Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Anne Trondsen og Mari Sørli

Matematisk resonnering i begynneropplæringen

En aksjonsforskningsstudie om hvordan en lærer støtter utviklingen av elevers matematiske resonnering på 3. trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Benedikte Grimeland, Yvonne Grimeland og Torunn Klemp
Mai 2022

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Anne Trondsen og Mari Sørli

Matematisk resonnering i begynneropplæringen

En aksjonsforskningsstudie om hvordan en lærer støtter utviklingen av elevers matematiske resonnering på 3. trinn

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Veileder: Benedikte Grimeland, Yvonne Grimeland og Torunn Klemp
Mai 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Denne studien undersøker hvordan en lærer kan tilrettelegge for at elevene i begynneropplæringen skal utvikle matematisk resonnering, gjennom dialogisk undervisning i helklassesamtaler. Studiens forskningsspørsmål er "hvordan kan lærerens pedagogiske grep i en helklassesamtale fungere som en potensiell støtte for å fremme elever på 3. trinn sin matematiske resonnering?". Masteroppgaven er en del av forskningsprosjektet LAB-TEd, hvor vi har inngått i et forskende fellesskap med skolen hvor vi har gjennomført vår praksis, samt veiledere fra lærerutdanningen.

Gjennom bruk av aksjonsforskning har vi endret undervisningspraksisen i en tredjeklasse på en barneskole i Trondheim. Aksjonsforskningsprosessen foregikk i fire uker gjennom et likeverdig samarbeid med praksislærer. I denne prosessen har vi iverksatt aksjoner med mål om å utvikle elevenes matematiske resonnering. Vi har dokumentert denne prosessen ved å samle kvalitative data. De kvalitative dataene består av observasjoner av lærer og elevgruppen i arbeid med kombinatoriske problem i helklassesamtaler. Datamaterialet har vi analysert med bruk av tematisk analyse. Vi tar utgangspunkt i kommognisjon som overordnet teoretisk rammeverk for hvordan vi betrakter læring i matematikk. I tillegg benytter vi et rammeverk utviklet av Jeannotte & Kieran (2017) når vi analyserer elevenes matematiske resonnering, og et rammeverk av Ellis et al. (2019) når vi analyserer lærerens grep i samtalene.

Resultatet fra studien viser at lærer støtter elevenes matematiske resonnering når bestemte kategorier av grep benyttes på bestemte tidspunkt i samtalene. I tillegg viser studien at lærer støtter elevenes matematiske resonnering når eleven selv får eie sitt eget matematiske resonnement. Studien viser at elever i begynneropplæringen kan utvikle sine resonneringsferdigheter dersom de får jobbe med åpne og utforskende oppgaver over tid, samtidig som lærer utvider og støtter elevenes matematiske resonnering.

Abstract

This study examines how a teacher in early mathematics can facilitate students' mathematical reasoning through dialogical based teaching in whole class discussions. The research question for the study is "how can a teacher's pedagogical moves in a whole class discussion work as a potential support to promote students' mathematical reasoning in 3rd grade?" This master´s thesis is a part of the research project LAB-TEd, where we have been included in an inquiring partnership with the primary school and teacher educators from NTNU.

Through action research we have restructured the teaching practice of a 3rd grade class at a primary school in Trondheim. The action research process lasted four weeks through a balanced cooperation with the 3rd grade mentor-teacher. During this process we have implemented actions that aim to promote students' mathematical reasoning. We have documented this process through collecting qualitative data. The qualitative data consist of observations of the mentor-teacher and the group of students while they work with combinatorial problems during whole class discussions. We have used thematic analysis to analyze the data material. In this study we are taking a commognitive perspective for how we view learning about mathematics. Otherwise we use a theoretical framework developed by Jeannotte and Kieran (2017) to analyze the students mathematical reasoning, and a framework developed by Ellis et al. (2019) to analyze the teachers moves in the discussions.

The result of the study shows that teachers promote students' mathematical reasoning when particular categories of moves are used at specific moments in a discussion. Additionally our study shows that teachers promote students' mathematical reasoning when the students are given the opportunity to develop their own mathematical reasoning process. This master´s thesis indicates that students in early mathematics can develop their mathematical reasoning if they over time are engaged in open and inquiry-based tasks, while the teacher is extending and supporting the students mathematical reasoning.

Forord

Masteroppgaven vår er gjennomført i studieåret 2021/2022, og markerer slutten på vår femårige lærerutdanning ved NTNU i Trondheim. Utdanningen har vært både givende og lærerik. Vi føler oss heldige som har fått muligheten til å delta i LAB-TEd-prosjektet. Deltakelsen muliggjorde at vi startet planleggingen av masterstudien tidlig, noe som igjen førte til at vi kunne gjennomføre en aksjonsforskningsstudie. Gjennom arbeidet med denne studien har vi fått mulighet til å fordype oss i et tema innen begynneropplæring i matematikk som vi syns er spennende, og vi har utviklet vår kompetanse i hvordan vi selv kan støtte elevenes matematiske resonnering.

Vi ønsker å takke vår praksislærer for at du ga oss mulighet til å studere deg som matematikklærer i samspill med elevene dine. Takk for at ga oss tillit og la til rette for at vi kunne påvirke undervisningen til hele trinnet, og takk for det gode samarbeidet.

Vi vil også rette en stor takk til våre tre veiledere, Benedikte Grimeland, Yvonne Grimeland og Torunn Klemp, for jevnlige møtepunkt med konstruktive tilbakemeldinger. Takk for at dere har gitt oss omfattende veiledning på både det matematikkdidaktiske og det metodiske. Vi har følt oss ivaretatt, og setter pris på at dere har hatt troa på oss.

Til slutt vil vi takke våre nærmeste for god støtte underveis i studietiden. Den største takken gir vi til hverandre, for et uvurderlig samarbeid. Det at vi valgte å samarbeide har vært et lyspunkt, og det har gjort masterarbeidet både motiverende og givende.

Trondheim, mai 2022
Anne Trondsen og Mari Sørli

Innhold

Figurer

Tabeller

Forkortelser

FoU	Forskning og utvikling
LAB-TEd	Learning, assessment and Boundary crossing in Teacher Education
NTNU	Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
TMSSR	Teacher moves for supporting student reasoning

1 Innledning

Temaet for denne studien er hvordan en lærer kan tilrettelegge for at elevene i begynneropplæringen skal utvikle matematisk resonnering, gjennom dialogisk undervisning i helklassesamtaler. Det metodiske utgangspunktet for studien er aksjonsforskning. I tett samarbeid med en matematikklærer på 3. trinn, har vi endret den eksisterende undervisningspraksisen med formål om å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering. Gjennom å endre den eksisterende undervisningspraksisen får vi økt innsikt i dynamikken i kommunikasjonen mellom lærer og elevene. Samarbeidet mellom læreren og oss forskere har fungert som et likeverdig forskningsarbeid hvor vi sammen har blitt enige om innholdet og strukturen i undervisningen. Studien er en aksjonsforskningsprosess hvor aksjonene har foregått over fire uker. Det matematiske temaet elevene jobber med i studien er kombinatoriske problem.

1.1 Deltakelse i et overordnet prosjekt

Denne masteroppgaven er en del av forskningsprosjektet LAB-TEd, som står for *Learning, assessment and Boundary crossing in Teacher Education.* Prosjektet er et forskningssamarbeid mellom NTNU i Trondheim og Universitetet i Tromsø, og er et fireårig prosjekt som strekker seg fra 2019-2023. Det overordnede målet for LAB-TEd er at studentenes FoU-oppgave og masteroppgave skal bidra til økt forskningskompetanse i grunnskolelærerutdanningen og skolens praksis, og til nye modeller for oppgaveveiledning. Videre er målet at vi som studenter skal utvikle vår forskningsbaserte kunnskap og skoleutviklingskompetanse. Forskningssamarbeidet har foregått i et partnerskap mellom lærerutdannere på universitetet, praksislærere og skoleledere i skolen, og lærerstudenter. For at samarbeidet skulle være givende og interessant for alle parter forsøkte vi å komme frem til et felles forskningsfokus, i henhold til Kunnskapsløftet 2020.

1.2 Bakgrunn for studien

Matematisk resonnering er en sentral del av matematikkens natur. Matematikere utvikler ny kunnskap gjennom ulike resonneringsferdigheter som å formulere og teste hypoteser, generalisere, sammenligne, argumentere for og bevise matematiske påstander (Stylianides, 2009). Det er bred enighet om at matematisk resonnering bør implementeres i all matematikk fra tidlig skolealder (Ball & Bass, 2003; Stylianides, 2007). I de siste tiårene er det flere land som har inkludert arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis i sine læreplaner og anbefalinger for matematikkundervisning. I USA finner vi et eksempel hvor det fremheves at resonnering og bevis skal integreres uavhengig av matematisk tema:

> Reasoning and proof are not special activities reserved for special times or special topics in the curriculum but should be a natural, ongoing part of classroom discussions, no matter what topic is being studied (NCTM, 2000, s. 342).

Arbeid med resonnering gjenspeiles også i den nye, norske læreplanen som ble iverksatt høsten 2020. Fokuset er rettet mot at elevene skal skape en forståelse for det de lærer, hvor samtaler i stor grad blir brukt som et grunnlag å diskutere matematiske ideer. I matematikkfaget finner vi blant annet kjerneelementene *resonnering og argumentasjon* og *representasjon og kommunikasjon* (Utdanningsdirektoratet, 2020). Kjerneelementene definerer aspekter ved faget som elevene bør lære for å være i stand til å kunne mestre og til å anvende faget. "Å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker" er slik resonnering i matematikk er beskrevet i kjerneelementet. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Kilpatrick et al. (2001) benytter seg av *matematisk kyndighet* som et overordnet begrep som skal dekke alle aspekter ved matematikk som er nødvendig for å beherske faget. Resonnering er en sentral del av matematisk kyndighet, og omhandler logisk tankegang, refleksjon, forklaring og argumentasjon (Kilpatrick et al., 2001, 116). Ball & Bass (2003) argumenterer for at matematisk resonnering ikke kun er en medhjelper for grunnleggende mål i matematikkopplæringen, men snarere fundamentet for utvikling av matematisk kunnskap. Matematisk resonnering er basisen for matematisk forståelse, og er essensielt for utvikling, etablering og kommunikasjon av matematisk kunnskap (Stylianides, 2007).

I matematikkdidaktisk forskning blir resonnering, argumentasjon og bevis ofte brukt om hverandre. I likhet med Jeannotte & Kieran (2017) anser vi matematisk resonnering som et overordnet begrep som inkluderer både argumentasjon og bevis. Matematisk resonnering blir definert som en kommunikasjonsprosess med seg selv og andre hvor man uttrykker matematiske påstander som enten blir akseptert eller forkastet av fellesskapet (Jeannotte & Kieran, s. 9). Til forskjell fra Jeannotte & Kieran (2017) definerer Lithner (2008, s. 257) matematisk resonnering som den tankegangen som er knyttet til å produsere påstander og komme med konklusjoner i arbeid med problemløsningsoppgaver. Definisjonene viser at matematisk resonnering omhandler å produsere og uttrykke matematiske påstander som skal valideres. I arbeidet med å utvikle elevenes resonneringsferdigheter fremhever tidligere forskning viktigheten av at elever jobber med problemløsningsoppgaver i et miljø som promoterer samarbeid, deling av ideer og rettferdiggjøring av svar (Ball & Bass, 2003; Mueller et al., 2014; Stylianides, 2007).

1.3 Formålet med studien

Muller et al. (2014) gjør det klart at det er nødvendig med mer kunnskap om hvilke klasseromsmiljø som støtter resonnering i matematikk og hvordan lærerens rolle ser ut i et slikt samfunn. Forskning viser at elevene oftere engasjerer seg meningsfullt i matematikken i elevsentrerte klasserom hvor lærer og elevene gjensidig deler den matematiske autoriteten (Ellis et al., 2019). Å utvikle matematisk forståelse forutsetter at elevene får muligheten til å presentere sine løsninger på problemer, lage hypoteser, snakke om et variert utvalg av matematiske representasjoner, forklare sin løsningsprosess, bevise hvorfor løsninger fungerer, og gjøre sine generaliseringer tilgjengelige (Franke et al., 2007). For å utvikle matematisk forståelse i henhold til Franke et al. (2007) sin beskrivelse, må klasseromsdiskursen være karakterisert med rike muligheter for elevdeltakelse (Drageset, 2014). Likevel er det lærersentrert undervisning som stadig dominerer diskursen i klasserommet, og lærere strever med å finne effektive måter hvor de kan støtte elevenes utforskning (Ellis et al., 2019). I tillegg er det dokumentert at elevene får lite rom til å dele ideene sine (Cazden, 2001; Graesser & Person, 1994). Drageset (2014) peker på lignende funn, ved at de fleste ytringene fra elevene er et resultat av kontrollspørsmål gitt av læreren. Van Oers (2013) etterlyser mer forskning som belyser hvordan lærere kommuniserer matematikk med elevene, da det er nødvendig for å få en dypere forståelse av elevenes mulighet til å kommunisere med og om matematikk.

Målet med aksjonsforskningen vår er å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering, gjennom å endre den eksisterende undervisningspraksisen. Aksjonene er knyttet til hvordan lærer tilrettelegger for matematisk resonnering. Dette skjer blant annet gjennom valg av oppgaver og bruk av lærergrep. Hypotesen vår er at hvis lærer oppfordrer til forklaringer og begrunnelser gjennom dialog i en helklassesamtale knyttet til ulike problemløsningsoppgaver, så vil elevenes evne til å resonnere omkring sine matematiske påstander, strategier og løsninger utvikle seg. Ved å studere de potensielle endringene, får vi mer innsikt i hvordan en lærer kan tilrettelegge for å utvikle elevers evne til å resonnere gjennom en helklassesamtale. Forskningsspørsmålet vårt er:

> Hvordan kan lærerens pedagogiske grep i en helklassesamtale fungere som en potensiell støtte for å fremme elever på 3. trinn sin matematiske resonnering?

Med kommognisjon som overordnet teoretisk rammeverk, studerer vi hvordan kommunikasjonen mellom lærer og elevene påvirker elevenes matematiske resonnering. Sagt på en annen måte ser vi på hvordan lærer bevisst påvirker elevens produksjon av resonnerende narrativer. I vår studie vil pedagogiske grep omhandle lærerens verbale handlinger. Ved å peke på konkrete tiltak som er gjennomførbare i ethvert matematikklasserom, kan vår forskning bidra til å utvikle profesjonsutøvelsen hos lærere i tråd med den nye læreplanen og tidligere forskning. Funnene i denne oppgaven kan bidra til kollektiv læring innenfor det matematikkdidaktiske fagfeltet, og kan på denne måten brukes til å utvikle skolens matematikkundervisning i begynneropplæringen.

1.4 Oppgavens struktur

Denne studien er bygd opp av sju kapitler: innledning, teori, metode, aksjonsforskningsprosessen, resultat, diskusjon og avsluttende refleksjoner. I kapittel 2 gjør vi rede for kommognisjon som overordnet rammeverk, før vi beskriver de to rammeverkene vi har brukt i analysen. I kapittel 3 beskrives metode og analyse for datainnsamling, før vi i kapittel 4 utdyper planlegging og gjennomføring av aksjonsforskningsprosessen. I kapittel 5 presenteres funn fra analysen, før de deretter diskuteres nærmere i kapittel 6. I dette kapittelet vurderer vi også studiens kvalitet. Oppgaven avsluttes i kapittel 7 hvor vi presenterer studiens bidrag til forskningsfeltet.

2 Teori

Målet med studien er å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering. For å analysere dynamikken i kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en helklassesamtale har vi valgt å benytte oss av tre teoretiske rammeverk. Det ble nærliggende å velge kommognisjon som overordnet teoretisk rammeverk fordi det bygger på en grunnleggende tanke om at mennesker lærer i et sosialt samspill gjennom kommunikasjon med andre. Rammeverket er utviklet av Anna Sfard og passer godt da både kommunikasjon og samhandling står sentralt i vår aksjonsforskning. Videre har vi valgt å benytte oss av Ellis et al. (2019) sitt rammeverk *Teacher moves for supporting student reasoning (TMSSR),* som vi kombinerer med Jeannotte & Kieran (2017) sin modell om *matematisk resonnering.* Modellen til Ellis et al. (2019) gjør det mulig å se på hvilke typer lærergrep som oppfordrer til og tilrettelegger for elevenes matematiske resonnering. I kombinasjon med rammeverket til Jeannotte & Kieran (2017) kan man studere elevenes utvikling av matematisk resonnering, og deretter dra noen slutninger omkring hvilken rolle og påvirkning læreren har. Denne kombinasjonen gjør det mulig å studere hvordan en lærers pedagogiske grep i en helklassesamtale kan fungere som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering. Videre i kapittelet presenterer vi tidligere forskning på ulike rammefaktorer som legger til rette for resonnering i matematikklasserommet. Avslutningsvis presenterer vi det matematiske tema elevene har arbeidet med, som er kombinatorikk.

2.1 Kommognisjon

I kommognisjon ses læring i matematikk som en endring i hvordan en person kommuniserer om matematikk. Sfard betrakter læring som deltakelse, hvor læring ses som endring i hva og hvordan mennesker handler. Videre er det slik at de kollektive handlingsmønstrene utvikles før de individuelle, til forskjell fra læring som tilegnelse (Sfard, 2006b). Læring som deltakelse handler om endring i hva mennesker gjør og hvordan de gjør det, mens læring som tilegnelse handler om endringer i hva en person har tilegnet seg av kunnskap og begreper (Sfard, 2006a). Sfard (2007) definerer menneskelig tenkning som den individualiserte formen av aktiviteten kommunikasjon, altså den kommunikasjonen man har med seg selv. Denne formen for kommunikasjon kan bestå av handlinger for å klargjøre opplysninger, diskutere og stille spørsmål til seg selv (Sfard, 2007). Tenking stopper å være en selvstendig prosess på det tidspunktet hvor det ikke kan skilles fra kommunikasjon, og tenkningen blir en del av kommunikasjonen i seg selv. På denne måten kan kognisjon og kommunikasjon betraktes som to uttrykk for det samme fenomenet. Sfard har kombinert disse begrepene og utviklet samlebegrepet kommognisjon.

