanisme 2 ved denne parameterstudien har tilsvarende resonnement som parameterstudien for tannlengder. Det vil si maksimale skjær- og strekkspenning ved  $c = 320$  mm og  $d = 32$  mm og lave verdier ved flere, mindre tenner.

For kontaktspenninger har resultatet samme trend som ved endring av tannlengde. Verdiene er økende med økende størrelse på tann, men med ulik størrelsesorden enn ved tannlengdestudien. Kontaktspenningene i denne studien øker omtrent 20% fra referansegeometri til geometri med  $c = 640$  mm og  $d = 64$  mm. Med tilsvarende endring for kun tannlengde (fra  $c = 200$  til  $c = 640$  mm) øker kontaktspenningene omtrent 350%. Differansen i vekst kommer av at  $d$  ikke holdes konstant i denne studien, så kontaktflaten øker. Det medfører at de voksende kreftene har større areal å fordeles på. Spenningene øker, med økende belastning, men ikke med like stort stigningstall.

For resultater fra studie av tannstørrelse er det tydelig at flere og mindre tenner er gunstig.

---

### 6.3.2 Visuelt optimalisert geometri

Denne delen tar for seg en visuell optimalisering av geometrien. Med det menes at en visuelt analyserer resultater for parameterstudien, for å utforme en foreslått optimalisert geometri. Resultater fra parametriske studier gir utgangspunkt for å tilpasse geometrisk utforming for å optimalisere spenningsfordeling i bjelken. Som presentert, vil variasjoner i geometri ha liten innvirkning på bruddmekanisme 1 ved realistiske parametere. Tilpasning av aktuelle geometriske parametere vil ha større betydning for bruddmekanisme 2, 3 og 4. Av størst hensikt er å redusere spenninger involvert i bruddmekanisme 1 og 2 grunnet kapasitetsutnyttelse, som vist i delkapittel 5.1.3. Av den grunn vil optimaliseringen baseres på tilpasning av bruddmekanisme 2.

I parameterstudien ble betydning av tannlengde diskutert. Laveste spenninger var å finne ved lengder innenfor to intervaller:

$$c \leq 200\text{mm}$$

$$320\text{mm} < c < 600\text{mm}$$

Videre er det argumentert for fortannings lokasjon i bjelkehøyden sin innvirkning på bruddmekanisme 2. Her fremkommer også to intervaller hvor denne bruddmekanismen er mindre utsatt:

$$z/H < 0.3$$

$$z/H > 0.5$$

Som diskutert vil fortanningslokasjon nær bunn eller topp av bjelke ikke anses som realistisk og tas ikke i betraktning.

De mest aktuelle parametertilpasningene vil da være å flytte fortanning opp i tverrsnitt og endre tannlengder. Både økning og reduksjon av tannlengde kan være aktuelt. Foregående delkapitler viser størst effekt av å benytte tannlengder kortere enn referansegeometri. Altså i intervallet  $80\text{ mm} \leq c < 200\text{ mm}$ . Dette medfører mange små tenner og vil nærme seg mikrotenner, som diskutert i litteratur. Av hensyn til praktisk utførelse, er det av interesse å studere en geometri med færre tenner. Det gir færre utskjæringer ved produksjon. Derfor studeres en geometri med  $c < 320\text{ mm}$ .

Av hensyn til nevnte argumenter er parametere til en foreslått optimalisert geometri fremstilt i tabell 5.8. Her benyttes en økt tannlengde ( $c = 400\text{ mm}$ ) og fortanning plasseres lengre opp i bjelken ( $z/H = 0.65$ ), sammenlignet med referansegeometri. Helning på tann reduseres ( $\theta = 1/20$ ) som følge av økt tannlengde, mens de resterende parametere forblir uendret.

Med utvalgt geometri, er det hensiktsmessig å studere hvordan utnyttelsen for de ulike bruddmekanismene påvirkes. Dette gjelder både de som anses som mest kritiske, 1 og 2, og for bruddmekanismene som ikke var problematiske ved referansegeometrien. Resultatene for utvalgt geometri er presentert i tabell 5.9.

Resultater for bruddmekanisme 1 stemmer overens med hva som ble konkludert i parameterstudien: Endring av utvalgte parametere vil ikke ha stor innvirkning på opptredende aksialspenninger fra moment. Dobling av tannlengde og flytting av fortanning fører til teoretisk forskjell på 1%. Dette anses som neglisjerbart.

Hovedhensikt ved utvalgt optimalisering er å redusere kombinerte skjær- og strekkspenninger normalt på fiberretning for å øke motstand mot bruddmekanisme 2. 15% reduksjon i utnyttelse for nevnt bruddmekanisme er gunstige resultater. Differanse i utnyttelse mellom referanse- og optimalisert geometri er stor nok til at slik optimalisering kan tas i betraktning.

Som indikert i tabell 5.9 framkommer en reduksjon i opptredende skjærspenninger i tverrsnittet, men med usikkerhet tilknyttet resultatet. 6% teoretisk reduksjon i utnyttelse kan det stilles spørsmål ved. Grunnet ulike tannlengder ved de sammenlignende geometriene, kan det være usikkerhet tilknyttet hvordan verdiene påvirkes av nærhet til opplager og lastpåføring. Ettersom optimalisert geometri har lengre tenner, er målingspunkt lengre inn i bjelkefeltet og noe lavere verdier forventes. Usikkerheter går i retning av at resultatene kan være mer samsvarende referanserresultater. Basert på at det er lite differanse mellom de ulike resultatene og det er tilknyttet usikkerhet, tas det ikke hensyn til økt kapasitet i bruddmekanisme 3 i studien.

---

Hensikt ved geometritilpasning er å endre spenningsfordeling i bjelken, ved uforandret lastsituasjon. Spenninger ved kritisk bruddmekanisme 2 reduseres. En konsekvens av spenningsomfordeling, er betydelig høyere kontaktspenninger i fortanning. Færre kontaktflater å fordele spenninger på, gir spenningsøkning på 85%. En betydelig differanse, men som etablert, var utnyttelsen av denne bruddmekanismen lav ved referansegeometri. Største opptredende trykkspenninger vil være rundt 30 MPa. Dette tilsvarer kapasiteten,  $f_{c,0,snitt}$ , framvist i tabell 2.3. Ved trykkspenninger vil slike spenninger ikke føre til brudd, men heller plastisk spenningsfordeling, som presentert i delkapittel 2.4.2. Økning i trykkapasitetsutnyttelse på 85% kan dermed anses å være akseptabelt.

Ved å benytte foreslått optimalisert geometri, oppstår reduserte spenninger for skjær og strekk normalt på fiberretning, samtidig som trykkspenninger i kontaktflater øker. Av hensyn til bjelkeegenskaper kan det anses som gunstigere situasjon enn ved referansegeometri. Dette er ett forslag basert på parameterstudie og ingeniørmessige vurderinger. For å undersøke kapasitet for flere geometrier, framstilles det i neste delkapittel diskusjon av numerisk optimaliseringsstudie.

---

### 6.3.3 Numerisk optimalisert geometri

Parameterverdier av interesse er valgt ut for en grundigere optimaliseringsstudie. Forutsetninger for utvalgte verdier, er bjelkens funksjonalitet. Som diskutert vil for små eller store tenner påvirke samhandling mellom komponenter og miste kredibilitet som funksjonell bjelke. Tilsvarende hensyn er tatt for fortanningslokasjon.

Ved utvalgte parameterintervaller framstilles 140 ulike varianter av tanngeometri. For hver variant belastes bjelken med økende last, fram til kapasitet for ett av bruddkriteriene overskrides. Når en av kapasitetene er overskredet, registreres lastnivå, geometri og prosentandel utnyttelse for hver bruddmekanisme. Resultater er sortert fra høyest til lavest bruddlast, og er framstilt i vedlegg E. Geometrier med størst kapasitet er presentert i tabell 5.11, sammen med referansegeometri og visuelt optimalisert geometri.

For å begrense beregningstid, økes bruddlasten med 2 kN for hver iterasjon. Selv om dette medfører en viss unøyaktighet, er det fremdeles tilstrekkelig nøyaktig til å kunne bestemme en tilnærmet bruddlast. Bruddlast registreres ved første last som overskrider en av kapasitetene. Derfor er utnyttelsen over 100%, og bruddlasten forventes å være noe lavere.

Fra optimaliseringsstudien framkommer det at største bruddlast for de ulike geometrivariantene er 66 kN. Som vist i vedlegget er det åtte ulike varianter med denne bruddlasten. Samtlige har korte tannlengder ( $c = 100$  mm) og fortanning lokalisert over  $H/2$  ( $z/H = 0.60$  og  $0.65$ ). For de optimale geometriene er bruddmekanisme 1 dimensjonerende. Kort tannlengde medfører at spenninger fordeles på et større antall tenner og har positiv effekt for bjelkekapasitet. Tilsvarende konklusjon ble presentert ved studie av mikrotenner, presentert som tidligere forskning. Korte, lave tenner i tre-betong-kompositt ga tilsvarende positiv effekt på utnyttelse av materiale.

At bruddmekanisme 1 er dimensjonerende tilsier at bjelkens fulle kapasitet utnyttes uten at den særegne bruddmekanismen i fortanning blir dimensjonerende. For en regulær bjelke er bruddlast beregnet til 65 kN, ved bruk av formel (2.1), (5.1) og (5.2). Dette er tilnærmet lik bruddlasten for optimalisert geometri.

Det framkommer videre at foreslått optimalisert geometri (delkapittel 6.3.2) har kapasitet på 55 kN. Det er høyere enn for referansegeometri, men ved denne studien er det vist at andre geometriske variasjoner gir høyere kapasitet.

Ved optimaliseringsstudie framkommer største kapasiteter ved korte tannlengder og fortanning plassert over bjelkens tyngdepunkt. Resultat tilsvarer 27% økt lastkapasitet, sammenlignet med referansegeometri. For å avgjøre om den optimaliserte geometrien er hensiktsmessig å benytte, er det behov for eksperimentelle data. Det er vist at den optimaliserte geometrien gir tilstrekkelig samvirke for en numerisk modell. Dette bør også verifiseres for en fysisk bjelke.

Som diskutert bør plassering av fortanning holdes innenfor intervallet  $0.35 \leq z/H \leq 0.65$  for å sikre tilstrekkelig samvirke. På grunnlag av dette kan det forventes at alle geometrier i numerisk optimaliseringsstudie har tilstrekkelig fortanningslokasjon. Videre må både høyde og lengde på tenner være av tilstrekkelig størrelse for å sikre kraftoverføring. Parameterstudier og numerisk optimaliseringsstudie tilsier at korte tenner er gunstig for spenningsutnyttelse. Minste lengder i optimaliseringsstudie er  $c = 100$  mm. For at resultater skal være av interesse, tilstrekkelig samvirke for reell bjelke sikres. Forskning på mikrotenner, presentert i delkapittel 1.5, kan forsvare bruk av korte og lave tenner [3]. Der benyttes geometri med betydelig mindre dimensjoner for tannhøyde og -lengde og er fungerende. Der benyttes lengder ned til 17 mm og optimal lengde settes til 30 mm. At konseptet fungerer selv med betydelig kortere lengder enn benyttet i denne studien, underbygger at det er mulig å benytte de korteste tannlengdene, som er betraktet i denne studien. Det må tas i betraktning at ved mikrotennene ble betong støpt direkte i fortanningen og uten overhøyde. Det må vurderes hvor overførbart det er til dette konseptet.

---

## 6.4 Konklusjon

Formålet med denne oppgaven var å utvikle en parametrisk modell av fortannet bjelke for å bedre forstå dens strukturelle oppførsel. Basert på resultater fra konvergenstudier og ved sammenligning av laboratorieresultater, ser etablert FEM-modell ut til å være forutsigbar og tilstrekkelig nøyaktig. Bjelke i FEM-modell virker å oppføre seg likt som reell bjelke brukt i laboratorieforsøk.

Sammenlignet med en regulær bjelke, oppfører den fortannede bjelken seg tilnærmet likt for nedbøyning og momentspenninger. Grunnet fortanning, får skjærspenningsfordeling to spennings-topper i tverrsnitt og større maksimal verdi enn regulær bjelke.

For bruddmekanisme 2 er skjærspenninger i seg selv ikke kritiske. Skjærbrudd ved labforsøk, forklares av skjær- i kombinasjon med strekkspenninger normalt på fiberretning. Bruddmekanisme 4 er ikke kritisk, men kontaktspenningene er av direkte betydning for bruddmekanisme 2.

Av de fire bruddmekanismene presentert, framkommer det at bruddmekanisme 1 og 2 er mest kritisk. Dette samsvarer med resultater fra laboratorieforsøk.

Irregulær geometri har stor betydning for utvikling av FEM-modell. Data påvirkes av singulariteter i fortanning og resultater tilpasses dette. Tilnærming og tilpasninger i oppgaven medfører tilstrekkelig nøyaktighet og samsvar til resultater fra laboratorieforsøk.

FEM-modellen er parametrisk utarbeidet og styres av python-skript. Utgangspunkt er geometriske parametere som styrer fortanningsgeometri. Det muliggjør parametriske studier for å betrakte betydning av geometrivariasjoner. Dette legger grunnlag for studie av geometrioptimalisering.

Basert på parameterstudier, er det framstilt at ved plassering av fortanning høyere opp i bjelke og å benytte kortere tenner enn i referansegeometri, medfører økt lastkapasitet. Resultatene har vist en kapasitetsøkning på 27%, sammenlignet med referansegeometri.

---

## 6.5 Videre arbeid

Numerisk modell er modellert uten overhøyde og valget er forsvart i oppgave. I videre studier kan det være ønskelig å undersøke hvordan spenninger påvirkes av overhøyde i numerisk modell.

