Anne Lise Forfod Gjessing

# Barns bruk av tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk

## En kvalitativ studie som undersøker hvordan tredjeklassinger bruker tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Benedikte Grimeland, Yvonne Grimeland, Torunn Klemp, Oda Tingstad Burheim
Juni 2022

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Anne Lise Forfod Gjessing

# Barns bruk av tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk

## En kvalitativ studie som undersøker hvordan tredjeklassinger bruker tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Benedikte Grimeland, Yvonne Grimeland, Torunn Klemp, Oda Tingstad Burheim
Juni 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

**Forord**

Foran meg ligger nå oppgaven som er prikken over I'en og selve avslutningen på mine fem år som lærerstudent. Masteroppgaven har vært krevende, prosessen har vært preget av både opp- og nedturer, men det har også vært spennende og lærerikt. Og nå sitter jeg her med en oppgave jeg både er fornøyd med og stolt over.

Valg av tema til oppgaven falt på barns bruk av tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk. Personlig synes jeg dette temaet er svært interessant, samtidig som det er et viktig tema for matematikkundervisning og læring på barnetrinnet. Tegning som både et problemløsnings- og kommunikasjonsverktøy bør vektlegges i større grad i matematikklasserommet, og jeg synes man bør bli mer bevisst det potensialet tegning har for å få innblikk i barns tenkning og forståelse i matematikk.

Jeg vil takke alle de som har hjulpet meg og støttet meg underveis. Takk til veilederne mine; Benedikte, Yvonne, Torunn og Oda. Takk for gode tilbakemeldinger og et godt samarbeid. Det hadde ikke vært mulig uten dere!

En spesiell takk til skolen og praksislæreren som tok meg godt imot, og var samarbeidsvillig og positiv hele veien. Takk også til de åtte elevene som deltok i studien, uten dere ville det ikke vært en studie.

Til slutt vil jeg takke familien min og gode venner – for at dere har stilt opp for meg, og bidratt med oppmuntrende ord når jeg har trengt det som mest. Til samboeren min; du har vært helt enestående, jeg vet jeg ikke har vært enkel å leve med de siste månedene, men nå er det heldigvis over, og du må vite at jeg setter enormt stor pris på all støtte og oppmuntrende ord du har kommet med i denne perioden.

Fannrem, 2022

Anne Lise Forfod Gjessing

## Sammendrag

Studien setter søkelys på barns bruk av tegning i matematikk. Hensikten med studien er å si noe om hvordan elever på tredje trinn bruker tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk. Studiens forskningsspørsmål er: *hvordan bruker tredjeklassinger tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk?*

Den metodologiske tilnærmingen til oppgaven er kvalitativ. Studien består av observasjon og elevarbeid, samt samtale rundt barnas egenproduserte representasjoner. Åtte tredjeklassinger var deltakere i studien. Elevene løste åtte problemløsningsoppgaver. Det ble samlet inn totalt 21 elevtegninger og gjennomført fem samtaler, hvor det ble gjort lydopptak og transkripsjoner. I samtalen ble elevene stilt oppfølgingsspørsmål som hadde til hensikt å få elevene til å utdype og argumentere for sin løsning.

Med utgangspunkt i funn i datamaterialet ble det lagd passende kategorier, ut ifra allerede eksisterende teorier om barns bruk av tegning i problemløsning, utarbeidet av blant andre Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020). De ulike resonneringskategoriene som ble funnet i datamaterialet var tegning som informasjonsholder, konkretiseringsmateriale, utforskingsverktøy og telleverktøy. Når det kom til hvordan elevene brukte tegningen i argumentasjon, ble det tatt utgangspunkt i allerede eksisterende rammeverk, og derav Krummheuers (1995) rammeverk om argumentasjon. Det ble funnet to ulike måter tegningen fungerte på i argumentasjonen; tegning som startpunkt for argumentasjon, og tegning som direkte del av argumentasjon.

Resultatene mine viser at elevene brukte tegning både som et problemløsningsverktøy og som et kommunikasjonsverktøy. Hele 18 av 21 tegninger ble brukt aktivt under problemløsningen, som et verktøy for elevene i resonneringsprosessen. Elevene brukte tegningen til å visualisere sin tenkning, og kommunisere sin forståelse til andre. Elevene argumenterte med utgangspunkt i tegningen, enten ved at tegningen fungerte som et startpunkt for argumentasjon, eller ved at en del av tegningen fungerte som data, konklusjon, garanti eller akseptert kunnskap. Hele 15 av 18 argumentasjoner ble regnet som et fullverdig argument, og 11 av argumentasjonene inneholdt alle delene i argumentasjonsmodellen. Funnene mine viser at tegning har et stort potensial i matematikkundervisning og læring, da det er et nyttig verktøy både i problemløsning og kommunikasjon.

**Abstract**

This MA thesis focuses on children's use of drawing in mathematics. The purpose of the study is to say something about how third-grade students use self-produced representations in reasoning and argumentation in mathematics. The study's research question is: how do third graders use drawing in reasoning and argumentation in mathematics?

A qualitative method was used. The study consists of observation and student work, as well as conversations around the children's self-produced representations. Eight third graders were participants in the study. The students solved eight problem-solving tasks. A total of 21 student drawings were collected and five conversations were conducted, where audio recordings and transcripts were made. In the conversation, the students were asked follow-up questions that were intended to get the students to elaborate and justify their solution.

Based on the findings in data material, appropriate categories were created. These concerned already existing theories about children's use of drawing in problem solving, developed, among others, by Saundry and Nicol (2006) and Dahl (2020). The reasoning categories found in the data material were drawing as information holders, concretization materials, exploration tools and counting tools. When it came to how the students used drawing in argumentation, the fundamental basis was already existing frameworks, hence the use of Krummheuers (1995) framework on argumentation. Drawing was used in the argument in two different ways: as a starting point for argumentation and as a direct part of argumentation.

The results show that the students used drawing both as a problem-solving tool and as a communication tool. During the problem-solving process, 18 of the 21 drawings were actively used as a tool for the students in the reasoning process. Students used the drawing to visualize their thinking and communicate their understanding to others. The students argued on the basis of the drawing, either in that the drawing functioned as a starting point for argumentation, or in that part of the drawing functioned as data, conclusion, guarantee or accepted knowledge. Eleven of the arguments contained all of the features of the argumentation model, and 15 of the 18 arguments were considered complete arguments. Drawing, as a useful tool in both problem solving and communication, has a lot of potential in mathematics teaching and learning, according to my findings.

## Innholdsfortegnelse

**Figuroversikt**

**Tabelloversikt**

## 1.0 Innledning

Tegning er en svært populær aktivitet for barn, spesielt i tidlig alder. De gjør det for mange ulike formål, det kan være gjennom lek eller andre hverdagslige aktiviteter i hjemmet eller på skolen (Papandreou, 2014, s. 85). Crespo og Kyriakides (2007, s. 118) skriver at barn utvikler evnen til å tegne lenge før de lærer å skrive. Tegning kan derfor anses å være en av barns tidligste representasjoner i matematikk, og kan bli sett på som en av de første aktivitetene som gir barn muligheten til å uttrykke seg og kommunisere sine ideer til andre (Brooks, 2009, s. 319). Forskning viser at tegning er et viktig verktøy i matematikk, både som et verktøy i problemløsning og et verktøy i kommunikasjon (Bakar et al., 2016; Brooks, 2009; Dahl, 2020; Papandreou, 2014; Saundry og Nicol, 2006; Woleck, 2001). Tegningen hjelper elevene å løse matematiske problemer, og uttrykke sin tenkning ved å visualisere og kommunisere den til andre. Forskning viser at visuelle representasjoner, slik som tegning, ofte benyttes i situasjoner hvor det verbale språket ikke strekker til (Boaler et al., 2016; Papandreou, 2014). Edens og Potter (2001) antyder at det finnes et positivt forhold mellom tegning og akademisk oppnåelse. Selv om det ikke finnes konkrete bevis på at det ene fører til det andre, viser annen forskning at de som bruker tegning i større grad finner korrekt løsning på problemet de jobber med (Bakar et al., 2016).

Til tross for dette, viser noe forskning at det allikevel ikke blir anerkjent eller vektlagt i klasserommet. Visuell matematikk og tegning har lav status i matematikklasserommet (Bakar et al., 2016; Boaler et al., 2016). Boaler et al. (2016, s. 4) sier at mange anser den visuelle matematikken til å kun tilhøre matematikk på lavt nivå, for yngre elever eller elever som strever. Tanken er at den visuelle matematikken skal erstattes av «den mer viktige» abstrakte matematikken, slik Boaler et al. (2016, s. 4) kaller det. De elevene som anerkjennes i matematikklasserommet er ikke de elevene som er gode på å produsere visuelle representasjoner, men de elevene som memorerer og regner godt (Boaler et al., 2016, s. 4). Papandreou (2014, s. 85) sier at mange voksne og lærere ikke ser på tegning som like viktig som skriving og lesing.

Temaet for oppgaven min er elevers bruk av tegning i matematikk, hvor fokuset rettes mot hvordan barn på småtrinnet bruker tegning i resonnering og argumentasjon. Det finnes en del forskning på bruk av tegning i matematikk, spesielt hvordan barn bruker tegning i resonnering i matematikk. Det finnes derimot langt mindre forskning som sier noe om hvordan barn bruker tegning i argumentasjon. Den forskningen som finnes på argumentasjon, sier at argumentasjon er for avansert for elever på barnetrinnet, og derfor kun tilhører de høyere klassetrinnene (Krummheuer, 1995, s. 236-237). Jeg håper jeg etter studien kan si noe om hvordan elever på småtrinnet bruker tegning, og hvorvidt tegning er et viktig verktøy for elevene i resonnering og argumentasjon. Ønske med denne studien er derfor å prøve å få ny og/eller mer innsikt i, og kunnskap om tegning som verktøy for barn i matematikk.

Problemstillingen som ble formulert ut ifra dette er: *hvordan bruker tredjeklassinger tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk?* Med dette menes at jeg skal prøve å belyse hvordan elevene bruker tegningen når de arbeider med problemløsningsoppgaver, både hvordan tegningen blir brukt i problemløsning, men også hvordan tegningen hjelper eller ikke hjelper elevene i argumentasjon.

Dette temaet er aktuelt da det finnes svært lite forskning på feltet. Det finnes som nevnt ovenfor, noe forskning på tegning i resonnering, og noe på tegning i argumentasjon, men jeg har ikke funnet noe forskning på tegning i resonnering og argumentasjon, altså med de to aspektene sammen. Det er dette jeg ønsker å se mer på og prøve å belyse i min studie, slik at vi kanskje får mer kunnskap og innsikt i hvilken rolle tegning kan ha i barns resonnering og argumentasjon.

Det første jeg kommer til å gjøre er å presentere studiens teoretiske grunnlag. Teori om problemløsning, og representasjoner i matematikk, samt visuelle representasjoner vil bli presentert før jeg går over til å presentere teori om elevenes tegninger og dens potensial. Det finnes flere syn på resonnering og argumentasjon i matematikk, men jeg har valgt Lithners (2008) definisjon, og Krummheuers (1995) definisjon på argumentasjon. Deres definisjoner vil bli presentert, før det teoretiske rammeverket, med resonneringskategorier fra Dahl (2020) og Saundry og Nicol (2006), og argumentasjonsmodellen til Krummheuer (1995) blir redegjort for. Deretter avslutter jeg teorikapitlet med å presentere hvilken tidligere forskning som finnes på tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk.

Datamaterialet til studien består av video- og lydopptak, observasjon, innhenting av elevarbeid og samtale rundt disse elevarbeidene. Deltakerne i studien er åtte tredjeklassinger. Disse elevene gjennomførte åtte problemløsningsoppgaver, innenfor ulike tema i matematikk. Datamaterialet ble kategorisert etter hvordan elevene brukte tegningen i resonneringen, og hvordan den ble brukt i argumentasjon. Ut fra analysen av det innsamlede datamaterialet vil jeg drøfte funnene mine opp mot relevant teori, før jeg til slutt vil komme med noen konklusjoner og forsøke å svare på problemstillingen min. Avslutningsvis vil jeg prøve å si noe om studiens pedagogiske implikasjoner, før jeg kommer med noen forslag til videre forskning.

## 2.0 Teorikapittel

Jeg er klar over at Krummheuer (1995) vektlegger samhandling. Selv om det ikke kommer tydelig frem hvilket læringssyn han tilhører, kan man anta at han tilhører den sosiokulturelle læringsteorien. Dette passer med min studie, da det er gjennom samhandling at jeg får innblikk i elevenes forståelse og tenkning rundt hvordan de bruker tegning i resonnering og argumentasjon.

Studien min omhandler barns bruk av tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk. Før jeg går inn på det ønsker jeg å si noe om hva problemløsning er og hva problemløsningsoppgaver i matematikk kan være, da oppgavene brukt i studien kan defineres som problemløsningsoppgaver. Videre kommer jeg til å si noe om representasjoner i matematikk, samt visuelle representasjoner, før jeg går over til å redegjøre for barns tegninger i matematikk og det potensiale tegning kan ha. Deretter gjør jeg rede for begrepene resonnering og argumentasjon, samt presenterer det teoretiske rammeverket brukt i studien. Avslutningsvis tar jeg for meg tidligere forskning som finnes innenfor tegning i resonnering og argumentasjon.

### 2.1Problemløsning

Det finnes flere ulike definisjoner av problemløsning, men Palmér (2014) sin definisjon passet best i min studie. Ifølge Palmér handler problemløsning i matematikk om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Hun definerer videre at en problemløsningsoppgave er en «oppgave hvor metoden(e) for å løse den ikke er kjent på forhånd» (Palmér, 2014, s. 256). Med dette menes at elevene selv må utforske og utarbeide strategier og fremgangsmåter for å finne løsningen på problemet. Det omhandler at elevene må analysere problemet og bruke tidligere kjente kunnskaper, for å prøve å løse det (Palmér, 2014, s. 256).

I arbeid med problemløsningsoppgaver må elevene være kreative, undersøke og prøve ut strategier og fremgangsmåter for å prøve å finne en løsning på problemet. Problemløsning er derfor det problemløseren gjør for å finne en løsning på et matematisk problem (Palmér, 2014, s. 256).

Problemløsning handler ikke bare om å bruke matematiske ferdigheter på en god måte, men også om å tolke, beskrive og forklare situasjoner matematisk (Palmér, 2014, s. 256). Med dette menes at elevene ikke bare skal kunne anvende matematiske ferdigheter, men at de også må være i stand til å tolke et problem og vite hvordan de skal gå frem for å løse det. Det handler om at elevene må bearbeide og selv finne en løsning på problemet, for at de skal kunne klare å beskrive det.

### 2.2 Teori om representasjoner

#### 2.2.1 Representasjoner

Representasjoner i matematikk kan være fysiske objekter (konkreter, modeller), tegninger, diagrammer, tabeller, symboler eller ulike typer verbale utsagn (Bobis & Way, 2018, s. 57; Enge & Valenta, 2013, s. 8). Det som er unikt og skiller matematikkfaget fra andre fag, er at matematikken kun er tilgjengelig for oss gjennom representasjoner. Dahl (2020, s. 195) sier at «en representasjon er noe som står for noe annet». I matematikk er alle objekter abstrakte, det vil si at vi verken kan ta eller føle på dem, eller undersøke dem direkte med instrumenter eller verktøy (Dahl, 2020, s. 195). Det er kun gjennom matematiske representasjoner, at aspekter ved de matematiske objektene lar seg (re)presentere (Dahl, 2020, s. 195). For eksempel kan det matematiske objektet vi betegner som «ti», representeres som ti streker, ti klosser, tallsymbolet 10 eller tallordet «ti».

Forskning viser at bruken av representasjoner kan ha positiv effekt i undervisning og læring. Representasjoner blir sett på som et verktøy som hjelper barna å konstruere forståelse for matematiske ideer, begreper og problemer (Bakar et al., 2016; Dahl, 2020, Woleck, 2001). Gjennom representasjoner får de synliggjort, begrunnet og kommunisert sin tenkning og forståelse til andre (Bakar et al., 2016; Dahl, 2020, Woleck, 2001). Når representasjonene skal tjene dette formålet, er elevenes egenproduserte, ikke-standardiserte representasjoner best egnet. Dette da de ikke-standardiserte og egenproduserte representasjonene i større grad lar seg tilpasse, og reflekterer barnas forståelse mer korrekt enn de standardiserte representasjonene (Bobis & Way, 2018, s. 58).

### 2.2.2 Visuelle representasjoner

Letnes (2017, s. 113) forstår visualisering i forskningsrapporter, artikler og avhandlinger som ikke bare illustrasjoner, men at visualiseringen bidrar for å få en dypere forståelse og kommunisere og synliggjøre denne forståelsen for andre. Hun mener at visuelle representasjoner bør sees på som et språk (Letnes, 2017, s. 117). Dette fordi visuelle representasjoner er (re)presentasjoner av menneskelig kunnskap (Letnes, 2017, s. 117). Med dette menes at man gjennom visuelle representasjoner kan få kommunisert en indre, abstrakt forståelse, til en mer konkret og håndfast forståelse som kan kommuniseres til andre. De visuelle representasjonene er ikke kun illustrasjoner som fungerer som pynt, men har en funksjon ved at den gir oss ytterligere kunnskap og forståelse.

Boaler et al. (2016, s. 3) skriver i sin artikkel, at ofte når vi mennesker prøver å forklare noe, og vi ikke finner de ordene vi trenger for å få det til, prøver vi å forklare ved å visualisere vår tenkning, gjennom bruk av visuelle representasjoner. Med dette menes at vi tar i bruk visuelle representasjoner for å få illustrert og synliggjort den tenkningen vi sitter med innvendig, for å kunne kommunisere denne tenkningen til andre. Med andre ord blir det en konkretisering av det abstraktet. Tegning kan være en slik representasjon.

## 2.3 Barns tegninger og dets potensial

Tegning er en stor del av barns liv. Det er en aktivitet de gjør lenge før de begynner på skolen. Elevene bruker tegningen til å uttrykke hvordan de tenker og forstår verden rundt seg. Det er en aktivitet barna selv innleder til, og som er drevet av deres egen motivasjon for å tegne. Tegning kan derfor regnes å være et naturlig aspekt ved barns fantasifulle og uttrykksfulle utvikling (Bakar et al., 2016, s. 86). De lærer å tegne lenge før de lærer å skrive (Crespo & Kyriakides, 2007, s. 118), og tegning er en svært populær aktivitet blant unge barn (Papandreou, 2014, s. 85). De gjør det for ulike formål, både hjemme og på skolen (Papandreou, 2014, s. 85). Gjennom tegning får elevene brakt sine ideer til overflaten, noe som gjør både dem selv og andre i stand til å se hva de tenker (Brooks, 2009; Woleck, 2001).

På grunn av dette, anses tegning å være den første representasjonen barn har til «å lage en håndfast, konkret og kommuniserbar oversikt over ideene og tankene sine» (Brooks, 2009, s. 319). For små barn som ikke har ferdigutviklet språket, og som er ute av stand til å uttrykke seg og kommunisere enkelt og effektivt gjennom verbalt språk, kan tegning hjelpe dem med å overkomme de begrensningene dette måtte medføre i kommunikasjon med andre (Papandreou, 2014, s. 88). Dette kan være en av grunnene til at de fleste små barn har et sterkt ønske om å tegne.

Det å tegne for «gøy», uten noen hensikt, er ikke det samme som å tegne for et matematisk formål. Bakar et al (2016, s. 91) sier at tegningens endrende funksjon, fra et personlig uttrykk til tegning for et spesifikt formål, kan være vanskelig for barna. Selv om barna er kjent med tegning, er de ikke kjent med hvordan de skal lage matematiske tegninger. Dette krever at elevene har en forståelse for, og kunnskap rundt hvordan de kan bruke tegningen for et matematisk formål, noe som må læres.

Tegning er bredt anerkjent som et visuelt språk som hjelper barn å få ned sine tanker og ideer og kommunisere de med andre (Brooks, 2009; Woleck, 2001, Papandreou, 2014). Woleck (2001, s. 215) sier at «tegningen kan være et vindu inn i barns tanker». Barna får visualisert sin tenkning gjennom tegningen, både for seg selv og for andre. Derfor har tegning et stort potensial i undervisning og læring i matematikk. Forskning viser at tegning er et viktig kommunikasjonsverktøy og problemløsningsverktøy i matematikk (Bakar et al., 2016; Brooks, 2009; Dahl, 2020; Papandreou, 2014; Saundry og Nicol, 2006; Woleck, 2001), da det tillater dem å leke med og utforske ideene sine og uttrykke dem til andre (Brooks, 2009, s. 319).

For at man skal klare å utnytte tegningens fulle potensiale, er det helt sentralt å anse tegning som et dynamisk verktøy, heller enn en statisk representasjon. Tegningen støtter barnet i den matematiske tenkningen, for så å hjelpe barnet å kommunisere denne tenkningen til andre (Woleck, 2001, s. 224-225). Språket anses å være helt sentralt for at elevene skal få uttrykt sin tenkning til andre (Papandreou, 2014, Woleck, 2001). Det er gjennom den samtalen man har rundt elevenes tegninger som gir andre innsikt i barnets forståelse og tenkning (Woleck, 2001, s. 225). Dette er helt vesentlig for at tegning som en matematisk aktivitet kan få utnytt sitt fulle potensial. Tegningen kan derfor ikke stå alene, men fungere som et utgangspunkt for å snakke om matematikken rundt tegningen (Woleck, 2001, s. 225).

### 2.4 Lithners definisjon på resonnering

Lithner (2008, s. 257) definerer resonnering som «tankeprosesser, som produktet av disse prosessene, eller begge deler». Resonnement blir derfor sett på som «tankegangen eller prosessen som blir tatt i bruk for å produsere påstander og komme til konklusjoner i oppgaveløsning» (Lithner, 2008, s. 257). Med dette menes at resonnering både er den prosessen man har underveis i en tankeprosess, og produktet av denne tankeprosessen. Et eksempel fra eget datamateriale, er når en elev fikk i oppgave å finne ut hvor mange kjeks det ville bli i hver eske, når det var til sammen 40 kjeks som skulle deles likt i åtte esker. Han begynte med å tegne de 8 eskene, i form av 8 rundinger, før han delte ut en og en kjeks. Han fortsatte å dele ut kjeks, helt til han hadde delt ut 32 kjeks, og det var fire kjeks i hver eske. Han visste at det ville gå åtte kjeks også på den neste runden, samt at 32+8 var 40, og følte derfor ikke det var noen vits i å fullføre utdelingen, da han allerede hadde funnet ut hvor mange kjeks det ville bli i hver eske. Denne eleven resonnerte seg frem til at det ville være lurt å tegne de åtte eskene og dele ut kjeksene på samme måte som han kunne gjort det dersom han fysisk hadde hatt 40 kjeks, som han skulle fordelt i 8 esker. Deretter resonnerte han seg frem til at siden det var 8 esker, ville en runde med utdeling av kjeks også være 8 kjeks, så derfor trengte han ikke dele ut den siste runden med kjeks for å finne ut hvor mange kjeks det ville være i hver eske, når han til da hadde delt ut 32 kjeks og 8+32 var 40. Produktet av denne resonneringsprosessen er tegningen han tegnet, som viser åtte esker med kun 4 kjeks i hver.

Lithner (2008, s. 257) sier videre at resonneringen ikke er begrenset til bevis eller basert på formell logikk. I følge Lithner kan resonnementet til og med være feil, så lenge det er noen form for fornuftige grunner som støtter det. Et eksempel på dette som også er fra eget datamaterialet, er en elev som fikk oppgaven sju kort. Oppgaven gikk ut på å finne ut hvilken sum Eva sine kort hadde, når hun visste at Lars sine kort var partall. Kortene de skulle trekke mellom var tallene 1-7. Eva hadde trukket tre kort, og Lars skulle trekke to. Det var da eleven sin oppgave å finne ut summen av Eva sine kort, når Eva visste at Lars sine kort til sammen var partall, og begrunne hvorfor. Eleven valgte å si at Eva trakk kortene 6, 1 og 2, og at summen av Eva sine kort var 9. Eleven sa at Lars hadde trukket tallene 5 og 3, som til sammen var 8. Dette begrunnet eleven ut ifra at Eva mest sannsynlig hadde sett på sine egne kort, og på den måten funnet ut at summen av kortene til Lars ikke kunne bli oddetall. Dersom Eva hadde trukket tallene 6, 1 og 2, hadde det vært både partall og oddetall igjen i bunken, derfor kunne ikke eleven si med sikkerhet at Lars sine kort også ville vært partall. Resonnementet er derfor feil, men for eleven var det fornuftig å tenke at Eva hadde sett på sine egne kort og ut ifra det visste hvilke kort Lars hadde. Selv om resonnementet og grunnlaget for resonnementet var feil, prøvde eleven å argumentere ut ifra hva hun mente var logisk at hadde skjedd.

### 2.4.1 Resonneringskategorier

Den første resonneringskategorien er hentet fra Saundry og Nicol (2006), og er tegning som konkretiseringsmateriale. Når tegningen fungerer som konkretiseringsmateriale, kan man tenke seg at man bruker tegningen på samme måte som man ville brukt fysiske konkreter, dersom man hadde hatt tilgang på det. Det omhandler at man flytter, eliminerer og deler ut, på samme måte som man hadde gjort med konkretiseringsmateriale dersom det hadde vært tilgjengelig. Et eksempel på tegning som konkretiseringsmateriale er når 40 kjeks skal fordeles i 8 esker, og man velger å dele ut en og en i hver eske, ved å tegne en prikk i hver eske, til alle 40 kjeksene (prikkene) er delt ut. En slik tegning blir betegnet som en aktiv tegning, da den aktive handlingen i problemet blir gjennomført på tegningen (Saundry & Nicol, 2006, s. 60).

Den andre kategorien er hentet fra Dahl (2020), og er tegning som informasjonsholder. Når tegningen fungerer som informasjonsholder lager elevene en tegning som gjenspeiler den matematiske strukturen i problemet. Dette kan ses på som en indikasjon på at de allerede har dannet seg et visuelt bilde på situasjonen, og lagt en plan for hvordan tegningen kan hjelpe dem å løse problemet. Elevene tegner ned de elementene de mener er relevante for å løse det gitte problemet (Dahl, 2020, s. 208). Denne kategorien er veldig lik tegning som konkretiseringsmateriale, men det som skiller dem er at tegning som konkretiseringsmateriale betegner tegninger som viser en aktiv handling. Denne kategorien omhandler tegninger som kun viser/holder på informasjonen i problemet, men ikke viser den aktive handlingen ved å dele ut, eller eliminere elementer.

Den tredje kategorien er også hentet fra Dahl (2020), og er tegning som utforskningsverktøy. Forskjellen fra denne kategorien og den ovenfor, tegning som informasjonsholder, er at her er elevene usikre på hvordan de skal løse problemet ved hjelp av tegningen. De har ikke på forhånd en plan, men bruker tegningen til å prøve å gjennomskue strukturen og analysere problemet, for å prøve å finne en måte som gjør de i stand til å løse problemet. Under denne kategorien prøver elevene seg gjerne frem med ulike visuelle fremstillinger, hvor de forkaster eller reviderer en påbegynt tegning, eller stopper opp for å se over/reflektere over oppgaveteksten og tegningen underveis (Dahl, 2020, s. 207).

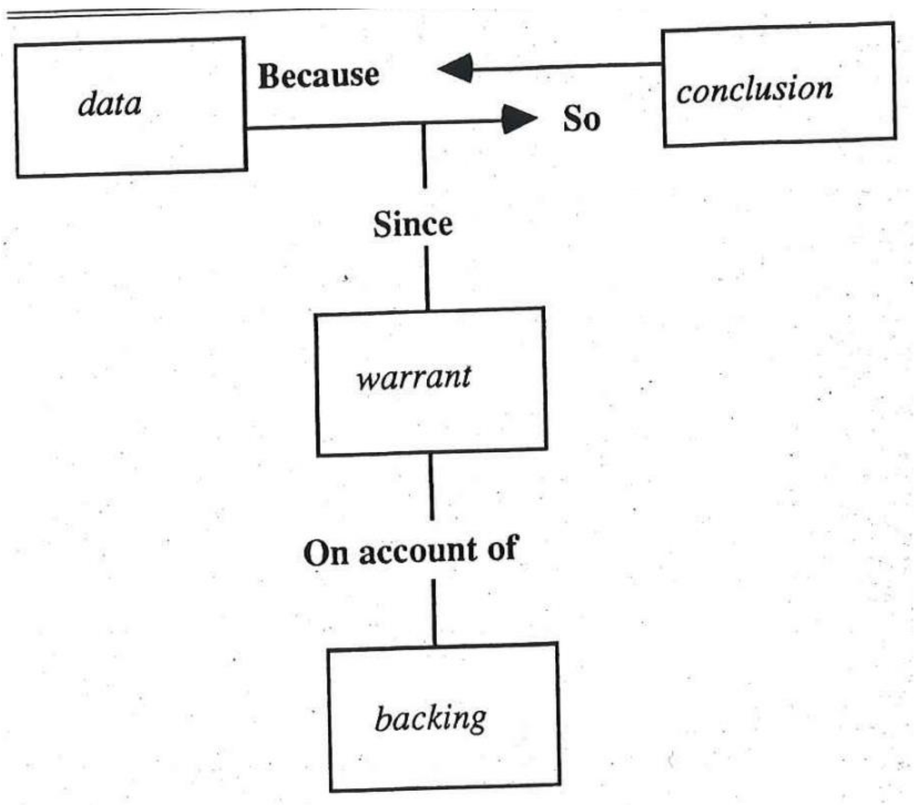
Den fjerde og siste kategorien er også hentet fra Dahl (2020), og er i Dahl sin artikkel en del av kategori to, tegning som informasjonsholder. Men i denne studien er denne kategorien, kun tegning som telleverktøy. Det innebærer at elevene bruker tegningen som verktøy i utregning og telling (Dahl, 2020, s. 208). Det kan være at elevene bruker tegningen underveis til å holde styr på tallene/mengden i problemet, ved å f.eks. tegne tellestreker som krysses ut etter hvert som kjeksene blir delt ut, eller telle samtidig som man deler ut en og en kjeks, eller til utregning. Det innebærer også den fasen hvor elevene teller for å finne svaret på slutten av resonneringen.

