Aasmund Fossheim Eklo og Daniel Vedvik

Klasseromsintervensjoner knyttet til bevis i grunnskolen

En systematisk litteraturstudie om intervensjonsstudier knyttet til læring og undervisning av bevis i grunnskolen

Masteroppgave i MGLU5204
Veileder: Ole Enge
Mai 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne masteroppgaven er en systematisk litteraturstudie som presenterer en oversikt over klasseromsforskning som forsøker å besvare utfordringer knyttet til læring og undervisning av bevis i grunnskolen. Det er bred enighet om at *bevis* er viktig i grunnskolen. Flere oversiktsstudier peker på en enighet i fagfeltet om at bevis burde spille en vesentlig rolle i all matematisk utdanning. Videre er det godt dokumentert at det finnes mange utfordringer tilknyttet læring og undervisning av bevis, og at bevis fortsatt har en liten plass i skolen. Det er få studier har som utviklet muligheter for å løse disse utfordringene, sammenlignet med studier som kartlegger utfordringene. Dette har fått økt fokus i feltet og forskere etterlyser flere klasseromsbaserte studier som søker å utvikle muligheter for å lære og undervise bevis. I arbeidet med å frembringe en oversikt over nyere klasseromsintervensjoner tok vi utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

(1) *Hva karakteriserer klasseromsintervensjoner i grunnskolen knyttet til læring av bevis de siste 10 årene?*

(2) *Hvilke teoretiske perspektiver for, og forståelse av, bevis har forskerne basert sin intervensjon på?*

(3) *Hva sier intervensjonsstudiene om muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis?*

Vi har benyttet oss av en systematisk søkeprosess med forhåndsdefinerte kriterier for inklusjon og eksklusjon av studier. I denne prosessen har vi gjennomgått 1878 artikler fra 12 høyt rangerte matematikkdidaktiske tidsskrifter, hvor vi til slutt inkluderte 32 studier. Den presenterte oversikten viser studienes karakteristikker (FS1), perspektiv og begrep for bevis brukt i studiene (FS2), og en tematisk presentasjon av muligheter for å støtte læring av bevis i grunnskolen (FS3). Datamaterialet ble analysert både ved forhåndsvalgte koder og ved tematisk analyse.

Oversikten viser at det er stor variasjon i hva som karakteriserer klasseromsintervensjoner om bevis. Noen intervensjoner gikk over flere år, men det er tydelig overvekt av studier med 1-4 undervisningsøkter. Når det gjelder matematisk innhold er det geometri som dominerer. Majoriteten av studiene har deltakere som tilsvarer norsk 7. trinn eller eldre. Når det kommer til forskningsspørsmål 2 avslører oversikten en variert og til dels utydelig avklart forståelse av bevis. Når det gjelder forskningsspørsmål 3, identifiserte vi fire temaer for å støtte læring av bevis i grunnskolen: *oppgavedesign, bevis som verktøy for å generere og kommunisere kunnskap, læringsmuligheter knyttet til meta-kunnskap om bevis* og *lærers veiledning av den bevisrelaterte aktiviteten.*

Mulighetene som kommer frem i oversikten illustrerer i mange tilfeller hvor krevende det er å undervise om bevis i grunnskolen. Mange av intervensjonsstudiene viser at læring av bevis er *mulig* for grunnskoleelever, ikke hva som er realistisk for en typisk elevgruppe.

Nøkkelord: bevis, klasseromsstudier, intervensjoner, oversiktsstudie, systematisk litteraturstudie

Abstract
This thesis is a systematic literature review that presents an overview of classroom-based studies that attempts to address challenges related to learning and teaching proof in primary and lower secondary education. There is broad agreement that proof is important in primary and lower secondary school (5-16). Several literature studies point to an agreement in the field that proof should play a significant role in all mathematical education. Furthermore, it is well documented that there are many challenges connected with learning and teaching proof, and that proof still has a small part in school. There are few studies that address these challenges, compared to studies that analyze the challenges. This has gained increased focus in the field and researchers are calling for more classroom-based studies that seek to develop possibilities for learning and teaching proof. In the work of producing an overview of recent classroom-based interventions, we chose the following research questions as our starting points:

(1) *What characterizes classroom-based interventions in primary and lower-secondary school related to the learning of proof in the last 10 years?*

(2) *What theoretical perspectives for, and understanding of, proof have the researchers based their intervention on?*

(3) *What do intervention studies say about opportunities to support primary school and lower-secondary school students' learning of proof?*

We have used a systematic search process with predefined criteria for inclusion and exclusion of studies. In this process, we have reviewed 1878 articles from 12 highly ranked journals in mathematics education, where we finally included 32 studies. The presented overview shows the studies' characteristics (FS1), perspectives and terms for proof used in the studies (FS2), and a thematic presentation of opportunities to support the learning of proof in primary and lower secondary school (FS3). The data material was analyzed both by pre-selected codes and by thematic analysis.

The overview shows that there is great variation in what characterizes classroom interventions about proof. Some interventions lasted over several years, but there is a clear predominance of studies with 1-4 teaching sessions. When it comes to mathematical content, it is geometry that dominates. The majority of the studies have participants who correspond to Norwegian 7th grade or older. When it comes to research question 2, the overview reveals a varied understanding of proof, sometimes lacking in clarification. Regarding research question 3, we identified four themes to support the learning of proof in primary school: *task design*, *proof as a tool for generating and communicating knowledge*, *learning opportunities related to meta-knowledge about proof* and *teacher guidance of the proof-related activity*.

The possibilities that emerge in the overview illustrate in many cases how demanding it is to teach about proof in primary and lower secondary school. Many of the intervention studies show that learning proof is possible for primary and lower secondary school students, not what is realistic for a typical group of students.

Keywords: proof, classroom studies, interventions, overview study, systematic literature study

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

Denne oppgaven er en systematisk litteraturstudie som presenterer en oversikt over klasseromsforskning som forsøker å besvare utfordringer knyttet til læring og undervisning av bevis i grunnskolen.

1.1 Bakgrunn for studien og bevis i grunnskolen

Det er bred enighet om at *bevis* er viktig i grunnskolen. Flere oversiktsstudier peker på en enighet i fagfeltet om at bevis bør spille en vesentlig rolle i all matematisk utdanning (for eksempel Hanna & Jahnke, 1996; Mariotti, 2006). Bevis er sentralt for å kunne jobbe meningsfullt med matematikk i skolen (Stylianides et al., 2017, s. 237). Bevis gir for eksempel selv unge elever mulighet til å utforske sannhetsverdien i matematiske påstander, uten å basere seg på lærerens autoritet (Reid, 2002). Viktigheten av bevis gjenspeiles også i læreplanverk rundt om i verden og i Norge. Valenta og Enge (2020) viser at læreplanen LK20 i matematikk legger opp til at elevene skal jobbe med bevis, eller bevisrelaterte kompetanser, på flere måter (Valenta & Enge, 2020). To av kjerneelementene i fagplanen (LK20) kan knyttes til bevis: *Argumentasjon og resonnering* og *Abstraksjon og generalisering*. Allerede i 2. trinn finner vi eksempel på et bevisrelatert kompetansemål, som sier at elevene «skal utforske, tegne og beskrive geometriske figurer fra sitt eget nærmiljø og argumentere for måter å sortere dem på etter egenskaper» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Under kjerneelementet *Argumentasjon og resonnering* står det at argumentasjon i matematikk handler om at: «elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige.» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Bevis er altså et sentralt element i grunnskolematematikken hvor elevene skal lære bevisrelaterte kompetanser gjennom hele løpet og i flere ulike tema.

Det er utviklet mange forskjellige teoretiske perspektiver for bevis og bruken av begrepet *bevis* i matematikkdidaktisk forskning er svært variert. Bevis og bevisføring er viktige tema i disiplinen matematikk, og har flere funksjoner i matematisk praksis. Bevis verifiserer sannhet i en påstand, og har andre funksjoner som for eksempel: forklaring, systematisering, oppdagelse og kommunikasjon (De Villiers, 1990). Samtidig argumenterer Hanna og Jahnke (1996, s. 903) for tre andre funksjoner av bevis: konstruksjon av empirisk teori, utforskelse av meningen av en definisjon eller konsekvensene av en antagelse, og innlemmelsen av velkjent fakta inn til et nytt rammeverk og perspektiv. Hanna & Barbeau (2008, s. 345) argumenterer for at bevis kan legemliggjøre metoder, redskaper, strategier og konsepter for løsning av problem. Funksjoner av bevis kan videre ses i sammenheng med ulike perspektiv for bevis. Noen tar et perspektiv på bevis som problemløsning (for eksempel Komatsu et al., 2014a). Andre definerer bevis ut fra et kognitivt perspektiv, som argumentasjon et individ tar i bruk for å overbevise seg selv eller andre om sannhetsverdien i en matematisk påstand (For eksempel Harel & Sowder, 2007). Et tredje perspektiv definerer bevis som en sosialt forankret aktivitet, med fokus på hvordan medlemmene i det matematiske fellesskapet håndhever et argument som bevis (for eksempel Balacheff, 1988). Det er altså mange forskjellige måter å forstå «bevis» på og begrepsbruken i matematikkdidaktisk forskning.

Videre er det godt dokumentert at det finnes mange utfordringer tilknyttet læring og undervisning av bevis, og at bevis fortsatt har en liten plass i skolen (Stylianides et al., 2017, s. 258). Et eksempel på utfordringer knyttet til bevis er at de fleste elever foretrekker empiriske argumenter, og vurderer disse som mer overbevisende enn matematiske bevis (Jahnke & Wambach, 2013, s. 471). Dette er problematisk da empiriske argumenter ikke er gyldige bevis. I tillegg til dette sliter elever ofte med overgangen fra uformelle argumenter til bevis (Stylianides et al., 2017, s. 242). Elever og lærere blir ofte overbevist av empiriske argumenter som et bevis på generalisering som også ofte gjenspeiles i deres egne konstruksjon eller vurdering av argumenter (for eksempel Healy & Hoyles, 2000; Morris, 2002). Bevis er altså et viktig tema som er utfordrende for lærere å undervise.

Det finnes det relativt lite forskning som fokuserer på å løse problemene (Stylianides et al., 2017; Stylianides & Stylianides, 2017). For å finne løsninger på utfordringer som oppstår i undervisningen foreslår Stylianides og Stylianides (2013) studier som samler empiri fra faktiske klasseromssituasjoner, gjennom det de kaller «classroom-based interventions». Dette begrepet, som vi har valgt å oversette til *klasseromsintervensjoner,* er sentralt i vår studie. Begrepet klasseromsintervensjoner definerer de gjennom tre aspekter:

- Forskning som gjøres i faktiske klasserom i et tett samarbeid mellom forskere og lærere (bred betydning av klasserom, formell undervisningssituasjon uansett alder).
- Forskning som adresserer utfordringer med elevenes læring gjennom undervisning og støtte (bred betydning av læring, så både kognitive og affektive aspekter inkluderes).
- Forskning som søker å utvikle empirisk testet løsninger basert på teori, for å kunne forklare hvorfor intervensjonen hadde positiv effekt, dersom dette var tilfellet

(Stylianides & Stylianides, 2013).

Etter å ha konkludert med at det finnes relativt lite forskning som har utviklet lovende intervensjoner for undervisning og læring av bevis, anbefaler Stylianides et al. (2017, s 258) forskningsfeltet å fokusere på dette i tiden fremover (Stylianides et al., 2017, s. 258). Stylianides og Stylianides (2017, s. 124) uttrykker et håp om at faggeltet innen 15-20 år har utviklet en stor og solid kunnskapsbase om hvordan undervisningen kan fremme elevers læring av bevis, og oppmuntrer til økt fokus på dette i forskningen.

Personlig var vi nysgjerrige på om det har blitt utviklet intervensjoner de siste årene, som utforsker muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis. Derfor ønsket vi å produsere en oppdatert oversikt over slike studier publisert i høyt rangerte tidsskrift de siste årene. Stylianides et al. (2017, s. 253-258) påpeker at de allerede har sett en økning i antall intervensjonsstudier, men den nyeste studien de presenterer er utgitt 2014. Vi valgte derfor å gjennomføre et systematisk litteraturstudie. For å fremstille en slik oversikt har vi fulgt PRISMA 2020 som veiledning for rapportering av systematiske litteraturstudier. Denne veiledningen definerer systematiske litteraturstudier som et: oversiktsstudie som bruker eksplisitte, systematiske metoder for å sortere og syntetisere funn fra studier med tydelig formulert forskningsspørsmål (Page et al., 2021, s. 3).

Vi skal nå presentere en tidligere litteraturstudie med overlappende fokus, og hvordan vi skiller oss fra dette. Campbell et al. (2020) gir en oversikt over forskning på bevis fordelt etter alderstrinn. Vår studie skiller seg fra denne ved at vi fokuserer på klasseromsintervensjoner. Vårt utvalg inkluderer studier publisert i fra 2012 til og med 2022, hvor Campbell et al. (2020) har inkludert intervensjonsstudier fra 2000 til og med mai 2018). I vår studie presenterer vi en samling klasseromintervensjoner gjennomført med elever i aldersspennet 5-16 år, som tilsvarer norsk grunnskole. Det finnes ingen lignende oversiktsstudie på norsk innenfor dette tema. Vår oversikt er spisset inn mot studier som søker å utvikle løsninger på utfordringer knyttet til læring av bevis i grunnskolen. Oversikten kan være tilgjengelig som et startpunkt for lærere og lærerstudenter som vil utforske mer om hva man kan gjøre for å fremme læring av bevis i sine klasserom.

Som oppsummering av bakgrunn for studien kan vi si at bevis er et viktig, men et underrepresentert tema i skolen. Både lærere og elever har store utfordringer med bevis. Videre har det blitt økt fokus på å fylle mangelen på klasseromsstudier som adresserer utfordringene knyttet til bevis. Det vil derfor være interessant å kartlegge hvorvidt dette fokuset har ført til utvikling av flere løsninger for å fremme læring av bevis i grunnskolen.

1.2 Forskningsspørsmål

Med den ovennevnte bakgrunnen og motivasjon har vi gjennomført et systematisk litteraturstudie for å beskrive nyere klasseromsintervensjoner og hva disse sier om muligheter for å støtte læring av bevis i grunnskolen. Vi har kartlagt og presentert klasseromsintervensjoner publisert i utvalgte tidsskrift de ti siste årene. Med utgangspunkt i Stylianides og Stylianides (2013) sin beskrivelse av klasseromsintervensjoner, har vi formulert følgende forskningsspørsmål:

Forskningsspørsmål 1:
Hva karakteriserer klasseromsintervensjoner i grunnskolen knyttet til læring av bevis de siste 10 årene?

Hensikten med det første forskningsspørsmålet er å kartlegge ulike karakteristikker ved de utvalgte studiene, altså å beskrive de ulike rammene studiene. Karakteristikkene som blir undersøkt er: overordnet design og publikasjon, metoder for datainnsamling, matematisk innhold, trinn og alder, intervensjonens lengde og antall undervisningsøkter, hvilket land intervensjonen er gjennomført i, antall deltakere, arbeidsform og deltakernes forkunnskaper. I svaret på dette forskningsspørsmålet kommer det frem statistikk som viser hvordan utvalget fordeler seg med tanke på de nevnte karakteristikkene.

Forskningsspørsmål 2:
Hvilke teoretiske perspektiver for, og forståelse av, bevis har forskerne basert sin intervensjon på?

Med det andre forskningsspørsmålet søker vi å kartlegge hvilke perspektiver for, og definisjoner av bevis de ulike studiene legger til grunn for intervensjonen. Dette forskningsspørsmålet svarer til punktet om at klasseromsintervensjoner bør teoretisere sine foreslåtte løsninger, for å kunne meningsfullt si noe om hvorfor intervensjonen fungerte, hvis det var tilfellet.

Forskningsspørsmål 3:
Hva sier intervensjonsstudiene om muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis?

Det tredje forskningsspørsmålet er formulert for å undersøke og sammenfatte hvilke grep, i planlegging og ledelse av undervisning, lærere kan implementere for å fremme læring av bevis i egne klasserom. Med ordet *læring* mener vi som Stylianides & Stylianides (2013) en bred forståelse av begrepet, slik at affektive aspekter også inkluderes. Aktiv deltakelse i bevisrelaterte praksiser eller endring av holdninger knyttet til bevis, kan derfor i noen studier regnes under en slik forståelse av *læring.* Valget av ordet *muligheter* åpner også for å diskutere overføringsverdi av intervensjonene i lys av begrensningene og forutsetningene som ligger i de utvalgte studiene.

1.3 Studiets oppbygging

Her skal vi kort beskrive studiens oppbygning. Vi gjennomfører et oversiktsstudie og syntetiserer uten eget rammeverk, og det er derfor ikke et tradisjonelt teorikapittel i vår oppgave. Begreper som benyttes i studien er redegjort for i innledningen eller i andre kapitler hvor det er aktuelt. I kapittel nummer to beskrives vår metode. Her blir instrument for søk og utvelgelsesprosessen beskrevet grundig, samt begrunnelse for valg av 12 tidsskrifter. Metodebeskrivelsen er nokså detaljert, da et av poengene med systematiske litteraturstudier er at de skal kunne gjenskapes andre. Videre vil vi i kapittel tre presentere resultatet av den systematiske litteraturstudien. Avsluttningsvis vil vi drøfte oversikten som en helhet og begrensing ved vår studie, samt presentere muligheter for videre forsking.

2.0 Metode

I dette kapittelet skal vi redegjøre for metoden i vårt systematisk litteraturstudie. Vi har valgt å gjennomføre et systematisk litteraturstudie for å kartlegge, finne og beskrive intervensjonsstudier som omhandler bevis i grunnskolen de siste ti årene. Kapittelet er delt opp i flere underkapitler som beskriver arbeidsgangen i vårt studie. Vi vil først introduserer vi hvilke aspekter metoden inneholder, så presentere vårt søkeinstrument. Videre presenteres datainnsamlingen, etterfulgt av metodekritikk. Til slutt presenterer vi dataanalysen, som er utgangspunktet for de resultater vi presenterer i resultatkapittelet.

2.1 Systematisk litteraturstudie

Et systematisk litteraturstudie blir definert som: en litteraturgjennomgang som bruker eksplisitte, systematiske metoder for å sortere og syntetisere funn fra studier som har tydelig formulert forskningsspørsmål (Page et al., 2021, s. 3). Et slikt studie inneholder flere aspekter: søkeinstrument, datainnsamling, og dataanalyse. Søkeinstrument er samlebetegnelsen for søkeord og datainnsamling. Instrumentet skal finne både potensielle studier gjennom søkeord og ekskludere irrelevante studier, skal at man står igjen med et sett inkluderte studier til videre dataanalyse. Søkeordene er de ordene man bruker for å lete etter data innen et bestemt område, for eksempel «proof OG classroom» i databasen SpringerLink. I datainnsamlingprosessen blir potensielle studier inkludert og ekskludert basert på forhåndsbestemte kriterier. Dette er altså kriterier som: hvor man søker og hva man søker etter. I dataanalysen trekkes relevant informasjon ut fra de inkluderte studiene, for å svare på forhåndsbestemte forskningsspørsmål.

2.2 Søkeinstrument

Vi har valgt 12 høyt rangerte matematiske tidsskriftene som rammer for vår datainnsamling. Tidsskriftene er en sentral del av søkeinstrumentet, da de avgrenser hvor mye data vi kan samle inn. De 12 utvalgte matematiske tidsskriftene listes opp nedenfor, og blir heretter referert med forkortelsene:

Journal for Research in Mathematics Education	(JRME)
Educational Studies in Mathematics	(ESM)
Journal of Mathematical Behavior	(JMB)
The international Journal on Mathematics Education	(ZDM)
Journal of Mathematics Teacher Education	(JMTE)
Mathematical Thinking and Learning	(MTL)
For the Learning of Mathematics	(FLM)
Research in Mathematics Education	(RME)
Mathematics Education Research Journal	(MERJ)
International Journal of Science and Mathematics Education	(IJSME)
International Journal of Math Education in Science and Technology	(IJMEST)
Canadian Journal of Science Mathematics and Technology education	(CJSMTE)

Valget av de 12 matematiske tidsskriftene baseres på studien til Williams og Leatham (2017), som heter «Journal Quality in mathematics education». De presenterer resultatet av to studier, en siteringsbasert studie og en meningsbasert studie, som rangerer den relative kvaliteten av 20 engelsk språklige matematiske tidsskrift (Williams & Leatham, 2017, s. 369). De ledende 12 matematiske tidsskriftene inneholdt ca 95% av siteringen innenfor de 20 øverste tidsskriftene. Alle de 12 tidsskriftenes kvalitet ble vurdert som «high», «medium-high» eller «medium». Det at vi valgte 12 av de mest anerkjente tidsskriftene fra denne studien, ga oss en form for kvalitetsvurdering av innholdet til datainnsamlingen på forhånd. Denne kvalitetssikringen er nyttig for oss, da vi som forskere er ferske i feltet. Resultatet fra de 12 anerkjente tidsskriftene vil i tillegg gi en indikasjon om hva som har vært i fokus i matematikkdidaktikk de siste ti årene. Etter at vi hadde bestemt oss for å bruke de 12 tidsskriftene, anvende vi disse i pilotundersøkelsen.

Før vi gikk i gang med det offisielle litteratur søket, gjennomførte vi en pilotundersøkelsen. I denne undersøkelsen testet vi ut ulike kombinasjoner av søkeord, i alle de 12 tidsskriftene. I første omgang så vi kun på antall resultater per søkeord. Her testet vi søkeordene Proof, (Proof OR Proving) AND (Classroom OR intervention), Proof AND (intervention or classroom), Proof AND intervention, og til slutt (Proof OR Proving) AND intervention. Dette ga oss en del ulike antall søkeresultater. For eksempel ga (Proof OR Proving) AND (Intervention or Classroom) langt flere resultater enn Proof AND (intervention or classroom). Vi testet først (Proof OR Proving) AND (intervention or classroom), da vi hadde tro på at dette ville gi oss mange potensielt relevante studier. Dette testet vi i tidsskriftet ESM, hvor vi endte opp med sju studier etter sammendrag lesing. Denne utvelgelsen skjedde med de daværende kriteriene for inkludering og ekskludering. Et systematisk søk begynner med å identifisere nøkkelord og søkebegrep basert på pilotstudien, tidligere litteratur og diskusjon mellom forfatterne (Tranfield et al., 2003, s. 215). Noe som bringer oss videre til det endelige søket. Vi sjekket dermed hvilke bevisrelaterte ord som dukket opp i de sju studiene, og konkluderte da med at vi kunne fjerne «Proving» fra søkeordet. Ved å optimalisere søke til Proof AND (intervention or classroom) som søkeord, fant vi fortsatt de samme sju relevante studiene fra ESM, men fikk ¼ mindre søkeresultater. Basert på erfaringer vi gjorde oss under søkingen og datagjennomgang, optimaliserte og ferdigstilt vi kriteriene.

Med utgangspunkt i pilotstudien, valgte vi å bruke «Proof AND (intervention or classroom)» som søkeord i det endelige søkeinstrumentet. De samme søkeordene ble brukt i alle søkene. Det endelige litteratursøket ble gjennomført 28. mars 2022. I tillegg til det overnevnte søket, gikk vi manuelt gjennom samtlige artikler publisert i tidsskriftene FLM og JRME innenfor vårt valgte tidsrom. Vi valgte å lete manuelt fordi FLM sin søkefunksjon kun søker i sammendraget i artiklene, og i JRME resulterte søket i et overraskende lavt antall potensielle studier,sammenlignet med antall publikasjoner.

2.3 Datainnsamling

Søkeordene og inkluderings og ekskluderingskriteriene, er avgjørende for datainnsamlingen. Søkeordene skal avgrense søket så godt som mulig, slik at flest mulig studier i resultatet er relevante for vår oppgave. For å avgjøre om de potensielle studiene var relevant for vår studie, måtte vi anvende de forhåndslagde inkluderings og ekskluderingskriteriene (se tabell 2.1 nedenfor). Kun studier som møter alle inkluderingskriteriene, og ingen av ekskluderingskriteriene blir inkludert i litteratursøket (Tranfield et al., 2003, s. 215). I første omgang anvendte vi inkluderingskriteriene (IK) og ekskluderingskriteriene (EK) kun på tittel, abstrakt og eventuelle nøkkelord. Her gikk begge forfattere gjennom alle tidsskriftene. Inkluderings- og ekskluderingskriteriene er åpen for tolkning og relativt subjektive, og derfor kan dette steget av det systematiske litteraturstudie bli utført av flere enn en forsker (Tranfield et al., 2003, s. 215). Derfor var det viktig at vi som vurderte relevansen av studiene prøvde å skaffe oss mest mulig felles forståelse av kriteriene. For å oppnå dette gjennomførte vi flere runder med diskusjon av kriteriene. Både hva de betydde og hva de faktisk inkluderte og ekskluderte. I andre omgang gjennomførte begge forfattere fulltekst lesing til vi enten kunne ekskludere tekstene basert på EK, eller til vi ikke fant noe som ekskluderte de, og dermed inkluderte de videre. I tredje runde ble studiene diskutert i fellesskap alle våre potensielle studier. Diskusjonen innebær og argumentere for hvorfor en tekst var inkludert eller ikke, og for å fange opp eventuelle individuelt oversette artikler. Som for eksempel en studie som først virket som en kartlegging av elevers resonnering strategier (som ville ha vært nok for eksklusjon), men gjennom videre lesning viste seg å inneholde en intervensjon på bevis. Argumentene i diskusjonen var basert på vår subjektive forståelse av kriteriene hvor vi viste til spesifikke deler i de potensielle studiene.

For å finne de studiene som er relevant for våre forskningsspørsmål har vi kommet frem til følgende inkluderings- og ekskluderingskriterier: Tabell 2.1.

Inkluderingskriterier(IK)	Eksklusjonskriterier(EK)
IK1: Studier publisert i de 12 utvalgte matematiske tidsskriftene.	EK1: Studier som ikke er publisert i de 12 utvalgte matematiske tidsskriftene.
IK2: Studier på engelsk som er publisert i tidsrommet 2012-2022.	EK2: Studier på annet språk enn engelsk og/eller publisert utenfor tidsrommet.
IK3: Studier med elever på alderstrinn tilsvarende norsk grunnskole (5-16 år)	EK3: Studier med deltakere kun på andre årstrinn enn det som tilsvarer norsk grunnskole.
IK4: Dokumenttypen: fagfellevurderte artikler.	E4: Dokumenttyper som ikke er fagfellevurderte artikler, som «editorials», «book-reviews» og «classroom notes».

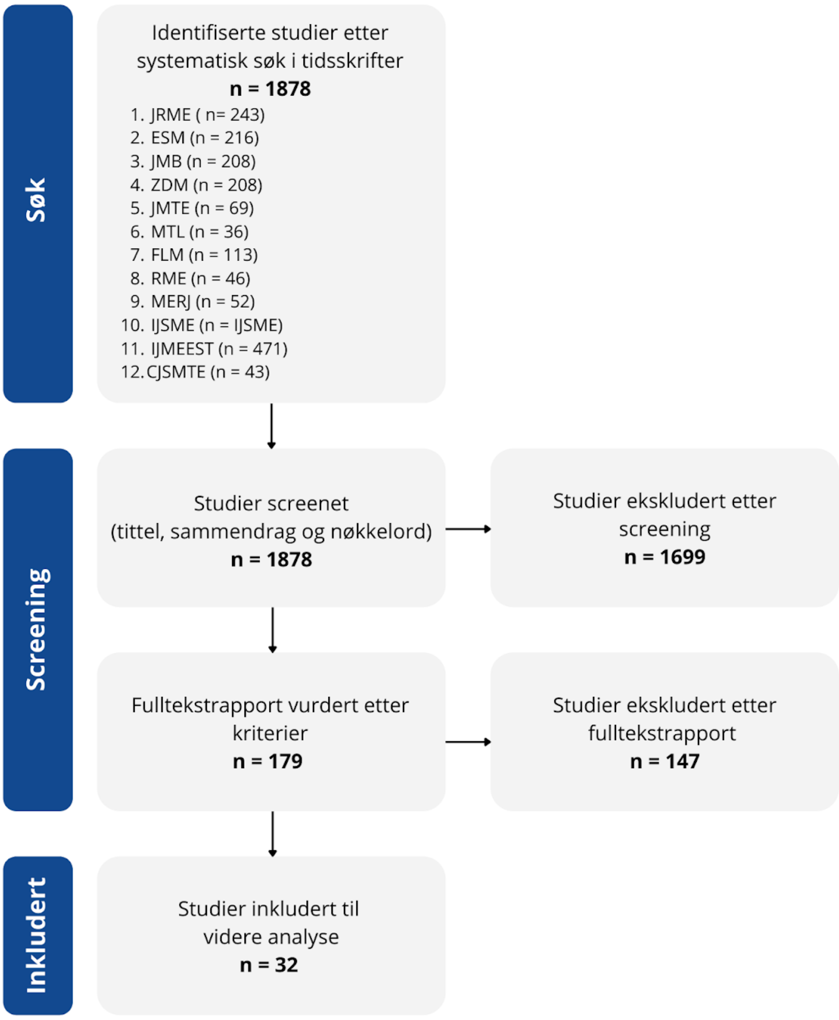
IK5: Klasseromsbaserte studier som er relatert til å fremme læring av bevis. (til forskjell fra et studie som bare har fokus på å avdekke problemer knyttet til læring av bevis) Avklaring av bevisrelaterte aktivitet: - proof/prove - justification - generalisation - reasoning - argumentation - conjecturing	EK5a: Studier utenfor klasseromssituasjon. EK5b: Studier i klasserom som ikke fokuserer på å fremme læring av bevis

Tabell 2.1 Inkluderings- og ekskluderingskriterier

Vår viktigste inkluderingskriterier er IK5, og vi vil nå klargjøre hva vi legger «klasseromsbaserte studier som er relatert til å fremme læring av bevis». Vi forstår bevis i samsvar med Stylianides (2007) definisjon, som peker på tre aspekter ved bevis. Det brukes påstander som er akseptert av den gitte klassen/elevgruppen uten videre begrunnelse. Det brukes en form for resonnering som er gyldig, kjent og innenfor den gitte elevgruppas konseptuelle forståelse. Påstanden er kommunisert gjennom kjente og passende former for uttrykkelse som er innenfor den gitte elevgruppas konseptuelle forståelse (Stylianides, 2007, s. 291). Gitt denne definisjonen av bevis, definerer de «proving» brett som aktiviteten av å lete etter bevis. Denne aktiviteten kan inkludere en hel del andre aktiviteter som ofte innleder til «proving», som generalisering eller hypotese setting (Stylianides et al., 2017, s. 239). Dette har vi valgt å kalle bevisrelatert aktiviteter, og har derfor inkludert studier som har fokus både på bevis i seg selv, men også bevisrealterte aktiviteter som generalisering, resonnering og argumentasjon. Bevisrelatert aktivitet kan ses i sammenheng med intervensjoner. Som er: forskning som gjøres i faktiske klasserom med fokus på adressere utfordring med elevenes læring gjennom undervisning basert på teori (Stylianides & Stylianides, 2013). En intervensjon kan for eksempel adressere elevenes utfordringer med bevis gjennom argumentasjons aktiviteter.

Videre har vi også valgt å inkludere studier som gjennomfører det de kaller for «teaching eksperiment». Vi har valgt å oversette dette til *eksperiment*. Feltet har ingen klar distinksjon mellom eksperiment og intervensjon, selv om eksperiment gjerne knyttes til en spesifikk metode (Yopp, 2020, s. 5). Uansett distinksjonene er det mulig å finne situasjoner hvor de to metodologiene sammenfaller (Yopp, 2020, s. 5). Dette er noe vi også kjenner igjen i de inkluderte studiene som kaller seg selv eksperiment. Disse inneholder også empiri fra klasserom, slik som intervensjoner. De har også et fokus på fremming av læring av bevis.

Presentert i tabell 2.2 nedenfor er datainnsamlingsprosessens ulike faser og resultater. I vår oppgave har vi inkludert 32 studier på bevis, plukket ut av 1878 potensielle studier.



Figur 2.2 Utvelgelsesprosess

De 32 studiene inkludert i vårt systematiske litteraturstudie presenteres her i tabell 2.3. Som da altså er «studier inkludert etter endelig gjennomlesing og diskusjon» i tabell 2.2.

Kort referanse	Tittel
Ayala-Altamirano & Molina, 2021	Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship.
Baldry, et al., 2022,	The use of carefully planned board work to support the productive discussion of multiple student responses in a Japanese problem-solving lesson.
Barnes, 2019	Perseverance in mathematical reasoning: The role of children's conative focus in the productive interplay between cognition and affect.
Blanton et al., 2019	Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships.
Chen & Herbst, 2013	The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning.

Cusi & Olsher, 2021	Design of Classroom Discussions and the Role of the Expert in Fostering an Effective and Aware Use of Examples as a Means of Argumentation.
Fan, et al., 2017	Does a transformation approach improve students' ability in constructing auxiliary lines for solving geometric problems? An intervention-based study with two Chinese classrooms.
Fiallo & Gutierrez, 2017	Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course.
Fujita, et al., 2018	Learners' use of domain-specific computer-based feedback to overcome logical circularity in deductive proving in geometry.
Jahnke og Wamback, 2013	Understanding what a proof is: A classroom-based approach.
Kim & Ju, 2012	A changing trajectory of proof learning in the geometry inquiry classroom.
Komatsu, 2017	Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry.
Komatsu & Jones, 2022	Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning.
Komatsu, et al., 2017	Proof validation and modification in secondary school geometry.
Komatsu et al., 2014a geometri	Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations.
Komatsu et al., 2014b	Proof problems with diagrams: An opportunity for experiencing proofs and refutations.
Lehrer et al., 2013	Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics classroom.
Makar et al., 2015	Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom.
Mariotti, 2012	Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation.
Mariotti, 2013	Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS.
Martinez & Castro Superfine, 2012	Integrating Algebra and Proof in High School: Students' Work with Multiple Variables and a Single Parameter in a Proof Context.
Martinez & Pedemonte, 2014	Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof.
Mata Pereria & da Ponte, 2017	Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification.
McFeetors & Palfy, 2018	Educative experiences in a games context: Supporting emerging reasoning in elementary school mathematics.
Miyazaki & Jones, 2015	Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs.
Miyazaki et al., 2017	Students' understanding of the structure of deductive proof.

Moutsios Rentzos et al., 2014	The objectification of the right-angled triangle in the teaching of the Pythagorean Theorem: An empirical investigation.
Ng & Sinclair, 2015	«Area Without Numbers»: Using Touchscreen Dynamic Geometry to Reason About Shape.
Shinno & Fujita, 2021	Characterizing how and when a way of proving develops in a primary mathematics classroom: a commognitive approach.
Yopp, 2017	Eliminating counterexamples: A Grade 8 student's learning trajectory for contrapositive proving.
Yopp, 2020	Eliminating counterexamples: An intervention for improving adolescents' contrapositive reasoning.
Yopp et al., 2020	Eliminating counterexamples: A case study intervention for improving adolescents' ability to critique direct arguments.

Tabell 2.3 Inkluderte studier

2.4 Metodekritikk

Når det kommer til systematiske litteraturstudier, er det både begrensninger og styrker ved metoden. Bryman (2016, s. 99) påpeker at de som taler for systematisk litteraturstudie, mener at et systematisk litteraturstudie ikke genererer forutinntatthet, og presenterer en helhetlig dekking av litteratur. Dette er spesielt aktuelt i felt som har som formål å forstå om en bestemt intervensjon har bestemte fordeler (Bryman, 2016, s. 99). Dette taler for at denne metoden er hensiktsmessig for oss, da vi undersøker klasseromsintervensjoner om bevis.

Selv om systematisk litteraturstudie som metode kan oppfattes veldig objektiv og med lite forutinntatthet, peker enkelte på ulike begrensninger ved metoden. Noen mener at fokuset i et systematisk litteratur ofte faller mer mot de tekniske aspektene rundt gjennomføringen av litteraturgjennomgangen, enn de analytiske tolkningene som generes (Bryman, 2016, s. 105). Dette illustrerer at analyseprosessen kan være utfordrende. Selv om litteraturstudier av enkelte blir fremhevet som objektive, er det likevel mulig med menneskelige feil i screening og utvelgelsen, som kan utgjøre feilkilder i studien. Det er derfor en stor fordel at det er flere forfattere som gjennomgår den samme utvelgelsesprosessen, og at forfatterne søker råd om søkeord og kriterier for utvelgelse av andre i feltet. Det siste har vi gjort gjennom samtaler med veileder.

En annen begrensning ved metoden er vurderingen av kvaliteten av kvalitative studier, spesielt i forbindelse med inkludering eller ekskludering av studier i litteratursøket (Bryman, 2016, s. 105). Metoden «antar» tradisjonelt at en objektiv vurdering av kvaliteten på en artikkel kan gjøres i utvelgelsen av datagrunnlag (Bryman, 2016, s. 105). Dette er problematisk i møte med kvalitative studier, hvor det ikke er noe tydelig konsensus på hvordan denne kvalitetsvurderingen skal foregå (Bryman, 2016, s. 105). Noe som videre støttes av Carroll & Booth, (2015), som påpeker at det ikkes finnes standard kriterier for hvordan man skal adressere kvalitetsvurdering av kvalitative studier (Carroll & Booth, 2015, s. 151). Forskere kan dømme et enkelt metodisk kriterium som det viktigste for funnene, så kan dette alene bli brukt som terskel for eksklusjon fra analysen (Carroll & Booth, 2015, s. 152).

Det vil alltid være utfordringer knyttet til objektivitet, og noe av problemet ligger i naturen til kvalitative studier, da situasjonene alltid er forskjellige. Det er problematisk å hevde at utvelgelsesprosessen er helt objektiv, når kriteriene for utvelgelse inneholder kvalitative aspekt.

2.5 Dataanalyse

I analysen knyttet til forskningsspørsmål 1 hadde vi allerede mange forhåndsbestemte koder fra før (karakteristikkene nevnt i innledningen). Siden vi kodet manuelt bestemte vi oss for å benytte oss av referanseprogrammet Zotero. I dette programmet markerte vi med farger for potensielle koder i studiene, som var relevant for forskningsspørsmålet. Informasjonen i disse kodene ble så føyet inn i google regneark i en preorganisert tabell. For hvert individuelle tema må man gjennomføre en detaljert analyse og det er viktig å tenke over hvordan det passer inn i den helhetlige analysen (Braun & Clarke, 2006, s. 22). I denne fasen fikk temaene klare grupper og definerte rammer for å samle de sammen på en logisk og oversiktlig måte. For eksempel ble trinn og alder satt sammen i gruppe med matematisk innhold, slik at de kunne analyseres i sammenheng. I presentasjon av resultatet trakk vi ut informasjon av analysen som presentert i passende diagrammer og forklarende tekst. Ulike temaer som var hensiktsmessige å analysere opp mot hverandre ble presentert under samme underkapittel.

I arbeid med analysen tilknyttet forskningsspørsmål 2 benyttet vi en blanding av forhåndsbestemte kategorier og tematisk analyse. Først analyserte vi artiklene for å finne ut hvilket begrep som var det sentral bevisrelaterte bergrepet. Dette gjorde vi ved å vurdere forfatternes utsagn om hensikten med studien, deres begrepsavklaringer og beskrivelser av den bevisrelaterte aktiviteten. De forhåndsbestemte kategoriene utgjorde de overordnede perspektivene for bevis presentert i innledningen. Til slutt markerte vi alle utsagn om, perspektiver for, og forståelse av bevis som kom frem i de studiene hvor bevis var det sentrale begrepet

I analysen av dataen tilknyttet forskningsspørsmål 3 ble de inkluderte artiklene lest flere ganger i løpet av arbeidet, og analysert i sin helhet. Selv om vi vurderte artiklene i sin helhet for å få sammenheng i artiklenes hovedargumenter, la vi spesielt vekt på utsagn knyttet til resultat, diskusjon av resultat og eventuelt forfatternes konklusjon. Her leste vi på en aktiv måte, med fargelegging og organisering av sitat i regneark, hvor vi lette etter mening og mønstre. Dette viste seg å være hensiktsmessig for å trekke ut informasjon, og for å forstå artiklene i sin helhet. Slik som i FS1 og FS2 benyttet vi oss av referanseprogrammet Zotero for koding. Fra mengden av relevant data til FS3 begynte noen temaer å forme seg. En del av tematikken i studiene er naturligvis overlappende, så skillelinjene for de endelige temaene var utfordrende å sette. Etter å ha kommet frem til eksplisitte rammer gjennom diskusjon endte vi til slutt opp med å sortere all data innenfor fire tema. I disse temaene ble alt av relevant data fra samme studie samlet på et sted. Dette ble igjen gått over flere ganger for å trekke ut egnede eksempler som illustrerte temaene som kom frem i analysen.

3.0 Resultat

I dette kapittelet presenteres resultatene tilknyttet de tre forskningsspørsmålene. Resultater knyttet til forskningsspørsmål 1 (kapittel 3.1) deles inn de mange karakteristikkene som vi var ute etter å beskrive. Der det er naturlig er karakteristikkene slått sammen og presentert ved siden av hverandre. Resultater knyttet til forskningsspørsmål 2 (kapittel 3.2) viser en fordeling av begrepsbruk og perspektiv i studiene, og hvordan studiene definerer bevis (dersom dette er eksplisitt avklart). Resultater knyttet til forskningsspørsmål 3 (kapittel 3.3) beskrives i tema som kom frem etter en helhetlig tematisk analyseres. Her presenteres muligheter for å støtte grunnskoleelever læring av bevis, inndelt i de identifiserte temaene. Noen eksempler for hvert tema er fremhevet for å illustrere disse mulighetene tydeligere. Med hjelp av denne oversikten kan vi svare på hva studiene sier om muligheter for å støtte læring av bevis i grunnskolen.

3.1 Karakteristikker ved studiene

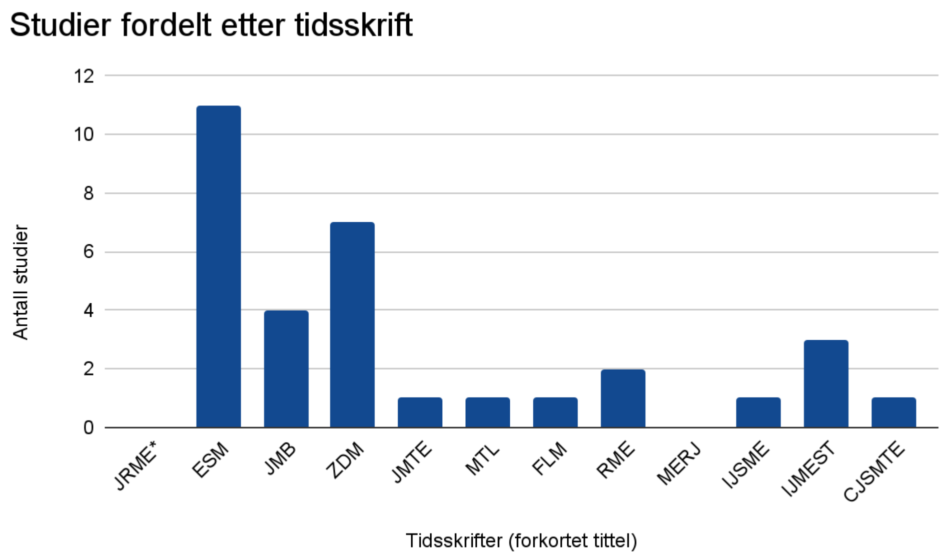
Forskningsspørsmål 1: *Hva karakteriserer klasseromsintervensjoner i grunnskolen knyttet til læring av bevis de siste 10 årene?*

Dette kapittelet er inndelt i fem underkapittel som inneholder to til tre karakteristikker hver. Disse beskriver konteksten for de studiene som er inkludert i vår oppgave, og hvordan de ulike rammene for intervensjonene fordeler seg i utvalget.

3.1.1 Overordnet design og publikasjon av studiene

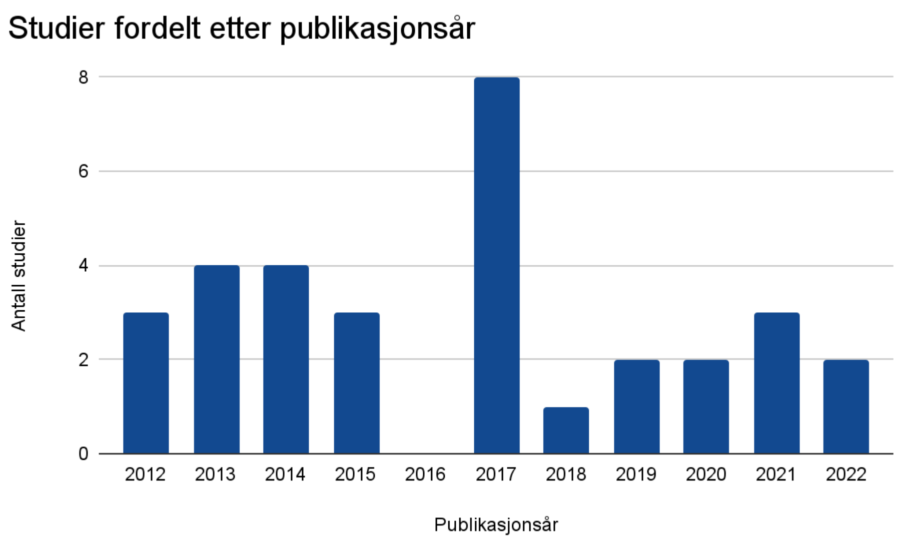
Fordelingen av de inkluderte studiene varierte noe. Blant de 32 artiklene inkludert i vårt studie var det 23 intervensjonsstudier, i den forstand at forfatterne selv brukte ordet intervensjon for å beskrive opplegget som elevene deltok i. Her refererer 12 av disse studiene også til (eller kan knyttes til, gjennom publikasjon i samme «Special Issue«) enten til Stylianides & Stylianides' (2013) beskrivelse av «classroom-based interventions», og/eller oppfordring til å utføre slike studier (Stylianides et al., 2017; Stylianides & Stylianides, 2017). De fleste av disse studiene hadde grundig teoretisering, tett samarbeid mellom forskere og lærerne på stedet hvor intervensjonen foregikk, og tydelig forskningsspørsmål og uttalt mål med intervensjonen. I tillegg har vi inkludert ni studier som: har empiri fra klasserom, et bevisrelatert fokus og som adresserer utfordringer knyttet til bevis. De fleste av disse har betegnet seg selv som «teaching experiment» eller «classroom teaching experiment». Disse har flere likhetstrekk med en intervensjon, samt eksplisitte forskningsspørsmål. Et unntak er for eksempel Baldry et al. (2022), hvor det er en (spesielt erfaren) lærer som leder en demonstrasjonsøkt. Undervisningsenheten er derimot så grundig beskrevet, både i planlegging og gjennomføring, at den enkelt kan adopteres som et «teaching experiment» i et studie med lignende fokus.

Studiene inkludert i vår oversikt ble hentet ut fra ti av de 12 tidsskriftene. Over en tredjedel av inkluderte studier ble publisert i ESM (n = 11) og sammen med JMB (n = 4) og ZDM (n = 7) står disse for majoriteten av utvalget (ca 70%). IJMEST og RME står for henholdsvis tre og to studier, mens JMTE, MTL, FLM, IJSME og CJSMTE står for en hver. MERJ ga ingen inkluderte studier. JRME avga 1-2 potensielle studier etter screening av tittel og abstract, og deretter utelatt fra prosessen fordi vi ikke hadde tilgang til fulltekst.



Figur 3.1 Studier fordelt etter tidsskrift
**JRME avga null inkluderte studier fordi vi ikke hadde tilgang.*

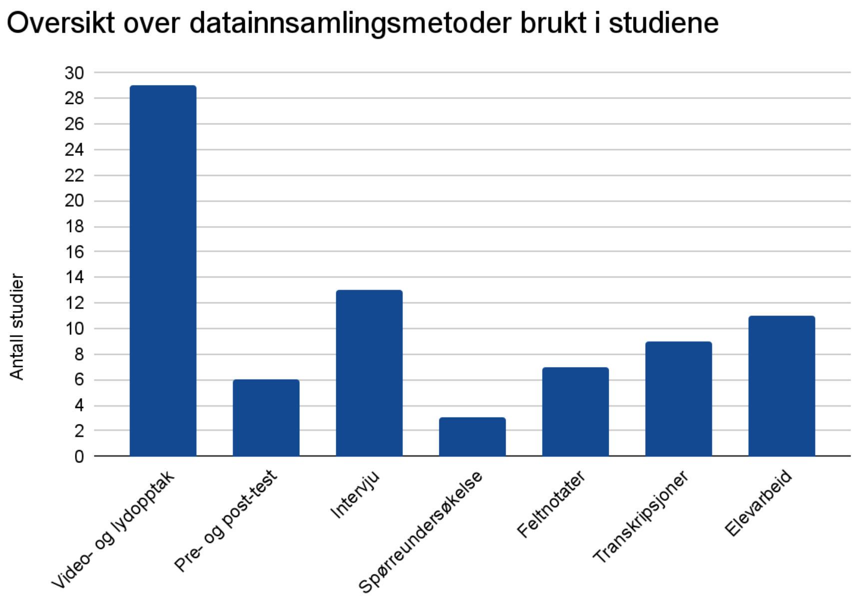
Når det gjelder årstall for publikasjon er studiene nokså jevnt fordelt, med unntak av 2017, hvor åtte av artiklene ble publisert. ESM utga dette året et «Special Issue» om nettopp intervensjoner knyttet til bevis, og fire av våre studier kommer fra denne publikasjonen. Verdt å peke på er også «Special Issue» (volume 45-3) i ZDM, publisert 2013, som omhandlet intervensjoner generelt. Tre av studiene i denne publikasjonen er inkludert i vårt studie. Det var 11 intervensjonsstudier publisert i disse tidsskriftene etter 2017, og 14 studier før 2017.



Figur 3.2 Studier fordelt etter publikasjonsår

3.1.2 Metode for datainnsamling i studiene

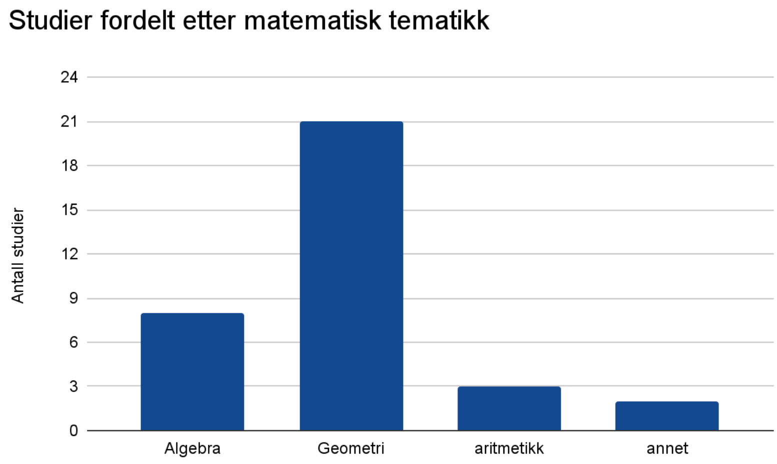
Det var hovedsakelig sju forskjellige metoder for datainnsamling. Dette var video- og lydopptak, pre-post test, intervju, spørreundersøkelse, feltnotater, transkripsjoner og elevarbeid (hovedsakelig skriftlig). Mange av studiene har flere datainnsamlingsmetoder, som for eksempel både video- og lydopptak og transkripsjoner av elevers samtaler. Tallene presentert her er hva forskerne selv har rapportert som sin datainnsamling metode. Den desidert vanligste formen for datainnsamling var video- og lydopptak, og 29 av 32 studier brukte dette som metode, noe som tilsvarer ca 90%. Den nest mest brukte datainnsamling metode var intervju, noe 13 av intervensjonene brukte enten før, underveis, eller etter intervensjon (eller en kombinasjon av disse).Spørreundersøkelse var de minst brukte formen for datainnsamling, og ble benyttet i kun tre ganger. De resterende datainnsamling metode var brukt: pre- post test (6), feltnotater (sju), transkripsjoner (ni) og skriftlig elevarbeid (11).



Figur 3.3 Oversikt over datainnsamlingsmetoder brukt i studiene

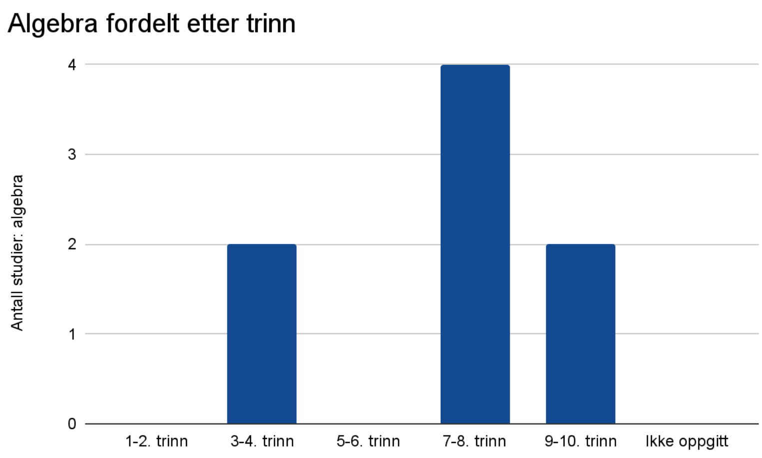
3.1.3 Matematisk innhold og trinn/alder

I de 32 studiene var det hovedsakelig tre forskjellige matematiske innhold. Med matematisk innhold mener vi grener innenfor matematikken som for eksempel algebra og aritmetikk. Forskerne i 21 av Studiene oppga at de hadde geometri som sitt matematiske innhold. Dette er det klart mest dominerende tematikken i studiene, og utgjorde ca 66 % av studiene. De to andre matematiske innholdene var algebra og aritmetikk. Åtte studier fokuserte på algebra og tre studier fokuserte på aritmetikk. I tillegg var det to studier som ikke hadde et spesifisert fokus, men flere i løpet av skoleåret. Denne fikk en egen gruppe kalt «annet». De resterende studiene (ikke geometri) utgjorde til sammen 38 % av studiene. Summen av prosentandelen av antall studiers matematiske temaer er over totale prosenten av antall studier vi har inkludert, se diagram figur 3.4 nedenfor. Dette er på grunn av at noen studiene hadde flere matematiske tematikker i fokus. En studie hadde for eksempel både geometri og algebra som matematisk innhold i sin intervensjon.

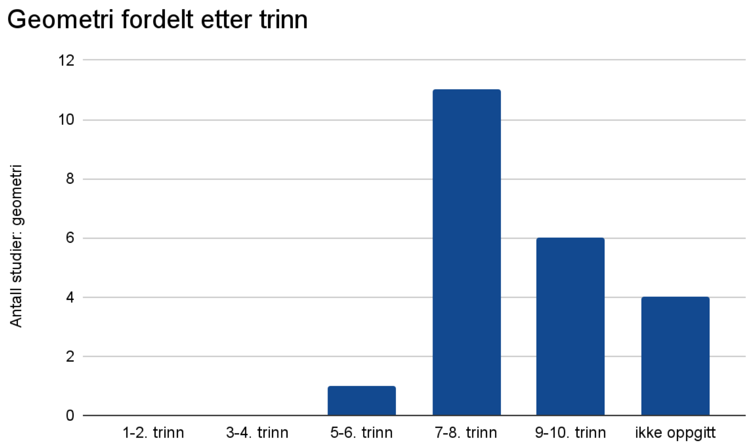


Figur 3.4 Studier fordelt etter matematisk tematikk

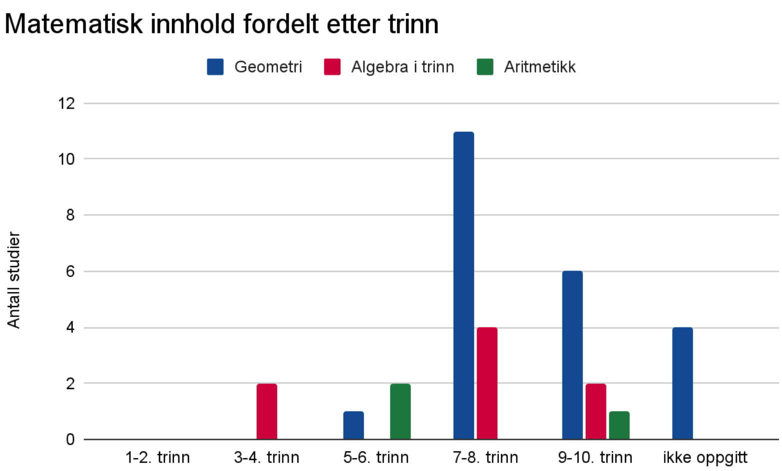
Etter å ha analysert matematisk innhold og trinn/alder var det hensiktsmessig å se disse i sammenheng. Studiene er delt inn i trinn etter hvordan de selv har definert dette. De vil naturligvis ikke alltid stemme overens med norsk trinnfordeling. Alle trinnene er innenfor alderen 5-16 år (norsk grunnskole). Det er åtte studier som hadde bevisrelatert aktivitet tilknyttet algebra. Av disse åtte, ble seks av dem gjennomført i gruppen 7-8.trinn eller høyere, se figur 3.5. Denne gruppen utgjorde 75% av algebra studiene. Fire av de åtte studier som hadde algebra som matematisk innhold gjennomførte sin intervensjon i gruppen 7-8. trinn, noe som utgjorde 50% av studiene. Det var 16 av 17 studiene som hadde geometri som matematisk innhold med elever i 7. trinn eller eldre , se figur 3.6. Dette tilsvarer altså omtrent 95% av studiene. En intervensjonsstudie om geometri ble gjennomført i gruppen 5-6. Klasse. De fire andre studiene påpekte ikke hvilket trinn de gjennomførte sin intervensjonsstudie i. Her var det også klart flest studier som ble gjennomført i 7-8. klasse. Disse utgjorde 11 av 17 studier, eller 65% av de som oppga hvilket trinn intervensjonen ble gjennomført i. To av de tre intervensjonsstudiene som hadde aritmetikk som matematisk tema gjennomførte sin intervensjon i gruppen 5-6, klasse, mens den siste intervensjonen gjennomførte sin intervensjon i gruppen 9-10. klasse. Basert på vårt utvalg, kan vi si at det er tydelig overvekt av studier med bevisrelatert aktivitet på ungdomsskolen, og da spesielt tilknyttet geometri.



Figur 3.5 Algebra fordelt etter trinn

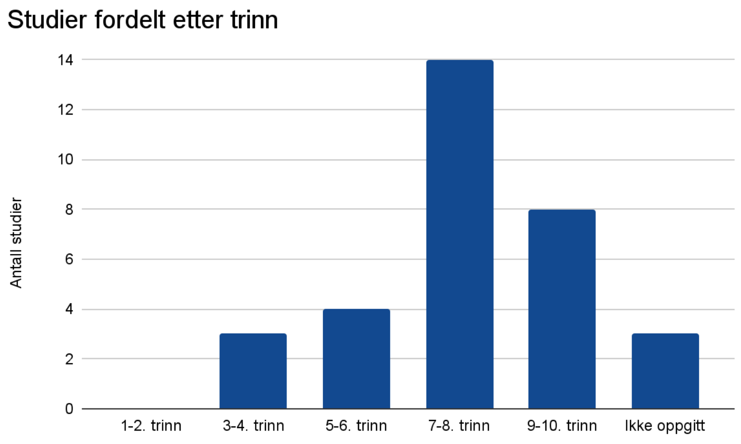


Figur 3.6 Geometri fordelt etter trinn
** En studie gjennomførte sin intervensjon i både 8. og 9. trinn, denne telt i gruppen 7-8 klasse.*



Figur 3.7 Matematisk innhold fordelt på trinn

I figur 3.8 presenteres hvilke trinn som intervensjonene er gjennomført i (uansett matematisk innhold). Flere av studier foregikk over flere år og trinn, eller den samme intervensjonen i ulike trinn. Disse ble sortert etter hvilket trinn de først startet sin intervensjonsstudie, slik at disse studiene ikke ble telt to ganger. Et eksempel på en studie som ville ha havnet i to grupper, var Blanton et al., (2019) som foregikk over to år med den samme klassen. Totalt er det flest intervensjoner i gruppen 7-8. trinn og 9-10. Klasse. Disse gruppene utgjorde ca 69% av alle intervensjonsstudien på bevis.



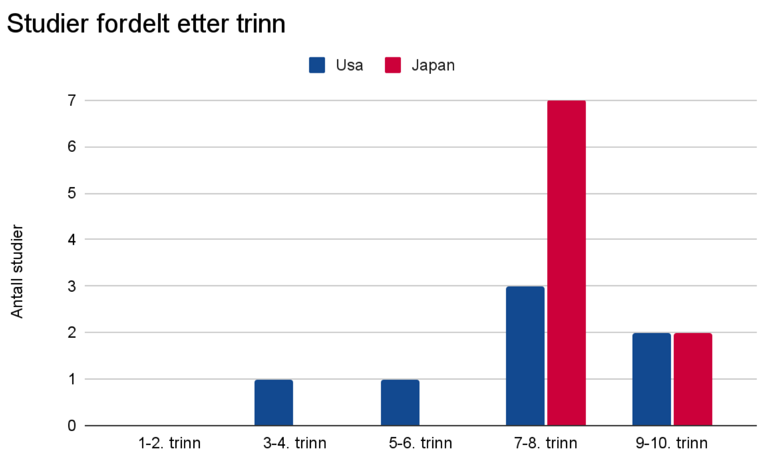
Figur 3.8 Studier fordelt etter trinn

Videre fokuseres det på matematisk innhold i intervensjonsstudiene gjennomført i USA og Japan. Intervensjonene gjennomført i disse to landene utgjorde omtrent halvparten (Japan åtte og USA sju) av alle inkluderte studiene. De resterende intervensjonsstudiene ble gjennomført i 11 forskjellige land (se tabell 1). Alle disse landene hadde enten en eller to studier hver. I tre av studier var det ikke oppgitt hvor intervensjonen ble gjennomført.

Land	Antall studier
Japan	8
USA	8
England	2
Italia	2
Canada	2
Spania	1
Kina	1
Portugal	1
Colombia	1
Hellas	1
Tyskland	1
Sør-Korea	1
Australia	1
Ikke oppgitt	3

Tabell 3.1 Studier fordelt etter land

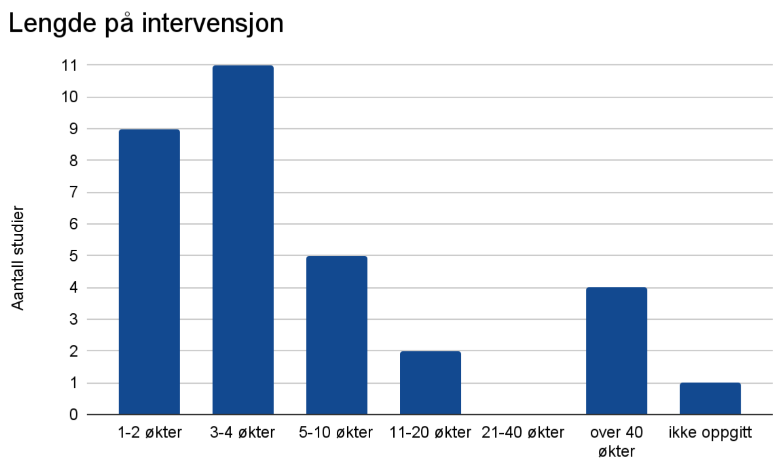
Fordelingen av matematisk innhold i Japan og USA var svært ulikt. Alle de åtte japanske studiene hadde kun geometri som matematiske tema. De japanske studiene ble utelukkende gjennomført i 8. og 9. trinn. En av de japanske studiene hadde en intervensjon som ble gjennomført i både 8. og 9. trinn. De amerikanske intervensjonsstudiene var mer fordelt i utover trinnene. I motsetning til Japan har to av de amerikanske intervensjonsstudier det matematiske innholdet geometri, seks studier hadde algebra og ett i aritmetikk. To av disse sju studiene hadde de fokus på to ulike matematiske innhold.



Figur 3.9 Studier fordelt etter trinn (USA og Japan)

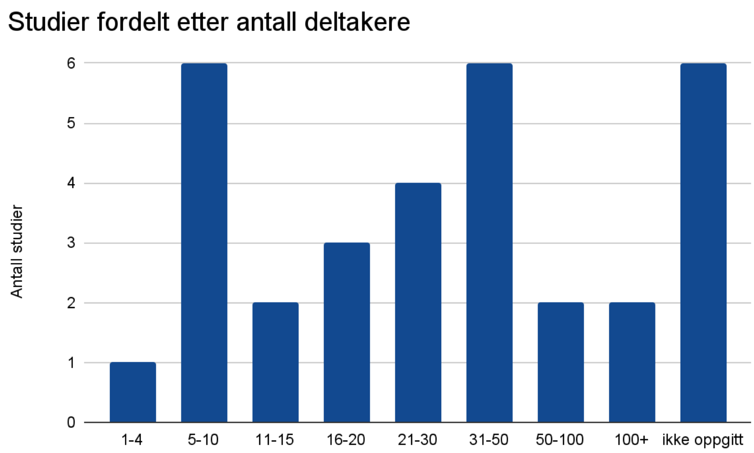
3.1.4 Lengde på intervensjon og antall deltakere

Lengden på intervensjonene varierte alt fra en undervisningsøkt til nesten 60 undervisningsøkter (se figur 3.10). I tillegg varierte undervisningstidene i lengde per økt. De fleste øktene var enten 45 minutter, 60 minutter eller 90 minutter. Det vanligste antallet undervisningsøkter var 1-2 og 3-4 undervisningsøkter. Disse står for 20 av 32 studiene og utgjorde 62,5%. Gruppen 1-2 undervisningsøkter inneholdt ni studier, mens gruppen 3-4 undervisningsøkter inneholdt 11 studier. Figur 3.10 representerer antall undervisningsøkter, det er derimot flere ting som må påpekes som ikke kommer frem i figuren. Sju av intervensjonsstudiene skilte seg ut fra resten studiene. Den første av disse var et prosjekt som varte i seks måneder, men hadde fire undervisningsøkter (Ayala-Altamirano & Molina, 2021). Den andre studien hadde tre undervisningsøkter i uken, i fire måneder, så ca 50 undervisningsøkter totalt i prosjektet (Fiallo & Gutiérrez, 2017). Den tredje og den lengste intervensjonen av alle hadde 54 undervisningsøkter fordelt likt på tre år (Blanton et al., 2019). Den fjerde studien hadde 43 undervisningsøkter totalt fordelt på to år (Kim & Ju, 2012). Den femte studien hadde totalt 46 undervisningsøkter i løpet av seks måneder (Lehrer et al., 2013). Den sjette studien hadde tre forskjellige klasser over to år, uten å oppgi hvor mange undervisningsøkter de gjennomførte (Mariotti, 2013), denne har blitt plassert i gruppen «ikke oppgitt» i figur 3.10. Den sjuende studien er studien til (Martinez & Castro Superfine, 2012). Deres studie er et godt eksempel på en enkelttime intervensjon som er del av et større prosjekt, noe det er flere av. Akkurat denne intervensjonsstudien varte bare en time, men er økt nummer 13 av 15 i et større prosjekt med mye den samme tematikken.



Figur 3.10 Studier fordelt etter antall økter

Figur 3.11 viser hvor mange deltakere det var med i intervensjonsstudiene. Dette varierte fra alt mellom 1 og 170 deltakere. De fleste av studiene hadde eksperiment eller intervensjon med 5-10 deltakere eller med 31-51 elever. Disse to gruppene inneholdt seks intervensjonsstudier hver, og utgjorde 37,5% av alle intervensjonene. Seks studier hadde ikke oppgitt eksplisitt skrevet hvor mange deltakere som var med. Slik som i karakteristikken intervensjons lengde, er det også studier som skiller seg ut i karakteristikken *antall økter.* I en av studiene ble intervensjonen gjennomført for en elev, dette var den eneste studien med en elev. To av de andre studiene hadde mellom 50-100 deltakende elever, og atter to andre studier igjen med begge over 100 deltakende elever.

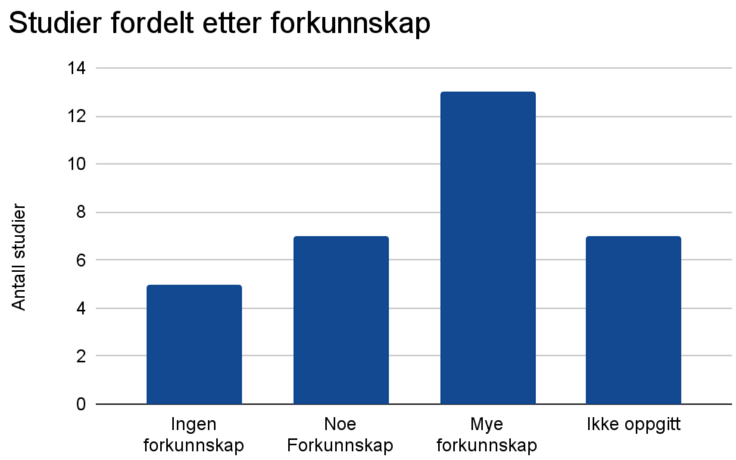


Figur 3.11 Studier fordelt etter antall deltakere

3.1.5 Forkunnskaper og arbeidsform

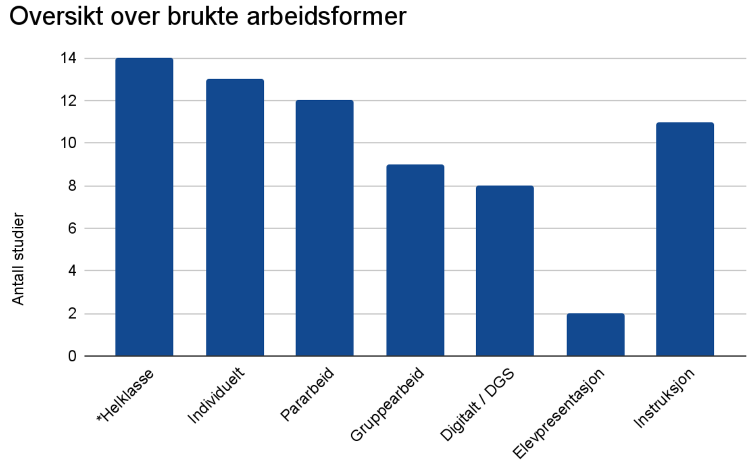
Elevens forkunnskaper i intervensjonene var en av karakteristikkene vi fokuserte på i vår oppgave. Med forkunnskap menes det hvilke matematisk kompetanse elevgruppen hadde i forkant av intervensjonen akkurat denne elevgruppa deltok i. Forkunnskap er sortert etter gruppene: ingen forkunnskap, noe forkunnskap, mye forkunnskap og ikke oppgitt (se figur 3.12). For at en elevgruppe skal bli plassert i gruppen «ingen forkunnskap» må forskerne selv eksplisitt skrive at elevene ikke har arbeidet med en slik tematikk på forhånd. Et eksempel på dette er Ayala-Altamirano & Molina (2021, s. 364) som skriver: Før disse arbeidstimene, hadde elevene fått ingen undervisning om generalisering eller i å uttrykke algebraiske ideer. I tillegg til Ayala-Altamirano & molina (2021), er også fire andre studier plassert i gruppen «ingen forkunnskap» nemlig; Barnes (2019), Ng og Sinclair (2015), Makar et al., (2015) og Kim og Ju (2012). Gruppen med ingen forkunnskap var den minste gruppen.

Gruppen «noe forkunnskap» og «ikke oppgitt» var de to neste. De inneholder begge sju studier. Elever i gruppen noe forkunnskap blir gjerne beskrevet som gjennomsnittlig av forskerne/lærerne eller som har noe erfaringer med tematikken i intervensjonen fra før. Et eksempel på elever tilhørende gruppen noe forkunnskap er Komatsu et al., (2017, s. 5) som skriver: før denne undervisningsøkten, hadde elevene lært geometrisk bevis som involverte kongruente og lignende trekanter, de hadde blitt kjent med innskrevet vinkel teoremet og innskrevet firkant teoremet. Gruppen ikke oppgitt inneholdt studier hvor forskerne ikke ga noen betegnelse på hvilket nivå elevene var før intervensjonen ble gjennomført. Den tredje og største gruppen er «mye forkunnskap». Den inneholdt 13 av studiene. Dette var elever som ble beskrevet som over gjennomsnittlig gode av forskerne i studiene. Et eksempel på dette er Komatsu (2017, s. 138) som skriver: den matematiske kompetansen til elevene var over gjennomsnitt. De 12 andre intervensjonsstudiene som havnet i gruppen mye forkunnskap er: Komatsu og Jones (2022), Baldry et al., (2022), Shinno og Fujita (2021), Yopp et al., (2020), Yopp (2020), Yopp (2017), Fiallo og Gutierrez (2017) Komatsu et al., (2014a) Komatsu et al., (2014b), Mariotti (2013), Martinez og Castro Superfine (2012) og Mariotti (2012).



Figur 3.12 Studier fordelt etter forkunnskap

Med arbeidsform menes det hvordan selve oppgavene i intervensjonen ble utført (ikke hvilket matematisk innhold som ble gjort). Et eksempel på en gruppe innenfor arbeidsform er «individuelt» eller «instruksjon». Det ble identifisert sju forskjellige hovedgrupper av arbeidsformer i de 32 studiene: helklasse diskusjon, individuelt arbeid, instruksjon, par arbeid, gruppearbeid, digitalt/dgs, og presentasjon (se figur 3.13). Her har vi trekt ut informasjon fra hva forskerne selv eksplisitt har sagt i intervensjonene, men også tolket noe hvilken arbeidsform de har brukt. Om det for eksempel var transkripsjoner i artikkelen, tolket vi dette som gruppearbeid eller pararbeid. Selv om forskerne selv ikke hadde sagt at de hadde brukt disse arbeidsformene i sin intervensjon. De fleste intervensjonsstudiene bruker gjerne flere enn en arbeidsform i løpet av sin intervensjon. Den mest hyppige arbeidsformen var *helklasse diskusjon*, som ble benyttet i 14 av studier. Like bak var *individuelt arbeid* (13) og *pararbeid* (12). Arbeidsformen *instruksjon* ble brukt i 11 intervensjoner. De resterende arbeidsformene ble brukt åtte eller mindre ganger.



Figur 3.13 Oversikt over brukte arbeidsformer
** Helklassediskusjon er navngitt helklasse i diagram*

3.1.6 Oppsummering forskningsspørsmål 1

Kapittel 3.1 var langt og detaljert, her oppsummerer vi kort det viktigste resultatene. Det var totalt 32 studier, som var innenfor 10 av de 12 tidsskriftene. I tidsskriftene var det ESM og ZDM sto for de flest antall studier (18 til sammen). Det var færre studier publisert (i tidsskriftene) de fem årene etter 2017, enn de fem årene før. Av datainnsamlingsmetoder var det video- og lydopptak som var den klart vanligste (29 av 32), mens spørreundersøkelse og pre- og posttest var de minst brukte. Det matematiske innholdet var hovedsakelig delt i tre grupper: geometri, algebra og aritmetikk. I tillegg hadde to studier fokus på noe annet. Geometri var fokuset i 21 studier, algebra i åtte, aritmetikk i tre og annet var i fokus av to studier. Intervensjonene ble hovedsakelig gjennomført i 7. trinn og over (22 av 29). Intervensjonene ble gjennomført i 13 forskjellige land i tillegg til at tre studier som ikke hadde oppgitt hvor de gjennomførte sin intervensjon. Av disse ble 15 gjennomført i Japan (åtte) og USA (sju). De japanske intervensjonene hadde alle geometri som sitt matematisk innhold og ble kun gjennomført i 8. trinn eller 9. trinn., mens de fra USA var fordelt på alle de tre matematiske innholdene og utover flere trinn. I 3.1.4 var fokuset på intervensjons lengde og antall elever. Antall deltakere var variert i utvalget og det var ingen intervall som skilte seg spesielt ut. Over ⅔ av intervensjonene hadde 1-4 undervisningsøkter i sin intervensjoner og noen få hadde over 50 undervisningsøkter og varte flere år. Det var fem intervensjoner som gjennomførte sin intervensjon i en elevgruppe med ingen forkunnskap. Sju av studiene hadde deltakere med noe forkunnskap, og 13 studier hadde deltakere med mye forkunnskap. I tillegg til dette var det sju av studiene som ikke hadde noen beskrivelse av elevenes forkunnskap. Den vanligste arbeidsformen var helklassediskusjon.

Vi skal avslutningsvis presentere kort hvert enkelt studie og noen sentrale karakteristikker. Listen presenteres i alfabetisk rekkefølge etter førsteforfatter.

Studie	Innhold	Trinn (Land) Antall elever	Lengde	Forkunnskaper	Bevisrelatert aktivitet i fokus
(Ayala-Altamirano & Molina, 2021)	Algebra	4.trinn (Spania) 25 elever	seks måneder, fire økter	Ingen forkunnskaper.	*Justification* generalisering Funksjonsoppgaver og relasjoner
(Baldry et al., 2022)	Geometri	8. trinn (Japan) Ikke oppgitt antall elever	en økt	Mye forkunnskap.	Helklassediskusjon om generaliserte egenskaper
(Barnes, 2019)	Aritmetikk	6. trinn (England) Åtte elever	to økter	Ingen forkunnskap.	Finne tallmønster, og generalisere.
(Blanton et al., 2019)	Algebra	3. - 5. trinn (USA) 170 elever	tre år 54 økter	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	Algebraisk tenkning:: generalisere og begrunne
(Chen & Herbst, 2013)	Geometri	Ikke oppgitt trinn eller land Ikke oppgitt antall elever	Fem økter	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	Resonnere, lage hypoteser om vinkler og parallelle linjer.
(Cusi & Olsher, 2021)	Geometri	10. trinn (Italia) 22 elever	en økt	Noe forkunnskap.	Bruk av eksempel som innledning av bevis.
(Fan et al., 2017)	Geometri	8. trinn (Kina) 65 elever	to uker fire økter	Noe forkunnskap.	Konstruksjon og hjelpelinjer for å løse geometrisk bevis
(Fiallo & Gutiérrez, 2017)	Geometri	10. trinn (Colombia) 17 elever	fire uker ca. 50 økter	Mye forkunnskap	DGS og bevis, lage og begreunne hypoteser.
(Fujita et al., 2018)	Geometri	Ikke oppgitt trinn eller land To elever	fire økter	Noe forkunnskap.	DGS, sirkel logikk og deduktiv bevis
(Jahnke & Wambach, 2013)	Geometri	8. trinn (Tyskland) 24 elever	åtte økter	Noe forkunnskap.	Astronomi og hypoteser
(Kim & Ju, 2012)	Geometri	8. trinn (Sør-Korea) Ni elever	to år 43 økter	Ingen forkunnskap.	utforske meningen av matematiske bevis (mange bevisrelatert aktiviteter)
(Komatsu, 2017)	Geometri	8. trinn (30 stk.) 9. trinn (38 stk.) Japan	to økter	Mye forkunnskap.	Bevis-konstruksjon og bevis gjennom diagrammer.
(Komatsu & Jones, 2022)	Geometri	9. trinn (Japan) 39 elever	tre økter, som del av et tre år prosjekt (disse var i slutten).	Mye forkunnskap.	Bevis, motbevis og formlikhet.

(Komatsu et al., 2017)	Geometri	9. trinn (Japan) 32 elever	to økter	Noe forkunnskap.	validering og modifisering av bevis
(Komatsu et al., 2014a)	Geometri	8. trinn (Japan) 36 elever	tre økter	Mye forkunnskap.	Hypotese og motbevis
(Komatsu et al., 2014b)	Geometri	8. trinn (Japan) 35 elever	tre økter	Mye Forkunnskap.	Påstander, hypotese og moteksempel
(Lehrer et al., 2013)	Geometri	6. trinn(USA) 18 elever	seks måneder, 46 økter	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	Definering av figurer, vridning, pytagoras, teoremer.
(Makar et al., 2015)	Ikke spesifisert matematis k innhold	4. trinn (Australia) 26 elever	ni måneder, 17 økter	Ingen forkunnskap.	Argumentasjon, normer
(Mariotti, 2012)	Geometri	Ikke oppgitt trinn (Italia) Ikke oppgitt antall elever	en økt	Mye forkunnskap.	Hypotese, DGS og dra-funksjon.
(Mariotti, 2013)	Geometri	9. - 10. trinn (ikke oppgitt land) 60 elever	to år utdrag her fra fire til seks økter	Mye forkunnskap.	Konstruksjon av bevis.
(Martinez & Castro Superfine, 2012)	Algebra	9. - 10. trinn (USA) Ni elever	en økt, men er nr 13 av 15 i et større prosjekt	Mye forkunnskap.	Variabler, algebra og bevis
(Martinez & Pedemonte, 2014)	Aritmetikk og algebra	9. - 10. trinn (USA) Ni elever	fire økter første av totalt 15	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	fra induktiv aritmetikk til deduktiv algebraisk bevis
(Mata-Pereir a & da Ponte, 2017)	Algebra	7. trinn (Portugal) Ikke oppgitt antall elever	ni økter	Noe forkunnskap.	Resonnering som generalisering og justification
(McFeetors & Palfy, 2018)	ikke oppgitt matematis k innhold	5. - 6. trinn (Canada) 45 elever	tre økter	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	Spill, refleksjon, resonnering
(Miyazaki et al., 2015)	Geometri	8. trinn (Japan) Ikke oppgitt antall elever	ni økter	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	Flytdiagram bevis, deduktiv bevisføring.
(Miyazaki et al., 2017)	Geometri	8. trinn (Japan) 30 elever	ni økter	Noe forkunnskap.	Flytdiagram bevis, deduktiv bevisføring
(Moutsios-Re ntzos et al., 2014)	Geometri	9. trinn (Hellas) 17 elever	en økt	Ikke oppgitt forkunnskap nivå.	teorem (Pytagoras)
(Ng &	Geometri	8. trinn	to økter	Ingen	geometrisk

Sinclair, 2015)		(Canada) Ikke oppgitt antall elever		forkunnskap.	resonnering
(Shinno & Fujita, 2021)	Aritmetikk	5. trinn (England) Sju elever	en økt	Mye forkunnskap.	Utforske og forklare mønster, generalisering.
(Yopp, 2017)	Geometri og algebra	8. trinn (USA) En elev	en økt	Mye forkunnskap.	If-than påstander, argumentasjon.
(Yopp, 2020)	Algebra	8. trinn (USA) 15 elever	17 økter	Mye forkunnskap.	If-than påstander, argumentering, kritisere direkte og indirekte argumenter.
(Yopp et al., 2020)	Algebra	8. trinn (USA) Ti elever	tre økter, men del av et større prosjekt generelt (LLAMA)	Mye forkunnskap.	Eliminere moteksempel og finne moteksempel.

Tabell 3.2 Oppsumering av inkluderte studiers karakteristikker

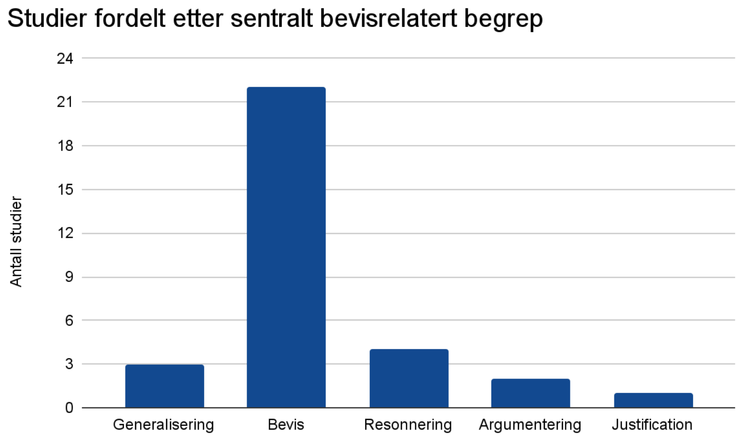
3.2 Resultater knyttet til perspektiver for, og forståelser av, bevis

Forskningsspørsmål 2: *Hvilke teoretiske perspektiver for, og forståelse av, bevis har forskerne basert sin intervensjon på?*

Innledningsvis vil vi presentere en oversikt over studiene fordelt etter det sentrale bevisrelaterte begrepet som forfatterne har brukt. Deretter presenterer vi hvordan studiene fordeler seg etter de overordnede perspektivene for bevis nevnt i innledningen: *bevis som problemløsning, bevis som overbevisning og bevis sosialt forankret aktivitet.* Avslutningsvis presenterer vi ulike forståelser for bevis som kom frem gjennom en tematisk analyse av forfatternes begrepsbruk og begrepsavklaring.

3.2.1 De sentrale bevisrelaterte begrepene i studiene

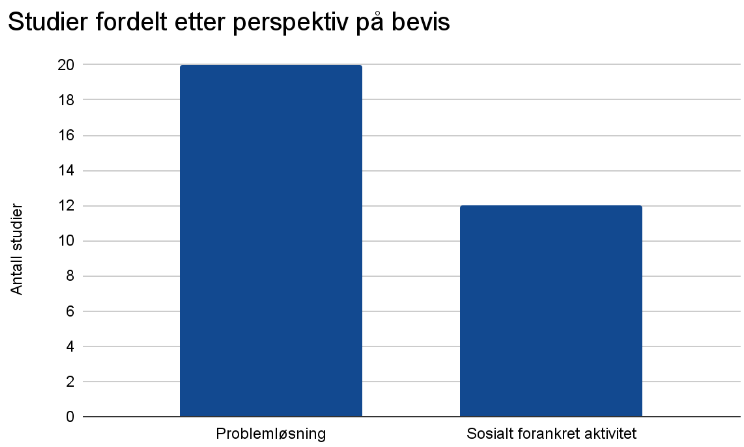
Basert på vår analyse av begrepsbruk, fokus for studien og hvordan den sentrale aktiviteten i studiet beskrives, vil vi nå presentere hvordan studiene i utvalget fordeler seg etter *sentral bevisrelatert begrep*. I analysen så vi på forskningsspørsmålene i studiene, tittel, formål med studien (om uttalt), avklaringen av deres teoretiske rammeverk og beskrivelse av den sentrale bevisrelaterte aktiviteten. I figur 3.14 har vi tilegnet hvert studie ett begrep, selv om mange av studiene bruker flere av disse begrepene. Hvis det i analysen stod mellom *bevis* og et øvrig bevisrelatert begrep, valgte vi førstnevnte, siden *bevis* er det sentrale begrepet i vår studie. Vi identifiserte fem ulike hovedbegrep forfatterne knyttet til den sentrale bevisrelaterte aktiviteten i sine studier. Dette var: generalisering, bevis, resonnering, argumentering, og «justification». Omtrent 70% (22) av studiene hadde *bevis* som sentralt begrep, mens de resterende var nokså jevnt fordelt i utvalget.



Figur 3.14 Studier fordelt etter sentralt bevisrelatert begrep

3.2.2 Bevis som problemløsning og som en sosialt forankret aktivitet

Studier om bevis kan i følge Stylianides et al. (2017) kategoriseres i tre perspektiver: *bevis som problemløsing, bevis som overbevisning,* og *bevis som en sosialt forankret aktivitet.* Forskere som implementerer klasseromsintervensjoner må vurdere et bredt spekter av faktorer og målsetninger som går på tvers av disse perspektivene (Stylianides et al., 2017, s. 254). Derfor vil vi påpeke at fordelingen i Figur 3.15 ikke må sees på som en ekskluderende inndeling; de fleste studiene i utvalget spant over mer enn ett perspektiv. Det er likevel mulig å dele inn studiene etter hvilket perspektiv de ligger nærmest, noe vi har analysert basert på tre aspekt ved studiene: hvilket overordnet rammeverk studien hadde, hva som var fokus i studien, og hvordan den bevisrelatert aktiviteten var lagt opp. I analysen identifiserte vi 20 studier som under perspektivet *bevis som problemløsning.* Vi ser anser for eksempel Komatsu (2017) som et studie nærmest dette perspektivet, selv om studien også har fokus på lærerens rolle i å veilede oppgavejobbingen og diskusjonene rundt arbeidet. Videre identifiserte vi 12 studier under perspektivet *bevis som sosialt forankret aktivitet.* Et eksempel på et studie som ligger nærmest dette perspektivet Shinno og Fujita (2021), selv om de også viet betydelig oppmerksomhet til oppgavedesign. Vi har ikke plassert noen av de inkluderte studiene innenfor perspektivet *bevis som overbevisning,* selv om flere nevner betraktninger som kan knyttes til dette perspektivet.



Figur 3.15 Studier fordelt etter perspektiv på bevis

3.2.3 Ulike forståelser av bevis

Det er 22 studier i utvalget som har *bevis* som det sentrale begrepet (se Figur 3.15) og forståelsen av bevis blant disse er variert, og i noen tilfeller utydelig avklart. Av de 22 studiene er det 16 som har tydelig avklart sin bruk og forståelse av *bevis.* De ulike forståelsesrammene spenner et vidt spekter, fra en teoretisk og formell forståelse av bevis, til å bruke ordet bevis også om empiriske argumenter.

Et tydelig eksempel på det første ytterpunktet er Mariotti (2012, s. 167) som fremmer en forestilling av *teorem*, bestående av tre deler: en *påstand,* et *bevis* og en *teori* hvor dette beviset gir mening. Hun påpeker at mange «bevis» presentert i skolematematikken egentlig bør klassifiseres som «argumentasjon», siden de ikke gjør eksplisitt referanse til det aksiomatiske systemet (Mariotti, 2012, s. 167).

Et godt eksempel på det andre ytterpunktet er Fiallo og Gutiérrez (2017, s. 147), som bruker begrepet om all matematisk argumentasjon som et individ kan ta i bruk for å overbevise seg selv eller andre om en matematisk påstand er sann eller ikke. De skiller videre mellom *empirisk bevis* og *deduktive bevis,* hvor den sistnevnte beskrives som bestående av logiske slutninger som kobler premiss og konklusjon.

Selv om majoriteten av forfatterne avklarte sin forståelse av bevis, var det et betydelig antall studier (seks) som manglet tydelig begrepsavklaring knyttet til bevis.

3.3 Muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis

Forskningsspørsmål 3: *Hva sier intervensjonsstudiene om muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis?*

I denne delen presenteres det temaer vi kom frem til gjennom helhetlig lesing og analyse av studiene i utvalget. I analysen la vi spesielt vekt på resultat av studien, og forfatternes diskusjon og konklusjon knyttet til resultatet. Vi identifiserte fire hovedtema i analysen: *oppgavedesign, bevis som verktøy for å generere og kommunisere kunnskap, læringsmuligheter knyttet til meta-kunnskap om bevis* og lærers rolle som veileder i den bevisrelaterte aktivitet*.* Design av egnede aktiviteter er naturlig nok sentralt i intervensjonsstudier, og mange av studiene peker på spesifikke aspekter ved oppgaven designet som kritiske suksessfaktorer i intervensjonen. Siden oppgavedesign kom frem som et overordnet tema i analysen har vi videre valgt å dele inn kategorien oppgavedesign etter tre fremtredende aspekter ved designet: *oppgaver med diagram som har implisitt informasjon, oppgaver som utnytter dra-funksjonen i digitale geometriske system* og *oppgaver som tar i utnytter algebraisk notasjon.*

De neste underkapitlene tar for seg tema som handler om klasseromskultur, normer, meta-kunnskap. Det første av disse temaene er *bevis som verktøy for å generere og kommunisere kunnskap i klasseromsfellesskapet.* Videre var det flere av studiene som beskrev *muligheter for å lære meta-kunnskap om bevis.* Mulighetene som pekes på i de hittil nevnte temaene, må sees i sammenheng med lærerens rolle som veileder av den bevisrelaterte aktiviteten. I analysen kom dette frem som et overordnet tema nesten alle forskerne pekte på. Derfor vil vi til slutt presentere *muligheter lærer har for å veilede den bevisrelaterte aktiviteten*, som et overordnet tema i lys av de øvrige temaene.

3.3.1 Oppgavedesign

Mange av studiene vektlegger betydningen av oppgavedesign som sentrale muligheter for å støtte elevers læring av bevis. Dette kom frem som et overordnet tema i analysen og vi har valgt å videre dele kategorien inn i tre fremtredende aspekt ved oppgavedesignet.

3.3.1a Oppgaver som utnytter geometriske diagram med implisitt informasjon

Flere av studiene omtaler bevisrelatert aktivitet knyttet til geometriske figurer hvor noe av informasjonen er implisitt eller skjult, og peker på nettopp denne egenskapen som en sentral faktor i oppgavedesignet (Chen & Herbst, 2013; Komatsu, 2017; Komatsu et al., 2017; Komatsu et al., 2014a, 2014b; Komatsu & Jones, 2022). Chen og Herbst (2013) viser hvordan elevene lagde og begrunnet hypoteser ved å ta i bruk gester (håndbevegelser) i argumentasjonen knyttet til diagrammet. Til forskjell fra oppgavene i den vanlige undervisningen, hadde diagrammene i intervensjonen begrenset informasjon. Forfatterne argumenterer for at dette aspektet ved oppgaven bidro til at elevene lagde sine egne hypoteser (Chen & Herbst, 2013, s. 304).

Komatsu og kollegaer utviklet geometriske bevisoppgaver som la opp til at elevene kunne modifisere og utvide egne bevis, gjennom å finne motbevis til den initielle hypotesen (Komatsu et al., 2014a; Komatsu et al., 2014b). En avgjørende faktor ved disse oppgavene var at diagrammene kunne endres på en slik måte at det kom tydelig frem at den første påstanden ikke gjelder for alle tilfeller av den aktuelle typen figurer (Komatsu et al., 2014a). Elevene konstruerte først bevis for en primitiv påstand knyttet til diagrammet, før de kunne endre på diagrammet for å finne moteksempel eller ikke-eksempel. Det sistnevnte får man dersom premisset for påstanden faller bort ved endring av figuren. I begge tilfellene kunne elevene lage nye hypoteser som inkluderte tilfellene som lå utenfor den opprinnelige påstanden (Komatsu et al., 2014a, s. 19–20). På denne måten gir slike oppgaver elevene mulighet til å erfare «oppdagelsesfunksjonen» til bevis (Komatsu et al., 2014a, s. 23). Komatsu (2017) brukte samme type oppgaver for å vise at elever kan lykkes med å først tilbakevise en påstand, ved å produsere varianter av diagrammet hvor påstanden ikke gjaldt, for deretter å revidere påstanden til å inkludere moteksempelet (Komatsu, 2017). Forfatteren presiserer at ikke alle typer bevisoppgaver med diagram kan brukes til dette; at det fantes implisitte antakelser i oppgavene gjorde det mulig for elevene å lykkes (Komatsu, 2017, s. 141–142).

3.3.1b Oppgaver som utnytter dra-verktøyet i digitale geometriske systemer

Flere studier trekker frem mulighetene for å lære om bevis gjennom bruk av «dra»-verktøyet i digitale geometriske systemer som Cabri og Geogebra (Fiallo & Gutiérrez, 2017; Komatsu & Jones, 2022; Mariotti, 2012, 2013; Ng & Sinclair, 2015). I et studie med 14-15-åringer fant Fiallo & Gutiérrez (2017, s. 162) at elevene var i stand til å produsere deduktive bevis i trigonometri etter en langvarig intervensjon med oppgaver knyttet til draing. I disse oppgavene fasiliterte dra-funksjonen elevens utforsking, og la til rette for at de kunne lage og verifisere egne hypoteser (Fiallo & Gutiérrez, 2017, s. 162). Forfatterne bemerker at en dra-test hvor den konstruerte figuren holder seg stabil, i seg selv er en overbevisende (empirisk) bekreftelse. Dette kan bli en hindring for elevene i deres utvikling fra empirisk til deduktivt bevis. Derfor foreslår forfatterne å eksplisitt etterlyse at elevene bruker teoretiske påstander om egenskaper eller definisjoner, som en del av deres bevis (Fiallo & Gutiérrez, 2017, s. 146).

Med data fra et tidligere Cabri-basert eksperiment med 10. klassinger i Italia utdyper Mariotti (2012, 2013) om hvordan dra-funksjonen kan gi elevene mulighet til å utvikle forståelse for sammenheng mellom betingelser og konklusjon. Konstruksjonsoppgavene krevde for det første at elevene skulle produsere en spesifikk figur i Cabri som var stabil ved draing, og skrive beskrivelsen av fremgangsmåten for å lage denne figuren. Det andre kravet var at elevene skulle produsere en skriftlig begrunnelse for hvorfor konstruksjonen var riktig (Mariotti, 2012, s. 172). Den første delen av oppgavene relateres derfor til handlinger og utforsking med det digitale verktøyet, mens den andre delen handler om å skriftlig beskrive dette arbeidet. Kravet om å validere løsningen korresponderer med å forklare hvorfor figuren består «dra-testen» (det vil si at den holder seg stabil ved draing) (Mariotti, 2012, s. 172). Dra-verktøyet la til rette for at elevene lyktes i å løse konstruksjonsoppgavene, og Mariotti (2012, s. 181) hevder verktøyet kan utnyttes av lærere til å introdusere elevene for et teoretisk perspektiv. Spesielt kan dra-verktøyet bidra til at elevene utvikler en meningsfull forståelse av hvordan matematiske påstander er betinget av premissene (Mariotti, 2012, s. 181). Dersom en spesiell figur konstrueres riktig i Cabri, vil egenskaper ved figuren holdes stabil ved draing. Dermed kan elevene utforske figurens egenskaper ved draing og forme hypoteser om hvilke egenskaper som avhenger av premissene (Mariotti, 2012, s. 174). På denne måten kan dra-verktøyet hjelpe elevene til å bygge en forståelse av den logiske sammenhengen mellom premiss og konklusjon i matematiske påstander (Mariotti, 2012, s. 181).

3.3.1c Oppgaver som utnytter algebraisk notasjon

Selv om geometri fortsatt er det dominerende matematiske domenet når det kommer til bevisrelatert aktivitet i skolen (Martinez et al., 2011, s. 31), fant vi i utvalget noen intervensjoner som utnyttet algebraisk notasjon for å fremme læring av bevis og generalisering (Blanton et al., 2019; Martinez & Castro Superfine, 2012; Martinez & Pedemonte, 2014). Martinez og kollegaer utviklet en tilnærming som integrerer algebra og bevis for ungdomsskoleelever, ved hjelp av samspillet mellom aritmetisk argumentasjon og algebraisk notasjon (Martinez et al., 2011; Martinez & Castro Superfine, 2012). Både algebra og bevis er emner som tradisjonelt kommer sent i grunnskoleløpet og arbeid med algebra blant de yngre elevene i grunnskolen foregår typisk uten algebraisk notasjon (Blanton et al., 2019, s. 194; Stylianides & Stylianides, 2013, s. 124).

Som kontrast til dette fant Blanton et al. (2019, s. 211) at elever allerede i 3. trinn i USA er fullt i stand til å bruke algebraisk notasjon med variabler i bevisrelatert aktivitet. Tester indikerte at notasjonsbruken ikke bare var mulig, men at den også i noen tilfeller var mer nyttig for elevene enn naturlig språk (Blanton et al., 2019, s. 212). Forfatterne trekker også frem trekker frem viktigheten av en helhetlig tankegang i implementasjon av algebra på barneskolen, sentrert rundt praksiser for algebraisk tenkning som for eksempel generalisere og begrunne)(Blanton et al., 2019, s. 194). Denne studien viser at det er mulig å introdusere barneskoleelever for algebraiske praksiser som å representere, begrunne og generalisere, også med bruk av algebraisk notasjon.

Vi vil videre trekke frem Martinez og Pedemonte (2014), som er et eksempel på hvordan samspillet mellom aritmetisk argumentasjon og algebraisk notasjon kan hjelpe elever til å bevise sin hypotese. Martinez og hennes kolleger utviklet et oppgavesett sentrert rundt å finne og vise relasjonen mellom tallverdiene i et «datokvadrat» i en kalender (Martinez & Castro Superfine, 2012; Martinez & Pedemonte, 2014). De fant at disse oppgavene ga elevene en god mulighet til å lære om aspekter både ved bevis og algebra (Martinez & Castro Superfine, 2012, s. 143). Oppgavene ble designet blant annet for å fremme elevenes egne hypoteser og for å integrere algebraisk notasjon i oppgaver med bevis (Martinez & Castro Superfine, 2012, s. 125).

I løpet av eksperimentet bevegde samtlige elever seg fra induktiv argumentasjon med tallmønster til deduktivt algebraisk bevis (Martinez & Castro Superfine, 2012, s. 143). Elevene var fra start i stand til å sette opp en algebraisk ligning ut fra tallmønsteret de fant, men kunne ikke forstå hvordan det å løse likningen beviste hypotesen. Her oppstod det et kognitivt brudd mellom den induktive argumentasjonen som brukte aritmetiske referanser, og det deduktive beviset som brukte et annet referansesystem (algebra) (Martinez & Pedemonte, 2014, s. 137). Det var først da elevene skrev de algebraiske symbolene direkte inn i kalenderen (ved siden av datoene), at de ble i stand til å modellere generaliseringen på en slik måte at de selv så linken mellom det aritmetiske mønsteret og den algebraiske ligningen (Martinez & Pedemonte, 2014, s. 141). Begge referansesystemene eksisterte samtidig som støtte for argumentasjonen, og fungerte som en bro til den kognitive utfordringen som ligger mellom induktiv argumentasjon og deduktivt bevis (Martinez & Pedemonte, 2014, s. 147).

Dette markerer slutten på de tre delkapitlene som fokuserer eksplisitt på oppgavedesign. Et overordnet fellestrekk ved de nevnte oppgavene er at de legger opp til at elevene arbeider med egne hypoteser. Det er altså et mangfold av ulike oppgaver som gir elevene mulighet til å lage og validere egne hypoteser. I utvalget er det en tydelig overvekt av geometrioppgaver som er designet for å fremme dette, men analysen avslørte også oppgaver innenfor algebra som støttet elevenes arbeid med å lage og bevise egne hypoteser.

3.3.2 Bevis som verktøy for å generere og kommunisere kunnskap

I flere av studiene designet forskerne *miljø* hvor bevis kan sees på som et verktøy for å generere og kommunisere matematisk kunnskap i klasseromsfellesskapet (Kim & Ju, 2012; Komatsu & Jones, 2022; Lehrer et al., 2013; Mariotti, 2012, 2013). Slike intervensjoner er i sin natur omfattende og innebærer målrettet arbeid over tid. I design av et slikt miljø fremhever Lehrer et al. (2013, s. 365) en undersøkende tilnærming til undervisning, som kan gi elevene mulighet til å være agenter i egen matematisk læring. Lehrer et al. (2013) peker på at læreren spiller en kritisk rolle i å kultivere denne undersøkende tilnærmingen, noe som utdypes nærmere i kapittel 3.3.4. Et viktig resultat i studien var at klassen samarbeidet om å samle en liste av elevproduserte kriterier for gode spørsmål og hypoteser (Lehrer et al, 2013, s. 372). På den ene siden reflekterte kriteriene viktigheten av personlig ansvar, at spørsmålene og hypotesene må gi mening og kunne forstås av resten av klassen. På den andre siden reflekterte kriteriene en kollektiv orientering mot å bygge ny kunnskap i klassen (Lehrer et al, 2013, s. 372).

Med tilsvarende tilnærming gjennomførte Kim og Ju (2012) et langvarig prosjekt med Koreanske ungdomsskoleelever, som viste at elever kan delta aktivt i å produsere matematisk kunnskap gjennom bevis. Forfatterne beskriver hvordan elevene gikk fra å se på bevis som et ferdig produkt de mottok passivt, til å selv delta aktivt i den matematiske praksisen. Forfatterne hevder videre at denne endringen kan være mulig å realisere i en rekke lignende klasserom, da oppgavene og aktivitetene korresponderer til det man kan finne i et vanlig klasserom (Kim & Ju, 2012, s. 159). Det viktigste aspektet med oppgavene, i følge forfatterne, er at de legger opp til at hele klassen kan delta i å lage og teste en matematisk hypotese (Kim & Ju, 2012, s. 159). Gjennom aktivitetene formet elevene sin egen kultur og jobbet sammen i en kollektiv læringsprosess. Normer som utviklet seg i klassen var basert på antakelsen om at alle deltakere er i samme posisjon (Kim & Ju, 2012, s. 158). I klasseromsdiskusjonen var det eksplisitt forventet at den som førte argumentet skulle forklare slik at lytterne forstod. Av lytter ble det forventet å ikke trekke seg fra samtalen før argumentet ble tilstrekkelig forklart. Denne individuelle ansvarliggjøringen i samspill med kollektive orienteringen mot å søke ny kunnskap, var en sentral faktor i elevenes endring til å bli *en person som gjør matematikk* (Kim & Ju, 2012, s.

Vi kan oppsummere med at for at en klasse skal kunne bruke bevis som et verktøy for å generere og kommunisere kunnskap, må det kultiveres et miljø hvor den enkelte elev ansvarliggjøres samtidig som klassen orienteres mot å undersøke hypoteser i fellesskap.

3.3.3 Muligheter for å lære meta-kunnskap om bevis

Flere av studiene har en tilnærming hvor bevis eksplisitt undervises som en del av en teoretisk helhet, som gir elevene mulighet til å lære meta-kunnskap om bevis (Jahnke & Wambach, 2013; Mariotti, 2012, 2013; Miyazaki et al., 2015; Miyazaki et al., 2017). Mariotti (2012, s. 167) hevder at bevis ikke kan gi mening for elevene uten at det aksiomatiske systemet er eksplisitt undervist. Hun introduserer derfor forestillingen av *teorem* i sin tilnærming, bestående av en *påstand* og et *bevis* innenfor en *teori* hvor dette beviset gir mening (Mariotti, 2012, s. 167). Denne tilnærmingen gjenspeiles i eksperimentet med ungdomsskoleelever hvor elevene, under veiledning fra læreren, bygger ut et system av kommandoer i Cabri, som en parallell til geometri som system av teoremer (Mariotti 2012, s. 172). Elevene startet med Cabri-verktøy som korresponderer med utgangspunktet til Euklids geometri: linjal uten enheter, kompass og tilhørende antakelser om punkt og linje. Disse verktøyene ble brukt til å konstruere nye figurer, som for eksempel halvering av en vinkel. Elevene jobbet deretter, under veiledning fra lærer, med å validere denne konstruksjonen slik at det korresponderende teoremet kunne legges til klassens oppbygde teori. Denne nye konstruksjonen kunne deretter legges til systemet som en et tilgjengelig verktøy i videre konstruksjonsarbeid. På denne måten fikk elevene erfare og delta i to parallelle prosesser: på den ene siden, utvidelse av Cabri-menyen ved å legge til nye verktøy, og på den andre siden en korresponderende utvikling av en geometrisk teori ved å legge til nye aksepterte teorem (Mariotti, 2012, s. 172-173). Mariotti (2012, s. 181) konkluderer med at Cabri-systemet kan brukes til å introdusere elever for et teoretisk perspektiv, og da spesielt forestillingen om teorem. Cabri-verktøyene kan brukes til å utvikle elevenes forståelse av den logiske avhengigheten mellom premiss og konklusjon, relatert til betydningen av teorem (Mariotti, 2012, s. 181).

I likhet med Mariotti hevder Jahnke og Wambach (2013, s. 469) at den aksiomatiske organiseringen i matematikk må gjøres til et eksplisitt tema i ungdomsskolematematikk. Elever er ofte ikke klar over antakelsene som ligger til grunn for deduktive argumenter, og dette hindrer elevenes forståelse av bevis (Jahnke & Wambach, 2013, s. 469). For å adressere denne utfordringen gjennomførte forfatterne en intervensjon med elever på 8. trinn i Tyskland. De undersøkte om elevene gjennom deltakelse i intervensjonen fikk økt forståelse av hvordan en matematisk påstand er betinget (Jahnke & Wambach, 2013, s. 477). Forskerne introduserte elevene for konseptet *hypotese som en sentral epistemologisk idé* og konkluderer med at dette valget var fruktbart (Jahnke & Wambach, 2013, s. 481). Mye av arbeidet og diskusjonen i intervensjonen var sentrert rundt de antikke hypotesene knyttet til de greske astronomenes overbevisning om at solen gikk i bane rundt jorda. I arbeidet med disse hypotesene og deres implikasjoner, ble elevene bevisst på hvordan antakelser spiller inn i utvidelsen av en deduktiv teori (Jahnke & Wambach, 2013, s. 482). Det var tydelig at mange av elevene var interessert i epistemologiske diskusjoner om sannhetsverdien i en påstand, og at de hadde nok bakgrunnskunnskap til å utvikle meningsfulle ideer i disse diskusjonene. Forfatterne ser derfor ingen grunn til å utelukke slike samtaler om teoribygging fra matematikkundervisningen på ungdomsskolen (Jahnke & Wambach, 2013, s. 481).

3.3.4 Lærers rolle som veileder i den bevisrelaterte aktivitet

Mange av studiene trekker frem den uvurderlige rollen eksperten, det vil si læreren, har i å veilede den bevisrelaterte aktviteten. De øvrige temaene presentert i dette kapittelet kan sees i lys av dette overordnede tema. Mariotti (2013, s. 443) oppsummerer lærerens rolle som kritisk i hvert steg av den didaktiske syklusen: læreren må designe egnede oppgaver, observere og analysere elevens arbeid, og med utgangspunkt i dette designe og lede klasseromsdiskusjonen mot det ønskede læringsmålet.

Oppgavedesign er, som nevnt, et kritisk element for å støtte elevers læring av bevis, og flere av forfatterne påpeker lærerens rolle i implementering av oppgavene (Komatsu, 2017; Mariotti, 2012; Martinez & Pedemonte, 2014). Komatsu (2017, s. 142) konkluderer med at utover oppgavedesignet, var lærerens rolle i å implementere bevisoppgavene med diagram en kritisk suksessfaktor i intervensjonen. Forfatteren trekker frem tre sentrale muligheter for lærer i å implementere bevisoppgaver med diagram (Komatsu, 2017, s. 133). For det første bør læreren spørre elevene om å tegne diagram som er ulik de gitte diagrammene i oppgaven, noe som viste seg å være uunnværlig da ingen av elevene startet å undersøke eller tegne nye diagram uten lærerens etterspørsel (Komatsu, 2017, s. 142). For det andre må læreren stille spørsmål som retter elevenes oppmerksomhet mot å vurdere påstander og bevis, noe som gjorde elevene i stand til å artikulere skjulte betingelser i oppgaven og generalisere påstanden (Komatsu, 2017, s. 142). For det tredje kan læreren velge ut bestemte elever med gode ideer, og invitere disse til å dele sine ideer for klassen. Dette gjorde at elever som ikke hadde kommet i gang med å modifisere sine bevis, fikk delta i å modifisere et bevis, gjennom at eleven som delte sine ideer og samtalen som fulgte (Komatsu, 2017, s. 142). Diagramoppgaver med skjulte antakelser var altså ikke tilstrekkelig til å spontant engasjere elevene i å modifisere sine bevis, men de ga læreren rike muligheter til å støtte den bevisrelaterte aktiviteten til elevene.

Martinez og Pedemonte (2014, s. 147) påpeker også at læreren spilte en uunnværlig rolle i et kritisk punkt i elevenes arbeid med å bevise relasjonen mellom datoer i kalenderoppgavene. Det var ingen av elevene som kom videre til å bevise likningen de hadde satt opp i første oppgave, uten lærerens intervensjon (Martinez & Pedemonte, 2014, s. 147). Videre i arbeidet greide elevene selvstendig å konstruere bevis for sin hypotese, men lærerens initielle intervensjon var helt avgjørende for å få elevene på riktig spor.

Flere av studiene trekker frem grep som lærere kan benytte seg av for å fremme læring av bevis i klasseromsdiskusjoner, og for å kultivere normer for argumentasjon i klasserommet (Baldry et al., 2022; Cusi & Olsher, 2021; Kim & Ju, 2012; Lehrer et al., 2013; Makar et al., 2015; Mata-Pereira & da Ponte, 2017). Mata-Pereira & da Pontes (2017) undersøker grep lærer kan gjøre for å fremme elevers resonnering i klasseromsdiskusjon utløst av utforskende oppgaver. De lister opp en rekke grep lærere kan ta i bruk: spørre elever om å forklare *hvorfor*, be om alternative begrunnelser, peke på valideringskriterier og be elevene vurdere begrunnelser, oppmuntre til å dele ideer, trekke frem elevers forslag, fremheve generalisering, og utfordre elevene til å lage nye spørsmål og hypoteser ut fra oppgaven (Mata-Pereira and Ponte, 2017, p. 173). De konkluderer med at et enkelte grep ikke er nok til å fostre elevenes matematiske resonnering, men at et samspill mellom flere grep vil være nyttig.

Normer for argumentasjon bør komme eksplisitt frem i kommunikasjon mellom deltakerne i klasserommet, og dette er det læreren som må fasilitere (Kim & Ju, 2012; Lehrer et al., 2013; Makar et al., 2015, s. 1107). Når Kim og Ju (2012, s. 158), beskriver klasseromskulturen som lot elevene kollektivt bruke bevis som et verktøy for å praktisere og lære matematikk, påpeker de at denne kulturen er et produkt av forhandlinger. Videre fremhever de at den viktigste forhandlingen var lærerens uttrykte forventninger til, og målsetninger for klassen. Lærerens uttrykte forventninger og målsetninger ansvarliggjør den individuelle eleven og orienterer fellesskapet mot kollektive læringsmål. Tilsvarende fant Lehrer et al. (2013, s. 365) at lærerens grep var helt sentral for å kultivere undersøkende normer blant elevgruppen. Læreren implementerte en rekke grep for å fremme denne utviklingen: oppfordring til elevspørsmål, orientere elevene mot generalisering, fremheve deres gode spørsmål og hypoteser, peke eksplisitt på allerede kjent kunnskap som kan benyttes i videre undersøkelser (Lehrer et al., 2013, s. 365-367).

Lærers rolle i å veilede den bevisrelaterte aktiviteten er altså sentral i alle ledd av undervisningen: oppgavedesign, implementasjon av oppgavene, vurdering av elevenes argument, orientering av klassen mot felles kunnskapsbygging og lede diskusjoner som fremmer produktive normer for bevis. Lærere har flere muligheter til å lede klasseromsdiskusjoner som støtter læring av bevis, og kultivere normer for argumentasjon i sine klasserom.

4.0 Diskusjon

I det følgende kapittelet vil vi sammenfatte svar på forskningsspørsmålene og drøfte oversikten i sin helhet. Vi har utvalgt og analysert artikler i 12 av de mest anerkjente tidsskriftene innenfor matematikkdidaktikk, publisert de siste ti årene. Vi minner om at når vi diskuterer oversikten, med karakteristikker for klasseromsstudier og muligheter for å støtte læring av bevis, er dette innenfor hva disse tidsskriftene har inkludert i sine publikasjoner. I den grad de høyest rangerte tidsskriftene reflekterer forskningsfeltet som helhet, kan vi med denne oversikten indikere hvilke type muligheter forskningen har frembrakt de siste ti årene.

Det var totalt 32 studier som ble inkludert i oversikten, hvor 10 av de 12 tidsskriftene i søket avga relevante artikler. Vi kan ikke se en utvikling i antall aktuelle studier publisert i tidsrommet for vårt søk. ESM og ZDM, stod til sammen for 18 av studiene i utvalget, som utgjør over halvparten. Dette er ikke overraskende tatt i betraktning tidsskriftenes vektlegging av klasseromsintervensjoner gjennom hver sin dedikerte spesialutgave. Vi hadde ikke tilgang til å lese artikler i tidsskriftet JRME, som er rangert som en av de to desidert høyest anerkjente tidsskriftene, sammen med ESM. Likevel gjennomførte vi lesing av tittel, sammendrag og nøkkelord for alle artiklene publisert her i tidsrommet 2012-2022. Selv om vi gjerne skulle hatt tilgang til fulltekst, kan vi rapportere at den initielle screeningen bare avga to potensielle artikler.

4.1 Diskusjon av studienes karakteristikker

Oversikten viser at det er stor variasjon i hva som karakteriserer klasseromsintervensjoner om bevis de siste ti årene. Vi vil sammenfatte og diskutere noen av de viktigste funnene knyttet til forskningsspørsmål 1. Noen av karakteristikkene trekkes også frem i 4.3, som rammebetingelser i diskusjon av muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis.

Geometri er helt tydelig det dominerende matematiske tema for den bevisrelaterte aktiviteten i utvalget, og majoriteten av studiene har deltakere i ungdomsskolealder. Innenfor disse var det åtte studier som ble gjennomført i Japan, hvor samtlige handlet bevis i geometri med elever i 8.-9. trinn. Dette er ikke overraskende tatt i betraktning den japanske læreplanen, hvor de bevisrelaterte kompetansemålene er orientert mot geometri i begynnelsen av ungdomsskolen (Komatsu, 2017, s. 135). Basert på vårt utvalg kan vi si at det er behov for flere intervensjonsstudier som implementerer bevisrelaterte aktivitet innenfor andre tema enn geometri og med yngre elever.

Det er tydelig overvekt av studier med 1-4 undervisningsøkter, men det var også noen intervensjoner som gikk over flere år. Stylianides og Stylianides (2013) trekker frem korte og avgrensede intervensjoner som spesielt nyttig med tanke på anvendbarhet og oppskalering (Stylianides & Stylianides, 2013, s. 333) Det vil være krevende å implementere omfattende intervensjoner i et typisk klasserom, hvor tidspress og ressurshensyn er en del av lærerhverdagen. På den andre siden har korte intervensjoner også sine begrensninger, som Fan et al. (2017) påpeker. Dette var en av de mange intervensjonene i utvalget som handlet om geometri, og forfatterne skriver at de ikke fant en signifikant effekt av intervensjonen, og trekker frem intervensjonens korte tidsperiode som en mulig forklaring Fan et al. (2017, s. 245).

Til slutt vil vi trekke frem en rammebetingelse som skiller seg fra et typisk klasserom: mange av studiene (13) karakteriseres av at deltakerne har mye forkunnskap knyttet til den aktuelle bevisrelaterte aktiviteten. Dette står i kontrast til en typisk elevgruppe, i lys av det vi vet om elevers utbredte vanskeligheter knyttet til bevis (Stylianides & Stylianides, 2017)

4.2 Diskusjon av perspektiver og forståelsesramme for bevis

Blant de 22 studiene som har *bevis* som det sentrale begrepet ser vi et bredt spekter av bruk og forståelse av begrepet. De 16 studiene som eksplisitt avklarer begrepsbruken spenner mellom to ytterpunkter: fra en teoretisk og formell forståelse, for eksempel (Mariotti, 2012) og til å bruke ordet også om empiriske argumenter (Fiallo og Gutiérrez, 2017). De presenterte eksemplene illustrerer behovet for tydelig begrepsavklaring knyttet til *bevis* i matematikkdidaktikk. Fiallo og Gutiérrez (2017) bruk av begrepet bevis i det de kaller *empirisk bevis* kan virke helt uforenlig med en formell forståelse, skiller de tydelig og eksplisitt mellom dette og det de kaller *deduktive bevis.* Derfor er det mulig å forstå de to eksemplene i sammenheng, fordi begge avklarer tydelig hva de legge i i bruk av ordet *bevis.* Dette

Studiene fordeler seg ulikt utover det overnevnte spekteret, og den varierte begrepsbruken utvalget kan være forvirrende. Dette forsterkes av at seks studier i utvalget ikke har avklart tydelig sin bruk av begrepet bevis. Balacheff (2008, s. 501) hevder rett ut at situasjonen i det matematikkdidaktiske feltet er forvirrende, med dyptgående forskjeller i forståelse av bevis i en undervisningssammenheng. På dette punktet gjenspeiler dermed oversikten i vår studie situasjonen i feltet for øvrig.

4.3 Diskusjon av muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis

Når det gjelder forskningsspørsmål 3, identifiserte vi fire temaer for å støtte læring av bevis i grunnskolen: *oppgavedesign, bevis som verktøy for å generere og kommunisere kunnskap, læringsmuligheter knyttet til meta-kunnskap om bevis* og *lærers veiledning av den bevisrelaterte aktiviteten.* I det følgende vil vi sammenfatte noen av funnene og drøfte muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis (FS3) i lys av begrensninger knyttet til karakteristikker (FS1) diskutert i 4.1.

I oversikten presenteres et mangfold av ulike oppgaver som gir elevene mulighet til å lage og validere egne hypoteser. I utvalget er det en tydelig overvekt av geometrioppgaver som er designet for å fremme dette, men analysen avslørte også oppgaver innenfor algebra som støttet elevenes arbeid med egne hypoteser. Dette står i kontrast til oppgaver hvor både premisset og konklusjonen blir gitt på forhånd til elevene (for eksempel to-kolonnebevis), for å teste elevenes evne til å trekke slutninger fra premisset til konklusjonen. Slike oppgaver setter begrensinger for elevenes muligheter til å lage egne hypoteser (Herbst & Brach, 2006). I motsetning til dette fremheves utforskende oppgaver som en mulighet til å generere nye ideer, konstruere egne diagram og lage egne hypoteser ved å selv finne premisser og konklusjoner. En forutsetning for denne utforskende aktiviteten er at oppgavene inneholder skjulte antakelser som elevene kan oppdage med veiledning fra læreren (Komatsu et al., 2014a; Komatsu & Jones, 2022; Mariotti, 2013).

Det var flere studier i utvalget som utforsket muligheter for å kultivere normer for argumentasjon og utvikle miljø hvor bevis kan sees på som et *verktøy for å generere og kommunisere matematisk kunnskap i klasserommet.* En tydelig begrensning med overførbarheten av muligheter som rapporteres om i disse studiene er deres omfang, som nødvendigvis er stort når det er snakk om å endre klasseromskultur og orientere klassen mot kollektive mål. En annen viktig rammebetingelse med disse studiene er den implementerende lærerens ekspertise. Ofte ble intervensjonen ledet av en av forskerne eller av en svært kompetent lærer i tett samarbeid med lærerne. Enkelte studier viser at selv lærere som er kompetent i bevis, vil i en spontant undervisningssituasjon like ofte gi positiv evaluering til ugyldige bevis, som gyldige (Stylianides et al., 2017, s. 251). Dette understreker behovet for målrettet og grundig arbeid hvis en lærer vil kultivere produktive normer for bevis i klasserommet og stiller høye krav til lærerens pedagogiske og relasjonelle kompetanse.

En annen faktor som påvirker overførbarhet av de rapporterte mulighetene for læring, er deltakernes forkunnskaper. Det var 13 av studiene som hadde deltakere med mye forkunnskaper. Flere av forfatterne kommentere også at mulighetene som kommer frem i studien ikke kan generaliseres, med eksplisitt referanse til elevenes forkunnskaper.

Yopp (2017, 2020) utviklet en spennende tilnærming til undervisning av kontrapositivt bevis, som gikk ut på å utforske og eliminere mulige moteksempel (Yopp, 2017, 2020; Yopp et al., 2020). Yopp fant at tilnærmingen har potensiale til å forbedre elevenes evne til å konstruere og vurdere kontrapositive bevis, men at elevene i studien hadde tydelige utfordringer med arbeidet, til tross for den omfattende treningen de hadde i å skrive bevis fra deltakelse i foregående forskningsprosjekt (Yopp, 2017, s. 165; Yopp et al., 2020, s. 14–15). I lys av dette stiller Yopp (2020) spørsmålstegn ved hvor mye indirekte resonneringsaktivitet ungdomsskoleelever må utsettes for før de kan forbedre sin kontrapositive resonnering (Yopp, 2020, s. 15). Tatt i betraktning at flere elever under omfattende og målrettet trening hadde lite eller ingen forbedring i sin kontrapositive bevisføring, kan vi stille spørsmålstegn ved muligheten for å lære indirekte resonnering i en typisk ungdomsskoleklasse.

Vi vil avrunde diskusjonskapittelet på en positiv tone, i det vi understreker at mange av studiene i utvalget viser at den ønskede effekten i intervensjonen er *mulig* med en elevgruppe i en gitt alder. Selv om forfatterne naturligvis er forsiktig med å generalisere, er det likevel oppmuntrende at grunnskoleelever har *mulighet* til å lære om bevis. Mariott (2012) viser at det er mulig å introdusere ungdomsskoleelever for et teoretisk perspektiv for bevis og elever på 8. trinn kan utvikle en forståelse for relasjonen mellom premiss og konklusjon (Jahnke & Wambach, 2013). (Blanton et al., 2019) fant at elever på 3. trinn er i stand til å generalisere og begrunne, også ved bruk av variabelnotasjon. Kim og Ju (2012, s. 158) rapporterte flere positive endringer i elevenes holdninger og kompetanse knyttet til bevis, hvor elevene etter tre år hadde vokst til å bli det forfatterne kaller *mennesker som beviser*. Omfanget og rammene til dette eksperimentet korresponderer med de tre ungdomsskoleårene i norsk skolegang. Dermed kan intervensjonen sees på som en bekreftelse av at det er *mulig* å kultivere et fellesskap hvor grunnskoleelever får erfare hvordan det er å være *personer som gjør matematikk.*

5.0 Avslutning

Som nevnt innledningsvis er det godt dokumentert at bevis i grunnskolen er: ansett som viktig, underrepresentert og utfordrende for både elever og lærere. Videre er det relativt lite forskning som adresserer utfordringer knyttet til læring og undervisning av bevis. Vi har i denne studien frembrakt en oversikt over nyere studier som utforsker muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis, samt hva som karakteriserer rammene for disse studiene. Når vi ser nærmere på rammene som ligger til grunn for mange av studiene, med tanke på omfang, deltakernes forkunnskaper og lærerens ekspertise, er det tydelig at undervisning av bevis i grunnskolen ikke er en liten oppgave. Mulighetene som beskrives i utvalget illustrerer i flere tilfeller hvor krevende det er å undervise om bevis i grunnskolen. Selv om disse ikke nødvendigvis sier noe om hva som er realistisk i en typisk elevgruppe, vil vi fremheve at mange av klasseromsstudiene viser at læring av bevis er *mulig* for grunnskoleelever. Det faktum at det *eksisterer* muligheter for fruktbar undervisning knyttet til bevis er oppmuntrende, og vi slutter oss til Stylianides og Stylianides (2017) uttrykte håp om en solid kunnskapsbase om dette tema i fremtiden.

Basert på studiens resultater vil vi peke på to mulige tiltak med potensielt høy gevinst. For det første vil vi anbefale å utvikle læreverk som kan støtte lærere i valg og design av egnede bevisrelaterte aktiviteter. Betydningen av oppgavedesign kom frem som et overordnet tema i oversikten, og et kritisk element i å støtte elevers læring av bevis. For det andre vil vi anbefale å legge mer vekt på å utvikle lærerstudenters holdninger og kunnskap om bevis, og dets rolle i læring av matematikk i grunnskolen. Lærers rolle i å fasilitere og veilede den bevisrelaterte aktiviteten, i alle ledd av læringsprosessen, er det tydeligste temaet som kom frem i vår analyse. Vi vet at lærere ofte har svak kunnskap om bevis og kontraproduktive holdninger knyttet til bevis og dets rolle i elevers matematiske læring (Styl et al 2017, s. 251). Derfor fremstår det som særdeles viktig å forberede lærerstudenter på deres fremtidige rolle som ekspert i det matematiske klasseromsfellesskapet.

Vi vil hevde at et norsk litteraturstudie, som tydelig trekker frem sentrale muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis, kan fungere som et utgangspunkt for lærerstudenter som ønsker å utforske disse mulighetene. Dette sier vi uten å hevde at vår studie utgjør et slikt utgangspunkt, da denne studien har begrensninger når det gjelder metodevalg og omfang. For det første valgte vi å bare bruke begrepet «proof» (sammen med «classroom» OR «intervention») i vårt søk, da vi antok at forfattere av relevante studier i det minste nevnte begrepet, om ikke annet for å skille sin bevisrelaterte aktivitet fra en formell forståelse av bevis. Dermed kan vi ha gått glipp av noen studier som utelukkende brukte andre ord som «argumentation» eller «mathematical reasoning», ord som kanskje er mer vanlig å bruke om unge elevers bevisrelaterte aktivitet. For det andre valgte vi å avgrense oss til fagvellevurderte artikler publisert i høyt rangerte tidsskrift de siste 10 årene. Dette gjorde vi til dels av hensyn til ressurser og et ønske om å prioritere høy kvalitet innenfor rammen av studien. Underveis i studien fant vi mange ellers relevante klasseromsintervensjoner, både i tidligere oversiktsstudier og i henvisninger i utvalget, som ikke ble inkludert på grunn av våre rammer. Det finnes antagelig en rekke intervensjonsstudier knyttet til læring av bevis publisert i andre tidsskrift, samlinger av konferansepapirer eller i bøker. Vi vil derfor oppfordre til at forfattere av fremtidige litteraturstudier om samme tema vurderer et utvidet søk etter potensielle studier. Vår studie belyser et mangfold av muligheter for å fremme læring av et viktig og utfordrende emne innenfor grunnskolematematikken. Videre forskning i form av et utvidet litteraturstudie med tilsvarende fokus, kan gi en enda bedre oversikt over muligheter for å støtte grunnskoleelevers læring av bevis.

6.0 Litteraturliste

Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 359–382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Balacheff, N. (1988, november 5). *A study of students' proving processes at the junior high-school level*.

Baldry, F., Mann, J., Horsman, R., Koiwa, D., & Foster, C. (2022). The use of carefully planned board work to support the productive discussion of multiple student responses in a Japanese problem-solving lesson. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09511-6

Barnes, A. (2019). Perseverance in mathematical reasoning: The role of children's conative focus in the productive interplay between cognition and affect. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 271–294. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1590229

Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(2), 193–219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.).

Carroll, C., & Booth, A. (2015). Quality assessment of qualitative evidence for systematic review and synthesis: Is it meaningful, and if so, how should it be performed? *Research Synthesis Methods*, *6*(2), 149–154. https://doi.org/10.1002/jrsm.1128

Chen, C.-L., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 285–307. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9454-2

Cusi, A., & Olsher, S. (2021). Design of Classroom Discussions and the Role of the Expert in Fostering an Effective and Aware Use of Examples as a Means of Argumentation. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10201-1

De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.

Fan, L., Qi, C., Liu, X., Wang, Y., & Lin, M. (2017). Does a transformation approach improve students' ability in constructing auxiliary lines for solving geometric problems? An intervention-based study with two Chinese classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 229–248. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9772-5

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 145–167. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6

Fujita, T., Jones, K., & Miyazaki, M. (2018). Learners' use of domain-specific computer-based feedback to overcome logical circularity in deductive proving in geometry. *ZDM*, *50*(4), 699–713. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0950-4

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. *ZDM*, *40*, 345–353. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0080-5

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (s. 877–908). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805–842.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396–428.

https://doi.org/10.2307/749651

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and Doing Proofs in High School Geometry Classes: What Is It That Is Going On for Students? *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73–122. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2401_2

Jahnke, H. N., & Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: A classroom-based approach. *ZDM*, *45*(3), 469–482. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0502-x

Kim, D., & Ju, M.-K. (2012). A changing trajectory of proof learning in the geometry inquiry classroom. *ZDM*, *44*(2), 149–160. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0411-4

Komatsu, K. (2017a). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 129–144. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9731-6

Komatsu, K. (2017b). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 129–144. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9731-6

Komatsu, K., & Jones, K. (2022a). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(3), 567–591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Komatsu, K., & Jones, K. (2022b). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(3), 567–591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 1–15. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.002

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., & Sakamaki, A. (2014). Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(7), 1053–1067. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.902135

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., Sakamaki, A., & Koike, N. (2014). *PROOF PROBLEMS WITH DIAGRAMS: AN OPPORTUNITY FOR EXPERIENCING PROOFS AND REFUTATIONS*. 36–42.

Lehrer, R., Kobiela, M., & Weinberg, P. J. (2013). Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics classroom. *ZDM*, *45*(3), 365–376. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0479-x

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM*, *47*(7), 1107–1120. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0732-1

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. I *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (s. 173–204). Brill Sense.

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163–185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A. (2013a). Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM*, *45*(3), 441–452. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5

Mariotti, M. A. (2013b). Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM*, *45*(3), 441–452. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5

Martinez, M. V., Brizuela, B. M., & Superfine, A. C. (2011). Integrating algebra and proof in high school mathematics: An exploratory study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(1), 30–47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.002

Martinez, M. V., & Castro Superfine, A. (2012). Integrating Algebra and Proof in High School: Students' Work with Multiple Variables and a Single Parameter in a Proof Context. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(2), 120–148. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.657956

Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 125–149. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9530-2

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J.-P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169–186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

McFeetors, P. J., & Palfy, K. (2018). Educative experiences in a games context: Supporting emerging reasoning in elementary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 103–125. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.003

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM*, *47*(7), 1211–1224. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0712-5

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223–239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

Morris, A. K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' Ability to Make the Inductive-Deductive Distinction. *Cognition and Instruction*, *20*(1), 79–118. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2001_4

Moutsios-Rentzos, A., Spyrou, P., & Peteinara, A. (2014). The objectification of the right-angled triangle in the teaching of the Pythagorean Theorem: An empirical investigation. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 29–51. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9498-y

Ng, O.-L., & Sinclair, N. (2015). "Area Without Numbers": Using Touchscreen Dynamic Geometry to Reason About Shape. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *15*(1), 84–101. https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993048

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaff, J. M., Akl, E. A., Brennan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo-Wilson, E., McDonald, S., … Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ*, n71. https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Reid, D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5–29. https://doi.org/10.2307/749867

Shinno, Y., & Fujita, T. (2021). Characterizing how and when a way of proving develops in a primary mathematics classroom: A commognitive approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *0*(0), 1–26. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941365

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: Classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM*, *45*(3), 333–341. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0501-y

Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., & Weber, K. (2017). *Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward*.

Stylianides, & Stylianides. (2017). Research-based interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119–127.

Tranfield, D., Denyer, D., & Smart, P. (2003). Towards a Methodology for Developing Evidence-Informed Management Knowledge by Means of Systematic Review. *British Journal of Management*, *14*(3), 207–222. https://doi.org/10.1111/1467-8551.00375

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden*, *14*(3), 18 sider-18 sider. https://doi.org/10.5617/adno.8195

Williams, S. R., & Leatham, K. R. (2017). Journal Quality in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(4), 369–396.

https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.4.0369

Yopp, D. A. (2017). Eliminating counterexamples: A Grade 8 student’s learning trajectory for contrapositive proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 150–166. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.01.003

Yopp, D. A. (2020). Eliminating counterexamples: An intervention for improving adolescents’ contrapositive reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100794. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100794

Yopp, D. A., Ely, R., Adams, A. E., Nielsen, A. W., & Corwine, E. C. (2020). Eliminating counterexamples: A case study intervention for improving adolescents’ ability to critique direct arguments. *The Journal of Mathematical Behavior*, *57*, 100751. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100751

7.0 Oversiktsliste for tabeller og figurer

7.1 Tabeller

7.2 Figurer