Sander Lyng Klokk

Eksakte Kategorier

Bacheloroppgave i Matematiske fag
Veileder: Sondre Kvamme
Juni 2022

Bacheloroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sander Lyng Klokk

Eksakte Kategorier

Bacheloroppgave i Matematiske fag
Veileder: Sondre Kvamme
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag:
Denne artikkelen ser på egenskaper og eksempler av eksakte kategorier.
Seksjon 1 gir et kjapt overblikk over definisjonen av kategorier.
Seksjon 2 definerer og viser noen nyttige egenskaper med eksakte kategorier
Seksjon 3 ser på eksempler på eksakte kategorier.

Innhold

1. Kategorier

Definisjon 1.1 (Kategori). *En kategori $\mathcal{C}$ er*

- *En samling objekter $Ob(\mathcal{C})$*
- *For to objekter X og Y er der en mengde morfismer $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$*
- *For tre objekter X, Y og Z og multiplikasjonsavbildningen*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) : (f,g) \mapsto f \circ g$$

slik at

- *for alle X eksisterer $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ slik at*
  - *for alle $Y \in OB(C)$ for alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ $f \circ id_X = f$*
  - *for alle $Y \in OB(C)$ for alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ $id_X \circ f = f$*
- *multiplikasjon er assosiativt for alle X, Y, Z og $W \in Ob(\mathcal{C})$ er $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ og $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Eksempler på kategorier er for eksempel:

Kategorien Set der objektene er mengder og morfiene er abildningen av en mengde til en mengde

Kategorien *Grp* der objektene er Grupper og morfiene er gruppehomomorfier.

Kategorien Top der objetkene er topologiske rom og morfiene er kontinuerlige avbildninger.

Definisjon 1.2 (Additivkategori). *En additiv kategori er en kategori hvor:*

- *Alle* Hom*-mengder er abelske grupper*
- *Der eksisterer et 0 objekt for alle $A \in Ob(\mathcal{A})$ slik at* $\mathrm{Hom}(A,0)$ *og* $\mathrm{Hom}(0,A)$ *inneholder en morfi*
- *For alle $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ eksisterer et biprodukt, altså et objekt $X \oplus Y$ med morfier*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "i_X"] & X \oplus Y \arrow[l, bend left, "\pi_X"] \arrow[r, bend left, "\pi_Y"] & Y \arrow[l, bend left, "i_Y"] \end{tikzcd}$$

slik at $id_X = \pi_X \circ i_X$, $id_Y = \pi_Y \circ i_Y$ og $id_{X \oplus Y} = i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y$

Eksempler på additive kategorier er:

Ab der objektene er abelske grupper og morfiene er gruppehomomorfier

$ModR$ der objektene er høyre-moduler av en ring R og morfiene er R-modul homomorfier.

2. Eksakt kategorier

DEFINISJON 2.1 (Eksakt følge). *En eksakt følge er en ordnet "samling" morfier som er ordnet som dette:*

$$E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} E_2 \xrightarrow{f_3} E_3 \xrightarrow{f_4} ... \xrightarrow{f_p} E_p$$

Slik at $im(f_i) = ker(f_{i+1})$*. Fra definisjonen ser vi at kategorien må ha kjerner for at en eksakt fløgle skal gi mening.*

OBESERVASJON 2.2. *Siden bildet av* f_i *er lik kjernen til* f_{i+1} *gir komposisjonen av* f_i *og* f_{i+1} *null siden kjerne er alt* f_{i+1} *sender til null.*

$$im(f_i) = ker(f_{i+1}) \implies f_{i+1} \circ f_i = 0$$

DEFINISJON 2.3 (Kort eksakt følge). *En kort eksakt følge er en eksakt følge som kun består av to morfier*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