### 2.5 Krummheuers argumentasjonsmodell

Krummheuer (1995) ser på argumentasjon som den prosessen som utføres av en enkelt person, som blir konfrontert med et publikum som skal overbevises (Krummheuer, 1995, s. 231). Det handler mer om å overbevise andre (og seg selv) enn å få frem et bevis (Krummheuer, 1995, s. 237). Argumentasjonen trenger derfor ikke å lede frem til en logisk riktig konklusjon, for at det skal kunne regnes som et argument (Krummheuer, 1995, s. 237). Her kan vi trekke inn samme eksempel som ble brukt i forrige delkapittel. Elevens argument var ikke riktig, og det kan diskuteres hvorvidt argumentet var logisk, i og med at eleven ikke hadde grunnlag til å si at gutten hadde partall selv om jenta hadde sett på sine egne kort, ettersom det var igjen både partall og oddetall i bunken. Men for eleven virket dette logisk.

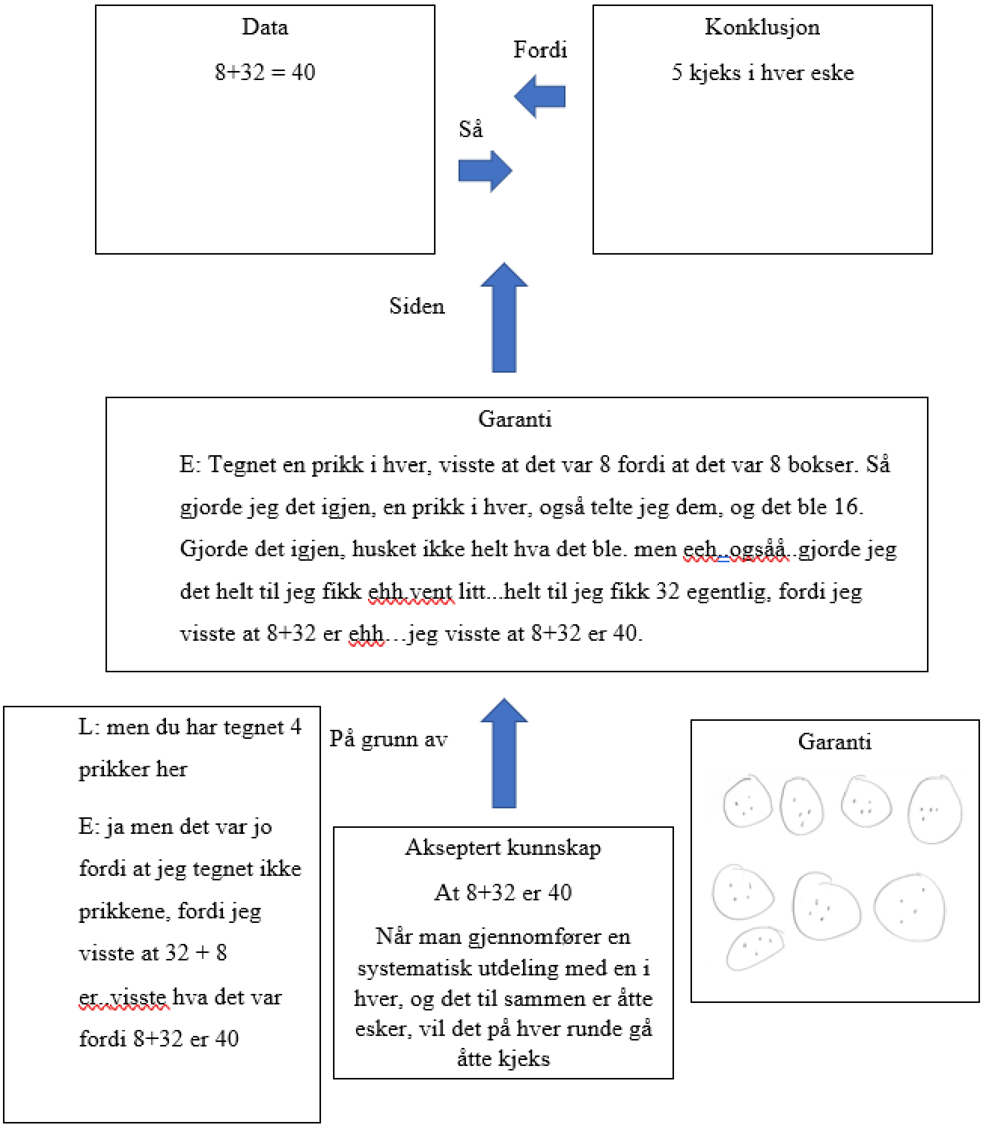
Argumentasjon blir ofte utført av flere deltakere, og kalles derfor kollektiv argumentasjon (Krummheuer, 1995, s. 232). Hvis man ser tilbake på hvordan Krummheuer (1995) ser på argumentasjon, betyr det at det må være et publikum til stede som skal overbevises.

Krummheuer (1995, s. 235) skiller mellom «argument som del av argumentasjon», og «argument som resultat av argumentasjon». Med dette menes at han ser på argumentasjon som både den argumentasjonen som skjer underveis i en løsningsprosess og den argumentasjonen som skjer i etterkant av en løsningsprosess (Krummheuer, 1995, s. 235). Argumentasjon er «den metoden eller teknikken for å etablere eller reetablere en påstand» (Krummheuer, 1995, s. 232). Det er denne prosessen eller dette produktet som er selve argumentet. De teknikkene og metodene for å fastslå en påstand om hvorfor påstanden er sann, kalles en argumentasjon (Krummheuer, 1995, s. 232). Med utgangspunkt i denne tankegangen utarbeidet Krummheuer (1995) en argumentasjonsmodell (Figur 1). Denne argumentasjonsmodellen består av fire ulike deler, hvorav hvert utsagn eller ytring i en argumentasjon har en betydningsfull rolle i argumentet. Modellen tar for seg hvilke deler en argumentasjon bør bestå av (Krummheuer, 1995, s. 239). Disse delene betegner han for data, conclusion, warrant og backing (Krummheuer, 1995, s. 247). Min norske oversettelse av begrepene er data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap.




Figur 1: Krummheuers (1995, s. 248) argumentasjonsmodell

For å forklare de ulike delene i argumentasjonsmodellen og hvordan de står i relasjon til hverandre, skal jeg bruke et eksempel fra eget datamateriale (Figur **2**). Dette eksemplet ble nevnt i forrige delkapittel (**2.4**), og omhandler eleven «Noah» som fikk oppgaven 40 kjeks. Han skulle finne ut hvor mange kjeks det ble i hver eske, når det til sammen var 40 kjeks som skulle fordeles likt i åtte esker.




Figur 2: eksempel fra eget datamateriale som viser de ulike delene i argumentasjonsmodellen

Data er det som produseres av informasjon, og kan være både muntlige uttalelser og skriftlig arbeid som produseres av elevene selv. I dette tilfellet var det regnestykket 8+32=40 som fungerte som data, da det er denne informasjonen konklusjonen er basert på, og regnes derfor som støttende for konklusjonen, da det ligger en lang resonneringsprosess bak. For at noe skal kunne regnes som data så må det ligge noen form for muntlige uttalelser eller skriftlig arbeid til grunn, som gir de grunnlag for å trekke de konklusjonene de gjør (Krummheuer, 1995, s. 241). For at det skal kunne regnes som et argument, må det være produsert noen form for data, enten i muntlig uttalelser eller skriftlig arbeid. En konklusjon uten data som er produsert som støtte, er ikke et argument (Krummheuer, 1995, s. 141), og regnes derfor ikke som et fullverdig argument.

Konklusjonen til Noah er at det ble fem kjeks i hver eske. Denne konklusjonen er utarbeidet med utgangspunkt i dataen som er produsert (Krummheuer, 1995, s. 247). Noah kan konkludere med at det blir fem kjeks i hver, fordi det på en runde utdeling av kjeks går åtte kjeks. Etter fire runder med utdeling kom han til 32, og siden det også denne gangen ville gå åtte kjeks på en runde, og det til sammen skulle utdeles 40 kjeks, lot han være å dele ut den siste runden med kjeks, fordi han visste at de 32 kjeksene han allerede hadde delt ut, og de åtte som ville gå på neste runde, ville bli 40. Det er denne prosessen, med utdeling og telling som fungerer som data, og som gir han grunnlag til å konkludere med at det blir fem kjeks i hver. Konklusjonen, at det er fem kjeks i hver, er den påstanden som videre må støttes av garantien og den aksepterte kunnskapen (Krummheuer, 1995, s. 247).

Garantien er de muntlige uttalelsene eller det skriftlige arbeidet som understreker og støtter opp under konklusjonen og konklusjonens gyldighet. Garantien er begrunnelser som legitimerer konklusjonen, og knytter dataen og konklusjonen sammen (Krummheuer, 1995, s. 247). Noah sin garanti er både hans skriftlige arbeid hvor vi tydelig kan se at han kun har delt ut fire kjeks i hver eske, og hans muntlige forklaring som videre utdyper hvorfor det kun er blitt utdelt fire kjeks i hver eske, samt hvorfor det til slutt blir fem kjeks i hver eske. Dette gjør garantien til Noah eksplisitt, som vil si at den bygger på noe Noah selv har produsert eller sagt. Dette begrunner han ut ifra at han tegnet en prikk i hver, og siden det var åtte esker visste han at det også ville gå åtte kjeks på den første runden. Underveis i utdelingen telte han oppover, men var veldig klar over at det på hver runde kun gikk åtte kjeks, verken mer eller mindre. Etter den andre runden med kjeks hadde han delt ut 16 kjeks. Etter den fjerde runden med utdeling av kjeks, hadde han kommet til 32 utdelte kjeks. Siden det til sammen skulle deles ut 40 kjeks, og han visste at det også denne runden ville gå åtte kjeks, valgte han å la være å dele ut den siste runden, da han visste at 8+32 var 40.

Dersom dataen, konklusjonen og garantien må videre legitimeres, må det understøttes av en akseptert kunnskap. Dette er muntlige uttalelser eller skriftlig arbeid som gir ytterligere gyldighet til konklusjonen, og som er universelt gyldig i matematikken. Med andre ord er det kunnskap som er akseptert og allment kjent innenfor matematikk (Krummheuer, 1995, s. 247). Den aksepterte kunnskapen er den samme som Noahs data, som er at 8+32 er lik 40, samt den systematiske utdelingen som lå bak. Dette fordi han hadde en lang resonneringsprosess før han kom frem til løsningen på problemet. Den aksepterte kunnskapen går ut på at hvis man har åtte esker, så vil det på hver runde gå åtte kjeks, hvis man deler ut en av gangen. Det er denne aksepterte kunnskapen han bruker for å finne frem til riktig løsning uten å dele ut alle rundene, samt det faktum at han er klar over at 8+32 er 40. Den aksepterte kunnskapen er avhengig av den konteksten argumentasjonen utspiller seg i, ut ifra hva som regnes som gyldig og godkjent i den gjeldende klasseromskulturen, samtidig som det også er kunnskap som er allment kjent og universelt gyldig i matematikken (Krummheuer, 1995, s. 247).

## 2.6 Tidligere forskning på tegning, resonnering og argumentasjon

Det har vært gjennomført lite forskning på tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk, men det finnes en del forskning på tegning i problemløsning i matematikk. Innenfor forskning på tegning som verktøy i matematikk finner vi blant annet forfatterne Dahl (2020), Saundry og Nicol (2006) og Bakar et al. (2016). Innenfor tegning og kommunikasjon/argumentasjon i matematikk finner vi Dahl, Klemp og Nilssen (2020), Woleck (2001), Krummheuer (2007) og Singletary og Conner (2015).

### 2.6.1 Tegning som verktøy i matematikk

Dahl (2020) og Saundry og Nicol (2006) undersøkte begge hvordan unge barn brukte tegning i problemløsning. De fant at tegningen hadde ulike funksjoner i problemløsningen. Dahl (2020, s. 203) fant et skille mellom tegninger med problemløsende funksjon, og tegninger uten problemløsende funksjon. Tegningen ble hyppigst brukt som et problemløsningsverktøy (Dahl, 2020, s. 203). Saundry og Nicol (2006) fant også i sin studie et skille mellom tegninger som ble brukt underveis i problemløsningen, og tegninger som ble brukt i etterkant av problemløsningen. Felles for både Dahl (2020) og Saundry og Nicol (2006) var at i begge studiene ble det funnet flere kategorier som hadde problemløsende funksjon, altså ble brukt som et verktøy i problemløsningen. Elevene i Saundry og Nicol (2006) sin studie brukte tegningen som støtte for system eller som konkretiseringsmateriale. Elevene i Dahl (2020, 203) sin studie brukte tegningen som utforskingsverktøy, som informasjonsholder og telleverktøy, som støtte for å utvikle regnestrategi og som representasjon av svaret. Dette viser at elevene i mye større grad hadde behov for å bruke tegningen som et verktøy underveis i problemløsningen.

Bakar, Bobis og Way (2016, s. 89-92) forsket også på unge barns tegninger i problemløsning. De fant blant annet at barna var usikre på hvordan de skulle bruke tegningen i problemløsningsprosessen, og flertallet av barna presentert i studien valgte å tegne i etterkant av å ha løst problemet. Tegningens endrende funksjon fra et personlig uttrykk, til tegning for et spesifikt formål, var vanskelig for barna. Den høye forekomsten av barn som brukte tegningen i etterkant av problemløsningen, konkluderer Bakar et al. (2016, s. 91) med at har en sammenheng med barnas manglende evne til å tegne for et matematisk formål. Selv om tegningen ble brukt i etterkant av problemløsningen, brukte alle barna tegningen for å kommunisere sin tenkning, men i ulike faser under problemløsningen og for forskjellige formål (Bakar et al., 2016, s. 92). De barna som brukte tegningen underveis hadde nytte av tegningen i alle faser, ved at tegningen gjorde det mulig for dem å modellere problemet og telle seg frem til svaret. De elevene som tegnet i etterkant, brukte tegningen til å fremstille løsningen sin (Bakar et al., 2016, s. 92). Bakar et al., (2016) ser en klar fordel med å bruke tegning i problemløsning, men fremhever at individuelle forskjeller forekommer når det kommer til elevers bruk av matematisk tegning. De ulike måtene tegningen ble brukt på i denne studien, indikerer at tegning har et potensial til å være et nyttig problemløsningsverktøy for barn som befinner seg på ulike ferdighetsnivå (Bakar et al., 2016, s. 92).

### 2.6.2 Kommunikasjon og argumentasjon

Dahl, Klemp og Nilssen (2020, s. 169-170) gjennomførte en forskning på tredje trinn innenfor multiplikasjon (Nilssen & Høynes, 2020, s. 169). I studien så de på hvorvidt elevene hadde suksessfulle samarbeidsdialoger. Det ble presentert to kontrasterende dialoger, hvor den ene gruppen var et jentepar, og den andre et guttepar. Det fant at det var svært stor forskjell på hvordan disse to elevparene snakket og samarbeidet om å løse problemet. Den samarbeidsdialogen som ga mest resonnering og argumentasjon var jentedialogen. Jentene var kritiske til hverandres utsagn og alle utsagn ble fulgt opp med en begrunnelse. De brukte tegningen både til å kommunisere sine ideer, og som et verktøy for tenkning. De var ikke redd for å revidere på representasjonen, i håp om å komme nærmere en løsning (Dahl et al., 2020, s. 176). Guttedialogen bar preg av at guttene var mer konkurrerende enn samarbeidsvillige. Deres dialog manglet resonnering, og de verken begrunnet for sine egne ideer eller var kritiske og etterspurte begrunnelser fra den andre (Dahl et al., 2020, s. 182). Jentedialogen stimulerte i større grad til faglig framgang (Dahl et al., 2020).

Woleck (2001, s. 215) undersøkte «hvordan førsteklassinger brukte tegning når de representerte og formidlet matematisk forståelse». Hun fant at tegningen kunne bli brukt på flere ulike måter av barna som støtte i deres matematiske læring og kommunikasjon

(Woleck, 2001, s. 216). Hun fant at tegningen var en måte for elevene å få ned tankene sine, og at tegningen fungerte som en støtte i problemløsningen (Woleck, 2001, s. 216). Videre fungerte tegningen som et verktøy: et stillas reist av og for eleven, til støtte i problemløsningsprosessen og utviklingen av matematiske konsept (Woleck, 2001, s. 217-218). Woleck (2001, s. 225) fant at selv om tegningen i seg selv tjente mange formål, er det dialogen og samtalen rundt tegningene som gir læreren innsikt i elevenes matematiske forståelse og tenkning.

Krummheuer (2007, s. 75) har i sin studie forsket på kollektiv argumentasjon blant førsteklassinger i matematikklasserommet. Han fant at elevenes argumentasjoner i stor grad kun besto av data og konklusjon, når læreren ikke kom med innspill eller stilte spørsmål. Læreren blandet seg i større grad inn når elevene ikke hadde fått riktig løsning på problemet, for å få de til å argumentere for sin løsning. Læreren godtok derfor i mye større grad elevenes påstander dersom de var riktige, selv uten å ha noen form for begrunnelse for dem. Krummheuer (2007, s. 75) fant at dette kunne ha en sammenheng med det faktum at de så på det å gi begrunnelser som uviktig eller uvesentlig, og derfor utelot en begrunnelse for sin løsning.

Singletary og Conner (2015) forsket også på kollektiv argumentasjon, men på elever på ungdomstrinnet. Selv om barna i min studie er en god del yngre, vil funnene være relevante å knytte inn allikevel. De fant at læreren i stor grad måtte oppfordre elevene til å garantere for sin tenkning, ved at læreren måtte stille spørsmål som «hvorfor» for å få de til å begrunne sine resonnement (Singletary & Conner, 2015, s. 146). De fant at lærerens innspill og spørsmål var viktige, for at elevene skulle få ut sin tenkning og forståelse (Singletary & Conner, 2015, s. 145). Singletary og Conner (2015, s. 146) skriver at av og til når elevene jobber med kjente problemer, eller jobber med problemer på en kjent måte, betraktes ikke garanti eller begrunnelse som nødvendig, verken for elevene selv eller læreren.

## 3.0 Metode

Min problemstilling er «hvordan bruker tredjeklassinger tegning i resonnering og argumentasjon?». For å kunne svare på problemstillingen min, har jeg valgt å benytte meg av en kvalitativ forskningsmetode. Det som kjennetegner den kvalitative forskningsmetoden er at forskeren innhenter informasjon fra virkeligheten som fremstilles i form av tekst, enten ved at forskeren skriver ned direkte hva informantene sier eller ved at han skriver ned det han observerer (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 89).

Den kvalitative metoden har som formål å «beskrive og forstå menneskers handlinger og meningsskaping i deres naturlige kontekst» (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 113). Siden min forskning dreiet seg om å beskrive og prøve å forstå hvordan elevene brukte tegningen i resonnering og argumentasjon i matematikk, i arbeid med problemløsningsoppgaver, var det den kvalitative metoden som virket mest hensiktsmessig. Den kvalitative metoden passet min studie da jeg skulle undersøke hvordan elevene brukte tegning i resonnering og argumentasjon, altså en beskrivelse av hvordan de brukte tegning i matematikk. Styrken med en kvalitativ forskning er at man går i dybden og beskriver, mens svakheten med denne typen tilnærming er at den tar for seg relativt få informanter, noe som gjør forskningen noe snever.

Jeg gjennomførte en deskriptiv kvalitativ nærstudie (Nilssen, 2012, s. 22-23), da formålet var å beskrive hvordan elevene brukte tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk. I en kvalitativ nærstudie blir forskningen gjennomført i elevenes naturlige kontekst, hvor forskeren er til stede og observerer og tar notater. Det som kjennetegner den kvalitative nærstudien er at forskeren i tillegg til å beskrive informantenes handlinger, også skal prøve å belyse hva handlingene betyr for de som er involvert. Gjennom dialog med informantene skal forskeren prøve å få tak på intensjonen bak de observerte handlingene, samt deres forståelse av hva som skjedde (Nilssen, 2012, s. 22-23). Med andre ord skulle jeg ikke kun beskrive hvordan elevene brukte tegningen, men også inkludere elevenes forklaringer på hva de hadde gjort og hvorfor de gjorde som de gjorde. I en slik studie foregår innsamlingen over tid, og forskningsdeltakerne er plukket ut etter bestemte kriterier, da de må ha bestemte forkunnskaper som kan belyse feltet som blir studert (Nilssen, 2012, s. 22-23).

## 3.1 Kontekst og utvalg

Studien er en del av forskningsprosjektet Learning, Assesment and Boundary crossing in Teacher Education (LAB-Ted) ved NTNU. Gjennom dette prosjektet jobber studenter, praksisskole og universitet tett på hverandre om blant annet masteroppgaven. Formålet er at masteroppgaven skal være mer praksisrettet og gi noe til praksisfeltet (Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, u.å.). Dette medførte at alle deltakerne i prosjektet fant et overordnet tema, som alle hadde både interesse for og ønsket mer kunnskap om. Det overordnede temaet ble resonnering og argumentasjon, og innenfor dette temaet ble det valgt ulike fokusområder. Mitt fokusområde ble elevers bruk av tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk.

Når man gjennomfører en deskriptiv nærstudie er det viktig å reflektere rundt hvor mange informanter man trenger, og hvor mye datamateriale som trengs for å belyse problemstillingen. Det ble i samråd med veiledere, da menes både veiledere fra campus og praksislærer, reflektert rundt hvor mange deltakere det ville være hensiktsmessig å ha med i studien, samt hvor mange datainnsamlinger som var hensiktsmessig. Antall datainnsamlinger ble endret underveis. Det ble gjennomført flere datainnsamlinger enn først planlagt, fordi jeg ønsket å forsikre meg om at jeg hadde nok datamaterialet til å kunne svare på problemstillingen.

Deltakerne i studien var tredjeklassinger. Valg av deltakere og skole ble ikke gjort av meg selv, men var klart på forhånd som følge av deltakelse i LAB-Ted. Praksislærer som var en del av prosjektet underviste på tredje trinn, det ble derfor naturlig å samle inn data i denne klassen. Åtte elever ble valgt ut i min studie. Det ble gjennomført et strategisk utvalg, som vil si at elevene ble valgt på bakgrunn av at de hadde bestemte forkunnskaper og erfaringer (Dallan, 2021, s. 79). På bakgrunn av tidligere erfaringer visste jeg at alle elevene i denne klassen hadde erfaring med bruk av tegning i matematikk. Det ble derfor gjort et utvalg på bakgrunn av at de allerede hadde kunnskap om hvordan de kunne bruke tegning i matematikk. Det ble valgt to-tre elevpar for hver innsamling, og etter hver innsamling ble det vurdert hvorvidt elevparene fungerte eller ikke. I noen tilfeller ble de samme elevene med hele veien, mens i andre tilfeller ble noen elever byttet ut med andre. Dette på bakgrunn av hvordan det hadde gått på de tidligere innsamlingene, og for å få mest mulig variasjon i datamaterialet. Seks av åtte elever var med flere ganger enn en gang.

## 3.2. Datainnsamlingsmetode

De kvalitative datainnsamlingsmetodene som ble brukt i studien var observasjon, samtale og innhenting av elevarbeid. Postholm og Jacobsen (2018b, s. 113) bygger på Adler og Adler (1994) når de hevder at observasjon kan ses på som den mest fundamentale måten å samle inn data på i kvalitative studier. Med dette menes at observasjon er den mest brukte måten å samle inn data på i kvalitative studier, da formålet er å fange opp hva deltakerne gjør eller sier. Observasjon er en systematisk innsamling (Postholm & Jacobsen, 2018a, s. 50), noe som forutsetter at observasjonen har et fokus. I mitt tilfelle var fokuset hvordan elevene brukte tegningen i resonnering og argumentasjon i matematikk. I kvalitativ forskning blir observasjon gjennomført i deltakernes naturlige kontekst, slik de naturlig utspiller seg (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 113). Når vi observerer bruker vi alle våre sanser for å oppfatte og forstå hva mennesker gjør (Postholm & Jacobsen, 2018a; Postholm & Jacobsen, 2018b). Det handler om å være åpen for å fange opp det som skjer, men innenfor det forskningsfokuset man har valgt. Det kalles for fokusert observasjon (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 144). Observasjonen som er gjennomført i min forskning er det Postholm & Jacobsen (2018a, s. 54) kaller åpen observasjon. Jeg hadde på forhånd utarbeidet en problemstilling som ga føringer for hva som skulle observeres, men det ble ikke før i etterkant av datainnsamlingen utarbeidet kategorier og funnet rammeverk som kunne beskrive datamaterialet (Postholm & Jacobsen, 2018a, s. 53-54).

Under datainnsamlingen hadde jeg ulike observatørroller i de ulike fasene av innsamlingsøktene. Mens elevene arbeidet med å løse oppgavene, var jeg det Postholm og Jacobsen (2018a, s. 52) betegner som «fullstendig observatør». I følge Postholm og Jacobsen er man en fullstendig observatør når man er til stede i settingen hvor handlingene pågår, men at man holder seg i bakgrunnen og observerer kun hva elevene gjør, uten å blande seg inn. Jeg var derfor ikke deltakende, men ga i et tilfelle støtte til en elev når det gjaldt hvordan han kunne komme i gang med oppgaven. Under gruppesamtalen fikk jeg en mer deltakende observatørrolle. Jeg ble da en «fullstendig deltaker», hvor jeg ble en del av det som ble observert, ved at jeg ledet samtalen og stilte elevene oppfølgingsspørsmål for å få de til å utdype og utfylle svarene sine mer (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 116).

Gruppesamtalen som ble gjennomført ligner veldig på det Postholm & Jacobsen (2018b, s. 121) betegner som det semi-strukturerte intervjuet. Før datainnsamlingen ble det utarbeidet noen forslag til spørsmål som egnet seg å stille, men det dukket også opp nye spørsmål underveis i samtalen på bakgrunn av det elevene hadde produsert. Samtalen var derfor en pendling mellom induktiv og deduktiv, da noen av spørsmålene var fastsatt og planlagt på forhånd, mens andre var ikke det. I en slik type samtale, foregår det en kontinuerlig analyse hvor forskeren reflekterer over hvilke spørsmål som er nyttige og stille for å få forståelse for handlingene som blir gjort og innblikk i de tankene som bringes frem (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 121). Med andre ord blir spørsmålene utformet i samspill med elevene, da spørsmålene som stilles avhenger av hvordan elevene har valgt å løse oppgaven, samt hva de presenterer og sier. I samtalen skapes det kunnskap mellom forskeren og eleven, ved at forskeren prøver å stille spørsmål som bidrar til at eleven får uttrykt sin forståelse og tenkning (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 121). Det ble stilt oppfølgingsspørsmål av flere grunner, men hvor hovedhensikten var å få elevene til å utdype og gi mer detaljerte beskrivelser på hvordan og hvorfor. Det ble også stilt oppfølgingsspørsmål rundt ytringer eller elevenes arbeid som var av interesse for problemstillingen, eller for å få avklart noe som var uklart (Postholm & Jacobsen, 2018b, s. 123). Eksempler på spørsmål som ble stilt vises i tabell **1**.

Tabell 1: oversikt over spørsmål som ble stilt under samtalen

- Hvordan tenkte du her? Hvorfor det? Kan du begrunne.
- Kan du forklare hva du har gjort?
- Hva gjorde du her?
- Hvordan kom du frem til dette?
- Hva har du tegnet her?
- Hvorfor gjorde du det akkurat sånn/hvorfor tegnet du det?
- Hvorfor stemmer det mener du?

Som vi kan se i spørsmålene var hovedfokuset å få vite hvordan elevene hadde løst oppgaven, og hvorfor de hadde gjort det akkurat slik.

I tillegg til observasjon og samtale rundt elevenes egenproduserte representasjoner, ble også arbeidet til elevene innhentet. Det ble innhentet totalt 21 elevarbeid, fordelt på de fem datainnsamlingene.

### 3.3 Gjennomføring av datainnsamling

Det ble gjennomført totalt fem datainnsamlinger, fordelt på fem forskjellige dager. Innhentingen av datamaterialet ble gjort over en periode på 7 uker. De to første ble gjennomført to uker rett etter hverandre, den tredje ble så gjennomført 2,5 uke etter den andre. De tre siste innsamlingene ble gjennomført tre uker rett etter hverandre.

På hver innsamling ble det benyttet video- og lydopptak, samt elevenes arbeid ble innhentet. Det ble gjennomført to innsamlinger mer enn opprinnelig planlagt fordi jeg ville sikre meg at jeg hadde nok datamaterialet til å belyse problemstillingen min. Det ble fortløpende vurdert hvorvidt jeg hadde nok datamateriale, eller om jeg måtte samle inn mer. Alle datainnsamlingsøktene var organisert slik; Elevene fikk tildelt oppgave og arbeidet med å løse den, før vi samlet oss til en gruppesamtale, hvor elevene måtte forklare og argumentere for sin løsning.

De fem datainnsamlingene ble gjennomført på ulike måter av ulike årsaker, og tilpasset annet arbeid i praksisklassen. Materialet de to første gangene ble innhentet gjennom arbeid i helklasse, mens de tre siste ble innhentet gjennom spesielt tilrettelagte oppgaver.

Hvert elevpar var ute i ca. 15-30 minutter hver gang, så hver datainnsamling hadde en varighet på 30-60 minutter.

### 3.4 Oppgavene

Oppgavene som ble benyttet i studien var enten hentet, inspirert av andre allerede eksisterende oppgaver, eller lagd selv. Tre er hentet direkte fra Carpenter (2003), Skott et al. (2016), og Matematikksenteret (2020) og to egenproduserte er inspirert av Alseth (2019) og Dønnem (2020) sine masteroppgaver, samt artikkelen til Carpenter (1993). De resterende tre er lagd selv, eller i samråd med veiledere.

Flere av oppgavene var innenfor temaene divisjon og multiplikasjon/kombinatorikk, men det ble også gitt oppgaver som tok for seg problemløsning uten noen spesifikk tilknytning til et visst matematisk tema. Felles for alle oppgavene er at de bringer med seg et behov for å bruke tegningen som hjelp til å komme frem til en løsning. Alle oppgavene kan derfor anses å være problemløsningsoppgaver.

I den nye læreplanen finner vi utforsking og problemløsning som en av seks kjerneelement. Gjennom problemløsningsoppgaver får elevene utforsket og selv funnet svar på oppgavene. Det står i læreplanen at «elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene» (Utdanningsdirektoratet, 2020). I min forskning ble problemløsningsoppgaver benyttet, nettopp på grunn av dette. Formålet var å se hvordan elevene brukte tegning i resonnering og argumentasjon, noe som legger vekt på fremgangsmåten og prosessen frem til en løsning, samt begrunnelser og argumenter for sin løsning.

Tabell 2: oversikt over oppgavene

| **Dato** | **Varighet** | **Oppgave** | **Forklaring** |
|---|---|---|---|
| 20.10.21 | 15 min | Hamster i bur | Elevene arbeidet i par om samme oppgave. |
| 27.10.21 | 18 min | Aper i trær | Elevene arbeidet i par om samme oppgave. |
| 15.11.21 | 15-20 min | Oppgave 1<br>Fotballcup<br><br>Oppgave 2<br>49 drops | Elevene tatt ut av klasserommet. Jobbet hver for seg, men med samme oppgave. |
| 22.11.21 | 21-26 min | Oppgave 1<br>Sju kort<br><br>Oppgave 2<br>40 kjeks | Elevene jobbet hver for seg, men med forskjellige oppgaver. Den ene eleven fikk oppgave 1, mens den andre fikk oppgave 2. |
| 29.11.21 | 15-27 min | Oppgave 1<br>Tre påfølgende tall<br><br>Oppgave 2<br>Summen er partall | Elevene jobbet hver for seg, med hver sin oppgave. |

**Aper i trær**

*I dyreparken er det 2 trær og 5 aper. Apene leker i trærne og hopper fra tre til tre.*

*Vis alle måter apene kan fordele seg på i de to trærne.*

Dette er en kombinatorikkoppgave, hvor elevene skulle finne alle mulige løsninger. Oppgaven er hentet fra Skott et al. (2016, s. 162). Den er kun et svar som er riktig, men siden apene kan fordele seg på totalt seks ulike måter, åpner oppgaven opp for at elevene kan ha tenkt på ulike måter. Oppgaven setter derfor begrensninger for hvor mange løsninger som er mulig å finne. Det som kan være utfordrende med en sånn type oppgave er at elevene må vite når de skal slutte å lete etter flere løsninger. Oppgaven legger derfor opp til at elevene må argumentere for om det finnes flere løsninger, og hvorfor/hvorfor ikke. Det kan også være utfordrende for elevene å skjønne at det å gjøre det omvendt gir en ny løsning, da de kan anse det som kun en løsning.

En typisk løsning her vil være å tegne de to trærne, og fordele apene, først 0 i det ene også 5 i det andre, for så å ta det omvendt, også fortsette sånn til alle løsningene er funnet.

Denne oppgaven ble valgt fordi den legger til rette for at elevene må forklare og argumentere for hvilke løsninger de har funnet, og hvorvidt det finnes flere løsninger på problemet eller ikke. Selv om det kun gir et riktig svar i antall løsninger som finnes på problemet, åpner det opp for at elevene kan ha valgt å gjøre det/fremstille det på ulike måter/har gått frem på ulike måter for å finne ut av det.

**Fotballcup**

*29 barn skal på fotballcup. Det er 8 biler som skal kjøre barna på fotballcupen. De må enten sitte 3 eller 4 i hver bil. Hvor mange av bilene har 3 barn, og hvor mange biler har 4 barn?*

Denne oppgaven er inspirert av fotballcup-oppgaven i masteroppgaven til Alseth (2019, s. 22), samt oppgaven «nonroutine» i artikkelen til Carpenter (1993, s. 434). Selve konteksten i oppgaven er den samme, men formuleringen og tallene er byttet ut med andre tall. Denne oppgaven gir kun et svar, men den åpner opp for ulike løsninger, og derfor ulik resonnering og argumentasjon.

Begrensningene i denne oppgaven var antall barn og antall biler, samt at det enten måtte sitte 3 eller 4 barn i hver bil. Det var gitt at det ikke kunne sitte flere enn 4 barn i hver bil, siden en voksen måtte kjøre bilen.

Dette er en problemløsningsoppgave fordi problemet elevene skal løse er å finne ut hvor mange av bilene som har 3 barn, og hvor mange biler som har 4. Selv om oppgaven ikke har flere mulige svar, finnes det flere måter å finne det ut på. Det at det ikke blir like grupper kan være utfordrende for elevene, da de ikke nødvendigvis vet hvordan de skal løse den når det ikke går opp, siden noen biler har 3 mens andre har 4 barn.

Denne oppgaven kan løses som delingsdivisjon, da vi vet hvor mange som skal deles ut og hvor mange de skal deles i. En mulig løsning er at elevene tegner opp alle de 8 bilene aller først, før de deler ut en og en i hver bil til de har ingen barn igjen. De kan også fordele tre og tre i hver bil, da det må sitte hvert fall 3 i hver bil, i og med at det enten skal sitte 3 eller 4 i hver bil.

Denne oppgaven ble valgt da det er et delingsproblem som ikke går opp i likegrupper, det blir ulikt antall barn i de 8 bilene. Det åpner derfor opp til at elevene ikke kan tenke likegrupper på problemet, men at de må tenke og bruke andre strategier for å finne løsningen på problemet. Siden elevene kan komme frem til en løsning ved å gjøre det på flere ulike måter, legger oppgaven opp til at elevene må forklare og begrunne for sin fremgangsmåte og løsning.

**49 drops**

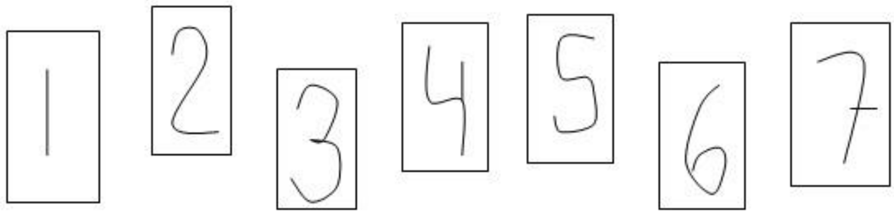
*Kristine har 49 drops som hun vil dele likt mellom seg og sine 6 venner. Hvor mange drops får hver av dem?*

Denne oppgaven har jeg lagd selv, med utgangspunkt i temaet elevene arbeidet med i denne perioden. Dette er en delingsdivisjons oppgave, da vi vet hvor mange drops som skal deles ut, og hvor mange personer det skal deles på. Elevenes oppgave er å finne ut hvor mange drops de får hver. Den mest selvsagte løsningen vil være å tegne opp 7 personer, eller noe som symboliserer at det skal fordeles på 7 stykker, for så å dele ut en og en drops til hver person, til alle dropsene er delt ut.

Selv om det er en løsning som kan regnes å være mer selvsagt enn andre, kan denne typen oppgave også gjøres på flere andre måter. Elevene kan bruke gjentatt subtraksjon, de kan benytte seg av deling og de kan bruke multiplikasjon for å komme frem til hvor mange drops hver av dem får. Denne oppgaven legger derfor til rette for at elevene kan løse det på ulike måter, og at de derfor må forklare og argumentere for sin løsning og fremgangsmåte.

### Sju kort

**Sju kort ligger i ei eske.**
**På hvert av kortene er det skrevet ett av tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 eller 7.**




**Eva trekker 3 kort fra eska og Lars trekker 2 kort. Da er det 2 kort igjen i eska.**
**Eva ser på kortene sine og sier til Lars: «Jeg vet at summen av kortene dine er et partall».**
**Hva er summen av Eva sine kort?**

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Denne oppgaven er hentet fra matematikksenteret, og ble fremstilt for elevene slik den ble presentert på matematikksenteret (Matematikksenteret, 2020). Dette er en utforskende oppgave, da elevene må undersøke oppgaven nøye, se på tallene og hva som til sammen blir partall og hva som ikke blir partall. Det er derfor ikke en selvsagt måte å finne ut av denne oppgaven på. Det er ikke tydelig hvordan elevene må gå frem for å finne svaret.

Denne oppgaven består av flere aspekter som må begrunnes og forklares. Blant annet må elevene begrunne hvordan Eva kan si at Lars sine er partall, og de må forklare hvordan de kom frem til hva summen av Eva sine kort er. Selv om det kun er en løsning på problemet, er oppgaven åpen nok til at elevene kan ha tenkt eller gjort det på ulike måter. De kan ha testet ut hvilke kort Eva og Lars kunne trukket eller de kan ha bygget på sin kunnskap om hvilke kort som til sammen blir partall og hvilke som blir oddetall.

### 40 kjeks

*Mari har 40 kjeks, som skal fordeles i 8 esker. Hvor mange kjeks er det i hver eske?*

Denne oppgaven har jeg lagd selv, med utgangspunkt i temaet elevene jobbet med i denne perioden. Dette er en delingsdivisjons oppgave, da vi vet hvor mange kjeks som skal deles ut, og hvor mange esker de skal fordeles i. Her vil elevenes oppgave være å finne ut hvor mange kjeks det blir i hver eske. Her vil den mest selvsagte løsningen være å tegne opp de 8 eskene, for så å dele ut en og en kjeks i hver eske, til det er ingen kjeks igjen.

Denne oppgaven kan på samme måte som oppgaven «49 drops», løses ved å bruke gjentatt addisjon, divisjon eller multiplikasjon. Oppgaven legger derfor til rette for at elevene kan løse det på ulike måter, selv om kun er et svar og en løsning som kan anses som mer selvsagt enn andre. Det forutsetter derfor at elevene må forklare hvordan de har tenkt, og begrunne hvorfor de har valgt å gjøre det sånn.

**Tre påfølgende tall**

*1+2+3=6*

*2+3+4=9*

*3+4+5=12*

*Hypotese: når man legger sammen tre påfølgende tall så vil summen alltid være i tregangen*

*Stemmer dette, eller stemmer det ikke? Argumenter og vis hvorfor dette stemmer eller ikke stemmer.*

Oppgaven om de tre påfølgende tallene er inspirert av en oppgave i Dønnem (2020, s. 36) sin masteroppgave. I hennes studie kom elevene fram til hypotesen, etter at de hadde etterforsket hva som var felles for summen når tre påfølgende tall ble lagt sammen. Siden tiden var knapp, og Dønnem i sin artikkel fant at de brukte lang tid på å komme frem til denne hypotesen, ble hypotesen presentert for elevene, hvorav de skulle se om det var noe mønster i de tre regnestykkene, samt argumentere for om hypotesen stemte eller ikke.

Denne oppgaven åpner opp for flere mulige måter å løse oppgaven på, det finnes ikke en måte som er mer selvsagt enn en annen måte. Elevene må undersøke tallene og regnestykkene for å kunne si noe om hypotesen stemmer eller ikke. Dette må de gjøre ved å vise hvordan de har tenkt og argumentere for hvorfor.

**Summen er partall**

*Vis hvorfor partall + partall blir partall, og oddetall + oddetall blir partall.*

Denne oppgaven ble utformet i samråd med veiledere. Dette er en utforskende oppgave, hvor det ikke er like tydelig hvordan elevene skal gå frem for å svaret på oppgaven, det er ikke noe som skal deles ut på et visst antall elever eller esker.

Oppgaven legger opp til at elevene må vise hvorfor. I dette legger det at elevene må vise hvordan de har tenkt, og argumentere for hvorfor det blir sånn.

På hver datainnsamling ble det innhentet materiale fra to elevpar. Det vil med andre ord si at ikke alle elevene eller elevparene løste alle oppgavene ovenfor.

## 3.5 Analysemetode

Det ble brukt både deduktiv og induktiv analysemetode. Induktiv analyse handler om at man prøver å oppdage temaer og kategorier i datamaterialet, mens man i en deduktiv analyse benytter seg av et forhåndsdefinert rammeverk når man analyserer datamaterialet (Nilssen, 2012, s. 14). Det aller første jeg gjorde var at jeg transkriberte video- og lydopptakene, og anonymiserte elevene. Å transkribere handler om å transformere noe fra en form til en annen, i dette tilfelle tale eller observerte handlinger til skriftlig tekst. Selve transkriberingen anses å være en «forskningsaktivitet» fordi den innebærer at forskeren må gå gjennom opptakene om og om igjen for å fange opp hele bilde. Denne stadig gjentagende prosessen gjør at forskeren ofte oppdager nye forhold ved materialet, som tidligere ikke ble oppdaget (Postholm & Jacobsen, 2018a, s. 81). Transkribering er tidkrevende, men jeg valgte å transkribere selv for å ikke gå glipp av noe materiale. Gjennom transkriberingen opplevde jeg flere ganger at jeg fikk enda større forståelse for og innblikk i hvordan elevene hadde tenkt, samt jeg oppdaget forhold i videopptakene som jeg ikke hadde oppdaget under selve samtalen. Denne informasjonen hadde gått tapt dersom jeg ikke hadde transkribert selv. Allerede under transkriberingen ble datamateriale analysert. Denne umiddelbare analysen ville gått tapt dersom noen andre hadde transkribert.

Min analyse begynte allerede i samtalen med elevene. Det ble fortløpende vurdert hvilke spørsmål som skulle stilles, og hvorvidt datamateriale var tilstrekkelig og kunne belyse det temaet jeg forsket på. Datamaterialet ble «analysert» underveis, for å finne ut om elevene skulle fortsette å være med i forskningen, og om elevene skulle få samme oppgave eller ulik oppgave.

Etter at transkriberingen var ferdig, fortsatte jeg analysen. Jeg begynte med å analysere hvordan elevene brukte tegningen i resonneringen, og jeg måtte da lete både i videoopptak og det transkriberte materiale. Denne prosessen var gjentagende, hvor jeg samtlige ganger måtte gå tilbake til videoopptaket og transkripsjonen for å se etter hvordan elevene hadde brukt tegningen i resonneringen, slik at beskrivelsene skulle bli så nøye og eksakt som overhodet mulig. Deretter ble det gått gjennom datamaterialet atter en gang for å lete etter elevenes argumentasjoner. Denne prosessen var også gjentagende. Under selve analysen ble det gjentatte ganger gått tilbake til råmaterialet for å sjekke opp om det jeg allerede hadde transkribert stemte, og om det var noen forhold ved datamaterialet jeg ikke hadde fått med meg den første gangen.

Den delen av analysen som var induktiv var når jeg gikk inn i datamaterialet og beskrev hvordan elevene brukte tegningen i resonneringen. Med utgangspunkt i det jeg fant i datamaterialet, ble det lagd passende kategorier med utgangspunkt i allerede eksisterende teorier, som kunne skildre hva elevene hadde gjort. Det ble benyttet den deduktive analysemetoden når jeg skulle beskrive hvordan elevene brukte tegningen i argumentasjon. Rammeverket som skulle analysere elevenes argumentasjon var fastsatt på forhånd. Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell ble brukt for å analysere elevenes argumentasjon. Datamaterialet ble analysert ut ifra de ulike delene i denne argumentasjonsmodellen.

I slutten av analysen ble det utformet noen tabeller for å vise funnene mine i korte trekk. Tabell **4** ble utformet for å vise antall tegninger som befant seg under hver resonneringskategori, mens tabell **5** skulle vise antall argumentasjoner og tegninger som fungerte som data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap. Tabell **6** ble utformet for å vise begge deler, nemlig hvordan elevene argumenterte når de brukte tegningen som informasjonsholder, telleverktøy, utforskingsverktøy og telleverktøy. Tabellene blir presentert nedenfor.

### 3.6 Kort presentasjon av hovedfunn

For å kunne belyse problemstillingen *«hvordan bruker tredjeklassinger tegning i resonnering og argumentasjon?»* var det vesentlig å dele opp i hvordan elevene brukte tegning i resonnering, og hvordan de brukte tegning i argumentasjon. Med bakgrunn i dette ble det utformet to tabeller for å vise hvordan elevene brukte tegningen i resonnering, og hvordan de brukte tegningen i argumentasjon.

Tabell **4** viser hvordan tegningene fordelte seg under hver resonneringskategori. Som vi kan se så ble alle tegningene med unntak av tre brukt aktivt under resonneringen. De tre tegningene som hadde «ingen funksjon» er tegninger som ikke ble brukt, da elevene ikke visste hvordan de skulle gå frem for å løse oppgaven ved hjelp av tegningen. Totalt ble det samlet inn 21 elevarbeid.

Tabell 3: oversikt over antall tegninger under hver resonneringskategori

| **Resonneringskategori** | **Antall tegninger** |
|---|---|
| Telleverktøy | 12 |
| Informasjonsholder | 4 |
| Konkretiseringsmateriale | 10 |
| Utforskingsverktøy | 4 |
| Ingen funksjon | 3 |
| | Antall tegninger totalt: 21 |

Tabell **5** viser hvordan tegningene fordeler seg i argumentasjonsmodellen, både hvor mange argumentasjoner som inneholder de ulike delene i Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell, samt hvordan tegningene fordeler seg utover i argumentasjonsmodellen. Jeg skiller mellom om argumentasjonene inneholder data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap, og om tegningene i seg selv er data, konklusjon, garanti eller akseptert kunnskap. Her er det til sammen 18 argumentasjoner, da de tre som hadde «ingen funksjon» ikke har noen argumentasjon, samt to av tegningene som ble brukt underveis i resonneringen heller ikke hadde noen argumentasjon. Dette fordi den ene av tegningene er Stines forsøk nr. 1 på oppgaven sju kort, og den andre er en tegning av en elev som ikke kom frem til en løsning, men hvor eleven aktivt prøvde å komme frem til en løsning ved å modellere problemet. Derfor ingen argumentasjon der heller. I tillegg til dette ble det utformet ikke bare en, men tre argumentasjonsmodeller under Lises arbeidet med oppgaven «summen er partall». Grunnen til det er at under oppgaven «summen er partall» inngikk det både å vise hvorfor partall+partall=partall, og oddetall+oddetall=partall, og i tillegg til dette ble eleven spurt om å vise hvorfor partall+oddetall=oddetall.

Hele 15 av de 18 argumentasjonene regnes som et fullverdig argument. De resterende tre regnes ikke som et fullverdig argument, da disse ikke hadde produsert noen form for data, og uten data kan det ikke regnes som et argument. Dette er de tre tegningene som i stedet fungerte som startpunkt for argumentasjon. Hele 11 argumentasjoner har alle delene i argumentasjonsmodellen, og hele 15 argumentasjoner har en eller flere garantier.

Tabell 4: oversikt over antall tegninger satt i sammenheng med delene i argumentasjonsmodellen

| **Argumentasjonsmodellen** | **Antall tegninger** |
|---|---|
| Data | Tegning som startpunkt: 3<br>Antall argumentasjoner som har data: 15<br>Antall tegninger som er data: 11 |
| Konklusjon | Antall argumentasjoner som har konklusjon: 18<br>Antall tegninger som er konklusjon: 1 |
| Garanti | Antall argumentasjoner som har garanti: 15<br>Antall tegninger som er garanti: 4 |

| | |
|---|---|
| Akseptert kunnskap | Antall argumentasjoner som har a.k.: 13<br>Antall tegninger som er a.k.: 2 |
| | Antall argumentasjoner totalt: 18 |

Et eksempel på tabell **5**, er det samme eksemplet brukt i delkapittel 2.5. Som vi kan se i figur **2** har Noah alle delene i argumentasjonsmodellen, derav består hans argumentasjon av data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap. I tillegg er tegningen han produserte garanti. Eleven har to garantier, men i tabellen regnes ikke antall elevene har av f.eks. garanti eller akseptert kunnskap, men heller om deres argumentasjon har garanti eller akseptert kunnskap, eller om tegningen regnes som garanti eller akseptert kunnskap. I dette tilfellet føres Noahs to garantier som at han 1) har garanti i sin argumentasjon, og 2) at tegningen hans er garanti. Det vil med andre ord si at selv om elevene har flere garantier eller akseptert kunnskap i en og samme argumentasjon, blir det kun oppført som at elevene har en garanti og en akseptert kunnskap.

### 3.7 Analyseverktøy

Siden min studie tar for seg elevers bruk av tegning i resonnering og argumentasjon, måtte jeg finne noen kategorier som kunne skildre hvordan elevene resonnerte, samt et rammeverk som kunne beskrive hvordan elevene argumenterte for sin løsning. Det ble kombinert flere teorier for å skildre hvordan elevene brukte tegningen i resonneringen. Med bakgrunn i datamaterialet ble det valgt ut noen kategorier fra Saundry og Nicol (2006) sin forskning, samt noen kategorier fra Heidi Dahl sin forskning (Dahl, 2020). Kategoriene som ble valgt er tegning som konkretiseringsmateriale fra Saundry og Nicol (2006), og tegning som utforskingsverktøy, tegning som informasjonsholder og telleverktøy fra Dahl (2020). Siden mange av tegningene kunne plasseres under flere av kategoriene, da kategoriene er relativt like, måtte jeg lage mine egne kategorier med utgangspunkt i deres kategorier. Med utgangspunkt i datamaterialet utformet jeg totalt fire resonneringskategorier. Disse er tegning som konkretiseringsmateriale, tegning som utforskingsverktøy, tegning som informasjonsholder og tegning som telleverktøy. Jeg beskrev hver kategori og utformet noen kriterier for å kunne klare å skille mellom kategoriene og plassere tegningene under en av dem.

Tabell 5: oversikt og beskrivelse av resonneringskategoriene

| |
|---|
| **Konkretiseringsmateriale:** skildrer en aktiv handling ved at elevene eliminerer, flytter på, deler ut, på samme måte som hvis det hadde vært fysiske konkreter tilgjengelig. |
| **Utforskingsverktøy:** elevene vet ikke sikkert hvordan de skal gå løs på problemet, men prøver å analysere problemet og prøver seg frem for å finne en løsning på problemet. |
| **Informasjonsholder:** lager en tegning som gjenspeiler den matematiske strukturen i problemet. Elevene tegner ned de elementene de tenker er relevante for å løse problemet. En tegning som holder på informasjonen i problemet. |
| **Telleverktøy:** bruker tegningen som verktøy i utregning og telling. |

Tegningene og videomaterialet studerte jeg nøye, og det ble foretatt noen valg ut ifra hva tegningene ble «mest brukt som» eller «passet mest som». Selv om det ble utformet noen kategorier som skulle gjøre det enklere å klassifisere tegningene, var telling hyppig brukt blant elevene. Datamaterialet viste at elevene ofte brukte tegningen som telling i tillegg til enten konkretiseringsmateriale, utforskingsverktøy eller informasjonsholder. Dette medførte at jeg måtte utforme en egen kategori som tok for seg den funksjonen telling hadde i tegningen, da tellingen ikke bare var tilknyttet tegninger som fungerte som informasjonsholder, slik kategorien var utformet i Dahl (2020) sin forskning. Dette medførte at flere tegninger fikk plass under to kategorier.

Kategorien telleverktøy tar både for seg utregning og telling. Det ble gjort noen valg rundt hva som kunne regnes som utregning og ikke. Den tegningen som ble kategorisert som telleverktøy på grunn av utregning, hadde brukt tegningen til å regne ut et regnestykke, hvor han tydelig brukte tegningen til utregning. Selv om selve utregningen ikke vises på tegningen, var det tydelig at eleven satt og regnet ut oppgaven i hodet. Han visste ikke svaret på regnestykket på forhånd, som mange andre av elevene gjorde. De elevene som allerede visste svaret på regnestykkene de presenterte på tegningen, regnes derfor ikke som utregning.

For å kunne skildre hvordan elevene argumenterte ved hjelp av tegningen, måtte jeg finne et rammeverk som kunne beskrive deres argumentasjon. Valget landet på Krummheuers (1995) argumentasjonsmodell, da elevenes argumentasjon måtte analyseres i detalj. For å kunne gjøre dette måtte jeg ha et rammeverk som tok for seg del for del i elevenes argumentasjon, og sa noe spesifikt om hvordan elevene argumenterte. Modellen til Krummheuer (1995) tar for seg argumentasjonens fire deler. Disse delene kalles data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap.

Jeg foretok noen valg knyttet opp mot Krummeheuers (1995) modell og de ulike delene i modellen. Krummheuer (1995) sier at data av noe slag må produseres for at man skal kunne regne det som et argument. Siden ikke alle elevene hadde produsert noe data verbalt, har jeg valgt å betegne også elevenes skriftlige og visuelle arbeid som data, da det er noe elevene også har produsert. Siden alle elevene i bunn og grunn hadde produsert noe form for skriftlig eller visuelt arbeid, kunne i teorien alle tegningene blitt betegnet som data. Siden dette ikke ville vært optimalt, avgrenset jeg hva som kunne betegnes som data og ikke på følgende måte: de tegningene som ble betegnet som data, er de tegningene som understøtter konklusjonen, og som har produsert noen form for data som gir de grunnlag for å kunne trekke konklusjoner. De tegningene som ikke ble betegnet som data, ble kategorisert som tegning som startpunkt. Det samme ble gjort for å avgrense hva som kunne betegnes som konklusjon og ikke. Det ble gjort på følgende måte: de tegningene hvor **en** del av tegningen viste konklusjonen og løsningen på problemet, ble kategorisert som konklusjon. Det vil med andre ord si, at de tegningene hvor flere deler av tegningen viste løsningen på problemet, ikke ble regnet som konklusjon. La meg illustrere ved å bruke noen eksempler fra mitt eget datamateriale. En elev som fikk oppgaven sju kort, fremstiller konklusjonen ved å skrive alternativ B 12. Det andre han produserte på tegningen kan ikke gi oss noen form for indikasjon på hva konklusjonen er. Sammenligner vi med en elev som fikk oppgaven fotballcup, vil ikke bare fremstillingen «5 grupper med 4 barn» og «3 grupper med 3 barn» fungere som konklusjon, men også tegningen som viser at det er tre grupper med tre i hver, og fem grupper med fire i hver. Med andre ord, var konklusjonen allerede fremstilt i selve tegningen eleven hadde produsert, derav ble fremstillingen «5 grupper med 4 barn» og «3 grupper med 3 barn» kun en representasjon av den konklusjonen eleven allerede hadde kommet frem til.

Det kan videre være vanskelig å skille de ulike delene i argumentasjonsmodellen fra hverandre. I situasjoner hvor det har vært vanskelig å skille dem, har jeg lagt min egen tolkning av begrepene og modellen i grunn for de valgene jeg har tatt angående kategoriene.

Min egen tolkning har også ligget til grunn når jeg har valgt å inkludere flere garantier og aksepterte kunnskaper i mine argumentasjonsmodeller. Krummehuer (1995) har selv valgt å sette det jeg tolker det som to garantier, i en og samme «rute» i argumentasjonsmodellen. Med andre ord har også Krummheuer (1995, s. 246) valgt å inkludere flere garantier i ett og samme argument. Dette ser vi når Jamie kommer med en garanti, og Jack kommer med en annen. Forskjellen fra det Krummheuer (1995) gjorde i sin fremstilling av garantiene, og min fremstilling, er at i mine argumentasjonsmodeller har hver garanti fått sin egen «rute». Siden det kan være flere garantier, har jeg også valgt å inkludere flere aksepterte kunnskaper. Dette fordi jeg, på lik linje som at det kan være flere garantier, mener at det kan være flere aksepterte kunnskaper i et og samme argument.

Jeg har valgt å skille mellom implisitt og eksplisitt garanti og akseptert kunnskap, for å tydelig skille mellom det som ble produsert av elevene selv, og det jeg som forsker har tolket ut ifra hva de har produsert av skriftlig arbeid eller muntlige uttalelser. Det som er implisitt er stiplede firkanter, mens det som er eksplisitt er heltrukket firkanter.

Da jeg skulle telle sammen hvor mange elevarbeid jeg hadde innhentet totalt, skilte jeg mellom antall forsøk elevene hadde på en og samme oppgave, og antall ark elevene brukte på en og samme oppgave. Dersom en elev brukte to forsøk på en oppgave, ble det regnet som to elevarbeid, men dersom en elev brukte til sammen tre ark på et og samme forsøk, ble ikke hvert ark regnet som ett elevarbeid, men summen av de tre arkene.

### 3.8 Metodekritiske og etiske betraktinger

I møte med forskning er det mange etiske prinsipper som skal tilfredsstilles.

Før man skal gjennomføre en forskningsstudiet hvor man forsker på mennesker og behandler personopplysninger, må man søke til Norsk senter for forskningsdata (NSD). I denne søknaden må man gi en detaljert beskrivelse av studien, samt hvordan den innhentede informasjonen sikres, og man må legge ved informasjonsskriv. Denne søknaden skal behandles ut ifra hvorvidt studien klarer å sikre forskningsdeltakernes personvern, og prosjektet må hensynta ulike merknader fra NSD før man begynner innsamlingen.

I forbindelse med studien ble det innhentet informert samtykke. Informert samtykke skal sikre at deltakerne deltar frivillig og er så godt informert som overhodet mulig om hensikten med forskningen (Nilssen, 2012, s. 145). Det ble derfor i forkant av datainnsamlingen utformet et infoskriv. Det ble lagt særlig fokus på å beskrive hvordan innhentingen av datamateriale skulle gjennomføres, og hvordan materiale og opplysninger skulle sikres, samt hvordan samtykke skulle overholdes. I slutten av infoskrivet skulle de enten gi samtykke eller ikke. Siden informantene var barn, var det foreldrene som skulle lese og sette seg inn i prosjektet, før de samtykket eller ikke til at barnet deres deltok i studien. De elevene og elevparene som ble inkludert i studien var elever som hadde gitt samtykke til å delta.

Det var viktig for meg at elevene følte seg trygge i situasjonen, og jeg var derfor veldig klar på hvordan jeg skulle informere om prosjektet til elevene. Før den første innsamlingen fortalte jeg kort hva som skulle skje/hvordan dette skulle foregå, og understreket at det ikke var noe farlig. For at elevene ikke skulle føle på noe ekstra press med å være med i studien fortalte jeg dem at jeg ville de skulle jobbe med oppgavene på samme måte som de gjorde når de arbeidet med lignende oppgaver i klasserommet. Jeg presiserte at de skulle løse oppgavene slik de selv ville gjøre det, og at de fikk bruke den tiden de trengte for å bli ferdig. Den informasjonen som ble gitt var alderstilpasset, slik at barna enkelt skulle forstå hva som skulle foregå, og slik at de hadde mulighet til å trekke seg dersom de ikke ville delta likevel. Siden jeg kjente elevene godt fra før av, hadde vi en god relasjon og tillit til hverandre, noe som jeg tror gjorde situasjonen enda tryggere for elevene.

I forskning, og spesielt i forskning med barn er det viktig at forskningen ikke oppleves som en belastning eller er til skade for de involverte. Det skal være mulig for deltakerne å trekke seg når som helst, noe som også skjedde. Det var en elev som ikke var komfortabel med situasjonen og ikke ønsket å være med, da fikk denne eleven selvfølgelig slippe. Nilssen (2014, s. 151) skriver at det er viktig å få samtykke også av barna selv, og ikke bare av foreldrene, for de skal behandles på lik linje som deltakere som er gamle nok til å samtykke selv. Hun skriver videre at frivillig samtykke kan være problematisk fordi barn er mer villig til å adlyde autoriteter og at de ofte opplever at de ikke kan protestere (Nilssen, 2012, s. 151). Siden jeg hadde kjent elevene i noen år, vil jeg med stor sannsynlighet si at de var trygge nok på meg til å gi beskjed dersom de ønsket å trekke seg eller om det var noe annet de syntes var ubehagelig. For barn kan det å ikke få til å løse en oppgave være ubehagelig eller kjedelig, spesielt hvis de ser at de/den andre eleven får det til. For at dette ikke skulle være belastende for elevene, understreket jeg at det gikk helt fint dersom de ikke fikk det til, og i tilfeller hvor elevene ønsket å vite løsningen på problemet, valgte jeg å forklare oppgaven i slutten av økten.

Det er viktig å være bevisst sin egen subjektivitet i forskning. Min forskning er blant annet påvirket av min bakgrunn og forforståelse (Nilssen, 2012, s. 139), men selv om subjektivitet er en naturlig del av forskning, må jeg være bevisst på at subjektiviteten ikke tar overhånd. Min subjektivitet kommer frem i valg av forskningsfokus og forskningsspørsmål, og i alle andre valg som er gjort i forbindelse med teori og analyse. Nilssen (2014, s. 139) sier at forskeren ikke er en nøytral person som står utenfor, men er i interaksjon med deltakerne og påvirker datamaterialet. Ved at min forskerrolle ble deltagende under samtalen, ble mine spørsmål og innvendinger med å påvirke resultatet i datamaterialet. Denne subjektiviteten er ikke til å unngå. Men dersom man begynner å velge ut hva som skal fremstilles og ikke, eller vri og vende på sannheten for at resultatene skal stemme overens med de meningene man selv sitter med, blir subjektiviteten misbrukt og troverdigheten til forskningen svekket. Forskeren må være konstant selvbevisst sin rolle, sine interaksjoner, sitt teoretiske ståsted og sitt empiriske materiale, for at forskeren skal kunne utnytte sin verdi/sitt potensiale som forskningsinstrument til det fulleste (Nilssen, 2012, s. 139).

### 3.9 Studiens troverdighet

Studiens troverdighet kan sikres ved at det er blitt benyttet flere analysemetoder og datakilder i studien (Nilssen, 2012, s. 141-142). Jeg har både observert elevene, tatt videoopptak av elevene, har snakket med elevene, og analysert elevarbeidene deres. På denne måten har jeg sikret meg tilstrekkelig innsikt i hvordan elevene brukte tegningen i resonnering og argumentasjon, til at jeg kan konkludere ut ifra de funnene jeg har funnet. Jeg har gjennom observasjon og videoopptak fått innblikk i hvordan elevene brukte tegningen underveis i problemløsningen. Gjennom samtalen har elevene fått forklart hvordan de har løst oppgaven, og videre argument for sin løsning. Metodene hver for seg sier ikke tilstrekkelig om hvordan elevene resonnerte eller argumenterte, men de til sammen gir meg den innsikten jeg trenger for å kunne svare på problemstillingen min. Flere av metodene viser det samme, og alt dette har gitt meg et grunnlag til å kunne konkludere ut ifra de funnene jeg har funnet.

Studiens troverdighet sikres også gjennom at forskningen er transparent (Nilssen, 2012, s. 154). Det vil si at jeg har gitt en nøye beskrivelse av hva jeg har gjort; hvordan datainnsamlingene ble gjennomført, jeg har valgt å presentere resultatet av analysen ved hjelp av mange illustrerende eksempler. Dette gjør forskningen min overførbar, ved at andre kan gjennomføre den samme forskningen som meg. Men det betyr ikke at man nødvendigvis får de samme resultatene, da det også avhenger av blant annet skolekonteksten, elevene, typer oppgaver og forskeren (Nilssen, 2012, s. 141-142). En annen forsker ville ikke nødvendigvis funnet det samme som meg, fordi man velger forskjellige fokusområder eller vektlegger ulike forhold ved datamaterialet. Men beskrivelsene er såpass detaljerte at det er mulig for andre å gjennomføre en likedan studie.

Studiens troverdighet kan diskuteres, da det ble gjennomført flere innsamlinger til flere mastergradsoppgaver på samme trinn samtidig. På samme tid som jeg gjennomførte min studie, ble det også gjennomført to andre studier som også tok for seg resonnering og argumentasjon i matematikk. Det kan derfor diskuteres hvorvidt deres forskning kan ha påvirket min forskning og resultatene i min forskning.

Studien min er en kvalitativ studie med få elever, noe som kan anses å være svært snevert eller begrenset til å trekke vidtrekkende konklusjoner. Resultatet kan ikke generaliseres med å si for eksempel at funnene vil være likt for alle tredjeklassinger i hele landet. Men samtidig er det naturlig å tenke at situasjonen kunne vært lik i et annet klasserom. Selv om resultatet er snevert/begrenset, vil jeg kunne si noe om et utvalg elevers bruk av tegning. Men en kvantitativ metode hadde ikke vært hensiktsmessig da det ikke hadde gitt meg det jeg hadde trengt, som er hvordan og hvorfor.

# 4.0 Analyse

Hovedfunnene ble presentert i tabell **4** og tabell **5** på s. 21 og 22. I de følgende kapitlene vil jeg vise eksempler på hvordan elevene brukte tegningen i resonneringen, og hvordan elevene brukte tegningen i argumentasjonen.

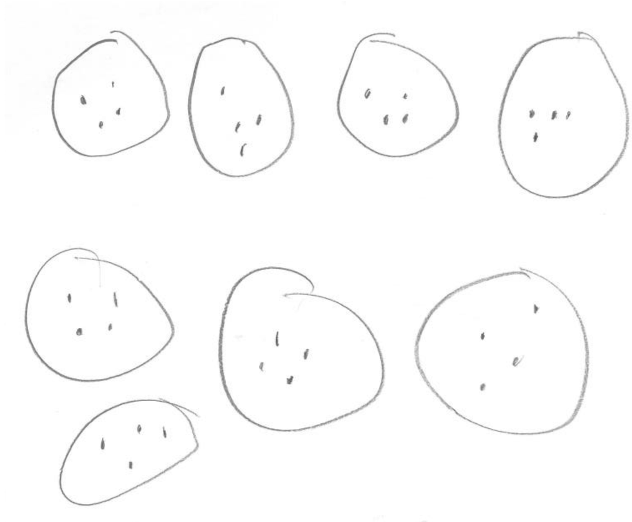
## 4.1 Elevenes resonnering

**Konkretiseringsmateriale**

10 av 21 elevarbeid befant seg under resonneringskategorien konkretiseringsmateriale. Det var denne resonneringskategorien som hadde nest høyest forekomst blant elevene. De elevene som befinner seg under denne kategorien bruker tegningen til å dele ut eller eliminere elementene beskrevet i problemet, nesten som om det var fysiske konkreter de delte ut eller eliminerte.

Jeg har valgt å illustrere to ulike måter elevene brukte tegning på som konkretiseringsmateriale med utgangspunkt i elevene «Noahs» og «Majas» arbeid med oppgaven 40 kjeks. Noah delte ut en og en kjeks fra det totale, mens Maja eliminerte kjeks fra det totale antall kjeks.

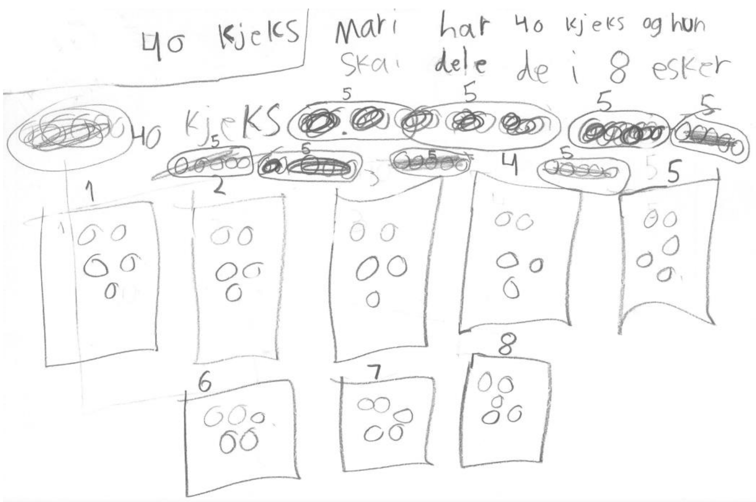
Noah begynte med å tegne opp åtte rundinger, for de åtte eskene kjeksene skulle fordeles i. Deretter delte han ut en og en kjeks, ved å tegne en prikk i hver eske. Etter en runde fant han ut at han hadde delt ut åtte kjeks, siden det var åtte esker. Etter runde to hadde han delt ut 16 kjeks, siden han hadde delt ut to runder, og det på en runde gikk åtte kjeks. Han fortsatte å dele ut kjeks, helt til han hadde delt ut 32 kjeks, og det var fire kjeks i hver eske. Han visste at en runde med kjeks ville tilsvare åtte kjeks, og siden han skulle dele ut totalt 40 kjeks, brukte han den kunnskapen han hadde om at 32+8 var 40. Derfor følte han ikke behovet for å dele ut den siste runden med kjeks, og stoppet derfor utdelingen der.



Figur 3: Noahs resonnering rundt 40 kjeks

Noah bruker tegningen som konkretiseringsmateriale (Saundry & Nicol, 2006, s. 60) ved at han gjennomfører handlingen i problemet, hvor han deler ut de 40 kjeksene i de åtte eskene. Dette gjøres samtidig som han teller kjeksene etter hvert som han deler de ut, for å holde styr på utdelingen.

Maja begynte med å skrive opp «40 kjeks», og «Mari har 40 kjeks og hun skal dele de i åtte esker», øverst på arket. Hun tegnet opp åtte firkanter, for de åtte eskene. Hun ga hver eske et tall, den første esken fikk tallet 1, den neste fikk tallet 2, og slik fortsatte hun til alle eskene hadde fått et tall. Deretter begynte hun å tegne opp alle de 40 kjeksene. Hun tegnet først opp ti kjeks, og lagde en ring rundt de første fem og skrev tallsymbolet 5 over. Gjorde det samme med neste 5'er. Hun tegnet så opp enda en femmergruppe, ringet rundt, og gjorde det samme fire ganger til, før hun skrev tallsymbolet 5 over hver av disse femmergruppene. Deretter begynte hun å dele ut to kjeks til hver eske, og etter hver gang hun delte ut, eliminerte hun kjeks fra det totale, ved å stryke ut fra de 40 kjeksene som hun hadde tegnet opp på arket. Hun fortsatte å dele ut, men rotet med elimineringen av kjeks og tegnet opp en femmergruppe for lite, noe som skapte forvirring og vansker med å løse oppgaven.




Figur 4: Majas resonnering rundt 40 kjeks

Maja bruker tegningen som konkretiseringsmateriale (Saundry & Nicol, 2006, s. 60) ved at hun først tegnet opp alle de 40 kjeksene, for så å bruke disse aktivt i utdelingen av kjeks. Etter hvert som Maja delte ut kjeksene i eskene, eliminerte hun fra det totale kjeks hun hadde tegnet opp på arket.

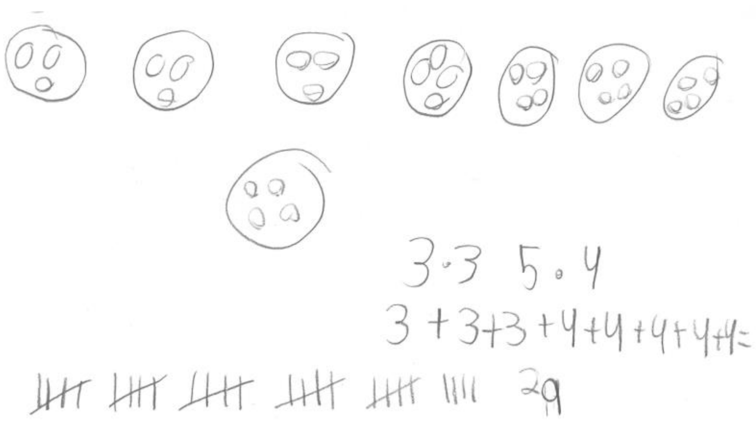
### Telleverktøy

Telleverktøy var den resonneringskategorien som forekom oftest. Noe av grunnen til dette er at elevene ofte benyttet seg av telling i tillegg til at de brukte tegningen som enten informasjonsholder, konkretiseringsmateriale eller utforskingsverktøy. De eksemplene jeg har valgt, viser fire ulike måter tegning kan bli brukt som telleverktøy. Hanne delte ut en og en drops til hver mens hun telte oppover til 49, mens Stine delte ut barna samtidig som hun holdt oversikt ved å tegne tellestreker underveis. Maja gjorde nesten det samme som Stine, bare at hun tegnet tellestrekene i forkant av utdelingen, og brukte tellestrekene til å eliminere barna etter hvert som de hadde fått plass i en bil. Markus er den eneste eleven som brukte tegningen til utregning, ved at han regnet ut summen av det neste regnestykket for å sjekke om summen ville være i 3-gangen.

Det første eksemplet er fra «Hannes» arbeid med oppgaven 49 drops. Hun begynte med å tegne opp sju rundinger, for de syv barna. Deretter delte hun ut en drops til hver mens hun telte oppover til 49. Hun telte så hvor mange det var i en runding, og skrev «de får…». Før hun fullførte setningen, telte hun enda en runding for å forsikre seg om at det stemte. Hun fortsatte med å skrive «…7 hver». Hanne brukte tegningen som telleverktøy (Dahl, 2020, s. 208) da hun brukte telling aktivt mens hun delte ut en og en drops til hver, helt til hun hadde delt ut hele mengden med drops. Telling ble også brukt for å finne ut hvor mange drops hver av dem fikk, som var 7.


Figur 5: Hannes resonnering rundt 49 drops

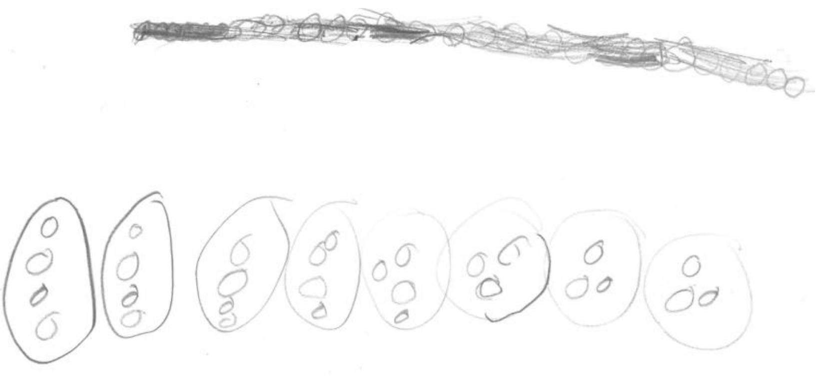
«Stine» er den andre eleven som leverte et elevarbeid som kan kategoriseres som telleverktøy. Eksemplet er hentet fra oppgaven fotballcup. Hun begynte med å tegne opp åtte rundinger, for de åtte bilene. Hun startet med å tegne tre sirkler i den første bilen, og lagde tre tellestreker under. Hun tegnet også tre i den andre bilen, og lagde også nå tre tellestreker under. Hun gjorde det samme også med bil 3 og 4. Deretter stoppet hun opp, og begynte å telle, uten å tegne i de neste rundingene, fire i hver bil. Hun stoppet så opp og tenkte litt, før hun tegnet enda en sirkel i den fjerde bilen. De tre første bilene hadde nå tre barn hver, mens den fjerde hadde fire barn. Hun tegnet så fire barn i den femte, sjette, sjuende og åttende bilen. Hun tegnet så opp resten av tellestrekene til slutt.




Figur 6: Stines resonnering rundt fotballcup

Stine bruker tegningen som telleverktøy (Dahl, 2020, s. 208) ved at hun lager tellestreker etter hvert som hun deler ut barna i bilene. Deretter bruker hun telling til å sjekke om alle de 29 barna vil få en plass i en av bilene, dersom det er tre barn i de fire første bilene, og fire i de resterende fire bilene. Når hun fant ut at et barn ikke hadde fått plass i en av bilene, etter at hun hadde telt fire i de resterende fire bilene, plasserte hun det siste barnet i den fjerde bilen, slik at det ble fire barn i fem biler.

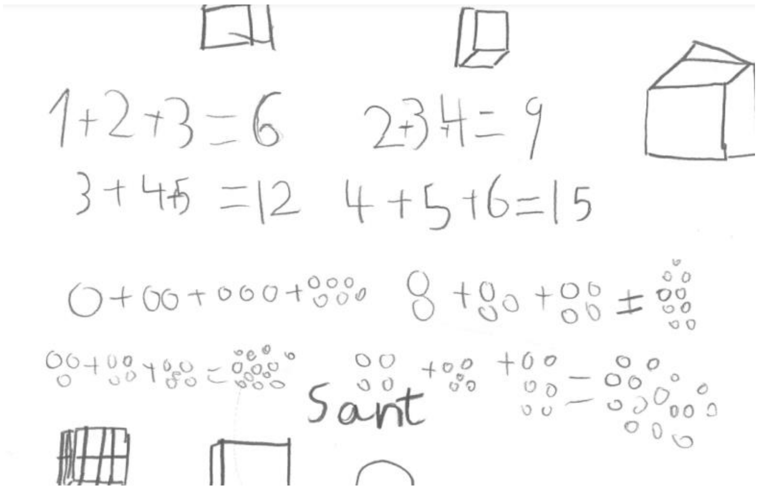
«Maja» gjorde nesten det samme som Stine i arbeidet med denne oppgaven, bare at Maja tegnet tellestreker på forhånd. Hun begynte med å tegne åtte rundinger, for de åtte bilene. Så tegnet hun opp de 29 barna, som små sirkler over bilene. Hun begynte så å dele ut en og en til hver bil, før hun streket over åtte av barna. Prosessen gjentok seg, mens eleven telte oppover samtidig som hun delte ut og eliminerte barna. Når alle hadde fått tre barn, telte hun over de resterende barna, og delte ut en til hver så langt det rakk.



Figur 7: Majas resonnering rundt fotballcup

Maja bruker tegningen som telleverktøy (Dahl, 2020, s. 208) ved at hun tegner opp alle de 29 barna øverst på arket. Disse bruker Maja aktivt under utdelingen av barna. Maja teller underveis i utdelingen, samtidig som hun eliminerer ved å stryke ut fra det totale antall barn øverst på arket. Etter at det er blitt plassert fire barn i alle bilene, teller hun over de resterende barna som enda ikke har fått plass i en av bilene, før hun deler ut en til hver helt til alle barna har fått plass i en bil.

«Markus» arbeidet med oppgaven tre påfølgende tall. Han startet med å skrive opp regnestykkene fra oppgaveteksten, 1+2+3=6, 2+3+4=9, og 3+4+5=12. Deretter skrev han opp enda et regnestykke, som er det neste regnestykket i følgen, 4+5+6=15. Etter han hadde skrevet dette regnestykket, skrev han «sant» nederst på arket. Tegningen til Markus er et telleverktøy (Dahl, 2020, s. 208), fordi han regner ut det neste regnestykket i følgen, og slik finner ut at summen til også dette regnestykket er i 3-gangen.



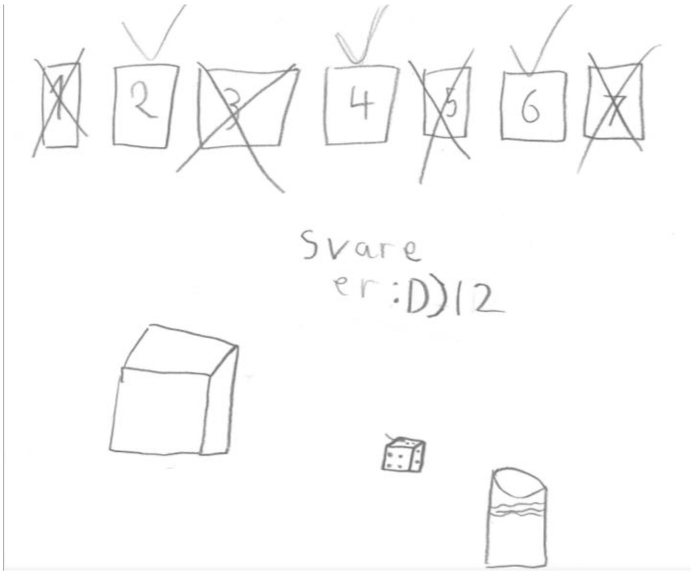

Figur 8: Markus sin resonnering rundt tre påfølgende tall

## Informasjonsholder

Kun fire elevarbeid kan kategoriseres som informasjonsholder. Noe av grunnen til dette kan være at elevene heller valgte å bruke tegningen både som informasjonsholder og som et redskap de kunne bruke i aktiv problemløsning, slik jeg viste med eksemplet med kjeksene i kategorien konkretiseringsmateriale. Kategorien konkretiseringsmateriale omfatter altså både egenskapen informasjonsholder og noe mer. Eksemplene som ble registrert under kategorien informasjonsholder, er altså tilfeller der tegningen bare var informasjonsholder. Dette er tegninger som gjenspeiler den matematiske strukturen i problemet, ved at elevene tegner opp de elementene som er relevante for å løse problemet (Dahl, 2020, s. 208).

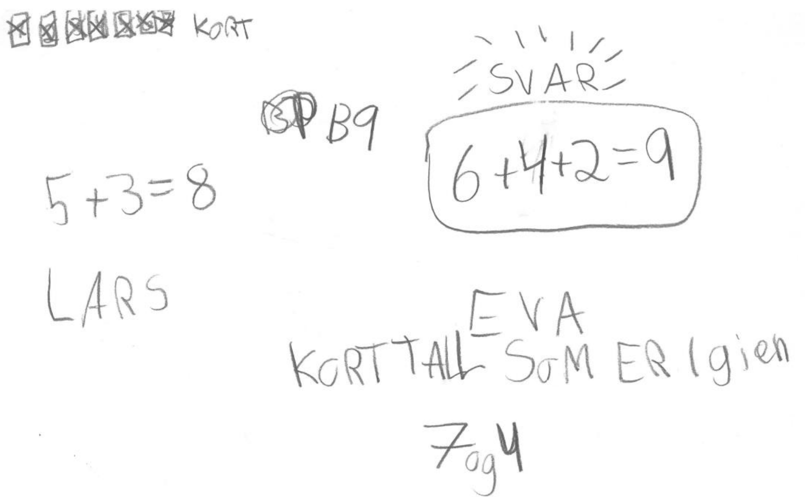
Et illustrerende eksempel på funn innenfor denne kategorien er hentet fra «Markus'» og «Stines'» arbeid med oppgaven sju kort. Begge elevene tegner opp de aller viktigste elementene i problemet, de sju kortene. Begge fremstiller også hvilke kort Eva hadde, og hva summen av kortene til Eva var, men dette ble gjort på forskjellige måter.

Markus tegnet opp kortene en til sju. Deretter krysset han umiddelbart ut kortene 1, 3, 5 og 7. Han skrev «svaret er: 12» på arket, og tegnet en V, som symboliserer riktig, over kortene 2, 4, og 6. Til slutt skriver han en D foran svaret 12, da 12 var alternativ D. Markus tegnet kun opp tallkortene, og så på de som det mest relevante i oppgaven. Han viste hvilke tall Eva hadde ved å sette en V over disse kortene. Markus anså det som nødvendig å fremstille hvilke kort Eva hadde trukket, og hvilken sum Eva sine kort var til sammen, da dette var det oppgaven spurte etter. Hans tegning befinner seg derfor under informasjonsholder (Dahl, 2020, s. 208), fordi han valgte å tegne ned de elementene han så på som relevante for å løse problemet. Han valgte å gjøre dette på en relativt enkel og konkret måte, ved å sette en V over de tallene Eva hadde trukket, og eliminere de kortene Lars kunne trukket.




Figur 9: Markus sin resonnering rundt sju kort

Stine sin tegning er informasjonsholder (Dahl, 2020, s. 208) da hun valgte å tegne opp de sju kortene, og navnene Lars og Eva. Deretter skrev hun hvilke kort hun mente Lars hadde trukket, som var 5 og 3, og laget et regnestykke hvor hun fremstilte kortene til Lars og at de var partall. Hun krysset deretter ut de kortene hun hadde gitt Lars, da hun så det som relevant å «gjenskape» situasjonen, ved å eliminere de kortene som allerede hadde blitt trukket. Deretter skrev hun 6+1+2=9 over navnet til Eva, og krysset ut også disse kortene. Hun valgte også å skrive hvilke korttall som var igjen, da hun tenkte at det var relevant å vite.




Figur 10: Stines resonnering rundt sju kort

Et siste eksempel på tegning som informasjonsholder (Dahl, 2020, s. 208) er hentet fra Lises og Maris arbeid med oppgaven aper i trær. De lagde en tegning som gjenspeilet den matematiske strukturen i problemet. Det gjorde de ved å tegne de elementene som var relevante for å løse problemet. De visste hvordan de måtte gå frem for å finne alle løsningene. De begynte først med å tegne de to trærne som apene kunne fordele seg i, før de tegnet tre aper i det ene treet, og to i det andre. De startet med å tegne piktografiske aper oppe i trærne. De skrev så tallsymbolet 3 og tegnet en pil ned til de tre apene, og gjorde det samme med de to apene i det andre treet. Etter hvert fant de ut at det ikke var så veldig effektivt å gjøre det på denne måten. Derfor valget de å fremstille de ulike måtene med tallsymboler og terninger, i stedet for å tegne apene. De skrev først 4 og 1, før de skrev 1 og 4. Deretter skrev de 2 og 3, 0 og 5, og 5 og 0. Lise og Mari brukte her tegningen til å holde på informasjonen i problemet; nemlig at de skulle vise alle måtene apene kunne fordele seg på i de to trærne, når det var til sammen fem aper. De begynte med å tegne ned de to trærne som de så på som relevante elementer i problemet, før de valgte å fremstille det på en annen måte. De valgte å skrive det som «5 og 0», som kan symbolisere at de tenkte at det var fem i det ene treet, og 0 i det andre.

Figur 11: Lises og Maris resonnering under aper i trær

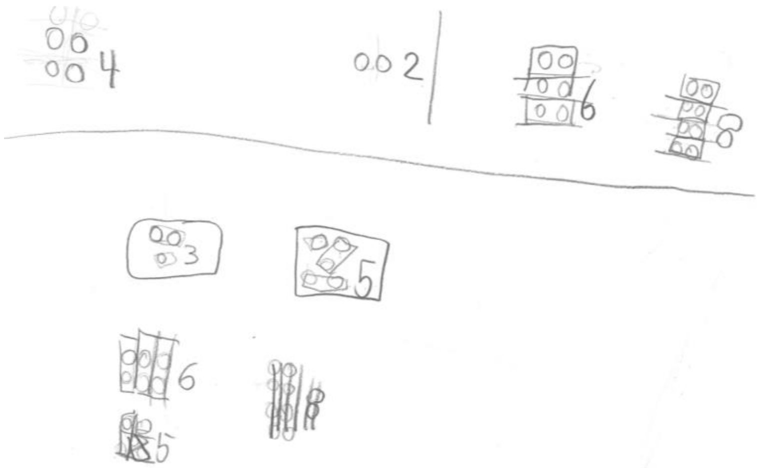
Lises og Maris tegning ligger i grenseland mellom konkretiseringsmateriale og informasjonsholder, men er blitt kategorisert som informasjonsholder da tegningen i større grad passer inn under kategoribeskrivelsen informasjonsholder enn kategoribeskrivelsen konkretiseringsmateriale.

**Utforskingsverktøy**

Kun fire tegninger befinner seg i kategorien utforskingsverktøy. Tegningene som jeg har funnet tilhører denne kategorien, er de tegningene som krevde utforsking og prøving og feiling. Det kan kanskje knyttes opp mot at de oppgavene hvor denne resonneringskategorien var fremtredende, var utformet på en slik måte at det ikke var en selvsagt måte å løse oppgaven på, noe som førte til at elevene måtte prøve seg frem for å prøve å finne en løsning på problemet.

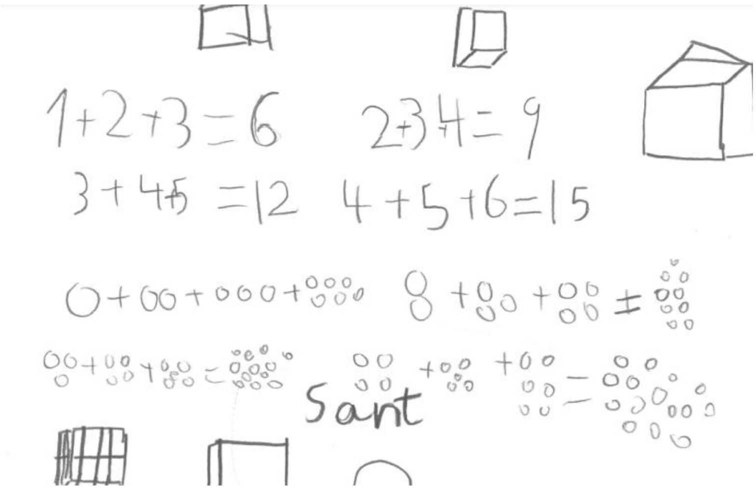
Et illustrerende eksempel er hentet fra Lises arbeid med oppgaven summen er partall. Innenfor denne oppgaven skulle eleven vise hvorfor partall+partall ble partall, og hvorfor oddetall+oddetall ble partall. I tillegg ble det stilt spørsmål om hvorfor partall+oddetall ble oddetall. Lise begynte med partall+partall, og tegnet fire sirkler, hvor hun skrev tallsymbolet fire ved siden av. Hun tegnet så to rundinger, og skrev tallsymbolet to ved siden av. Hun delte så tallet fire på midten, og gjorde det samme med tallet to. Dette viste hun ved å sette en strek midt imellom, slik at fire ble delt i to og to, og to ble delt i en og en. Deretter plasserte hun alle de seks prikkene oppå hverandre, og viste at man kunne dele i to, to og to, eller i tre og tre. Hun gjorde så det samme med tallene 6 og 8. Lise hadde funnet en strategi som gjorde det mulig for henne å vise hvorfor det stemte, og denne strategien brukte hun også når hun skulle bevise hvorfor oddetall+oddetall ble partall, og hvorfor partall+oddetall ble oddetall.

Lise sin tegning fungerer som et utforskingsverktøy (Dahl, 2020, s. 207), ved at hun prøvde å analysere og utforske hvorfor partall+partall ble partall, for å finne ut om det stemte eller ikke, ved å dele inn i par. Det var ingen selvsagt måte å gjøre det på, men Lise visste at partall var tall som kunne deles på to uten rest, og det kan virke som at det var derfor hun valgte å fremstille tallene som sirkler for så å prøve å danne par, for å se om tallet kunne deles. Når Lise så at det kun ble hele par, og ingen til overs, fant hun ut at det stemte.



Figur 12: Lises resonnering rundt summen er partall

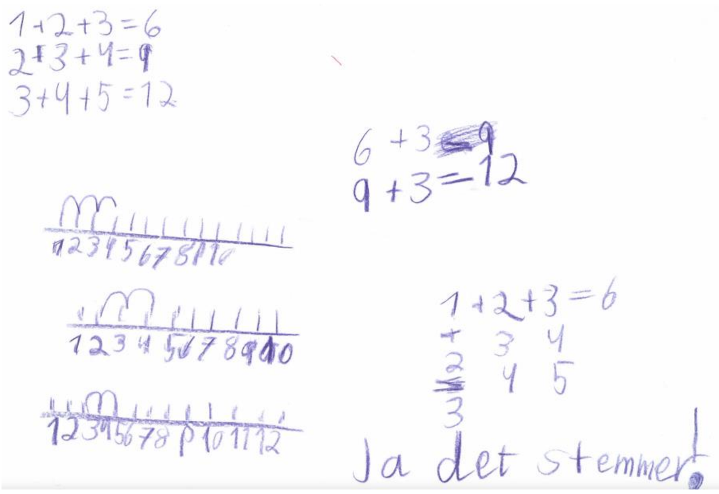
Et annet eksempel har jeg hentet fra Markus' og Stines arbeid med oppgaven tre påfølgende tall. Markus startet med å skrive opp regnestykkene fra oppgaveteksten, 1+2+3=6, 2+3+4=9, og 3+4+5=12. Deretter skrev han opp enda et regnestykke, som er det neste regnestykket i følgen, 4+5+6=15. Etter han hadde skrevet dette regnestykket, skrev han «sant» nederst på arket. Markus sin tegning fungerer som et utforskingsverktøy (Dahl, 2020, s. 207) ved at han får en oppgave hvor det ikke finnes en tydelig fremgangsmåte, men hvor han må analysere og utforske problemet for å prøve å finne en løsning på problemet. Han valgte derfor å teste ut om summen av det neste regnestykke i følgen også ville være i 3-gangen. Siden summen av dette regnestykket også var i 3-gangen, kunne han konkludere med at det stemte.




Figur 13: Markus sin resonnering rundt tre påfølgende tall

Stine begynte også med å skrive opp de tre regnestykkene som sto i oppgaveteksten, 1+2+3=6, 2+3+4=9 og 3+4+5=12. Hun skrev så regnestykkene 6+3=9, og 9+3=12. Hun så en sammenheng mellom summen på de tre regnestykkene, og at det økte med tre. Hun så at summen på det første regnestykke pluss tre, var summen på det andre regnestykke, og at summen på det andre regnestykke pluss tre var summen på det tredje regnestykke. Deretter lagde hun tre tallinjer, og skrev opp de tre regnestykkene igjen, nederst til høyre på arket. Under argumentasjonen til Stine kom det frem at disse to delene ved tegningen ikke hadde noen funksjon.

Stine brukte tegningen som utforskingsverktøy ved at hun måtte prøve seg frem for å finne en løsning på problemet (Dahl, 2020, 207). Hun visste at 6+3 var 9, og at 9+3 var 12, men hun prøvde seg frem med ulike representasjoner for å prøve å belyse hvorfor summen alltid vil være i 3-gangen når man legger sammen tre påfølgende tall.




Figur 14: Stines resonnering rundt tre påfølgende tall

## 4.2 Elevenes argumentasjon

Tegningene ble brukt på ulike måter i selve argumentasjonen. Tegningen fungerte enten som startpunkt for argumentasjon eller var en direkte del av selve argumentasjonen, som data, konklusjon, garanti eller akseptert kunnskap.

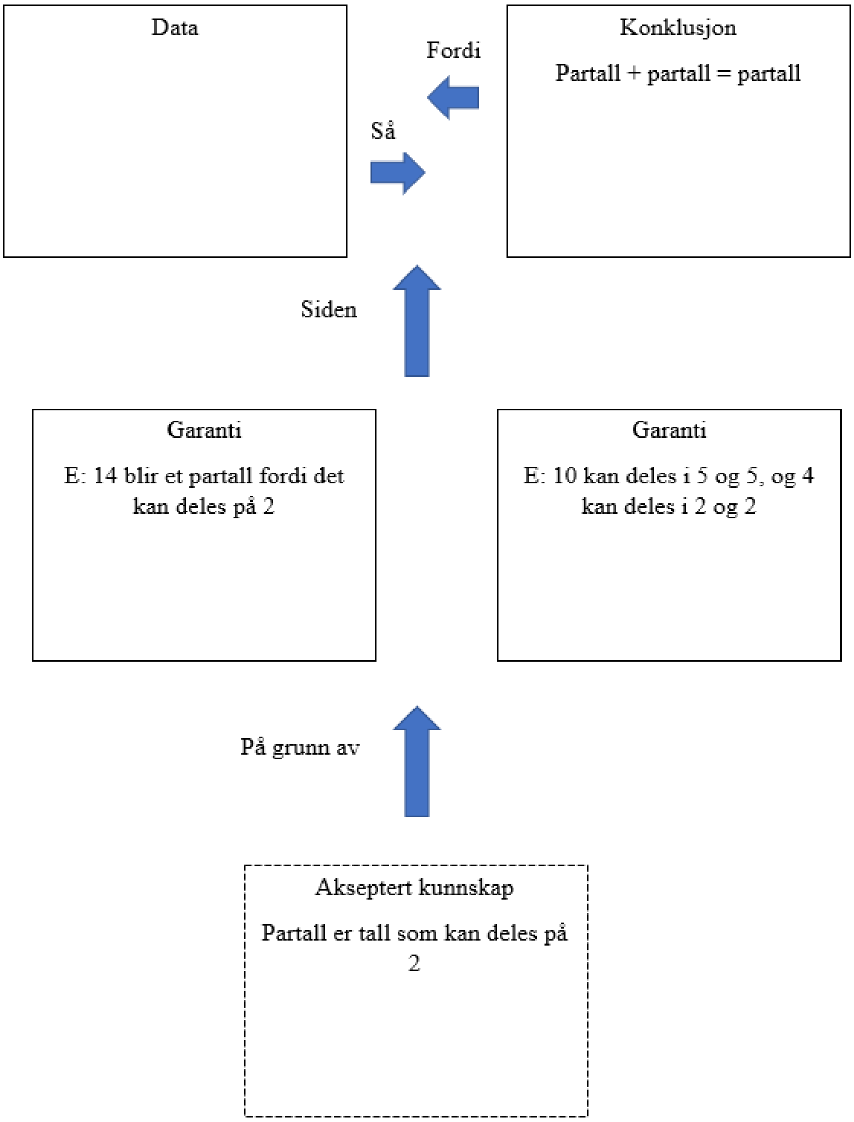
### Tegning som startpunkt

Det var totalt tre eksempler der elever brukte tegningen som et startpunkt for argumentasjon. Dette var Hanne sitt arbeid med oppgaven partall, og Markus og Stine sitt arbeid med oppgaven sju kort.

Hanne sin tegning som utforskingsverktøy fungerer som et startpunkt for argumentasjon. Med dette menes at det er ingenting i selve tegningen som i seg selv er en del av argumentasjonen. For at noe skal kunne regnes som data må det understøtte konklusjonen; noe må ligge til grunn for at man skal kunne konkludere. Hanne argumenterte med utgangspunkt i regnestykket 10+4 =14, som hun skrev ned på tegningen. Det er ingenting i verken tegningen eller regnestykket som understøtter eller gir Hanne grunnlag til å si noe om hvorfor partall+partall=partall. Siden det ikke er produsert noe data utover dette regnestykket, kan det derfor diskuteres hvorvidt Hanne sitt argument, faktisk er et argument, da Krummheuer (1995) sier at noen form for data må være produsert for at det skal kunne regnes som et argument.

Konklusjonen og garantien til Hanne bygger på det regnestykket Hanne valgte å bruke for å forklare hvorfor partall+partall blir partall. Garantien til Hanne er at 14 er et partall fordi det kan deles på to, uten å få rest. Dette garanterer hun ytterligere ved å si at ti er et partall fordi det kan deles i fem og fem, uten rest, og at fire kan deles i to og to, uten rest. Hanne nevner ikke selv «uten rest» men med utgangspunkt i de uttalelsene Hanne kommer med, er det tydelig at det er det hun mener. Det er med utgangspunkt i dette, at Hanne konkluderer med at partall+partall=partall.

Den aksepterte kunnskapen som vi kan si ligger implisitt i det hun sier, er at partall er tall som kan deles på to, uten å få rest. Dette viser hun ved å dele 10 i fem og fem, og fire i to og to. Selv om hun ikke sier at 14 kan deles i sju og sju, kan vi anta at det er det hun mener når hun sier at det kan deles på to.

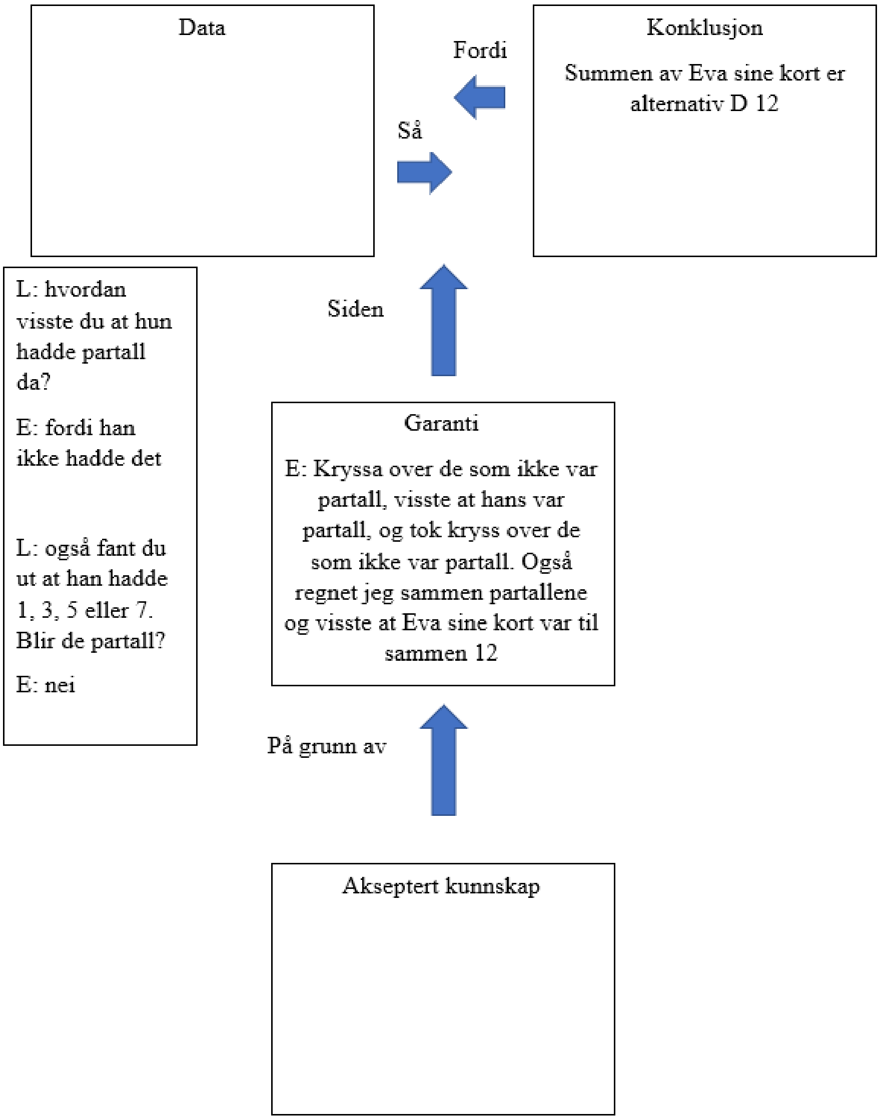



Figur 15: Hannes argumentasjon rundt summen er partall

Markus brukte også tegningen som startpunkt for argumentasjon. Tegningen hans som informasjonsholder, som er presentert tidligere, kan ikke fungere som data, da han kun skrev tallkortene 1-7, for så å krysse ut og velge 2,4 og 6 som de tallene som Eva hadde trukket. Konklusjonen blir derfor ikke understøttet utover at 2, 4 og 6 til sammen blir 12.

Selv om tegningen hans ikke fungerer som data, er det denne prosessen hvor Markus eliminerer og velger tallene 2,4 og 6 som er det han begrunner og konkluderer ut ifra. Det kan også her diskuteres hvorvidt argumentasjonen til Markus faktisk er en argumentasjon, i og med at Markus ikke har produsert noe data.

Markus konkluderer med at summen av Eva sine kort er alternativ D 12. Når han skal begrunne og gi garanti for sin tenkning, kommer det ikke helt frem hvordan han hadde tenkt. Først sier han at han krysset over alle de som ikke var partall, fordi han visste at Lars sine kort var partall. Når han får spørsmålet hvordan han visste at Eva hadde partall, siden han hadde funnet ut at hennes kort også var partall, svarte han: «fordi han ikke hadde det». Det er her det går litt i surr, og det kommer ikke tydelig frem hvordan han hadde tenkt. Videre ble han spurt om tallene 1, 3, 5 og 7, som er de kortene som Lars kunne trukket mellom, om de blir partall. På dette svarte han nei. Markus har funnet riktig løsning på problemet, men det er vanskelig å fastslå hvordan han kom fram til denne løsningen, da han ga motstridende forklaringer. Han virket ikke å være klar over at oddetall og oddetall blir partall. Men det er tydelig at han hadde tenkt på noe rundt partall og oddetall, siden han så raskt valgte å krysse ut oddetallene og gi Eva alle partallene. Garantien kan det derfor settes spørsmålstegn ved, i og med at de to garantiene han produserte er motstridende.



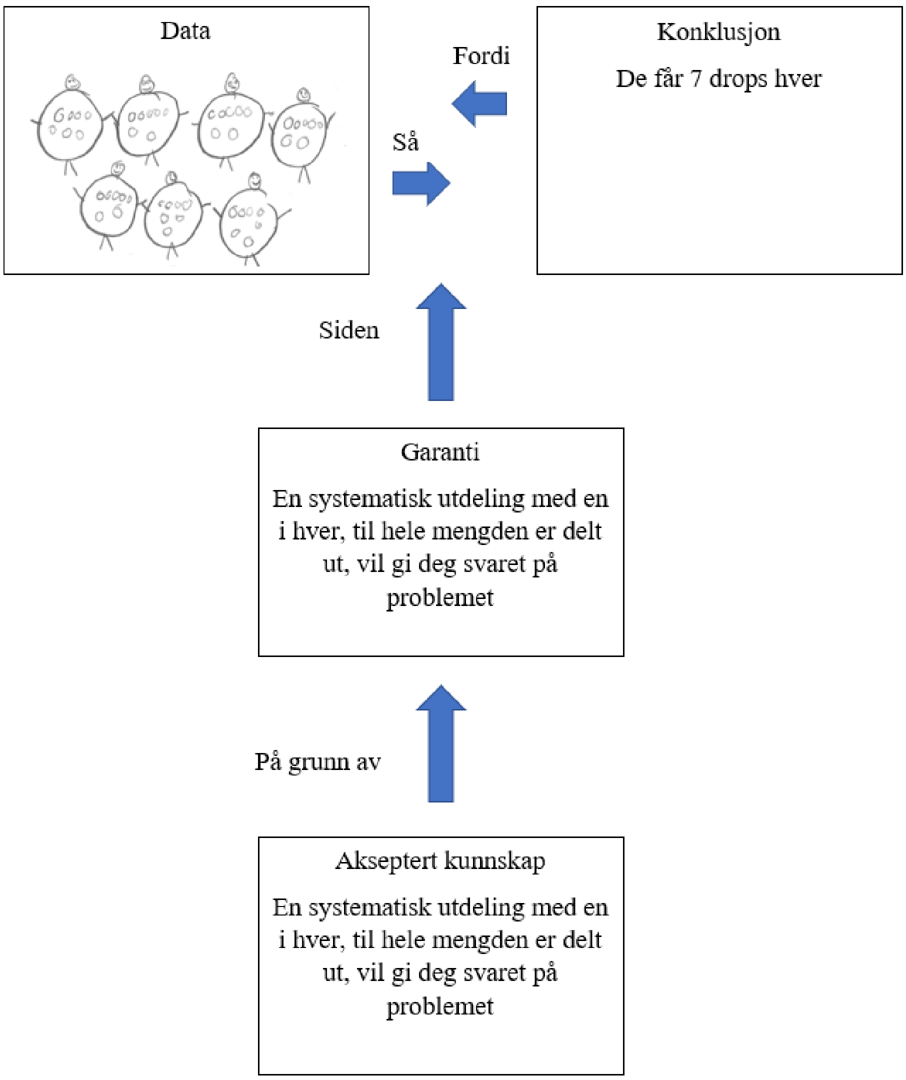

Figur 16: Markus' argumentasjon rundt sju kort

### Tegning som direkte del av argumentasjon

Det var høyest forekomst av tegninger som var direkte del av argumentasjon. Med dette menes at tegningen enten fungerte som data, konklusjon, garanti eller akseptert kunnskap.

**Tegning som data**

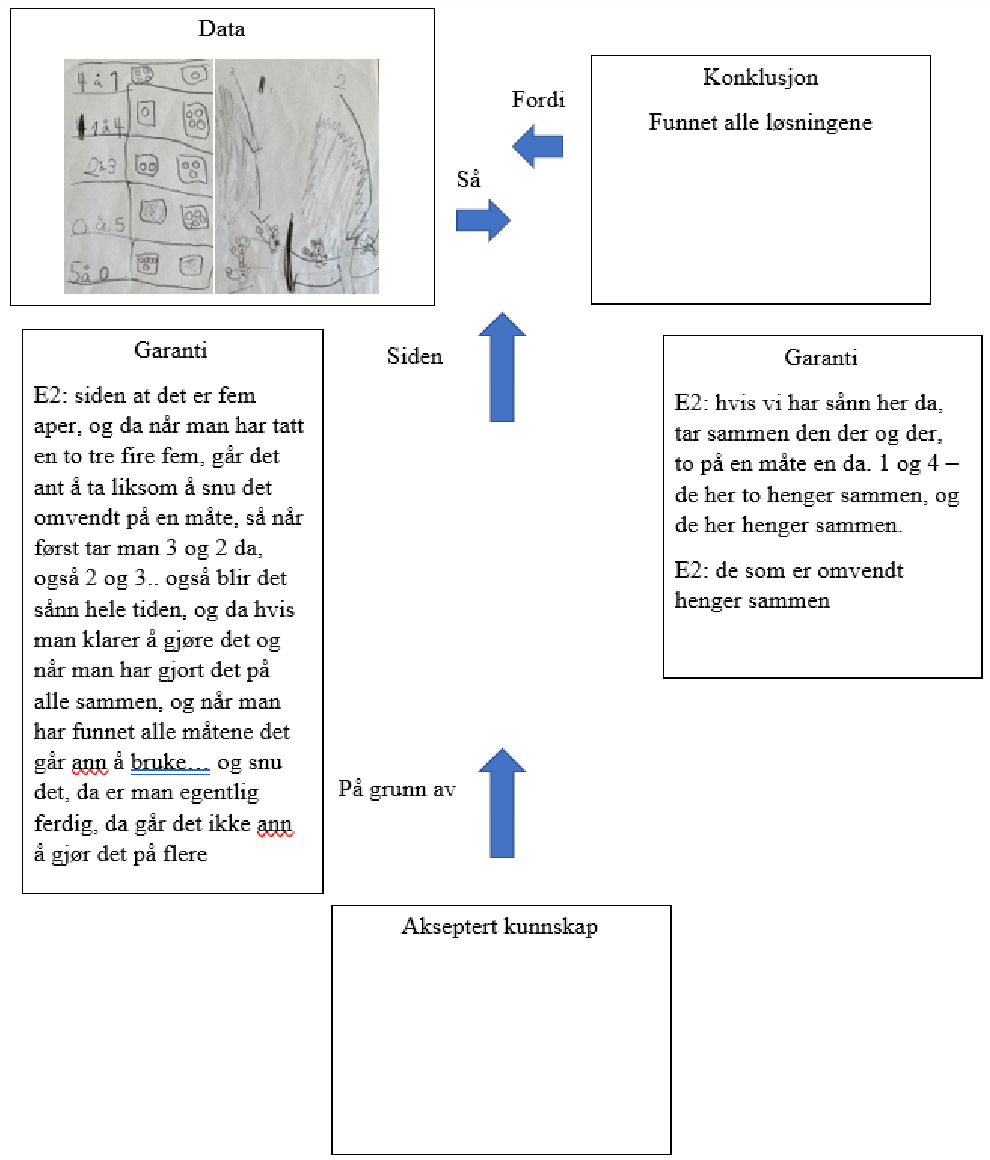
Jeg illustrerer funnet med Hannes arbeid med oppgaven 49 drops. Hannes data er den delen av tegningen hvor hun brukte tegningen som konkretiseringsmateriale og telleverktøy. Det er med utgangspunkt i denne delen av tegningen, at hun kan konkludere med at de får sju drops hver. Tegningen hennes understøtter konklusjonen, ved at vi kan se på tegningen at det er sju barn som til sammen har fått sju drops hver. Den tegningen hun produserte understøtter konklusjonen fordi hun aktivt brukte tegningen som konkretiseringsmateriale og telleverktøy underveis i resonneringen. Med andre ord vil den prosessen Hanne gjorde underveis, ved å dele ut drops til hvert barn samtidig som hun holdt styr på antall ved å telle underveis, gjøre henne i stand til å kunne konkludere med at hvert barn får sju drops hver. Hennes garanti og akseptert kunnskap ligger i grenseland mellom eksplisitt og implisitt, dette da den systematiske utdelingen er en del av Hannes problemløsning, og derav noe hun selv gjennomførte. Men Hanne begrunner ikke ut ifra denne utdelingsprosessen, derav kan utdelingen som garanti og akseptert kunnskap regnes som implisitt. Hannes garanti og akseptert kunnskap regnes derfor for å være den prosessen hvor Hanne deler ut en drops til hvert barn, helt til hun har delt ut det totale 49 drops. Denne strukturerte utdelingen gjør henne i stand til å trekke konklusjoner, da ved å dele ut en og en til hver, vil føre til at alle får like mange når hele mengden er delt ut.  Den aksepterte kunnskapen går derfor ut på at en systematisk utdeling vil gi deg svaret på oppgaven.




Figur 17: Hannes argumentasjon rundt 49 drops

Et annet eksempel har jeg hentet fra Lises og Maris arbeid med oppgaven aper i trær. Lise og Mari brukte tegningen til å holde på informasjonen i problemet; de to trærne og de fem apene, og brukte tegningen aktivt når de skrev ned hver løsning og snudde om på tallene for å lage nye løsninger. Det er denne prosessen som betegnes som data, og som understøtter og gjør dem i stand til å konkludere med at de har funnet alle løsningene.

Garantien deres begrunner og understøtter hva det er i deres data som fører til den konklusjonen de har trukket. De garanterer ved å si at hvis man tar alle måtene en gang, f.eks. 1-4, 2-3, 5-0, så kan man ta å snu tallene og «gjøre det omvendt». Hvis man gjør det omvendt på alle, så har man funnet alle løsningene. For eksempel hvis man først tar 2 og 3, altså to i det første treet og tre i det andre, så er det en måte. Deretter gjør man omvendt og tar 3 og 2; tre i det første treet og to i det andre, som også er en måte. De garanterer videre med at 2 og 3 og 3 og 2 er en måte, men samtidig to. Med det mener de at man fort kan se på det som en måte, og anse 2 og 3 og 3 og 2 som kun en mulig måte. Men siden apene kan fordele seg enten to i det første og tre i det andre, eller tre i det første og to i det andre, kan apene fordele seg på to ulike måter.



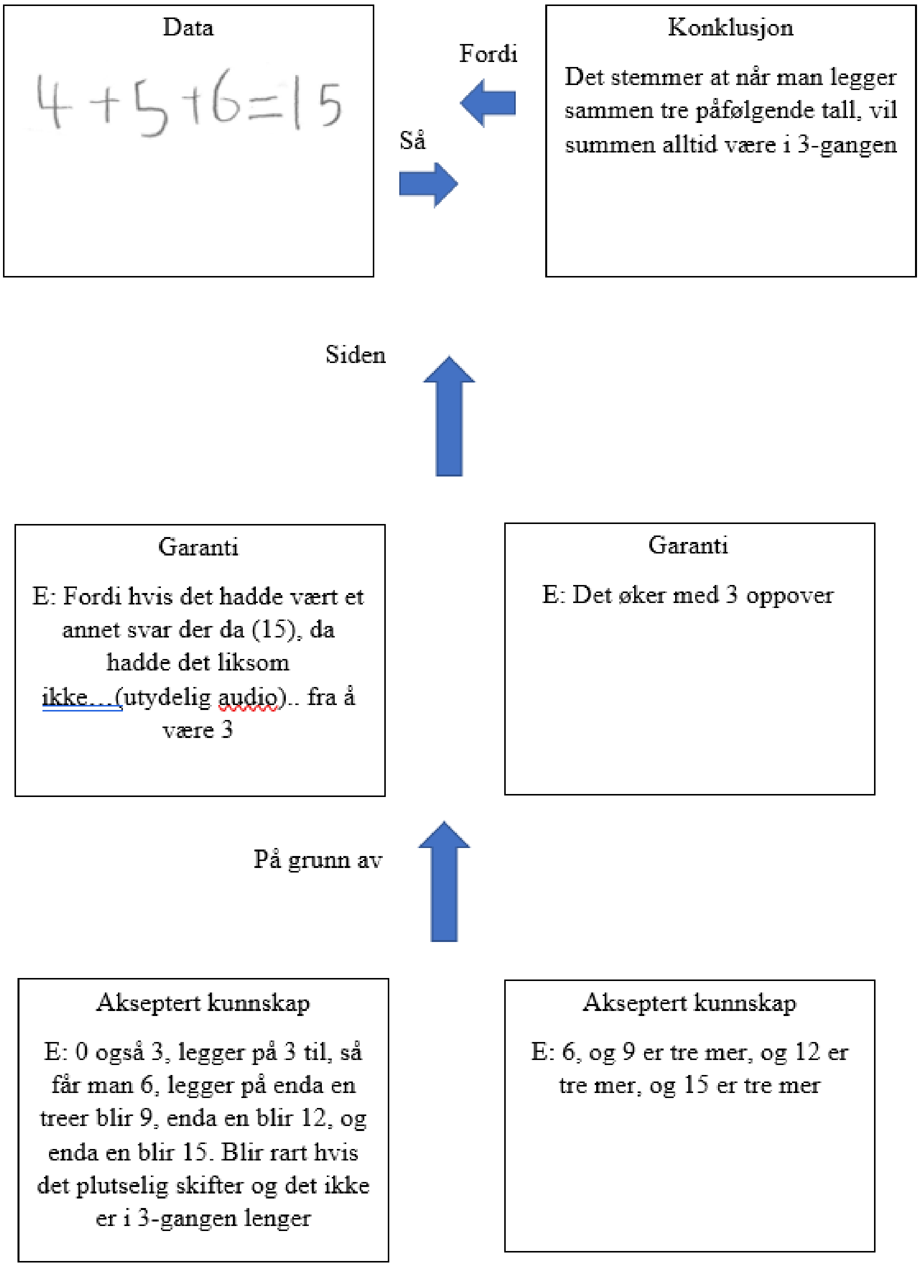

Figur 18: Lises og Maris argumentasjon rundt aper i trær

Et siste eksempel er Markus sitt arbeid med oppgaven tre påfølgende tall. Han brukte tegningen som utforskingsverktøy, ved at han prøvde seg frem for å sjekke om summen av neste regnestykket i følgen også ville være i 3-gangen. Regnestykket 4+5+6=15 regnes derfor som Markus sin data, fordi det er dette regnestykket han produserte på tegningen, for å finne ut om det stemmer eller ikke at summen alltid vil være i 3-gangen når man legger sammen tre påfølgende tall. Det er dette regnestykket resten av argumentasjonen bygger på.

Når Markus ser at svaret på det neste regnestykket i følgen også er i 3-gangen, konkluderer han med at det stemmer at når man legger sammen tre påfølgende tall, vil summen alltid være i 3-gangen. Garantien Markus kommer med er at det øker med tre oppover, noe han sier at han ser på svaret på regnestykkene. Han sier at han telte 6, 9, 12, 15, og siden det også økte med tre fra 12 til 15, så skjønte han at det stemte. Han garanterer videre ved å si at dersom det hadde vært et annet svar enn 15 på det neste regnestykket i følgen, hadde det ikke vært i 3-gangen, og ikke lenger økt med tre. Den aksepterte kunnskapen understøtter dette, da Markus senere i samtalen sier;

> 0 også 3, legger man på 3 til, så får man 6, legger man på enda en treer blir det 9, enda en blir 12, og enda en blir 15. Blir rart hvis det plutselig skifter og det ikke er i 3-gangen lenger.

Når han så blir spurt på hvilken måte han kan se at det øker med tre, sier han «6, og 9 er tre mer, og 12 er tre mer, og 15 er tre mer», mens han henviser til svaret på regnestykkene. Dette utsagnet er det Krummheuer (1995) betegner som akseptert kunnskap, da de første sifrene i 3-gangen alltid vil være 3, 6, 9, 12 og 15, og det alltid vil øke med tre for hvert tall i 3-gangen.




Figur 19: Markus' argumentasjon rundt tre påfølgende tall

## Tegningen som konklusjon

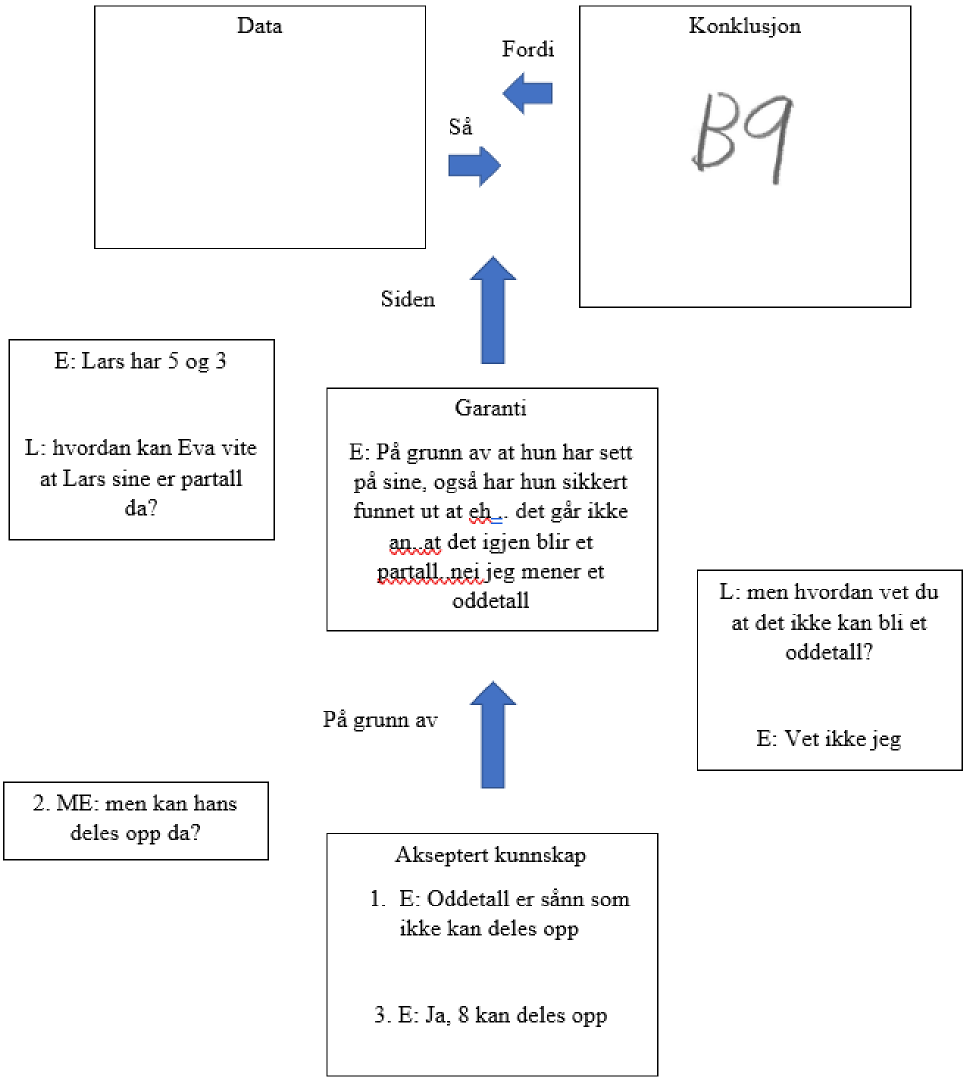
Kun en tegning fungerte som konklusjon. Dette var arbeidet til eleven Stine under oppgaven sju kort. Stine har ingen data utover tegningen hun produserte. Med dette menes at hun ikke har produsert noe som gir hun grunnlag for å trekke konklusjoner. I og med at Stine sin tegning ikke har noen data, kan det diskuteres hvorvidt hennes bidrag skulle vært plassert under den første kategorien; tegning som startpunkt, men siden Stine er den eneste eleven som har tegning som konklusjon, er hun plassert under denne kategorien.

Stine sitt startpunkt for argumentasjon, er den tegningen hun produserte for å holde på informasjonen i problemet. Hun lot Lars få kortene 5 og 3, som til sammen er 8, og Eva fikk tallene 6, 1 og 2, som til sammen er 9. Det er denne resonneringen hun konkluderte og begrunnet ut ifra.

Hennes konklusjon er derfor den delen av tegningen hvor hun har skrevet «B9», da det er denne delen som viser hva hun tror summen av Eva sine kort er. Det er ingenting annet på tegningen som fremstiller løsningen på problemet, derfor blir tegningen hennes kategorisert som konklusjon.

Når Stine blir spurt hvordan Eva kan vite at Lars sine er partall, begrunner hun ut ifra at Eva har sett på sine egne kort, og ut ifra sine egne kort, funnet ut at det ikke er mulig at Lars sine kort blir oddetall. Dette er Stines garanti. Når hun videre får spørsmål om hvordan hun vet at det ikke kan bli oddetall, sier hun først vet ikke. Hun sier at oddetall er tall som ikke kan deles opp, og når medeleven spør om Lars sine kort kan deles opp, sier hun «ja, 8 kan deles opp». Selv om hun ikke har funnet riktig løsning, og tankegangen hennes kan settes spørsmålstegn ved, har hun funnet to tall til Lars som til sammen blir partall. Hennes logiske resonnement er at Eva har sett på sine egne kort, som er 6, 1 og 2, og dermed vet at Lars sine også er partall. Denne resonneringen er feil, da Eva ikke med sikkerhet kan vite at Lars sine er partall. Tallene som står igjen etter at Eva har trukket tallene 6, 1 og 2, er både oddetall og partall, og Eva kan derfor ikke med sikkerhet si at Lars sine kort er partall. Det hun garanterer ut ifra kan derfor settes tvil rundt.

Den aksepterte kunnskapen til Stine er at oddetall er tall som ikke kan deles på to eller i like grupper uten å få en rest, og at Lars sine kort som til sammen er åtte, kan deles på to eller i like grupper uten å få rest, fordi det er et partall. Men den aksepterte kunnskapen gir ingen videre gyldighet for garantien, eller hvordan Eva kan vite at Lars sine kort er partall. Det kan derfor diskuteres hvorvidt den aksepterte kunnskapen passer inn eller ikke.



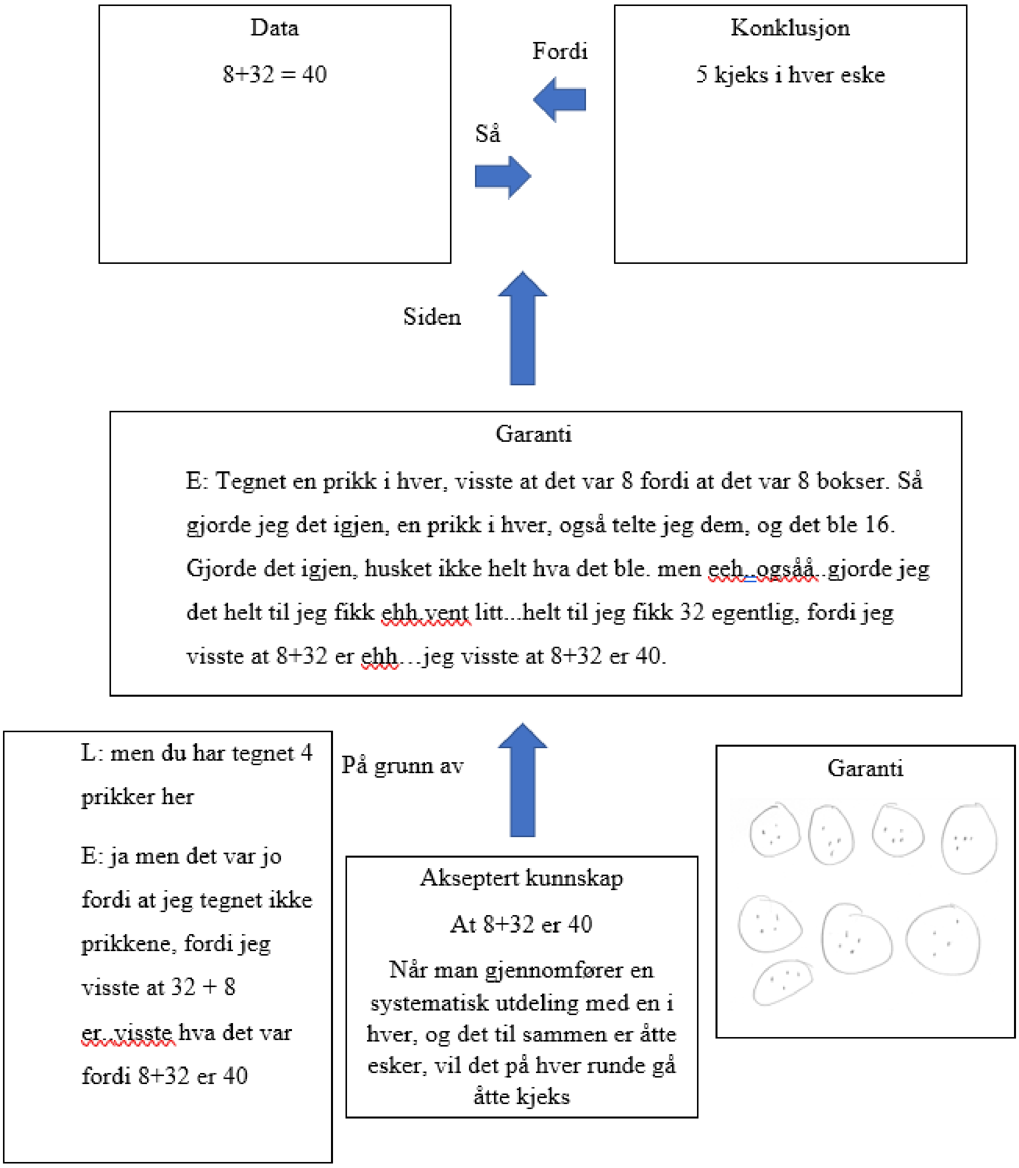

Figur 20: Stines argumentasjon rundt sju kort

**Tegning som garanti**

Noah og Lise var to av elevene som brukte tegningen som garanti. Dette kommer til syne i Noahs arbeid med oppgaven 40 kjeks. Noah kunne konkludere med at det ble fem kjeks i hver eske, fordi han visste at 8+32 var 40. Dataen hans er regnestykke 8+32=40, da det er denne uttalelsen argumentasjonen bygger på. Bak dataen ligger den prosessen Noah hadde ved å dele ut en og en kjeks i hver eske, helt til han kom til 32. I denne prosessen ligger også tanken om at det på en runde gikk åtte kjeks, noe som gjorde at når han kom til 32 utdelte kjeks, visste han at enda en runde med kjeks ville være den siste runden, da 8+32 er 40. Han lot derfor være å dele ut den siste runden med kjeks, fordi han visste at også på denne runden ville gå åtte kjeks, som på rundene tidligere. Han konkluderte derfor med at det ble fem kjeks i hver eske.

Det er denne prosessen som fungerer som Noahs garanti. Han begynte med å dele ut en kjeks i hver eske. Han visste at det på en runde ville gå åtte kjeks, da det var åtte esker til sammen. Noah telte oppover underveis i utdelingen av kjeks. Han fant derfor ut at han til sammen hadde delt ut 16 kjeks etter den andre runden. Han fortsatte å dele ut enda en til hver, og husket ikke antallet det ble denne gangen, men fortsatte på runde fire med å dele ut en til hver. Denne runden fant han ut at han hadde delt ut 32 kjeks til sammen, og siden det skulle deles ut til sammen 40 kjeks, og det var åtte esker og åtte kjeks på en runde, sa han seg ferdig med å dele ut flere kjeks. Han visste at 8+32 ble 40, og følte derfor ikke det var noen vits i å fortsette å dele ut de siste kjeksene. I tillegg til denne forklaringen, fungerer også tegningen til Noah som garanti. Grunnen til dette er at selve utdelingen og tellingen som ble gjort underveis i arbeid med oppgaven, er den prosessen som gjorde han i stand til å konkludere med at det ble fem i hver, da det er denne prosessen som gjorde at han endte opp med regnestykket 8+32=40.

Den aksepterte kunnskapen er den samme som Noahs data, som er at 8+32 er lik 40. Dette fordi han hadde en lang resonneringsprosess før han kom frem til løsningen på problemet. Hele den prosessen med utdeling og telling er det som betegnes for garanti. Det Noah ender opp med er å ikke dele ut den siste runden med kjeks, fordi han visste at 8+32 var 40. Dette regnestykke og prosessen bak er det Noah kunne konkludere ut ifra, men også det som regnes om akseptert kunnskap. Han visste at det på en runde gikk åtte kjeks, og at det derfor også ville gå åtte kjeks på den siste runden. Siden det til sammen skulle deles ut totalt 40 kjeks, og han etter den fjerde runden hadde delt ut 32, brukte han den kunnskapen han visste om at det på en runde gikk åtte kjeks, og den kunnskapen han visste om at 8+32 ble 40, for å finne løsningen på problemet. Den aksepterte kunnskapen er derfor det faktum at når man gjennomfører en systematisk utdeling, og det på en runde går åtte kjeks, så vil det også gå åtte kjeks på alle de andre rundene, samt at 8+32 er 40.



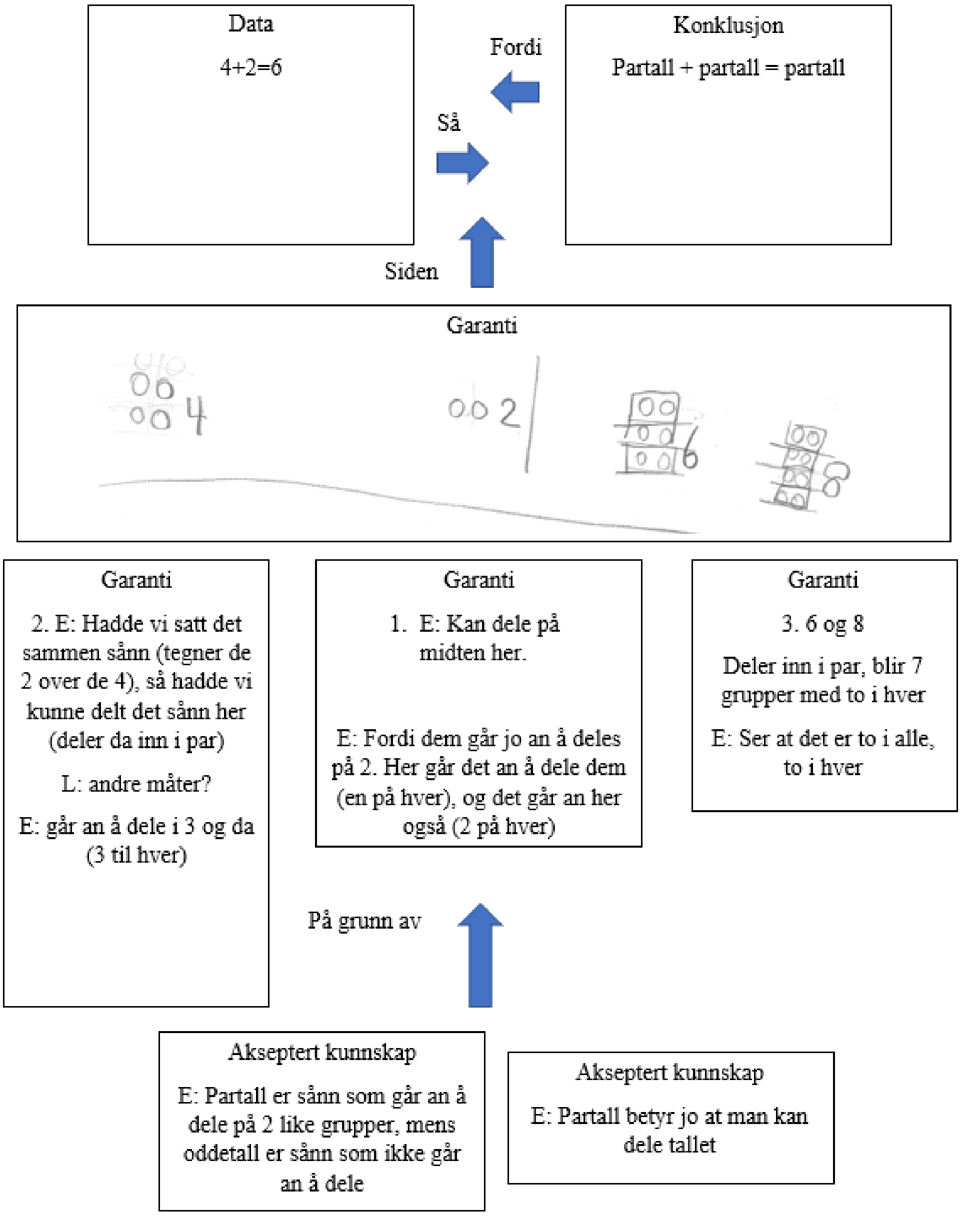

Figur 21: Noahs argumentasjon rundt 40 kjeks

En annen elev som brukte tegning som garanti var Lise. Det kommer til syne i arbeidet med oppgaven vis hvorfor partall+partall=partall, og oddetall+oddetall=partall. I tillegg til dette, ble Lise spurt om hun kunne vise hvorfor partall+oddetall=oddetall. I alle tilfellene ble tegningen Lise produserte brukt som garanti. Under alle tilfellene inneholdt argumentasjonen alle fire elementene.

Under partall+partall=partall, inneholder Lises argumentasjon hele tre garantier, og to aksepterte kunnskaper. Lise sin data er det de to tallene hun bruker som eksempel, som er 4 og 2, og det er dette eksemplet hun bruker for å vise hvorfor partall og partall blir partall. Det er dette eksemplet hun bruker videre, i forklaring og argumentasjon.

Garantien til Lise er både tegningen hun produserte og videre forklaringer rundt tegningen. Tegningen fungerer som garanti ved at hun bruker tegningen til å utforske problemet. Dette gjør hun ved å dele inn tallene i par for å se om de kan deles på to eller i like grupper uten å få rest.

Hun garanterer med at det går an å dele på midten, at man kan dele to i to, slik at det blir en på hver, og fire i to, slik at det blir to på hver. Dette ser vi også at hun har valgt å gjøre på tegningen, ved å sette en strek på midten. Videre garanterer hun med at dersom vi hadde satt alle seks prikkene oppå hverandre, så kunne vi delt det inn i par, og da nevner hun at det kunne blitt tre par, med to på hver, eller to par, med tre på hver. Hun lager ytterligere en garanti, ved å vise til enda et eksempel; tallene 6 og 8. Hun deler så tallet seks i par, og gjør det samme med tallet 8. Hun finner ut at det er sju par til sammen, og sier at det er to i alle/to i hver, som en garanti for hvorfor det blir partall. Det er ut ifra dette at hun konkluderer med at når man legger sammen et partall med et partall, vil summen alltid være partall. Den aksepterte kunnskapen er at partall er tall som man kan deles på to like grupper, og at man kan dele tallet, f.eks. i par, uten å få noen rest.



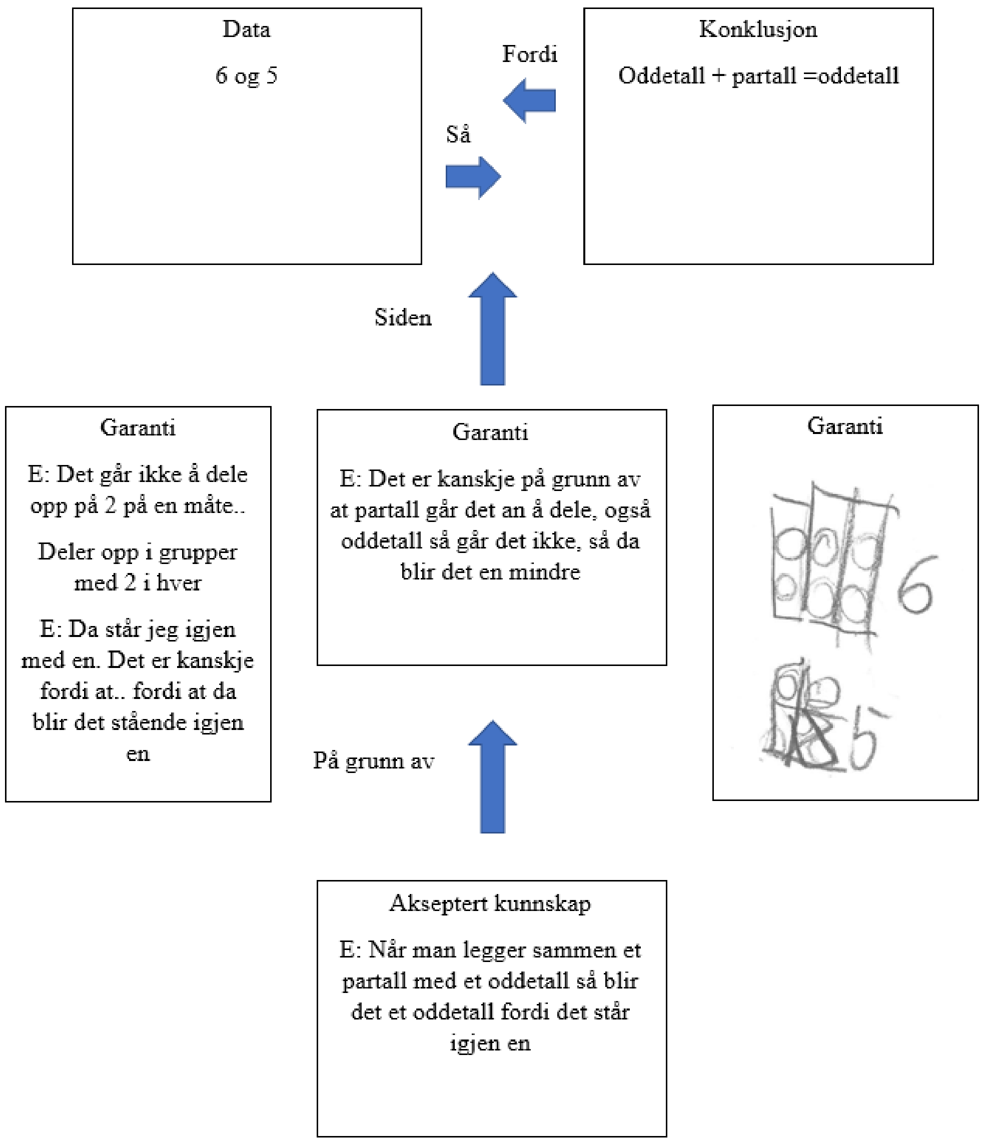

Figur 22: Lises argumentasjon rundt partall+partall

Tegningen til Lise fungerer også som garanti under oppgaven oddetall+partall=oddetall. Lise sin data er det eksemplet hun bruker til å vise og begrunne ut ifra, som er 6 og 5. Garantien til Lise er både tegningen hennes som viser at det ikke går an å dele opp i par, eller i to like grupper uten å få rest, samt hennes videre forklaringer rundt tegningen. Hun garanterer med å si at det ikke går an å dele opp på to. Med andre ord at hun ikke klarer å dele i par eller i like grupper uten å få rest. For å vise hvorfor dette ikke går, lager hun en tegning som garanterer for hvorfor det ikke er mulig. Hun benytter seg av tallene 6 og 5, og velger også her å dele inn i par. På tegningen kan vi se at det ble en til overs. Hun utdyper dette ved å si at «det blir stående en igjen», en som ikke har noen å danne et par med. Med andre ord mener Lise at summen av et partall og oddetall alltid blir et oddetall, fordi det mangler en for at alle skal kunne ha en å danne et par med. Grunnen til at det blir en til overs, er fordi «partall kan man dele, mens oddetall går ikke an å dele», derfor mener Lise at det blir en mindre. Altså mangler det en for å kunne danne enda et helt par. Med andre ord kan partall deles uten å få rest, det kan ikke oddetall.

Lises aksepterte kunnskap er at når man legger sammen et partall med et oddetall, så blir det et oddetall fordi det står igjen en. Dette er uforanderlig, et partall vil alltid kunne deles uten å få rest, men siden et oddetall alltid vil få en rest, vil det bli stående en igjen som ikke har noen å dele par med. Det er ut ifra dette at hun konkluderer med at oddetall+partall=oddetall.

Lise nevner heller ikke ordene «uten rest», i noen av argumentasjonene sine. Selv om hun ikke eksplisitt nevner disse ordene, kan vi med utgangspunkt i tegningen hennes og forklaringen rundt tegningen, si at hun er klar over at partall er tall som kan deles i par eller like grupper, uten å få rest, mens oddetall er tall som ikke kan deles i par eller like grupper, uten å få rest.

Lise sitt eksempel, som hun bruker under argumentasjon partall+partall, og oddetall+partall ble betegnet som data. Dette eksemplet kan virke tilsynelatende lik Hanne sitt eksempel som ikke ble betegnet som data, under samme oppgave. Årsaken til at Lise sine eksempler betegnes som data og ikke Hanne sitt, er fordi eksemplene hadde ulike funksjoner under resonneringen og argumentasjonen. Eksemplene til Lise ble aktivt brukt, ved at hun tegnet opp og viste hvordan hun tenkte på tallene som var blitt valgt, rundt oppgaven summen er partall, mens Hanne hadde ingenting rundt tallene eller eksemplet som sa meg noe om hvordan hun hadde tenkt rundt det. Det var derfor ikke mulig å tolke Hanne sitt regnestykke.

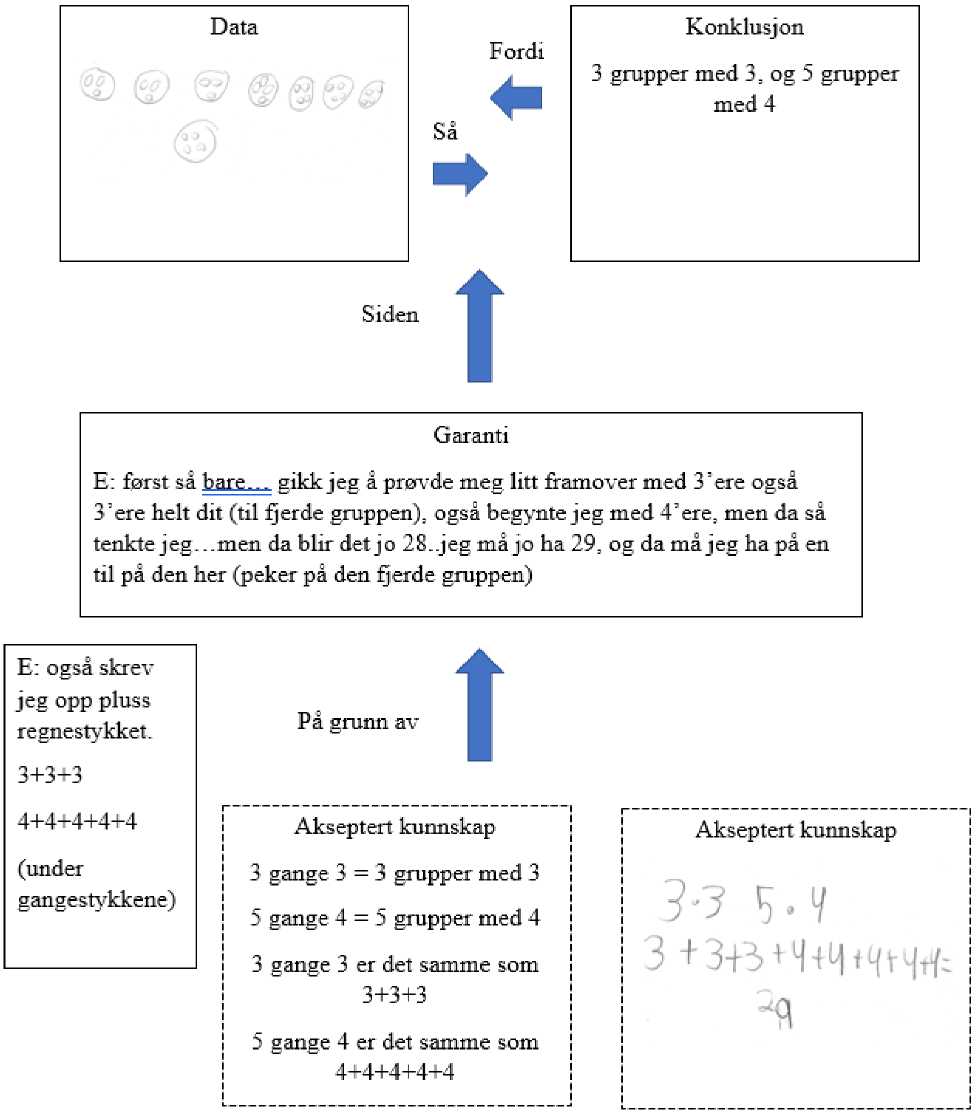



Figur 23: Lises argumentasjon rundt oddetall+partall

### Tegning som akseptert kunnskap

To tegninger fungerte som akseptert kunnskap. Begge disse tilfellene er fra elev Stine, og hennes arbeid med fotballcup og tre påfølgende tall. I begge tilfellene kan tegningen både regnes som data og akseptert kunnskap, da ulike deler av tegningen kan regnes som ulike deler i argumentasjonsmodellen, fordi de kan tjene ulike formål.

Stine sin data er den delen av tegningen hvor hun har tegnet tre grupper med tre i hver, og fem grupper med fem i hver. Dataen bygger på den prosessen hvor hun delte ut barna i bilene samtidig som hun telte underveis i utdelingen, og skrev opp tellestreker. Det er denne prosessen som gjorde hun i stand til å konkludere med at det er tre grupper med tre barn i hver, og fem grupper med fire barn i hver. Garantien til Stine går ut på at hun prøvde seg frem med å ha tre barn i hver bil, i bil 1-4. Uten å tegne barna i de resterende fire bilene, telte hun fire barn i de resterende fire bilene. Hun fant ut at hun da kun hadde delt ut 28 barn, og siden det til sammen var 29 barn, manglet et barn å få plass til fotballcupen, og derfor måtte den fjerde bilen ha enda et barn, slik at den også fikk fire barn. Det ble derfor fem grupper med fire barn, og tre grupper med tre barn. Dette fremstilte hun ved å skrive opp gruppene og antall i hver som både addisjon- og multiplikasjonsstykker. Den aksepterte kunnskapen er implisitt da hun ikke forklarte noe rundt de regnestykkene hun hadde lagd. Den implisitte aksepterte kunnskapen kan derfor her være at 3 grupper med 3 i hver er det samme som 3+3+3 og 3*3, og at 5 grupper med 4 i hver er det samme som 4+4+4+4+4 og 5*4. Selv om hun ikke eksplisitt sier dette, nevner hun at det til sammen ble tre grupper med tre barn, og fem grupper med fire, når hun konkluderer. Det kan derfor tolkes at addisjon- og multiplikasjonsstykkene står i relasjon til gruppene og antall i hver, og at det ble skrevet opp for å vise to andre måter det kunne representeres på.




Figur 24: Stines argumentasjon rundt fotballcup

Stine brukte tegningen som utforskingsverktøy under oppgaven tre påfølgende tall. Det er gjennom utforsking hun finner ut at svaret på regnestykkene er i 3-gangen, og derfor regnes regnestykkene som data i dette tilfelle.

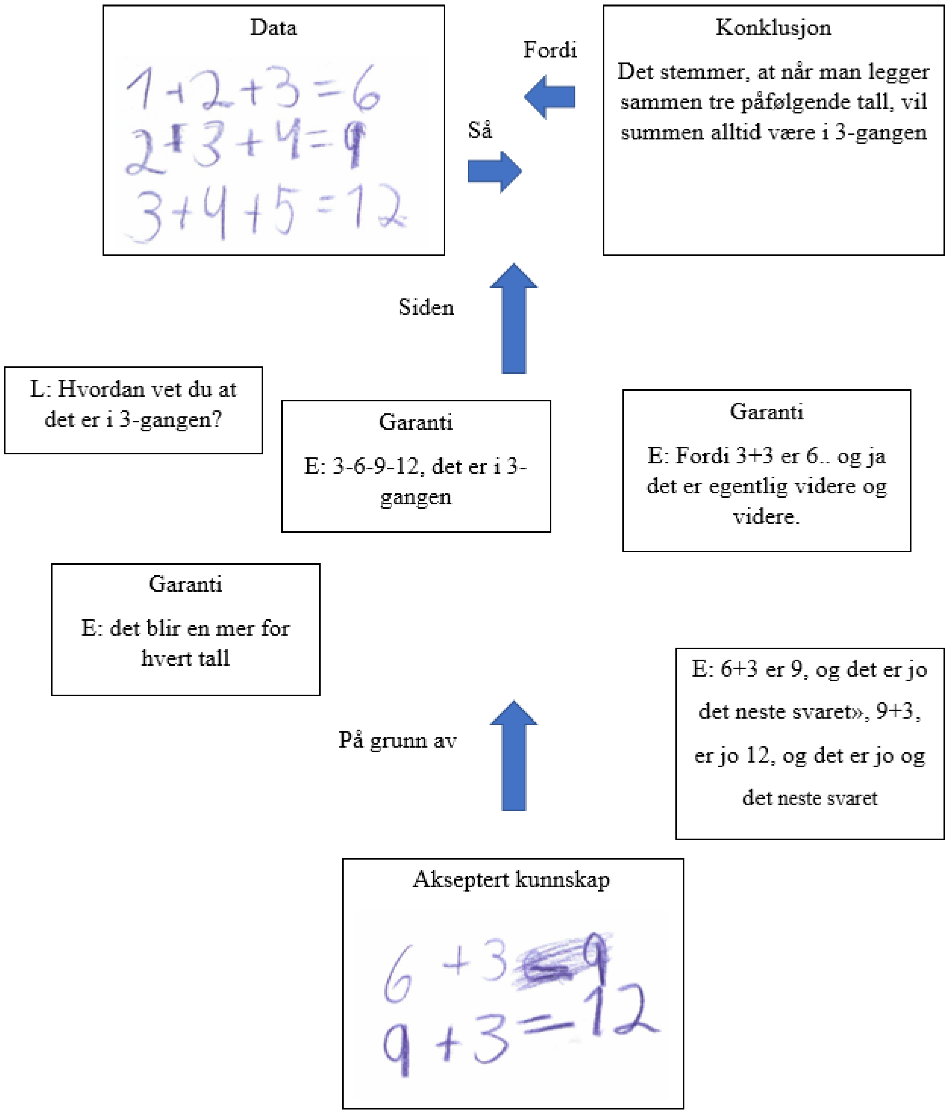
Hun garanterer ved å ramse opp de fire første tallene i 3-gangen, 3-6-9-12, og sier at alle svarene på regnestykkene er i 3-gangen. Når hun får spørsmålet hvordan hun kan vite at det er i 3-gangen, garanterer hun ytterligere ved å si «fordi 3+3 er 6, så det er egentlig videre og videre da..6+3 er 9». Her ser Stine 3-gangen i sammenheng med addisjon, og det kommer frem at Stine vet at det øker med tre for hvert tall i 3-gangen.

For å sjekke om det var i 3-gangen, tok hun summen av det første regnestykket, som er 6 og la på 3, og fant at det var lik 9, som var svaret på det andre regnestykket. Den aksepterte kunnskapen er derfor at «6+3=9, og 9+3=12». Dette forklarer hun ytterligere ved å si:

> 6+3 er 9, og det er jo det neste svaret. 9+3 er jo 12, og det er jo det neste svaret.

Stine så en sammenheng mellom summen på de tre regnestykkene og at det økte med tre, og derfor kunne hun konkludere med at det stemmer at summen alltid vil være i 3-gangen, når man legger sammen tre påfølgende tall.

Når hun ble spurt hvor 6-tallet i «6+3» kom fra, svarte hun at det kom fra svaret på det første regnestykket. Hun sier at hun valgte å legge på tre fordi det var snakk om 3-gangen. Stine er derfor klar over at man i 3-gangen legger på tre for hvert tall. Når Stine fikk spørsmål om det var noen andre steder hun kunne se at hun måtte legge på tre, pekte hun på tallene nedover (1-2-3, 2-3-4, 3-4-5) og sa at det ble en mer for hvert tall. Det hun mente var at det økte med et tall for hvert tall nedover, og siden hvert tall økte med en, ble det til sammen at det økte med tre for hvert regnestykke. Dette er Stines tredje garanti.




Figur 25: Stines argumentasjon rundt tre påfølgende tall

**4.3 Oppsummering av analyse**

Funnene viser at det var fire ulike måter elevene brukte tegningen på under resonneringen. Tegningen ble brukt både for å modellere eller utforske problemet, som informasjonsholder, og som telleverktøy. Uavhengig av hvordan elevene brukte tegningen i resonneringen, ble alle 18 tegningene brukt aktivt under resonneringen, som et problemløsningsverktøy. Hele 15 av 18 tegninger kom frem til riktig løsning på problemet.

For å kunne si noe **mer** om hvordan elevene brukte tegningen i resonnering og argumentasjon i matematikk, ble det utformet en tabell som viste resonneringskategoriene og delene i argumentasjonsmodellen sammen. Tabell **6** tar for seg hvilke argumentasjoner som har data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap, og sammenkobler dette med hvilken funksjon tegningene hadde i resonneringen.

Tabell 6: en sammenkobling av resonneringskategoriene og delene i argumentasjonsmodellen

| | **Data** | **Konklusjon** | **Garanti** | **Akseptert kunnskap** |
|---|---|---|---|---|
| **Konkretiseringsmateriale** | 9 | 9 | 6 | 6 |
| **Telleverktøy** | 11 | 11 | 8 | 6 |
| **Informasjonsholder** | 1 | 3 | 3 | 1 |
| **Utforskingsverktøy** | 5 | 6 | 6 | 6 |

I tabell **4** var det til sammen kun fire tegninger som befant seg under resonneringskategorien utforskingsverktøy, mens her ser vi at det er fem tegninger som har data. Grunnen til dette er at en av tegningene under utforskingsverktøy hadde totalt tre argumentasjonsmodeller, så når resonneringskategoriene skulle sammenkobles med argumentasjonsmodellen ble hver av disse argumentasjonsmodellene regnet som en «tegning». Derfor er det nå flere «tegninger» under kategorien utforskingsverktøy.

Vi kan se i tabell **6** at det var høyest forekomst av argumentasjoner som hadde data og konklusjon, når elevene brukte tegningen som konkretiseringsmateriale eller telleverktøy. Over halvparten av argumentasjonene til elevene som brukte tegningen som konkretiseringsmateriale og telleverktøy hadde garanti og akseptert kunnskap. Andelen av argumentasjoner som hadde garanti og akseptert kunnskap, når elevene brukte tegningen som utforskingsverktøy var høyest. Av seks argumentasjoner, hadde hele fem argumentasjoner alle delene i argumentasjonsmodellen, mens alle seks hadde konklusjon, garanti og akseptert kunnskap.

## 5.0 Drøfting

Tidligere forskning viser til at tegning er et viktig verktøy i matematikk, både når det gjelder verktøy i problemløsning og som verktøy i kommunikasjon (Bakar et al., 2016; Brooks, 2009; Dahl, 2020; Papandreou, 2014; Saundry og Nicol, 2006; Woleck, 2001).

Alle tegningene med unntak av tre ble brukt som et problemløsningsverktøy. Tegningene i min studie hadde ulike funksjoner i problemløsningsarbeidet. Barna brukte tegningen for å modellere eller utforske problemet, holde på informasjonen i problemet, og som telleverktøy.

Kun tre av de 18 elevarbeidene der tegningen ble brukt som problemløsningsverktøy, førte frem til feil løsning eller ingen løsning i det hele tatt. Dette understøtter det Bakar et al. (2016, s. 87) sier om at forskning på matematisk tegning indikerer en positiv sammenheng mellom tegning og problemløsning. Med dette menes at forskning viser at tegningen fungerer som et verktøy for elevene i arbeid med problemløsningsoppgaver, og gjør de i stand til å finne en løsning på problemet. Forskning viser at barn som produserer tegninger, i mye større grad klarer å finne riktig løsning på problemene (Bakar et al., 2016, s. 87). Dette samsvarer med det Edens og Potter (2001, s. 217) skriver i sin artikkel om at det finnes et «positivt forhold» mellom tegning og akademisk oppnåelse. Selv om det ikke finnes noe form for konkrete bevis på at det ene fører til det andre, viser den høye forekomsten av elever som kom frem til en riktig løsning ved hjelp av tegning, at tegningen hjalp dem med å finne riktig løsning på problemet. Disse funnene alene viser hvilken nytte elevene har av tegning i arbeid med problemløsningsoppgaver.

Det var høyest forekomst av elever som brukte tegningen som konkretiseringsmateriale og telleverktøy. Bakar et al. (2016) viser til at de elevene som brukte tegningen underveis, brukte tegningen først til å modellere problemsituasjonen og deretter som et telleverktøy for å komme frem til svaret. Den høye forekomsten av disse kategoriene i min studie, kan indikere at elevene følte det var mest nyttig å modellere situasjonen, slik den utspilte seg i problemet. I min studie ble ikke tegningen kun brukt som telleverktøy for å representere svaret på problemet, elevene brukte telling og utregning aktivt underveis som hjelp til å finne en løsning, hvor de telte underveis mens de delte ut eller eliminerte elementene i problemet. Kun en elev brukte tegningen til utregning, og dette ble gjort i forbindelse med å sjekke ut om summen av dette regnestykket ville være i 3-gangen. Grunnen til dette kan være at oppgavene i større grad la vekt på at elevene måtte utforske problemet for å komme frem til en løsning, heller enn at de kunne regne seg frem til svaret.

Sett bort fra resonneringskategorien telleverktøy, da denne ble brukt som en tilleggskategori, brukte elevene tegningen som konkretiseringsmateriale hyppigst. Det kan tenkes at denne kategorien ble hyppigst brukt fordi hele fem av åtte oppgaver omhandlet en aktiv handling, hvor en mengde med enten kjeks eller drops, eller barn skulle fordeles i grupper. Alle tegningene som ble produsert i forbindelse med slike utdelingsoppgaver, befant seg under kategorien konkretiseringsmateriale. Det er derfor tydelig at slike typer oppgaver la opp til denne typen tegning. Elevene var heller ikke i tvil om hvordan de skulle gå frem for å finne løsningen på problemet når de fikk denne typen oppgaver. Det kan derfor virke som at elevene umiddelbart visste hvordan de skulle løse oppgaven, både fordi oppgaven var utformet med en aktiv handling som enkelt kunne oversettes og representeres på tegningen, og fordi utdelings- og delingssituasjonen var kjent for elevene.

Forskning viser at visuell matematikk og tegning har lav status i matematikklasserommet (Boaler et al., 2016; Bakar et al., 2016, s. 87). Noe av grunnen til dette kan være det Boaler et al. (2016, s. 1) skriver i sin artikkel om at visuell matematikk ofte blir sett på som noe som tilhører arbeid av lavt nivå, for elever som sliter eller yngre elever, og at visuell matematikk kun skal fungere som noe man gjør før man går over til abstrakt tenkning. Boaler et al. (2016, s. 4) mener at problemet med skolematematikken er at det potensialet visuell matematikk bærer med seg ignoreres. De som anerkjennes i dagens matematikklasserom er de som er flinke til å memorere og regne godt ut ifra prosedyrer (Boaler et al., 2016, s. 4). Ifølge Boaler et al. blir elever som er svake til å memorere eller som er svake med tall, men gode til å produsere visuelle representasjoner, ofte henvist til spesialundervisningsklasser. Dette viser at visuell matematikk slik som tegning, ikke blir verdsatt i matematikklasserommet. Det virker å være en manglende forståelse for det potensialet visuell matematikk og tegning har i matematikklasserommet.

Den lave bruken av tegning i matematikk kan også ses i sammenheng med hvordan elevene ser på tegning. Ifølge Bakar et al. (2016, s. 87) ser elevene på tegning som en «teacher-only-strategy», at tegning er en aktivitet som kun skal utføres av en lærer. De anser det for vanskelig å produsere matematiske tegninger selv og ser ikke nytten i å bruke tegning i matematikk (Bakar et al., 2016, s. 87). Edens og Potter (2001, s. 215) hevder at tegning ikke kan anses å være et gyldig instruksjonsverktøy for matematikk. De hevder videre at tegneaktivitet regnes som «gøy», og at det derfor ikke er en aktivitet det kan skje læring i. Med dette lager de et skille mellom tegneaktivitet som er gøy, og matematisk læring, og at disse to aspektene ikke er forenelig. Det er ingen tvil om at tegneaktivitet og matematisk læring hører sammen. Tegneaktivitet er en meningsskapende aktivitet (Papandreou, 2014, s. 87), som hjelper elevene med å skape mening rundt matematiske begreper, ideer og problemer, og kommunisere det til andre.

Tegning hjelper elevene med å uttrykke seg og visualisere sin tenkning, ikke bare for andre, men også for seg selv (Brooks, 2009). Det er et verktøy som hjelper de å bringe sine ideer, tanker og forståelse til overflaten, og gjør de i stand til å sette ord på det. Papandreou (2014, s. 88) sier at tegningen hjelper elevene med å kommunisere sin løsning, når det er for vanskelig å forklare gjennom verbalt språk. Dette samsvarer med det Boaler et al. (2016) også skriver i sin artikkel. Boaler et al. (2016, s. 3) sier at når vi mennesker prøver å forklare noe, og vi ikke finner de ordene vi trenger for å få det til, prøver vi å forklare ved å visualisere vår tenkning. Tegningen blir da et hjelpemiddel for å få visualisert vår tenkning. Funnene viser at det er tydelig at elevene synes at det var både nyttig og enklere å bruke tegning som verktøy for å få visualisert og kommunisert sin tenkning, enn uten. Dette ser vi ved at hele 18 av 21 tegninger ble brukt aktivt underveis i problemløsningen, med det ser vi at ingen av elevene var i stand til å løse problemet uten å visualisere og bruke tegningen som et problemløsningsverktøy. Det vil si at ingen av tegningene ble gjort i etterkant av problemløsningen. Tegningen var med andre ord sentral for at elevene skulle være i stand til å uttrykke seg. Dette viser at visuelle representasjoner slik som tegninger, ikke bare er illustrasjoner som fungerer som pynt, men at de har en funksjon ved at de hjelper oss å skape mening, gir oss en dypere forståelse, og gjør oss i stand til å kommunisere og synliggjøre denne forståelsen for andre, slik Letnes skriver det i sin artikkel (2017, s. 113). Representasjoner er ikke statiske sluttprodukt, men er dynamiske verktøy som støtter barnas matematiske tenkning (Woleck, 2001, s. 215). Med dette menes at tegningen ikke bare fungerer som en illustrasjon som representerer hva elevene har kommet frem til, men at tegningen også er et hjelpemiddel underveis i resonneringsprosessen, og at det er denne resonneringsprosessen som kommer frem på tegningen.

Elevarbeidet til Noah under oppgaven 40 kjeks, kunne blitt avfeid og kategorisert som feil, dersom vi kun hadde sett på det som et produkt for seg selv. Dette da tegningen hans viser åtte esker med kun fire kjeks i hver, som er totalt 32 kjeks. Siden Noah skulle dele ut totalt 40 kjeks, hadde han ut ifra tegningen manglet åtte kjeks, og ikke funnet riktig løsning som er at det blir fem kjeks i hver eske. Bak dette sluttproduktet, som viser fire kjeks i hver eske, ligger det en lang resonneringsprosess. Noah delte ut en kjeks i hver eske, og siden det var åtte esker, visste han at det gikk åtte kjeks på en runde. Han delte ut en kjeks i hver eske, helt til han kom til 32 utdelte kjeks, og det var fire kjeks i hver eske. Det er dette vi ser på tegningen til Noah, og som kan tolkes som at Noah ikke har funnet riktig løsning. Men grunnen til at Noah kun hadde fire kjeks i hver eske, var fordi han visste at det på hver runde gikk åtte kjeks. Dette hadde han i bakhodet når han var ferdig med å dele ut den fjerde runden med kjeks, og totalt 32 kjeks. Han brukte den kunnskapen han visste om antall kjeks per runde, når han fant ut at han ikke trengte å dele ut den siste runden med kjeks, fordi han visste at 8+32 var 40. Denne resonneringsprosessen kommer ikke frem på tegningen til Noah. Det er gjennom det verbale språket, den samtalen som ble gjennomført i etterkant av resonneringen, som ga meg og medeleven innsikt i Noahs tenkning og forståelse rundt oppgaven 40 kjeks. Woleck (2001) sier at rikdommen av barns tenkning forsvinner dersom tegningen står alene. Flere forskere hevder også at en kombinasjon av ulike representasjoner kommuniserer bedre enn en av representasjonene alene (Papandreou, 2014; Edens og Potter, 2001). Dette samsvarer med funnet ovenfor, og flere andre funn gjort i studien. Dersom det ikke hadde vært enda en representasjon i tillegg til tegningen, i tilfellet med Noah, hadde det ikke kommet frem hvordan Noah faktisk hadde tenkt, eller at han faktisk hadde funnet riktig løsning på problemet.

Goldin et al. (2001, s. 2) sier at det er de eksterne representasjonene elevene produserer som gjør oss i stand til å trekke slutninger om elevenes interne representasjoner. Funnene i denne studien viser at de eksterne representasjonene til elevene ikke strekker til for å kunne trekke slutninger om elevenes tenkning og forståelse. Man kan derfor si at det er summen av de egenproduserte representasjonene og samtalen rundt, som gir oss innsikt i elevenes forståelse og tenkning, samt elevene muligheten til å kommunisere sin løsning og tenkning til andre.

Woleck (2001, s. 225) sier at tegningen kan fungere som et springbrett for å snakke om matematikk. Med dette menes at tegningene kan være et fint utgangspunkt for å snakke videre om matematikken man holder på med. I min studie fungerte tegningen som et utgangspunkt for videre samtale rundt hva elevene hadde gjort og hvordan de hadde tenkt, for å få en dypere forståelse av elevenes tenkning. Tegningene elevene produserte fungerte også som et utgangspunkt for argumentasjon, enten ved at tegningene fungerte som et startpunkt for argumentasjon eller at tegningene var en direkte del av argumentasjonen.

Det var høyest forekomst av tegninger som var del av argumentasjon, med kun tre som fungerte som startpunkt for argumentasjon. Dette betyr at elevene hadde produsert noe i tegningen som var en del av argumentasjonen, enten det var noe som la grunnlag for at de kunne konkludere, noe som sa noe om hva de konkluderte med, eller noe som begrunnet eller understøttet det de konkluderte med. Funnene viser at elevenes tegninger både fungerte som data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap.

Hele 15 argumentasjoner regnes som et fullverdig argument, altså har produsert noen form for data. Hele 11 argumentasjoner har alle delene i argumentasjonsmodellen, og hele 15 argumentasjoner har en eller flere garantier. Dette viser at argumentasjon ikke kun tilhører de høyere klassetrinnene eller at det er for avansert for barnetrinnet, slik Krummheuer sier det i sin artikkel (1995, s. 236-237). Den høye forekomsten av elever som hadde garanti, viser at elever også på barnetrinnet er fullt kapable til å begrunne og argumentere for sin løsning. Den svært begrensede tilgangen på forskning innenfor argumentasjon på småtrinnet i matematikk, kan tenkes å ha en sammenheng med akkurat dette; det anses å være for avansert for de minste elevene, og vektlegges derfor ikke. Det kan virke med den nye læreplanen, at vi nå er inne i et skifte hvor argumentasjon i større grad vektlegges i matematikklasserommet. Argumentasjon, sammen med resonnering har fått sitt eget kjerneelement i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det vil med andre ord si at den nye læreplanen ser på argumentasjon som et viktig element i matematikk, på alle trinn, ikke bare for de eldste.

Forskning viser at det er vanlig at elever i barneskolealder kun opererer med data og konklusjon (Krummheuer, 2007, s. 75). I min studie besto ikke elevenes argumentasjoner kun av data og konklusjon. Hele 12 argumentasjon som hadde data og konklusjon, hadde også garanti. I tillegg til dette hadde hele 11 argumentasjoner både data, konklusjon, garanti og akseptert kunnskap. Krummheuer (2007) sitt funn samsvarer derfor ikke med funnene gjort i denne studien. En mulig grunn til dette kan være at læreren i Krummheuer (2007) sin studie valgte å oppfordre elevene til å argumentere for sin løsning, kun i de tilfellene hvor elevene ikke hadde funnet riktig løsning på problemet. Som vist i mine, og Singletary og Conner (2015) sine funn, var lærerens oppfordringer og spørsmål avgjørende for om elevene begrunnet for sin løsning eller ikke. Siden læreren ikke kom med innspill eller stilte spørsmål, fikk ikke elevene kommunisert sin forståelse og tenkning, og ingen garanti eller akseptert kunnskap ble produsert. Singletary og Conner (2015) trekker frem at hvis kunnskapen er såpass grunnleggende for elevene, kan det føre til at de ikke føler behovet for å begrunne. Elevene anså begrunnelser som uvesentlige når kunnskapen var kjent, og derfor utelot en begrunnelse for sin løsning. Dette kan ses i sammenheng med det Krummheuer (2007) sier om at læreren i mye større grad godtok elevenes påstander dersom de var riktige, til tross for at det ikke lå noen begrunnelser bak dem. Det kan virke som at også læreren ikke anså begrunnelser som vesentlige når kunnskapen var kjent, og at kunnskapen i seg selv var begrunnelse nok.

Dahl, Klemp og Nilssen (2020) fant i sin studie at den dialogen som ga mest resonnering og argumentasjon var dialogen hvor elevene var kritiske til hverandres påstander og hvor de krevde begrunnelser fra hverandre. Dette viser hvor viktig det er at læreren er kritisk til elevenes påstander, og oppfordrer elevene til å begrunne for sin løsning. I min studie var elevene nødt til å argumentere for sine påstander, selv om kunnskapen var kjent for alle parter. Dette kan ha medført den store forekomsten av garanti og akseptert kunnskap blant elevenes argumentasjoner. Kun i to tilfeller ble begrunnelser gitt implisitt. Det vil si at jeg har tolket og lest litt mellom linjene i det elevene har gjort eller sagt. Dette viser at elevene i stor grad ble oppfordret til å begrunne for sine løsninger, og i stor grad behersket å gi egne garantier og akseptert kunnskap for løsningene sine.

Totalt fire tegninger befinner seg i grenseland mellom eksplisitt og implisitt, da deres garanti og akseptert kunnskap er den systematiske utdelingen de gjorde underveis for å finne en løsning på problemet. Disse elevene begrunnet ikke eksplisitt i denne strategien, men siden de anvendte strategien i selve problemløsningen er den heller ikke å regne som implisitt. Disse tre elevene hadde ingen annen begrunnelse rundt det de hadde gjort, annet enn sin fremgangsmåte, hvor de hadde delt ut en og en i hver til de fant løsningen på problemet. Selv om elevene ikke eksplisitt begrunnet med utgangspunkt i denne strategien, kan det tenkes at elevene følte fremgangsmåten og prosessen var nok begrunnelse i seg selv, til å kunne trekke konklusjoner. Det kan derfor diskuteres hvorvidt disse elevene ikke følte behovet for å argumentere ytterligere for sin løsning, da de anså strategien i seg selv som nok begrunnelse. Det er lett å tenke at disse elevene ikke har noen begrunnelse for sin løsning, og dermed avfeie at løsningen kan ha noen garanti eller akseptert kunnskap. Bak elevenes resonnering ligger det en tanke om at den strategien, hvor de systematisk deler ut en og en, vil føre frem til riktig løsning. Selv om elevene selv ikke begrunnet i denne strategien, vil det være trygt å anta at siden elevene raskt satte i gang med denne systematiske utdelingen, visste de at denne strategien ville føre frem til riktig løsning. Det er derfor viktig å være bevisst på at begrunnelser ikke nødvendigvis trenger å være fremtredende i form av muntlige uttalelser, skriftlig eller visuelt arbeid, men at det kan være selve prosessen og strategien elevene bruker for å komme frem til løsningen.

Selv om strategien til elevene som brukte en systematisk utdeling kan regnes som garanti og akseptert kunnskap, kan det likevel ses i sammenheng med de argumentasjonene som hadde garanti og akseptert kunnskap og ble brukt som utforskingsverktøy. Siden alle seks argumentasjonene hadde garanti og akseptert kunnskap, hvor alle begrunnelsene kan regnes som eksplisitte, kan man diskutere det faktum at elevene som brukte tegningen som utforskingsverktøy hadde et større behov for å begrunne for sin løsning. Sammenlignet med elevene som brukte tegningen som konkretiseringsmateriale, så var det ingenting i selve oppgavetypen som gjorde en fremgangsmåte mer logisk enn en annen, eller som «ga» elevene en løsningsstrategi som kunne fungere som garanti eller akseptert kunnskap. De elevene som brukte tegningen som utforskningsverktøy måtte utforske problemet, og prøve seg frem for å finne en løsning på problemet.

### 5.1 Metodediskusjon

I etterkant av innsamlingen har jeg reflektert rundt en del ting som kunne vært gjort annerledes. Det er lett å være etterpåklok, og når man er ny i forskningsfeltet er det lett å tenke i etterkant på alle endringene man kunne gjort. Det som hadde vært interessant hadde vært og gjennomført et pilotprosjekt for å finne ut hvilke typer oppgaver som ville fungere og ikke, og teste ut hvilke spørsmål som ville være relevant. På denne måten hadde jeg vært mer rustet når jeg faktisk skulle gjennomføre den «ordentlige» datainnsamlingen. Jeg har i etterkant, i prosessen med å transkribere datamaterialet gjentatte ganger sett situasjoner hvor jeg som forsker kunne stilt flere oppfølgings- og utdypingsspørsmål, noe som kunne gjort datamaterialet i studien enda bedre. Under selve innhentingen av data ble det prøvd ut ulike oppgaver, hvorav mange av de var suksessfulle, mens andre var mindre suksessfulle med tanke på å få elevene til å begrunne og argumentere. Dersom jeg hadde gjennomført et pilotprosjekt i forkant, kunne jeg fått testet ut hvilke typer oppgaver og spørsmål som ville ført til mest begrunnelser og argumentasjon, og hvilke som ikke la like mye til rette for det. I tillegg hadde jeg kanskje fått mer kunnskap om hvordan elevene faktisk kunne valgt å løse oppgavene, og dermed vært mer forberedt på hvordan jeg som forsker skulle respondert for å få mest mulig ut av elevenes arbeid. Men det skal sies at de aller fleste oppgavene ga elevene behov for å begrunne og argumentere, og som funnene i studien viser, så har både oppgavene og spørsmålene gitt meg tilstrekkelig med datamateriale til å belyse problemstillingen min.

Elevene i min studie hadde kjennskap til tegning fra før av. Det kan derfor diskuteres hvorvidt funnet som viser at hele 18 tegninger ble brukt som et problemløsningsverktøy er påvirket av at elevene visste hvordan de kunne bruke tegning som et verktøy i matematikk. Det kan tenkes at resultatet hadde blitt annerledes dersom man hadde gjennomført den samme forskningen i et klasserom hvor elevene ikke var kjent med bruken av tegning i problemløsning.

Prosessen med å kategorisere tegningene under resonneringskategoriene har vært utfordrende. I eksemplet med Lise og Mari under oppgaven aper i trær kan vi se at kategoriene ikke passet like godt, da deres elevarbeid kunne vært plassert både under kategorien konkretiseringsmateriale og informasjonsholder. Det måtte derfor tas et valg, og tegningen ble derfor kategorisert under hva jeg mente «passet best» ut ifra kategoribeskrivelsene.

Kategoriseringen og valg gjort i forbindelse med argumentasjonsmodellen har heller ikke vært bare lett. Jeg har i stor grad vært nødt til å gjøre mine egne tolkninger og ta valg basert på det. Det vil med andre ord si, at de valgene jeg har tatt, både i forbindelse med resonneringskategoriene og argumentasjonsmodellen, nødvendigvis ikke ville samsvart med de valgene noen andre forskere ville tatt. Det er min tolkning og forståelse som er lagt til grunn for de valgene jeg har tatt, derfor kan det tenkes at noen andre hadde tolket det på en annen måte og derav tatt andre valg.

## 6.0 Konklusjon

Formålet med studien var å si noe om hvordan tredjeklassinger brukte tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk. For å kunne belyse dette temaet, ble det sett nærmere på hvordan elevene brukte tegningen underveis i problemløsningen, og hvordan de brukte tegningen i argumentasjonen. Jeg hadde litt erfaringer med bruk av tegning i problemløsning, og hvor viktig verktøy tegning kan være i problemløsning. Etter endt undersøkelse sitter jeg igjen med mange av de samme tankene. Tegning er og forblir, et viktig verktøy i matematikkundervisning og læring.

I min studie så jeg at elevene brukte tegningen aktivt under problemløsningen. Hele 18 av 21 tegninger ble brukt som problemløsningsverktøy. De tre som ikke ble brukt som problemløsningsverktøy, var når elevene ikke visste hvordan de skulle gå frem for å løse problemet. 15 av de 18 tegningene fant riktig løsning på problemet, noe som kan indikere at det kan være et positivt forhold mellom tegning og akademisk oppnåelse (Edens & Potter, 2001, s. 217). Den høye forekomsten av tegninger som ble brukt som problemløsningsverktøy, viser at tegningen var helt sentral for elevene i problemløsningen, og hjalp de med å holde styr på informasjonen i problemet, fungerte som telleverktøy, hjalp dem med å analysere og utforske problemet, og fungerte som konkretiseringsmateriale. En mulig årsak til dette kan være at elevene hadde erfaring med bruk av tegning i problemløsning, og derfor visste hvordan de skulle utnytte tegningens potensial.

Elevene brukte også tegningen som et kommunikasjonsverktøy, både ved at elevene fikk uttrykt og visualisert sin tenkning på tegningen, og kommunisert sin tenkning til andre. Siden alle 18 elevarbeidene brukte tegningen underveis i problemløsningen, kan det tyde på at elevene ikke var i stand til å verken løse problemet eller kommunisere sin tenkning, uten å benytte seg av det visuelle. Tegningen hjalp elevene å kommunisere sin tenkning, da det virket å være for vanskelig å løse eller forklare kun gjennom verbalt språk, noe som samsvarer med det Papandreou (2014) og Boaler et al. (2016) sier i sin studie.

For at andre skulle få innsikt i deres forståelse og tenkning, ble det verbale språket brukt. Selv om tegning hjelper barn med å visualisere sin tenkning, har de ofte behov for å kombinere det med andre typer representasjoner for å forbedre kommunikasjonen (Papandreou, 2014; Edens & Potter, 2001). Under samtalen ble derfor både det verbale språket, og tegningene brukt for å best forklare hvordan de hadde løst oppgaven. Under samtalen henviste elevene til tegningen de hadde produsert, og vekslet mellom å vise til hva de hadde gjort under resonneringen, og å utdype med verbalt språk hvordan de hadde tenkt under resonneringsprosessen.

Tegningen ble også brukt aktivt i elevenes argumentasjoner, enten ved at tegningen var en direkte del av argumentasjonen eller at tegningen fungerte som et startpunkt for argumentasjon. Kun tre tegninger fungerte som startpunkt for argumentasjon, de resterende 15 hadde produsert noe på tegningen som var en del av selve argumentasjonen. Hele 15 argumentasjoner hadde garanti, og 13 av argumentasjonene hadde akseptert kunnskap. Dette motbeviser at argumentasjon er for avansert for elever på barnetrinnet, og at det er vanlig at elever i barneskolealder kun opererer med data og konklusjon (Krummheuer, 1995; Krummheuer, 2007). Funnene i denne studien viser at elevene er fullt kapable til å argumentere for sin løsning, og at argumentasjon har en sentral rolle også på barnetrinnet. Det er tydelig at tegningen hjalp elevene i argumentasjonen, enten ved at tegningen de hadde produsert fungerte som et startpunkt for argumentasjon, eller ved at deler av tegningen var en del av selve argumentasjonen, og inneholdt enten data, konklusjon, garanti eller akseptert kunnskap. Uavhengig av om tegningen var et startpunkt eller en direkte del av argumentasjonen, brukte de den hyppig, hvor de henviste til det de hadde produsert på tegningen når de videre forklarte og argumenterte for sin løsning.

Funnene viser at tegning både fungerer som et problemløsningsverktøy og kommunikasjonsverktøy for elevene. Tegning har et stort potensial, og burde uten tvil ha en sentral rolle i matematikkundervisning og læring.

## 6.1 Pedagogiske implikasjoner og videre forskning

### 6.1.1 Implikasjoner for undervisning

Det som er viktig å tenke på før man legger opp til oppgaver hvor elevene skal bruke tegning for å løse oppgaven, er at elevene kjenner til hvordan de kan bruke tegning som verktøy i matematikk. Selv om tegning er en populær og kjent aktivitet for barn, er det viktig å ikke anta at elevene vet hvordan de skal tegne matematisk (Crespo & Kyriakides, 2007, s. 124). Det er et tydelig skille mellom å tegne i hverdagen forbundet med lek, og tegning i matematikk, som er forbundet med læring. Så selv om elevene er kjent med og kan å tegne er det viktig å ikke ta det for gitt at det er noe de kan. Det å tegne matematisk er ikke noe som kommer naturlig, men som må læres og som man må få kunnskap om og kjennskap til. Barns tegninger blir ikke gode matematiske representasjoner av seg selv, det krever arbeid med og samtale om tegning som representasjon i matematikk. Dette krever en bevisst pedagogisk aktivitet fra lærerens side (Bakar et al., 2016, s. 92). Tegning kan ha et stort potensial som verktøy for barn i matematikk, men dette krever at man vet hvordan man skal utnytte det.

For at elevene skal kunne se verdien og potensialet tegning har i undervisning og læring av matematikk, må lærerne først se verdien og potensialet i det. Som nevnt tidligere viser forskning at mange voksne og lærere ikke anser tegning som like viktig som skriving og lesing (Papandreou, 2014, s. 85). For at tegning skal få en større rolle i matematikklasserommet, forutsetter det at lærere og lærerstudenter blir mer bevisst over det potensialet tegning kan ha i matematikk. Jeg håper at min studie og mine funn tydelig viser at tegning er et viktig verktøy i matematikk. Det kreves en holdningsendring i dagens matematikklasserom; visuell matematikk og tegning bør anerkjennes på lik linje som abstrakt matematikk.

Selv om det å tegne matematisk er en ny måte å tegne og bruke tegningen på, vil det å bruke den representasjonen som barna kjenner til best, være en fordel. Barn lærer å tegne lenge før de lærer å skrive (Crespo & Kyriakides, 2007, s. 118), man kan derfor anse tegning som den første representasjonen som hjelper dem med å kommunisere sin tenkning og sine ideer til andre. Det vil derfor være nyttig å bygge videre på denne kjennskapen barna har til tegning, i møte med ukjente problemer, ideer og begreper.

### 6.1.2 Videre forskning

Det er tydelig at det er lite forskning på hvordan elever på småtrinnet bruker tegning i resonnering og argumentasjon. Under letingen av litteratur ble det gjort lite funn på tidligere forskning som hadde tatt for seg aspektene resonnering og argumentasjon sammen, og aspektene argumentasjon og tegning i matematikk. Selv om det de senere årene har blitt mer forskning på tegning og resonnering i matematikk, kan det fortsatt tyde på at det mangler en del på feltet. Det er ingen tvil om at tegning er et viktig verktøy for elever i arbeid med problemløsningsoppgaver, både som hjelp til å løse problemet, men også for å få visualisert sin tenkning og la andre få innsikt i den forståelsen man sitter med. Tegning bør ha en sentral rolle i matematikkundervisning og læring, og bør vektlegges i mye større grad enn hva det gjør i dagens matematikklasserom. Det finnes et kunnskapshull i hvordan elever bruker tegning i resonnering og argumentasjon i matematikk, og det er dette kunnskapshullet jeg håper at min master kan bidra til å tette. Jeg håper andre finner inspirasjon til å forske videre på feltet, da funnene av denne studien, samt tidligere forskning viser at det er et svært viktig tema.

## Referanseliste


Alseth, I. (2019). *«Med blanke ark og farjestifter tel». En kvalitativ studie om tre andreklasseelevers bruk av tegning i problemløsningsoppgaver* [Masteroppgave]. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Bakar, K. A., Way, J. & Bobis, J. (2016). Young children's drawings in problem solving. I B.White, M. Chinnappan & S. Trenholm (Red), *Opening up mathematics education research*. (s. 86–93). MERGA

Boaler, J., Chen, L., Williams, C. & Cordero, M. (2016). Seeing as understanding: The importance of visual mathematics for our brain and learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, *5*(5), 1−6. DOI: 10.4172/2168-9679.1000325

Bobis, J. & Way, J. (2018). Building connections between children's representations and their conceptual development in mathematics. I V. Kinnear, M. Y. Lai & T. Muir (Red), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (s. 55−72). Springer.

Brooks, M. (2009). Drawing, visualisation and young children's exploration of "big ideas". *International Journal of Science Education*, *31*(3), 319–341. DOI: https://doi.org/10.1080/09500690802595771

Carpenter, T. P., Ansell, E. Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), 428–441.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Bass, H. & Ball, D. L. (2003). Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Heinemann.

Crespo, S. M. & Kyriakides, A. O. (2007). To draw or not to draw: Exploring children's drawings for solving mathematics problems. *Teaching Children Mathematics*, *14*(2), 118–125.

Dahl, H. (2020). Tegning som verktøy for å utforske multiplikative situasjoner. I V. Nilssen & S.M. Høynes (Red), *Samtaleorientert matematikk: et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (1.utg., s. 193–221). Fagbokforlaget

Dahl, H., Klemp, T. & Nilssen, V. (2020). Språklige ressurser, en forutsetning for produktivt elevsamarbeid. I V. Nilssen & S.M. Høynes (Red), *Samtaleorientert matematikk: et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (1.utg., s. 161–191). Fagbokforlaget

Dallan, O. (2021). *Metode og oppgaveskriving*. (7.utg.). Gyldendal Norsk Forlag.

Dønnem, K. V. (2020). *Representasjon og argumentasjon. En kvalitativ undersøkelse av seks elevers bruk av representasjoner i utvikling av gyldige argument* [Masteroppgave]. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Edens, K. M & Potter, E.F. (2001). Promoting conceptual understanding through pictorial representation. *Studies in Art Education, 42*(3), 214–233.

Enge, O. & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten*, *1,* 8-12.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I A.A. Cuoco & F.R. Curcio (Red), *The Roles of Representation in School Mathematics*, 2001 yearbook (s. 1–23). National Council of Teachers of Mathematics.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The Emergence of Mathematical Meaning Making: Interaction in Classroom Cultures*, 229–269.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 60–82.

Letnes, M. A. (2017). Visualisering som drivkraft i kunnskapskonstruksjon; Undersøkt gjennom et artografisk blikk. *Journal for Research in Arts and Sports Education*, *1,* 112– 130.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educ Stud Math, 67*, 255–276. DOI: 10.1007/s10649-007-9104-2

Matematikksenteret. (2020, 12.mai). Rike oppgaver, resonnering og argumentasjon. Hentet fra: https://www.matematikksenteret.no/blogg/rike-oppgaver-resonnering-og-argumentasjon

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier; den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet. (u.å.). *LAB-Ted: learning, assessment and boundary crossing in teacher education.* Hentet 5.juni 2022 fra https://www.ntnu.edu/ilu/lab-ted

Palmér, H. (2014). What is the difference? Young children learning mathematics through problem solving. I O. Helenius, M.L. Johansson, T. Lange, T. Meaney & A. Wernberg (Red), *Mathematics Education in the Early Years, results from the POEM2 conference (s.* 255–266).

Papandreou, M. (2014). Communicating and thinking through drawing activity in early childhood. *Journal of Research in Childhood Education*, *28*(1), 85–100. DOI: https://doi.org/10.1080/02568543.2013.851131

Postholm, M.B., & Jacobsen, D.I. (2018a). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Cappelen Damm.

Postholm, M.B., & Jacobsen, D.I. (2018b). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning.* Cappelen Damm.

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Red), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5* (s. 57-63).

Singletary, L. M. & Conner A. (2015). Focusing on mathematical arguments. *The Mathematics Teacher, 109*(2), 143–147

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2016) *Matematik for lærerstuderende*. Samfundslitteratur.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk – kjerneelementer.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. I A.A. Cuoco & F.R. Curcio (Red), *The Roles of Representation in School Mathematics*, 2001 yearbook (s. 215–227). National Council of Teachers of Mathematics.

# Vedlegg

## Vedlegg 1: Oppgaver

**20.10.21**

Kombinatorikkoppgave

Hamster i bur

Ole har sju hamstre hjemme hos seg. Han har to bur som hamstrene kan bevege seg mellom. Vis alle måter de sju hamsterne kan fordele seg på i de to burene.

**27.10.21**

Kombinatorikkoppgave

Aper i trær

I dyreparken er det 2 trær og 5 aper. Apene leker i trærne og hopper fra tre til tre.

Vis alle måter apene kan fordele seg på i de to trærne.

**15.11.21**

Oppgave 1

Fotballcup

29 barn skal på fotballcup. Det er 8 biler som skal kjøre barna på fotballcup. De må enten sitte 3 eller 4 i hver bil. Hvor mange av bilene har 3 barn, og hvor mange biler har 4 barn?

Oppgave 2 delingsdivisjon

49 drops

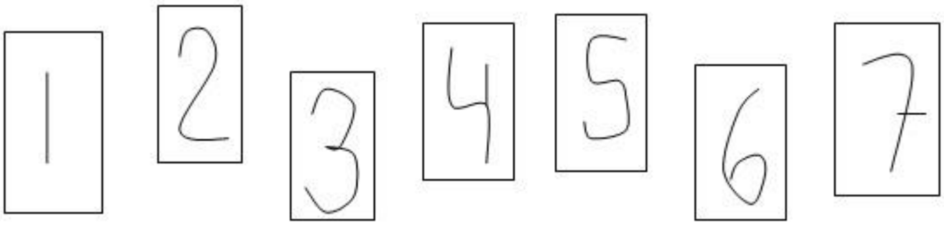
Kristine har 49 drops som hun vil dele likt mellom seg og sine 6 venner. Hvor mange drops får hver av dem?

**22.11.21**

Oppgave 1

Sju kort

**Sju kort ligger i ei eske.**
**På hvert av kortene er det skrevet ett av tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 eller 7.**




**Eva trekker 3 kort fra eska og Lars trekker 2 kort. Da er det 2 kort igjen i eska.**
**Eva ser på kortene sine og sier til Lars: «Jeg vet at summen av kortene dine er et partall».**
**Hva er summen av Eva sine kort?**

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Oppgave 2 – delingsdivisjon

<u>40 kjeks</u>

Mari har 40 kjeks, som skal fordeles i 8 esker. Hvor mange kjeks er det i hver eske?

**29.11.21**

Oppgave 1

<u>Tre påfølgende tall</u>

1+2+3=6

2+3+4=9

3+4+5=12

Hypotese: når man legger sammen tre påfølgende tall så vil summen alltid være i tregangen

Stemmer dette, eller stemmer det ikke? Argumenter og vis hvorfor dette stemmer eller ikke stemmer.

Oppgave 2

<u>Summen er partall</u>

Vis hvorfor partall + partall blir partall, og oddetall + oddetall blir partall.

**Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD**

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

# Vurdering

**Referansenummer**

201578

**Prosjekttittel**

Elevenes bruk av representasjoner i resonnering og argumentasjon på småtrinnet

**Behandlingsansvarlig institusjon**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

**Prosjektansvarlig**

Benedikte Grimeland

**Student**

Anne Lise Forfod Gjessing

**Prosjektperiode**

17.08.2021 - 17.08.2022

**Meldeskjema**

**Dato**

29.07.2021

**Type**

Standard

**Kommentar**

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg 29.07.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

**TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET**

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 17.08.2022.

**LOVLIG GRUNNLAG**

Prosjektet vil innhente samtykke fra de foresatte til de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være de foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

Elevene vil motta alderstilpasset informasjon og gi forskningsetisk samtykke til deltagelse.

**PERSONVERNPRINSIPPER**

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

**DE REGISTRERTES RETTIGHETER**

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

**FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER**

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

**MELD VESENTLIGE ENDRINGER**

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

**OPPFØLGING AV PROSJEKTET**

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen

Lykke til med prosjektet!

**Vedlegg 3: Samtykkeskjema**

**Vil du delta i forskningsprosjektet**

***Elevers bruk av egenproduserte representasjoner i resonnering og argumentasjon?***

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å *finne ut hvordan elever på småtrinnet bruker egenproduserte representasjoner i resonnering og argumentasjon* I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

**Formål**

Dette er en masteroppgave i matematikk. Formålet med oppgaven er å finne ut hvordan elever på småtrinnet bruker egenproduserte representasjoner i resonnering og argumentasjon. Denne forskningen innebærer innhenting av elevarbeid, samt observasjon av elevene, og samtale med elevene om deres arbeid.
*Skisser kort hvilke problemstillinger / forskningsspørsmål du skal analysere.*

- Hvordan elever på småtrinnet bruker egenproduserte representasjoner i resonnering
- Hvordan elever på småtrinnet bruker egenproduserte representasjoner i argumentasjon

Dette prosjektet er en del av et større prosjekt på NTNU, kalt Lab-Ted. Prosjektet vil bli drøftet sammen med, og presentert for de andre deltakerne i prosjektet. Det kan være mulig at prosjektet blir presentert også for lærerstaben på skolen.

**Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**
*NTNU* er ansvarlig for prosjektet.

**Hvorfor får du spørsmål om å delta?**
Du blir spurt om å delta fordi prosjektet er ute etter deltakere på din alder. Alle i din klasse vil få spørsmål om å delta.

**Hva innebærer det for deg å delta?**

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at jeg innhenter noe av ditt arbeid, observerer deg når du jobber, samt stiller deg noen spørsmål om arbeidet ditt. Det kan bli tatt video- og/eller lydopptak av noen av øktene, og det kan forekomme i helklassesituasjoner, par eller smågrupper, eller en og en. Klassen vil bli delt opp på en slik måte at alle får delta, men det må tas hensyn til de elevene som ikke ønsker å delta. Det vil med andre ord si, at elevene vil bli delt opp i grupper med hensyn til samtykke.

Det vil ikke bli tatt video- og/eller lydopptak i hver matematikktime. Det vil være aktuelt å bruke video- og/eller lydopptak noen få ganger i løpet av høsten, sånn cirka omfang vil være 2-6 ganger. Video- og/eller lydopptak, og observasjon vil benyttes for å kunne innhente informasjon om hvordan du bruker egenproduserte representasjoner underveis

i resonneringen, og hvordan du bruker de i etterkant for å argumentere for din løsning/strategi.
Du vil ikke tas ut av den ordinære opplæringen som følge av din deltakelse i dette prosjektet. Prosjektet vil foregå i undervisningssammenheng.

Dersom det er av interesse, kan dere få innsyn i intervjuguide/andre opplysninger. Ikke nøl med å ta kontakt.

**Det er frivillig å delta**
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine opplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

De som ikke ønsker å delta i prosjektet vil gjennomføre de samme oppgavene/den samme undervisningen som de elevene som deltar på prosjektet, men vil ikke bli inkludert i forskningsprosjektet. Klassen vil bli delt opp i grupper på en slik måte at alle elevene får delta, men kun de som har gitt samtykke blir filmet/inkludert i forskningsprosjektet.
Elevarbeidene til de elevene som ikke ønsker å delta, kan likevel bli innhentet, og elevene kan likevel bli stilt spørsmål, da det er en del av opplæringen og knyttet til min rolle som lærer.
Med det sagt, vil elevarbeidene og samtalene gjort med disse elevene, ikke bli inkludert i forskningen.
Det vil ikke bli tatt lyd- eller videopptak av disse elevene. De vil på ingen måte være inkludert i forskningsprosjektet.

**Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Personer med tilgang på opplysningene er jeg (student – Anne Lise Forfod Gjessing), veileder, medstudenter, deltakere i Lab-Ted prosjektet, kontaktlærer. Medstudenter har innsyn på den måten at de er til stede når de fleste observasjonene/opplysningene innhentes. Prosjektet vil som nevnt tidligere, drøftes med deltakerne i Lab-Ted prosjektet.

- Det vil ikke finnes noen opplysninger som kan identifisere deg. Du vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen. Det vil bli anonymisert med fiktivt navn både på skole og elever. Det er kun valgt ut opplysninger som er høyst nødvendig for forskningen. Disse opplysningene er som følger: kjønn og alder. Elevarbeidene og elevsamtalene vil bli transkribert. Transkriberte utsagn fra elever og elevarbeid vil bli publisert, samt kjønn, alder og fiktivt navn.
  Opplysningene vil bli lagret på en ekstern harddisk, og kryptert. Det er kun personer som av nødvendighet trenger innsyn i opplysningene, som får det. Disse er nevnt ovenfor.

**Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Opplysningene slettes når prosjektet er avsluttet/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er et år etter prosjektstart (17.08.22). Opplysningene oppbevares frem til prosjektslutt.

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *NTNU* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Dine rettigheter**
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Benedikte Grimeland ved NTNU, e-post benedikte.grimeland@ntnu.no, telefon 73412118, eller Anne Lise Forfod Gjessing (student), e-post algjessi@stud.ntnu.no, telefon 47718188.
- Vårt personvernombud (NTNU): Thomas Helgesen, e-post thomas.helgesen@ntnu.no, telefon 93079038.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

| *Prosjektansvarlig* | *Student* |
|---|---|
| Benedikte Grimeland | Anne Lise Forfod Gjessing |

---

**Samtykkeerklæring**
Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *elevers bruk av egenproduserte representasjoner i resonnering og argumentasjon*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i lydopptak
☐ å delta i videopptak
☐ å delta i intervju
☐ at mine elevarbeid kan innhentes

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

--------------------------------------------------------------------------------------------------------
-------------
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

NTNU

Kunnskap for en bedre verden