Opparbeidet modell er parametrisk. Det medfører at den skal være anvendelig for variasjoner av material og geometri. Denne studien baserer seg på labdata fra kun én bjelkevariant. For å verifisere modellens anvendelighet, bør numerisk data kontrolleres opp mot eksperimentell data for ulike bjelkevarianter. Da skapes større grunnlag for generaliserte resultater, basert på kapasiteter og geometri.

I studien antydes en optimalisert geometri for å øke bjelkens kapasitet. Dette er et teoretisk resultat som bør kontrolleres eksperimentelt for å undersøke teoretisk anvendelighet og verifisere resultatet.

Flere variasjoner av fortannet bjelke kan være grunnlag for videreføring av studien. Eksempelvis kan konsept med fortannet sammenkobling av flere komponenter studeres. Tilsvarende kan det være av interesse å studere fortannet bjelke hvor fortanningen ikke er kontinuerlig langs bjelkelengden. Tenner kan plasseres etter behov og utelates i mindre utsatte områder, som ved feltmidt.

Denne studien er kun basert på fritt opplagte bjelker med ett spenn. Det kan være av interesse å studere en fortannet bjelke med andre opplagerbetingelser. Modell og resultater fra denne studien kan tas til betraktning i slike studier.

Presenterte resultater tilsier positiv effekt av korte tenner. Videre arbeid kan inkludere studie av mindre tenner enn hva som studeres her (mikro-tenner).



---

## Litteraturliste

- [1] H. Fjellvåg, *Strukturelle materialer*, [https://snl.no/strukturelle\\_materialer](https://snl.no/strukturelle_materialer), sjekket: 2022-02-15.
- [2] C. Cristescu, D. Honfi, K. Sandberg mfl., *Design for deconstruction and reuse of timber structures – state of the art review*, ser. RISE Rapport. 2020, ISBN: 9789189167674.
- [3] K. Müller og A. Frangi, «Micro-notches as a novel connection system for timber-concrete composite slabs», *Engineering Structures*, årg. 245, s. 112688, 2021, ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112688>. adresse: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029621008385>.
- [4] L. Boccadoro, R. Steiger, S. Zweidler og A. Frangi, «Analysis of shear transfer and gap opening in timber-concrete composite members with notched connections», *Materials and Structures*, årg. 50, nr. 5, 2017, ISSN: 1359-5997. DOI: 10.1617/s11527-017-1098-3. adresse: <https://dx.doi.org/10.1617/s11527-017-1098-3>.
- [5] StandardNorge, «Eurokode: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner», 2016.
- [6] —, «Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner - Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger», 2010.
- [7] —, «Nordiske regler for visuell styrkesortering av trelast», 2010.
- [8] —, «Trekonstruksjoner, Limtre og limt laminert heltre, Krav», 2013.
- [9] —, «Konstruksjonstrevirke - Fasthetsklasser», 2016.
- [10] H. J. Blass og C. Sandhaas, *Timber Engineering - Principles for Design*. 2017, KIT Scientific Publishing, ISBN: 9783731506737. adresse: <https://books.google.no/books?id=xJ05DwAAQBAJ>.
- [11] O. Lohne, *duktilitet i Store norske leksikon*, <https://snl.no/duktilitet>, sjekket: 2022-05-25.
- [12] L. V. Boccadoro, *Timber-concrete composite slabs made of beech laminated veneer lumber with notched connection*, Generic, 2016.
- [13] Polymer Database, *Viscoelastic response of polymers under constant strain*, <https://polymerdatabase.com/polymer%20physics/Relaxation%20under%20Strain.html>, sjekket: 2022-03-08.
- [14] Norske Limtreprodusenters Forening, *Limtreboka*. Moelven limtre A/S, 2015, 90 s. ill.
- [15] C. E. Brown, «Coefficient of variation», i *Applied multivariate statistics in geohydrology and related sciences*, Springer, 1998, s. 155–157.
- [16] JCSS, *JCSS probabilistic model code share*, <https://www.jcss-lc.org/jcss-probabilistic-model-code/>, sjekket: 2022-03-23.
- [17] S. Aicher, «Process Zone Length and Fracture Energy of Spruce Wood in Mode-I from Size Effect», *Wood and Fiber Science*, årg. 42, s. 237–247, 2010.
- [18] R. Steiger og E. Gehri, «Interaction of shear stresses and stresses perpendicular to the grain», aug. 2011.
- [19] Swiss Society of Engineers and Architects, «SIA 265: Timber Structures», 1992.
- [20] S. Aicher, P. J. Gustafsson, P. Haller og H. Petersson, «Fracture Mechanics Models for Strength Analysis of Timber Beams with a Hole or a Notch - A Report of RILEM TC-133», 2002.
- [21] C. T. Sun og Z. H. Jin, «Chapter 1 - Introduction», i *Fracture Mechanics*, C. T. Sun og Z. H. Jin, red. Boston: Academic Press, 2012, s. 1–10, ISBN: 978-0-12-385001-0. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385001-0.00001-8>. adresse: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123850010000018>.
- [22] E. Serrano og P. J. Gustafsson, «Fracture mechanics in timber engineering – Strength analyses of components and joints», *Materials and Structures*, årg. 40, nr. 1, s. 87–96, 2007, ISSN: 1359-5997. DOI: 10.1617/s11527-006-9121-0.
- [23] H. Danielsson, «Perpendicular to grain fracture analysis of wooden structural elements - Models and applications», 2013.
- [24] Simulia, *ABAQUS Documentation*, <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt09ch29s03aus126.html>, sjekket: 2022-04-19.

- 
- [25] —, *Getting Started with Abaqus*, [https://sites.engineering.ucsb.edu/~tshugar/GET\\_STARTED.pdf](https://sites.engineering.ucsb.edu/~tshugar/GET_STARTED.pdf), sjekket: 2022-04-05.
- [26] —, *Performance of continuum and shell elements for linear analysis of bending problems*, <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEBMKRefMap/simabmk-c-linbending.htm>, sjekket: 2022-04-19.
- [27] —, *Choosing the element's dimensionality*, <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEELMRefMap/simaelm-c-dimension.htm>, sjekket: 2022-04-15.

---

## A Spenningsfordeling av tannkontakt

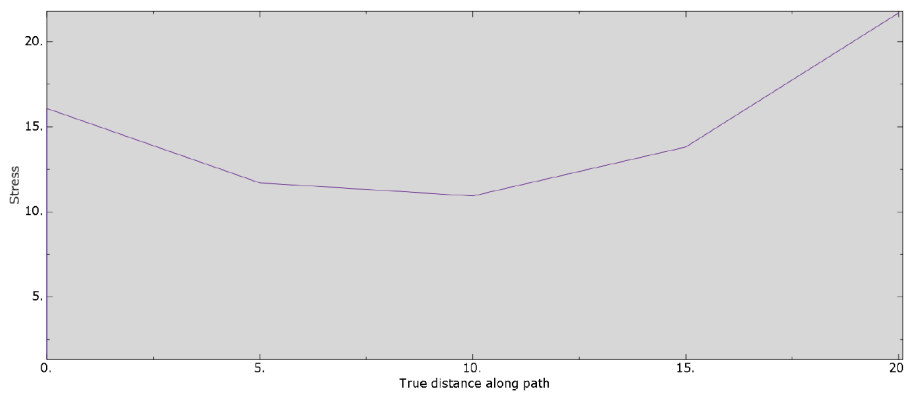
Følgende bilder viser spenningsfordelingen av tannkontaktene med samme geometri og lasttilfelle hentet fra ABAQUS. Resultatene gir en bedre forståelse av hvordan spenningene fordeles seg langs tannhøyden. Geometriske parametre laster som er bruk er vist i tabell A.1 og A.2.

| Geometri |       |        |        |       |
|----------|-------|--------|--------|-------|
| L        | B     | H      | c      | d     |
| 6400 mm  | 90 mm | 342 mm | 200 mm | 20 mm |

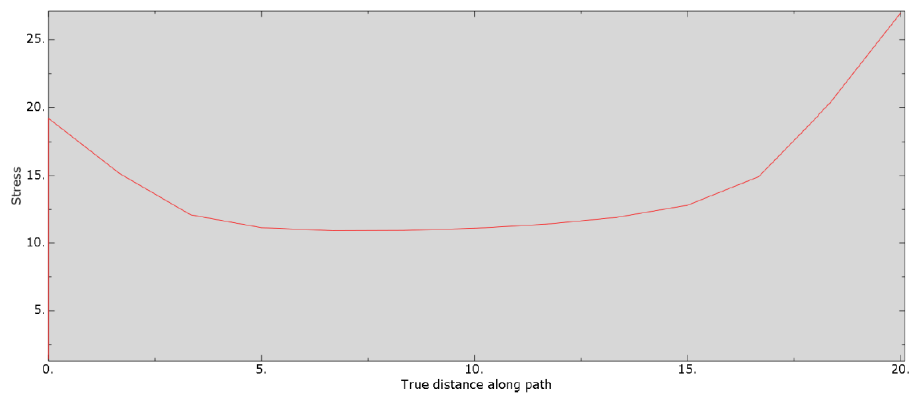
Tabell A.1: Geometriske parametre

| Last  |                       |
|-------|-----------------------|
| F     | g                     |
| 40 kN | 450 kg/m <sup>3</sup> |

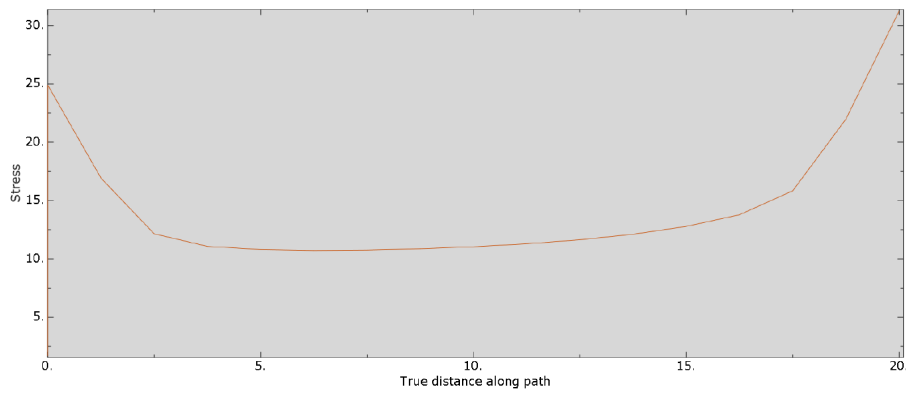
Tabell A.2: Laster



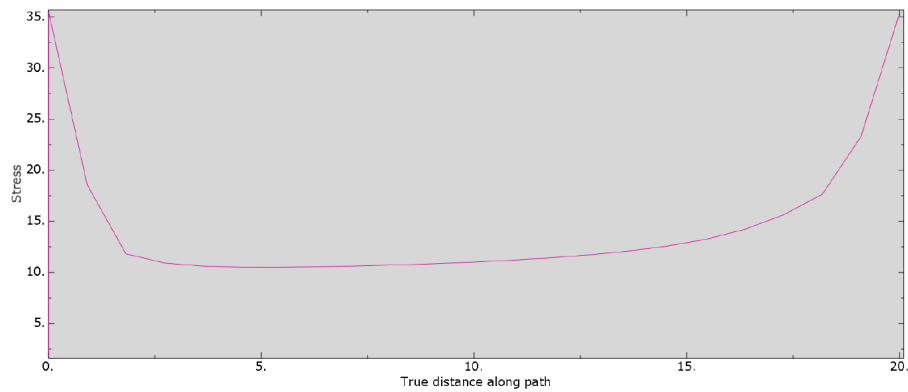
Figur A.1: 4 elementer i høyden



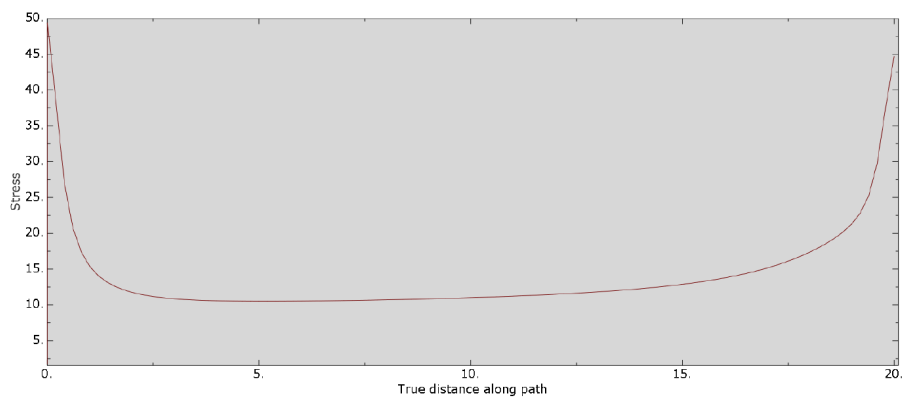
Figur A.2: 12 elementer i høyden



Figur A.3: 16 elementer i høyden



Figur A.4: 26 elementer i høyden



Figur A.5: 100 elementer i høyden

**Konklusjon:** Utifra resultatene over vises en trend som tyder på at spenningene flates ut i høyden av tennene og ekstremalverdiene i hver ende divergerer etterhvert som antall elementer øker. Dette kan tyde på at hver ende er et singulært punkt og vil gå mot et uendelig resultat når det kommer til spenninger. Derfor konkluderes det at det er fornuftig å hente resultater fra den flate verdien av grafen.

---

## B Konvergenstudie av strekkspenning ved fortanning

Det er gjennomført en studie for konvergens ved fortanningen. Det er ønskelig å finne presise resultater for spenninger i nærheten av fortanning, ettersom det er et område som har vist seg å være utsatt for brudd. Området er også sensitivt for singularitet siden det er ved et hjørne med konsentrerte spenninger.

Ved dette studie presenteres tre ulike mesh-strukturer, med økende antall elementer og frihetsgrader. Her brukes geometri og lasttilfelle som vist i tabell B.1 og B.2.

Dette konvergenstudien ser på andre og tredje tann. Første tann neglisjeres for å unngå forstyrrelser fra opplager.

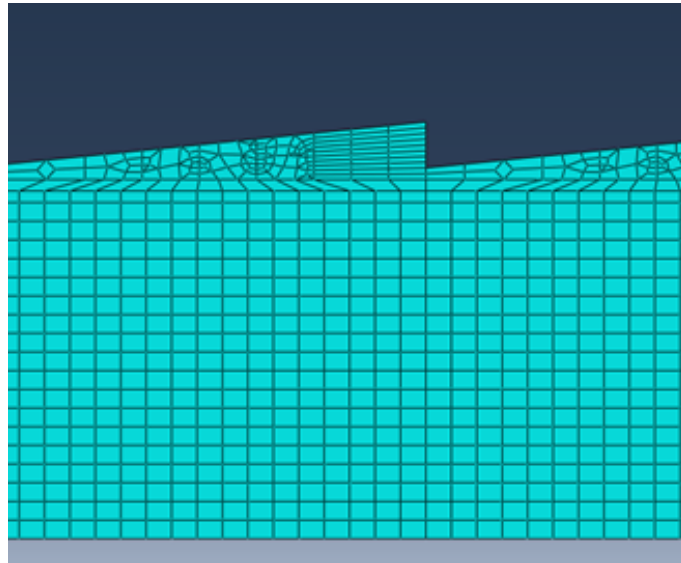
| Geometri |       |        |        |       |
|----------|-------|--------|--------|-------|
| L        | B     | H      | c      | d     |
| 6400 mm  | 90 mm | 342 mm | 200 mm | 20 mm |

Tabell B.1: Geometriske parametre

| Last  |                       |
|-------|-----------------------|
| F     | g                     |
| 40 kN | 450 kg/m <sup>3</sup> |

Tabell B.2: Laster

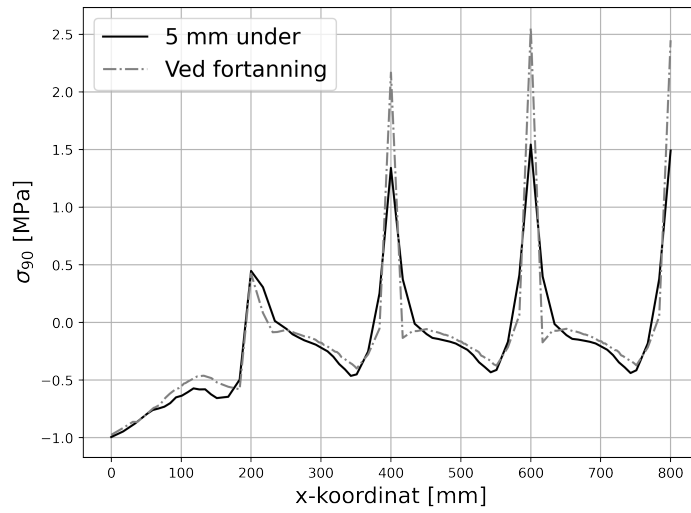
### Mesh 1



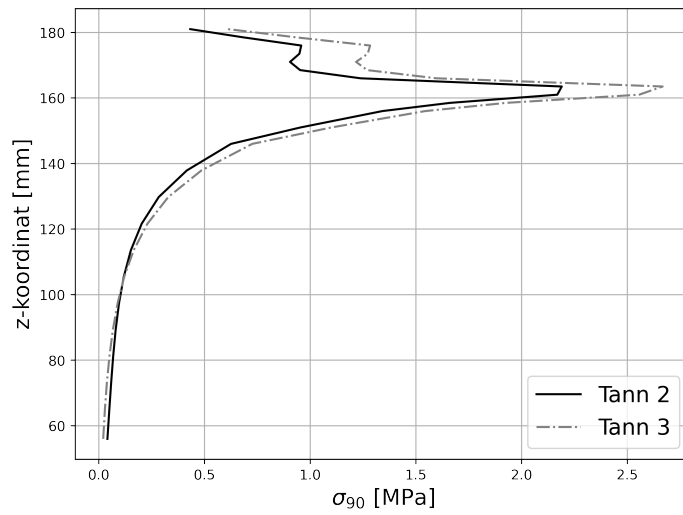
Figur B.1: Utsnitt av mesh-struktur 1

| Strekkspenninger i hjørne |          |
|---------------------------|----------|
| Tann 2                    | Tann 3   |
| 2.17 MPa                  | 2.56 MPa |

Tabell B.3: Strekkspenninger ved mesh 1



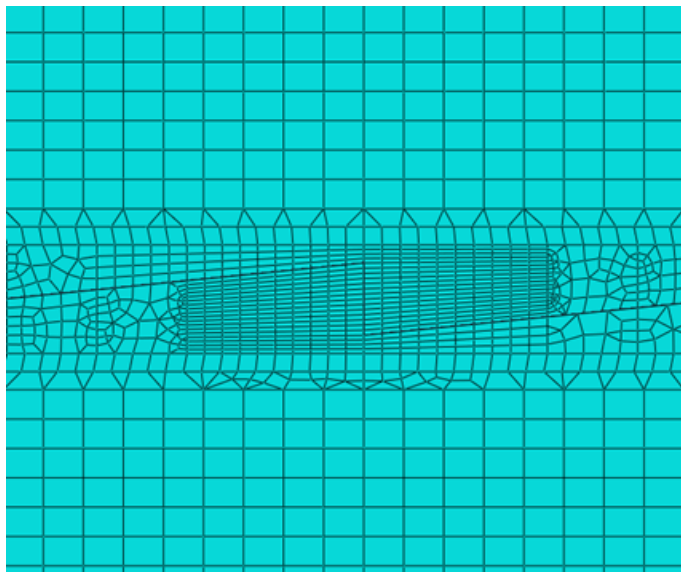
Figur B.2: Horizontal strekkspenningsfordeling



Figur B.3: Vertikal strekkspenningsfordeling

---

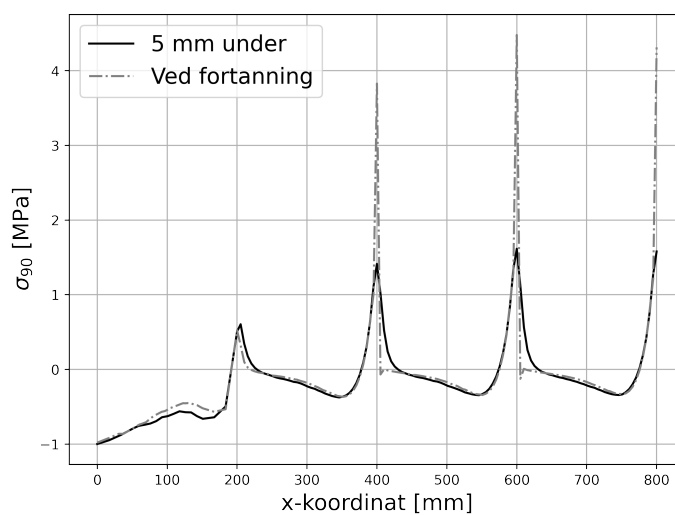
## Mesh 2



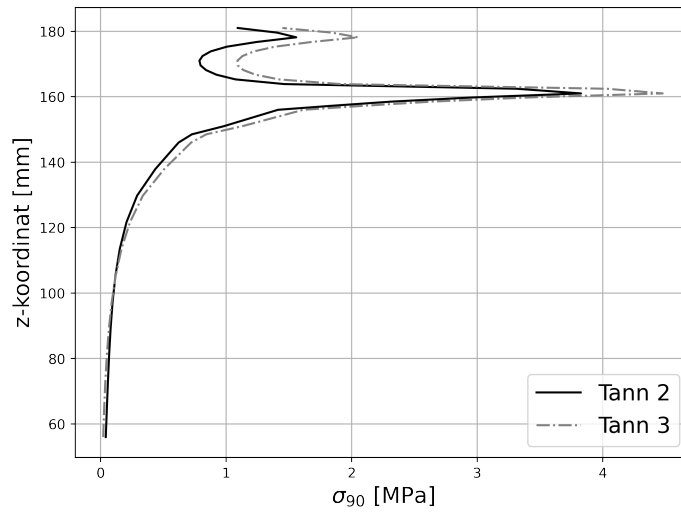
Figur B.4: Utsnitt av mesh-struktur 1

| Strekkspenninger i hjørne |          |
|---------------------------|----------|
| Tann 2                    | Tann 3   |
| 3.83 MPa                  | 4.48 MPa |

Tabell B.4: Strekkspenninger ved mesh 1

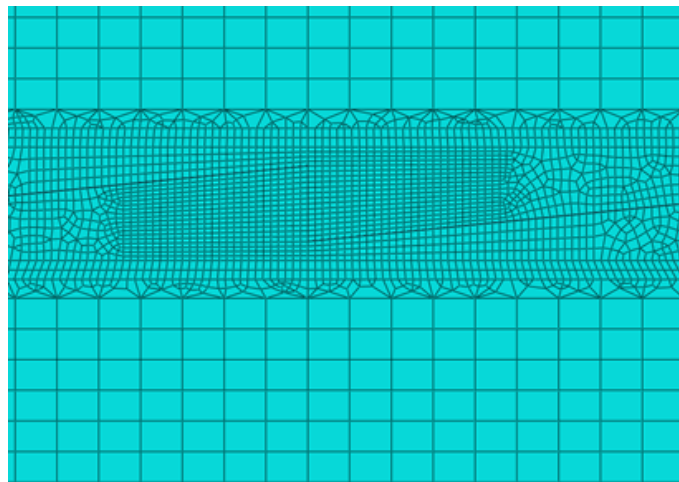


Figur B.5: Horisontal strekkspenningsfordeling



Figur B.6: Vertikal strekkspenningsfordeling

### Mesh 3

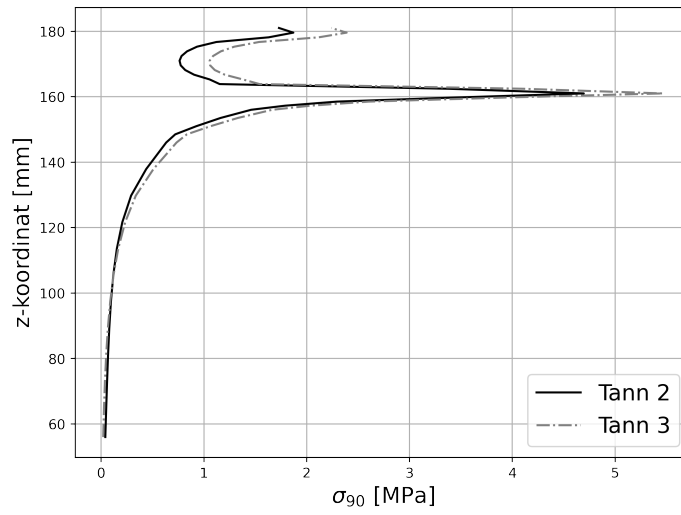


Figur B.7: Utsnitt av mesh-struktur 1

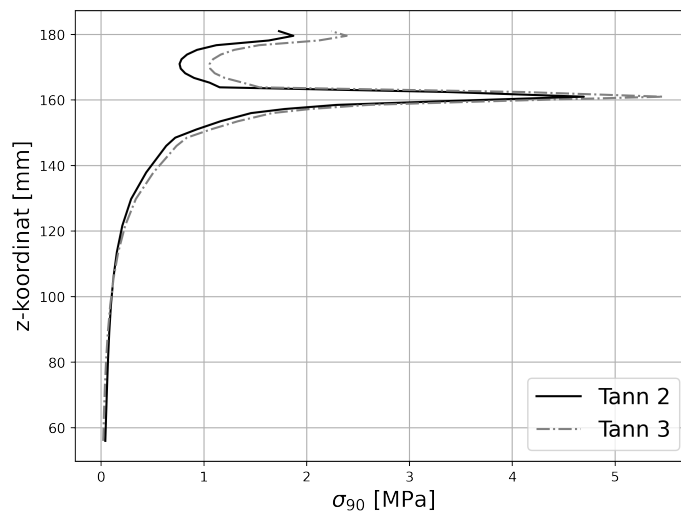
| Strekkspenninger i hjørne |          |
|---------------------------|----------|
| Tann 2                    | Tann 3   |
| 4.70 MPa                  | 4.46 MPa |

Tabell B.5: Strekkspenninger ved mesh 1





Figur B.8: Horisontal strekkspenningsfordeling



Figur B.9: Vertikal strekkspenningsfordeling

---

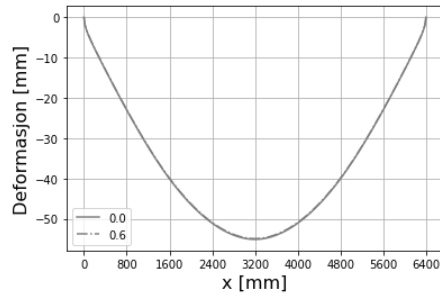
## C Sensitivitet

### Variasjon av tverrkontraksjon $\nu$

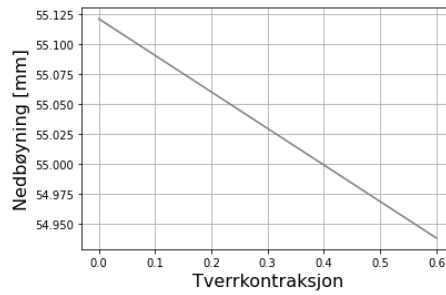
Det er gjort beregninger med to verdier for tverrkontraksjon:

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.0$$

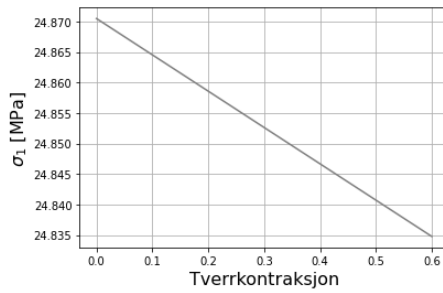
$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.6$$



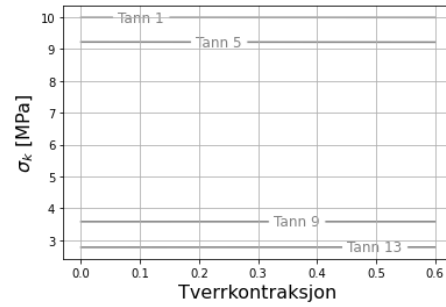
(a) Nedbøyningskurve



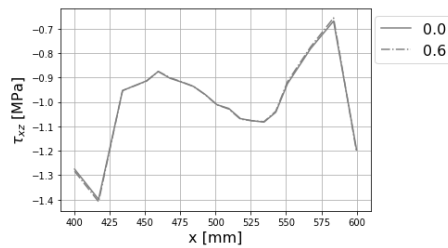
(b) Maksimal nedbøyning



(c) Maksimal aksialspenning



(d) Kontaktspenninger i tenner



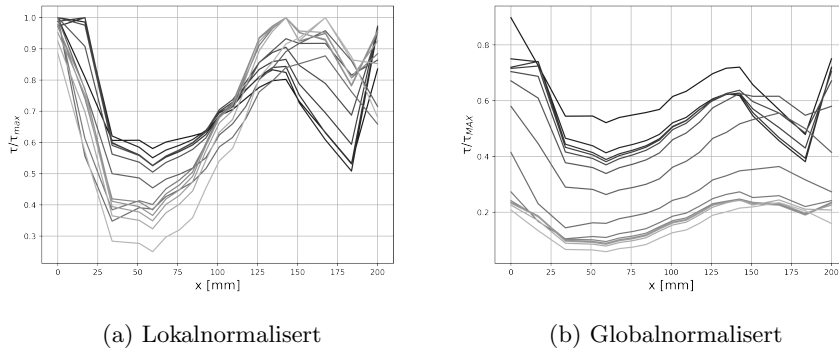
(e) Skjærspenning 5 mm under tann 3

Figur C.1: Resultater med varierende tverrkontraksjon

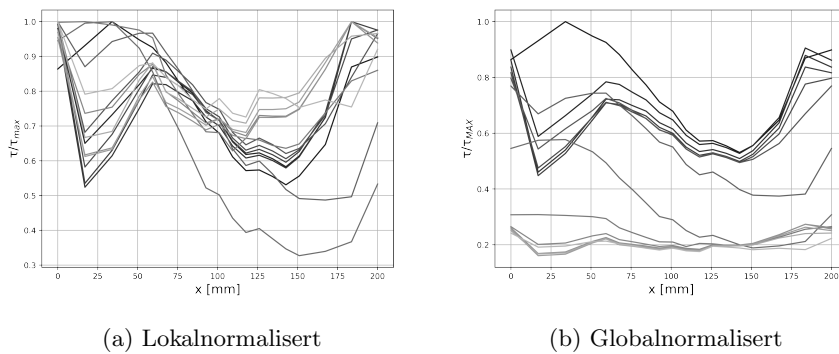
---

## D Spenningsfordeling over og under fortanning

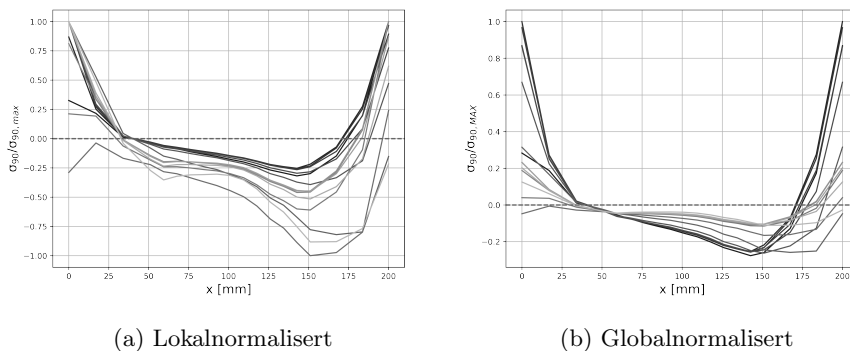
Fordeling skjærspenninger,  $\tau$  og spenninger normalt på lengderetning,  $\sigma_{90}$ , hentet ut 15 mm under og over fortanning. Grunnet symmetri er kun venstre bjelkehalvdel inkludert. For figur [D.1,D.2,D.3,D.4,D.5] plottes spenninger tann for tann over hverandre. En tann nær midt vil ha lysere farge på graf enn tann nær opplegg.



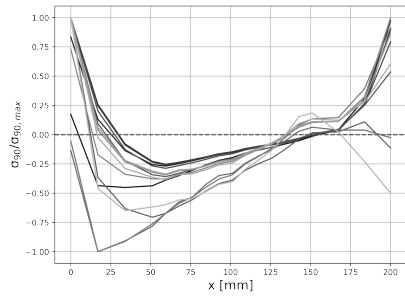
Figur D.1: Skjærspenninger under fortanning



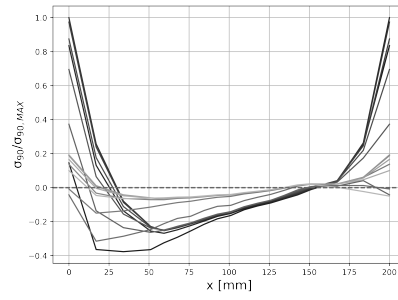
Figur D.2: Skjærspenninger over fortanning



Figur D.3: Spenninger normalt på fiberretning under fortanning

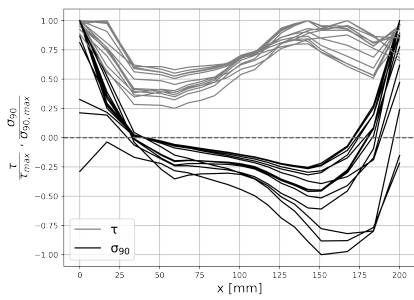


(a) Lokalnørmaliserert

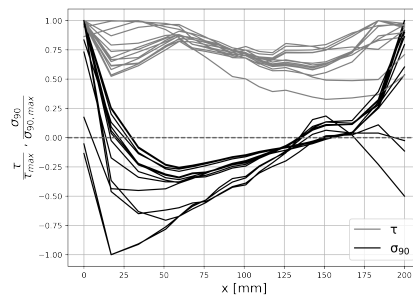


(b) Globalnørmaliserert

Figur D.4: Spenninger normalt på fiberretning over fortanning



(a) Under fortanning



(b) Over fortanning

Figur D.5: Sammenheng mellom normaliserte skjær- og aksialspenninger

## E Parametrisk optimalisering

Resultater fra numerisk optimaliseringsstudie er vist i tabell E.1. For hver geometri presenteres bruddlast, relevante parametre og utnyttelsesgrad av de fire utvalgte bruddkriteriene.

| Bruddlast |      | Geometri |        | Bruddmekanismer [%] |       |      |       |
|-----------|------|----------|--------|---------------------|-------|------|-------|
| [kN]      | hpar | c [mm]   | d [mm] | 1                   | 2     | 3    | 4     |
| 66        | 0.6  | 100      | 20     | 103.0               | 78.4  | 51.6 | 34.0  |
| 66        | 0.6  | 100      | 25     | 102.8               | 90.8  | 56.7 | 30.5  |
| 66        | 0.65 | 100      | 15     | 102.9               | 49.7  | 44.7 | 41.4  |
| 66        | 0.65 | 100      | 20     | 102.5               | 68.8  | 49.7 | 32.8  |
| 66        | 0.65 | 100      | 25     | 102.3               | 79.5  | 54.3 | 29.5  |
| 66        | 0.65 | 100      | 30     | 102.0               | 93.7  | 57.3 | 26.0  |
| 66        | 0.65 | 100      | 35     | 101.9               | 102.6 | 59.2 | 24.3  |
| 66        | 0.65 | 160      | 20     | 102.6               | 102.9 | 40.9 | 44.2  |
| 64        | 0.5  | 100      | 10     | 101.3               | 42.2  | 46.6 | 53.7  |
| 64        | 0.5  | 100      | 15     | 101.3               | 61.4  | 45.5 | 42.0  |
| 64        | 0.5  | 100      | 20     | 101.2               | 84.4  | 50.9 | 33.4  |
| 64        | 0.5  | 100      | 25     | 101.2               | 97.4  | 56.3 | 29.9  |
| 64        | 0.5  | 160      | 10     | 101.8               | 70.7  | 41.6 | 81.1  |
| 64        | 0.5  | 160      | 15     | 101.7               | 99.4  | 40.5 | 60.4  |
| 64        | 0.5  | 200      | 10     | 102.1               | 87.0  | 41.2 | 102.7 |
| 64        | 0.55 | 100      | 10     | 100.9               | 40.3  | 46.0 | 53.7  |
| 64        | 0.55 | 100      | 15     | 100.8               | 58.0  | 45.1 | 42.1  |
| 64        | 0.55 | 100      | 20     | 100.5               | 80.4  | 51.2 | 33.4  |
| 64        | 0.55 | 100      | 25     | 100.4               | 93.3  | 56.3 | 30.0  |
| 64        | 0.55 | 160      | 10     | 101.4               | 66.8  | 42.4 | 79.5  |
| 64        | 0.55 | 160      | 15     | 101.2               | 93.5  | 41.3 | 59.5  |
| 64        | 0.55 | 200      | 10     | 101.7               | 81.3  | 39.9 | 99.5  |
| 64        | 0.6  | 100      | 10     | 100.5               | 37.2  | 44.5 | 53.0  |
| 64        | 0.6  | 100      | 15     | 100.3               | 53.5  | 44.2 | 41.6  |
| 64        | 0.6  | 100      | 30     | 99.5                | 100.5 | 58.4 | 26.2  |
| 64        | 0.6  | 160      | 10     | 101.0               | 61.1  | 42.5 | 77.5  |
| 64        | 0.6  | 160      | 15     | 100.6               | 85.2  | 41.4 | 58.4  |
| 64        | 0.6  | 200      | 10     | 101.3               | 74.2  | 40.7 | 96.3  |
| 64        | 0.6  | 200      | 15     | 100.8               | 100.1 | 39.6 | 70.7  |
| 64        | 0.65 | 100      | 10     | 100.2               | 32.8  | 43.2 | 51.2  |
| 64        | 0.65 | 160      | 10     | 100.5               | 53.9  | 41.9 | 74.3  |
| 64        | 0.65 | 160      | 15     | 100.0               | 74.4  | 40.9 | 56.1  |
| 64        | 0.65 | 200      | 10     | 100.8               | 65.6  | 40.4 | 91.2  |
| 64        | 0.65 | 200      | 15     | 100.3               | 87.8  | 39.4 | 67.1  |
| 62        | 0.55 | 100      | 30     | 97.1                | 102.6 | 57.8 | 25.8  |
| 62        | 0.55 | 200      | 15     | 98.3                | 103.6 | 37.9 | 70.8  |
| 62        | 0.6  | 100      | 35     | 96.2                | 103.2 | 58.3 | 23.8  |
| 62        | 0.6  | 160      | 20     | 97.0                | 104.9 | 38.4 | 43.2  |
| 62        | 0.65 | 100      | 40     | 95.7                | 102.0 | 56.1 | 20.9  |
| 62        | 0.65 | 160      | 25     | 96.1                | 102.1 | 38.9 | 36.6  |
| 62        | 0.65 | 200      | 20     | 96.5                | 105.2 | 36.7 | 48.9  |
| 60        | 0.5  | 100      | 30     | 95.0                | 100.4 | 56.6 | 24.8  |
| 60        | 0.5  | 200      | 15     | 95.7                | 104.4 | 37.8 | 69.3  |
| 60        | 0.55 | 100      | 35     | 94.0                | 104.9 | 57.9 | 23.4  |
| 58        | 0.5  | 100      | 35     | 91.9                | 102.0 | 56.5 | 22.6  |
| 58        | 0.55 | 160      | 20     | 91.5                | 101.7 | 35.9 | 41.2  |
| 58        | 0.6  | 100      | 40     | 90.0                | 101.5 | 55.0 | 20.3  |

---

| Bruddlast<br>[kN] | hpar | Geometri |        | Bruddmekanismer [%] |       |      |      |
|-------------------|------|----------|--------|---------------------|-------|------|------|
|                   |      | c [mm]   | d [mm] | 1                   | 2     | 3    | 4    |
| 58                | 0.6  | 160      | 25     | 90.6                | 103.7 | 37.3 | 35.7 |
| 58                | 0.6  | 200      | 20     | 91.0                | 106.0 | 34.6 | 47.7 |
| 58                | 0.65 | 160      | 30     | 89.6                | 102.4 | 42.4 | 29.6 |
| 58                | 0.65 | 200      | 25     | 90.1                | 102.6 | 33.6 | 40.0 |
| 56                | 0.5  | 100      | 40     | 88.9                | 106.6 | 55.7 | 20.0 |
| 56                | 0.5  | 160      | 20     | 89.1                | 101.2 | 34.0 | 40.1 |
| 56                | 0.55 | 100      | 40     | 87.7                | 102.5 | 54.7 | 19.9 |
| 56                | 0.55 | 160      | 25     | 88.3                | 107.0 | 36.7 | 35.1 |
| 56                | 0.65 | 160      | 35     | 86.3                | 102.6 | 44.2 | 26.5 |
| 56                | 0.65 | 400      | 20     | 88.4                | 100.0 | 32.2 | 89.5 |
| 56                | 0.65 | 400      | 25     | 87.9                | 104.2 | 31.7 | 75.0 |
| 54                | 0.5  | 160      | 25     | 85.9                | 106.3 | 35.4 | 34.0 |
| 54                | 0.55 | 200      | 20     | 85.5                | 102.0 | 31.9 | 45.9 |
| 54                | 0.6  | 160      | 30     | 84.1                | 103.1 | 41.3 | 28.7 |
| 54                | 0.6  | 200      | 25     | 84.6                | 102.6 | 31.4 | 38.6 |
| 54                | 0.6  | 400      | 20     | 86.0                | 102.9 | 32.2 | 92.8 |
| 54                | 0.65 | 160      | 40     | 83.0                | 104.2 | 45.9 | 23.2 |
| 54                | 0.65 | 200      | 30     | 83.5                | 100.1 | 34.0 | 31.9 |
| 54                | 0.65 | 200      | 35     | 83.2                | 106.7 | 37.5 | 29.3 |
| 54                | 0.65 | 400      | 30     | 84.2                | 101.6 | 30.3 | 58.8 |
| 54                | 0.65 | 400      | 35     | 83.8                | 104.3 | 30.4 | 52.6 |
| 52                | 0.5  | 200      | 20     | 83.0                | 102.0 | 31.8 | 44.8 |
| 52                | 0.55 | 160      | 30     | 81.9                | 105.9 | 40.5 | 28.2 |
| 52                | 0.55 | 200      | 25     | 82.2                | 105.7 | 30.4 | 38.5 |
| 52                | 0.55 | 400      | 20     | 83.6                | 103.7 | 32.7 | 94.0 |
| 52                | 0.6  | 160      | 35     | 80.9                | 102.9 | 43.1 | 25.6 |
| 52                | 0.6  | 200      | 30     | 81.2                | 107.7 | 34.1 | 31.8 |
| 52                | 0.6  | 400      | 25     | 82.5                | 100.2 | 31.3 | 75.0 |
| 52                | 0.6  | 400      | 30     | 82.1                | 106.1 | 31.3 | 61.1 |
| 52                | 0.65 | 200      | 40     | 79.9                | 107.0 | 40.1 | 25.4 |
| 52                | 0.65 | 320      | 15     | 82.4                | 104.8 | 30.9 | 91.3 |
| 52                | 0.65 | 400      | 40     | 80.3                | 100.4 | 29.6 | 44.1 |
| 50                | 0.5  | 160      | 30     | 79.6                | 104.8 | 39.3 | 27.3 |
| 50                | 0.5  | 200      | 25     | 79.8                | 105.5 | 29.8 | 37.5 |
| 50                | 0.5  | 400      | 20     | 81.0                | 103.1 | 32.0 | 93.1 |
| 50                | 0.55 | 160      | 35     | 78.6                | 105.6 | 42.4 | 25.1 |
| 50                | 0.55 | 400      | 25     | 80.2                | 101.3 | 31.4 | 76.0 |
| 50                | 0.55 | 400      | 30     | 79.9                | 108.0 | 31.3 | 62.1 |
| 50                | 0.6  | 160      | 40     | 77.6                | 104.2 | 44.8 | 22.3 |
| 50                | 0.6  | 200      | 35     | 77.9                | 106.3 | 35.8 | 28.1 |
| 50                | 0.6  | 400      | 35     | 78.7                | 101.4 | 30.1 | 52.6 |
| 50                | 0.6  | 400      | 40     | 78.3                | 105.9 | 30.2 | 45.8 |
| 48                | 0.5  | 160      | 35     | 76.5                | 103.9 | 41.5 | 24.4 |
| 48                | 0.5  | 400      | 25     | 77.8                | 100.8 | 30.8 | 75.4 |
| 48                | 0.5  | 400      | 30     | 77.7                | 108.0 | 30.7 | 61.8 |
| 48                | 0.55 | 160      | 40     | 75.4                | 106.7 | 44.4 | 21.9 |
| 48                | 0.55 | 200      | 30     | 75.8                | 102.3 | 31.7 | 30.4 |
| 48                | 0.55 | 400      | 35     | 76.6                | 103.2 | 30.1 | 53.5 |
| 48                | 0.55 | 400      | 40     | 76.4                | 108.4 | 30.0 | 46.7 |
| 48                | 0.6  | 200      | 40     | 74.6                | 106.3 | 38.9 | 24.3 |
| 48                | 0.6  | 320      | 15     | 76.6                | 100.6 | 28.4 | 90.8 |
| 48                | 0.65 | 320      | 20     | 75.5                | 100.5 | 27.7 | 59.1 |
| 48                | 0.65 | 320      | 25     | 75.1                | 105.7 | 27.1 | 49.7 |

---

---

| Bruddlast<br>[kN] | Geometri<br>hpar | Geometri |        | Bruddmekanismer [%] |       |      |       |
|-------------------|------------------|----------|--------|---------------------|-------|------|-------|
|                   |                  | c [mm]   | d [mm] | 1                   | 2     | 3    | 4     |
| 46                | 0.5              | 160      | 40     | 73.4                | 104.4 | 42.9 | 21.3  |
| 46                | 0.5              | 200      | 30     | 73.5                | 101.3 | 30.0 | 29.5  |
| 46                | 0.5              | 200      | 35     | 73.5                | 108.0 | 33.3 | 27.2  |
| 46                | 0.5              | 400      | 35     | 74.4                | 103.1 | 29.3 | 53.2  |
| 46                | 0.5              | 400      | 40     | 74.4                | 108.9 | 29.0 | 46.5  |
| 46                | 0.55             | 200      | 35     | 72.6                | 100.4 | 33.9 | 26.8  |
| 46                | 0.55             | 200      | 40     | 72.4                | 108.7 | 37.9 | 24.2  |
| 46                | 0.55             | 320      | 15     | 73.9                | 101.8 | 28.1 | 91.7  |
| 46                | 0.6              | 320      | 20     | 73.0                | 104.7 | 27.4 | 61.2  |
| 46                | 0.65             | 320      | 30     | 71.6                | 102.7 | 26.2 | 39.0  |
| 46                | 0.65             | 320      | 35     | 71.3                | 105.9 | 26.4 | 35.1  |
| 44                | 0.5              | 200      | 40     | 70.4                | 107.1 | 36.3 | 23.5  |
| 44                | 0.5              | 320      | 15     | 71.1                | 101.2 | 27.3 | 90.7  |
| 44                | 0.55             | 320      | 20     | 70.4                | 106.2 | 27.1 | 61.9  |
| 44                | 0.6              | 320      | 25     | 69.6                | 101.2 | 26.3 | 49.4  |
| 44                | 0.6              | 320      | 30     | 69.2                | 108.0 | 26.5 | 40.5  |
| 44                | 0.65             | 320      | 40     | 67.9                | 101.0 | 25.6 | 29.6  |
| 44                | 0.65             | 400      | 15     | 70.3                | 56.9  | 26.0 | 101.3 |
| 42                | 0.5              | 320      | 20     | 67.8                | 105.5 | 26.1 | 61.4  |
| 42                | 0.55             | 320      | 25     | 67.1                | 102.7 | 26.0 | 50.0  |
| 42                | 0.55             | 320      | 30     | 66.9                | 109.8 | 25.9 | 41.1  |
| 42                | 0.6              | 320      | 35     | 65.9                | 101.9 | 25.3 | 34.8  |
| 42                | 0.6              | 320      | 40     | 65.7                | 106.6 | 25.4 | 30.5  |
| 42                | 0.6              | 400      | 15     | 67.7                | 56.9  | 25.0 | 103.8 |
| 40                | 0.5              | 320      | 10     | 64.9                | 72.3  | 24.9 | 116.6 |
| 40                | 0.5              | 320      | 25     | 64.6                | 101.6 | 24.9 | 49.6  |
| 40                | 0.5              | 320      | 30     | 64.5                | 109.1 | 24.8 | 40.9  |
| 40                | 0.5              | 320      | 35     | 64.5                | 113.2 | 24.6 | 36.9  |
| 40                | 0.5              | 320      | 40     | 64.5                | 119.0 | 24.4 | 32.5  |
| 40                | 0.5              | 400      | 10     | 65.3                | 53.3  | 25.4 | 150.8 |
| 40                | 0.5              | 400      | 15     | 65.2                | 59.4  | 25.6 | 106.3 |
| 40                | 0.55             | 320      | 10     | 64.7                | 67.0  | 24.2 | 113.4 |
| 40                | 0.55             | 320      | 35     | 63.7                | 103.5 | 24.6 | 35.3  |
| 40                | 0.55             | 320      | 40     | 63.5                | 108.7 | 24.5 | 31.0  |
| 40                | 0.55             | 400      | 10     | 65.2                | 50.5  | 24.6 | 147.5 |
| 40                | 0.55             | 400      | 15     | 64.9                | 55.8  | 25.0 | 103.7 |
| 40                | 0.6              | 320      | 10     | 64.4                | 61.0  | 24.2 | 107.9 |
| 40                | 0.6              | 400      | 10     | 64.9                | 47.1  | 23.7 | 141.2 |
| 40                | 0.65             | 320      | 10     | 64.1                | 54.5  | 24.4 | 100.5 |
| 40                | 0.65             | 400      | 10     | 64.6                | 43.1  | 24.1 | 131.9 |

---

Tabell E.1: Resultater fra parametrisk optimalisering

---

## F Python-kode for modellering av bjelke

```
1 # Script to run a loop of scripts with different parameters
2 session.journalOptions.setValues(replayGeometry=COORDINATE, recoverGeometry=
   COORDINATE) #COORDINATE, INDEX or COMPRESSEDINDEX
3 # -*- coding: mbc8 -*-
4 from part import *
5 from material import *
6 from section import *
7 from assembly import *
8 from step import *
9 from interaction import *
10 from load import *
11 from mesh import *
12 from math import*
13 from optimization import *
14 from job import *
15 from sketch import *
16 from visualization import *
17 from connectorBehavior import *
18 from odbAccess import*
19 from abaqusConstants import *
20 from odbMaterial import *
21 from odbSection import *
22 from abaqus import getInput
23 import time
24
25 modelname = 'Beam'
26 MODEL=mdb.Model(modelType=STANDARD_EXPLICIT, name=modelname)
27
28 jobname='Job_'+name
29
30 #-Geometry
31 L = 6400.0 #Length, mm
32 H = 342.0 #Height, mm
33 B = 90.0 #Width, mm
34 c = 200.0 #Teeth length, mm
35 d = 20.0 #Teeth height, mm
36 hpar = 0.8
37
38 #-Load
39 FPress= 40.0 # Load amplitude (TOTAL), kN
40 l1 = 50.0 # Width of load on top, mm
41 posF = [0.25,0.50,0.75] # Positions of center-load-area, parameter x/L
42
43 #-Self weight
44 gkWood = 450 #kg/m^3
45
46 gdWood = gkWood*9.81/1000/1000000
47
48 #-Support
49 sl = 0.0 # Width of support, mm
50 SupR_X=False # False:Gliding True:Fixed in x-dir.
51
52 #-Meshing
53 meshsize=50.0 # mm
54
55 m_under=5 # Length from teeth-root to transition-mesh
56 d_m_under=10 # Height og transition-mesh
57
58 tpsH=1 # n elements on height of each transition part (2 parts)
59 teethPartitions=[0.25,0.375,0.5,0.625,0.75] # Parameters of partitions on teeth-
   length (min 5 in list)
```

Figur F.1: Modellkode 1 av 15



```

60 H1=2      # n elements on on height under tooth
61 H2=8      # n elements on tooth-height
62 dH=2      # change in n elements each L0 | dH > H2/(len(teethPartitions)-1) |
63 L0=3      # n elements on each tooth-partition
64
65 bpsL=max(int(18/200*c),18)    # n elements on length of beam part
66
67
68 bpsH_U=int(36*(1-hpar))    # n elements on height of beam part
69 bpsH_L=int(36*hpar)        # n elements on height of beam part
70
71
72 #####
73 # CALCULATION GEOMETRY
74 #####
75
76 th=H*hpar      # Height of teethplacement
77 n = int((L/2)//c)    # Number of teeth per side
78 s = ((L/2)%c)      # Side length, 0 if L % c = 0
79
80 zL = th-d/2
81 zU = th+d/2
82
83
84 ##### List of teeth x-coordinates #####
85 xCoor = []
86 x = s
87 for i in range(1,n*2+1):
88     xCoor.append(s+i*c)
89     xCoor.append(s+i*c) # two times, as we have 2 z-coord per x-coord
90 xCoor = xCoor[:-2]
91
92 xCoor.insert(0,0.0)
93 xCoor.append(L)
94
95 if s!=0:
96     xCoor.insert(1,s)
97     xCoor.insert(-1,L-s)
98
99 xCoor.remove(L/2)
100
101
102 ##### List of teeth z-coordinates #####
103 zCoor = []
104 for i in range(n):
105     zCoor.append(zL)
106     zCoor.append(zU)
107
108
109 for i in range(n):
110     zCoor.append(zL)
111     zCoor.append(zU)
112
113 zCoor = zCoor[:-1]
114
115 if s!=0:
116     zCoor.insert(0,zL)
117     zCoor.append(zL)

```

Figur F.2: Modellkode 2 av 15

```

117 ##### Add lower corner nodes to coordinates #####
118 xCoorL = []+xCoor
119 xCoorU = []+xCoor
120
121 zCoorL = []+zCoor
122 zCoorU = []+zCoor
123
124 xCoorL.insert(0,0.0)
125 zCoorL.insert(0,0.0)
126 xCoorL.append(L)
127 zCoorL.append(0.0)
128
129 xCoorU.insert(0,0.0)
130 zCoorU.insert(0,H)
131 xCoorU.append(L)
132 zCoorU.append(H)
133
134
135
136 #####
137 # MODEL
138 #####
139
140
141 #####
142 # SKETCH
143 #####
144
145 #---- Lower beam ----
146 PROFILE=MODEL.ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=200)
147
148 for i in range(len(xCoorL)-1):
149     PROFILE.Line(point1=(xCoorL[i],zCoorL[i]),point2=(xCoorL[i+1],zCoorL[i+1]))
150
151 PROFILE.Line(point1=(xCoorL[-1],zCoorL[-1]),point2=(xCoorL[0],zCoorL[0]))
152
153 PART1=MODEL.Part(name='LowerBeam', type=DEFORMABLE_BODY, dimensionality=
154     TWO_D_PLANAR)
155 PART1.BaseShell(sketch=PROFILE)
156 del PROFILE
157
158 #---- Upper beam ----
159 PROFILE=MODEL.ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=200)
160
161 for i in range(len(xCoorU)-1):
162     PROFILE.Line(point1=(xCoorU[i],zCoorU[i]),point2=(xCoorU[i+1],zCoorU[i+1]))
163
164 PROFILE.Line(point1=(xCoorU[-1],zCoorU[-1]),point2=(xCoorU[0],zCoorU[0]))
165
166 PART2=MODEL.Part(dimensionality=TWO_D_PLANAR, name='UpperBeam', type=
167     DEFORMABLE_BODY)
168 PART2.BaseShell(sketch=PROFILE)
169 del PROFILE

```

Figur F.3: Modellkode 3 av 15

```

110 #####
111 # PARTITIONS
112 #####
113
114
115 TOPFACE = PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=H-1,yMax=H+1,zMin=-1,
    zMax=1)
116 for i in range(len(posF)):
117     xVal = L*posF[i]
118     PART2.PartitionEdgeByPoint(edge=TOPFACE[0],point=(xVal-l1/2,H,0))
119
120     TOPFACE = PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal-l1/2-1,xMax=L+1,yMin=H-1,yMax=
    H+1,zMin=-1,zMax=1)
121
122     PART2.PartitionEdgeByPoint(edge=TOPFACE[0],point=(xVal+l1/2,H,0))
123
124     TOPFACE = PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+l1/2-1,xMax=L+1,yMin=H-1,yMax=
    H+1,zMin=-1,zMax=1)
125
126
127 # Split lengths
128
129
130 PART1.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L
    +1,yMin=-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
131     point1=(0,th-d/2-m_under,0),point2=(L,th-d/2-m_under,0))
132
133
134 PART2.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L
    +1,yMin=th-d/2-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=1),
135     point1=(0,th+d/2+m_under,0),point2=(L,th+d/2+m_under,0))
136
137
138 PART1.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L
    +1,yMin=-1,yMax=th+d/2-m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
139     point1=(0,th-d/2-m_under-d_m_under,0),point2=(L,th-d/2-m_under-d_m_under,0))
140
141 PART2.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L
    +1,yMin=th-d/2+m_under-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=1),
142     point1=(0,th+d/2+m_under+d_m_under,0),point2=(L,th+d/2+m_under+d_m_under,0))
143
144 PART1.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L
    +1,yMin=th-d/2-m_under-d_m_under-1,yMax=th-d/2-m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
145     point1=(0,th-d/2-m_under-d_m_under/2,0),point2=(L,th-d/2-m_under-d_m_under/2,0)
    )
146
147 PART2.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L
    +1,yMin=th+d/2+m_under-1,yMax=th+d/2+m_under+d_m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
148     point1=(0,th+d/2+m_under+d_m_under/2,0),point2=(L,th+d/2+m_under+d_m_under/2,0)
    )
149
150
151 # Split teeth
152 for i in range(2*n-1):
153     PART1.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=c*i
    -1,xMax=L+1,yMin=-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
154         point1=(s+c*(i+1),th+d/2,0),point2=(s+c*(i+1),0,0))
155
156     PART2.PartitionFaceByShortestPath(faces=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=c*i
    -1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=1),
157         point1=(s+c*(i+1),H,0),point2=(s+c*(i+1),th-d/2,0))

```

Figur F.4: Modellkode 4 av 15

```

158 # PART1
159 for i in range(2*n):
160     teethOr=i*c+1
161     currentSurf=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=teethOr-1,xMax=teethOr+c,yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)
162     for p in teethPartitions:
163         PART1.PartitionFaceByShortestPath(faces=currentSurf,point1=(teethOr+c*p,th-d/2-m_under,0),point2=(teethOr+c*p,th+d/2,0))
164         currentSurf=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c,yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)
165 #PART2
166 for i in range(2*n):
167     teethOr=i*c+1
168     currentSurf=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=teethOr-1,xMax=teethOr+c,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1)
169     for p in teethPartitions:
170         PART2.PartitionFaceByShortestPath(faces=currentSurf,point1=(teethOr+c*p,th-d/2,0),point2=(teethOr+c*p,th+d/2+m_under,0))
171         currentSurf=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1)
172
173 #####
174 # SETS
175 #####
176 set1name = 'LowBeam'
177 set2name = 'UppBeam'
178
179 PART1.Set(faces=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=B+1),name=set1name)
180 PART2.Set(faces=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=B+1),name=set2name)
181
182
183 PART1.Set(vertices=PART1.vertices.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=1,yMin=-1,yMax=1,zMin=-1,zMax=B+1),name='SupLSet')
184 PART1.Set(vertices=PART1.vertices.getByBoundingBox(xMin=L-1,xMax=L+1,yMin=-1,yMax=1,zMin=-1,zMax=B+1),name='SupRSet')
185
186
187 #####
188 # SURFACES
189 #####
190
191 # - Load edges -
192 for i in range(len(posF)):
193     xVal = posF[i]*L
194     surfName = 'LoadSurf'+str(i+1)
195     PART2.Surface(name=surfName,side1Edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal-l1/2-1,xMax=xVal+l1/2+1,yMin=H-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=B+1))
196
197 Cnum=1
198 for t in range(n):
199     xVal=s+c*t
200     surfsL=[]
201     surfsU=[]
202     surfsL.append(PART1.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_1',side1Edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal-1,xMax=xVal+teethPartitions[0]*c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2-1,zMin=-1,zMax=1)))
203     surfsU.append(PART2.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_1',side1Edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal-1,xMax=xVal+teethPartitions[0]*c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2-1,zMin=-1,zMax=1)))

```

Figur F.5: Modellkode 5 av 15

```

204     num=2
205     for i in range(len(teethPartitions)-1):
206         surfsL.append(PART1.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=
PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[i]*c-1,xMax=xVal+
teethPartitions[i+1]*c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
207         surfsU.append(PART2.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=
PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[i]*c-1,xMax=xVal+
teethPartitions[i+1]*c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
208         num+=1
209
210     surfsL.append(PART1.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=PART1.
edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[-1]*c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-
d/2+1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
211     surfsU.append(PART2.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=PART2.
edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[-1]*c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-
d/2+1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
212
213     PART1.SurfaceByBoolean(name='C'+str(Cnum),surfaces=surfsL)
214     PART2.SurfaceByBoolean(name='C'+str(Cnum),surfaces=surfsU)
215     Cs=[i for i in range(1,len(teethPartitions)+2)]
216     for C in Cs:
217         del PART1.surfaces['C'+str(Cnum)+'_'+str(C)]
218         del PART2.surfaces['C'+str(Cnum)+'_'+str(C)]
219
220     Cnum+=1
221     if Cnum != int(2*n):
222         PART1.Surface(name='C'+str(Cnum),sideEdges=PART1.edges.getByBoundingBox(
xMin=xVal+c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1))
223         PART2.Surface(name='C'+str(Cnum),sideEdges=PART2.edges.getByBoundingBox(
xMin=xVal+c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1))
224
225         Cnum+=1
226
227 for t in range(n,2*n,1):
228     xVal=s+c*t
229     surfsL=[]
230     surfsU=[]
231
232     surfsL.append(PART1.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_1',sideEdges=PART1.edges.
getByBoundingBox(xMin=xVal-1,xMax=xVal+teethPartitions[0]*c+1,yMin=th-d/2+1,
yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
233     surfsU.append(PART2.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_1',sideEdges=PART2.edges.
getByBoundingBox(xMin=xVal-1,xMax=xVal+teethPartitions[0]*c+1,yMin=th-d/2+1,
yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
234
235     num=2
236     for i in range(len(teethPartitions)-1):
237         surfsL.append(PART1.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=
PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[i]*c-1,xMax=xVal+
teethPartitions[i+1]*c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
238         surfsU.append(PART2.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=
PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[i]*c-1,xMax=xVal+
teethPartitions[i+1]*c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1)))
239         num+=1
240
241     surfsL.append(PART1.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=PART1.
edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[-1]*c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-
d/2-1,yMax=th+d/2-1,zMin=-1,zMax=1)))
242
243     surfsU.append(PART2.Surface(name='C'+str(Cnum)+'_'+str(num),sideEdges=PART2.
edges.getByBoundingBox(xMin=xVal+teethPartitions[-1]*c-1,xMax=xVal+c+1,yMin
=th-d/2-1,yMax=th+d/2-1,zMin=-1,zMax=1)))

```

Figur F.6: Modellkode 6 av 15

```

244 PART1.SurfaceByBoolean(name='C'+str(Cnum),surfaces=surfsL)
245 PART2.SurfaceByBoolean(name='C'+str(Cnum),surfaces=surfsU)
246 Cs=[i for i in range(1,len(teethPartitions)+2)]
247 for C in Cs:
248     del PART1.surfaces['C'+str(Cnum)+'_'+str(C)]
249     del PART2.surfaces['C'+str(Cnum)+'_'+str(C)]
250
251     Cnum+=1
252     if Cnum!=int(4*n-1):
253         PART1.Surface(name='C'+str(Cnum),side1Edges=PART1.edges.getByBoundingBox(
xMin=xVal+c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1))
254         PART2.Surface(name='C'+str(Cnum),side1Edges=PART2.edges.getByBoundingBox(
xMin=xVal+c-1,xMax=xVal+c+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1))
255         Cnum+=1
256 Cnum-=1
257
258
259 #####
260 # MATERIAL
261 #####
262 #YZX=LTR
263 Grt=65.0      #70.0
264 Glt=650.0    #1200.0
265 Glr=Glt     #=Glt
266 Er=300.0    #700.0
267 Et=Er      #=Er
268 El=12000.0 #12000.0
269
270
271 WOODMAT=MODEL.Material(name='WoodMat')
272 WOODMAT.Density(table=((7.5e-10, ), ))
273     #R=1, T=2, L=3
274 WOODMAT.Elastic(table=((El, Er, Et, 0.0, 0.0, 0.0, Glr, Glt, Grt), ), type=
ENGINEERING_CONSTANTS)
275
276 #####
277 # SECTION
278 #####
279 MODEL.HomogeneousSolidSection(material='WoodMat', name='woodsection', thickness=B)
280
281
282 #####
283 # SECTION ASSIGNMENT
284 #####
285 PART1.SectionAssignment(offset=0.0, offsetField='', offsetType=MIDDLE_SURFACE,
region=PART1.sets[set1name], sectionName='woodsection', thicknessAssignment=
FROM_SECTION)
286 PART2.SectionAssignment(offset=0.0, offsetField='', offsetType=MIDDLE_SURFACE,
region=PART2.sets[set2name], sectionName='woodsection', thicknessAssignment=
FROM_SECTION)
287
288
289 #####
290 # ORIENTATION
291 #####
292 PART1.MaterialOrientation(additionalRotationField='', additionalRotationType=
ROTATION_NONE, angle=0.0, axis=AXIS_3, fieldName='', orientationType=SYSTEM,
region=PART1.sets[set1name], stackDirection=STACK_3)
293 PART2.MaterialOrientation(additionalRotationField='', additionalRotationType=
ROTATION_NONE, angle=0.0, axis=AXIS_3, fieldName='', orientationType=SYSTEM,
region=PART2.sets[set2name], stackDirection=STACK_3)

```

Figur F.7: Modellkode 7 av 15

```

294 #####
295 # ASSEMBLY
296 #####
297 MODEL.rootAssembly.Instance(dependent=ON, name='LB', part=PART1)
298 MODEL.rootAssembly.Instance(dependent=ON, name='UB', part=PART2)
299
300 #####
301 # INTERACTION PROPERTIES
302 #####
303
304 MODEL.ContactProperty('ContactProp')
305
306 MODEL.interactionProperties['ContactProp'].TangentialBehavior(dependencies=0,
307     directionality=ISOTROPIC,
308     elasticSlipStiffness=None, formulation=PENALTY, fraction=0.005, maximumElasticSlip
309     =FRACTION,
310     pressureDependency=OFF, shearStressLimit=None, slipRateDependency=OFF, table
311     =((0.3, ), ),
312     temperatureDependency=OFF)
313 MODEL.interactionProperties['ContactProp'].NormalBehavior(allowSeparation=ON,
314     constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
315     pressureOverclosure=HARD)
316 MODEL.interactionProperties['ContactProp'].GeometricProperties(contactArea=B,
317     padThickness=None)
318
319 #####
320 # INTERACTION
321 #####
322
323 for i in range(1,Cnum+1):
324     MODEL.SurfaceToSurfaceContactStd(adjustMethod=NONE, clearanceRegion=None,
325         createStepName='Initial', datumAxis=None, initialClearance=OMIT,
326         interactionProperty='ContactProp', master=MODEL.rootAssembly.instances['LB'].
327         surfaces['C'+str(i)], name='Cont'+str(i), slave=MODEL.rootAssembly.instances['
328         UB'].surfaces['C'+str(i)], sliding=FINITE, thickness=ON)
329
330 #####
331 # STEP
332 #####
333 stepname = 'Step1'
334 initInc = 0.1
335
336 nonLin = True #Non-Linear calculations
337
338 if nonLin is True:
339     nls = ON
340 else:
341     nls = OFF
342
343 MODEL.StaticStep(initialInc=initInc, name=stepname, nlgeom=nls, previous='Initial')
344
345 #####
346 # LOAD
347 #####
348
349 #-Load on top
350
351 if FPress > 0.0:
352     LoadArea=ll*B*len(posF)
353
354     fPress=FPress*1000/LoadArea
355     for i in range(len(posF)):
356         loadName='Load'+str(i+1)
357         surfName='LoadSurf'+str(i+1)
358         MODEL.Pressure(amplitude=UNSET, createStepName='Step1',distributionType=
359             UNIFORM, field='', magnitude=fPress, name=loadName, region=MODEL.rootAssembly.
360             instances['UB'].surfaces[surfName])

```

Figur F.8: Modellkode 8 av 15

```

350 #-Body force/Self weight , gdWood
351
352 MODEL.BodyForce(comp2=-gdWood,createStepName='Step1',name='SelfWeightL',
353     region=MODEL.rootAssembly.instances['LB'].sets['LowBeam'])
354 MODEL.BodyForce(comp2=-gdWood,createStepName='Step1',name='SelfWeightU',
355     region=MODEL.rootAssembly.instances['UB'].sets['UppBeam'])
356
357
358 #####
359 # BOUNDARY CONDITIONS
360 #####
361
362 # --Property for right support--
363
364 if SupR_X is True:
365     ur1x = SET
366 else:
367     ur1x = UNSET
368
369 #L Support
370 MODEL.DisplacementBC(amplitude=UNSET, createStepName='Initial', distributionType=
    UNIFORM, fieldName='',
371     localCsys=None, name='SupL', region=MODEL.rootAssembly.instances['LB'].sets['
    SupLSet'], u1=SET, u2=SET, u3=SET, ur1=UNSET, ur2=UNSET, ur3=UNSET)
372 #R Support
373 MODEL.DisplacementBC(
374     amplitude=UNSET, createStepName='Initial', distributionType=UNIFORM, fieldName=
    '', localCsys=None, name='SupR', region=MODEL.rootAssembly.instances['LB'].sets
    ['SupRSet'], u1=ur1x, u2=SET, u3=SET, ur1=UNSET, ur2=UNSET, ur3=UNSET)
375
376
377 #####
378 # MESH CONTROL
379 #####
380
381 # Big part
382 PART1.setMeshControls(elemShape=QUAD,regions=PART1.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,
    xMax=L+1,yMin=-1,yMax=th-d/2-m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
383     technique=STRUCTURED,minTransition=ON)
384 PART2.setMeshControls(elemShape=QUAD,regions=PART2.faces.getByBoundingBox(xMin=-1,
    xMax=L+1,yMin=th+d/2+m_under-1,yMax=H+1,zMin=-1,zMax=1),
385     technique=STRUCTURED,minTransition=ON)
386
387 # Transition part
388 PART1.setMeshControls(elemShape=QUAD_DOMINATED,regions=PART1.faces.getByBoundingBox
    (xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-m_under-d_m_under-1,yMax=th-d/2-m_under+1,zMin
    =-1,zMax=1),
389     technique=FREE,minTransition=OFF)
390 PART2.setMeshControls(elemShape=QUAD_DOMINATED,regions=PART2.faces.getByBoundingBox
    (xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th+d/2+m_under-1,yMax=th+d/2+m_under+d_m_under+1,zMin
    =-1,zMax=1),
391     technique=FREE,minTransition=OFF)
392
393 # Teeth part
394 PART1.setMeshControls(elemShape=QUAD_DOMINATED,regions=PART1.faces.getByBoundingBox
    (xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
395     technique=STRUCTURED,minTransition=ON)
396 PART2.setMeshControls(elemShape=QUAD_DOMINATED,regions=PART2.faces.getByBoundingBox
    (xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
397     technique=STRUCTURED,minTransition=ON)

```

Figur F.9: Modellkode 9 av 15



```

398 mcontrollist=[[c*i+c*teethPartitions[0] for i in range(2*n)], [c*i+c*teethPartitions
    [-1] for i in range(2*n)]]
399
400 for i in range(len(mcontrollist[0])):
401     PART1.setMeshControls(elemShape=QUAD_DOMINATED, regions=PART1.faces.
        getByBoundingBox(xMin=mcontrollist[0][i]-1, xMax=mcontrollist[1][i]+1, yMin=th-d
            /2-m_under-1, yMax=th+d/2+1, zMin=-1, zMax=1),
402         technique=FREE, minTransition=OFF)
403     PART2.setMeshControls(elemShape=QUAD_DOMINATED, regions=PART2.faces.
        getByBoundingBox(xMin=mcontrollist[0][i]-1, xMax=mcontrollist[1][i]+1, yMin=th-d
            /2-1, yMax=th+d/2+m_under+1, zMin=-1, zMax=1),
404         technique=FREE, minTransition=OFF)
405
406 ## EDGE SEED
407 # Big part
408
409 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
410     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=-1, xMax=L+1, yMin=-1, yMax=1, zMin=-1, zMax
        =1),
411     number=bpsL)
412 PART2.seedEdgeBySize(constraint=FREE,
413     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1, xMax=L+1, yMin=H-1, yMax=H+1, zMin=-1,
        zMax=1),
414     size=c/bpsL)
415 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
416     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=-1, xMax=L+1, yMin=th-d/2-m_under-
        d_m_under-1, yMax=th-d/2-m_under-d_m_under+1, zMin=-1, zMax=1),
417     number=bpsL)
418 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
419     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1, xMax=L+1, yMin=th+d/2+m_under+
        d_m_under-1, yMax=th+d/2+m_under+d_m_under+1, zMin=-1, zMax=1),
420     number=bpsL)
421
422 for i in range(n*2+1):
423     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
424         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=s+c*i-1, xMax=s+c*i+1, yMin=-1, yMax=
            th-d/2-m_under-d_m_under+1, zMin=-1, zMax=1),
425         number=bpsH_L)
426     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
427         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=s+c*i-1, xMax=s+c*i+1, yMin=th+d/2+
            m_under+d_m_under-1, yMax=H+1, zMin=-1, zMax=1),
428         number=bpsH_U)
429
430 # Transition part
431 for i in range(n*2+1):
432     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
433         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=s+c*i-1, xMax=s+c*i+1, yMin=th-d/2-
            m_under-d_m_under-1, yMax=th-d/2-m_under+1, zMin=-1, zMax=1),
434         number=tpsH)
435
436     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
437         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=s+c*i-1, xMax=s+c*i+1, yMin=th+d/2+
            m_under-1, yMax=th+d/2+m_under+d_m_under+1, zMin=-1, zMax=1),
438         number=tpsH)

```

Figur F.10: Modellkode 10 av 15

```

439 # Teeth part
440 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
441     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d
442     /2+1,zMin=-1,zMax=1),
443     number=L0)
443 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
444     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=
445     th-d/2-m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
446     number=L0)
446 # Fixing middle line of transition part
447 tranmidN=int(abs((L0*(len(teethPartitions)+1)-bpsL)/2))+bpsL
448 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
449     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-m_under-
450     d_m_under/2-1,yMax=th-d/2-m_under-d_m_under/2+1,zMin=-1,zMax=1),
451     number=tranmidN)
452 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
453     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d
454     /2+1,zMin=-1,zMax=1),
455     number=L0)
455 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
456     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th+d/2+m_under-1,yMax=
457     th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
458     number=L0)
458 # Fixing middle line of transition part
459 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
460     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th+d/2+m_under+
461     d_m_under/2-1,yMax=th+d/2+m_under+d_m_under/2+1,zMin=-1,zMax=1),
462     number=tranmidN)
463 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
464     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+
465     m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
466     number=H1+H2)
467 for i in range(n):
468     teethOr=s+c*i
469     #PART1
470     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
471         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr-1,xMax=teethOr+1,yMin=th-d
472         /2-m_under-1,yMax=th-d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
473         number=H1)
474
475     H3=H1
476     for p in teethPartitions:
477         PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
478             edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c*p
479             +1,yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=th+d/2,zMin=-1,zMax=1),
480             number=H3)
481         H3=H3+dH
482         if H3>H2+H1:
483             H3=H2+H1
484
485     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
486         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=
487         th-d/2-m_under-1,yMax=th-d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
488         number=H1)
489     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
490         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=
491         th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
492         number=H2)

```

Figur F.11: Modellkode 11 av 15

```

490 #PART2
491 H3=H1+H2
492 for p in teethPartitions:
493     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
494         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c*p
+1,yMin=th-d/2,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
495         number=H3)
496     H3=H3-dH
497     if H3<H1:
498         H3=H1
499
500     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
501         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=
th+d/2-1,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
502         number=H1)
503     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
504         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=
th-d/2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
505         number=H2)
506 #####
507
508 #PART1
509 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
510     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=L/2-1,xMax=L/2+1,yMin=th-d/2-m_under-1,
yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
511     number=H1+H2)
512
513 H3=H1+H2
514 teethOr=L/2
515 for p in teethPartitions:
516     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
517         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c*p+1,
yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=th+d/2,zMin=-1,zMax=1),
518         number=H3)
519     H3=H3-dH
520     if H3<H1:
521         H3=H1
522
523 PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
524     edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=th-d
/2-m_under-1,yMax=th-d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
525     number=H1)
526
527 #PART2
528 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
529     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=L/2-1,xMax=L/2+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+
d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
530     number=H1)
531
532 H3=H1
533 teethOr=L/2
534 for p in teethPartitions:
535     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
536         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c*p+1,
yMin=th-d/2,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
537         number=H3)
538     H3=H3+dH
539     if H3>H1+H2:
540         H3=H1+H2

```

Figur F.12: Modellkode 12 av 15

```

541 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
542     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=th+d
      /2-1,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
543     number=H1)
544
545 #PART1
546 for i in range(1,n):
547     teethOr=L/2+c*i
548     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
549         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr-1,xMax=teethOr+1,yMin=th-d
      /2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
550         number=H2)
551
552     H3=H1+H2
553     for p in teethPartitions:
554         PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
555             edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c*p
      +1,yMin=th-d/2-m_under-1,yMax=th+d/2,zMin=-1,zMax=1),
556             number=H3)
557         H3=H3-dH
558         if H3<H1:
559             H3=H1
560     PART1.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
561         edges=PART1.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c-1,xMax=teethOr+c+1,yMin=
      th-d/2-m_under-1,yMax=th-d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
562         number=H1)
563
564 #PART2
565 for i in range(1,n):
566     teethOr=L/2+c*i
567     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
568         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr-1,xMax=teethOr+1,yMin=th+d
      /2-1,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
569         number=H1)
570
571     H3=H1
572     for p in teethPartitions:
573         PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
574             edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr+c*p-1,xMax=teethOr+c*p
      +1,yMin=th-d/2,yMax=th+d/2+m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
575             number=H3)
576         H3=H3+dH
577         if H3>H1+H2:
578             H3=H1+H2
579     PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
580         edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=teethOr-1,xMax=teethOr+1,yMin=th-d
      /2-1,yMax=th+d/2+1,zMin=-1,zMax=1),
581         number=H2)
582 PART2.seedEdgeByNumber(constraint=FIXED,
583     edges=PART2.edges.getByBoundingBox(xMin=L-1,xMax=L+1,yMin=th-d/2-1,yMax=th+d/2+
      m_under+1,zMin=-1,zMax=1),
584     number=H1+H2)

```

Figur F.13: Modellkode 13 av 15

```

585 #####
586 # MESH ELEMENT TYPE
587 #####
588
589 PART1.setElementType(elemTypes=(ElemType(elemCode=CPS4,elemLibrary=STANDARD),
590     ElemType(elemCode=CPS3,elemLibrary=STANDARD)), regions=PART1.sets['LowBeam'])
591
592 PART2.setElementType(elemTypes=(ElemType(elemCode=CPS4,elemLibrary=STANDARD),
593     ElemType(elemCode=CPS3,elemLibrary=STANDARD)), regions=PART2.sets['UppBeam'])
594
595 #####
596 # MESH SEEDS
597 #####
598
599
600 PART1.seedPart(deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1, size=meshsize)
601 PART2.seedPart(deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1, size=meshsize)
602
603
604 #####
605 # GENERATE MESH
606 #####
607 PART1.generateMesh()
608 PART2.generateMesh()
609
610
611 #####
612 # FIELD OUTPUT
613 #####
614 MODEL.fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(numIntervals=1, timeMarks=OFF,
615     variables=('S', 'U', 'RF', 'LE', 'E', 'CSTRESS', 'CFORCE'))
616 MODEL.fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValuesInStep(numIntervals=5, stepName='
617     Step1')
618
619 #####
620 # HISTORY OUTPUT
621 #####
622 MODEL.historyOutputRequests['H-Output-1'].setValues(numIntervals=1, variables=('
623     CSTRESS', 'ALLAE', 'ALLCD', 'ALLDMD',
624     'ALLEE', 'ALLFD', 'ALLIE', 'ALLJD', 'ALLKE', 'ALLKL', 'ALLPD', 'ALLQB', 'ALLSE', 'ALLSD',
625     'ALLVD', 'ALLWK', 'ETOTAL'))
626 MODEL.historyOutputRequests['H-Output-1'].setValuesInStep(numIntervals=1, stepName='
627     Step1')
628
629 #####
630 # JOB
631 #####
632 JOB = mdb.Job(atTime=None, contactPrint=OFF, description='', echoPrint=OFF,
633     explicitPrecision=SINGLE, getMemoryFromAnalysis=True, historyPrint=OFF, memory
634     =90, memoryUnits=PERCENTAGE, model=modelname, modelPrint=OFF,
635     multiprocessingMode=DEFAULT, name=jobname, nodalOutputPrecision=SINGLE, numCpus
636     =8, numDomains=8, numGPUs=0, queue=None, resultsFormat=ODB, scratch='', type=
637     ANALYSIS, waitHours=0, waitMinutes=0)
638
639
640
641 MODEL.rootAssembly.regenerate()

```

Figur F.14: Modellkode 14 av 15

---

```
632 #####
633 # NODE SETS
634 #####
635 snum=1
636 for i in range(n-1):
637     xCo = s+c*c*i
638     MODEL.rootAssembly.Set(name='contset'+str(snum),nodes=MODEL.rootAssembly.
instances['LB'].nodes.getByBoundingBox(xMin=xCo-1,xMax=xCo+1,yMin=th-d/H2-1,
yMax=th+d/H2+1,zMin=-1,zMax=1))
639     snum+=1
640
641 for i in range(n-1):
642     xCo = L/2+c*c*i
643     MODEL.rootAssembly.Set(name='contset'+str(snum),nodes=MODEL.rootAssembly.
instances['LB'].nodes.getByBoundingBox(xMin=xCo-1,xMax=xCo+1,yMin=th-d/H2-1,
yMax=th+d/H2+1,zMin=-1,zMax=1))
644     snum+=1
```

Figur F.15: Modellkode 15 av 15

---

## G Python-kode for å hente resultat fra FEM-modell

```
1 # Script to run a loop of scripts with different parameters
2 session.journalOptions.setValues(replayGeometry=COORDINATE, recoverGeometry=
   COORDINATE) #COORDINATE, INDEX or COMPRESSEDINDEX
3 # -*- coding: mbc3 -*-
4 from part import *
5 from material import *
6 from section import *
7 from assembly import *
8 from step import *
9 from interaction import *
10 from load import *
11 from mesh import *
12 from math import*
13 from optimization import *
14 from job import *
15 from sketch import *
16 from visualization import *
17 from connectorBehavior import *
18 from odbAccess import*
19 from abaqusConstants import *
20 from odbMaterial import *
21 from odbSection import *
22 from abaqus import getInput
23
24 # INPUT
25 # name
26 #####
27 # ODB OPEN
28 #####
29
30 jobname='Job_'+name
31 filename='Data_'+name
32
33 odb =session.openOdb(path=jobname+'.odb',name=name)
34
35 myViewport = session.Viewport(name='Viewport: 1')
36 myViewport.makeCurrent()
37 myViewport.setValues(displayedObject=odb)
38
39 STEP=odb.steps['Step1']
40 FRAME_no=len(STEP.frames)
41
42 #####
43 # PATH
44 #####
45 PATH_UK=session.Path(name='Edge_UK',type=POINT_LIST,expression=((0,0,0),(L,0,0))
46 PATH_OK=session.Path(name='Edge_OK',type=POINT_LIST,expression=((0,H,0),(L,H,0))
47 PATH_CrossSection=session.Path(name='CrossSection',type=POINT_LIST,expression=((L
   /2,0,0),(L/2,H,0))
48
49 # - Displacement
50 PathXYData_U2=session.XYDataFromPath(path=PATH_UK,
51   includeIntersections=TRUE,shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,
52   step=0,frame=FRAME_no-1,variable=('U',NODAL,(COMPONENT,'U2')),name='
   DisplU2')
```

Figur G.1: Resultatkode 1 av 3

```

53 minU2=(0,0)
54 for u2 in PathXYData_U2:
55     if u2[1] < minU2[1]:
56         minU2=u2
57 minU2=minU2
58
59
60 # - Tension edge
61 PathXYData_S11_UK=session.XYDataFromPath(path=PATH_UK, pathStyle=PATH_POINTS,
62     includeIntersections=TRUE,shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,
63     step=0, frame=FRAME_no-1,variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S11' )
64     , ), ),name='TensionS11')
65 PathXYData_S11_CS=session.XYDataFromPath(path=PATH_CrossSection, pathStyle=
66     PATH_POINTS,
67     includeIntersections=TRUE,shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,
68     step=0, frame=FRAME_no-1,variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S11' )
69     , ), ),name='S11_CS')
70
71 # - Teeth contact
72 contNodes=[]
73 for i in range(1,snum):
74     inodes=odb.rootAssembly.nodeSets['CONTSET'+str(i)].nodes[0]
75     icontNodes=[]
76     for node in inodes:
77         icontNodes.append(node.label)
78     contNodes.append(icontNodes)
79
80 vals = odb.steps['Step1'].frames[FRAME_no-1].fieldOutputs['CPRESS'].values
81
82 setDatAs = {}
83 for i in range(len(vals)):
84     if vals[i].instance.name == 'LB':
85         setDatAs[vals[i].nodeLabel] = vals[i].data
86
87 contVals = []
88 for i in contNodes:
89     icontVals = []
90     for j in i:
91         try:
92             icontVals.append(setDatAs[j])
93         except:
94             print(str(j)+' er ikke i kontaktsiden..')
95     contVals.append(icontVals)
96
97 contacts=[]
98 for i in contVals:
99     total=0
100     for j in i:
101         total+=j
102     contacts.append(total/len(i))
103
104
105 # - Cross-section midspan (Bottom -> top)
106 PATH_Midspan=session.Path(name='MidspanPath',type=POINT_LIST,expression=((L/2,0,0)
107     ,(L/2,H,0)))
108 XYData_Midspan=session.XYDataFromPath(
109     path=PATH_Midspan, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
110     shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0, frame=FRAME_no-1,
111     variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S11' ), ), ),name='MidspanData'
112 )

```

Figur G.2: Resultatkode 2 av 3



```

111 ShearCS=[]
112 for i in range(n):
113     PATH=session.Path(name='P'+str(i),type=POINT_LIST,expression=((c*i+c/2,0,0),(c*
114     i+c/2,H,0)))
115     XYData_ShearCS=session.XYDataFromPath(
116         path=PATH, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
117         shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0,frame=FRAME_no-1,
118         variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S12' ), ), ),name='
119         ShearData1')
120     ShearCS.append(str(XYData_ShearCS))
121 # - Shear-stresses under teeth
122 PATH_Shear_UK=session.Path(name='ShearPath',type=POINT_LIST,expression=((0,th-d/2-
123     m_under,0),(L/2,th-d/2-m_under,0)))
124 XYData_Shear_UK=session.XYDataFromPath(
125     path=PATH_Shear_UK, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
126     shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0,frame=FRAME_no-1,
127     variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S12' ), ), ),name='ShearData2')
128 XYData_S22_UK=session.XYDataFromPath(
129     path=PATH_Shear_UK, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
130     shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0,frame=FRAME_no-1,
131     variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S22' ), ), ),name='S22_1')
132
133 PATH_Shear_OK=session.Path(name='ShearPath',type=POINT_LIST,expression=((0,th+d/2+
134     m_under,0),(L/2,th+d/2+m_under,0)))
135 XYData_Shear_OK=session.XYDataFromPath(
136     path=PATH_Shear_OK, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
137     shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0,frame=FRAME_no-1,
138     variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S12' ), ), ),name='ShearData3')
139 XYData_S22_OK=session.XYDataFromPath(
140     path=PATH_Shear_OK, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
141     shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0,frame=FRAME_no-1,
142     variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S22' ), ), ),name='S22_2')
143 XYData_S11_OK=session.XYDataFromPath(
144     path=PATH_OK, pathStyle=PATH_POINTS,includeIntersections=TRUE,
145     shape=UNDEFORMED,labelType=TRUE_DISTANCE,step=0,frame=FRAME_no-1,
146     variable=('S',INTEGRATION_POINT, ( (COMPONENT, 'S11' ), ), ),name='S11_2')
147
148
149
150
151
152 #####
153 # CLOSE
154 #####
155
156 odb.close()

```

Figur G.3: Resultatkode 3 av 3

---

## H Python-kode for parametrisk studie

```
1 # Script to run a loop of scripts with different parameters
2 session.journalOptions.setValues(replayGeometry=COORDINATE, recoverGeometry=
   COORDINATE) #COORDINATE, INDEX or COMPRESSEDINDEX
3 # -*- coding: mbcs -*-
4 from part import *
5 from material import *
6 from section import *
7 from assembly import *
8 from step import *
9 from interaction import *
10 from load import *
11 from mesh import *
12 from math import*
13 from optimization import *
14 from job import *
15 from sketch import *
16 from visualization import *
17 from connectorBehavior import *
18 from odbAccess import*
19 from abaqusConstants import *
20 from odbMaterial import *
21 from odbSection import *
22 from abaqus import getInput
23 import time
24
25 exec(open("functions.py").read())
26
27 # KAPASITETER (Mean)
28 fm = 38.8
29 fc0 = 30.0
30 ft90 = 0.9
31 fv = 4.5
32
33
34 t0 = time.time()
35
36 listofFPress = [i for i in range(50,122,2)]
37
38 listofhpar = [i*0.01 for i in range(50,70,5)]
39
40 listofc = [100,160,200,320,400]
41
42 listofd = [i for i in range(10,45,5)]
43
44 datafile = open('Resultat.txt','w')
45 for hpar in listofhpar:
46     for c in listofc:
47         for d in listofd:
48             fcount = 0
49             utnyttelse=False
50
51             while utnyttelse is False and fcount < len(listofFPress)-1:
52                 FPress = listofFPress[fcount]
53
54
55                 name = 'hpar'+str(hpar)+'_c'+str(c)+'_d'+str(d)+'_FPress'+str(FPress)
56                 name = name.replace('.', '')
57
58                 exec(open("Model_2DBjelke.py").read())
59                 JOB.submit(consistencyChecking=OFF)
```

Figur H.1: Parametrisk studie 1 av 2

```

60 JOB.waitForCompletion()
61 exec(open("Result_2DBjelke.py").read())
62 s11t = str(PathXYData_S11_UK) # Tension
63 s11c = str(XYData_S11_OK) # Compression
64 s22 = str(XYData_S22_UK) # Tension under teeth
65 s12 = str(XYData_Shear_UK) # Shear under teeth
66 s12cs = str(ShearCS) # Shear in cross-section
67 contactvalues = str(contacts) # contact stresses
68
69 ### Failure mode 1 ### (Only tension on UK, exclude compression)
70 s11tx,s11ty = path(s11t)
71 s11tx,s11ty = s11tx[30:-30],s11ty[30:-30]
72 FM1 = max(s11ty)
73
74 ### Failure mode 2 ###
75 # S22 #
76 a = 20
77 s22l = splitTeeth(path(s22),c)
78 s22la = [redGraf(s22[0],s22[1],a) for s22 in s22l]
79 res22la = [sumabove(i[0],i[1])/a for i in s22la]
80 # S12 #
81 s12l = splitTeeth(path(s12),c)
82 s12l = [[[i for i in s12[0]],[-i for i in s12[1]]] for s12 in s12l]
83 s12la = [redGraf(s12[0],s12[1],a) for s12 in s12l]
84 res12la = [sumabove(i[0],i[1])/a for i in s12la]
85 # S22+S12 #
86 FM2=0
87 for i in range(len(res12la)):
88     msm = (res12la[i]/fv)**2+(res22la[i]/ft90)**2
89     if msm > FM2:
90         FM2=msm
91
92 ### Failure mode 3 ###
93 a0=2
94 shear=[]
95 for tann in s12cs.split("'", '[')[a0:]:
96     shear.append(abs(min(path(tann)[1])))
97 FM3 = max(shear)
98
99 ### Failure mode 4 ###
100 contactvalueslist = values(contactvalues)
101 FM4 = max(contactvalueslist)
102
103 ### Utilizations ###
104 nFM1 = round(FM1/fm,3)
105 nFM2 = round(FM2,3)
106 nFM3 = round(FM3/fv,3)
107 nFM4 = round(FM4/fc0,3)
108 if nFM1 >= 1.0:
109     utnyttelse = True
110 if nFM2 >= 1.0:
111     utnyttelse = True
112 if nFM3 >= 1.0:
113     utnyttelse = True
114 if nFM4 >= 1.0:
115     utnyttelse = True
116 resulttext = str(listofFPress[fcount])+'\t'+str(hpar)+'\t'+str(c)+'\t'+str(
d)+'\t'+str(nFM1*100)+'\t'+str(nFM2*100)+'\t'+str(nFM3*100)+'\t'+str(nFM4*100)+
'\n'
117 fcount+=1
118 datafile.write(resulttext)
119 t1 = time.time()-t0
120 datafile.write('Tid brukt: '+str(t1/(60*60))+' timer\n')
121 datafile.close()

```

Figur H.2: Parametrisk studie 2 av 2