DEFINISJON 2.4 (Eksakt kategori). *La* $\mathcal{A}$ *være en additiv kategori. Et kjerne-kokjerne par* (i, p) *i* $\mathcal{A}$ *er et par av komposible morfier*

$$0 \longrightarrow A' \overset{i}{\rightarrowtail} A \overset{p}{\twoheadrightarrow} A'' \longrightarrow 0$$

slik at i *er en kjerne av* p *og* p *er en kokjerne av* i*. Hvis vi har en fiksert klasse* $\mathcal{E}$ *av kjerne-kokjerne par på* $\mathcal{A}$*, så er en tillatelig monomorfi en morfi* i *som har en tilhørende morfi* p *slik at* $(i, p) \in \mathcal{E}$*. Tillatelig epimorfi er definert dualt. Vi representerer tillatelig monomorfi med* $\rightarrowtail$ *og tillatelig epimorfi med* $\twoheadrightarrow$ *i diagrammer. En eksakt struktur på* $\mathcal{A}$ *er en klasse* $\mathcal{E}$ *av kjerne-kokjerne par som er lukket under isomorfier og oppfyller de følgende aksiomene:*

(1) *For alle objerker* A $\mathcal{A}$*, er identites morfien* 1_A *tillatelig monomorfi*
(2) *Klassen av alle tillatelig monomorfi er lukket under komposisjon*
(3) *Pushout av en tillatelig monomorfi langs en arbitrær monfi eksisterer og er en tillatelig monomorfi*

For alle aksiomene om tillatelig monomorfier er der et dualt aksiom for tillatelig epimorfier.

Alle Abelske kategorier er også eksakte kategorier, den eksakte strukturen på en abelsk kategori er alle kjerne-kokjerne par siden alle kjerner og kokjerner eksisterer i en abelsk kategori.

Siden alle abelske kategorier er eksakte kategorier så blir eksakte kategorier en generalisering. Og når vi ser på aksiomene for eksakte kategorier så holder de for å bevise de fleste diagram lemmaene for abelske kategorier. Dette er en av flere grunne til at det er interesant å se på eksakte kategorier.

PROPOSISJON 2.5. *Ta i betraktning denne komutative firkanten*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$

Der i og i' er tillatelig monomorfi. Da er disse utsagnene tilsvarende:

- *Firkanten er en push-out*
- *Følgen* $A \xrightarrow{\begin{bmatrix} i \\ -f \end{bmatrix}} B \oplus A' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & i' \end{bmatrix}} B$ *er kort eksakt*
- *Firkanten er bikartetisk, altså både en push-out og pull-back.*
- *Firkanten er en del av et komutattivt diagram*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, "id_C"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C \end{tikzcd}$$

med eksakte rader.

Lemma 2.6 (Noether isomorfi (C/B≅(C/A)/(B/A))). *Ta i betraktning diagrammet under*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[d, tail, "g"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, tail, dashed, "i"] & 0 \\ 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, tail, "h"] & C \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[d, two heads, "l"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, two heads, dashed, "m"] & 0 \\ & & Z \arrow[r, "1_Z"] \arrow[d, "0"] & Z \arrow[d, "0"] & \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Alle radene og kollonnene er kort eksakte følger. Hvis de fulle morfiene eksisterer så eksisterer de stiplede morfiene og firkanten øverst til høyre er bikartesisk.

Beviset for Proposisjon 2.5 og lemma 2.6 kan finnes i Exact Categories av Theo Bühler[1].

THEOREM 2.7. *Hvis f er en tillatelig epimorfi og en monomorfi så er den en isomorfi*

Bevis:

At den er en tillatelig epimorfi og en monomorfi betyr at det danner dette diagrammet

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\text{g}} B \xrightarrow{\text{f}} C \longrightarrow 0$$

Som er en kort eksakt følge av f og g. A er kjerne til f og f er en monomorfi så $A \cong 0$ siden kjernen av en monomorfi $\cong 0$. Vi vet at $0 \to B \to B$ er en kort eksakt følge og fra 5-lemma vet vi at siden $A \to 0$ og $B \to B$ er isomorfier må også $h : C \to B$ være en isomorfi og diagrammet under komuterer.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r, tail, "\text{g}"] & B \arrow[u, "id_B"] \arrow[r, tail, two heads, "\text{f}"] & C \arrow[u, "\text{h}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Så h∘f $\cong id_B$ og $f \circ h \cong id_C$ så f er en isomofi □