En bestemt form for kommunikasjon blir av Sfard (2007) benevnt som en *diskurs,* som defineres som de ulike typene kommunikasjon som bringer noen mennesker sammen og samtidig ekskluderer andre. Matematikk (matematisk tenkning) er ifølge Sfard (2007) en diskurs, og i kommognisjon studerer vi om det skjer en endring i den matematiske kommunikasjonen. Læring finner sted når det skjer en endring i den matematiske diskursen, og utviklingen kommer til syne ved å se på hva elevene sier og hvordan de agerer (Sfard, 2007). Endringene identifiseres som kollektive handlingsmønstre i klassefellesskapet som helhet, hvor målet er at endringen fører elevene mot en anerkjent matematisk diskurs. En matematisk diskurs kjennetegnes av fire sentrale elementer som er spesifikke for et matematisk fellesskap; matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. *Matematiske ord* er diskursens nøkkelord og består av enten en ny forståelse av ord som elevene kjenner til fra før (f.eks. trekant, firkant) eller nye begrep og uttrykk som er spesifikke for matematikken (f.eks. at å gange og multiplikasjon er det samme). *Visuelle mediatorer* er redskaper som er utarbeidet for å representere det matematiske objektet når det kommuniseres i diskursen (f.eks. egenproduserte representasjoner, matematiske symbol og modeller). I en matematisk diskurs er *narrativer* ethvert muntlig eller skriftlig utsagn som har til hensikt å beskrive et matematisk objekt, en relasjon mellom matematiske objekter eller en aktivitet med eller om matematiske objekter. Narrativene kan enten aksepteres eller forkastes ved å bli betegnet som sanne eller usanne. Eksempler på narrativer som er godkjente i et matematisk samfunn er definisjoner, bevis, teoremer og regneregler (Sfard, 2007). Videre beskriver Sfard (2007) at narrativer kan forstås som påstander formidlet i et gitt fellesskap som deretter må bli akseptert av fellesskapet. *Rutiner* omhandler gjentakende handlings- og kommunikasjonsmønstre i diskursen. De gjentagende mønstrene kan identifiseres gjennom bruk av matematiske ord og visuelle mediatorer, eller i prosesser hvor narrativer utvikles og vurderes. Med andre ord omhandler rutiner *hvilke* handlinger individene utøver og *når* individer utøver ulike handlinger (Sfard, 2007).

Vi har valgt kommognisjon fordi det som studeres er de kollektive handlingsmønstrene, altså de gjentakende mønstrene i hva mennesker gjør og på hvilken måte de gjør det. Det passer godt med formålet for vår studie som er å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering. I vår studie undersøker vi de rutinene som oppstår i helklassesamtaler mellom læreren og elevene, knyttet til matematisk resonnering. I det følgende går vi nærmere inn på rutine-begrepet, og på hvilken måte rutinene hjelper oss med å identifisere en endring.

2.1.1 Rutiner

Ifølge Sfard (2007, s. 572) er rutiner veldefinerte, gjentakende mønstre i handlingene til deltakerne i samtalen, karakteristisk for en gitt diskurs. Sfard (2008) vektlegger at rutinene er nødvendige for effektiv kommunikasjon. Et eksempel på en rutine i et klasserom er hvordan elevene rekker opp hånda og venter på tur, når de ønsker å formidle noe. De gjentakende handlingsmønstrene regulerer hvordan mennesker kommuniserer (Sfard, 2008). Eksempelet viser hvordan bruk av rutinen unngår at alle elevene snakker i munnen på hverandre. Andre eksempler på repeterende mønstre som kan ses i nesten alle aspekter av matematiske diskurser er måter å ivareta det matematiske miljøet på, og måter å betrakte situasjoner på som like eller forskjellige (Sfard, 2007).

Sfard (2008) benevner rutiner som *regler,* og skiller mellom regler på objekt- og metanivå. *Regler på objektnivå* er vanligvis eksplisitte og stabile over tid. De omhandler egenskaper ved matematiske objekter som uttrykkes som narrativer. Prinsipper som regulerer rutiner for utregninger basert på egenskapene til assosiativitet, kommutativitet og distributivitet av addisjon og multiplikasjon er eksempler på regler på objektnivå (Sfard, 2008). Til forskjell fra regler på objektnivå som er eksplisitte og stabile, er *regler på metanivå* implisitte og dynamiske, og kan anses som uskrevne regler. Reglene på metanivå er repeterende kommunikasjonsmønster mellom deltakere i en diskurs, og sier noe om hvordan de handler (Sfard, 2008) En rutine på metanivå defineres av Sfard (2008, s. 208) som et sett med regler som beskriver de repeterende diskursive handlingene. Reglene kan deles inn i to underkategorier; *hvordan* og *når* en rutine benyttes. Sfard (2008) deler videre kategorien *når* inn i anvendbarhetsbetingelser (applicability conditions) og avslutningsbetingelser (closure conditions). *Anvendbarhetsbetingelser* er regler som bestemmer eller begrenser under hvilke omstendigheter en person antagelig vil utføre rutinen (Sfard, 2008, s. 209). *Avslutningsbetingelser* er regler som definerer omstendigheter en person antagelig vil tolke som vellykket avslutning av rutinen (Sfard, 2008, s. 209). Kategorien *hvordan* består av *prosedyrer* (procedure), som er regler som bestemmer eller begrenser hvordan rutinen kan utføres. Et eksempel på hvordan de ulike delene av en rutine på metanivå kommer til uttrykk i klasserommet kan se slik ut: Dersom elevene jobber med en problemløsningsoppgave, blir anvendbarhetsbetingelsen at eleven bestemmer seg for hvilken rutine de skal ta i bruk for å løse problemet. Prosedyren er når eleven velger seg en fremgangsmåte som de kan benytte for å finne løsningen på problemet, eksempelvis multiplikasjonsalgoritmen. Avslutningsbetingelsen i en slik rutine vil være når eleven har kommet frem til en løsning på problemet.

Regler på metanivå kan sammenlignes med det Cobb omtaler som sosiomatematiske normer. Yackel & Cobb (1996, s. 458) definerer sosiomatematiske normer som normer som er særegne for matematiske aktiviteter. I likhet med Sfard (2008) som omtaler regler på metanivå som dynamiske og uskrevne, omhandler sosiomatematiske normer regelmessigheter som forteller oss noe om hvilke forventninger som stilles til elevene i en matematisk aktivitet i en gitt matematisk diskurs. Et eksempel på en rutine på metanivå i arbeid med matematisk resonnering kan være at det forventes at deltakerne i diskursen forklarer hva de har tenkt. I en slik kontekst ville ikke et argument som "det vet jeg bare" være tilstrekkelig som en avlsutningsbetingelse. Sfard (2008) understreker at rutiner ikke forutser individets handlinger i en matematisk diskurs. Dette betyr at deltakerne i diskursen fritt kan velge fremgangsmåte, noe som skaper et rom for kreativitet. I tillegg muliggjør rutiner at deltakerne kan ta i bruk kunnskaper og ferdigheter i nye situasjoner for så å videreutvikle kunnskapen (Sfard, 2008).

Sfard (2008) deler rutiner på metanivå inn i tre former: utforsking (explorations), gjerninger (deeds) og ritualer. *Utforsking* har som mål å utvikle og godkjenne nye narrativer, og elevene er på denne måten produktorienterte i det matematiske arbeidet (Sfard, 2008). En rutine benevnes som utforsking dersom den ender med et bidrag til et narrativ. Narrativet kan deretter bli akseptert eller forkastet, på bakgrunn av allerede godkjente narrativer og diskursens regler på metanivå (Sfard, 2008). Med andre ord omhandler utforsking å utvikle ny kunnskap i diskursen. Dette kan være egenskaper ved, eller relasjoner mellom matematiske objekter. Prosessen avhenger av hva deltakerne anser som overbevisende, og kan variere fra diskurs til diskurs. Avslutningsbetingelsen for utforsking er *når* et narrativ enten blir akseptert eller forkastet i fellesskapet. En *gjerning* er en rutine som har som mål å endre et matematisk objekt, og i likhet med utforsking er elevene produktorienterte (Sfard, 2008). Gjerningen anses som avsluttet når det har skjedd en fysisk endring i omgivelsene. Et eksempel er når elevene bruker konkreter (f.eks. klosser) for å addere og subtrahere, hvor målet med aktiviteten er å utføre en handling som fører til en endring i klossene, fremfor å konstruere et narrativ om tallene klossene representerer. Avslutningsbetingelsen er flytting av konkretene, og ikke en konstruksjon av et narrativ. Det er denne forskjellen som gjør rutinen til en gjerning og ikke en utforsking (Sfard, 2008). Et *ritual* har som mål å skape og opprettholde et sosialt bånd til andre individer (Sfard, 2008). Ritualer skiller seg fra de to foregående formene for rutiner ved at målet er prosessorientert.

Denne prosessen innebærer imitasjon av andre deltakere, der man gjennom å imitere andre blir kjent med diskursens rutiner og nøkkelord. Avslutningsbetingelsen til et ritual er ikke produksjon av narrativer eller endring av objekter, men å opprette og opprettholde et sosialt bånd til andre mennesker (Sfard, 2008). Et eksempel på et ritual kan være at læreren presenterer en prosedyre og eleven etterligner denne. Gjennom å utføre de samme ritualene gjentatte ganger vil eleven etter hvert individualisere den matematiske diskursen og bli et fullverdig medlem av diskursen (Sfard, 2008).

Sfard (2008) knytter utforskende rutiner til formulering av hypoteser, argumentasjon og bevis, som er sentrale elementer i matematisk resonnering. I vår studie har vi undersøkt utforskende rutiner ved å identifisere regler på metanivå for underbygging av narrativer, som har oppstått i helklassesamtalene mellom lærer og elever.

2.2 Matematisk resonnering

I matematikkdidaktisk forskning og styringsdokumenter for utdanning blir resonnering, argumentasjon og bevis ofte brukt om hverandre. Begrepet argumentasjon blir i den norske læreplanen beskrevet på følgende måte:

> Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3)

Eksempelet viser hvordan ordene argumentasjon, begrunne, resonnement og bevis blir brukt uten en eksplisitt definisjon. Det er en kjent utfordring at begrep som matematisk resonnering ofte blir brukt med en implisitt antagelse av at det er en allmenn forståelse av hva som menes med resonnering i matematikk (Jeannotte & Kieran, 2017; Yackel & Hanna, 2003). Ifølge Duval (1998) handler resonnering om å ta utgangspunkt i allerede etablert kunnskap. Den allerede etablerte kunnskapen brukes til å utvikle ny kunnskap gjennom å formulere spørsmål og løsningsstrategier, formulere og teste generaliseringer og andre hypoteser, og begrunne disse. Lithner (2008, s. 257) definerer matematisk resonnering som den tankegangen som er knyttet til å produsere påstander og komme med konklusjoner i arbeid med problemløsningsoppgaver. Balacheff (1988) og Stylianides (2007) knytter matematisk resonnering til bevis. Stylianides (2016, s. 13) har forsket på hvordan elever i begynneropplæringen kan arbeide med bevis i matematikk, og definerer bevis som et matematisk argument med følgende tre karaktertrekk:

1. Argumentet bygger på tidligere aksepterte sannheter i klassefellesskapet, som er sanne og tilgjengelige uten videre begrunnelse.
2. Argumentet må anvende en form for resonnering (argumentasjonsform) som er gyldig og kjent, eller som er innenfor rekkevidden for klassefellesskapet
3. Det matematiske argumentet må formidles ved hjelp av uttrykksformer som er passende og kjent, eller som er innenfor rekkevidden for klassefellesskapet

(vår oversettelse)

Jeannotte og Kieran (2017) har en mer helhetlig forståelse av matematisk resonnering, og inkluderer blant annet det å finne mønster, generalisere og formulere hypoteser, i tillegg til ulike typer begrunnelser for påstander, inkludert bevis. Matematisk resonnering blir med utgangspunkt i Sfard (2008) definert som en kommunikasjonsprosess med seg selv og andre, som gjør det mulig å avlede matematiske narrativer fra andre matematiske narrativer (Jeanotte & Kieran, 2017, s. 7). Gjennom en omfattende litteraturstudie har Jeannotte og Kieran (2017) utviklet en modell for matematisk resonnering i skolen som bygger på sentrale begreper fra kommognisjon. I likhet med Jeannotte & Kieran (2017) anser vi matematisk resonnering som et overordnet begrep som inkluderer både argumentasjon og bevis. Et av målene med aksjonsforskningen vår er å utvikle elevenes matematiske resonnering. Vi har valgt å benytte oss av Jeannotte og Kieran (2017) sin modell for matematisk resonnering, slik at vi kan studere utviklingen i de ulike prosessene som inngår i godkjenning av narrativer. I dette kapittelet starter vi med å definere de to aspektene ved matematisk resonnering, før vi går nærmere inn på prosessaspektet.

2.2.1 Modell for matematisk resonnering

Jeannotte og Kieran (2017) har identifisert to ulike aspekter ved matematisk resonnering; et strukturelt aspekt og et prosessaspekt. *Det strukturelle aspektet* er statisk, og beskriver hvordan et matematisk resonnement er bygd opp. Dette er i liten grad relevant for vår studie, og vil derfor ikke utdypes videre. I vår studie ser vi nærmere på prosessaspektet ved matematisk resonnering. *Prosessaspektet* er matematiske resonneringsprosesser og blir definert som metadiskursive, kommognitive prosesser som avleder (derive) narrativer om objekter eller relasjoner ved å utforske forholdet mellom objektene (Jeannotte og Kieran, 2017, s. 9). I prosessaspektet skiller Jeannotte og Kieran (2017) mellom to hovedprosesser; én knyttet til leting etter likheter og ulikheter, og én knyttet til validering. De har også en tredje kategori, eksemplifisering, som karakteriseres av prosesser som støtter de to foregående kategoriene. De matematiske resonneringsprosessene kan ses i sammenheng med det Sfard (2008) omtaler som utforskende rutiner i det matematiske fellesskapet. Videre i kapittelet presenterer vi en oversikt over alle prosessene, og bruker eksempler fra vår studie for å tydeliggjøre hva som skiller de ulike prosessene fra hverandre. I tabell 2.1 presenterer vi en oversettelse og sammenfatning av Jeannotte & Kieran (2017) sine matematiske resonneringsprosesser.

Tabell 2.1: Prosesser i matematisk resonnering, som beskrevet av Jeannotte & Kieran (2017, vår oversettelse)

<table>
<tr><th colspan="3">Matematiske resonneringsprosesser</th></tr>
<tr><th>Prosesser som innebærer leting etter likheter og forskjeller</th><th>Prosesser relatert til validering</th><th>Eksemplifisering</th></tr>
<tr><td>Generalisere</td><td>Begrunne</td><td rowspan="2">Eksempler som støtter prosesser for leting etter likheter og forskjeller</td></tr>
<tr><td>Formulere en hypotese (Conjecture)</td><td>Formulere bevis</td></tr>
<tr><td>Identifisere et mønster</td><td>Formulere et formelt bevis</td><td></td></tr>
</table>

Sammenligne		Eksempler som støtter prosesser for validering
Klassifisere		

2.2.2 Prosesser relatert til leting etter likheter og forskjeller

Det er fem prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter: generalisering, formulere en hypotese, identifisering av mønster, sammenligning og klassifisering. Felles for disse er at de leder til formulering av narrativer om matematiske objekter som kan være sanne eller usanne (Jeannotte & Kieran, 2017). Gjennom søk etter likheter og ulikheter kommer man frem til et narrativ som kan oppfattes som mer eller mindre sannsynlig eller sant. Hvis sannheten av narrativet ikke er helt åpenbar for den gitte diskursen, så bør narrativet valideres i videre arbeid. Et eksempel på et narrativ fra vår studie er når en elev i den matematiske diskursen påstår "det omvendte av 2 og 5 er en ny kombinasjon" [her refererer eleven til at 2 og 5 er det omvendte av kombinasjonen 5 og 2, noe som utgjør en ny kombinasjon i arbeidet med problemet]. Alle deltakerne i diskursen var ikke enige i narrativet, og den matematiske påstanden bør valideres i den videre klassediskusjonen.

Generalisering: Er en prosess som slutter narrativer om en mengde av matematiske objekter eller en relasjon mellom objekter i mengden, fra en delmengde av denne mengden (Jeannotte & Kieran, 2017, s 9). Generalisering omhandler å formulere et narrativ som gjelder en større mengde objekter enn de konkrete tilfellene generalisering baseres på. Et eksempel på en generalisering som en elev på tredje trinn kan komme med er at "alle partall kan deles i to like store grupper".

Forme en hypotese: Er en prosess som leder til et narrativ om en regelmessighet som er sannsynlig eller trolig, og som har potensial for å teoretiseres (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Med andre ord betyr det å forme en hypotese eller en matematisk påstand som senere kan godtas eller avslås, altså vurderes som sann eller usann. Denne prosessen kan omhandle mulige løsninger på matematiske oppgaver, matematiske relasjoner og sannsynlige løsningsstrategier. Et eksempel på en hypotese en elev på tredje trinn kan utforme i arbeid med multiplikasjon er "jeg tror at alle tall i fire-gangen også vil være i åtte-gangen".

Identifisere mønster: Er en prosess som leder til et narrativ om et tilbakevendende forhold mellom objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). Det å identifisere et mønster kan lede til en hypotese. Likevel kan ikke disse prosessene likestilles. Jeannotte og Kieran (2017) presiserer også at det å *identifisere* et mønster ikke er det samme som å *observere* et mønster. Å identifisere et mønster krever en aktiv leting, før man deretter tar et steg tilbake for å resonnere omkring mønsteret. Denne prosessen skiller seg fra generalisering og forme en hypotese ved at det ikke nødvendigvis kan overføres fra et spesifikt sett til en større gruppe objekter (Jeannotte & Kieran, 2017). Et mønster elevene i vår studie kan komme til å oppdage i arbeid med et kombinatorisk problem, er at kombinasjonene endrer seg med en opp og ned om de plasseres stigende i en tabell. Dersom det for eksempel er fem objekter som skal fordeles i to bokser, vil fordelingen være 0-5, 1-4, 2-3 osv. Elevene kan komme til å oppdage dette mønsteret uten å se det i sammenheng med lignende kombinatoriske problem.

Sammenligne: Er en prosess som leder til et narrativ om matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). Gjennom sammenligning av matematiske objekter eller relasjoner kan man blant annet identifisere mønster som resulterer i at nye hypoteser blir formet. Videre presiserer Jeannotte og Kieran (2017) at å sammenligne kan gjøres parallelt med andre prosesser som generalisering, identifisering av mønster og validering. Det kan eksempelvis være at elevene sammenligner et tidligere kombinatorisk problem hvor de har identifisert mønsteret i strukturen, og identifiserer det samme mønsteret i den nye oppgaven.

Klassifisere: Er en prosess som leder til et narrativ om en gruppe objekter med utgangspunkt i matematiske egenskaper og definisjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11) Det betyr at det er de matematiske egenskapene og definisjoner som blir brukt for å klassifisere objekter. Klassifisering gjøres sammen med andre prosesser som generalisering, antagelser og sammenligning (Jeannotte & Kieran, 2017). Eksempelvis kan klassifisering omhandle å plassere ulike geometriske figurer i kategorier ut fra geometriske egenskaper.

2.2.3 Prosesser relatert til validering

Ifølge Jeannotte og Kieran (2017) omfatter validering prosesser for å endre sannhetsverdien (epistemisk verdi) til et narrativ, altså å finne ut om den er sann eller usann. Den epistemiske verdien kan endres fra sannsynlig til sann, fra sann til feilaktig eller fra sannsynlig til mer sannsynlig. I valideringsprosessen er det metadiskursive regler som styrer de mulige endringene til den epistemiske verdien (Jeannotte & Kieran, 2017). Det er tre prosesser knyttet til validering: å begrunne (justification), å bevise (proving) og å bevise formelt (formal proving). De tre prosessene er definert med økende grad av deduktiv struktur. Det betyr at noen argumenter er bevis, og at noen bevis er formelle bevis. Formelle bevis er ikke relevant for vår studie, og blir dermed ikke beskrevet nærmere.

Begrunne: Er en prosess som gjennom å begrunne og underbygge gjør det mulig å endre den epistemiske verdien av et narrativ. Den epistemiske verdien endres ikke nødvendigvis fra sannsynlig til sann, men kan endres fra sannsynlig til mer sannsynlig. Hvilke regler på metanivå som er sosialt akseptert, legger føringer for hvordan den epistemiske verdien kan endres. Selv om reglene på metanivå bestemmer valideringsprosessen, innebærer det ikke nødvendigvis en deduktiv struktur. Jeannotte og Kieran (2017, s. 12) inkluderer argumentasjon i begrepet matematisk resonnering. På denne måten handler begrunne også om å argumentere. Eksempelvis når elever begrunner sine antagelser, innebærer det at de argumenterer for å overbevise seg selv og andre. For eksempel er "jeg har prøvd mange ganger og finner ingen flere kombinasjoner, jeg får det samme antallet hver gang så da må alle være funnet" et argument som gjør påstanden mer sannsynlig. Likevel er ikke påstanden nødvendigvis sann, fordi argumentet er empirisk. Et eksempel på en påstand fra vår studie er "*to og tre,* og *tre og to* er to forskjellige kombinasjoner". Argumentet for denne påstanden var "fordi i *to og tre* kommer to-tallet før tre, og i *tre og to* kommer tre-tallet før to". Argumentet kan bidra til å overbevise fellesskapet ved å øke påstandens sannhetsverdi.

Likevel mangler også et slikt argument den deduktive strukturen for å kunne regnes som et bevis.

Formulere bevis: Er en prosess hvor argument og underbygging av narrativ endrer den epistemiske verdien til narrativet fra trolig til sann (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). Jeannotte og Kieran (2017) sin definisjon av bevis sammenfaller med Stylianides (2007) sin definisjon. Skal et argument anses som et bevis, må resonnementet være deduktivt. Videre må det bygge på definisjoner og resultater som er sanne, være representert på en hensiktsmessig måte, samtidig som det må være tilpasset en gitt elevgruppe (Stylianides, 2007). Denne prosessen styres hovedsakelig av tre faktorer; 1) hvilke narrativer som allerede er akseptert som sanne av diskursens medlemmer, 2) beviset må ha en deduktiv struktur, og 3) det matematiske objektet eller produktet må være kjent og godtatt innenfor diskursen (Jeannotte & Kieran, 2017). Videre presiserer Jeannotte & Kieran (2017) at det er den deduktive strukturen, og de aksepterte narrativene som skiller bevis og begrunnelser fra hverandre. Et eksempel på et bevis tilpasset aldersgruppen som en elev kan komme med i arbeid med kombinatoriske problem er "Alle kombinasjonene er funnet fordi vi valgte én bukse (et element) og kombinerte buksen med alle genserne (alle de aktuelle elementene) før vi tok en ny bukse og gjorde det samme (før det skiftes til et nytt element). Vi gjorde det samme med alle buksene, og derfor vet vi at alle kombinasjonene er funnet".

2.2.4 Eksemplifisering

Eksemplifisering er prosesser som har til hensikt å støtte de to foregående prosessene (Jeannotte & Kieran, 2017). En slik prosess kan ses på som det Sfard (2008) benevner som visuelle mediatorer, hvor elever benytter seg av egenproduserte representasjoner, matematiske symbol og modeller for å overbevise fellesskapet om narrativer. I arbeid med problemløsning kan egenproduserte representasjoner brukes som støtte for leting etter likheter og forskjeller, og validering. En tegning som eksemplifisering kan for eksempel benyttes til generalisering, formulering av hypoteser og bevis.

2.3 Lærerrollen i matematiske resonneringsprosesser

Ellis et al. (2019) har utviklet et rammeverk for lærerens handlinger som kan støtte elevenes matematiske resonneringsprosesser. Dette rammeverket blir kalt *teacher moves for supporting student reasoning* (TMSSR), og bygger på Jeannotte & Kieran sitt arbeid. Rammeverket inneholder en modell med fire kategorier som viser hvilke grep lærer kan benytte seg av for å støtte elevenes resonnering. Det som skiller dette rammeverket fra andre er at det er spesifikt utarbeidet for matematikk, og lærergrepene er basert på utforskende undervisning og resonnering i matematikk. For at klasseromsdiskusjoner effektivt skal støtte meningsfull elevlæring, må samtalene ha et fokus på både viktige matematiske ideer, og på elevenes utvikling av matematisk mening gjennom kommunikative prosesser. Læreren har en sentral rolle i å støtte opp under elevenes forståelse i slike diskusjoner; lærer må velge passende oppgaver, avgjøre når og hvordan man skal fremme elevenes tenking, og bestemme når man skal la elevene engasjere seg i produktivt strev (Ellis et al., 2019).

Ellis et al. (2019) baserer det teoretiske fundamentet til forskningen sin på aktivitetsteori, utviklet av Engeström (1999, her i Ellis et al., 2019). I et slikt perspektiv tar man i betraktning at ulike faktorer vil påvirke det læreren gjør, inkludert lærerens valg av grep. På denne måten ser vi at lærergrep for å støtte elevenes resonnering er mediert av faktorer som eksempelvis elevenes engasjement med oppgaven, klasseroms- og matematiske normer, og lærerens holdninger og mål. Lærerens kommunikasjon er en sentral faktor som vil påvirke elevenes utbytte av undervisningen i deres utvikling av matematisk resonnering (Ellis et al., 2019). På bakgrunn av at ulike faktorer påvirker det læreren gjør, er det vanskelig å være sikre på hva som påvirker og fører til hva. I vår studie har vi derfor tatt et valg om å fokusere på lærerens kommunikasjon med elevene. I dette kapittelet presenterer vi rammeverket til Ellis et al. (2019), før vi går nærmere inn på hver av de fire kategoriene.

Rammeverket *teacher moves for supporting student reasoning* grupperer lærergrep inn i fire kategorier basert på hvilken funksjon de har i å støtte elevene i resonneringsprosessen. De fire kategoriene er å *lokke frem, respondere, fremme* og *utvide* (Ellis et al., 2019, s. 117, vår oversettelse). Tabell 2.2 viser modellen fra rammeverket TMSSR oversatt til norsk.

Tabell 2.2: Rammeverket TMSSR fra Ellis et al. (2019, s. 117, vår oversettelse)

Lokke frem elevenes resonnering		**Respondere på elevenes resonnering**	
Lavt potensial ←→ *Høyt potensial*		*Lavt potensial* ←→ *Høyt potensial*	
Lokke frem et svar	Lokke frem ideer	Å rette elevens feil	Oppmuntre til å rette sine feil
Lokke frem fakta eller prosedyrer	Lokke frem forståelse	Repetere elevens utsagn	Representere på en ny måte
Etterspørre en oppklaring	Etterspørre en forklaring	Oppmuntre elevene til å repetere hverandres utsagn	
Å finne ut av elevens resonnement		Validere et korrekt svar	
Undersøke forståelse			
Fremme elevenes resonnering		**Utvide elevenes resonnering**	
Lavt potensial ←→ *Høyt potensial*		*Lavt potensial* ←→ *Høyt potensial*	
Fokusere på et bestemt aspekt	Tilby veiledning	Oppmuntre til evaluering	Oppmuntre til refleksjon
Å bli ledet	Oppmuntre til å ta i bruk flere løsningsstrategier	Etterspørre nøyaktighet	Oppmuntre til resonnering

Bryte ned oppgaven (topaze effect[1])	Bygge videre på elevenes bidrag	Bryte ned begrunnelser (topaze for justification)	Etterspørre begrunnelse
Gi generell informasjon	Gi alternative løsningsstrategier		Etterspørre generalisering
Gi forklaring på en prosedyre	Gi en begrepsmessig forklaring		
Gi en oppsummerende forklaring			

I hver kategori er lærergrep som er av samme utforming plassert på samme rad. Det handler om at lærer kan reagere på elevenes svar på ulike måter (Ellis et al., 2019). Eksempelvis i kategorien respondere, kan læreren enten velge å endre elevenes utsagn til det korrekte *(å rette elevenes utsagn),* eller så kan lærer be eleven vurdere utsagnet sitt en gang til *(oppmuntre til å rette sine feil).* De to grepene har flere likheter, men likevel tilbyr det sistnevnte grepet et høyere potensial for å støtte elevenes resonnering.

Lærergrepene i hver kategori kan variere i sitt potensial i å støtte elevenes resonnering. På bakgrunn av at man anerkjenner at flere elementer jobber sammen i aktivitetssystemet for å bestemme utfallet av et grep, vil det samme grepet kunne ha ulike utfall under forskjellige omstendigheter. Dette utgjør deler av bakgrunnen for at Ellis et al. (2019) har valgt å forklare hvilket *potensial* grepene har, fremfor å omtale hvilken *effekt* de har på elevers resonnering. Det andre argumentet til Ellis et al. (2019) er at analysen er best egnet for å fokusere på klasseromsdiskusjoner fremfor elevenes individuelle prestasjoner, og da gir det mest mening å bruke begrepet potensial. Videre beskriver Ellis et al. (2019) forholdet mellom de ulike grepene, og på hvilken måte grepene kan operere sammen med hensikt å støtte elevenes resonnering i et utforskende læringsmiljø. I rammeverket anses lærergrepene som sammenhengende og kontinuerlige. Derfor er ikke kategoriene i modellen satt opp i et hierarki. Likevel viser det seg at kategorien *utvide elevenes resonnering* ofte er mer effektiv i prosesser relatert til validering, altså når elevene skal begrunne eller forsøke å formulere et bevis (Ellis et al., 2019).

For å avgjøre hvilken kategori et grep skal plasseres i, er det ikke alltid tilstrekkelig å se på strukturen i lærerens utsagn. I enkelte tilfeller vil det være aktuelt å se på hvilken funksjon grepet har hatt i samtalen, uavhengig av hvilken intensjon læreren har hatt (Ellis et al., 2019). I vår forskning opplevde vi flere ganger at lærer hadde en annen intensjon med responsen sin, enn slik responsen faktisk fungerte i praksis.

[1] Topazeeffekten er når lærerens spørsmål snevres inn slik at læringspotensialet i oppgaven forsvinner, og at svaret nærmest blir avslørt gjennom spørsmålene (Ellis et al., 2019).

2.3.1 Læreren lokker frem elevens resonnering

I bruk av disse grepene er lærerens mål å få frem, identifisere, klargjøre og forstå elevenes ideer og bidrag (Ellis et al., 2019). Videre beskriver Ellis et al. (2019) at grepene i denne kategorien er viktige for at læreren skal få en innsikt i hva elevene vet og forstår. De muliggjør at læreren kan få en oversikt over hva eleven tenker i øyeblikket, samt evaluere elevenes tenking underveis når de involverer seg i diskusjoner og samtaler. Disse grepene kan være et viktig første steg i en pågående prosess av å bygge på og støtte elevenes matematiske tenkning. Tabell 2.3 viser hvilke grep som tilhører denne kategorien, med en nærmere forklaring til hvert enkelt tilfelle.

Tabell 2.3: Grep for å lokke frem[2] elevens resonnering, fra Ellis et al. (2019, s. 119, vår oversettelse)

	Lærergrep	**Beskrivelse**
Lavt potensial	Lokke frem et svar	Læreren stiller et spørsmål for å lokke frem svaret på en gitt oppgave
	Lokke frem fakta eller prosedyrer	Læreren ber om at elevene repeterer kjente fakta eller prosedyrer
	Etterspørre en oppklaring	Læreren stiller et spørsmål for å klargjøre hva eleven mener
	Å finne ut av elevens resonnement	Lærer forsøker å forstå en elev sin løsning, forklaring eller resonnement
	Undersøke forståelse	Læreren stiller et spørsmål for å evaluere elevenes forståelse av de matematiske ideene under en diskusjon
Høyt potensial	Lokke frem ideer	Læreren stiller et eller flere spørsmål for å lokke frem elevenes tanker om en løsningsstrategi eller om en matematisk ide
	Lokke frem forståelse	Læreren vurderer hva elevene forstår og forsøker å identifisere elevenes resonnering
	Etterspørre en forklaring	Læreren ber elevene utdype sin egen tenking, forklare sin resonnering, eller dele sin resonnering

2.3.2 Læreren responderer på elevens resonnering

I løpet av kort tid må lærere bestemme seg for hvordan de skal reagere på elevenes utsagn og bidrag, og disse reaksjonene blir av Ellis et al. (2019) kategorisert som

[2] Vi har oversett det engelske ordet *eliciting* til *lokke frem*. Med *å lokke frem* mener vi å få frem, identifisere, klargjøre og forstå elevenes ideer. Ved bruk av denne oversettelsen blir meningsinnholdet ivaretatt.

lærerens respons på elevenes resonnering. I det øyeblikket lærere reagerer på elevenes tenking, vil de respondere på forskjellige måter: ved å validere elevenes respons, ved å rette på mangelfulle eller unøyaktige resonnementer eller løsningsstrategier, eller ved å oppfordre elevene til å ta disse rollene på egenhånd. Ifølge Ellis et al. (2019) vil grep i denne kategorien ofte benyttes i etterkant av at læreren har lokket fram elevens resonnering, og på denne måten har læreren allerede fått et innblikk i elevens tenking. Tabell 2.4 gir en oversikt over grep i denne kategorien og forklaring på disse.

Tabell 2.4: Grep for å respondere på elevens resonnering, fra Ellis et al. (2019, s. 120, vår oversettelse)

	Lærergrep	**Beskrivelse**
Lavt potensial	Å rette elevens feil	Lærer korrigerer elevenes feil direkte eller gir et riktig svar
	Repetere elevenes utsagn	Læreren repetere en elev sin ide i skriftlig eller verbalt format for å gjøre ideen tilgjengelig for medelever
	Oppmuntre elevene til å repetere hverandres utsagn	Læreren ber elevene om å gjenta en medelev sitt utsagn eller løsningsstrategi
	Validerer et korrekt svar	Læreren bekrefter aktivt elevens ideer ved å gjenta, omformulere eller legge til informasjon til elevens svar
Høyt potensial	Oppmuntre til å rette sine feil	Læreren oppmuntrer elevene til å se og rette opp sine egne feil
	Representere på en ny måte	En form for gjentagelse hvor læreren gir en alternativ representasjon av en elevs ide eller strategi for å gjøre den tilgjengelig for medelever. Læreren kan organisere, omformulere eller formalisere det eleven i utgangspunktet delte.

2.3.3 Læreren fremmer elevens resonnering

I denne kategorien vil lærerens grep omhandle å videreutvikle elevens tenkning. Når lærere skifter fra å respondere på noe som skjer i øyeblikket til å ta i bruk grep som presser frem (pushing) elevens tenking, kategoriserer vi dette som grep som har til hensikt å fremme elevens resonnering (Ellis et al., 2019). Ifølge Ellis et al. (2019) er et hovedtrekk at læreren forsøker å støtte eleven gjennom både veiledning og forklaring. På bakgrunn av dette er grepene delt inn i to underkategorier, som enten har til hensikt å veilede elevene eller at lærer ønsker å tilføre en forklaring. Lærere kan respondere på elevens ideer på mer betydningsfulle måter ved å bygge på deres tenking, forklaringer eller alternative løsningsstrategier, eller de kan oppfordre elevene til å utvikle ulike løsninger. Selv om ansvaret for matematikken hovedsakelig ligger hos læreren slik som i de to foregående kategoriene, vil læreren her forsøke å engasjere elevene til aktiv deltakelse i resonneringsprosessene. Dette skjer ved at lærer oppmuntrer elevene til å identifisere mønstre, sammenligne eller klassifisere ideer (Ellis et al., 2019). Tabell 2.5 gir en oversikt over grep i denne kategorien, samt en nærmere forklaring på disse.

Tabell 2.5: Grep for å fremme elevens resonnering, fra Ellis et al. (2019, s. 121-122, vår oversettelse)

		Lærergrep	**Beskrivelse**
Lavt potensial	*Veiledning*	Fokusere på et bestemt aspekt	Læreren oppnå elevens oppmerksomhet ved å indikere at de skal fokusere på et bestemt aspekt ved en oppgave, en ide eller en løsning.
		Å bli ledet	Læreren stiller ledende spørsmål for å lede eleven i en spesifikk retning
		Bryte ned oppgaven (topaze effect)	Læreren bryter ned oppgaven og reduserer kompleksiteten gjennom å stille stadig enklere spørsmål, slik at svaret nærmest blir avslørt gjennom spørsmålene.
	Tilførsel	Gi generell informasjon	Læreren gir generell informasjon som ikke er spesifikt knyttet til oppgaven
		Gi forklaring på en prosedyre	Læreren gir en forklaring på hvordan man skal bruke en prosedyre for å løse et problem uten å avsløre løsningsstrukturen
		Gi en oppsummerende forklaring	Læreren oppsummerer de viktige momentene om en oppgave eller et problem, eller oppsummerer informasjonen om oppgaven
Høyt potensial	*Veiledning*	Tilby veiledning	Læreren veileder gjennom å gi hint om potensielle strategier uten å avsløre løsningsstrukturen
		Oppmuntre til å ta i bruk flere løsningsstrategier	Læreren oppmuntrer eleven til å finne eller bruke ulike løsningsstrategier
		Bygge videre på elevenes bidrag	Læreren bygger på elevens tidligere bidrag for å støtte ny forståelse, eller oppmuntrer elever til å bygge på hverandres bidrag
		Gi alternative løsningsstrategier	Læreren presenterer en ny eller annerledes måte å løse et problem på

	Tilførsel	Gi en konseptuell (begrepsmessig) forklaring	Læreren gir en forklaring med et fokus på hvorfor

Kategoriene er delt i to grupper, hvor grepene kategoriseres som enten veiledning eller tilførsel. De veiledende grepene handler om at lærer fungerer som et stillas for å støtte elevenes resonnering. Et av grepene med lavt potensiale innenfor denne gruppen er *bryte ned oppgaven* (topaze effect). Dette grepet kan ofte fungere på den måten at det blokkerer mulighetene for at elevene engasjerer seg meningsfullt i oppgaven, ved at lærer forenkler oppgaven. Ellis et al. (2019) argumenter for at dette grepet likevel faller inn under denne kategorien, fordi det kan være et utgangspunkt for at læreren senere benytter seg av grep med høyt potensiale, slik som for eksempel å bygge videre på elevenes bidrag. Grepene i kategorien tilførsel er de lærergrepene som har til hensikt å introdusere nye ideer eller strategier i klasseromsdiskursen (Ellis et al., 2019).

2.3.4 Læreren utvider elevenes resonnering

Den fjerde og siste kategorien fremmer elevenes muligheter til å utvide sin matematiske resonnering, spesielt i forhold til generalisering av sine strategier eller ideer, og utvikling av matematisk aksepterte begrunnelser (Ellis et al., 2019). Dette innebærer at lærer må vurdere hvilke muligheter som er til stede i elevers resonnering og deretter finne måter å ekspandere deres resonnering. I denne kategorien har lærergrepene en intensjon om å utvikle en mer sofistikert grad av matematisk resonnering. Unntaket er lærergrepet *bryte ned begrunnelser* (topaze for justification), som har likheter med *bryte ned oppgaven* (topaze effect) fra forrige kategori. Når en lærer ber om en begrunnelse ved å stille ledende spørsmål, kan dette resultere i at begrunnelsene nærmest eksplisitt blir gitt gjennom spørsmålene. Videre kan dette stoppe elevenes mulighet for resonnering (Ellis et al., 2019). Tabell 2.6 gir en oversikt over grep i den siste kategorien, samt en nærmere forklaring.

Tabell 2.6: Grep for å fremme elevens resonnering, fra Ellis et al. (2019, s. 123-124, vår oversettelse)

	Lærergrep	**Beskrivelse**
Lavt potensial	Oppmuntre til evaluering	Lærer spør elevene om de er enige med hverandres svar eller forklaringer.
	Etterspørre nøyaktighet	Lærer oppfordrer elevene til å gi et eksakt svar, sjekke arbeidets nøyaktighet, eller kvantifisere en påstand.
	Bryte ned begrunnelser (topaze for justification)	Lærer innleder med å be om begrunnelser, men forenkler spørsmålet ved å gi en serie av ledende spørsmål slik at begrunnelsens struktur blir avslørt.
Høyt potensial	Oppmuntre til refleksjon	Lærer ber elevene om å reflektere over gitt løsninger og forklaringer.

	Oppmuntre til resonnering	Lærer oppmuntrer elevene til å tenke begrepsmessig omkring en oppgave.
	Etterspørre begrunnelse	Lærer ber elevene forklare hvorfor noe fungerte eller å begrunne en matematisk idé, strategi, eller løsning.
	Etterspørre generalisering	Lærer ber elevene generalisere sin resonnering gjennom å formulere en regel, beskrive en generell prosess, eller å danne sammenhenger mellom ulike tilfeller.

2.4 Tidligere forskning på rammefaktorer som legger til rette for resonnering i matematikklasserommet

I forskningslitteraturen finner vi en rekke studier som har undersøkt hvilke faktorer som påvirker elevenes evne til å resonnere i matematikk (f.eks. Ball & Bass, 2003; Mata-Pereira & da Ponte, 2017; Mueller et al., 2014). Forskningslitteraturen viser at enkelte typer undervisning egner seg bedre enn andre for å fremme ferdigheter som matematisk resonnering (Drageset, 2014; Mercer & Sams, 2006). I dette kapittelet presenterer vi funn fra tidligere forskning om lærerens rolle når det gjelder å legge til rette for resonnering, undervisning og samtalemønstre som fremmer resonnering, og oppgavens betydning i arbeid med resonnering.

2.4.1 Lærerens rolle i å legge til rette for resonnering

Lærerens støtte er viktig for utvikling av elevenes matematiske resonnering. Lærerens rolle i samtaler og diskusjoner omhandler å støtte opp under elevenes forståelse; lærer må velge passende oppgaver, avgjøre når og hvordan man skal fremme elevenes tenking, og bestemme når man skal la elevene engasjere seg i produktivt strev (Ellis et al., 2019). Mueller et al. (2014) har studert hvordan ulike lærerhandlinger støtter elevers arbeid med matematisk resonnering i grunnskolen. En *lærerhandling* blir her definert som en målrettet, verbal interaksjon gjort av læreren etter å ha presentert en oppgave. I studien trekkes det frem tre hovedkategorier med handlinger lærere utførte for å støtte elevenes matematiske resonnering; a) handlinger som gjorde elevers ideer offentlige, b) handlinger som fikk frem elevenes utvidede ideer, og c) handlinger som oppfordret til forklaringer og begrunnelser. Mueller et al. (2014) konkluderte med at lærerhandlingene var kritiske for å etablere en sosial norm for lytting, deling, og promotering av elevers begrunnelser kategorisert av ulike former for resonnering. En forutsetning å undersøke lærerhandlingene var at elevene fikk tilstrekkelig med tid til å utforske og bygge forståelse, samt muligheter til å dele sine individuelle måter å tenke på gjennom diskusjon i gruppe eller i helkalssesamtale.

I likhet med Mueller et al. (2014) peker Ball & Bass (2003) sine funn på at det er hensiktsmessig å gjøre elevers matematiske ideer offentlig. Å løfte de individuelle ideene opp til klassefellesskapet forutsetter at lærer gjør elevene oppmerksomme på og engasjerte i andres ideer. Ifølge Ball og Bass (2003) kan også målrettede lærerhandlinger lede eleven fra empiriske argument mot et generisk eksempel. Dette kan eksempelvis gjøres gjennom spørsmål som “er det noen andre løsninger?” eller “hvordan vet vi at denne løsningen stemmer?”. Hensikten er å få elevene bevisst på at selv om de har funnet løsningen til et problem er ikke dette tilstrekkelig. De må komme med en form for gyldig argumentasjon. Mata-Pereira & da Ponte (2017) fremhever at det å stille spørsmål anses som et viktig lærergrep, men presiserer at ett enkelt spørsmål ofte ikke er nok til å avdekke detaljer om elevenes resonneringsprosesser. Derfor krever det at lærer gjør en eller flere handlinger som følger opp elevenes ideer, som eksempelvis å be de utdype eller å be om deltakelse fra andre elever. Flores (2006) peker på viktigheten av at lærere ber elevene begrunne svarene sine både når de er riktige og ikke. Han mener at elever trenger å bli vant til å bli bedt om å forklare sine egne svar, slik at de blir i stand til å kunne ha et kritisk blikk på nytt matematikkinnhold (Flores, 2006).

I en litteraturstudie fra Kyricou og Issit (2008) viser de til at lærerens spørsmål i helklassesamtaler bør utfordre eleven til å begrunne og forklare sine løsninger. Wood (1994) fremhever at lærerens innspill bør ha til hensikt å klargjøre tenkningen bak og gjøre de aspektene som har størst betydning for forståelse eksplisitte. Mercer og Howe (2012) argumenterer for at læreren skal holde tilbake forklaringer til flere elever har blitt hørt, slik at elevene får nok tid til å komme med reflekterte svar på spørsmålene som blir stilt. Yackel (2002) peker på flere spesifikke lærerhandlinger som kan støtte elevene, blant annet at lærer gir direkte argumenterende støtte eller at elever får støtte fra medelever. Handlinger og verktøy, inkludert det å ta i bruk notasjon så vel som dialog, vil også fungere i arbeidet med å støtte elevenes argumenter. I Yackel (2002) sin studie ble det testet ut at lærer ikke deltok i helklassesamtalen i håp om at elevene kunne føre en diskusjon på egen hånd. Dette fungerte ikke slik læreren hadde tenkt, noe som bekreftet lærerens viktige rolle. Læreren er den eneste personen i klassen som kan legge til rette for utviklingen av en tilfredsstillende kollektiv argumentasjon. I forskningen til Ing et al. (2015) fant de at jo oftere lærere støttet elevenes deltakelse, jo høyere var elevenes deltakelsesnivå. Chapin et al. (2013) viser også til forskningsfunn knyttet til resonnering. De fant ut at ved å snakke om resonneringen som er involvert i et problem, så vil det hjelpe elevene med å generalisere oppgavetyper og løsningsstrategier og anvende de i nye situasjoner (Chapin et al., 2013).

2.4.2 Undervisning og samtalemønstre som fremmer resonnering

Både teori (Vygotsky, 1987) og forskning (Mercer & Sams, 2006) peker på at språk og sosial interaksjon har betydning i læring av matematikk. Både problemløsning og resonnering er funksjoner som starter i det sosiale og som er mediert av redskaper, hvor språket er det mest sentrale for utvikling og deling av kunnskap mellom mennesker (Dahl et al., 2020). I takt med at samtaler i matematikkundervisning fikk større innpass i norske læreplaner gjennom fagfornyelsen i 2020, har det blitt et større fokus på den muntlige dialogen og på hvordan lærere kan lede produktive samtaler der elevene er deltakende (Dahl et al., 2020).

Chapin et al. (2013) har i sin forskning identifisert fire spesifikke steg eller mål som er essensielle for å skape de forholdene som må ligge til rette for en produktiv samtale. Disse stegene er å hjelpe hver enkelt elev med å klargjøre og dele sine egne tanker, å hjelpe elevene med å lytte til hverandres bidrag, å hjelpe elevene med å utdype deres egen resonnering, og å hjelpe elevene i å engasjere seg i andres resonnementer (Chapin et al., 2013, s. 10, vår oversettelse). Å forbedre kvaliteten i elevenes resonnering i skolen har vært et gjennomgående tema i matematikkdidaktisk forskning de siste tiårene. I 1999 utformet Mercer et al. et undervisningsprogram som skulle utvikle elevenes språklige bevissthet og fremme visse "grunnregler" for hvordan man skulle snakke sammen. Her tok de i bruk begrepet *utforskende samtaler.* Et av hovedfunnene var at slike samtaler hjelper elevene til å jobbe mer effektivt med problemløsningsoppgaver (Mercer et al., 1999). Utforskende samtaler blir definert som en samtale hvor deltakerne engasjerer seg kritisk men konstruktivt til hverandres ideer, hvor alternative hypoteser må begrunnes. I slike samtaler blir kunnskapen skapt gjennom et felles ansvar hvor resonneringen kommer tydelig frem (Mercer et al., 1999). Et begrep som er nært knyttet til utforskende samtaler er dialogisk undervisning. *Dialogisk undervisning* er et begrep som kan assosieres med Alexander (2017) sin forskning på interaksjonen i klasserommet. Mange av de anbefalingene som er gitt vedrørende den produktive dialogen i klasserommet, oppsummeres i Alexander sine fem nøkkelprinsipper. Prinsippene utnytter kraften som dialogen har til å utvikle elevers tenkning, læring og forståelse, og beskriver både formen og innholdet i det han betegner seg dialogisk undervisning: kollektiv (samtalepartnerne er likeverdige), gjensidig, (samtalepartnerne lytter til hverandre, deler og vurderer hverandres ideer) støttende (samtalepartnerne kommer sammen frem til en felles forståelse i et trygt miljø), kumulativ (samtalepartnerne bygger videre på egne og hverandres ideer) og målrettet (samtalen har bestemte læringsmål) (Alexander, 2017, her i Dahl et al., 2020, s. 164)

Studien av Wood et al. (2006) identifiserer fire klasseromskulturer, hvor en av kulturene benevnes som et diskuterende eller undersøkende klasserom. Denne kulturen har likhetstrekk med utforskende samtaler og dialogisk undervisning. Målet med å dele matematiske ideer er at de som lytter skal stille spørsmål for å skape en videre oppklaring eller forståelse (Wood et al., 2006). Funn fra studien viser at elevene får trening i å presentere begrunnelser og vurderinger, noe som kan hjelpe elevene med å utvikle robuste resonneringsferdigheter i matematikk (Wood et al., 2006). En viktig del av det å lede produktive matematiske samtaler er å være bevisst de samtalemønstrene som man benytter seg av. Chapin et al. (2013) foreslår å ta i bruk samtaletrekk (talk moves) i arbeidet mot å nå målene sine. Samtaletrekk refererer til strategiske måter å stille spørsmål på, og de inviterer til deltakelse i klasseromssamtaler. Drageset (2016) har funnet at dersom lærere ikke er bevisst på hvordan ulike samtaletrekk påvirker elevenes læring og tenkning, kan det redusere muligheten til å utvikle deres matematiske kompetanse. Dermed er lærerens evne til å lede matematiske samtaler en sentral del av lærerens undervisningskunnskap.

2.4.3 Oppgavens betydning i arbeid med resonnering

Flere studier konkluderer med at måten oppgaven er formulert på har betydning for hvorvidt elevene blir utfordret og stimulert til diskusjon (Mata-Pereira & da Ponte, 2017; Mueller et al., 2014). Mueller et al. (2014) kommer i sin studie med anbefalinger om vanskelighetsgrad, og fant at oppgavene ikke må være så vanskelige at elevene ikke engasjerer seg i å finne løsninger. De foreslår å ta i bruk oppgaver som aktiviserer elevene og som oppfordrer til samarbeid, noe som igjen vil muliggjøre utveksling av ideer. Studien til Mata-Pereira og da Ponte (2017) kommer med anbefalinger knyttet til hvilke spørsmål oppgaven bør inneholde; utforskende spørsmål, spørsmål som fører til generaliseringer, spørsmål som ber om begrunnelse for svar og løsningsprosesser og spørsmål som tillater en rekke ulike løsningsprosesser. Mueller et al. (2014) sine funn fremhever viktigheten av hvilke egenskaper oppgaven har for å fremme resonnering og argumentasjon, og Lin og Tsai (2013, her i Cervantes-Barraza et al., 2020) foreslår at oppgavedesignet er relatert til et matematisk bevis. Mueller et al. (2014) oppmuntrer til å ta i bruk utforskende, åpne oppgaver. De hevder at slike oppgaver åpner for flere ulike representasjoner, i tillegg til at de byr på forskjellige løsningsstrategier, noe som igjen er et godt grunnlag for å resonnere i diskusjon i klassen (Mueller et al., 2014).

2.5 Kombinatoriske problem

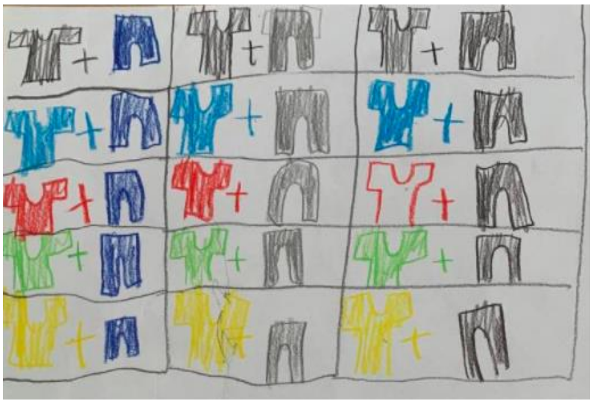
Det matematiske temaet elevene jobber med i denne studien er kombinatoriske problem. Ifølge Greer (1992) faller oppgaver basert på kombinatoriske problem inn under tankemodellen kartesiske produkt, som handler om antall kombinasjoner. Shin & Steffe (2009) skriver at kombinatoriske problem er godt egnet til å studere elevers utvikling av resonnering og bevis, til tross for at det viser seg at kombinatorisk resonnering har fått lite oppmerksomhet i forskningsfeltet. Piaget og Inhelder (1975) peker på at barns kombinatoriske resonnement er en grunnleggende matematisk idé, og baserer seg på resonnering rundt addisjon og multiplikasjon. De begynte sin forskning på barns arbeid med kombinatoriske problem allerede på 60-tallet (Piaget & Inhelder, 1969). Ifølge Piaget og Inhelder (1969), var problemer som handlet om permutasjon[3] (permutation) i et kombinatorisk problem, lite egnet for barn yngre enn åtte år. Likevel viser studien til English (1991) at en velegnet og meningsfull kontekst gjør det mulig for barn å jobbe effektivt med å finne alle permutasjonene i et kombinatorisk problem. I en senere studie av English (1996, s. 107) identifiserer hun fire prinsipper i kombinatorikk for at barn skulle utvikle en forståelse: 1) *prinsippet systematisk variasjon*; en ny kombinasjon vil oppstå hvis minst ett av elementene er systematisk endret, 2) *prinsippet kontinuitet* (constancy); en ny kombinasjon vil oppstå hvis minst ett av elementene forblir konstant, mens minst ett av de andre systematisk endres, 3) *prinsippet oppbrukt* (exhausted); et konstant element er oppbrukt når det ikke lenger genererer nye kombinasjoner når det andre elementet forandres, og 4) *prinsippet ferdigstilling* (completion); når alle de konstante elementene er brukt opp, er alle mulige kombinasjoner funnet. English (1991) understreker at en praktisk anvendelse av kombinatorikk kan være et godt grunnlag for problemløsning, og beskriver at den rike matematiske strukturen i kombinatorikk gjør det til et interessant og allsidig tema.

Rønning (2020) påpeker viktigheten av å finne en strukturert måte å håndtere de kombinasjonene man har gjennomgått, slik at man får produktet tydelig frem. English (1991) identifiserte seks strategier som barn benyttet i arbeid med kombinatoriske oppgaver. I 1996 videreutviklet English disse strategiene ved å benevne de som tre ulike faser: 1) *den uplanlagte fasen* (the random stage); fremgangsmåten er prøv-og-feil, og elementer blir tilfeldig valgt, på den måten at det ikke er noe form for system i utvelgelsesprosessen, 2) *overgangsfasen* (the transitional stage); elevene begynner å ta i bruk mønstre i deres dokumentasjon, men mønsteret er ikke bevart gjennom hele oppgaven, og 3) *odometerfasen* (the odometer stage); elevene bruker en organisert struktur for å velge ut kombinasjonene, hvor det ene elementet holdes fast mens de andre forandres systematisk (English, 1996, s. 95). Funn fra studien til English (1991) viser at den største utfordringen i arbeid med kombinatoriske problem er at slike oppgaver ikke indikerer når opptellingen er ferdig. Derfor er elevene nødt til å utvikle en

---

[3] Permutasjon i matematikk er en ordning av rekkefølgen på objekter eller symboler. For eksempel kan to elementer *a* og *b* ordnes på to måter, enten *ab* eller *ba*, mens tre elementer kan ordnes eller permuteres på seks måter: *abc*, *bac, cab, acb, bca og cba*. Disse forskjellige rekkefølgene (ordningene) kalles *permutasjoner* av de gitte symbolene (SNL, 2017).

stoppe-strategi. Dersom elevene skal være i stand til å utvikle en slik strategi, må elevene ifølge English (1991) være i odometerfasen. I denne fasen velges et element, som kombineres med alle de aktuelle elementene, før det skiftes til et nytt element. Strategien gjør det mulig å systematisk danne alle mulige kombinasjoner. Eksempelet viser hvordan en elev i odometerfasen systematisk løser et kombinatorisk problem, hvor oppgaven som ble gitt var å finne ut hvor mange ulike antrekk man kan få med fem t-skjorter og tre bukser.



Figur 2.1: Eksempel på løsningsstrategi i odometerfasen

Her ser vi at én farge (blå bukse) gjennomløper genserne til alle genserne er oppbrukt, før det skiftes til en ny farge (grå bukse). Det samme mønsteret er fulgt i hele problemløsningsprosessen, da alle kombinasjonene er fremstilt ved å holde fast et element, mens de andre elementene varieres. Vi ser også hvordan prosedyren systematisk gjentas til alle fargene er oppbrukt. I henhold til English (1991) sine fire prinsipper for at barn skal utvikle en forståelse for kombinatorikk, har eleven som er i odometerfasen kunnskap om alle prinsippene.

3 Metode

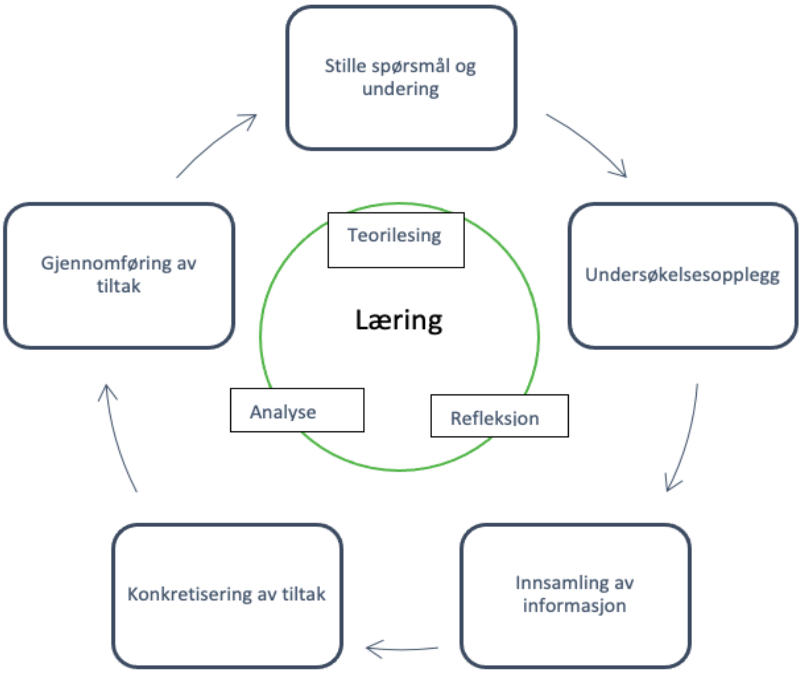
Gjennom en aksjonsforskningsprosess har vi i denne studien undersøkt hvordan en lærers pedagogiske grep i en helklassesamtale kan fungere som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering. For å finne svaret på dette har vi brukt en kvalitativ tilnærming, da vi studerer lærer og en elevgruppe i en konkret klasseromskontekst. I kvalitative metoder er intensjonen å forstå og beskrive hva spesifikke mennesker gjør og hvilken mening disse handlingene har (Postholm & Jacobsen, 2018). I dette kapittelet beskriver vi aksjonsforskning som metodisk tilnærming, og eksperimentelt casedesign som forskningsdesign. Videre beskriver vi utvalg og kontekst for vår studie, samt valg av undervisningsform og oppgaver. Deretter utdyper vi hvordan vi har brukt observasjon som datainnsamlingsmetode, og hvordan vi har analysert datamaterialet ved hjelp av rammeverkene til Ellis et al. (2019) og Jeannotte & Kieran (2017). Vi avslutter kapittelet med å gjøre rede for etiske vurderinger og forskningens troverdighet.

3.1 Aksjonsforskning som metode

Vi har valgt aksjonsforskning som metodisk tilnærming. McNiff (2013) beskriver dette som en helt spesiell type undersøkelsesopplegg, som skiller seg fra "vanlig" forskning. Hovedforskjellene kan deles i to: a) aksjonsforskeren er en *deltakende* part, sammen med de som utgjør enhetene i casen (eksempelvis ansatte eller elever) og b) aksjonsforskeren er en *aktiv* part i den forstand at han eller hun iverksetter endringer, og så studerer hva slags virkninger disse har. På denne måten opptrer aksjonsforskeren som en blanding mellom en endringsagent som iverksetter endring, og en forsker som måler virkningene av endringene (McNiff, 2013).

Aksjonsforskning beskrives som en kontinuerlig lærings- og utviklingsprosess hvor intensjonen er å endre eller utvikle en situasjon til noe bedre (Postholm & Jacobsen, 2011). Målet med vår aksjonsforskning er å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering, gjennom å endre den eksisterende undervisningspraksisen. Prosessen i aksjonsforskning starter med at man har et ønske om å utvikle den eksisterende praksisen med formål om å oppnå en idealsituasjon. I en slik prosess må man først identifisere hva som er den ideelle situasjonen. Ifølge Postholm og Jacobsen (2011) bør utgangspunktet for endrings- og utviklingsarbeidet i skolen være knyttet til målsettinger uttrykt i gjeldende læreplan. Vårt utgangspunkt for valg av tema i masteroppgaven er at dagens læreplan vektlegger resonnering som en sentral ferdighet elevene skal utvikle i matematikk. Under *fagets relevans og sentrale verdier* presiseres det at "matematikk skal bidra til at elevene utvikler et presist språk for resonnering …" (Utdanningsdirektoratet, 2020). Videre finner vi resonnering og argumentasjon som ett av flere kjerneelementer i matematikkfaget.

Vår idealsituasjon er basert på hva tidligere forskning sier om hvordan en lærer kan støtte og tilrettelegge for utviklingen av elevenes matematiske resonnering. En slik situasjon identifiseres ut ifra i hvor stor grad og på hvilket nivå elevene resonnerer, hvor idealet er at elevene er i stand til å argumentere gyldig for sine matematiske påstander. I arbeidet mot å nå idealsituasjonen må man studere og identifisere situasjonen på nåværende tidspunkt (Postholm & Jacobsen, 2011). Denne situasjonen blir utgangspunktet for endringsarbeidet. Ifølge Postholm og Jacobsen (2011) konkretiserer man tiltak som man tror har en ønsket effekt i veien mot å nå idealsituasjonen, ut ifra nåværende situasjon og den kunnskapen man har om fenomenet som skal utvikles. Tiltakene er basert på teoretisk, etablert kunnskap om ulike aspekter ved det som skal studeres. I vårt tilfelle er dette tidligere forskning på produktive samtaler i undervisningen, oppgavens betydning og lærerens rolle i utvikling av elevenes resonnering. Når tiltakene er utarbeidet gjennomfører man disse i praksis. Tiltakene vil jevnlig bli revidert på bakgrunn av analyse og refleksjon av undervisningen, og teori om fenomenet. På denne måten er aksjonslæring en kontinuerlig utviklingsprosess i samarbeid mellom forsker og lærer, i veien mot å nå idealsituasjonen, slik figur 3.1 illustrerer (Postholm & Jacobsen, 2011).



Figur 3.1: Aksjonslæringssirkelen (hentet fra Postholm & Jacobsen, 2011, s. 18)

Formålet med å bruke aksjonsforskning som metode er todelt. Det ene handler om å utvikle undervisningspraksisen mot idealsituasjonen. Det andre omhandler at vi får en ny innsikt gjennom å endre den eksisterende praksisen (Tiller, 2004). I vår studie får vi en ny innsikt om dynamikken i kommunikasjonen mellom lærer og elevene. Gjennom å analysere aksjonslæringsprosessen får vi kunnskap om hvordan lærerens pedagogiske grep kan fungere som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering i en helklassesamtale.

3.2 Forskningsdesign

Forskningsdesignet vårt kan beskrives som en eksperimentell casestudie fordi vi undersøker hva slags effekt eller konsekvenser et tiltak har (Postholm & Jacobsen, 2018). Fenomenet som skal studeres er samspillet mellom lærer og elev i utviklingen av matematisk resonnering. Postholm og Jacobsen (2018) beskriver tiltak som en årsak (X) som skaper en effekt (Y), og i praksis forventes det å se en forskjell i tilstand før og etter tiltaket. Tanken bak denne studien er å sammenligne tilstanden før og etter

gjennomføringen av aksjonene, for å finne ut om en endring har funnet sted. Vi har undersøkt hvordan lærerens pedagogiske grep i en helklassesamtale fungerer som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering. For å dokumentere denne endringen har vi målt effekten av tiltakene ved å sammenligne dynamikken i kommunikasjonen mellom læreren og elevene før og etter intervensjonen.
Ifølge Postholm og Jacobsen (2018) er det sjeldent at masterstudenter selv får mulighet til å utføre eksperimenter i en klasse. I mange tilfeller kan forskeren oppleve å bli bedt om å gjennomføre en studie av hvorvidt et tiltak har fungert, men uten mulighet for å gjennomføre en kartlegging av tilstanden før tiltaket. Det som er unikt med vår masterstudie er at vi som forskere *har* kartlagt tilstanden før iverksettingen av tiltak. I samspill med lærer har vi diskutert oss frem til hva vi sammen ønsker å utvikle. Videre har vi vært til stede gjennom hele prosessen, og gjennom et tett samarbeid med praksislærer har vi som forskere hatt kontroll over tiltakene som ble iverksatt. Det betyr at vi i fellesskap har valgt hvilke oppgaver elevene skal jobbe med, strukturen i undervisningen, sammensetning av elevpar og spesifikke lærerhandlinger som skal utføres. I studien er det lærer som iverksetter tiltak og gjennomfører undervisningen som vi sammen har planlagt. Dette handler om å gjøre konteksten så naturlig som mulig. Videre analyserer vi situasjonene i samspill med lærer, før vi sammen konkretiserer og reviderer tiltakene. På denne måten har vi kontroll på hvordan tilstanden var før tiltakene ble satt inn, hva læreren gjør underveis, og til slutt et grunnlag for å vurdere om en endring har funnet sted.

3.3 Beskrivelse av utvalg og kontekst

Utvalget og konteksten for vår forskning er valgt på bakgrunn av at skolen og klassens matematikklærer er deltakere i LAB-TEd-prosjektet. Vi har fulgt den samme elevgruppen over tre år, fra elevene startet i 1. klasse. Her har vi gjennomført praksisperioder i tre skoleår og gjennomført FoU-oppgaven vår tredje studieår. Det er disse 16 tredjeklassingene og matematikklæreren deres som er utvalget for studien vår. Utvalget vårt er det Bryman (2016) benevner som et ikke-sannsynlighetsutvalg. Det betyr at utvalget ikke er valgt tilfeldig, og kan dermed ikke brukes for å generalisere for hele populasjonen. Likevel er dette en praktisk og mye brukt utvelgelse i kvalitativ forskning. I vårt tilfelle har vi trukket ut de enhetene som vi ønsker å ha med i undersøkelsen. Ifølge Bryman (2016) kalles dette for et målrettet eller skjønnsmessig utvalg.

Læreren har tidligere deltatt på kurs om utforskende undervisning og bruker dette aktivt i egen praksis. Læreren er dermed godt kvalifisert til å gjennomføre produktive matematiske samtaler. Elevgruppen har fra de begynte i 1. klasse hatt en utforskende og samtaleorientert matematikkundervisning. På denne måten har elevene de samme forutsetningene som deltakere i prosjektet. Det som er spesielt med deltakelse i LAB-TEd, er at vi har et tett samarbeid med vår praksislærer. Både temaet og formålet med studien er et resultat av diskusjoner mellom oss studenter, praksislærer og veiledere fra NTNU, i samsvar med Fagfornyelsen 2020 og skolens behov.

3.4 Valg av undervisningsform og oppgavetype

En metodisk konsekvens av valget kommognisjon som overordnet teoretisk rammeverk er at det er diskursen, det matematiske fellesskapet, som undersøkes (Sfard, 2007). Mer spesifikt undersøker vi utforskende rutiner i vår studie. Vi undersøker altså ikke den enkelte elevs utvikling, men fellesskapets utvikling av matematisk resonnering. I den sammenheng anså vi helklassessamtaler som en egnet undervisningsform. Ved bruk av helklassesamtaler blir det mulig å analysere hvordan de metadiskursive reglene styrer rutinene som oppstår i interaksjonen mellom lærer og hele elevgruppen. I tillegg får vi mulighet til å analysere hvordan lærerens handlinger påvirker elevgruppen sin resonnering i diskursen. I arbeidet med å utforme oppgaver som ga rom for resonnering, tok vi utgangspunkt i problemløsningsoppgaver. Palmér (2016) definerer en matematisk problemløsningsoppgave som en oppgave som skal løses der metoden eller metodene for å løse oppgaven ikke er kjent på forhånd. Sammen med flere anerkjente forskere hevder hun at problemløsningsevnen til barn er undervurdert, og at de får til mer enn vi tror dersom vi tilrettelegger på en god måte (Carpenter et al., 1993; Palmér, 2016). Dette er innstillingen vi går inn med i vår forskning. I kapittel 4.1 presenterer vi valg av det matematiske temaet og utforming av oppgavene gitt i studien.

3.5 Metode for datainnsamling

I vår forskning bruker vi kvalitative datainnsamlingsmetoder for å innhente empiri, for å dokumentere om de iverksatte tiltakene har ført aksjonsforskningen i målretningen. Denne tilnærmingen er mer åpen enn kvantitative metoder, i form av at man får en større bredde og flere nyanser i empirien (Postholm & Jacobsen, 2018). Enheten for analyse av denne studien er elevenes og lærerens felles diskurs slik den praktiseres i arbeid med en kombinatorikk-oppgave i en helklassesamtale. Metode for datainnsamling ble dermed observasjon av den kommunikasjonen som oppstod mellom lærer og elevene i undervisningen.

Postholm og Jacobsen (2018) beskriver at observasjon blir sett på som den mest fundamentale måten å samle inn data på, og at observasjonene gjennomføres i naturlige situasjoner slik som de utspiller seg. Observasjonene fra helklassesamtalene ble dokumentert ved hjelp av video- og lydopptak, samt løpende notater. Videoopptak gir mulighet for å gjengi korrekt det lærer og elever sier og gjør. I tillegg får vi mulighet til å studere ansiktsuttrykk og gestikulering, som bidrar til å forstå hva deltakerne formidler. Vi får også observert hvilke visuelle mediatorer lærer benytter seg av. Dette er ulike redskaper som blir brukt for å representere matematikken når det kommuniseres i diskursen (Sfard, 2007). Dette kan eksempelvis være hvordan lærer bruker tavla for å representere elevenes løsningsstrategier. For at transkripsjonen skulle bli mest mulig korrekt, valgte vi å supplere observasjonen med lydopptak som en sikkerhet. Notatene vi skrev underveis bestod av umiddelbare tanker og refleksjoner om det som skjedde i helklassesamtalen. Vi valgte å transkribere datamaterialet umiddelbart, for deretter å reflektere over hva som hadde skjedd. Videre har vi observert elevene i arbeid med oppgavene. Dette ble dokumentert ved bruk av løpende notater. Våre samlede observasjoner ble utgangspunktet for de aksjonene vi planla og gjennomførte.

3.5.1 Datainnsamlingsprosessen

Datainnsamlingen har foregått over fem uker i perioden oktober-november 2021. Datamaterialet er hentet fra tre økter med matematikkundervisning. Hver økt varte i 45 minutter. Alle øktene var strukturert på samme måte. Oppstarten foregikk felles ved at alle elevene i klassen satt på benker foran en Smartboard, hvor lærer presenterte oppgaven. Deretter delte læreren elevene inn i par. Parene jobbet deretter med oppgaven, før de avslutningsvis ble samlet for en matematisk helklassesamtale. I arbeidet med oppgaven fikk elevene utdelt blyanter og ark. De samme elevparene ble brukt gjennom hele datainnsamlingsperioden. For å dokumentere det arbeidet elevene gjorde, innhentet vi elevarbeidet i etterkant av undervisningen. Elevarbeidet bidro til å gi mening til observasjonene i helklassesamtalene. Datamaterialet består av de delene av undervisningen hvor klassen er samlet i lyttekroken. Den ene sekvensen er i oppstarten av undervisningen der oppgaven blir presentert, og varte i gjennomsnitt 5 minutter. Den andre sekvensen utgjør den siste delen av undervisningen hvor den matematiske samtalen finner sted, og varte i gjennomsnitt 10 minutter.

Når elevene blir observert er kameraet plassert bak elevene slik at det fanger opp læreren og tavla, samt ryggene til elevene. Elevene som presenterte sin løsning, fikk komme frem til læreren. På denne måten ble både elevene og arbeidet deres fanget opp på kamera. Ved at vi ser både lærer og elev forfra i denne situasjonen, får vi også fanget opp kroppsspråket deres på kamera. Lydopptakeren er plassert foran i klasserommet. I observasjonen har vi inntatt rollen som fullstendig observatør, hvor vi som forskere ikke er en del av prosessene som observeres (Postholm & Jacobsen, 2018). For å redusere vår påvirkning og at elevene i minst mulig grad skulle henvende seg til oss, valgte vi å plassere oss bak i klasserommet under observasjon av undervisningen.

Vårt samlede datamateriale er hentet fra tre undervisningsøkter og består av seks videoopptak, ca. 20 elevarbeid fra undervisningen, i tillegg til våre løpende notater og refleksjoner. Elevarbeidet viser hvordan elevene har løst oppgaven. Videre bidro de egenproduserte representasjonene til å gi mening til transkripsjonene, da elevene brukte arbeidet sitt som støtte når de skulle kommunisere sin løsning. Tre av videoopptakene er fra presentasjon av oppgaven, og de tre resterende er fra den matematiske samtalen. De seks videoopptakene utgjorde totalt 11 A4-sider med transkripsjon.

3.6 Metode for analyse

Kvalitative analysemetoder har til hensikt å sortere det innsamlede datamaterialet på en systematisk måte for å gjøre det forståelig (Postholm & Jacobsen, 2018). Formålet med analysen er å identifisere kommunikasjonsmønstre som oppstår i helklassesamtalen som fremmer elevenes matematiske resonnering. For å analysere vårt materiale har vi brukt tematisk analyse. Analysen kan benevnes som en kombinasjon av deduktiv og induktiv tilnærming. Den kan regnes som deduktiv i den forstand at vi tar utgangspunkt i et ferdig utviklet rammeverk, og induktiv fordi vi er åpne for å revidere de forhåndsbestemte kodene (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.6.1 Tematisk analyse

Tematisk analyse er en metode for å identifisere, analysere, organisere, beskrive og rapportere mønstre identifisert i et datamateriale (Braun & Clarke, 2006; Nowell et al., 2017). Analysemetoden beskrives som en fleksibel tilnærming som kan omformes ut ifra studiens behov, som igjen gir en rik og detaljert beskrivelse av data (Braun & Clarke, 2006; King, 2004). I tillegg er metoden nyttig for å oppsummere nøkkeltrekk ved et stort datasett, da det krever at forskeren har en velstrukturert tilnærming til håndtering av data (King, 2004). Tematisk analyse er bygd opp av seks sirkulære faser. Det betyr at man må revurdere, justere og repetere samme fase gjentatte ganger (Braun & Clarke, 2006). Braun & Clarke (2006) bruker begrepet *theme,* som vi har valgt å oversette til *kategori.* Begrepene til Braun & Clarke (2006) presenteres i tabell 3.1.

Tabell 3.1: Faser i tematisk analyse, hentet fra Braun og Clarke (2006, s. 87, vår oversettelse)

Fase	**Beskrivelse av prosessen**
Fase 1: Bli kjent med datamaterialet	Transkribere data, lese gjennom datamaterialet gjentatte ganger, og notere ned øyeblikkelige idéer
Fase 2: Generere de første kodene	Kode interessante kjennetegn i det samlede datamaterialet på en systematisk måte, og sortere data som er relevant for hver kode
Fase 3: Lete etter kategori	Sortere kodene i potensielle kategorier, og samle all data som er relevant for hver kategori
Fase 4: Kritisk gjennomgang av kategorier	Undersøke om kategoriene egner seg for det totale, kodede datamaterialet og deretter utforme en oversikt over kategoriene brukt i analysen
Fase 5: Definere og navngi kodene	En kontinuerlig analyse for å utforme tydelige og spesifikke definisjoner og navn for hver kategori
Fase 6: Produsere en rapport	Produsere en rapport med eksempler fra datamaterialet som tydeliggjør og forklarer funn i hver kategori.

I vår studie analyserer vi hvordan lærerens pedagogiske grep kan fungere som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering. Vi studerer dermed både lærerens handlinger og elevenes resonnering. I den første fasen av analyseprosessen gjennomgikk vi materialet fra hver enkelt datainnsamlingsprosess etterhvert som det ble innhentet. Eksempelvis gjennomgikk vi materialet fra første datainnsamling samme dag som observasjonen foregikk. I dette arbeidet startet vi med å transkribere videoopptakene av helklassesamtalene, i tillegg til at vi studerte elevarbeidet. Øyeblikkelige ideer og refleksjoner ble skrevet ned fortløpende. Notatene og transkripsjonene av hver analyse ble utgangspunkt for det videre arbeidet i aksjonsforskningsprosessen, og grunnlaget for å iverksette tiltak som hadde til hensikt å føre oss i målretningen. Da datainnsamlingsprosessen var avsluttet, gjentok vi den første fasen ved å gå gjennom det totale datamaterialet. I denne prosessen begynte vi å se på sammenhenger og interessante kjennetegn i datamaterialet, som førte oss videre til fase to. Her genererte vi de første overordnede kodene som omhandlet lærerens grep og elevenes resonnering. På dette tidspunktet begynte vi å se et mønster i kommunikasjonen i helklassesamtalen. I det videre analysearbeidet tok vi utgangspunkt i forhåndsdefinerte koder med begreper fra rammeverkene til Jeannotte & Kieran (2017) og Ellis et al. (2019). Dette dannet grunnlaget for potensielle kategorier i analysen.

3.6.2 Analyse av elevenes matematiske resonnering

I arbeidet med å analysere elevenes matematiske resonnering tok vi utgangspunkt i rammeverket til Jeannotte & Kieran (2017), presentert i tabell 3.2.

Tabell 3.2: Prosesser i matematiske resonnering, som beskrevet av Jeannotte & Kieran (2017, vår oversettelse)

Matematiske resonneringsprosesser		
Prosesser som innebærer leting etter likheter og forskjeller	*Prosesser relatert til validering*	*Eksemplifisering*
Generalisere	Begrunne	Eksempler som støtter prosesser for leting etter likheter og forskjeller
Formulere en hypotese (conjecture)	Formulere bevis	
Identifisere et mønster	Formulere et formelt bevis	Eksempler som støtter prosesser for validering
Sammenligne		
Klassifisere		

Den første hovedkategorien *prosesser som innebærer leting etter likheter og forskjeller* ser vi på som matematiske resonneringsprosesser som foregår i elevenes arbeid med problemløsningsoppgaver. Den andre hovedkategorien *prosesser relatert til validering* anser vi som resonneringsprosesser knyttet til hvordan elevene validerer sine narrativer i diskursen. På bakgrunn av at vi studerer helklassesamtaler som finner sted etter at elevene har arbeidet med et kombinatorisk problem, benytter vi kun kategorien hvor elevene forsøker å validere sine narrativer. I denne kategorien er det tre prosesser; begrunne, formulere bevis og formulere formelt bevis. Formelle bevis er kun relevante for disiplinfaget matematikk og blir dermed ikke benyttet som kode. Tidlig i analysearbeidet opplevde vi at kategorien *begrunne* var mest fremtredende. Ifølge Cohen et al. (2018) er det en fare for å utelate viktige data som ikke passer inn i en av de forhåndsdefinerte kodene. For å sørge for at viktig data ikke ble utelatt anså vi det som nødvendig å utvide kategorien begrunne.

Videre har vi valgt å implementere teori om kombinatoriske problem i det nye kodehierarkiet. Vi ser prosesser relatert til validering i sammenheng med de tre fasene i kombinatorikk, utarbeidet av English (1996). Vi anser argumentet sin grad av sofistikerthet som et resultat av elevenes forståelse for kombinatorikk. Dette er bakgrunnen for hvordan vi har videreutviklet kodehierarkiet til valideringsprosessen i matematisk resonnering, med utgangspunkt i Jeannotte & Kieran (2017). Kodene i det nye hierarkiet oppstod mens vi analyserte de ulike elevutsagnene, samtidig som vi studerte elevenes egenproduserte representasjoner. Kodene ble revidert gjentatte ganger slik at de skulle bli så presise som mulig. Det endelige kodehierarkiet dannet grunnlaget for å studere hvordan elevenes prosesser relatert til validering utviklet seg gjennom aksjonsforskningsprosessen. Et utvidet kodehierarki med valideringsprosesser fra Jeannotte & Kieran (2017) presenteres i tabell 3.3.

Tabell 3.3: Utvidet kodehierarki basert på Jeannotte & Kieran (2017) og English (1996)

Kategori	**Prosesser relatert til validering**	**Definisjon**	**Faser i kombinatorikk**	**Eksempel på bruk av kode**
Begrunne	Eleven presenterer et løsningsforslag uten systematikk	Eleven ramser opp alle kombinasjonene i vilkårlig rekkefølge	*Den uplanlagte fasen*: Fremgangsmåten er prøv-og-feil, og elementer blir tilfeldig valgt, på den måten at det ikke er noe form for system i utvelgelsesprosessen	*Vi tok en der og seks i det andre, også fire i det ene buret og tre i det andre, også fem i det ene buret og to i det andre, også bare sju i det ene.*
	Argument som bidrar til å øke narrativets sannhetsverdi	Eleven begrunner narrativ for å overbevise diskursen om at narrativet er sannsynlig med økende grad av systematikk	*Overgangsfasen*: Elevene begynner å ta i bruk mønstre i deres dokumentasjon, men mønsteret er ikke bevart gjennom hele oppgaven.	*Jeg startet med å lage denne skriften for å vite hva jeg hadde. Og så lagde jeg opp disse her fargene, også laget jeg tellestreker for å holde tellinga.*
Formulere bevis	Formulere et bevis tilpasset aldersgruppen	Elevens resonnement er deduktivt, bygger på definisjoner og resultater som er sanne, og er representert på en hensiktsmessig måte, samtidig som det tilpasset elevgruppen	*Odometerfasen:* Elevene bruker en organisert struktur for å velge ut kombinasjonene, hvor det ene elementet holdes fast mens de andre forandres systematisk.	*Først så tegnet vi opp alle klærne. Og så fargela vi, og så tok vi alle genserne til en bukse, og det ble fem. Vi tok streker fra den første buksa til alle genserne, også skrev vi tallet. Også gjorde vi det samme bare uten å tegne strekene, og da ble det 15.*

Kodene er utarbeidet ved at det laveste nivået av prosesser relatert til validering sammen med den første fasen i kombinatorikk er presentert først. Deretter øker argumentasjonsformen i takt med en økende grad av systematikk, mot å formulere et bevis og odometerfasen. I modellen til Jeannotte & Kieran (2017) er eksemplifisering en kategori som støtter de to andre hovedkategoriene. I vår studie er eksemplifisering elevenes egenproduserte representasjoner, som er en del av elevenes begrunnelse og formulering av bevis. Vi har derfor valgt å ikke forholde oss til dette som en egen kategori, men som en del av valideringsprosessen. I de tilfeller hvor elevene ikke forsøker å validere sitt narrativ i det kombinatoriske problemet, har vi valgt å ikke kode dette. Eksempler på slike elevutsagn kan være “det var en og seks” (her presenterer eleven kun en kombinasjon i arbeid med et kombinatorisk problem) eller “det har jeg bare i hodet” (her presenterer eleven et narrativ som ikke valideres).

3.6.3 Analyse av lærerens handlinger

Vi brukte rammeverket til Ellis et al. (2019) til å analysere lærerens grep i samtalen, hvor hver kode er nærmere beskrevet i teorien. Rammeverket har både overordnede kategorier og spesifikke koder i hver kategori. På denne måten rommer rammeverket alle aspektene for hvordan læreren utvider eller stopper elevenes resonnering. Kodehierarki med begrep fra Ellis et al. (2019) presenteres i tabell 3.4.

Tabell 3.4: Kodehierarki med begrep fra Ellis et al. (2019, s. 117, vår oversettelse)

Lokke frem elevenes resonnering		**Respondere på elevenes resonnering**	
Lavt potensial ←→ Høyt potensial		*Lavt potensial ←→ Høyt potensial*	
Lokke frem et svar	Lokke frem ideer	Å rette elevens feil	Oppmuntre til å rette sine feil
Lokke frem fakta eller prosedyrer	Lokke frem forståelse	Repetere elevens utsagn	Representere på en ny måte
Etterspørre en oppklaring	Etterspørre en forklaring	Oppmuntre elevene til å repetere hverandres utsagn	
Å finne ut av elevens resonnement		Validere et korrekt svar	
Undersøke forståelse			
Fremme elevenes resonnering		**Utvide elevenes resonnering**	
Lavt potensial ←→ Høyt potensial		*Lavt potensial ←→ Høyt potensial*	
Fokusere på et bestemt aspekt	Tilby veiledning	Oppmuntre til evaluering	Oppmuntre til refleksjon
Å bli ledet	Oppmuntre til å ta i bruk flere løsningsstrategier	Etterspørre nøyaktighet	Oppmuntre til resonnering
Bryte ned oppgaven (topaze effect)	Bygge videre på elevenes bidrag	Bryte ned begrunnelser	Etterspørre begrunnelse

		(topaze for justification)	
Gi generell informasjon	Gi alternative løsningsstrategier		Etterspørre generalisering

Ifølge Ellis et al. (2019) er det ikke alltid tilstrekkelig å se på strukturen i lærerens utsagn. I enkelte tilfeller vil det være aktuelt å se på hvilken funksjon grepet har hatt i samtalen, uavhengig av hvilken intensjon læreren har hatt. I de fleste tilfeller i vår studie samsvarte den intensjonen læreren hadde med et grep, med den funksjonen grepet hadde i dialogen med elevene. Likevel var det enkelte ganger lærergrepet fikk en annen funksjon enn det lærer hadde sett for seg. Dette skjedde spesielt i tilfeller hvor lærerens intensjon var å utvide elevenes resonnering, men grepet fungerte som *å bryte ned begrunnelser* fordi resultatet av lærergrepet ble at lærer stoppet elevenes resonnering. Ellis et al (2019, s. 123) definerer dette lærergrepet på følgende måte: lærer innleder med å be om begrunnelser, men forenkler spørsmålet ved å gi en serie av ledende spørsmål slik at begrunnelsens struktur blir avslørt. Vi har valgt å kategorisere alle lærergrepene ut ifra den funksjonen det fikk i dialogen. Dermed har vi valgt å kode alle lærergrep som hemmer eller stopper elevenes resonnering som å bryte ned begrunnelser. Et eksempel på en sekvens fra dialogen som ble kodet på denne måten ser slik ut:

> Lærer: Ja du kan vise frem tegningen til slutt. Du hadde tegnet ganske sånn oversiktlig med aper som fordeler som forskjellig. Så du hadde laget stykkene på siden her og tatt de i en egen sånn greie her. Fant du og 6?
> Elev: Ja

Her ser vi et eksempel på hvordan lærer avslører elevenes begrunnelse, før eleven selv får mulighet til å presentere sin matematiske resonnering. Gjennom at lærer avslører hva eleven har gjort for å løse oppgaven og avslutter med å stille et ja/nei-spørsmål, blir funksjonen av grepet at det stopper elevens resonnering.

3.6.4 Analyse av rutiner i diskursen

I vår studie har vi analysert utforskende rutiner, som har som mål å utvikle og godkjenne nye narrativer (Sfard, 2008). Vi har identifisert utforskende rutiner ved å se på hvilke regler på metanivå som er gjeldende når et narrativ blir presentert i diskursen, inkludert hvilke regler som avgjør hvorvidt narrativet blir akseptert. Dette gjør vi ved å først identifisere *når* narrativet blir presentert (anvendbarhetsbetingelser), på hvilken måte narrativet valideres (prosedyre), og til slutt hva som blir ansett som overbevisende nok til at narrativet aksepteres (avslutningsbetingelser). Et eksempel på når vi kan se at det er enighet i diskursen i at narrativet skal aksepteres, er når lærer responderer "ja, det var lurt". Ved å sammenholde analysen av elevenes matematiske resonnering med analysen av lærergrepene, har vi identifisert gjentakende, utforskende rutiner. Videre identifiserte vi hvilke regler på metanivå som oppstod når et narrativ skulle valideres i diskursen. Vi har gjennomført en slik analyse på de tre delene av aksjonen, noe som dannet grunnlaget for å studere om det har skjedd en endring i reglene på metanivå i løpet av aksjonsforskningsprosessen.

3.7 Forskningsetikk og behandling av personopplysninger

I denne studien har vi forholdt oss til forskningsetiske retningslinjer gitt av den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2021). Vi har tatt spesielt hensyn til at informantene er under myndighetsalder, og har tydelig informert om at deltakelse i prosjektet er frivillig. Foreldrene til elevene fikk utdelt et informasjonsskriv slik at de fikk mulighet til å vurdere om de ønsket at sitt barn skulle delta i forskningsprosjektet. I dette skrivet ble foreldrene informert om formålet med studien, hva det innebærer å delta, behandling av personopplysninger og rettigheter. I tillegg oppga vi vår kontaktinformasjon dersom de ønsket mer utdypende informasjon om studien. Informert samtykke er en av Diener & Crandall (1978, her i Bryman, 2016, s. 125) sine fire etiske prinsipper som det er viktig å ivareta i en studie. Samtykkeskjemaet ble levert til foreldrene, sammen med informasjonsskrivet (se vedlegg). Et tiltak for å sikre at elevene deltok frivillig i studien, var at informert samtykke skulle underskrives av både foresatte og elevene selv, samt at elevene selv skulle levere tilbake skjemaet. I tillegg har vi presisert at deltakelse i studien ikke involverer noe ulempe for elevene. Dette ble sikret ved at vi planla en undervisningsøkt i uka gjennom hele datainnsamlingsperioden, som alle lærerne på trinnet skulle gjennomføre med sin klasse. Dermed jobbet alle elevene med de samme oppgavene på dette tidspunktet, uavhengig om de var deltakere i studien eller ikke. Vi valgte å legge den planlagte undervisningsøkta på samme tidspunkt hver uke. Dette utgjorde 45 minutter av elevene sin skoleuke. I denne økta jobber elevene normalt sett med problemløsning og dialogisk undervisning. På denne måten sørget vi for at elevene fortsatt fikk forutsigbarhet i skolehverdagen sin.

Både videoopptak og lydopptak regnes som personopplysninger. Derfor er prosjektet meldt til NSD - Norsk senter for forskningsdata. Meldeskjemaet med referansenummer 865185 ble godkjent 16.08.21. 1. januar 2022 ble NSD en del av Sikt - Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, som har til hensikt å utvikle, anskaffe og levere tjenester til utdanning og forskning. Personvernet til elevene har blitt ivaretatt ved at alle elevene er anonymisert, og de har fått fiktive navn i transkripsjonene. NTNU sine retningslinjer tillater ikke lagring av personopplysninger på private enheter. Derfor har vi benyttet oss av opptaksutstyr som er eid av NTNU. For å oppfylle kravet for lagringssikkerhet har vi brukt en kryptert minnepinne til lagring av lyd- og videoopptak. Lydopptak, videoopptak og skriftlig arbeid ble slettet i etterkant av innlevering av masteroppgaven, i henhold til NSD sine retningslinjer.

3.8 Studiens troverdighet

For å beskrive forskningens gyldighet i kvalitativ forskning, foreslår Lincoln og Guba (1985) å bruke begrepet troverdighet fremfor reliabilitet og validitet. Troverdighet består av fire kriterier: kredibilitet (intern validitet), overførbarhet (ekstern validitet), pålitelighet (kan knyttes til reliabilitet) og bekreftbarhet (kan knyttes til objektivitet).

Kredibilitet er studiens interne validitet, og handler om i hvor stor grad vi kan påstå at studien samsvarer med den virkelige verden og om resultatet er gyldig for et utvalg (Lincoln & Guba, 1985). I hovedsak handler dette om hvordan ulike variabler påvirker studiens funn. Her er det sentralt at god praksis er fulgt, og at tolkninger er sjekket med forskningsobjektene. For å oppfylle dette er man nødt til å ta hensyn til ulike ting undervegs og forsøke å utelukke ting som kan påvirke forskningen. For å oppnå en så naturlig situasjon som mulig, har vi i vår studie tatt et bevisst valgt om at det er lærer som gjennomfører undervisningen og aksjonene, og at vi som forskere er passive observatører som i minst mulig grad er i interaksjon med elevene.

Overførbarhet handler om hvorvidt funnene i studien er overførbare til andre kontekster av samme karakter (Lincoln & Guba, 1985). For at en eventuell overførbarhet skal vurderes, kreves det rike beskrivelser av konteksten hvor funnene kommer fra. For å ivareta overførbarhet i vår studie har vi nøye beskrevet utvalget, elevenes og lærerens forutsetninger, studiens kontekst og hvilke oppgaver som blir gitt.

Pålitelighet kan knyttes til reliabilitet og omhandler studiens etterprøvbarhet (Lincoln & Guba, 1985). Det vil si at tilsvarende forskning skal være mulig å reprodusere på andre tidspunkt, av andre forskere og med andre informanter. Dersom påliteligheten er ivaretatt vil andre forskerne som gjennomfører en tilsvarende studie oppnå de samme funnene. I vår studie har vi ivaretatt påliteligheten ved å ta vare på alt materiell (data, notater og analyse) slik at materiellet kan ettergås om ønskelig. Videre er studiens metodikk nøye beskrevet, spesielt metode for datainnsamling og analyse av data.

Bekreftbarhet kan knyttes til objektivitet, og handler om at forskeren har handlet i god tro, stilt seg nøytral til forskningen og ikke latt personlig syn og verdier påvirket studien, funnene og tolkningen (Lincoln & Guba, 1985). For å ivareta bekreftbarheten i vår studie har vi transkribert nøyaktig det som har blitt sagt og gjort og på denne måten forsøkt å la datamaterialet tale for seg. Vi tok et bevisst valg om å være fullstendig observatører for å ikke påvirke elevenes arbeid med matematikkoppgavene, da dette er noe som kunne ha påvirket funnene.

4 Aksjonsforskningsprosessen

I dette kapittelet vil vi redegjøre for planlegging av aksjonsforskningsprosessen og hvordan de kombinatoriske oppgavene elevene jobbet med ble utformet, før vi avslutningsvis presenterer en grundig gjennomgang av gjennomføringen av aksjoner.

4.1 Planlegging av aksjonsforskningsprosessen

Vi startet planleggingen av masterstudien i juni 2021 med valg av aksjonsforskning som metodisk tilnærming, og matematisk resonnering som overordnet tema. I arbeidet med å planlegge aksjonsforskningsprosessen som skulle skje i etterkant av praksisperioden (30.08.21-17.09.21), gjorde vi et forarbeid i form av litteratursøk og teorilesing. I praksisperioden gjennomførte vi en innledende analyse for å identifisere elevenes samspill og utgangspunkt i matematikkundervisning. Sammen med matematikklærer ble vi enige om det overordnede målet med aksjonsforskningen, som var å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering, gjennom å endre den eksisterende undervisningspraksisen. Det konkrete målet vi kom frem til var å utvikle elevenes evne til matematisk resonnering mot føring av bevis, med et fokus på lærerens handlinger. I planleggingen av aksjonsforskningsprosessen definerte vi hvilke indikasjoner som kunne være tegn på at vi beveget oss i målretningen. Det vi vurderte var i hvor stor grad elevene resonnerte i arbeidet med og i presentasjon av oppgaven, hvorvidt elevene deltok aktivt i helklassesamtalen, i hvor stor grad elevene var i stand til å representere løsningsstrategien sin, i hvor stor grad elevene var systematiske i sin undersøkelse av problemet, og i hvor stor grad de i helklassesamtalen kom frem til en felles forståelse for problemet.

Sammen med lærer diskuterte vi hvilken undervisningsform og hvilke oppgaver vi anså som mest hensiktsmessig å benytte seg av. Basert på tidligere forskning og på lærerens erfaringer som matematikklærer, valgte vi problemløsning i par som et utgangspunkt for en utforskende matematisk helklassesamtale. Flere anerkjente forskere oppmuntrer til å ta i bruk utforskende, åpne oppgaver (Cervantes-Barraza et al., 2020; Mata-Pereira og da Ponte, 2017; Mueller et al., 2014; Palmér, 2016). Som et godt utgangspunkt for å resonnere i klassen, hevder de at slike oppgaver åpner for bruk av ulike representasjoner, i tillegg til å by på forskjellige løsningsstrategier. I en utforskende matematisk helklassesamtale blir kunnskap til gjennom et felles ansvar hvor resonneringen kommer tydelig frem (Mercer et al., 1999). Ifølge Mercer et al. (1999) skal elevene i slike samtaler dele ideer, presentere løsningsstrategier, og argumentere for sine løsninger for å overbevise hverandre. Chapin et al. (2013) presiserer at det er lærerens ansvar å hjelpe elevene med dette. I planleggingen av hvilken type problemløsningsoppgaver vi skulle velge, var det viktig at oppgavene ga elevene rikelige anledninger til å resonnere. Basert på forskning om kombinatorikk presentert i kapittel 2.5 valgte vi å ta i bruk kombinatorikk som et gjennomgående tema i oppgavene elevene skulle jobbe med. Ifølge Shin & Steffe (2009) er kombinatoriske problem godt egnet til å studere elevers utvikling av resonnering og bevis.

4.1.1 Utforming av oppgaver

I vår studie valgte vi å gi elevene åpne og utforskende oppgaver med fokus på kombinatoriske problem. Det overordnede matematiske målet var at elevene skulle utvikle effektive strategier for hvordan de kunne systematisere løsningene sine for å vite at de hadde funnet alle kombinasjonene. En slik systematisering forutsetter at elevene har forståelse for de fire prinsippene i kombinatorikk, utviklet av English (1991). Elevene i studien har lite erfaring med å være systematiske, selv om de er vant til å jobbe med problemløsningsoppgaver. Ved å jobbe med kombinatorikk som matematisk tema gjennom hele aksjonsforskningsprosessen, var målet at elevene til slutt skulle befinne seg i odometerfasen. I planleggingen av utformingen av oppgavene ble vi enige med matematikklærer om å gi elevene kombinatoriske problemer med økende vanskelighetsgrad. For å illustrere hvordan oppgavene utvikler seg, vil vi i det følgende gå nærmere inn på to av oppgavene elevene ble presentert for. Den første oppgaven er hamster-problemet, hentet fra Carpenter et al. (2003, s. 65, vår oversettelse):

> Ole har sju hamstere hjemme hos seg. Han har to bur som hamsterne kan bevege seg mellom. Vis alle måter de sju hamsterne kan fordele seg på i de to burene.

Denne oppgaven har en additiv struktur, hvor det matematiske målet er å liste opp alle måtene de syv hamsterne kan bli delt inn i to grupper. Problemet gir elevene mulighet til å utforske og beskrive sammenhenger, benytte ulike strategier, oppdage mønster, samt å ta i bruk ulike representasjoner for å uttrykke problemets løsning. For å formulere et bevis i henhold til rammeverket til Jeannotte & Kieran (2017), må elevene formulere et argument som er representert på en hensiktsmessig måte, eksempelvis ved bruk av egenproduserte representasjoner. I tillegg må resonnementet være deduktivt, og løsningen korrekt. I dette tilfellet kan uttrykksformen være en systematisk liste av alle de åtte kombinasjonene hamsterne kan fordele deg i de to burene på. En systematisk oppstilling vil være å starte med null og sju hamstere i hver sine bur. Deretter en og seks hamstere, helt til man kommer til sju og null. I tillegg til en slik oppstilling må elevene argumentere for at når vi starter med null og flytter en og en hamster til alle er flyttet, så er alle de mulige kombinasjonene funnet. I det neste problemet elevene skulle løse fikk de en oppgave med tilsvarende struktur. På tredje oppgave økte vanskelighetsgraden ved at vi ga elevene et nytt problem, hentet fra Stylianides og Ball (2008, s. 318, vår oversettelse):

> Per har mange mynter i lommen. Han har enkroninger, femmere og tikroninger. Han tar ut to mynter. Hvilke ulike beløp kan han få?

I motsetning til de to foregående oppgavene har denne en multiplikativ struktur. Dersom eleven befinner seg i odometerfasen, vil eleven benytte seg av en systematisk oppstilling. Strategien er å velge et element (enkroningen) og kombinere denne med alle de aktuelle elementene (femmere og tikroninger), før det skiftes til et nytt element. Dette er en strategi som vil kunne føre til formulering av bevis. Når vi beskriver de ulike myntene som A, B og C vil en systematisk oppstilling se slik ut:

AA   AB   AC   BB   BC   CC

Dersom eleven benytter en slik strategi, viser eleven kunnskap om alle de fire prinsippene til English (1991) i kombinatorikk. Denne oppgaven skiller seg fra de to forrige fordi i dette tilfellet vil svaret på oppgaven være hvor mange forskjellige *beløp* Per kan få ved å trekke to mynter. Dermed vil det være likegyldig hvilke mynt som trekkes først og sist. To mynter som utgjør lik sum anses som samme kombinasjon, eksempelvis AB og BA. Alle de kombinatoriske problemene gitt til elevene i løpet av aksjonsforskningsprosessen har enten en additiv eller multiplikasjon struktur, og blir nærmere beskrevet i neste kapittel.

4.2 Gjennomføring av aksjoner

Her beskriver vi hele aksjonsforskningsprosessen, både planleggingen og gjennomføringen av aksjonene, undervisningen og tiltakene vi satt inn i etterkant. Vi beskriver også hvilken oppgave som er brukt i hver undervisningssituasjon. Dette arbeidet har blitt gjennomført i samarbeid med klassens matematikklærer. I løpet av aksjonsforskningsprosessen ble det gjennomført fire undervisningsøkter som et utgangspunkt for endring og utvikling. Vi som forskere var kun til stede for å observere og dokumentere tre av de fire gjennomførte undervisningsøktene, men alle de fire øktene anses som en del av aksjonen. Hver undervisningsøkt var strukturert på samme måte: 1) presentasjon av oppgave, 2) elevene jobbet med oppgaven i par, og 3) matematisk helklassesamtale. Når elevene skulle jobbe med oppgaven fikk de utdelt blanke ark og blyant som hjelpemiddel. I tillegg var oppgaveteksten synlig på tavla til enhver tid. Tabell 4.1 viser en fullstendig oversikt over når aksjonene har foregått, samt en nærmere beskrivelse av oppgavene som ble gitt.

Tabell 4.1 Oversikt over oppgavene gitt i aksjonsforskningsprosessen

Uke	**Dato**	**Beskrivelse av oppgave**
42	20.10.21	Hamster-problemet: Ole har sju hamstere hjemme hos seg. Han har to bur som hamsterne kan bevege seg mellom. Vis alle måter de sju hamsterne kan fordele seg på i de to burene (Carpenter et al., 2003, s. 65, vår oversettelse)
43	27.10.21	Aper i trær: I dyreparken er det 2 trær og 5 aper. Apene leker i trærne og hopper fra tre til tre. Vis alle måter apene kan fordele seg på i de to trærne (Skott et al. 2016, s. 162, vår oversettelse).
45	03.11.21	Mynt-problemet: Per har mange mynter i lommen. Han har enkroninger, femmere og tikroninger. Han tar ut to mynter. Hvilke ulike beløp kan han få? (Stylianides & Ball, 2008, s. 318, vår oversettelse)
46	10.11.21	Antrekk-problemet: Oskar har 3 bukser og 5 gensere. Buksene har fargene svart, blå og grå. Genserne har fargene svart, blå, rød, grønn og gul. Oskar bruker en bukse og en genser hver dag, og kombinerer forskjellige bukser og gensere. Hvor mange dager på rad kan Oskar ha på seg forskjellige klær? (Rønning & Burheim, 2020, s. 145)

I beskrivelsen av gjennomføringen av aksjoner anser vi uke 42 som start-situasjonen. Videre er undervegs-situasjonen dokumentert i uke 43, og slutt-situasjonen dokumentert i uke 46.

4.2.1 Start-situasjon

Målet med å observere den første undervisningsøkten var å kartlegge start-situasjonen, som ble utgangspunktet for planlegging av videre aksjoner. I arbeidet med oppgaven valgte et stort flertall av elevene å bruke tegning som visuell mediator (Sfard, 2008). De fleste tegnet detaljert og gjenskapte hele tekstoppgaven, fremfor å bruke tegning for å holde oversikt over informasjonen gitt i oppgaveteksten. Elevenes representasjoner og fremgangsmåte var i liten grad systematiske, noe som gjorde det utfordrende for andre å se hva elevene hadde tenkt før en videre forklaring ble gitt. Likevel så vi tegn til systematikk ved at enkelte elevpar hadde forsøkt å tegne hamsterne og sette streker mellom burene. Elevene kom raskt i gang med oppgaven, men anså arbeidet som ferdig etter å ha funnet én løsning. Vi opplevde at elevene synes det var vanskelig å finne ut hvor mange kombinasjoner det var totalt. Læreren måtte gjentatte ganger presisere "ja, dette var en måte, men vi skulle finne alle" og "oppgaven sier at vi skal finne alle løsningene". I helklassesamtalen ble det uenighet omkring hvorvidt man kan snu om på tallene for å få en ny kombinasjon, eksempelvis om 5 og 1, og 1 og 5 var den samme kombinasjonen. På dette tidspunktet var det ingen av elevene som var i stand til å finne alle kombinasjonene i arbeidet med det kombinatoriske problemet. Med utgangspunkt i refleksjoner omkring den første datainnsamlingen utarbeidet vi noen tiltak for å bevege oss i målretning. Tiltakene som ble utarbeidet og som ble iverksatt neste undervisningsøkt var:

Under presentasjon av ny kombinatorikk-oppgave

- Læreren presiserer hva elevene bør fortsette med fra forrige time for å videreutvikle et system. Det matematiske målet er at elevene skal representere alle kombinasjonene gjennom en systematisk liste.

Under elevarbeid

- Elevene oppfordres til å lete etter nye løsninger til de ikke finner noen flere. Dersom elevene mener de er ferdige skal lærer spørre hvordan elevene vet at de har funnet alle, og hvordan de kan være sikre på at det ikke mangler en.

Under helklassesamtale

- Læreren gjør tankene til elevene synlig gjennom å representere elevenes forslag på tavla undervegs i gjennomgang av oppgaven. Dersom noen elever foreslår en kombinasjon lik en av de som allerede er listet opp, oppfordres lærer til å peke på tavla og si «så det er det samme som dette».
- Lærer spør etter nye kombinasjoner helt til alle er funnet, med et fokus på hvordan vi kan være sikre på alle kombinasjonene er funnet, og hvordan kan vi vite dette. Målet er å få opp en systematisk liste.

4.2.2 Undervegs-situasjon

Målet er å vurdere om de tiltakene vi har iverksatt har en effekt og fører til en utvikling i ønsket målretning, eller om de iverksatte tiltakene må revideres. Oppsummert kan vi se at det har skjedd en utvikling fra forrige gang fordi elevene automatisk leter etter flere løsninger enn én. I arbeidet med oppgaven er det flere elevpar som noterer ned løsningene sine for å få en oversikt over hvilke og hvor mange kombinasjoner de har funnet. Et av elevparene har systematisk utforsket oppgaven ved å lage et rutenett over hele arket sitt. De var systematiske i utprøvingen sin ved at de brukte den samme strategien for å fremstille alle kombinasjonene. De har tegnet to og to trær ved siden av hverandre som til sammen utgjør én kombinasjon. Et eksempel på dette er at de tegner et tre med to aper, og et tre med tre aper. Det var totalt tre av åtte elevpar som fant alle kombinasjonene i oppgaven.

I henhold til Ellis et al. (2019) har lærergrepene i kategorien *å utvide elevenes resonnering* en intensjon om å utvikle en mer sofistikert grad av matematisk resonnering. I helklassesamtalen opplevde vi at det ikke ble satt nok fokus på at lærer benyttet seg av disse grepene. Den matematiske samtalen ble mer en oppsummering av alle elevparene sine tanker omkring oppgaven, fremfor at de fikk resonnert rundt en systematisk oversikt over kombinasjonene. Det førte videre til at de ikke fikk mulighet til å validere gyldigheten til løsningen på oppgaven, altså det totale antallet kombinasjoner. Vi opplevde at det var en misoppfatning i samtalen da kombinasjonene ble oppfattet som et addisjonsstykke fremfor to enheter som utgjør en kombinasjon. Et eksempel på dette var da kombinasjonen 2 og 3 aper i trær ble oppfattet som regnestykket 2+3. Videre representerte læreren kombinasjonen som et regnestykke ved å notere 2+3 på tavla. Dette gjorde lærer med alle kombinasjoner som ble presentert i helklassesamtalen. Med utgangspunkt i refleksjoner omkring den andre dokumentasjonen, videreførte og justerte vi tiltakene for å bevege oss i målretning. De nye tiltakene som ble iverksatt neste undervisningsøkt var:

Under elevarbeid
- Læreren fokuserer på hvordan elevene kan representere løsningsstrategien sin på en slik måte at den blir forståelig for lærer og medelever. Hensikten er at elevene skal strukturere og systematisere kombinasjonene på arket sitt.

Under helklassesamtale
- Målet er at elevene skal utvikle en forståelse for *når* og *hvorfor* de vet at de har funnet alle kombinasjonene, som kan skje ved å bruke en systematisk oversikt som for eksempel et rutenett eller en tabell. Dette bør derfor være fokuset for samtalen. Det er viktig at ordet kombinasjon blir brukt istedenfor løsning når det er snakk om en konkret kombinasjon. Løsningen på hele problemet vil være det totale antall kombinasjoner.
- For at den matematiske samtalen skal bli så produktiv som mulig bør det settes av en større del av undervisningstiden til samtale.

De nye tiltakene ble iverksatt i uke 45. Da fikk elevene et nytt problem med en multiplikativ struktur, til forskjell fra de to første oppgavene som hadde en additiv struktur. Klassen jobbet med denne oppgaven da vi ikke var til stede. Vi fikk i etterkant tilbakemelding fra lærer om hvordan arbeidet hadde gått. Det viste seg at alle elevene kom frem til riktig antall kombinasjoner. I og med at elevene virket komfortable med den nye strukturen, valgte vi å beholde oppgavestrukturen og øke vanskelighetsgraden. Vi ble enige om å videreføre de samme tiltakene frem til avslutningen av aksjonsforskningsprosess.

4.2.3 Slutt-situasjon

Målet med den siste dokumentasjonen var å kartlegge elevenes utvikling av sin evne til å resonnere fra start til slutt. På dette tidspunktet er elevene mer systematiske i måten de angriper oppgaven på, fra de får problemet til de har løst det. I dette arbeidet var det til stede totalt seks elevpar, hvorav halvparten av parene kom frem til riktig antall kombinasjoner ved å basere strategien sin på et system. De elevparene som ikke fikk det til, oppdaget underveis i arbeidet at fremgangsmåten de hadde valgt ikke ga riktig svar. Helklassesamtalen fokuserte hovedsakelig på elevenes løsningsstrategier. Ved at lærer etterspurte hvordan elevene hadde tenkt for å løse oppgaven fremfor hvilket svar de hadde fått, ga samtlige elever uttrykk for at de nå hadde en idé om hvordan de kunne ha angrepet oppgaven.

5 Resultat

I denne studien er målet med aksjonsforskningen å utvikle et læringsmiljø på småtrinnet som støtter resonnering, gjennom å endre den eksisterende undervisningspraksisen. Hypotesen vår er at hvis lærer oppfordrer elevene til å begrunne sine matematiske påstander vil elevenes evne til å resonnere utvikle seg. Forskningsspørsmålet stilt i vår studie er "hvordan kan lærerens pedagogiske grep i en helklassesamtale fungere som en potensiell støtte for å fremme elever på 3. trinn sin matematiske resonnering?". På bakgrunn av at studien handler om å utvikle undervisningspraksisen, har vi studert samspillet mellom læreren og elevgruppen over tid. For å beskrive utviklingen og sammenligne resultatene fra analysen fra start til slutt, har vi valgt å fremstille funn fra alle de tre aksjonene i samme tabell, i hver sin kolonne. Kolonnene er navngitt *1., 2., og 3.* og hver kolonne representerer hver sin del av aksjonsforskningsprosessen. I dette kapittelet presenterer vi resultatet fra analysen ved bruk av tabeller og utdrag fra datamaterialet. Først presenterer vi elevenes matematiske resonnering med et fokus på hvordan valideringen av elevenes matematiske påstander utvikler seg. Deretter presenterer vi hvordan lærerens grep har endret seg, før vi avslutter med å fremstille utviklingen av de utforskende rutinene som vi har identifisert i analysen.

5.1 Elevenes matematiske resonnering

I dette delkapittelet viser vi hvilke prosesser relatert til validering vi har identifisert gjennom å bruke videreutviklede koder basert på Jeannotte & Kieran (2017) og English (1996). Tabell 5.1 viser antall ganger prosesser relatert til validering ble identifisert i løpet av de tre delene av aksjonsforskningsprosessen.

Figur 5.1: Antall ganger prosesser relatert til validering ble identifisert i analysen

Aksjonsforskningsprosessen		**1.**	**2.**	**3.**	**Totalt**
Kategori	**Prosesser relatert til validering**	*Antall ganger koden ble benyttet*			
Begrunne	Eleven presenterer et løsningsforslag uten systematikk	2	1	0	3
	Argument som bidrar til å øke narrativets sannhetsverdi	0	2	9	11
Formulere bevis	Formulere et bevis tilpasset aldersgruppen	0	0	2	2
Totalt		2	3	11	16

I den første og andre aksjonen ble det generelt identifisert få prosesser relatert til validering, henholdsvis to og tre ganger. På disse tidspunktene var det ingen av elevene som var i stand til å formulere et bevis, og argumentasjon som bidrar til å øke narrativets sannhetsverdi ble i liten grad identifisert. Oppgaven elevene jobbet med i den første delen av aksjonen var hamster-problemet: Ole har sju hamstere hjemme hos seg. Han har to bur som hamsterne kan bevege seg mellom. Vis alle måter de sju hamsterne kan fordele seg på i de to burene.(Carpenter et al., 2003, s. 65, vår oversettelse). Et eksempel på hvordan elevene validerte et narrativ gjennom en utforskende rutine i den matematiske diskursen på dette tidspunktet, ser slik ut:

> Lærer: Vil du si hva dere tenkte?
> Elev: Vi tok 1 der og 6 i det andre, også 4 i det ene buret og 3 i det andre, også 5 i det ene buret og 2 i det andre, også bare 7 i det ene. Også 2 og 5, det omvendte.

I dette tilfellet benytter elevparet seg av det som Jeannotte & Kieran (2017) beskriver som eksemplifisering, som tilsvarer det Sfard (2008) kaller for visuelle mediatorer. Elevparet bruker en egenprodusert representasjon hvor de har fremstilt de ulike kombinasjonene. Eleven validerer narrativet ved å presentere et løsningsforslag uten systematikk, og begrunner løsningen ved å ramse opp alle kombinasjonene i en vilkårlig rekkefølge. På den måten er det ikke noe form for system i utvelgelsesprosessen, og dermed kan vi si at elevparet befinner seg i det English (1996) benevner som den uplanlagte fasen i arbeid med kombinatoriske problem. I elevenes første møte med kombinatorikk var en slik form for validering gyldig for at narrativet skulle bli akseptert i den diskursen. I siste del av aksjonsforskningsprosessen fant vi ingen tilfeller av denne kategorien. Det viser at det har skjedd en endring i reglene på metanivå for hvorvidt et narrativ skal bli akseptert i diskursen.

Den mest fremtredende formen for begrunnelse på det avsluttende tidspunktet var argument som bidro til å øke narrativets sannhetsverdi. Dette fant vi ni tilfeller av. I tillegg fant vi to tilfeller hvor elevene formulerte et bevis tilpasset aldersgruppen. Til sammen utgjorde dette elleve prosesser relatert til validering av narrativ. Et eksempel på hvordan elevene validerte et narrativ gjennom en utforskende rutine i diskursen i slutten av aksjonsforskningsprosessen ser slik ut:

> Elev: Jeg tenkte at jeg måtte lage et system med farger og skrift, og forskjellige rom på en måte
> Lærer: Hvorfor tenkte du det, at det var så viktig?
> Elev: Fordi det er jo mange farger på klærne, og jeg må jo vite liksom hvor og hva de har på seg, og på hvilken dag og, hva jeg har tatt og sånn.

Figur 5.1: Elevens eksemplifisering

Utdraget viser hvordan en elev har løst antrekk-problemet, som lød slik: Oskar har 3 bukser og 5 gensere. Buksene har fargene svart, blå og grå. Genserne har fargene svart, blå, rød, grønn og gul. Oskar bruker en bukse og en genser hver dag, og kombinerer forskjellige bukser og gensere. Hvor mange dager på rad kan Oskar ha på seg forskjellige klær? (Rønning & Burheim, 2020, s. 145). Eksempelet viser hvordan eleven validerer for å øke narrativets sannhetsverdi. Her ser vi at eleven forsøker å overbevise diskursen om at narrativet er gyldig, med en delvis systematisk egenprodusert representasjon. Eleven har begynt å ta i bruk mønster i sin eksemplifisering som en del av valideringen av det kombinatoriske problemet, men vi kan se at mønsteret ikke er bevart gjennom hele oppgaven. Derfor befinner eleven seg i det English (1996) benevner som overgangsfasen. Eleven viser forståelse for prinsippet systematisk variasjon og for prinsippet kontinuitet. Dersom vi ser på elevens eksemplifisering kan vi se at eleven viser forståelse for at en ny kombinasjon oppstår når ett av elementene (B) forblir konstant, mens ett av de andre systematisk endres (G). Eleven viser en begynnende forståelse for prinsippet oppbrukt ved at eleven krysser ut de kombinasjonene som er representert to ganger. Elevens validering kan bidra til å overbevise diskursen fordi det gjør narrativet mer sannsynlig ved å være systematisk. Likevel vil ikke narrativet nødvendigvis betraktes som sant. Valideringen mangler en deduktiv struktur, og kan dermed ikke regnes som et bevis. Et eksempel på hvordan en elev formulerer et bevis for løsningen av antrekk-problemet tilpasset aldersgruppen ser slik ut:

> Elevpar: Først så tegna vi opp alle klærne. Og så fargela vi, og så tok vi alle genserne til en bukse, og det ble fem. Vi tok streker fra den første buksa til alle genserne, også skrev vi tallet. Også gjorde vi det samme bare uten å tegne strekene.
> Lærer: Hvorfor tok dere ikke streker fra de andre buksene da?
> Elevpar: Fordi vi visste at alle blir fem
> Lærer: Så dere visste at det er ikke noe annerledes med de andre buksene?
> Elevpar: Ja, derfor er det til sammen 15 kombinasjoner av klær

Figur 5.2: Elevenes eksemplifisering

I eksempelet gitt av elevparet ser vi at Jeannotte & Kieran (2017) sine krav for at en validering skal være et bevis tilpasset aldersgruppen, er oppfylt; elevene beskriver fremgangsmåten i kronologisk rekkefølge, alle matematiske påstander gitt i utsagnet er sanne, og resonnementet er representert ved en illustrasjon som egner seg godt til å fremstille løsningen av problemet. Til sammen utgjør elevenes forklaring og eksemplifisering et bevis som er tilpasset elevgruppens alder, altså elever på tredje trinn. Elevparet bruker en organisert struktur for å velge ut kombinasjonene, hvor det ene elementet holdes fast mens de andre forandres systematisk. Derfor kan vi si at elevene er i det English (1996) benevner som odometerfasen. Elevene viser forståelse for de fire prinsippene i kombinatorikk, identifisert av English (1991). Vi ser at elevene har holdt fast ett element (den grå buksa) og systematisk endret ett og ett element (genserne), helt til det konstante elementet ikke lenger genererer nye kombinasjoner når det andre elementet endres. Elevene viser videre forståelse for at hvert element som holdes fast (hver bukse) genererer likt antall kombinasjoner med det andre elementet.

Når lærer spør "hvorfor tok dere ikke streker fra de andre buksene da?" og elevene svarer "fordi vi visste at alle blir fem", viser de forståelse for den multiplikative strukturen i problemet, og for at 3x5 vil angi det totale antallet kombinasjoner. Oppsummert viser analysen at elevene har utviklet evnen til å validere narrativ gjennom aksjonsforskningsprosessen.

5.2 Lærerens grep i matematiske resonneringsprosesser

I dette delkapittelet presenterer vi hvilke kategorier vi har identifisert, før vi ser nærmere på hver kategori og presenterer hvilke lærergrep vi har identifisert i de ulike kategoriene. Både kategoriene og lærergrepene er utviklet av Ellis et al. (2019). I tabellene skiller vi mellom lærergrep som ble identifisert med lavt og høyt potensial. Tabell 5.2 viser antall ganger de ulike kategoriene ble identifisert i de tre delene av aksjonsforskningsprosessen.

Figur 5.2: Antall ganger de ulike kategoriene ble identifisert i analysen

Aksjonsforskningsprosessen	**1.**	**2.**	**3.**	**1.**	**2.**	**3.**	*Totalt av hver kategori*
Kategori	**Lavt potensial**			**Høyt potensial**			
Læreren lokker frem elevenes resonnering	6	6	4	2	3	6	27
Læreren responderer på elevenes resonnering	8	7	11	1	1	2	30
Læreren fremmer elevenes resonnering	4	3	3	4	8	1	23
Læreren utvider elevenes resonnering	7	10	0	1	5	6	29
Totalt i hver datainnsamling	25	26	18	8	17	15	109
Totalt	69			40			

Tabellen gir en totaloversikt over antall ganger et grep innenfor hver kategori ble identifisert i løpet av hele aksjonsforskningsprosessen. Totalt viser tabellen at lærer tok i bruk 109 lærergrep, hvorav 69 grep var med lavt potensial og 40 grep med høyt potensial. Med dette kan vi se at det er en overvekt av grep med lavt potensial. I det følgende ser vi nærmere på hver kategori og presenterer hvilke lærergrep vi har identifisert i de ulike kategoriene. I tillegg presenterer vi et eksempel fra datamaterialet for hvert grep i hver kategori som ble benyttet av lærer.

5.2.1 Læreren lokker frem elevenes resonnering

Ifølge Ellis et al. (2019) er formålet med å ta i bruk disse lærergrepene å få ut, identifisere, klargjøre og forstå elevenes ideer. Kategorien av lærergrep som har til hensikt å lokke frem elevenes resonnering ble identifisert 27 ganger, som vist i tabell 5.2. Tabell 5.3 viser hvert grep innenfor denne kategorien, og antall ganger de ulike grepene ble benyttet i hver av de tre delene av aksjonsforskningsprosessen.

Tabell 5.3: Resultat fra analysen i kategorien læreren lokker fram elevens resonnering

Grep		*Eksempel*	*Antall ganger grepet forekommer*			
			1.	**2.**	**3.**	**Totalt**
Lavt potensial	Lokke frem et svar	Lærer: Hvor mange løsninger har vi funnet til sammen nå da?	1	2	1	4
	Lokke frem fakta eller prosedyrer	Lærer: Hvor mange blir det til sammen da? 4+2?	0	1	0	1
	Etterspørre en oppklaring	Lærer: Ja for jeg ble litt sånn usikker nå, hvordan, hvem er det som henger sammen? Elev: Det er strekene Lærer: Åja, er det strekene mellom sånn?	4	1	2	7
	Å finne ut av elevens resonnement	Lærer: Men dere starta ikke med det der?	0	2	1	3
	Undersøke forståelse	Lærer: Da tok dere 2+5 og 5+2 som to forskjellige måter?	1	0	0	1
Høyt potensial	Lokke frem ideer	Lærer: Hva var det første dere tenkte når dere fikk oppgaven? Hvordan gjorde dere dette her? Lærer: Skal vi se, hva var det første du hadde tenkt? (lærer henvender seg til en elev)	2	2	5	9
	Lokke frem forståelse		0	0	0	0
	Etterspørre en forklaring	Lærer: Dere kan få vise frem akkurat hvordan dere gjorde det.	0	1	1	2

Tabell 5.3 viser at det er to grep som forekommer hyppigere enn de andre. Dette er *etterspørre en oppklaring* og *lokke frem ideer.* I lærerens bruk av å etterspørre en oppklaring, viser eksempelet at han forsøker å klargjøre elevenes ideer. Dette grepet ble ofte brukt da elevene skulle forklare hvordan de hadde løst oppgaven, samtidig som de viste frem tegningen som representerte løsningsstrategien. I løpet av hele aksjonsforskningsprosessen ble dette grepet mest brukt i den første undervisningsøkten. Det kan forklares ved at det var første gang elevene skulle arbeide med et kombinatorisk problem. Elevene hadde derfor ikke utviklet noen strategier for hvordan de skulle systematisere tegningen sin. Grepet bidro til å gjøre det enklere for både lærer og medelever å få innsikt i hva de ulike elementene i tegningen representerte.

Ellis et al. (2019) påpeker at grep innenfor denne kategorien er et viktig første steg i en pågående prosess av å bygge på og støtte elevenes matematiske tenkning. I den sammenheng benytter lærer seg av grepet å lokke frem ideer. I de fleste tilfeller brukes dette grepet i oppstart av helklassesamtaler. Når lærer stiller spørsmålet "hva var det første dere tenkte?" som vist i eksempelet presentert i tabellen, åpner det for at alle elevene i den matematiske diskursen kan bidra i samtalen. Dette lærergrepet har et høyt potensial, da bruk av grepet ofte fører til at elevenes matematiske resonnering kommer til syne. Eksempelet er hentet fra antrekk-problemet, og viser hvordan elevene i etterkant av et slikt spørsmål forklarer sin resonneringsprosess:

> Lærer: Hva tenkte du da, Helle?
> Helle: Jeg starta med bare å lage sånne bokser som jeg kunne putte de oppi. Fordi først så tok jeg en rekke med alle fargene, så tok jeg de andre i en rekke nedover.

Oppsummert viser analysen at læreren innleder en ny samtalesekvens ved å bruke grep som lokker frem elevenes resonnering. Grepene læreren benytter i denne kategorien fungerer som en potensiell støtte ved at grepene danner et utgangspunkt for elevenes matematiske resonnering. Elevenes respons på lærerens grep avgjør hvilke grep lærer velger å benytte videre i samtalen.

5.2.2 Læreren responderer på elevenes resonnering

I løpet av kort tid må lærere bestemme seg for hvordan de skal reagere på elevenes utsagn og bidrag, og disse reaksjonene blir av Ellis et al. (2019) kategorisert som lærerens respons på elevenes resonnering. Kategorien av lærergrep som har til hensikt å respondere på elevenes resonnering ble identifisert 30 ganger, som vist i tabell 5.2. Tabell 5.4 viser hvert grep innenfor denne kategorien, og antall ganger de ulike grepene ble benyttet i hver av de tre delene av aksjonsforskningsprosessen.

Tabell 5.4: Resultat fra analysen i kategorien læreren responderer på elevens resonnering

Grep		*Eksempel*	*Antall ganger grepet forekommer*			
			1.	**2.**	**3.**	**Totalt**
Lavt potensial	Å rette elevens feil		0	0	0	0
	Repetere elevens utsagn	Elev: Vi starta med to farger Lærer: Dere starta med å finne farger	2	2	4	8
	Oppmuntre elevene til å repetere hverandres utsagn		0	0	0	0
	Validerer et korrekt svar	Lærer: 0+5, okei *lærer skriver opp på tavla*. Og jeg så at du hadde tegnet og skrevet regnestykket ved siden av sånn at det var lett å se. Og at det hang sammen, det var lurt.	6	5	7	18
Høyt potensial	Oppmuntre til å rette sine feil	Lærer: Okei. Så dere plussa sammen først dere? Genserne? Også fant dere ut at det kan ikke stemme. Men da har dere jo forska litt. Jeg sa det i stad; det er ekstra viktig for dem som ikke nå forstod oppgaven, at de følger med. For da kan vi lære av hverandre.	1	0	2	3
	Representere på en ny måte	Lærer: Det blir samme svar, men stykket var forskjellig. Skal vi tegne opp eller? Da skal jeg tegne opp det du sa *lærer tegner og skriver opp to og tre, deretter tre og to*.	0	1	0	1

Ifølge Ellis et al. (2019) vil grep i denne kategorien ofte benyttes i etterkant av at læreren har lokket fram elevens resonnering, og på denne måten har læreren allerede fått et innblikk i elevens tenking. Som tabell 5.4 viser, er det to grep som er fremtredende. Spesielt blir grepet validerer et korrekt svar brukt hyppig gjennom hele aksjonsforskningsprosessen. Ellis et al. (2019) definerer lærergrepet på følgende måte: "læreren bekrefter aktivt elevens ideer ved å gjenta, omformulere eller legge til informasjon til elevens svar". I samsvar med definisjonen validerer læreren et korrekt svar gjennom å aktivt bekrefte elevenes idé. Et eksempel fra andre del av aksjonsforskningsprosessen hvor elevene jobbet med oppgaven "aper i trær" ser slik ut:

> Lærer: 0+5, okei. Og jeg så at du hadde tegnet og skrevet regnestykket ved siden av sånn at det var lett å se. Og at det hang sammen, det var lurt.

Til forskjell fra å validere et korrekt svar, handler å repetere elevenes utsagn kun om at lærer korrekt gjengir og tydeliggjør en elev sitt svar. Likevel har begge lærergrepene den samme funksjonen, nemlig å sørge for at alle elevene får tilgang til den matematiske diskursen. Et annet grep lærer kunne ha benyttet for å oppnå det samme resultatet, er å oppmuntre elevene til å repetere hverandres utsagn. Oppsummert viser analysen at læreren forsterker de strategiene elevene bruker som er hensiktsmessige, fremfor å poengtere og rette elevenes feil. I de tilfellene elevene selv oppdager at de har fått feil svar på oppgaven, responderer lærer ved å verdsette elevenes resonneringsprosess. I tillegg benytter lærer anledningen til å oppmuntre elevene til å rette sine feil, og poengterer at de kan lære av hverandre.

5.2.3 Læreren fremmer elevenes resonnering

I denne kategorien vil lærerens grep være knyttet til å videreutvikle elevens tenkning, og et hovedtrekk er at læreren forsøker å støtte eleven gjennom både veiledning og forklaring (Ellis et al., 2019). Kategorien av lærergrep som har til hensikt å fremme elevenes resonnering ble identifisert 23 ganger, som vist i tabell 5.2. Tabell 5.5 viser hvert grep innenfor denne kategorien, og antall ganger de ulike grepene ble benyttet i hver av de tre delene av aksjonsforskningsprosessen.

Tabell 5.5: Resultat fra analysen i kategorien læreren fremmer elevens resonnering

Grep		*Eksempel*	*Antall ganger grepet forekommer*			
			1.	**2.**	**3.**	**Totalt**
Lavt potensial	Fokusere på et bestemt aspekt	Lærer: Dere har blitt veldig gode nå på å få system på det (...) I dag har jeg et lite tips, det er lurt å ha litt sånn system.	3	1	2	6
	Topaze-effekt		0	0	0	0
	Å bli ledet		0	0	0	0
	Gi forklaring på en prosedyre		0	0	0	0
	Gi en oppsummerende forklaring	Lærer: Da velger dere, her står det i oppgaven; vis alle måter de sju hamsterne kan fordele seg i de to burene.	1	2	0	3
	Gi generell informasjon	Lærer: Jeg så at det her var en litt større utfordring, og at ikke alle sammen forstod det. Det tenker jeg er helt greit. (...) Da er det ekstra viktig å følge med.	0	0	1	1
Høyt potensial	Tilby veiledning	Lærer: … forrige gang så var det en del som hadde mange løsninger, men ikke alle. Nå må dere prøve å finne *alle* løsningene som er mulige.	0	1	0	1
	Bygge videre på elevenes bidrag	Lærer: Forrige uke så jobbet dere med hamsterproblemet. Og da var det sånn at det var flere av dere som var gode på å ordne sånn struktur, ordne strategier der man så veldig tydelig hva dere hadde gjort.	0	2	0	2
	Oppmuntre til å ta i bruk flere løsningsstrategier	Lærer: Er det noen andre som tenkt noe annet eller tenkte det samme?	4	4	1	9
	Gi en begrepsmessig forklaring	Lærer: Hvis jeg ser på arket deres og «oi, nå ser jeg hva dere tenkte», da har dere gjort det grundig og godt. