Trond Høgvoll

Matematiske definisjoner og representasjoner

Læreres arbeid med matematiske definisjoner og bruk av representasjoner i den sammenhengen

Mai 2022

Masteroppgave

Masteroppgave

Mai, 2022

Trond Høgvoll

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns - og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Matematiske definisjoner og representasjoner

Læreres arbeid med matematiske definisjoner og bruk av representasjoner i den sammenhengen

Trond Høgvoll

Master i grunnskolelærerutdanning 1.–7. trinn
Innlevert: Mai 2022
Hovedveileder: Hermund André Torkildsen

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for lærerutdanning

Forord

Dette er den siste oppgaven jeg skriver på grunnskolelærerutdanningen 1. – 7. trinn ved NTNU, og symboliserer endt mastergrad. Målet med oppgaven er at den skal resultere i funn som vil få praktiske implikasjoner for hvordan lærere og kommende lærere kan arbeide med matematiske definisjoner og representasjoner i den sammenhengen.

Inspirasjonen til å skrive om disse temaene fikk jeg gjennom emnet «Perspektiver på tallbegrepet», som jeg hadde fjerdeåret på utdanningen. Tore Alexander Forbregd og Hermund André Torkildsen underviste i dette emnet med smittende engasjement, og vekket stor inspirasjon i meg, spesielt da vi hadde om matematiske definisjoner. Derfor vil jeg takke Tore Alexander Forbregd og Hermund André Torkildsen for inspirasjonen til å skrive om dette temaet. I tillegg er det deres artikkel, sammen med Eivind Kaspersen og Trygve Solstad, som utgjør størstedelen av mitt teoretiske rammeverk. Derfor vil jeg takke alle dem for at jeg har fått bruke en preprint av den artikkelen til å gjøre denne undersøkelsen.

Jeg vil gi en ekstra takk til Hermund André Torkildsen, da han har vært min veileder. Han har vært en super støtte og veiledet meg gjennom utviklingen av denne oppgaven. Vi har hatt veldig god kommunikasjon gjennom hele prosessen, og han har vært tilgjengelig for veiledning av store og små utfordringer til enhver tid, noe som har vært til stor hjelp.

Videre vil jeg takke samboeren min, Anna Kessel, for å ha holdt ut med meg i denne perioden. Jeg har stort sett sittet hjemme og skrevet, og regner med at jeg til tider har vært en byrde, selv om hun ikke ville uttrykt det sånn.

Jeg vil også benytte anledningen til å takke mamma, pappa og søsken, Hallvard og Ingeborg Brynhildsvoll, da de alltid har vært en inspirasjon for meg. Basen på Lillehammer har vært en trygghet og de har alle vært en støtte for meg gjennom fem år i Trondheim.

En siste takk går til Håkon Bergseng Brannan, som jeg bodde med de fire første årene i Trondheim. Selv om vi ikke har gått samme retning, har det vært fint å ha en som har stått i nogenlunde det samme som en selv. Derfor vil jeg gratulere han med fullført mastergrad, samtidig som jeg vil takke for at han hjalp meg med å ferdigstille oppsettet av min oppgave.

Jeg vil avslutte med å si at synspunktene i denne oppgaven er mine egne og ikke nødvendigvis deles med noen av de ovennevnte eller NTNU.

Sammendrag

Matematiske definisjoner er definisjoner av matematiske begreper, som «partall» og «produkt», og mange tror at disse er *skrevet i stein* (Usiskin et al., 2008, s. 2). Sannheten er at det finnes mange forskjellige definisjoner som definerer det samme matematiske begrepet, disse kalles ekvivalente definisjoner (Leikin & Winicki-Landman, 2001, s. 64). De forskjellige ekvivalente definisjonene fremhever forskjellige egenskaper det matematiske begrepet har. Dermed vil valget av definisjon spille en viktig rolle når man skal lære seg et nytt matematisk begrep. Derfor er det viktig at lærere har kunnskap om matematiske definisjoner, slik at de kan gi elevene sine det beste utgangspunktet for å få en dyp forståelse for det matematiske begrepet. Allikevel viser forskning at lærere syns matematiske definisjoner er vanskelig (Stylianides & Stylianides, 2009; Miller, 2018). Derfor er det viktig å forske på hvordan lærere arbeider med matematiske definisjoner.

Representasjoner gjør matematikken mer tilgjengelig for elever (Schifter, 2009). Derfor introduserer Forbregd et al. (u.å.) begrepet *representasjonsbaserte definisjoner*, for å gjøre matematiske definisjoner mer tilgjengelige også. Når det er snakk om representasjoner, er det virkelighetsnære representasjoner som elevene kan relatere til, som er mest hensiktsmessig å bruke fra et didaktisk ståsted (Duval, 2004). Litteraturen belyser at det er et behov for å forske på hvordan lærere bruker representasjoner i sammenheng med de matematiske definisjonene.

Ettersom litteraturen på feltet belyste et behov for å forske på disse temaene, utarbeidet jeg denne problemstillingen:

Hvordan arbeider lærere med matematiske definisjoner i klasserommet og hvordan bruker de representasjoner i definisjonsarbeidet? Hva er begrunnelsene bak lærernes valg?

Denne problemstillingen uttrykker tydelig behovet for å snakke med lærere. Dermed ble metoden jeg skulle bruke for å samle inn data til å svare på problemstillingen, intervju. Den siste delen av problemstillingen, der jeg legger vekt på begrunnelsene bak lærernes valg, gjorde at det var mest hensiktsmessig å gjøre *kvalitative* intervjuer. På denne måten fikk jeg detaljerte begrunnelser for lærernes valg.

Jeg brukte det teoretiske rammeverket til Forbregd et al. (u.å.) om matematiske definisjoner, samt supplerende teori om representasjoner, for å analysere datamaterialet. Jeg gjorde en tematisk analyse av tre kvalitative intervjuer med matematikklærere på barneskolen, som resulterte i tre funn. Funnene underbygger tidligere forskning og viser at lærerne trenger et større innblikk i matematiske definisjoner. De bruker virkelighetsnære representasjoner i arbeidet med definisjonene, men klarer ikke å utnytte det fulle læringspotensialet, ettersom de på mange måter har samme oppfatning som Usiskin et al. (2008) forklarer er vanlig, at matematiske definisjoner er *skrevet i stein.*

Abstract

Mathematical definitions are defintions of mathematical concepts, such as "even number" and "product", and many people believe that these are *cast in stone* (Usiskin et al., 2008, p. 2). However, the truth is that there are lots of different defintions that define the same mathematical concept, these are called equivalent definitions (Leikin & Winicki-Landman, 2001, p. 64). The different equivalent definitions highlight different aspects of the mathematical concept. Hence the choice of definition plays an important part of learning a new mathematical concept. Therefore, it is important for teachers to have knowledge about mathematical defintions, so that they can provide deep learning about the mathematical concept for their students. However, science shows that teachers think mathematical definitions are hard (Stylianides & Stylianides, 2009; Miller, 2018). Therefore, how teachers work on mathematical definitions, emerge as an important research focus.

Representations makes the mathematics more available for students (Schifter, 2009). Therefore, Forbregd et al. (u.å.) introduce the term *representation-based definitions*, to make mathematical definitions more available as well. When we talk about representations, Duval (2004) emphasizes that it is the *real-world representations* that are most appropriate from a didactic standpoint. Hence there is a need to research how teachers use representations in the context of mathematical definitions.

As these themes emerged as important research focuses, I made this research question:

How does teachers work on mathematical definitions in their classrooms and how do they use representations in this work? What are the justifications behind their choices?

This research question expresses a need to talk to teachers. Hence, I decided to do interviews. The last part of the research question, which emphasizes the justifications behind their choices, made *qualitative* interviews most appropriate. In this way I got detailed justifications for the teachers' choices.

I used the theoretical framework of Forbregd et al. (u.å.) about mathematical definitions, in addition to supplementary theory about representations, to analyze my data. I did a thematic analysis of three qualitative interviews with elementary school math teachers, which resulted in three findings. The findings substantiate earlier research and shows that the teachers need a greater insight in mathematical definitions. They use *real-world representations* in the work on mathematical definitions, but fail to exploit the full learning potential, as they in many ways have the same perception as Usiskin et al. (2008) explains as the usual, that mathematical definitions are *cast in stone.*

Innhold

Figurer vii
Tabeller vii
1 Innledning 1
2 Teori 4
2.1 Definisjoner 4
2.1.1 Nature 5
2.1.1.1 Stipulated 5
2.1.1.2 Arbitrary 6
2.1.1.3 Constructed 6
2.1.2 Requirements 7
2.1.2.1 Formal 7
2.1.2.2 Exemplification 7
2.1.2.3 Axiomatization 8
2.1.3 Preferred features 9
2.1.3.1 Minimality 9
2.1.3.2 Aesthetic 9
2.1.3.3 Comprehension 10
2.1.4 Role and function 10
2.1.4.1 Baptize 11
2.1.4.2 Communication 11
2.1.4.3 Basis for deduction 11
2.1.5 Type 11
2.1.5.1 Inclusive and exclusive 12
2.1.5.2 Procedural and structural 12
2.2 Representasjoner 13
2.2.1 Virkelighetsnære representasjoner 13
2.2.2 Representasjonsbaserte definisjoner 13
2.2.3 Begrepsbilde 14
3 Metode 15
3.1 Metodologi 15
3.2 Kvalitativt intervju 16
3.3 Validitet 18
3.4 Analysemetode 19
3.5 Etiske hensyn 21
3.6 Metodekritikk 22
4 Resultat 23

4.1 Funn 1: Lærerne foretrekker eksklusive definisjoner ... 23
4.2 Funn 2: Lærerne avviker fra teorien i sin oppfatning av hva en «matematisk korrekt» definisjon er ... 27
4.3 Funn 3: Lærerne involverer elevene i definisjonsarbeidet ved at de får definere begreper og utforske representasjoner av begrepene ... 30
5 Diskusjon ... 35
5.1 Oppsummering av funn ... 35
5.2 Implikasjoner ... 36
5.2.1 Funn 1 ... 36
5.2.2 Funn 2 ... 36
5.2.3 Funn 3 ... 36
5.3 Konklusjon ... 37
5.4 Studiens begrensninger ... 37
5.5 Videre forskning ... 38
5.5.1 Eksklusive definisjoner ... 38
5.5.2 Uttrykket «matematisk korrekt» ... 39
Litteraturliste ... 40
Vedlegg ... 44
Vedlegg 1: «Intervjuguide» ... 44
Vedlegg 2: «Informasjonsskriv med samtykkeerklæring» ... 47

Figurer

Figur 1: Hovedtemaene som omhandler matematiske definisjoners karakteristikker 5
Figur 2: Tre forskjellige typer firkanter som møter betingelsene i definisjonen til Van Dormolen og Zaslavsky 8
Figur 3: Deduktiv og induktiv tilnærming til forholdet mellom teori og forskning 15

Tabeller

Tabell 1: Matrisen «Kriterier» 20
Tabell 2: Matrisen «Type» med undertemaene «Eksklusiv» og «Inklusiv» 25
Tabell 3: Matrisen «Kriterier» med undertemaet «Eksemplifisering» 27
Tabell 4: Matrisen «Foretrukne egenskaper» 29
Tabell 5: Matrisen «Natur» med undertemaet «Konstruert» 31
Tabell 6: Matrisen «Representasjoner» med undertemaet «Virkelighetsnære representasjoner» 32
Tabell 7: Matrisen «Representasjoner» med undertemaet «Representasjonsbaserte definisjoner» 33

1 Innledning

Temaet for denne oppgaven er matematiske definisjoner og representasjoner. Matematiske definisjoner er definisjoner av matematiske begreper, som for eksempel «partall» og «kvadrat». Et eksempel på en definisjon av et partall kan være: «Et partall er et tall som kan deles i to like grupper.». Mange har en oppfatning av at matematiske definisjoner er *skrevet i stein* (Usiskin et al., 2008, s. 2). Til tross for dette er det ikke sånn at det kun finnes én definisjon til hvert matematiske begrep, det er mange alternativer og muligheter i møte med matematiske definisjoner (Usiskin et al., 2008, s. 2). Dermed må lærere gjøre et valg av definisjoner i møte med matematiske begreper. Dette valget krever at matematikklærere har kunnskap om matematiske definisjoner. Allikevel viser forskning at lærere syns matematiske definisjoner er vanskelig (Stylianides & Stylianides, 2009; Miller, 2018, s. 1).

Det er naturlig at lærere syns matematiske definisjoner er et vanskelig tema, da det egentlig ikke finnes en god definisjon på hva en matematisk definisjon er (Forbregd et al., u.å., s. 3). Ifølge Poincaré avhenger en god matematisk definisjon av situasjonen, en god matematisk definisjon for en forsker, trenger ikke være en god matematisk definisjon for en lærer. For en forsker er det viktig at definisjonen presist definerer alle objektene den skal, og utelukker alle andre objekter. Mens for en lærer er det viktigste at elevene forstår definisjonen og klarer å bruke den til å gjenkjenne det den definerer (Poincaré, 1969, s. 295). Forskningen gir ikke et klart svar på hva en god matematisk definisjon er, men allikevel finnes det føringer for hva matematiske definisjoner burde være (Forbregd et al., u.å., s. 3). Disse føringene fungerer som hjelp til best mulig praksis (Forbregd et al., u.å., s. 3), og er derfor noe lærere burde ha kunnskap om da de skal velge definisjon.

Valgene jeg har snakket om, gjøres i hovedsak mellom ekvivalente definisjoner, som vil si forskjellige definisjoner som definerer det samme begrepet (Leikin & Winicki-Landman, 2001, s. 64). Her er et par eksempler på ekvivalente definisjoner av partall hentet fra Forbregd et al. (u.å., s. 12):

1. Et partall er et tall som kan deles i to like grupper.
2. Et partall er et tall hvor det siste sifferet er 0, 2, 4, 6 eller 8.

Disse definisjonene viser ulike egenskaper hos partall. Den første forteller at et partall antall objekter kan deles inn i to grupper med like mange objekter. Den andre fremhever tallsymbolet, for å bestemme om det er et partall. Hvis en elev blir bedt om å bevise at produktet av to partall er et partall, vil de to definisjonene sannsynligvis skape forskjellige argumenter (Forbregd et al., u.å., s. 12). Ifølge Winicki-Landman og Leikin (2000, s. 17) er dette valget av definisjoner noe læreren må gjøre i forkant av introduksjonen av begrepet, og det vil påvirke den matematiske aktiviteten i klasserommet (Morgan, 2005, s. 104; Forbregd et al., u.å., s. 12), dermed også elevenes læring og forståelse av begrepet.

Bevisføring er også en av grunnene til at matematiske definisjoner er et viktig tema. Det forventes at elever skal arbeide med bevisføring i matematikk allerede på barneskolen (A.J. Stylianides, 2019). I tillegg er argumentasjon et av kjerneelementene i Kunnskapsløftet 2020, argumentasjonen handler om at elevene skal grunngi framgangsmåter, resonnement og løsninger og *bevise* at disse er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2019). Matematiske definisjoner er viktige ingredienser i matematiske bevis (Forbregd et al., u.å., s. 3). Gyldige bevis kan være algebraiske bevis med kun symboler, representasjonsbaserte bevis (Schifter, 2009) eller generiske eksempler (Balacheff, 1988; Stylianides, 2007; Stylianides & Stylianides, 2009), men ikke empiriske bevis (Stylianides & Stylianides, 2009, s. 315). Hvis man for eksempel skal bevise at produktet av to partall er et partall, holder det ikke å finne fem, tjue eller tusen eksempler der dette stemmer. Uansett hvor mange eksempler man finner der produktet er et partall, vil det fortsatt bare være en sannhet for disse gitte eksemplene. For å bevise at dette er en gyldig generalisering, vil man måtte ta i bruk definisjoner av både «partall» og «produkt» (Forbregd et al., u.å., s. 3).

Når jeg er inne på bevis, vil jeg ta opp det andre temaet i oppgaven min, som er representasjoner. Ifølge Schifter (2009, s. 76) er representasjonsbaserte bevis mer tilgjengelig for elevene, enn andre matematiske bevis. Det samme gjelder for matematiske definisjoner. Dersom man baserer definisjonene på representasjoner elevene klarer å relatere til, vil man også gjøre definisjonene mer tilgjengelig (Schifter, 2009; Forbregd et al., u.å., s. 31). Her er et eksempel på en *representasjonsbasert definisjon* hentet fra Forbregd et al. (u.å., s. 31): «Man har et partall antall unifix-kuber, hvis de kan pares sammen to og to, og ingen blir til overs.». Det blir gjort mer tilgjengelig for elevene at partall består av par, fordi det blir definert innenfor representasjonssystemet unifix-kuber, som er noe de fleste elever kjenner til.

I de to ekvivalente definisjonene jeg presenterte av partall, brukes det også forskjellige representasjoner, tallsymboler og tenkte grupper av objekter. Et viktig aspekt ved en matematisk definisjon er at den er lik, uavhengig av representasjonssystem (Sánchez & García, 2014). Duval (2004, s. 1) understreker viktigheten av at elever må være i stand til å forstå det matematiske begrepet i forskjellige representasjonssystemer og bruke det. For eksempel om man klarer å bruke definisjon 1 til å finne ut om 38 er et partall, da beveger man seg fra tenkte grupper av objekter til tallsymboler. Derfor er ikke jobben til en lærer å finne den «riktige» representasjonen, men heller å variere mellom relevante representasjonssystemer man kan definere begrepet i (Duval, 2004, s. 15). På denne måten kan man lære elevene at definisjonene er uavhengig av representasjonene, samtidig som man gjør definisjonene mer tilgjengelig ved å bruke relevante representasjoner. Derfor er representasjoner, i sammenheng med de matematiske definisjonene, et viktig tema.

Leikin og Winicki-Landman (2001, s. 73) foreslår videre forskning på hvilke definisjoner lærere foretrekker. I tillegg uttrykker Forbregd et al. (u.å., s. 31) behovet for videre forskning på hvordan representasjoner blir brukt i sammenheng med de matematiske definisjonene. Derfor har jeg valgt å ha fokus på lærere og valgene de gjør angående disse to temaene i sine klasserom. På bakgrunn av dette har jeg utarbeidet problemstillingen:

Hvordan arbeider lærere med matematiske definisjoner i klasserommet og hvordan bruker de representasjoner i definisjonsarbeidet? Hva er begrunnelsene bak lærernes valg?

Denne forskningen vil belyse hva disse lærerne gjør som teorien anbefaler, men den vil også belyse hvor lærernes praksis avviker fra teorien. Ettersom jeg legger vekt på begrunnelsene til lærerne, vil det lærerne gjør også begrunnes. Det kan hende lærerne er klar over hva teorien anbefaler, men at de gjør bevisste valg om å trosse teorien, fordi de mener at det er mer hensiktsmessig for elevenes læring. Som nevnt tidligere, så er ikke nødvendigvis en god matematisk definisjon for en forsker, god for en lærer (Poincaré, 1969). Allikevel kan det også hende at lærerne avviker fra teorien ubevisst eller tilfeldig. Dersom vi får mer kunnskap om hvilke bevisste og ubevisste valg lærerne gjør i møte med matematiske definisjoner, kan det fortelle hvilke føringer ved matematiske definisjoner lærere trenger et større innblikk i, noe som vil hjelpe lærere og kommende lærere å gjøre bevisste valg angående matematiske definisjoner i fremtiden.

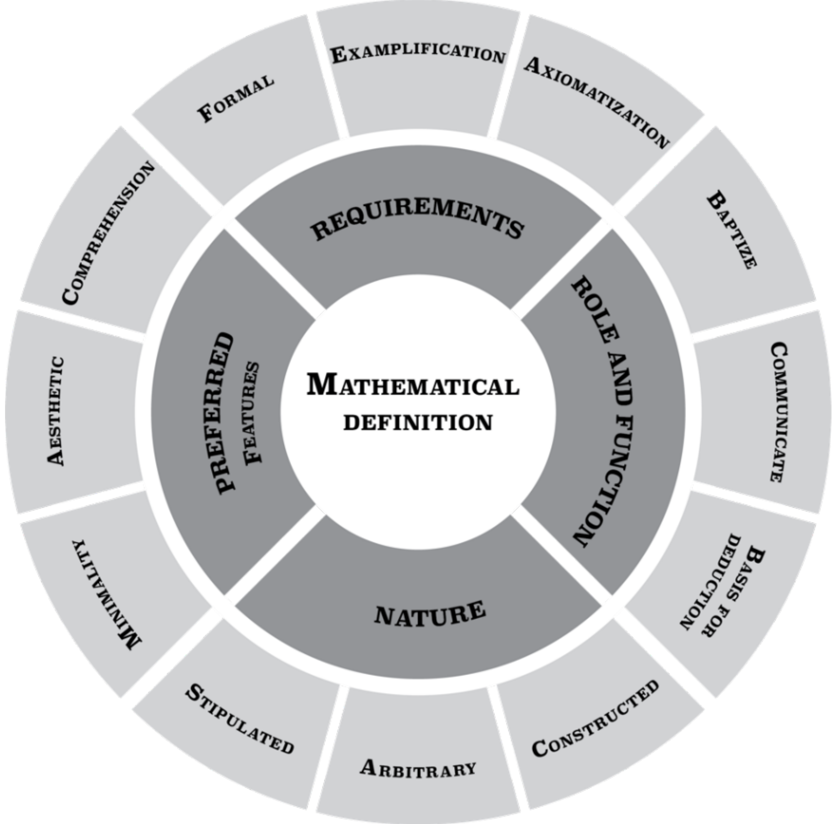
For å forske på dette skal jeg først og fremst snakke med lærere. Jeg skal ha tre semistrukturerte intervju med tre forskjellige lærere fra Trøndelag, som henholdsvis er på 1., 4. og 7. trinn. I intervjuene spør jeg etter deres måter å jobbe med definisjoner i møte med forskjellige matematiske begreper, og om hvilke representasjoner de bruker til dette arbeidet. For å analysere dette datamaterialet skal jeg bruke det teoretiske rammeverket til Forbregd et al. (u.å.), som omhandler matematiske definisjoner, i tillegg som jeg skal supplere med teori fra Duval (2004), Schifter (2009) og Vinner (1991) angående representasjoner. Jeg har gjort en tematisk analyse av dataen, og funnene skal presenteres i resultatkapittelet. Til slutt skal jeg diskutere hvilke praktiske implikasjoner disse funnene får, og trekke en konklusjon til problemstillingen min. Jeg skal også belyse nye spørsmål, som har dukket opp gjennom forskningen min.

2 Teori

Ifølge Forbregd et al. (u.å.) gir ikke litteraturen et entydig svar på hva en god matematisk definisjon er. Selv om det ikke finnes et entydig svar på hva en god matematisk definisjon er, finnes det føringer for hva den bør være (Leikin & Winicki-Landman, 2000; Miller, 2018). Litteraturen gir et mangfoldig perspektiv når man skal betrakte en matematisk definisjon. Forbregd et al. (u.å.) har gjort et litteratursøk og fått samlet disse perspektivene inn i et rammeverk. Dette rammeverket blir presentert i kapittel 2.1. I tillegg supplerer jeg med teori om representasjoner i kapittel 2.2. Sammen utgjør disse to kapitlene, med underkapitler, det teoretiske grunnlaget for undersøkelsen min.

2.1 Definisjoner

Forskningsspørsmålet til Forbregd et al. (u.å.) var: "*How are mathematical definitions characterized in the mathematics education literature?*" (s. 4). Analysen ga fem hovedtemaer for hvordan forskere i matematikkutdanningen karakteriserer matematiske definisjoner. Forbregd et al. (u.å., s. 10) utarbeidet en oversikt over fire av hovedtemaene: *nature, requirements, preferred features* og *role and function*, samt underkategoriene, som disse ble delt inn i (Se *Figur 1*). Disse temaene omhandler karakteristikkene til matematiske definisjoner. Det femte temaet, *type*, skiller seg fra de andre ved at det ikke omhandler karakteristikker ved matematiske definisjoner, men heller at det beskriver dimensjoner av matematiske definisjoner (Forbregd et al., u.å., s. 9). Alle hovedtemaene, samt underkategoriene, skal forklares nærmere i dette kapittelet.



Figur 1: Hovedtemaene som omhandler matematiske definisjoners karakteristikker

2.1.1 Nature

Hovedtemaet *nature* tar for seg matematiske definisjoner på et meta-matematisk nivå (Forbregd et al., u.å., s. 10). Det vil si hvordan man bruker hverdagslige begreper til å beskrive matematiske definisjoner som konstruksjoner i den matematiske verdenen (Forbregd et al., u.å., s. 11). Disse begrepene beskriver iboende egenskaper hos matematiske definisjoner. Forbregd et al. (u.å.) utarbeidet tre kategorier: *stipulated, arbitrary* og *constructed*, som beskriver disse iboende egenskapene.

2.1.1.1 Stipulated

Matematiske definisjoner er ikke det samme som hverdagsdefinisjoner. Edwards og Ward (2004, s. 412) går til filosof Richard Robinson og leksikograf Sidney I. Landau for å kategorisere de to typene, og deler dem inn i *extracted and stipulated definitions*, som jeg oversetter til ekstraherte og stipulerte definisjoner. Landau forklarer at en ekstrahert definisjon er basert på eksempler av faktisk bruk. For eksempel står det i bokmålsordboka at en stol er et «møbel til å sitte på» (Språkrådet, 2021). Definisjonsformuleringen beskriver bruksområdet til en stol. I motsetning forklarer Robinson en stipulert definisjon som meningsforholdet mellom et navn og et objekt, og snakker om å tildele et objekt et navn eller et navn et objekt. For eksempel vil man ikke kunne behandle definisjonen til en stol som stipulert, fordi «møbel til å sitte på» kan tildeles bord, puff, krakk, benk og mer. En stipulert definisjon utelukker alt annet enn det definerte begrepet (Forbregd et al., u.å., s. 11). Edwards og Ward (2004, s. 412) forklarer at ekstraherte definisjoner rapporterer bruk, mens stipulerte definisjoner skaper bruk. Videre konkluderer de med at matematiske definisjoner er stipulerte, mens de fleste hverdagsdefinisjoner er ekstraherte.

Resultatene fra forskningen til Edwards og Ward (2004) viser at mange elever ikke forstår denne forskjellen, og behandler matematiske definisjoner som ekstraherte. For å forklare dette skal jeg bruke begrepene til Tall og Vinner (1981), *begrepsbilde* og *begrepsdefinisjon*. Et hvert matematisk begrep bærer med seg en begrepsdefinisjon og et begrepsbilde. Begrepsdefinisjonen burde ifølge Edwards og Ward (2004) være en stipulert definisjon. Begrepsbildet derimot er en ikke-verbal representasjon av individets forståelse av begrepet. Det inkluderer *visuelle representasjoner, mentale bilder, inntrykk og erfaringer som individet assosierer med begrepet* (Vinner, 1991, s. 68). Vinner presenterer videre en rekke måter begrepsdefinisjonen og begrepsbildet kan fungere i møte med en oppgave. Det ønskelige er at løsningen baseres på begrepsdefinisjonen. Det som derimot ofte skjer, er at løsningen baseres kun på begrepsbildet. Da behandles ikke definisjonen som stipulert. Hvis den hadde vært stipulert, kunne ingenting overkjørt den, og alle andre assosiasjoner til begrepet ville ikke spilt noen rolle.

2.1.1.2 Arbitrary

Matematiske definisjoner er vilkårlige, som er min oversettelse av *arbitrary* (Winicki-Landman & Leikin, 2000, s. 17; Forbregd et al., u.å., s. 12). Når en definisjon blir benyttet, blir de andre ekvivalente definisjonene teoremer som gir nødvendige og tilstrekkelige betingelser for begrepet (Forbregd et al., u.å., s. 12). For å bruke eksempelet jeg presenterte i innledningen, kan jeg benytte definisjonen «Et partall er et tall som kan deles i to like grupper.», og da vil den andre definisjonen «Et partall er et tall hvor det siste sifferet er 0, 2, 4, 6 eller 8.» bli et teorem, som kan bevises ved den første definisjonen.

Selv om definisjonene er vilkårlige, er det ikke tilfeldig hvilke definisjoner som blir benyttet. Definisjonene blir valgt med en hensikt (Usiskin et al., 2008). For lærere er ofte denne hensikten didaktisk (Usiskin et al., 2008, s. 3), men den kan også være matematisk (Forbregd et al., u.å., s. 12). Valget av definisjon er et kritisk valg med tanke på elevenes læring, både av begrepet og av matematiske definisjoner i seg selv (Leikin & Winicki-Landman, 2001, s. 64). Dette valget mellom ekvivalente matematiske definisjoner er også noe elever burde få engasjere seg i (Morgan, 2005, s. 114). Læreren kan for eksempel gi elevene en rekke ekvivalente definisjoner, som de selv kan få utforske og eventuelt velge én av dem til å føre et bevis. Morgan (2005, s. 114) forklarer at dette er en kreativ og meningsfull måte å jobbe med definisjoner, som akademiske matematikere også engasjerer seg i.

2.1.1.3 Constructed

Om matematikk er oppdaget eller oppfunnet er et spørsmål som avhenger av hvilket filosofisk standpunkt man tar (Forbregd et al., u.å., s. 12). Allikevel forklarer Forbregd et al. (u.å., s. 13) at den største delen av litteraturen de gjennomgikk, mente at matematikk var oppfunnet, altså *constructed* eller konstruert, som er min oversettelse. Som Morgan (2005, s. 111) forklarer er *matematiske definisjoner et produkt av menneskelig aktivitet*. Disse definisjonene utvikles stadig gjennom menneskelig aktivitet, som resultat av et behov (Forbregd et al., u.å, s. 13). Synet på at matematiske definisjoner er konstruerte har viktige implikasjoner for undervisning, da det er lærerikt for elever å delta i disse defineringsprosessene og få konstruere sine egne definisjoner (Borasi, 1992; Forbregd et al., u.å., s. 13).

2.1.2 Requirements

Hovedtemaet *requirements* omhandler kriterier for hva en matematisk definisjon må være (Forbregd et al., u.å., s. 13). Disse kriteriene delte Forbregd et al. (u.å.) inn i: *formal, exemplification* og *axiomatization*.

2.1.2.1 Formal

Denne underkategorien handler om formelle kriterier som definisjonsformuleringen må oppfylle (Forbregd et al., u.å., s. 14). Kriteriene definisjonen må oppfylle er at den skal være konsistent og ikke motstridende (Sánchez & García, 2014; Johnson et al., 2014; Borasi, 1992, s. 17-18), i tillegg skal den være entydig (Burroughs & Burke, 2016; Morgan, 2005). Det vil si at den kun beskriver det den skal definere. For å bruke eksempelet til Forbregd et al. (u.å., s. 14) kan man se for seg en elev som definerer partall som annethvert heltall på tallinja. Selv om påstanden er sann, er det ikke en entydig definisjon, da den kan beskrive både partall og oddetall, avhengig av hvilket tall man starter med på tallinja.

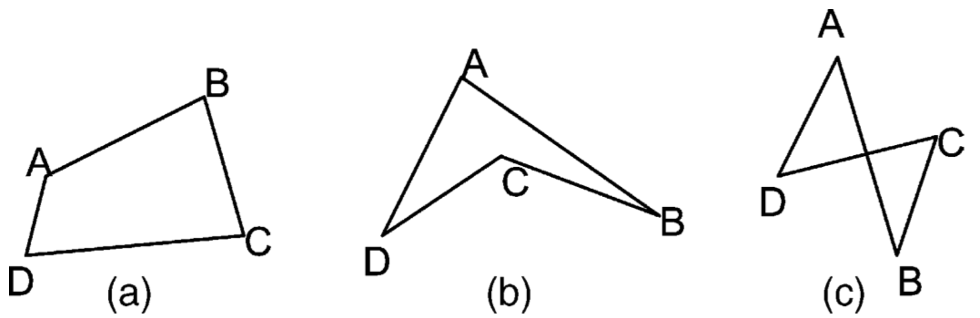
2.1.2.2 Exemplification

Et viktig kriterie for en matematisk definisjon er at det finnes minst ett eksempel av det definerte begrepet (Edwards & Ward, 2008; Forbregd et al., u.å., s. 15). I tillegg må definisjonen klare å skille mellom eksempler og ikke-eksempler (Morgan, 2005; Forbregd et al., u.å., s. 15). Borasi (1992, s. 17-18) forklarer at definisjonen må isolere begrepet. Det vil si at alle eksemplene av begrepet må møte alle betingelsene nevnt i definisjonen, mens et ikke-eksempel ikke møter minst én av betingelsene.

Selv om definisjonen skal skille mellom eksempler og ikke-eksempler, vil det alltid kunne dukke opp *degenererte tilfeller*, noe flere anser som et eget kriterie for definisjoner (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 98). De degenererte tilfellene møter alle betingelsene gitt i definisjonen, men vil ikke stemme overens med hvordan mange oppfatter det matematiske begrepet (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 98). Det stemmer altså ikke med begrepsbildet (Vinner, 1991) mange har. For å vise dette brukte Van Dormolen og Zaslavsky (2003, s. 98) denne definisjonen på en firkant:

> *En firkant er et sett med fire punkter A, B, C, D der tre av dem ikke er kollineære og skaper kantene AB, BC, CD og DA.*

Denne definisjonen vil lede til tre forskjellige typer firkanter (Se Figur 2). Alle firkantene møter alle betingelsene nevnt i definisjonen, men *c* vil ifølge mange være en degenerert firkant (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 98). I tillegg vil det være grunner for å ekskludere *c* som en gyldig firkant. Disse grunnene kan være matematiske og didaktiske, for eksempel er ikke vinkelsummen til *c* 360°, med mindre man tar med vinklene der AB og CD krysser (Forbregd et al., u.å., s. 16; Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 98). For å bevare teoremet om vinkelsummen til en firkant, vil man derfor måtte lage en komplisert definisjon for denne typen vinkler, som ikke egner seg til matematikken i barneskolen (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 98). Selv om vinkelsummen til *c* blir 360° ved å innføre denne definisjonen, vil det da være didaktiske grunner for å heller komme med en definisjon for firkanter, som ekskluderer firkanter med overlappende eller kryssende kanter.



Figur 2: Tre forskjellige typer firkanter som møter betingelsene i definisjonen til Van Dormolen og Zaslavsky

I tillegg til at det må finnes eksempler, ikke-eksempler og degenererte tilfeller, må definisjonen være uforanderlig uavhengig av hvilket representasjonssystem den blir gitt i (Sánchez & García, 2014). Forbregd et al. (u.å., s. 15) gir to definisjoner i forskjellig representasjonssystem som eksempel:

a) Man har et partall antall unifix-kuber, dersom kubene kan deles i to like grupper.
b) Et partall *a* er et tall som kan skrives som summen av to like naturlige tall (dvs. $a = b + b$, hvor b er et naturlig tall).

Selv om definisjonene er i forskjellige representasjonssystem, henholdsvis kuber (a) og symbol (b), er essensen den samme. Dermed oppfyller disse definisjonene kriteriet om at de må være uforanderlige uavhengig av representasjonssystem.

2.1.2.3 Axiomatization

Kriteriet om *axiomatization*, eller aksiomatisering, handler om at definisjonen er del av et deduktivt system bygget på aksiomer, definisjoner og teoremer (Borasi, 1992; Morgan, 2005; Forbregd et al., u.å., s. 16). Det vil si at alle begrepene som blir brukt i definisjonen, skal ha blitt definert tidligere, med mindre de er *udefinerte begreper* som blir ansett som startpunkt i det aksiomatiske systemet man jobber innenfor (Borasi, 1992, s. 17-18). For eksempel hvis en lærer skulle introdusert begrepet firkant med definisjonen: «En firkant har fire kanter og fire vinkler.», ville hen ha vært nødt til å definere «kant» og «vinkel» tidligere. Det er et viktig didaktisk aspekt ved matematiske definisjoner, at de som skal bruke definisjonen, må kjenne alle begrepene i den (Winicki-Landman & Leikin, 2000, s. 17-18).

I tillegg er dette aksiomatiske systemet hierarkisk oppbygget (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 94), altså at hver definisjon og hvert aksiom og teorem bygger på hverandre. Det vil si at man i matematikk arbeider med spesialtilfeller av mer generelle begrep (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 94). For eksempel er rektangel et spesialtilfelle av en firkant, mens partall og oddetall er spesialtilfeller av tall (Forbregd et al., u.å., s. 17).

Et annet aspekt ved aksiomatisering er ekvivalente definisjoner (Leikin & Winicki-Landman, 2001, s. 64). I kapittel 2.1.1.2 «Arbitrary» sier jeg at når en definisjon blir benyttet, blir de andre ekvivalente definisjonene teoremer for begrepet. Jeg forklarer videre at dette kan bevises ved den valgte definisjonen. For å oppfylle kriteriet om aksiomatisering må dette kunne bevises matematisk (Forbregd et al., u.å., s. 12). Som Forbregd et al. (u.å., s. 17) er inne på, er dette noe som ligger i den vilkårlige naturen til matematiske definisjoner, men det er også et kriterie.

2.1.3 Preferred features

Preferred features handler om egenskaper ved en definisjon som ikke blir ansett som kriterier, men heller som foretrukne egenskaper (Forbregd et al., u.å., s. 17). Disse egenskapene er både matematiske og didaktiske, og ettersom de er foretrukne og ikke nødvendige, kan man tenke seg at for eksempel lærere og matematikere verdsetter egenskapene ulikt. Forbregd et al. (u.å., s. 18) delte de foretrukne egenskapene inn i tre kategorier: *minimality, aesthetic* og *comprehension.*

2.1.3.1 Minimality

Ifølge Vinner (1991) skal en definisjon være *economical* og *minimal*. Det vil si at ingen av betingelsene i definisjonene ligger implisitt i de andre betingelsene, slik at det ikke skal være noe overflødig informasjon i definisjonen (Forbregd et al., u.å., s. 18). For eksempel vil en minimal definisjon av et rektangel kunne være: «En firkant med tre rette vinkler.», siden det da er implisitt at den fjerde vinkelen også er rett.

Selv om minimalitet er en foretrukken egenskap, forklarer Usiskin et al. (2008, s. 3) at lærebøker ofte ikke bruker minimale definisjoner. Ifølge Zaslavsky og Shir (2005) er ikke en minimal definisjon nødvendigvis hensiktsmessig i en didaktisk sammenheng heller. Derfor introduserte Zazkis og Leikin (2008) begrepet *barely-not-minimal* til definisjoner som bruker passende terminologi og inneholder nødvendige og tilstrekkelige betingelser, uten å være minimal (Johnson et al., 2014, s. 288). For eksempel vil en slik definisjon av et rektangel kunne være: «En firkant med fire rette vinkler.».

2.1.3.2 Aesthetic

Aesthetic, eller estetikk, handler om hvordan definisjonen ser ut og oppfattes, og er ifølge Forbregd et al. (u.å., s. 19) subjektivt og kontekstavhengig. Allikevel mener mange forskere at en definisjon skal være *elegant* (Winicki-Landman & Leikin, 2000; Zazkis & Leikin, 2008), *precise* (Levenson, 2012) eller *clear* (Leikin & Winicki-Landman, 2000;

Miller, 2018). Ifølge Forbregd et al. (u.å., s. 19) blir også minimale definisjoner ansett som mer elegante. Vinner (1991, s. 66) presenterer et eksempel med to forskjellige definisjoner av absoluttverdien til et tall *x*:

1. $|x| = \begin{cases} x & hvis\ x \geq 0 \\ -x & hvis\ x < 0 \end{cases}$

2. $|x| = \sqrt{x^2}$

Selv om begge definisjonene er ekvivalente og minimale, vil mange si at 2 er mer elegant, fordi den bruker færre symboler (Forbregd et al., u.å., s. 19). I tillegg vil 2 være mer hensiktsmessig å bruke for å føre visse bevis. Allikevel kan man argumentere for at 1 er bedre, fordi den er mer tydelig på hva absoluttverdi betyr. Derfor trenger ikke hva som er estetisk i en matematisk sammenheng, være foretrukket i en didaktisk sammenheng (Forbregd et al., u.å., s. 20).

2.1.3.3 Comprehension

Min oversettelse av *comprehension* er forståelse, og denne kategorien innebærer hva som gjør definisjonene forståelige. Fra et didaktisk ståsted er det viktig at definisjonene er forståelige, da det legger til rette for undervisning og læring (Forbregd et al., u.å., s. 20). En passende didaktisk definisjon burde bygge på begreper som allerede er kjent for elevene (Zazkis & Leikin, 2008, s. 133). I tillegg nevner Zazkis og Leikin (2008, s. 133) at den burde være *intuitive*, for å støtte elevenes forståelse av begrepet. Intuisjon bygger gjerne på erfaringer, så hvis elevene har erfaringer med definisjonen blir den mer intuitiv. Burroughs og Burke (2016) bruker begrepet *referential clarity*, for om elevene kan relatere definisjonen til noe de kjenner. For eksempel kan definisjonen være nært relatert til hverdagsspråket. Blant annet er det vanlig å bruke ordlyden «å legge til» i definisjonen av addisjon, dette er nært relatert til hverdagsspråket og derfor noe som vil være intuitivt for mange elever.

Videre sier litteraturen at en definisjon skal være *formally operable*. Det vil si at den skal kunne brukes til å lage eller meningsfullt reprodusere et formelt argument (Bills & Tall, 1998). Dersom definisjonen skal være grunnlaget for elevenes argumentasjon, er det viktig at de forstår den. Flere av begrepene som ble ansett som estetiske, som *precise* og *clear*, gjør også en definisjon mer forståelig (Forbregd et al., u.å., s. 20).

2.1.4 Role and function

I det forrige avsnittet var jeg inne på et bruksområde til matematiske definisjoner, nemlig å argumentere. Matematiske definisjoner har flere bruksområder og kan spille forskjellige roller. Hvilken rolle og funksjon en matematisk definisjon kan ha, er et viktig tema som dukket opp i litteratursøket til Forbregd et al. (u.å.). De delte temaet inn i tre roller og funksjoner: *baptize*, *communication* og *basis for deduction*.

2.1.4.1 Baptize
Den første funksjonen matematiske definisjoner har, er å navngi. Å definere er, ifølge Zazkis og Leikin (2008, s. 133), å gi navn til noe. I kapittel 2.1.1.1 «Stipulated» henviser jeg til filosof Richard Robinson, som forklarte stipulerte definisjoner ved handlingen å tildele et objekt et navn eller å tildele et navn et objekt (Edwards & Ward, 2004, s. 412). I tillegg forklarer Forbregd et al. (u.å., s. 21) at matematiske definisjoner er et nyttig verktøy for å navngi en samling objekter eller fenomen og for å innføre ny notasjon. Et eksempel på slik navngivning kan være at elever har utforsket og jobbet med rundinger, og deretter blir de introdusert for denne definisjonen: «En sirkel er en runding der alle punkter på sirkelbuen har like stor avstand til sentrum.». Hvis elevene forstår denne definisjonen, vil de være i stand til å identifisere samlingen av objekter kalt sirkler, innenfor den mer generelle samlingen av objekter kalt rundinger.

2.1.4.2 Communication
Den andre funksjonen matematiske definisjoner har, er at de skaper et grunnlag for kommunikasjon av matematiske ideer (Forbregd et al., u.å., s. 21). De skal hjelpe utøverne av faget å kommunisere ideene sine på en effektiv måte (Gilboa et al., 2018, s. 440). Matematiske definisjoner tillater kommunikasjon ved å skape entydighet for de matematiske begrepene (Borasi, 1992). I kapittel 2.1.3.3 «Comprehension» snakket jeg om at definisjonene skal kunne brukes til å lage et formelt argument. For å skape overbevisende argumenter er det viktig at man klarer å kommunisere ideene sine på en presis og god måte (Alcock & Simpson, 2017, s. 5). Miller (2018) presiserer at både definisjoner og representasjoner spiller en rolle da man skal kommunisere matematiske ideer, men representasjonene kommer jeg innpå i kapittel 2.2.

2.1.4.3 Basis for deduction
Den tredje funksjonen matematiske definisjoner har, er at de skaper et grunnlag for deduksjon. Det vil si at man bruker definisjonene til å logisk utvinne og strukturere bevis (Forbregd et al., u.å., s. 22). I tillegg utvider definisjonene forståelsen av forskjellige matematiske områder (Forbregd et al., u.å., s. 22), og de gjør det mulig å klassifisere matematiske objekter (Zaslavsky & Shir, 2005). Forbregd et al. (u.å., s. 22) trekker igjen frem uttrykket *formally operable* (Bills & Tall, 1998), og hvorvidt et individ klarer å bruke definisjonen til å lage et formelt argument, noe som krever en viss grad av deduksjon.

2.1.5 Type
Som nevnt har Forbregd et al. (u.å., s. 22) utarbeidet et femte tema, som skiller seg fra de fire andre. Dette temaet beskriver dimensjoner av typer av matematiske definisjoner (Forbregd et al., u.å., s. 23). De utarbeidet to dikotome kategorier: *procedural vs structural* og *inclusive vs exclusive*. Selv om kategoriene er dikotome, forklarer Forbregd et al. (u.å., s. 23) at det kan finnes definisjoner som ikke eksklusivt hører til én av kategoriene.

2.1.5.1 Inclusive and exclusive

Inclusive blir ofte oversatt til inkluderende eller hierarkisk, og brukes når et begrep er et spesialtilfelle av et annet begrep (Winicki-Landman & Leikin, 2000, s. 18). Da vil dette spesialtilfellet defineres med de samme betingelsene, som begrepet det er et spesialtilfelle av, men det vil få andre definerende betingelser i tillegg. For eksempel kan et parallellogram defineres som fire kanter som møtes i planet, der motstående kanter er parallelle, mens spesialtilfellet kvadrat vil få definerende betingelser, som at alle kantene er like lange og at alle vinklene er 90°, i tillegg. I tilfellet med kvadratet vil betingelsen at motstående kanter er parallelle bli overflødig, da det er en implikasjon når vinklene er 90°.

Dersom man bruker inklusive definisjoner vil det ha implikasjoner for undervisning, da læreren må ta et valg om hvilken ende av hierarkiet man skal starte i. Enten å introdusere parallellogram først, for så å snevre det inn med definerende betingelser til man kommer til kvadrat. Eller starte med å introdusere kvadrat, for så å fjerne definerende betingelser og jobbe seg utover til parallellogram. Dette er noe Winicki-Landman og Leikin (2000, s. 18) kaller for læringssekvenser.

En definisjon er *exclusive* eller ekskluderende når den beskriver kun det gitte begrepet og at spesialtilfeller av begrepet blir ekskludert (Forbregd et al., u.å., s. 23). En eksklusiv definisjon av parallellogram kan for eksempel være: «En firkant der motstående vinkler er like store, men ikke 90°.». Denne definisjonen vil ekskludere både rektangel og kvadrat som spesialtilfeller av parallellogram. Trapes er et begrep der definisjonene er tydelig enten ekskluderende eller inkluderende. Enten har et trapes *kun* to parallelle sider, eller så har det *minst* to parallelle sider. Den første definisjonen ekskluderer kvadrat, rektangel og parallellogram som spesialtilfeller, mens den siste inkluderer dem (Forbregd et al., u.å., s. 24).

I flere tilfeller er det et preferansespørsmål om man skal bruke eksklusive eller inklusive definisjoner, men matematikere foretrekker inklusive definisjoner (Forbregd et al., u.å., s. 24). Forskning viser at mange elever helst bruker eksklusive definisjoner, fordi de har et behov for å spesifisere begreper så snevert som mulig (De Villiers, 1994; Forbregd et al., u.å., s. 23). For eksempel kommer det frem av undersøkelsen til De Villiers (1994) at noen elever ønsker at definisjonen til et parallellogram skal ekskludere romben som et spesialtilfelle. I tillegg forklarer Fujita og Jones (2007) at det er vanlig for elever å definere et rektangel som at to av kantene er lengre enn de to andre. Ingen av disse resultatene stemmer overens med hvordan det matematiske fellesskapet definerer firkantene i et hierarki. Et slikt hierarki gir en bedre og dypere forståelse av matematikk generelt, og spesielt matematiske begreper (De Villiers, 1994). Ifølge litteraturen burde man derfor benytte seg av inklusive definisjoner, også i en didaktisk sammenheng.

2.1.5.2 Procedural and structural

Fra litteratursøket til Forbregd et al. (u.å., s. 24) kommer det også frem to forskjellige former for definisjonsformuleringer. Den ene formen er prosedyremessig, som er min oversettelse av *procedural*, og her blir det matematiske begrepet gitt som et utfall av en prosess (Borasi, 1992; Zaslavsky & Shir, 2005). Denne prosessen vil gjerne føre til et eksempel av det matematiske begrepet. For eksempel: «En sirkel får du når du setter passeren i et gitt punkt, sentrum, og lager en runding uten å endre passeravstanden.». Den andre formen er strukturell, som er min oversettelse av *structural*, og beskriver den iboende strukturen i begrepet (Borasi, 1992; Zaslavsky & Shir, 2005). For eksempel: «En sirkel med ett gitt punkt, sentrum, har lik avstand til alle punkter på sirkelbuen.».

2.2 Representasjoner

I tillegg til de matematiske definisjonene foreslår Forbregd et al. (u.å., s. 31) å se på hvilke representasjoner som blir brukt i sammenheng med definisjonene. Dette kapittelet blir derfor dedikert til teori rundt representasjoner, og blir delt inn i tre underkapitler: virkelighetsnære representasjoner, representasjonsbaserte definisjoner, og begrepsbilde.

2.2.1 Virkelighetsnære representasjoner

Duval (2004, s. 13) snakker om *«real-world» problems and representations*, som jeg oversetter til virkelighetsnære problemer og representasjoner. Han understreker at en kjent måte å gi matematikklæring mening på, er å vise elevene at man kan bruke matematikk til å løse praktiske problemer. En annen grunn til å bruke virkelighetsnære problemer, er at elevene kan bruke sine erfaringer og mentale representasjoner, for å få innblikk i de matematiske begrepene (Duval, 2004, s. 13). Duval (2004, s. 15) forklarer at de virkelighetsnære representasjonene er mer tilgjengelig for elevene, enn typiske representasjoner brukt i matematikk. Videre forklarer han at målet for en lærer ikke er å finne den «riktige» representasjonen, men heller en variasjon av relevante representasjoner.

2.2.2 Representasjonsbaserte definisjoner

Ifølge Schifter (2009, s. 76) er representasjonsbaserte bevis noe som er mer tilgjengelig for elevene til å uttrykke generalitet, enn algebraisk notasjon. Forbregd et al. (u.å., s. 31) introduserer på samme måte som representasjonsbaserte bevis, begrepet *representasjonsbaserte definisjoner*. Representasjonsbaserte definisjoner vil også være mer tilgjengelig for elevene.

Forbregd et al. (u.å., s. 31) tilbyr to representasjonsbaserte definisjoner på partall, innenfor representasjonssystemet unifix-kuber, som er kjent for mange elever. Den første definisjonen sier at man har et partall antall unifix-kuber, dersom de kan pares sammen to og to, og ingen blir til overs. Den andre definisjonen sier at man har et partall antall unifix-kuber, dersom de kan deles i to grupper med like mange unifix-kuber i hver. De to definisjonene får frem forskjellige egenskaper ved partall, henholdsvis at partall består av par og at partall kan deles på to. Dette er egenskaper man kunne vist med symboler, for eksempel $P = 2N$, der P er partall og N er heltall, men matematikken blir mer tilgjengelig for elevene, da det blir representert med unifix-kuber. Dermed vil bruk av representasjonsbaserte definisjoner i undervisningssammenheng ha didaktiske fordeler.

2.2.3 Begrepsbilde

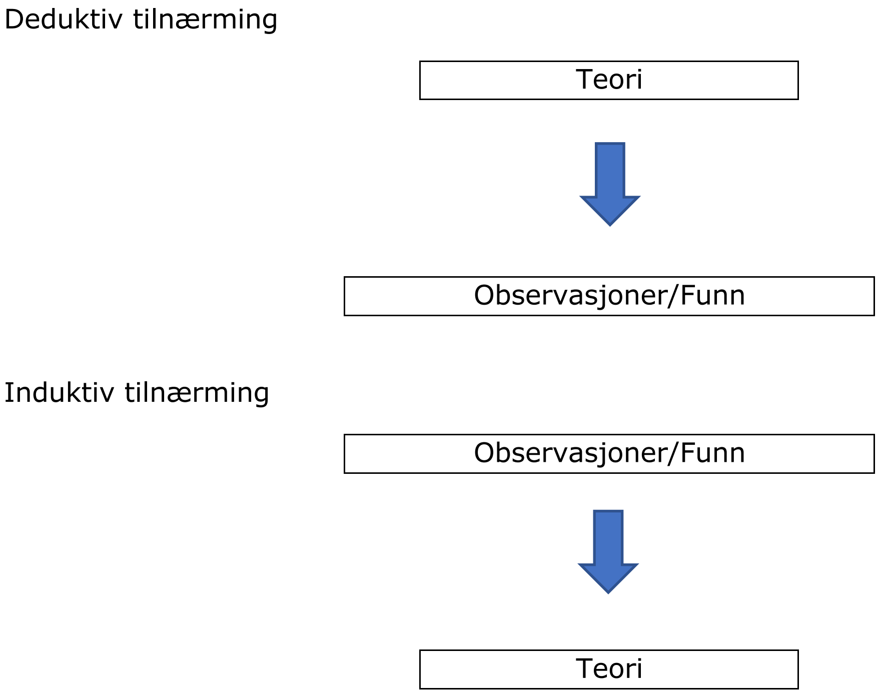
I sammenheng med representasjoner mener jeg det er viktig å snakke om begrepsbildet. Begrepsbildet er en ikke-verbal representasjon av individets forståelse av begrepet, og inkluderer *visuelle representasjoner, mentale bilder, inntrykk og erfaringer som individet assosierer med begrepet* (Vinner, 1991, s. 68). Begrepsbildene til lærerne vil spille en stor rolle for hvilke representasjoner de velger å bruke, samtidig som representasjonene elevene får se, vil påvirke elevenes begrepsbilde. Som Miller (2018, s. 11) uttrykker i henhold til figurer, er det viktig at lærere får begrepsbilder som inkluderer mer enn typiske eksempler, for å gi elevene de læringsmulighetene de trenger for å utvikle rike begrepsbilder.

Når læreren har et rikt begrepsbilde er hen i stand til å utfordre elever med snevre begrepsbilder med figurer de mener ikke passer inn, men som passer med begrepsdefinisjonen. Slike figurer er gjerne degenererte tilfeller av begrepet, som ikke stemmer overens med et snevert begrepsbilde (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, s. 98). Derfor vil det ha didaktiske fordeler å representere begrepene med typiske eksempler, men også degenererte tilfeller, for å utvikle elevenes begrepsbilde. Jeg viser et eksempel på et degenerert tilfelle av en firkant i *Figur 2*, der *c* har kanter som krysser og ser ut som en sløyfe. I mange begrepsbilder vil også kvadrat være et degenerert tilfelle av et parallellogram, så hvis læreren representerer parallellogram med et kvadrat i tillegg til et forskjøvet rektangel, som er et typisk eksempel, så vil det utvikle elevenes begrepsbilde av parallellogram, samtidig som de vil få et innblikk i firkantenes hierarki.

3 Metode

3.1 Metodologi

Teori er påvirket av forskning, men forskning er også påvirket av teori (Bryman, 2012, s. 5). Bryman (2012, s. 5) forklarer at kunnskapen som allerede finnes på et felt former bakgrunnen for videre forskning. Da det teoretiske rammeverket til Forbregd et al. (u.å.) er en systematisk litteraturgjennomgang, vil tidligere forskning i stor grad forme bakgrunnen for min studie. Induksjon og deduksjon er to forskjellige tilnærminger til forholdet mellom teori og forskning (Bryman, 2012, s. 24). Bryman (2012, s. 26) illustrerer forskjellen mellom de to tilnærmingene med en enkel figur som viser at deduksjon starter med teori, som så fører til observasjoner og funn, mens induksjon starter med observasjoner og funn, som så fører til nye teorier (Se *Figur 3*).



Figur 3: Deduktiv og induktiv tilnærming til forholdet mellom teori og forskning

En deduktiv metode vil søke å bruke allerede etablerte teorier til å argumentere for funnene som blir gjort, mens en induktiv metode vil søke å skape nye teorier ut fra disse funnene. Man bruker for eksempel en deduktiv tilnærming i matematikk, der man starter fra kjente aksiomer og lager logiske bevis og definisjoner ut fra dem. Ifølge Bryman (2012) har jeg en deduktiv tilnærming i min undersøkelse, da det teoretiske rammeverket jeg bruker er grunnlaget for analysen av datamaterialet mitt.

Selv om Bryman (2012) illustrerer forskjellen mellom de to, forklarer han at begge vil innebære den andre i en viss grad. For eksempel vil funnene i en deduktiv undersøkelse skape implikasjoner for teorien som ble brukt. Prosessen med å konkludere med disse implikasjonene vil involvere induksjon (Bryman, 2012, s. 24). Derfor vil også min undersøkelse involvere induksjon, selv om jeg hovedsakelig har en deduktiv tilnærming.

Til tross for de ulike tilnærmingene til teori og forskning, forklarer Bryman (2012, s. 22) at litteraturen på et felt burde være drivkraften for forskning generelt. For eksempel foreslår ofte litteraturen temaer som trenger mer undersøkelse, og det er sånn jeg utarbeidet min problemstilling. Både Leikin og Winicki-Landman (2001) og Forbregd et al. (u.å.) foreslo videre forskning på hva lærere foretrekker angående matematiske definisjoner og deres representasjoner. Temaene de foreslo la til rette for flere åpne spørsmål, som ble grunnlaget for min problemstilling; *Hvordan arbeider lærere med matematiske definisjoner i klasserommet og hvordan bruker de representasjoner i definisjonsarbeidet? Hva er begrunnelsene bak lærernes valg?* Ettersom litteraturen har belyst et behov for å forske på dette, blir det min måte å tilføye noe til feltet, som vil få praktiske implikasjoner (Se kapittel 3.5 «Etiske hensyn»).

Da forskeren vet hva hen vil finne ut, er det neste spørsmålet hvilken metode som er mest hensiktsmessig for å samle inn datamaterialet. Forskningsmetoder deles hovedsakelig inn i kvantitative og kvalitative undersøkelser (Bryman, 2012, s. 35). Generelt sett er forskjellen mellom de to at man anvender målinger i en kvantitativ undersøkelse, men ikke i en kvalitativ undersøkelse (Bryman, 2012, s. 35). Derimot er forskningsobjektenes meninger og refleksjoner rundt temaet viktigere i en kvalitativ undersøkelse (Bryman, 2012, s. 399).

Valget av metode må baseres på problemstillingen. Når man har en godt formulert problemstilling foreslår Lofland og Lofland (1995, s. 78) å stille seg spørsmålet: *Just what about this thing is puzzling me?.* Med min problemstilling er det tydelig at det jeg lurer på er hva lærere gjør og hvorfor. Lærernes meninger og refleksjoner rundt temaene er viktig for meg, dermed ble det mest hensiktsmessig med en kvalitativ undersøkelse. Metoder for å samle inn data til kvalitative undersøkelser kan blant annet være intervju eller observasjon (Bryman, 2012). For meg var det nærliggende å bruke en metode der jeg fikk snakke med lærere, og endte derfor med kvalitative intervjuer.

3.2 Kvalitativt intervju

Intervju er den mest brukte metoden i kvalitativ forskning (Bryman, 2012, s. 469). Intervju deles ofte inn i tre hovedgrupper, strukurert, semi-strukturert og ustrukturert intervju. Semi-strukturerte og ustrukturerte intervjuer blir brukt i kvalitativ forskning og kan kalles kvalitative intervjuer, mens strukturerte intervjuer blir brukt i kvantitativ forskning (Bryman, 2012). Forskjellene mellom de to ligger i navnet, et strukturert intervju er mye mer strukturert enn et kvalitativt intervju. Dette er fordi man i en kvantitativ undersøkelse skal gjøre målinger av nøkkelbegreper, alt utenom dette vil være irrelevant data, dermed er det viktig at intervjuet er strukturert. I motsetning er det ikke nøkkelbegrepene som er det viktigste i et kvalitativt intervju, men heller intervjuobjektenes tanker og refleksjoner rundt nøkkelbegrepene. Det at intervjuobjektene går utenom «manus» vil være en styrke i et kvalitativt intervju, da det vil gi et innblikk i hva intervjuobjektet syns er viktig og relevant angående temaet, fremfor hva forskeren syns er viktig og relevant (Bryman, 2012, s. 470).

Da det kvalitative intervjuet ikke skal ha så streng struktur, blir det også mer fleksibelt. Fleksibiliteten det kvalitative intervjuet tilbyr er en av fordelene med det (Bryman, 2012, s. 469). Det legger til rette for at man styrer intervjuet i den retningen intervjuobjektet tar intervjuet. Man kan vike fra eventuelle intervjuguider, i form av at man kan stille oppfølgingsspørsmål, og endre rekkefølge og ordlegging på spørsmålene, hvis man tenker at det er hensiktsmessig for å få mest mulig detaljerte svar fra intervjuobjektet. Dette har man ikke mulighet til i et kvantitativt intervju, da det vil svekke standardiseringen av intervjuprosessen, og dermed svekke reliabiliteten og validiteten av målingene (Bryman, 2012, s. 470).

Selv om det ikke er noen streng struktur i et kvalitativt intervju, er det ofte vanlig å ha en intervjuguide. Begrepet intervjuguide er ikke spesifikt. Det kan være både en kort huskeliste med temaer man skal innom i et ustrukturert intervju, eller det kan være en litt mer omfattende og strukturert liste med både spørsmål og temaer man skal innom i et semi-strukturert intervju (Bryman, 2012, s. 473). Som navnet sier er en intervjuguide mer retningslinjer enn et bestemt manus. Det er viktig at intervjueren legger til rette for fleksibilitet, både i gjennomføringen av intervjuet og i utarbeidelsen av intervjuguiden (Bryman, 2012, s. 473).

Jeg valgte et semi-strukturert intervju for å samle inn dataen i min undersøkelse. Jeg valgte semi-strukturet intervju, fordi jeg hadde en del spesifikke spørsmål jeg trengte svar på for å svare på problemstillingen min, samtidig som jeg ville ha mye refleksjon rundt de bestemte spørsmålene. Dermed måtte jeg ha en relativt omfattende intervjuguide (Se Vedlegg 1 «Intervjuguide»). For å utarbeide denne intervjuguiden brukte jeg noen av punktene Bryman (2012, s. 473) foreslår til en intervjuguide. For det første burde den inneholde en viss rekkefølge på temaene man skal innom i intervjuet. Jeg hadde fire temaer jeg skulle innom:

1. Partall
2. Firkanter
3. Mer generelt om matematiske definisjoner
4. Lærerne skulle få velge mellom ulike ekvivalente definisjoner

For det andre må spørsmålene være godt formulerte i henhold til problemstillingen, slik at svarene man får i intervjuet faktisk er det man er ute etter i problemstillingen. For eksempel startet jeg med å spørre: *Hvordan vil du definere partall i klasserommet ditt?*, og da svarte lærerne ofte med en slags definisjon og hvordan de jobba med den i introduksjonen av begrepet, noe jeg er ute etter i den første delen av problemstillingen. Jeg spurte også direkte etter representasjoner i intervjuet mitt. For eksempel: *Hvilke representasjoner vil du bruke i forklaringen av de forskjellige definisjonene?.* For å bruke kategoriseringen av spørsmål til kvalitative intervjuer fra Kvale (1996), er dette direkte spørsmål, som jeg mener er hensiktsmessig å bruke, da jeg eksplisitt er ute etter eksempelvis en bestemt representasjon av partall.

Follow-up questions og *probing questions* (Kvale, 1996) er to andre typer spørsmål jeg bruker i intervjuet mitt. Ifølge Kvale er *follow-up questions* når intervjueren stiller enkle spørsmål for å få intervjuobjektet til å utdype svaret sitt. For eksempel: *Hva mener du med det?* eller *Jaa..?. Probing questions* er når intervjueren følger opp hva som har blitt sagt ved å direkte spørre om det. For å ta et eksempel som dukket opp i et av mine intervjuer: *Ja, jerbaneskinner for å illustrere parallell, hvorfor det egentlig?.* Med disse forklaringene til grunn velger jeg å kategorisere disse to typene som oppfølgingsspørsmål. Det at jeg var opptatt av å stille oppfølgingsspørsmål, ga meg flere og mer detaljerte begrunnelser, som også er et eksplisitt fokus i problemstillingen min.

3.3 Validitet

Ettersom jeg skal gjøre kvalitativ forskning, kommer jeg ikke til å vie mye fokus til reliabilitet og validitet, da dette er mer utbredt i kvantitativ forskning (Bryman, 2012). Allikevel er det to typer validitet som jeg har tatt i betraktning i min studie, det er *external validity* og *ecological validity* (Bryman, 2012). *External validity* handler om resultatene fra forskningen kan generaliseres utenom konteksten av forskningen. Hvis en studie er *externally invalid* vil resultatene av forskningen kun gjelde deltakerne som det er forsket på, mens hvis den er *externally valid* kan man generalisere resultatene slik at de gjelder en større gruppe enn kun de det er forsket på. For å gjøre dette er det viktig at, spesielt kvantitative forskere, har et representativt datamateriale (Bryman, 2012, s. 48).

Generalisering er ikke et mål i min studie, men jeg har uansett gjort grep for å få et representativt datamateriale. Det har jeg gjort ved at lærerne jeg skal intervjue er fra henholdsvis 1., 4. og 7. trinn. På denne måten har jeg fått representert lærere for de yngste, mellomste og eldste elevene. Selv om disse forskjellige trinnene er representert, betyr ikke det at jeg kan gjøre generaliseringer og si at funnene gjelder for alle norske barneskolelærere. Allikevel mener jeg det var lurt å representere de forskjellige trinnene, da det er naturlig å tenke at lærerne vil gjøre flere ting ulikt og at de vil ha mer ulike begrunnelser for hvorfor de gjør som de gjør, når de er fra forskjellige trinn. Dermed vil det være med å berike datamaterialet med ulike måter å arbeide med definisjoner på og ulike begrunnelser for det, noe som er viktig i min studie.

Den andre typen validitet jeg tar til betraktning i min studie er *ecological validity*. Det handler om studien blir gjort i en naturlig setting for deltakerne. Dersom deltakerne er i en unaturlig setting, vil svarene også kunne bli kunstige (Bryman, 2012, s. 48). Man kan diskutere om noe forskning, der deltakerne vet de blir forsket på, er naturlig i det hele tatt. Jeg tviler på at lærerne syns det var naturlig å bli intervjuet om praksisen deres, så jeg måtte bare prøve å gjøre det så naturlig som mulig. Dette gjorde jeg ved at lærerne selv kunne bestemme hvor vi skulle ha intervjuet, slik at det ble et naturlig sted for dem, der de kunne føle seg trygge. I tillegg prøvde jeg å få intervjuet til å bli så mye samtale som mulig. Jeg fulgte en intervjuguide, men den var fleksibel, så jeg opprettholdte hele tiden en naturlig flyt i intervjuet ved å stille oppfølgingsspørsmål og ikke avbryte.

3.4 Analysemetode

Analysemetoden jeg har valgt er tematisk analyse. Tematisk analyse er en av de mest vanlige tilnærmingene til analyse av kvalitativ data (Bryman, 2012, s. 578; Braun & Clarke, 2006, s. 77). Braun og Clarke (2006, s. 77) mener at det er en nyttig og fleksibel metode for kvalitativ forskning. For å gjøre min tematiske analyse følger jeg rådene til Braun og Clarke (2006, s. 87), som har foreslått seks steg for hvordan man skal gjennomføre en tematisk analyse. De understreker at stegene er retningslinjer og at arbeid med en slik analyse ikke er lineær, men at man må gå frem og tilbake mellom stegene hele tiden. Allikevel ser jeg stegene som en god støtte, da de tydeliggjør hva jeg burde ha vært gjennom:

1. Bli godt kjent med datamaterialet. Jeg har transkribert, noe som er en viktig del av dette punktet.
2. Systematisk samle dataen i koder.
3. Samle kodene inn i potensielle temaer.
4. Evaluere temaene og se om de passer til den kodede dataen.
5. Definere og navngi temaene. Her må hva temaene betyr og hva de heter bli tydeliggjort.
6. Produsere rapporten eller i mitt tilfelle resultatkapittelet. Her skal jeg ta utdrag fra datamaterialet som er relevante for min problemstilling og se dem opp mot teorien min (Braun & Clarke, 2006).

Jeg har en rammeverkstilnærming til denne rapporten (Bryman, 2012, s. 579). Det vil si at jeg skal presentere datamaterialet i matriser med temaer og undertemaer. Jeg har fylt hver matrise med utdrag fra dataen, som jeg har plassert i de passende cellene. Hver matrise er basert på et hovedtema. Bryman (2012, s. 580) har laget fire punkter for å forklare hva et tema er:

1. Et tema er en kategori som dukker opp i dataen og identifiseres av forskeren.
2. Temaet skal være relevant for fokuset på forskningen og gjerne da problemstillingen.
3. Temaet skal bygges på koder oppdaget i transkripsjonen.
4. Temaene skal danne et grunnlag for teoretisk forståelse av datamaterialet, som igjen skal bli et bidrag til forskningen på feltet.

Ryan og Bernard (2003) kommer med et forslag for ting å se etter da man skal identifisere temaer. Disse innebærer repetisjoner, lokale uttrykk, metaforer, overganger, likheter og forskjeller, setningsbindere, manglende data, og teori-relatert materiale. Ettersom det teoretiske rammeverket til Forbregd et al. (u.å.) er grunnlaget for min analyse, vil temaene komme fra dette rammeverket og dermed være teori-relatert materiale. Det ble derfor seks temaer, som jeg har hentet fra teoridelen min. Disse er natur, kriterier, foretrukne egenskaper, rolle og funksjon, type, og representasjoner, med tilhørende undertemaer hentet fra teoridelen.

Jeg legger ved matrisen «Kriterier» (Tabell 1), som jeg har kortet ned slik at det bare er ett utsagn i hver celle, da dette kun er for å vise oppsettet av matrisen. Alle matrisene har ett hovedtema og tre undertemaer, utenom «Type» som har fire undertemaer. L1, L2 og L3 er forkortelser for lærer 1, 2 og 3, etter hvilken rekkefølge jeg intervjuet dem.

Rekkefølgen er irrelevant for undersøkelsen, men det var en grei måte å skille mellom de tre på. Jeg har også med hvilken linje utdraget er hentet fra i transkripsjonen, bak utdraget i parentes. Som man kan se et par steder i dette eksempelet, tar jeg også i bruk klammetegn. Disse bruker jeg enten for å simulere et ord lærerne ikke sa, men som må være der for å skape mening, eller så er det jeg som stiller et oppfølgingsspørsmål, disse lar jeg som regel stå som tomme klammer. Dersom det ikke kommer frem i svaret hva jeg spør om, vil jeg forklare det i en klamme. Funnene denne analysen fører til skal presenteres i resultatkapittelet.

	Kriterier		
	Formell	Eksemplifisering	Aksiomatisering
L1	Tror hverdagsforklaring er lettere for barn å forstå enn nødvendigvis den matematiske definisjonen som ofte er litt traust og krever mye bakgrunnskunnskap da. (Linje 80)	[Da] kan man tolke det [sløyfe som en firkant] ja, da må man legge til da: «som ikke krysser hverandre..», ellerno i den duren da, jeg vet ikke.. (Linje 90)	Parallellogram har 2 og 2 sider som er parallelle da og 2 og 2 vinkler som er lik ja. Det er på en måte det da, så er det sånn utafor definisjonsmessig så det er jo pleier man å dra likheten til et rektangel da som er det de har lært først da. Rektangel og kvadrat er på en måte de første de lærer da også.. bygger man litt videre på det til parallellogram da. (Linje 32)
L2	..jo mer de skal lære, jo viktigere er det å ha nøyaktige definisjoner.. [] Så kravet til å være spesifikk og presist det synes jeg øker.. det går hånd i hånd med jo eldre elevene blir, jo større krav blir det til at de skal få erfaring med å bruke presise beskrivelser av figurer for eksempel da. (Linje 28)	For å bevisstgjøre dem på at den figuren har fire kanter og per definisjon oppfyller kriteriet for å være en firkant, men den har jo ikke fire hjørner. Mens en lukka firkant som elevene kjenner best til, som de har mest erfaring med, den har fire hjørner. Så de har til felles at de har fire kanter og er per definisjon en firkant, men de har forskjellige egenskaper i forhold til at den ene er lukka og den andre er åpen. (Linje 8, snakker om åpne firkanter)	Mhm ja, da er vi inne i figurenes vidunderlige verden, og det snakka vi litt om på videreutdanninga jeg tok på NTNU. Og da er vi altså tilbake til.. det aller viktigste er å lære egenskapene til figurene. Og en firkant, den har altså fire kanter, og da er det viktig å.. jeg ville jo tegna opp en firkant eller vist frem en firkant og markert hvor kantene er. (Linje 6)
L3	Jeg tenker jo at matematiske definisjoner, det er lett å tenke at dem er ganske eksakt og ikke så omtrentlig, som enkelte hverdagslige definisjoner kanskje kan være, ikke så mye rom for skjønn. Det ville jeg tenke, at de er ganske nøyaktige på en måte. (Linje 78)	Jeg vil tenke at jeg kan ikke si at: «Ja er det her en firkant og?» *Peker på stolryggen*. Nei, ja, den er kanskje det da, men den har ikke helt rette kanter, men sånn nesten en firkant, men jeg tror ikke jeg ville ha gitt rom for det helt, hvis jeg skulle jobba matematisk med det, at det her er en firkant, den må kunne fylle de kriteriene på en måte sånn helt. (Linje 80)	Ja da tenker jeg at vi må jobbe med det her med hjørner og kanter, sånn at de på en måte har de begrepene, og det er jo når vi starter tidlig med gjerne å jobbe med begreper, og hjørner og kanter er en del av det. Og da tenker jeg at en firkant er jo en figur som har 4 hjørner, men den har like mange sidekanter og ja. Og at det er rette kanter da, ikke minst. (Linje 28)

Tabell 1: Matrisen «Kriterier»

3.5 Etiske hensyn

Forskere må også ta mange etiske hensyn (Bryman, 2012, s. 6). Deltakerne må samtykke til å være med på forskningen, når de samtykker skal de også vite nøyaktig hva de samtykker til. Det vil si at deltakerne må vite hva formålet med forskningen er. Jeg lagde et informasjonsskriv etter en mal fra NSD, som ble godkjent av NSD (Se Vedlegg 2 «Informasjonsskriv med samtykkeerklæring»). Dette informasjonsskrivet sendte jeg på mail til mine intervjuobjekter i forkant av intervjuet. I tillegg skrev jeg det ut og tok det med fysisk til hvert intervju, slik at intervjuobjektene kunne skrive under samtykkeerklæringen som var nederst i skrivet. Frem til jeg leverte oppgaven, hadde de også mulighet til å trekke dette samtykket.

Et annet etisk hensyn er konfidensialitet. Det vil si at det kun er forskeren og de som jobber på forskningsprosjektet som har tilgang til dataen. Denne dataen skal ikke deles videre og skal slettes når forskningsprosjektet er over. Når funnene fra forskningen skal presenteres, skal deltakerne være anonymisert, slik at ingen skal kunne klare å finne ut hvem det er. Jeg anonymiserer lærerne og kaller dem for en L1, L2 og L3, samtidig som den eneste informasjonen jeg har gitt om dem, er at de er lærere på 1., 4. og 7. trinn på skoler i Trøndelag. Dermed skal det ikke være mulig å finne ut hvem de er. Jeg informerte også intervjuobjektene om hvordan jeg skulle overholde konfidensialiteten i min oppgave, i informasjonsskrivet.

Relatert til etikk og verdier vektlegger Bryman (2012, s. 6) spørsmålet hva forskningen er for. I forskningsverdenen er det kjent at den akademiske rollen til forskning er å tilføye noe til kunnskapen på feltet. Derimot finnes det også forskere som mener at forskning kan spille en annen rolle, nemlig en praktisk rolle og at den skal gjøre en forskjell for verden rundt oss, og ikke bare forskersamfunnet (Bryman, 2012, s. 7). Grunnen til at dette er et etisk hensyn, er at forskning som hverken tilføyer noe kunnskap eller har praktiske implikasjoner, anses som uetisk, da ressursene kunne bli brukt til noe som ville bidratt til minst én av feltene. Derfor understreker Bryman (2012, s. 7) at det vil være hensiktsmessig i noen forskningsfelt, spesielt innenfor sosial forskning, å forske på temaer som vil få praktiske implikasjoner. Da forskningen min handler om yrkesutøvelsen til lærere, er målet først og fremst at funnene skal ha praktiske implikasjoner for lærere og kommende lærere.

3.6 Metodekritikk

Jeg var tidlig i gang med å gjennomføre intervjuer, og gjennomførte alle intervjuene på to dager. Jeg ville ha dem tett inntil hverandre, fordi jeg tenkte at det var hensiktsmessig å være ferdig med alle intervjuene før jeg begynte å analysere. Grunnen til dette er at hvis jeg hadde startet å analysere det første intervjuet, så kunne jeg tenkt at jeg hadde et funn, også hadde jeg ført de andre intervjuene i retningen av det funnet, og påvirket lærerne til å svare noe annet enn det de egentlig mente. Så ved å ha intervjuene tett inntil hverandre, mente jeg at jeg ble minst mulig påvirket av svarene jeg hadde fått i de andre intervjuene. Med denne filosofien ville det vært dumt å ha flere intervjuer senere i prosjektet. Derfor ble det med de tre intervjuene jeg hadde i starten, noe som kan anses som få. Allikevel hadde jeg en del datamateriale, da intervjuene var fra 35 minutter til 1 time.

Jeg skriver at jeg ville bli minst mulig påvirket i intervjuprosessen, men lærerne kan også bli påvirket. En av ulempene ved et kvalitativt intervju, er at intervjuobjektet kan bli påvirket av at intervjuet er en unaturlig setting, som vil svekke intervjuets *ecological validity* (Se kapittel 3.3 «Validitet»). Jeg uttrykte før starten av hvert intervju at jeg ikke var der for å teste lærerne, men heller få innblikk i hva de gjør. Allikevel uttrykte alle lærerne at de var nervøse og redde for å svare «feil». Derfor risikerte jeg å få svar som lærerne trodde jeg ville høre, i stedet for hva de egentlig mente eller gjorde. Dette vil alltid være en risiko ved et kvalitativt intervju, så jeg gjorde bare det jeg kunne for å lage en trygg og naturlig situasjon, der lærerne kunne svare ærlig. Dette gjorde jeg ved å ha intervjuene der lærerne selv ønsket, i trygge omgivelser for dem, i tillegg som jeg var tydelig på at jeg ikke var ute etter å teste dem, men heller lære av dem.

4 Resultat

Som nevnt i kapittel 3.4 «Analysemetode», skal funnene jeg gjorde i analysen bli presentert i dette kapittelet. Jeg har gjort funnene på tvers av temaer og undertemaer, og jeg kommer til å legge ved utdrag fra dataen fra de temaene som er relevante for funnet. Utdragene blir presentert i matriser, slik jeg gjorde analysen. Naturligvis kan også ett utdrag fra datamaterialet passe i flere undertemaer. I disse tilfellene vil jeg ikke legge ved matriser for begge temaene, men heller presentere matrisen til det temaet jeg syns er mest relevant for funnet og gir en best mulig oversikt. Deretter kommer jeg til å forklare at utdraget også passet til et annet undertema, dersom det er med å underbygge funnet. Jeg har utarbeidet tre funn fra denne analysen, det ene er at lærerne foretrekker eksklusive definisjoner, det andre er at lærerne avviker fra teorien i sin oppfatning av hva en «matematisk korrekt» definisjon er, og det tredje er at lærerne involverer elevene i definisjonsarbeidet ved at de får definere begreper og utforske representasjoner av begrepene.

4.1 Funn 1: Lærerne foretrekker eksklusive definisjoner

De tre lærerne jeg intervjuet brukte stort sett eksklusive definisjoner. For å vise dette er det naturlig å legge ved matrisen «Type» (Tabell 2), der to av undertemaene er eksklusiv og inklusiv. Jeg har valgt å fjerne undertemaene prosedyremessig og strukturell fra matrisen, da jeg ikke mener de er relevante for dette funnet.

<table>
<tr><th colspan="3">Type</th></tr>
<tr><th></th><th>Eksklusiv</th><th>Inklusiv</th></tr>
<tr><td>L1</td><td>Jeg sier at det er 2 forskjellige ting fordi at i et rektangel så er det jo 4 vinkler som er lik, mens i et parallellogram så er det bare 2 vinkler som er like, så vidt jeg har forstått definisjonen riktig da, hehe. (Linje 42)

nei fordi at [kvadrat] der er det jo 4 sider som er like lange og i et rektangel så er det 2 og 2 sider som er like lange, da det blir jo litt sånn hvis du skal ta formelen for arealet da, så er det jo rektangel så er det lengde ganger bredde, og det kan du si til et kvadrat og, men du kan si side ganger side..
[]..står i en del læreverk hvert fall.
[]
Så er det på en måte omkrets og, så er det jo lengde ganger 2 pluss bredde ganger 2 på et rektangel, mens et kvadrat så er det 4 ganger s, 4 ganger side. (Linje 48)

Nei fordi at.. jaja det blir jo på en måte, vinkelsummen vil jo være 360 grader, nei jeg ville ikke sagt det altså [at sløyfe er en firkant].. (Linje 58)

Ja.. men jeg vet ikke. Er det der [sløyfa] en firkant da? (Linje 92)</td><td></td></tr>
<tr><td>L2</td><td>Ja egentlig og at i rektangelet så er det fire 90-graders vinkler som får en vinkelsum på 360, i parallellogrammet er det fire vinkler som også får vinkelsum 360, men de fire er</td><td>Ja jeg tror jeg ville sagt det [at en sløyfe er en</td></tr>
</table>

	ikke 90 grader, to er spisse og to er stump, og i sum så blir de da 360 naturligvis. Men.. ja jeg tror jeg ville gjort det ja [skilt dem]. (Linje 20) Nei jeg ville ikke gjort det [definert kvadrat som et rektangel].. fordi at.. åssen skal jeg si det.. fra gammelt av har vi lært at to av sidene i et rektangel er lengre enn de to andre, og at det er noen av rektangelets egenskaper. Men jeg mener at det og var en diskusjon som vi diskuterte, at rektangelet kunne ha felles egenskaper med kvadratet og at det egentlig holdt vann å definere begge to som samme, men at de fleste hvertfall mener at rektangelet skiller seg fra kvadratet ved at to sider er lengre enn de to andre. (Linje 22) [Snakker om definisjonene under Rektangel (1) i intervjuguiden] Jeg mener at den nederste mangler på en måte den informasjonen om at 2 sider er lengre enn de 2 andre, for det står ikke noe om, og så er det jo et spørsmål om i hvor stor grad et parallellogram kan ha rette vinkler, for hvis du retter opp et parallellogram, så får du et rektangel, hvis du skjønner hva jeg mener. Så ja nei jeg hadde godt kunnet.. den øverste, punkt 1 her da: et rektangel er et parallellogram med rette vinkler, kunne jeg godt ha vært med og diskutert det, også hatt det som en diskusjon og sagt at: «hva skjer med parallellogrammet hvis vi justerer det opp sånn at vinklene blir rett, hvilken figur får vi da?». Kunne vært et godt utgangspunkt for en diskusjon, men jeg ville ha vært forsiktig med å sagt at et rektangel er et parallellogram med rette vinkler. (Linje 42) Ja jeg har nok villet ordlagt meg helst på en sånn måte at rektangelet har 2 sider, 2 kanter, som er lengre enn de 2 andre, mye for å gjøre det lettere for elevene å skille mellom et rektangel og et kvadrat. Også vet jeg at det finnes gode argumenter for å kunne si at de 2 figurene har veldig mange like egenskaper, men spesielt gitt på det nivået jeg underviser nå, så har jeg ville ha ordlagt meg sånn ja. (Linje 46)	firkant], jeg tror jeg ville utfordra dem på det. Og det blir litt den samme tankegangen som en åpen og en lukka [firkant], altså at du utfordrer det bilde du har av en vanlig boks eller noe anna lignende som en vanlig firkant, det som vi oppfatter som en vanlig firkant ikke sant. For den her har og helt åpenbart fire kanter og den har fire hjørner og den er lukka, men den har en litt anna form enn normalt eller det vi oftest ser som firkant da. (Linje 10)
L3	Da teller du ikke det her som et hjørne da? *Peker på der kantene krysser i sløyfa*[] For det ville jeg ha gjort. [] Nei, men jeg ville heller ikke kalt det for en sekskant. Så jeg ville kalt det for et timeglass eller to trekanter som berører hverandre på spissen. Men har du en annen definisjon på den figuren? [] Ja det tror jeg hadde blitt vanskeligere [om sløyfa skulle vært en firkant]. (Linje 34-46) Alle er firkanter, men jeg ville vel kanskje kalt dem forskjellige ting [parallellogram, rektangel og kvadrat]. Nå kjenner jeg at jeg ble litt på tynn is. For jeg ble litt usikker på parallellogrammet i forhold til rektangelet, men da kan du si det i forhold til kvadrat og, fordi at et parallellogram er jo ikke kvadratisk, for den har jo helt rette sider som står 90 grader overfor hverandre, men det gjør ikke parallellogrammet da, det er forskjøvet så det blir ikke 90 grader hjørner på det. Det er hvertfall forskjell. Det har med vinklene på hjørnene å gjøre. Du har to av vinklene som er like da. (Linje 54) Ja det vil jo det, men hva er det da som skiller kvadrat og rektangel? Det er jo at sidene er like lange da. (Linje 62)	

	Nå er det kjempelenge siden jeg har undervist om det, men hvertfall da jeg underviste om det, så underviste jeg om det som tre ulike typer firkanter da. Og trapes har du jo i samme, som du har en lenger og en kortere side. (Linje 64) Jeg vil anta at jeg har brukt de veiledningene man hadde den gangen og, så jeg har ikke sett på lærerveiledningen hvordan definisjonene er nå, det er jeg usikker på hvordan de vil definere det (Linje 70) For det var jo ikke det at den [hierarkiet] trenger å være vanskeligere å forstå, men kanskje [den eksklusive er] lettere hvis man skal sortere. (Linje 74)	

Tabell 2: Matrisen «Type» med undertemaene «Eksklusiv» og «Inklusiv»

Utdragene går stort sett på spørsmålene på det andre temaet i intervjuet mitt, som var «Firkanter». Firkanter er organisert og kategorisert i et hierarki, og derfor er det enkelt å skille mellom eksklusive og inklusive definisjoner i lys av firkanter. I analysen fant jeg at det var en signifikant skeivfordeling mellom utsagn som definerte firkanter eksklusivt og inklusivt. Det eneste utsagnet som støtter en inklusiv tilnærming til firkanter, er når L2 velger å inkludere sløyfa som en firkant (markert gult under «Inklusiv»). Hen forklarer at dette er noe hen gjør for å utfordre hva elevene oppfatter som en vanlig firkant (markert grønt), altså at hen er opptatt av å utfordre begrepsbildet til elevene, dette utsagnet kom naturligvis også under «Begrepsbilde» i analysen.

L1 og L3 velger å ekskludere sløyfa fra firkanter (markert gult under «Eksklusiv»). L1 adresserer vinkelsummen, slik Van Dormolen og Zaslavsky (2003) gjør, men hen sier at vinkelsummen blir 360°. Allikevel konkluderer hen med at sløyfa ikke er en firkant, men uttrykker usikkerhet og spør senere etter fasiten. Derfor tolker jeg L1 sitt valg om å ekskludere sløyfa, som tilfeldig. L3 peker på de kryssende kantene og konkluderer med at det hadde vært vanskeligere for elevene, dersom hen skulle inkludert sløyfa som en firkant. Hen forklarer ikke hvorfor det skulle bli vanskeligere med kryssende kanter og nevner heller ikke vinkelsummen, som Van Dormolen og Zaslavsky (2003) fremhever som problemet til en slik firkant. Derfor tolker jeg også L3 sitt valg om å ekskludere sløyfa, som tilfeldig.

Det at jeg tolker begge lærernes valg om å ekskludere sløyfa som en firkant som tilfeldig, impliserer at dersom lærerne ikke har noen grunn til å bruke enten eksklusive eller inklusive definisjoner, går de for eksklusive definisjoner. Derfor er det ikke tilfeldig allikevel. Det tyder på at lærerne har et behov for å definere begrepene, i dette tilfellet parallellogram, rektangel og kvadrat, så snevert som mulig, slik De Villiers (1994) forklarte at elever har et behov for.

Når det kommer til firkantenes hierarki, er det ingen av lærerne som mener at et rektangel er et spesialtilfelle av parallellogram, og heller ingen som mener at et kvadrat er et spesialtilfelle av noen av de to nevnte. Alle tre lærerne uttrykker at kvadrat, rektangel og parallellogram er firkanter, men forskjellige firkanter som ikke kan være det samme (markert blått). Blant annet definerer L2 rektangel på samme måte som Fujita og Jones

(2007) eksemplifiserer, med at to av kantene skal være lengre enn de to andre, og vil dermed ekskludere kvadrat som et spesialtilfelle av rektangler.

De har forskjellige begrunnelser for hvorfor de bruker eksklusive definisjoner av firkantene (markert grått). L1 mener at formlene man har for å regne areal og omkrets av kvadrat og rektangel, gjør at de ikke kan være det samme. Arealet av et kvadrat er side ganger side, mens det kan bli problematisk for et rektangel, der sidene ikke er like lange. Samme med omkrets som er fire ganger side, så vil ikke det heller stemme for et rektangel, der sidene ikke er like lange. Derfor tolker jeg at L1 er mer opptatt av formler enn de faktiske egenskapene de forskjellige firkantene har. Egenskapene til figuren burde bestemme hvilke formler man kan bruke, ikke omvendt, at formlene bestemmer egenskapene. Det er hensiktsmessig at elevene lærer seg egenskaper ved det matematiske begrepet gjennom å gi mening til betingelsene definisjonen gir. For eksempel at elevene blir introdusert for denne definisjonen av et kvadrat: «Et kvadrat er en firkant med rette vinkler, der kantene er like lange.», og at de heller ved hjelp av denne definisjonen kan prøve å bevise at formelen for å finne arealet til et kvadrat kan være $A = s^2$.

Både L2 og L3 er inne på det Zaslavsky og Shir (2005) snakker om med klassifisering av matematiske objekter, da de mener at det er enklere å sortere og skille dem, når de ikke kan være det samme. Derfor var disse utsagnene også i matrisen «Rolle og funksjon» under «Deduksjon». L2 forklarer at det er noe hen har med seg fra gammelt av, at et rektangel skal ha to kanter som er lengre enn de to andre. L3 henviser til gamle lærerveiledninger og regner med det er der hen har det fra å bruke eksklusive definisjoner til firkantene.

Teorien understreker at matematiske definisjoner skal kunne skille mellom eksempler og ikke-eksempler (Morgan, 2005), dette er lærerne jeg har intervjuet også klare på. Som vi kan se av utdragene under, hentet fra «Eksemplifisering» (Tabell 3), er lærerne opptatt av at eksempelet må oppfylle alle kriteriene i definisjonen.

Kriterier	
	Eksemplifisering
L1	[Da] kan man tolke det [sløyfe som en firkant] ja, da må man legge til da: «som ikke krysser hverandre..», ellerno i den duren da, jeg vet ikke. (Linje 90) [hen blir usikker på om sløyfe er en firkant] Ja.. den oppfyller jo en del kriterier og da, den gjør jo det. (Linje 94)
L2	For å bevisstgjøre dem på at den figuren [en åpen firkant] har fire kanter og per definisjon oppfyller kriteriet for å være en firkant, men den har jo ikke fire hjørner. Mens en lukka firkant som elevene kjenner best til, som de har mest erfaring med, den har fire hjørner. Så de har til felles at de har fire kanter og er per definisjon en firkant, men de har forskjellige egenskaper i forhold til at den ene er lukka og den andre er åpen. (Linje 8) Ja jeg tror jeg ville sagt det [at sløyfe er en firkant], jeg tror jeg ville utfordra dem på det. Og det blir litt den samme tankegangen som en åpen og en lukka [firkant], altså at du utfordrer det bilde du har av en

	vanlig boks eller noe anna lignende som en vanlig firkant, det som vi oppfatter som en vanlig firkant ikke sant. For den her har og helt åpenbart fire kanter og den har fire hjørner og den er lukka, men den har en litt anna form enn normalt eller det vi oftest ser som firkant da. (Linje 10)
L3	Jeg vil tenke at jeg kan ikke si at: «Ja er det her en firkant og?» *Peker på stolryggen*. Nei, ja, den er kanskje det da, men den har ikke helt rette kanter, men sånn nesten en firkant, men jeg tror ikke jeg ville ha gitt rom for det helt, hvis jeg skulle jobba matematisk med det, at det her er en firkant. Den må kunne fylle de kriteriene på en måte sånn helt. (Linje 80)

Tabell 3: Matrisen «Kriterier» med undertemaet «Eksemplifisering»

Det tydeligste eksempelet på at lærerne ønsket å utelukke ikke-eksempler, ser vi når L1 skjønte at man kunne tolke sløyfa som en firkant med den definisjonen han først hadde formulert, og dermed ville legge til at kantene ikke kunne krysse. Isolert sett er det bra at lærere har forståelsen at en definisjon skal kunne skille mellom eksempler og ikke-eksempler. Problemet oppstår når lærere selv har en snever forståelse av begrepet. Som Van Dormolen & Zaslavsky (2003, s. 98) påpeker, kan en definisjon lede til degenererte tilfeller. Det er definisjonen som bestemmer om det er degenererte tilfeller eller om det er ikke-eksempler. Dersom definisjonen til en firkant er: «En firkant består av fire kanter som møtes i planet.», må lærerne være klar over at en sløyfe er et degenerert tilfelle som kan dukke opp. Derimot må lærerne også være klar over at dersom man skal ekskludere sløyfa, noe to av tre av disse lærerne ville, må man ta med betingelsen at kantene ikke kan krysse, i definisjonen.

4.2 Funn 2: Lærerne avviker fra teorien i sin oppfatning av hva en «matematisk korrekt» definisjon er

Ut ifra analysen min er det tydelig at lærerne syns det er viktig at elevene får en forståelse for definisjonene og at representasjoner spiller en viktig rolle i elevenes læring. Allikevel virker det som lærerne velger bort disse tingene i en definisjon for at den skal være «matematisk korrekt» eller estetisk. Jeg legger ved matrisen «Foretrukne egenskaper» (Tabell 4) for å underbygge dette funnet.

Foretrukne egenskaper			
	Minimalitet [Her er alle utdragene hentet fra Rektangel (2) i intervjuguiden]	Estetikk	Forståelse
L1	Nei det må jo være den øverste, fordi at de to nederste [minimale] må jo være feil, én rett vinkel? den	Tror hverdagsforklaring er lettere for barn å forstå enn nødvendigvis den matematiske definisjonen som ofte er litt traust og	Men når du bruker matematiske definisjoner så er det på en måte veldig låst til at det er sånn det er. Og matematiske definisjoner kan jo også være litt sånn vanskelig å forstå for du må jo ha et visst grunnlag for ulike definisjoner.. (Linje 76) [Definisjonene av sirkel i intervjuguiden] For det er jo på en måte en måte å vise hva en sirkel er på et konkret eksempel, også er det på en måte den definisjonen,

	har jo fire rette vinkler og ikke tre heller, som er da på de to da.. (Linje 114)	krever mye bakgrunnskunnskap da. (Linje 80) Vi har gjort det [elevene arbeider med å definere] ja, men ikke i alle temaer, varierer veldig.. Da kommer man jo opp med en definisjon som ofte er veldig nær den som er matematisk korrekt da. (Linje 130)	bruken av «runding» da hehe, for det er jo på en måte ja en runding det er jo noe man kanskje prøver å styre unna i matematikken, men det er jo på en måte et språk som er mer naturlig for barn å bruke enn sirkel. Så da kan det være greit å bygge litt på det de selv sier da. Så jeg ville nok ha endt opp med den første, men i min situasjon hadde jeg brukt mer tid på den siste, for da forklarer man mer og det er mer forståelig språk da. [] Men hvis jeg skulle velge definisjon så er det den øverste. [] Fordi.. eh den er mer matematisk.. språkmessig korrekt, hehe. Jeg vet ikke. [] Men jeg vet ikke om det er bedre egentlig. Det skal jeg ikke påstå. [] Den andre er jo veldig mye lettere å forstå. (Linje 98 – 108)
L2	Også de 2 nederste [minimale] definisjonene, et rektangel er en firkant med 3 rette vinkler *begynner å tegne med fingeren foran seg hvordan det ville blitt med tre rette vinkler*.. ja jeg støtter meg på nummer 1 [ikke minimal] ja. (Linje 50)	..altså begge 2 er presise [viser til definisjonene av sirkel].. (Linje 38)	..altså begge 2 er presise, men den nederste inneholder et par ord som gjør at jeg tror det er lettere for elevene å forstå det, fordi at jeg tror på den øverste, så tror jeg ikke det er alle som har begrepet sirkelbuen, som har et forhold til hva sirkelbuen er, men alle har et forhold til en runding, og at du er nøye da når du sier at du ikke endrer passeravstanden, at den må selvfølgelig være lik ikke sant. Så jeg tror at i forhold til sirkel så ville jeg valgt den nederste av de 2. (Linje 38) [Definisjonene av partall i intervjuguiden] Ja jeg tror i hvert fall jeg ville ha begynt i den retningen [definisjon 3], startet med det utgangspunktet. Jeg synes den treffer mye bedre, spesielt svake elever, enn den nederste som er mye mindre konkret for en del da.. [Jeg spør hvilken hen hadde valgt om jeg hadde stilt spørsmålet: Er 38 et partall?] ja da fungerer jo nr 4 hvis dem på en måte har lært seg den og ser at det slutter med 8, for det gjør det jo, men da kan du jo og tenke sånn som at med 38 så får du 19 par av toere, 19 par sko eller du får 19 kjærestepar som du kan gruppere to og to 19 ganger og da får du 38 som utgangspunktet da. [] Ja jeg syns det [at definisjon 3 er bedre]. Nummer 4 inviterer ikke så mye til forståelse, mer til avkoding, og at du kan finne et rett svar uten at du nødvendigvis forstår hvorfor det blir som det blir. (Linje 56 – 60)
L3	Nei altså, men et rektangel hvis det har tre rette vinkler, ja for jeg vil tenke at et rektangel har to og to like lange sider for	For eksempel firkant da er jo på en måte, du kan godt si at det begrepet rommer mye, men samtidig så er jo på en måte	Jeg tenker at det enkleste er å starte med at man kan dele en mengde i to deler. At det er lett for dem å telle opp og sortere og lage to mengder tror jeg. Jeg opplever at det er noe de klarer å forholde seg til og forstå. (Linje 22) [Definisjonene av partall i intervjuguiden] Men jeg skjønner ikke helt.. Altså det her er definisjoner sant? Hvorfor skal man snakke om unifix-kuber i en definisjon? []

	eksempel, men det ville den ikke kunne hatt da. Tre rette vinkler? Det må jo være fire. (Linje 100) [Jeg forklarer at det ikke står hvor stor den siste vinkelen skal være] Nei det gjør det ikke, men da må jo den og være rett.. Ja jeg tror jeg går for den første [ikke minimal] uansett. (Linje 104)	definisjonen ganske eksakt. (Linje 80) [Definisjonene av sirkel i intervjuguiden] Jeg opplevde at den første var veldig sånn nøyaktig, den andre er jo på en måte det og, så lenge du passer på at den der rundingen ikke endrer passeravstanden, så blir det jo sant, sant(?) Men jeg jeg ville tenke at den første som på en måte gir en sånn eksakt.. (Linje 92) ..men hvis jeg skulle hatt en allmenngyldig en.. Jeg hadde ikke skrevet den på wikipedia for eksempel. (Linje 124)	Ja eller jeg tenker jo hvis den skal være allmenngyldig da, så kan man ikke knytte det brikker eller hva som helst, da tenker jeg at en definisjon på en måte må kunne passe til alt, uansett, eller..? [] Trenger den ikke det? Sånn sett så tenker jeg at den siste er den som er mest gyldig uansett. (Linje 108 – 112) [Spørsmålet om 38 er et partall] Da ville jeg brukt den siste. Den er jo enklest hvis du på en måte skal sjekke om et tall er et partall, så lenge du ser at det slutter 0, 2, 4, 6 eller 8, så vet du at det er et partall uansett, du trenger ikke å begynne å dele dem opp med konkreter eller noe som helst. [Jeg spør: Hvis jeg hadde spurt: det antallet sko dere har i gangen, er det et partall eller ikke?] Da er det jo den nest nederste da, som ville funka best. [Litt frem og tilbake om den er allmenngyldig, fordi den er representasjonsbasert] Men altså for klassen min så kunne jeg definert det sånn, men hvis jeg skulle hatt en allmenngyldig en.. Jeg hadde ikke skrevet den på wikipedia for eksempel. Men for klassen i en gitt situasjon der du jobber liksom, så vil den være god, og da tenker jeg at det ikke blir noen til overs, det likte jeg. (Linje 114 – 124)

Tabell 4: Matrisen «Foretrukne egenskaper»

Først og fremst ser vi at ingen av lærerne har erfaring med minimale definisjoner. Jeg presenterte disse to minimale definisjonene av rektangel for dem: «Et rektangel er en firkant med tre rette vinkler.» og «Et rektangel er et parallellogram med en rett vinkel.», og som vi kan se under «Minimalitet» mener alle lærerne at disse definisjonene er feil. Selv om teorien sier at minimalitet er en foretrukken egenskap (Vinner, 1991), anerkjenner ingen av disse lærerne de minimale definisjonene som «matematisk korrekte». Dette er også naturlig når man tar i betraktning at heller ikke lærebøker vanligvis bruker minimale definisjoner (Usiskin et al., 2008).

Nøkkelord for analysen av «Estetikk», var for eksempel *presis, eksakt* og *nøyaktig*, som også nevnes i teorien i kapittel 2.1.3.2 «Aesthetic». I tillegg valgte jeg å plassere uttrykk som *matematisk korrekt* og *allmenngyldig* her. Flere av disse dukket også opp som kriterier under «Formell», men jeg velger å presentere dem i denne matrisen, da man tydeligere kan se sammenhengen med «Forståelse». Forståelse er naturligvis viktig for lærere i en didaktisk sammenheng. Som vi kan se under «Forståelse» er dette noe de eksplisitt er ute etter (markert grønt). Allikevel velger noen av lærerne det de selv mener er vanskelige og estetiske definisjoner over definisjoner de mener er mer forståelige. Derfor syns jeg det er viktig å se disse to i sammenheng. Utsagnene som representerer denne sammenhengen har jeg plassert under «Estetikk», men for å se helheten av utsagnet plasserte jeg det også under «Forståelse» (markert gult).

Jeg starter med å presentere hvordan L1 forklarer valget mellom denne strukturelle definisjonen av en sirkel: «En sirkel med ett gitt punkt, sentrum, har lik avstand til alle punkter på sirkelbuen.» og denne prosedyremessige definisjonen av en sirkel: «En sirkel får du når du setter passeren i et gitt punkt, sentrum, og lager en runding uten å endre passeravstanden.». Hen var klar på at prosedyren var enklere for elevene å forstå, fordi den bruker et mer forståelig språk. Allikevel forklarer hen at hen ville valgt den strukturelle, fordi den er *mer matematisk språkmessig korrekt*. Hen peker blant annet på ordet «runding» og sier at det er noe man burde styre unna i matematikken.

I tillegg når L1 snakker om hvordan elevene får arbeide med å definere, under «Estetikk», sier hen at de ofte kommer opp med en definisjon som er nær *den* som er matematisk korrekt. Dette tok jeg også inn under «Vilkårlig», da dette tyder på at L1 ikke vet at det finnes flere ekvivalente definisjoner til hvert matematiske begrep. L1 uttrykker også at den matematiske definisjonen *ofte er litt traust og krever mye bakgrunnskunnskap.* Dette utsagnet hører hjemme under «Estetikk», da jeg tolker *traust* og *mye bakgrunnskunnskap*, som at definisjonen skal inneholde flere matematiske begreper og være vanskelig å forstå. Dermed blir L1 sin tolkning av en matematisk definisjon, det motsatte av hva forskningen understreker er en estetisk definisjon, med begreper som *elegant, precise* og *clear*.

Jeg tolket en lignende situasjon med L3, da hen var usikker på hvilken av disse definisjonene på partall hen ville bruke: «Man har et partall antall unifix-kuber dersom man kan pare sammen 2 og 2 kuber slik at det ikke blir noen til overs.» og «Et partall er tall hvor det siste sifferet er 0, 2, 4, 6 eller 8.». Diskusjonen fra linje 108 – 124 dukket også opp under «Representasjonsbaserte definisjoner». Som Forbregd et al. (u.å.) understrekte, er representasjonsbaserte definisjoner noe som er mer tilgjengelig for elever. Allikevel mener denne læreren at en definisjon ikke kan knyttes til *brikker eller hva som helst*, da den ikke vil være allmenngyldig lengre. Så hen mente at det var den siste definisjonen som var *mest gyldig uansett*. Da jeg trekker inn sko som en representasjon i spørsmålet, går hen igjen tilbake til definisjonen med kubene, og mener at den ville funka best og at den er god for elevene i en arbeidssituasjon. Til tross for dette er hen litt usikker på om den er allmenngyldig og uttrykker at hen ikke ville skrevet den på Wikipedia.

4.3 Funn 3: Lærerne involverer elevene i definisjonsarbeidet ved at de får definere begreper og utforske representasjoner av begrepene

Teorien i kapittel 2.1.1.3 «Constructed» understreker at det er lærerikt for elever å få jobbe med å definere på egenhånd. Alle lærerne jeg har intervjuet prioriterer også en slik undersøkende tilnærming til definisjonene, som vi kan se av dette utdraget fra analysen (Tabell 5).

Natur	
	Konstruert
L1	Hvis du skal svare kjappest, så er det jo den nederste, men heheh jeg tror jeg ville jobba med den øverste nå ja, også kan de få den nederste etter hvert [den nederste definisjonen er: «Et partall er et tall hvor det siste sifferet er 0, 2, 4, 6 eller 8.»]. Eller om de klarer å lage, hvis de får så mange oppgaver at de ser et mønster, så de klarer å lage definisjonen selv.. [] Vi har gjort det [elevene arbeider med å definere] ja, men ikke i alle temaer, varierer veldig.. Da kommer man jo opp med en definisjon som ofte er veldig nær den som er matematisk korrekt da, og da når man har fått den forståelsen så er det jo veldig greit å forstå definisjonen, men det er ikke nødvendigvis så lett for alle å henge med på det da. (Linje 126)
L2	Ja jeg tenker at hvis vi har gjort en sånn prosess som du beskriver da ikke sant, elevene har jobbet, så snekrer vi det her sammen til at det blir vår definisjon, så tenker jeg at det blir grunnmuren innenfor det temaet som vi jobber med i matematikken, som vi til stadighet kan referere oss tilbake til. (Linje 32)
L3	Nei, det tror jeg ikke ville falt meg inn å sagt nei [at en sløyfe er en firkant]. Interessant, det kan jeg spørre elevene om en gang. (Linje 42)

Tabell 5: Matrisen «Natur» med undertemaet «Konstruert»

L1 snakker om definisjonen «Et partall er et tall hvor det siste sifferet er 0, 2, 4, 6 eller 8.», og konkluderer med at hen ikke ville gitt elevene definisjonen med en gang, men heller gitt dem oppgaver, og dersom elevene oppdager dette mønsteret, kunne de laget en lignende definisjon på egenhånd. L2 er inne på at klassen skal lage en definisjon som fellesskapet er enige om, som de kan bruke i videre arbeid med begrepet. L3 forklarer at hen ikke ville kalt en sløyfe for en firkant, men etter diskusjonen vi har hatt anerkjenner hen at det går an å definere den som det. Deretter sier hen at dette er noe som hadde vært interessant å spørre elevenes hens om, og på denne måten får de være med å definere firkant, enten ved å inkludere eller ekskludere sløyfa.

En annen interessant ting i definisjonsarbeidet til disse lærerne, er at de alle uttrykker at representasjoner spiller en viktig rolle i utforskningen av begrepet, selv om de ikke eksplisitt bruker representasjoner i sine definisjoner. Som jeg var inne på i Funn 2, så vil representasjonsbaserte definisjoner svekke *allmenngyldigheten,* ifølge L3. Allikevel kan vi se at L3 snakker om å skille og sortere ulike former, ved hjelp av formenes kvaliteter, kvalitetene ser jeg på som definerende betingelser, og at det derfor er definisjonsrelatert. At det går an å skille og sortere de ulike formene var noen av begrunnelsene for at både L2 og L3 brukte eksklusive definisjoner av firkanter (Se Funn 1). Jeg tar med dette utdraget fra «Virkelighetsnære representasjoner» (Tabell 6) for å vise hvordan L3 mente at man kunne bruke ting fra hverdagen til elevene for å jobbe med denne *klassifiseringen* (Zaslavsky & Shir, 2005), som er et annet uttrykk hen bruker i denne sammenhengen.

Representasjoner	
	Virkelighetsnære representasjoner
L3	Ja det gjør jeg jo, det her med å starte med ting som er på en måte litt sånn kjent for dem kanskje, former som dem ja, bøker, ball, sykkelhjul eller sånne der kjente ting, og på en måte kunne beskrive de ulike formene og sortere dem, klassifisere dem, og det å finne ting i [klasse]rommet, alt har jo en form, og sortere innenfor de ulike formene å finne ut og på en måte å kunne beskrive dem da. Sortere ut fra når man har 3 hjørner, 4 hjørner, flere hjørner, og så se på hva det er som er firkanta og hva som ikke er firkanta, og ja se på ulike firkanter. Også og det her med, i hvert fall det jeg har gjort en del i vinteren nå, som den læreboken jeg har brukt litt, det med å generalisere liksom og se på hvilke egenskaper, da vil jeg tenke hvilke egenskaper har de her firkantene til felles for eksempel, de er ulike, men hva er det de har til felles. Hva er det som gjør dem til firkanter egentlig da. (Linje 76)

Tabell 6: Matrisen «Representasjoner» med undertemaet «Virkelighetsnære representasjoner»

Hen uttrykker at hen bruker ting som er kjent for elevene, og nevner bøker, ball og sykkelhjul som eksempler. Det som er interessant med dette utdraget er at hen bruker uttrykket å generalisere. Når elevene jobber med å generalisere de forskjellige formene under samme matematiske begrep, for eksempel ball og sykkelhjul under sirkel, jobber de med å skille eksempler fra ikke-eksempler. Dermed vil forståelsen for at matematiske definisjoner må kunne skille mellom eksempler og ikke-eksempler, bli gjort tilgjengelig for disse elevene ved hjelp av virkelighetsnære representasjoner.

Jeg plasserte også en del av utforskningsarbeidet under «Representasjonsbaserte definisjoner». Her nevnes det ikke eksplisitt at representasjonene skal være virkelighetsnære representasjoner fra hverdagen til elevene, og jeg anser disse representasjonene som mer matematiske enn de fra «Virkelighetsnære representasjoner». Selv om det ikke her heller blir brukt representasjoner eksplisitt i definisjonene, plasserte jeg det under «Representasjonsbaserte definisjoner» (Tabell 7), da det besto av å utforske forskjellige representasjoner av begrepet. En annen interessant ting som kom frem av disse utdragene, er at utforskningen gjerne skjer før de får definisjonen og navnet på begrepet, som man kan se på det som er markert gult.

Representasjoner	
	Representasjonsbaserte definisjoner
L1	Nei for det vi ofte gjør er jo når vi introduserer primtall så er det jo det at man tar en sånn 100-ruter og så setter vi inn gangestykkene.. []..eeh og så ser vi jo det at noen går jo igjen og så er det noen som ikke kan deles da, de finnes ikke i gangetabellen.. (Linje 20-22) Er litt fordi først så skal de jo finne ut av det selv da, så det blir jo litt sånn utforskning. Og så vil det også være en støtte da, til å sjekke «har jeg rett på primtall?», som de har lett tilgang på selv, for det er jo ikke alltid så lett å «er det det som..? Nei, det var et stykke der ja, men det klarte jeg ikke å se», men hvis de går inn og ser på den ruta de har så, eller tabellen de har, så kan de jo se at det er primtall eller ikke da. (Linje 26)

	Eeh også pleier jeg ofte å jobbe med ting litt før man på en måte går helt inn i hva definisjonen er da, starter sjelden med definisjonen eller formelen for så å bygge videre, det gjør jeg, men det går jo an det og, å starte med det også problematisere litt rundt «hva er dette her for noe?». (Linje 84)
L2	Så til de yngste elevene som bare skal få på en måte erfare litt med geometriske figurer for eksempel, så skal de jo gjerne se på, ta på, kjenne på, og få litt erfaring med geometriske figurer, men det er ikke naturlig å begynne å snakke om figurene sine egenskaper i første klasse for eksempel. Da vil jeg heller si at det her er en kube, det her en firkant, altså sånne typer ting ikke sant. Ja, litt avhengig av hvilke geometriske figurer du har tilgjengelig og kan vise dem naturligvis. (Linje 28)
L3	Dem er ganske enkel å håndtere, jeg har brukt brikker blant annet, jeg har og brukt ispinner. Min måte å starte opp det her litt på, jeg starter med talla og, fordi at vi har litt sånn telle hvor mange dager vi har gått på skolen, og da bruker jeg sånn 100 dagers tabell med opptil 10, opptil 20, rekker sant. Da sorterer vi tallene i farger helt fra begynnelsen, men elevene vet ikke hvorfor vi gjør det, det er litt hemmelig. Det på en måte starter jo der, men da starter [vi] jo med en gang å telle opp, så vi teller opp antallet, så vi får tierbunker etter hvert for eksempel. Og da har vi startet og ganske tidlig med å dele dem, om det går an å dele på meg, for det er en som går og teller opp, kan vi dele så vi får like mange hver? Så vi har liksom starta der med det, og så er det en del som etter hvert skjønner at det her med de blå tallene har noen ting med «åja det blir like mange på hver», så det er på en måte starten på partall det vi har holdt på med nå. Så da er det på en måte ikke vilkårlig, men jeg har brukt brikker, de er grønn og rød sant, så du kan dele dem i 2 mengder, der den ene er grønn og den andre rød. De brikkene syns jeg har vært fine å bruke. Og så har vi brukt ispinner for eksempel, for da har det vært greit å binde dem opp i sånne tierbunter da. Det er på en måte bare for å visualisere antallet, at det er noe vi kan telle på. Vi kan jo telle mange ting, men brikker og samme med klosser, å kunne stable i tiere i tillegg da, å dele opp i 2 mengder, så ser du veldig tydelig at de er like høy for eksempel, at det er like mange i hver. (Linje 8) [Jeg spør: En hundrerrute med dager og da var annethvert tall annenhver farge?] Ja, oddetallene er rød og partallene er blå. Så da ser de et mønster da i det her etter hvert. Etter hvert når vi skal begynne å snakke om det [partall], så kan vi ta igjen det, at hvordan tall er alltid eneren [på enerplassen] i partallet for eksempel. Det blir jo tydelig med rutene da, og den er de jo med på å lage, for den starter jo på null, null dager, én dag, hvor mange dager vi har gått på skolen, og det starter vi med dagen de begynner på skolen. Det har vært litt sånn inngangen. (Linje 12)

Tabell 7: Matrisen «Representasjoner» med undertemaet «Representasjonsbaserte definisjoner»

L1 brukte en hundrerrute i sin introduksjon av primtall. Jeg tolker det som at hen mente at elevene skulle markere alle multiplumene i den lille gangetabellen, og regner med at det ikke gjelder 1-gangen. På denne måten vil elevene hens se at noen av tallene i hundrerruta ikke er multiplum av tall større eller lik to, og da forklarer læreren at disse er primtallene, opp til 100 vel og merke. L1 gir ingen eksplisitt representasjonsbasert definisjon med hundrerruta, men elevene får en inngang til å lære om primtall, ved å bruke hundrerruta som en representasjon.

L2 gir heller ingen eksplisitt representasjonsbasert definisjon til noen av de geometriske figurene hen refererer til, men er klar på at for de yngste elevene er det like så nyttig å bare få erfare med fysiske representasjoner av begrepet. Hen bruker kube og firkant som eksempel og forklarer at hen vil vise elevene konkrete representasjoner av disse figurene og kun gi dem navnet på hva det er. På denne måten vil hen utvikle begrepsbildet til elevene, i form av at de får skape et meningsforhold mellom navnet og objektet (Se kapittel 2.1.1.1 «Stipulated»).

L3 forklarer en aktivitet som de starta med da de begynte på skolen (1. klassinger), der de teller hvor mange dager de har gått på skolen. Da bruker de brikker, klosser og ispinner, som representasjoner for dagene. Hen forklarer videre at det kommer en elev opp og skal telle ispinnene for eksempel, så det stemmer med antall dager. Etter det ser de om det går an å dele ispinnene på eleven og på læreren, så de får like mange hver. Dersom det går an er de på en «blå» dag i hundrerruta, som også representerer hvor mange dager de har gått der. På denne måten vil elevene ha en forståelse for at man kan dele tallene opp i de som kan deles på to og de som ikke kan det, blå og rød dager, før de har begynt å lære om partall og oddetall. Dermed mangler de bare å navngi disse begrepene, som er en av funksjonene en matematisk definisjon skal ha (Zazkis & Leikin, 2008), dette utdraget ble derfor også analysert under «Navngi» i «Rolle og funksjon».

Selv om lærerne ikke bruker representasjoner eksplisitt i definisjonene, er de opptatt av at elevene skal få utforske representasjoner av de matematiske begrepene. Lærerne prioriterer at elevene får utforske begrepene og definere dem på egenhånd og i fellesskap. Til tross for dette er det ingen av lærerne som engasjerer elevene i å velge mellom ekvivalente definisjoner, som Morgan (2005) foreslår. Jeg velger å se dette i lys av Funn 2, der jeg fant at lærerne ikke nødvendigvis har denne kunnskapen om ekvivalente definisjoner, slik at de kan utfordre elevene på dette.

5 Diskusjon

I dette kapittelet skal jeg diskutere funnene jeg har gjort opp mot teori, og se på hvorvidt disse kan gi en konklusjon til problemstillingen min. Funnene har resultert i praktiske implikasjoner, men også nye spørsmål som det hadde vært interessant å forske videre på.

Problemstillingen det skal konkluderes til er:

Hvordan arbeider lærere med matematiske definisjoner i klasserommet og hvordan bruker de representasjoner i definisjonsarbeidet? Hva er begrunnelsene bak lærernes valg?

For å svare på problemstillingen har jeg hatt kvalitative intervjuer med tre lærere fra Trøndelag. Disse tre er henholdsvis på trinnene 1., 4. og 7., men det er ikke relevant for undersøkelsen jeg har gjort. Jeg brukte kvalitativt intervju som metode, fordi jeg måtte snakke med lærerne for at de kunne få begrunne valgene sine. Analysen av disse intervjuene resulterte i tre funn: lærerne foretrekker eksklusive definisjoner, lærerne avviker fra teorien i sin oppfatning av hva en «matematisk korrekt» definisjon er, og lærerne involverer elevene i definisjonsarbeidet ved at de får definere begreper og utforske representasjoner av begrepene.

5.1 Oppsummering av funn

Det første funnet går ut på hvilken type definisjon lærerne bruker, og da går det på om de foretrekker eksklusive eller inklusive definisjoner. Hoveddelen av dataen som underbygger dette funnet er hentet fra den delen av intervjuet som innebærer firkanter. Det er fordi definisjonene til firkanter ofte er enkle å skille når det kommer til om de er eksklusive eller inklusive, enten så sier definisjonen til parallellogrammet at et kvadrat er et parallellogram (inklusiv) eller at det ikke er det (eksklusiv). Alle lærerne jeg intervjuet forklarte at de ikke ville definere at noen av firkantene parallellogram, rektangel og kvadrat kunne være det samme. Det var mest naturlig å snakke om disse tre, men trapes ble også nevnt. Dermed foretrekker disse lærerne eksklusive definisjoner. To av lærerne begrunnet at de brukte eksklusive definisjoner fordi det satt igjen fra gammelt av, enten hva de selv lærte på skolen eller en gammel lærerveiledning, mens den tredje læreren begrunnet det med at formlene for areal og omkrets ikke er like for de forskjellige firkantene.

Det andre funnet går ut på hva lærerne anser som «matematisk korrekt». Det er stort sett dataen hentet fra analysen av de foretrukne egenskapene estetikk og forståelse, som underbygger dette funnet. Det kommer tydelig frem at lærerne syns forståelse er en viktig egenskap ved matematiske definisjoner, det at elevene forstår den og klarer å bruke den, som noe av teorien også er inne på (Bills & Tall, 1998). Allikevel velger noen av lærerne, det de selv anser som vanskeligere definisjoner, fordi de mener at de er mer «matematisk korrekte». Grunnen til at jeg har plassert mye av dette under estetikk, er fordi alle definisjonene er ekvivalente og derfor like «matematisk korrekte» for å bruke lærernes uttrykk, så det handler om at noen av definisjonene *ser* mer matematiske ut.

Det tredje funnet går ut på at alle lærerne involverer elevene sine i definisjonsarbeidet. Slik forskning anbefaler (Borasi, 1992), uttrykker lærerne at elevene må få jobbe med å konstruere matematiske definisjoner på egenhånd. En av måtene de arbeider med dette på, er at elevene undersøker egenskaper ved de matematiske begrepene, ved å klassifisere og sortere representasjoner av dem. Alle lærerne uttrykker at representasjonene må være virkelighetsnære og at elevene kan relatere seg til dem, slik at de kan bruke sine erfaringer til å få innblikk i det matematiske begrepet, som Duval (2004) også understreker. Selv om lærerne ikke uttrykker det eksplisitt, bruker de representasjonene til at elevene skal få jobbe med å klassifisere matematiske objekter (Zaslavsky & Shir, 2005) og å skille eksempler og ikke-eksempler (Morgan, 2005), noe jeg anser som definisjonsarbeid.

5.2 Implikasjoner

5.2.1 Funn 1

Teorien understreker at inklusive definisjoner gir en dypere forståelse for matematiske begreper enn eksklusive definisjoner (Forbregd et al., u.å.; De Villiers, 1994). Derfor er det ikke hensiktsmessig at lærerne foretrekker eksklusive definisjoner. Når lærere definerer rektangel som at to av kantene er lengre enn de to andre, slik alle lærerne jeg intervjuet gjorde, er det ikke rart at Fujita og Jones (2007) finner at det er vanlig for elever å definere rektangel på denne måten. Forståelse er viktig i en didaktisk sammenheng, og som jeg fant i analysen var forståelse også viktig for disse lærerne. Allikevel foretrekker lærerne eksklusive definisjoner av firkanter, noe som impliserer at de ikke har tilstrekkelig kunnskap om inklusive definisjoner og fordelene med dem.

5.2.2 Funn 2

Selv om lærerne bruker representasjoner i utforskningen av begrepet, bruker de ikke representasjoner i selve definisjonen. To av lærerne velger bort både de representasjonsbaserte definisjonene på partall og den prosedyremessige definisjonen på en sirkel, fra intervjuet mitt. Begrunnelsene går på at de ikke er «matematisk korrekte», og jeg tolker det som at de ikke *ser* matematiske ut. Dersom lærere skal velge bort disse typene definisjoner for *trauste definisjoner som krever mye bakgrunnskunnskap*, for å bruke L1 sin beskrivelse av matematiske definisjoner, vil elevene få et dårligere grunnlag for å lære om det matematiske begrepet, samtidig som de vil få et snevert bilde av hva matematiske definisjoner er. Derfor er det viktig at lærere er klar over at en definisjon som baserer seg på en prosedyre eller en representasjon og bruker hverdagslige ord, kan være like «matematisk korrekt» som en strukturell definisjon som ikke baserer seg på en representasjon og bruker vanskelige matematiske ord.

5.2.3 Funn 3

Lærerne jeg har intervjuet er opptatt av at elevene får undersøke på egenhånd. Isolert sett fremmer denne undersøkende tilnærmingen læring når man arbeider med matematiske definisjoner. Allikevel engasjerer ikke lærerne elevene i aktiviteter der de skal få velge mellom flere forskjellige ekvivalente definisjoner, noe Morgan (2005) foreslår. Dermed blir det også naturlig å tenke at definisjonene elevene konstruerer, ikke blir anerkjent som likeverdige og ekvivalente til den læreren presenterer. Dette underbygger også L1 når hen sier at elevene kommer opp med definisjoner som er nær *den* som er matematisk korrekt. Dette tyder på at lærerne har en forståelse av at matematiske definisjoner er *skrevet i stein*, for å sitere Usiskin et al. (2008). Så selv om lærerne har en pedagogikk som innebærer at elevene blir involvert i definisjonsarbeidet, oppnår de ikke de beste læringsmulighetene, fordi lærerne ikke er klar over mulighetene de ekvivalente matematiske definisjonene tilbyr.

5.3 Konklusjon

For å trekke en konklusjon til problemstillingen min, tyder disse tre funnene på at lærerne har en utforskende pedagogikk som legger til rette for at elevene skal få en god innsikt i matematiske definisjoner, men at de har et forbedringspotensiale når det gjelder kunnskap om matematiske definisjoner, slik at de kunne utnyttet utforskningen til det fulle. Funnene mine underbygger Stylianides og Stylianides (2009) og Miller (2018) sine påstander om at lærere syns matematiske definisjoner er vanskelig. Lærerne bruker virkelighetsnære representasjoner i utforskningen av de matematiske begrepene, men ikke i selve definisjonen. Som Forbregd et al. (u.å.), uttrykker også lærerne at representasjonsbaserte definisjoner kan være enklere å forstå og kan gi en bedre innsikt i det matematiske begrepet i noen situasjoner. Allikevel velger to av lærerne bort representasjonsbaserte definisjoner og prosedyremessige definisjoner, da de ikke anerkjenner dem som «matematisk korrekte». Da lærerne forstår at matematiske definisjoner ikke er *skrevet i stein* og at definisjonene ikke trenger å være *trauste* og vanskelige, vil de ha et bedre grunnlag for å lære elevene matematiske begreper og om matematiske definisjoner i seg selv.

5.4 Studiens begrensninger

Problemstillingen min handler om hvordan lærere arbeider med matematiske definisjoner og representasjoner i den sammenhengen. En begrensning som er tydelig i min undersøkelse, er at jeg ikke kan gjøre noen generaliseringer for hvordan lærere arbeider med dette, ettersom jeg valgte en kvalitativ metode og la vekt på begrunnelsene til lærerne i stedet. Dermed kan jeg ikke konkludere med at funnene jeg har gjort gjelder alle lærere, men heller at det er sånn disse tre lærerne gjør det. Derfor er ikke det at lærerne bruker eksklusive definisjoner et universalt funn, men disse tre lærerne gjør det, og implikasjonene vil gjelde lærere som gjør det samme, men ikke alle lærere. Det at jeg ikke kan generalisere er en begrensning, som jeg valgte å bytte mot at jeg fikk detaljerte begrunnelser.

En annen begrensning er om lærerne ikke vet hva jeg mener med matematiske definisjoner. Da jeg er ute etter å finne ut hvordan disse lærerne arbeider med matematiske definisjoner, er det vesentlig at de vet hva det er. Det er vanskelig for meg å vite om de misforstår meg eller ikke, men det er ett utsagn fra datamaterialet, som tyder på at det kan være noen misforståelser. Utsagnet det er snakk om er hentet fra transkripsjonen av intervjuet med L1, der hen sier: *..hvis det er sånne definisjoner type ala formler vi snakker om eller bare..?* (Linje 76), og impliserer at definisjoner og formler er det samme. Dersom hen har snakket om formler, og ikke matematiske definisjoner, vil jeg ikke ha funnet hvordan L1 arbeider med matematiske definisjoner, men heller hvordan hen arbeider med formler. Hvis dette er tilfelle, vil det egentlig bare underbygge konklusjonen at lærere trenger mer kunnskap angående matematiske definisjoner.

5.5 Videre forskning

5.5.1 Eksklusive definisjoner

Hovedgrunnen til at jeg valgte å gjøre en kvalitativ undersøkelse, var at begrunnelsene til lærerne, spilte en viktig rolle i min problemstilling. Det hadde vært interessant å se på læreres forståelse av matematiske definisjoner med en kvantitativ tilnærming. Det første funnet mitt, at de tre lærerne jeg intervjuet foretrekker eksklusive definisjoner, er noe man kunne undersøkt i et større omfang. Da ville man kunne gjort generaliseringer og sett om dette er noe som gjelder mesteparten av for eksempel norske lærere. Slik jeg satte opp den siste delen av intervjuet mitt, der lærerne skulle få velge mellom ekvivalente definisjoner, er en spørreundersøkelse-metode man kunne brukt i en slik kvantitativ studie.

For å gjøre undersøkelsen på et representativt antall lærere, måtte den vært såpass enkel at man kunne sendt den, for eksempel på mail, slik at man kunne hatt mange deltakere over store områder. På denne måten får man representert alle gruppene som er nødvendig for å gjøre valide og reliable generaliseringer (Bryman, 2012). Hvis man skal gjøre generaliseringer for norske lærere, må man skaffe data fra hele Norge, og ikke bare Østlandet for eksempel. Man må også tenke på om alder og kjønn spiller en rolle for generaliseringen, og hvis det gjør det, må man passe på at alle gruppene er representert i et tilstrekkelig omfang.

Det er naturlig å tenke at begrunnelsene for valgene vil gå bort i en slik undersøkelse, men man ville kunne gjort generaliseringer, som hadde fått praktiske implikasjoner. Dersom en stor andel av norske lærere hadde foretrukket eksklusive definisjoner, til tross for at teorien anbefaler inklusive definisjoner, hadde det implisert at norske lærere hadde trengt mer kunnskap angående matematiske definisjoner. Begrunnelsene for hvorfor de hadde valgt eksklusive definisjoner, ville dermed ikke vært relevant i denne undersøkelsen, men ut ifra mine funn, er det naturlig å tenke at det hadde hengt igjen fra gammelt av eller at læreren hadde prioritert formlene til begrepet over egenskapene. Ettersom det har kommet mye ny kunnskap når det kommer til matematiske definisjoner, er det viktig at lærerne også blir oppdatert på denne kunnskapen, slik at det ikke bare er matematikerne som får nytte av den.

Hvis man tenker det hadde vært nødvendig med begrunnelser, kunne man brukt de tre begrunnelsene jeg fikk: L1: «Det må stemme overens med formlene», L2: «Det henger igjen fra hva jeg lærte på skolen», L3: «(gammel) lærerveiledning», og lagt til en boks som het «Annet», der lærerne kort kunne forklart sin begrunnelse, dersom det var en annen grunn, også skulle lærerne valgt mellom disse. Allikevel tenker jeg at dette er en undersøkelse som kunne kommet i etterkant av den første undersøkelsen. Dersom man generaliserer norske lærere til å foretrekke eksklusive definisjoner, kunne man gjort en studie med problemstillingen: *Hvorfor foretrekker norske lærere eksklusive definisjoner?*

Den ville blitt mer som min undersøkelse, og jeg regner med at man hadde fått best forklaringer, dersom man hadde gjort kvalitative intervjuer. I motsetning til min studie, skulle man bare hatt fokus på eksklusive definisjoner.

5.5.2 Uttrykket «matematisk korrekt»

I tillegg fant jeg at lærerne avviker fra teorien i sin oppfatning av hva en «matematisk korrekt» definisjon er, der de blant annet avviser representasjonsbaserte definisjoner og prosedyremessige definisjoner, for å ikke være «matematisk korrekte». Dette med hva lærerne anser som «matematisk korrekt», mener jeg trenger mer forskning. Ettersom de avviste representasjonsbaserte definisjoner, er det naturlig å tenke at de kan avvise representasjonsbaserte bevis også. Dersom lærere ikke anerkjenner at representasjonsbaserte bevis er «matematisk korrekte», til tross for at Schifter (2009) forklarer at de er like gyldige som algebraiske bevis eller generiske eksempler, tyder det på at lærerne avviker fra teorien i sin oppfatning av hva et «matematisk korrekt» bevis er også.

Det forventes at elever skal føre bevis allerede på barneskolen (Stylianides, 2019), og dersom lærerne ikke anerkjenner representasjonsbaserte bevis, vil det få implikasjoner for elevenes bevisføring. Representasjoner som elevene klarer å relatere seg til er viktige, fordi de gjør det enklere for elevene å uttrykke generalitet (Schifter, 2009). Uten representasjoner vil bevisføring bli svært vanskelig på barneskolen, da både algebraiske bevis og generiske eksempler er mindre tilgjengelig for de fleste elever (Schifter, 2009). Derfor er det viktig å forske på hva lærere anerkjenner som «matematisk korrekte» bevis.

Litteraturliste

Alcock, L. & Simpson, A. (2017). Interactions between defining, explaining and classifying: The case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 5–19. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9709-4

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–235). London: Hodder & Stoughton.

Bills, L. & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of the least upper bound. *Proceedings of PME, 22*(2), 104 – 111.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. NH: Heinemann.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4. utg.). Oxford University Press.

Burroughs, E. A. & Burke, M. J. (2016). By Definition: An examination of the Process of Defining in Mathematics. I J. Dewar, P. Hsu & H. Pollatsek (Red.), *Mathematics Education: Association for Women in Mathematics Series* (Vol. 7, s. 55–71). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44950-0

Duval, R. (2004, 4.–11. juli). *A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register* [Paperpresentasjon]. Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education, København.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*(5), 411- 424. https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920092

Forbregd, T. A., Torkildsen, H. A., Kaspersen, E. & Solstad, T. (u.å.) Towards a Unified Account of Definitions in Mathematics Education Research: A systematic Literature Review. Preprint.

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*, 3-20. https://doi.org/10.1080/14794800008520167

Gilboa, N., Kidron, I. & Dreyfus, T. (2018). Constructing a mathematical definition: The case of the tangent. *International Journal of Mathematics Teacher Education in Science and Technology, 50*, 421-446.

Johnson, H. L., Blume, G. W., Shimizu, J. K., Graysay, D. & Konnova, S. (2014). A Teacher's Conception of Definition and Use of Examples When Doing and Teaching Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(4), 285–311. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.953018

Kvale, S. (1996). InterViews: An Introduction to Qualitative Research Interviewing. *The American Journal of Evaluation, 19,* 267-270. Thousand Oaks, CA: Sage. https://doi.org/10.1016/S1098-2140(99)80208-2

Leikin, R. & Winicki-Landman, G. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions: Part 2. *For the learning of mathematics, 20*, 24-29.

Leikin, R. & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a Vehicle for Professional Development of Secondary School Mathematics Teachers. *Mathematics Education Research Journal, 3*, 62–73.

Levenson, E. (2012). Teachers' knowledge of the nature of definitions: The case of the zero exponent. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(2), 209–219. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.006

Lofland, J. & Lofland, L. (1995). *Analyzing Social Settings: A Guide to Qualitative Observation and Analysis* (3. utg.). Belmont, CA: Wadsworth.

Miller, S. M. (2018). An analysis of the form and content of quadrilateral definitions composed by novice pre-service teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 50*, 142–154. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.006

Morgan, C. (2005). Word, Definitions and Concepts in Discourses of Mathematics, Teaching and Learning. *Language and Education*, *19*(2), 102–116. https://doi.org/10.1080/09500780508668666

Poincaré, H. (1969). MATHEMATICAL DEFINITIONS and TEACHING. *The Mathematics Teacher, 62*(4), 295–304.

Ryan, G. W. & Bernard, H. R. (2003). Techniques to Identify Themes. *Field Methods, 15*, 85–109.

Sánchez, V. & García, M. (2014). Sociomathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 305–320. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9516-0

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. I D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Red.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (s. 71–86). Routledge.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2019). Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education*, *7*(1), 156–182. https://doi.org/10.1002/rev3.3157

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the Transition from Empirical Arguments to Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314– 352.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Usiskin, Z., Griffin J., Witonsky, D. & Willmore, E. (2008). *The Classification of Quadrilaterals: A study in Definition.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Van Dormolen, J. & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 91–106. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00006-3

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. I D. Tall (Red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 65-81). Springer.

Winicki-Landman, G. & Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics, 20*, 17-21.

Zaslavsky, O. & Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical Definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317–346.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008- 9131-7

Vedlegg

Vedlegg 1: «Intervjuguide»

Intervjuguide til masterprosjekt

Innledning

- Presenterer meg selv og prosjektet.
  - Jeg skal ikke teste læreren, jeg vil bare vite hva som skjer i skolen. Jeg vil lære av det de gjør.

- Gir deltaker mulighet til å introdusere seg selv (dette vil uansett anonymiseres i transkripsjonen).

- Eventuelle oppfølgingsspørsmål jeg kan stille til de fleste spørsmålene:
  - Finnes det flere måter å definere det på?
  - Hvorfor gjør de det sånn i sitt klasserom?

Intervju:

Tema 1 (partall):

- Hvordan vil du definere partall i klasserommet ditt?
- Svar:
- Hvorfor vil du definere det som et tall der man kan pare alle enhetene i stedet for et tall man kan dele i to like grupper? (Eller omvendt) (Eller ingen av dem)
- Svar:
- Vil du bruke representasjoner i forklaringen av definisjonen? (F. eks unifix-kuber eller par med innesko)
- Svar:
- Hvorfor vil du bruke denne representasjonen? /Hvorfor vil du ikke bruke noen representasjon?
- Svar:

Tema 2 (firkanter)

- Hvordan vil du definere en firkant i klasserommet ditt?
- Svar:
- Oppfølgingsspørsmål: Er en sløyfeform en firkant ifølge den definisjonen?
- Svar:
- Hvordan vil du definere et parallellogram?
- Svar:
- Hvordan vil du definere et rektangel?
- Svar:

- (Kan du bruke definisjonen til parallellogram til å definere rektangel?)
- (Svar):
- Hvordan vil du definere et kvadrat? (inklusivt eller eksklusivt)
- Svar:
- (Hvordan vil du definere et trapes?) (kun to parallelle vs minst to parallelle kanter)
- (Svar):
- Evt. oppfølgingsspørsmål: (Er et parallellogram et trapes ifølge den definisjonen?)
- (Svar):
- Hvorfor velge en inklusiv/eksklusiv definisjon?
- Svar:
- Hvilke representasjoner vil du bruke i forklaringen av de forskjellige definisjonene? (tegninger, konkreter, bilder?)
- Svar:
- Oppfølgingsspørsmål: Hvorfor/ hvorfor ingen representasjon?
- Svar:

Tema 3 (mer generelt om matematisk definisjoner)

- Hva er spesielt med matematiske definisjoner?)
- Svar:
- Hvilke kriterier syns du en matematisk definisjon burde ha?
- Svar:
- Hvilken rolle spiller matematiske definisjoner i dine timer? (Er det f eks for kommunikasjon, for å navngi konsepter eller for bevisføring? Eller alle? Vanskelig spørsmål!)
- Svar:
- (Kan det ha noen andre roller?)

Tema 4 (velge mellom ulike ekvivalente definisjoner)

- Hvilke/n ville du valgt å bruke i ditt klasserom og hvorfor?

Sirkel:

«En sirkel med ett gitt punkt, sentrum, har lik avstand til alle punkter på sirkelbuen.»

«En sirkel får du når du setter passeren i et gitt punkt (sentrum) og lager en runding uten å endre passeravstanden.»

Rektangel(1):

«Et rektangel er et parallellogram med rette vinkler»

«Et rektangel er en firkant med rette vinkler»

Rektangel(2):

«Et rektangel er en firkant/parallellogram med fire rette vinkler»

«Et rektangel er en firkant med tre rette vinkler»

«Et rektangel er et parallellogram med én rett vinkel»

Partall:

«Et partall er et tall som kan deles i to like grupper»

«Man har et partall antall unifix-kuber, dersom de kan deles i to grupper med like mange kuber i hver.»

«Man har et partall antall unifix-kuber, dersom man kan pare sammen to og to kuber, slik at det ikke blir noen til overs.»

«Et partall er et tall hvor det siste sifferet er 0, 2, 4, 6 eller 8.»

Avslutning

- Ofte etter et intervju vil intervjuobjektet fortsette å drøfte rundt temaet, derfor vil det være lurt å ha muligheten til å notere etter man har skrudd av opptaket. Trenger heller ikke å skru av recorderen med det første. (Bryman, 2012, s. 487)

- Takke for deltakelsen!

Vedlegg 2: «Informasjonsskriv med samtykkeerklæring»

Vil du delta i forskningsprosjektet *"Masteroppgave om matematiske definisjoner og representasjoner"*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å få et innblikk i læreres forståelse av matematiske definisjoner og finne ut hvordan lærere arbeider med definisjoner og hvordan de bruker representasjoner i den sammenhengen. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Jeg skal gjøre intervjuer med matematikklærere i barneskolen. Intervjuene skal handle om matematiske definisjoner og representasjoner. De to første temaene i intervjuet er «partall» og «firkanter», der jeg vil spørre intervjudeltakeren om hvordan hen definerer innenfor disse to temaene. I tillegg vil jeg spørre om representasjoner hen eventuelt bruker til disse definisjonene. Det tredje temaet handler mer generelt om matematiske definisjoner og deres egenskaper. I den siste delen vil jeg gi eksempler på forskjellige definisjoner av samme matematiske begrep, der jeg vil be intervjudeltakeren om å velge blant disse definisjonene.

Svarene skal deretter analyseres gjennom et teoretisk rammeverk utarbeidet av noen av forskerne/professorene på matematikkavdelingen på NTNU. Dette rammeverket presenterer fire hovedtemaer til matematiske definisjoner; natur, kriterier, foretrukne egenskaper, og rolle og funksjon, som igjen blir delt inn i mer spesifikke underkategorier. Min problemstilling er: *Hvordan arbeider lærere med matematiske definisjoner i klasserommet og hvordan bruker de representasjoner i definisjonsarbeidet? Hva er begrunnelsene bak lærernes valg?* Jeg vil understreke at jeg ikke er ute etter å teste noen av intervjudeltakerne, men heller få et innblikk i hva de gjør, slik at jeg og andre kommende og allerede praktiserende lærere kan utvide vår forståelse av disse valgene.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Kriteriene for mitt utvalg av deltakere er kun at de er matematikklærere på barneskolen. For å finne kandidater har jeg gått på skoler jeg har kjennskap til og spurt kjente eller ukjente lærere om de kunne tenke seg å delta. Etter denne prosessen sitter jeg igjen med et gitt utvalg, som alle vil få dette informasjonsskrivet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Du vil delta i et intervju, som vil ta deg mellom 30 og 60 minutter. Du vil få spørsmål om matematiske definisjoner og representasjoner, der det ikke finnes noe fasitsvar, men der din innsikt og ditt resonnement er viktig for meg. Intervjuet vil bli tatt opp og lagret kryptert på NTNU sitt utstyr. Deretter vil jeg gjøre en transkripsjon av det, for så å slette det.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger og svarene du har gitt vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er kun meg, Trond Høgvoll, femteårsstudent ved grunnskolelærerutdanningen 1. – 7. trinn på NTNU i Trondheim, og min veileder Hermund André Torkildsen, førsteamanuensis ved NTNU i Trondheim, som vil ha tilgang til opplysningene.
- Datamaterialet vil lagres på NTNU sitt utstyr og være kryptert.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes, noe som etter planen er i slutten av mai. Jeg kommer ikke til å spørre om personopplysninger, men i tilfeller der det kan dukke opp navn i opptaket, vil disse anonymiseres under transkripsjonen. Opptakene slettes uansett etter transkripsjonen er gjort.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Trond Høgvoll på trond.hoegvoll@outlook.com eller Hermund André Torkildsen (veileder) på hermund.a.torkildsen@ntnu.no.
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (personvernombud ved NTNU) på thomas.helgesen@ntnu.no.

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Trond Høgvoll

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Masteroppgave om matematiske definisjoner og representasjoner», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta på intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)