3. Eksempler

Definisjon 3.1 (Ekstensjonslukket). *Ekstensjonslukket betyr for hver eksakte følge i en eksakt kategori $\mathcal{E}$ med underkategori $\mathcal{E}'$ $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ hvis E_1 og E_3 er i $\mathcal{E}'$ er også E_2 i $\mathcal{E}'$*

Proposisjon 3.2. *Hvis $\mathcal{E}'$ er en kategori der*
$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0 \quad E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{E}'$
er kort eksakt i $\mathcal{E}'$ hvis den er kort eksakt i $\mathcal{E}$, og $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ er ekstensjonslukket. Da er $\mathcal{E}'$ en eksakt kategori

Bevis:
Viser at punktene i definisjon 2.4 er sann for $\mathcal{E}'$
1. For alle objekter $A \in \mathcal{A}$ eksisterer en identitetsmorfi
Vi vet at identitetsmorfien eksisterer siden

$$0 \to A \to A \to 0 \to 0$$

Er en eksakt følge i $\mathcal{E}$ og 0,A $\in \mathcal{E}'$ Så 1. er oppfylt
2. tillatelig monomorfier er lukket under komposisjon
Gå utifra at der er to tillatelig monomorfier $f : A \rightarrowtail B$, $g : B \rightarrowtail$ C $\in \mathcal{E}'$ dermed er det to medfølgende tillatelig epimorfier $j : B \twoheadrightarrow X$, $l : C \twoheadrightarrow Z$ Fra Noether isomorfi vet vi at i $\mathcal{E}$ er der tre kort eksakte følger

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, tail, "\mathrm{i}"] & Y \arrow[r, two heads, "\mathrm{m}"] & Z \arrow[r, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r, "0"] & B \arrow[r, tail, "\mathrm{g}"] & C \arrow[r, two heads, "\mathrm{l}"] & Z \arrow[r, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{f}"] & B \arrow[r, two heads, "\mathrm{j}"] & X \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

De to siste kort eksakte følgene vet vi er i $\mathcal{E}'$, fra den første kort eksakte følgen vet vi at X og Z er i $\mathcal{E}$' så siden $\mathcal{E}$' er ekstensjonslukket må også Y være i $\mathcal{E}$'
Disse danner dette diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, tail, "\mathrm{f}"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, two heads, "\mathrm{j}"] \arrow[d, tail, "\mathrm{g}"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, tail, "\mathrm{i}"] & 0 \\
0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, tail, dashed, "\mathrm{h}"] & C \arrow[r, two heads, dashed, "\mathrm{k}"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{l}"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{m}"] & 0 \\
& & Z \arrow[r, "1_Z"] \arrow[d, "0"] & Z \arrow[d, "0"] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Siden vi vet at diagrammet kommuterer i $\mathcal{E}$ så er $g \circ f = h$ h er også i $\mathcal{E}$' siden A og C er i $\mathcal{E}$'. Siden C og Y er i $\mathcal{E}$' er også k en morfi i $\mathcal{E}$' siden h og k er et kjerne-kokjerne par i $\mathcal{E}$ er de også det i $\mathcal{E}$' så h er en tillatelig monomorfi. Altså er 2 oppfylt.

Epimorfi er bevist dualt ved at du har gitt k og m som krever at B er i $\mathcal{E}$' og da er $m \circ k = l$

3. En push out av en tillatelig monomorfi er tillatelig monomorfi

Vi har en tillatelig monomorfi$i : A \rightarrowtail B$ og en morfi $f : A \to A'$ i $\mathcal{E}$'. Så vi vet at A, B og A' er i $\mathcal{E}$'. Fra proposisjon 1 vet vi at pushout i':$A' \rightarrowtail B'$ av i i $\mathcal{E}$ er en del av diagrammet.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\text{i}"] \arrow[d, "\text{f}"] & B \arrow[r, two heads, "\text{p}"] \arrow[d, "\text{f'}"] & C \arrow[d, "id_C"] \\
A' \arrow[r, tail, "\text{i'}"] & B' \arrow[r, two heads, "\text{p'}"] & C
\end{tikzcd}$$

Siden i er en tillatelig monomorfi i $\mathcal{E}$' så må der være en tillatelig epimorfi som samsvarer med i derfor er p i $\mathcal{E}$' så den nederste raden har vi A' og C i $\mathcal{E}$' så B' i $\mathcal{E}$' og i' og p' i $\mathcal{E}$'. Så push-out av en tillatelig monomorfi er en tillatelig monomorfi $\square$

For å finne eksempler anvender vi dette resutatet siden det er lettere å vise at en underkategori av en eksakt kategori er ekstensjonslukket enn å vise at alle tre aksiomene stemmer.

Eksempel 3.3. *Kategorien av alle projektive objekter er eksakt*

Bevis:

For P projektiv og $A \in \mathcal{E}$' så kan alle kort eksakte følger med P som siste element skrives på denne formen

$$0 \longrightarrow A \overset{f}{\rightarrowtail} A \oplus P \overset{g}{\twoheadrightarrow} P \longrightarrow 0$$

siden for alle projektive objekt eksisterer det en $s : P \to B$ som gir $g \circ s = id_P$

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, "s"'] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & P \arrow[u, "id_P"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da kan B skrives som et objekt $s(P)$ og $f(A)$. Siden f er kjernen til g så vil alle elementer sendt fra P som er i $f(A)$ være 0. Derfor kan vi skrive B som en direkte sum av A og P. Det gir oss også diagrammet under som viser at $B \cong A \oplus C$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\cong"] & P \arrow[r] \arrow[d, "1_P"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "\begin{matrix}1\\0\end{matrix}"] & A \oplus P \arrow[r, two heads, "\begin{matrix}0 & 1\end{matrix}"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Så hvis A og P er i $\mathcal{E}$' så finnes et element $A \oplus P$ i $\mathcal{E}$' siden $\mathcal{E}$' er en additiv kategori. Vi ser fra diagrammet over at B er yoneda ekvivalent med $A \oplus B$ som gir oss at $\mathcal{E}$' er en ekstensjonslukket underkategori av en abelsk kategori $\mathcal{E}$. Så $\mathcal{E}$' er en eksakt kategori.$\square$

Eksempel 3.4. *Kategorien $\mathcal{E}$' der objektene er alle direkte summer av en modul M og morfiene er morfiere mellom moduler.*

$$\{\overbrace{M, M \oplus M, M \oplus M \oplus M, ..., \overbrace{M \oplus M \oplus ... \oplus M}^{p}}^{p}, \cdots\}$$

der $M \in R$ og $p \in \mathbb{N}$. Er eksakt når $Ext^1_R(M, M) = 0$

Bevis:

For en korteksakt følge $0 \to A \to B \to C \to 0$ i $\mathcal{E}$ eksisterer en eksakt følge og $A, C \in \mathcal{E}$'

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(C, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(C, C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1_R(C, A) \longrightarrow Ext^1_R(C, B) \longrightarrow Ext^1_R(C, C) \longrightarrow$$

$Ext^1_R(C, A) = 0$ siden A og C er i $\mathcal{E}$' så kan de begge skrives som en direkte sum av M. Vi vet at $Ext^n_R(\oplus_i A_i, B) \simeq \prod_i Ext^n_R(A_i, B)$ og for det andre elementet i Ext vet vi at $Ext^n_R(A, B_1 \oplus B_2) \simeq Ext^n_R(A, B_1) \oplus Ext^n_R(A, B_2)$. Så hvis A er en direkte sum av M med lengde p og C er en direkte sum av M med lengede q så blir $Ext^1_R(C, A) = \overbrace{Ext^1_R(C, M) \oplus ... \oplus Ext^1_R(C, M)}^{p} =$

$= \prod_q \overbrace{Ext^1_R(M, M) \oplus ... \oplus Ext^1_R(M, M)}^{p}$ der alle elementene i direkte summen er 0 så hele summen blir 0

$Ext^1_R(C, A) = 0$ gjør at morfien $f : Hom(C, B) \to Hom(C, C)$ er epimorfi siden den eksakte følgen er tre elementer også null så danner de tre første elementene en kort eksakt følge. Så for hver $h \in Hom(C, C)$ eksisterere en ikke unik $g \in Hom(C, B)$ slik at diagrammet under kommuterer

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads, "f"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Siden C bare er en direkte sum av M så går $g \circ f$ M til M. Siden f er en epimorfi kan B skrives som en direkte sum av av M så B er i $\mathcal{E}$'. $\mathcal{E}$' er derfor en ekstensjonslukket underkategori av en modulkategori $\mathcal{E}$. Derfor er $\mathcal{E}$' en eksakt kategori. $\square$

EKSEMPEL 3.5. *Kategorien $\mathcal{E}$' av alle moduler med dimensjon $\leqslant 1$ $\{M|dim(M) \leqslant 1\}$ er en ekstensjonslukket underkategori av en eksakt kategori $\mathcal{E}$*

Bevis:

Fra hestesko lemma vet vi at en korteksakt følge $0 \to A \to B \to C \to 0$ der A og C har projektiv dimensjon 1 danner diagrammet under.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_A^1 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & P_A^0 \arrow[r, two heads, "\pi_A"] \arrow[d, tail, "\substack{1\\0}"] & A \arrow[r] \arrow[d, tail, "a"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_A^1 \oplus P_C^1 \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & P_A^0 \oplus P_C^0 \arrow[r, two heads, "t"] \arrow[d, two heads, "0\ 1"] & B \arrow[r] \arrow[d, two heads, "b"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_C^1 \arrow[r, tail] \arrow[d] & P_C^0 \arrow[r, two heads, "\pi_C"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Siden P_A^0 er projektiv så eksisterer en morfi $t_C : P_C^0 \to B = b \circ \pi_C$ Da er $t = (a \circ \pi_C, t_C)$ som er en komposisjon av epimorfier så t er også en epimorfi. Siden vi har funnet en projektiv oppløsning av B som er en kort eksakt følge *er dimensjonen til* $B \leqslant 1$. *B er derfor i* $\mathcal{E}$*'. Så* $\mathcal{E}$*' er en ekstensjonslukket underkategori av en modul kategori* $\mathcal{E}$. *Derfor er* $\mathcal{E}$*' en eksakt kategori.* □

EKSEMPEL 3.6. *Underkategorien* $\mathcal{E}$*' av* $\mathcal{E}$ *av objekter M er gitt ved*

$$\{M|Ext^i_R(M,N)=0\}$$

der N er et fiksert element i en modulring av R

Bevis:

For en kort eksakt følge $0 \to A \to B \to C \to 0$ *i E og N fiksert finnes der en eksakt følge*

$$0 \longrightarrow Hom(C,N) \to Hom(B,N) \to Hom(A,N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1_R(C,N) \to Ext^1_R(B,N) \to Ext^1_R(A,N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^2_R(C,N) \to Ext^2_R(B,N) \to Ext^2_R(A,N) \longrightarrow$$

(...)

$$\longrightarrow Ext^i_R(C,N) \to Ext^i_R(B,N) \to Ext^i_R(A,N) \longrightarrow$$

Når $A, C \in \mathcal{E}$*' vet vi at* $Ext^i_R(A,N) = 0$ *og* $Ext^i_R(C,N) = 0$ *og siden følgen over er eksakt så må* $Ext^i_R(B,N) = 0$ *siden følgen* $0 \to P \to 0$ *kun er eksakt når* $P = 0$. *Dette viser at B er i* $\mathcal{E}$*' som gjør at* $\mathcal{E}$*' er ekstensjonslukket under en modulkategori* $\mathcal{E}$. *Derfor er* $\mathcal{E}$*' en eksakt kategori.* □

Referanser

[1] Theo Buehler. *Exact Categories*. 2008. DOI: 10.48550/ARXIV.0811.1480. URL: https://arxiv.org/abs/0811.1480.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden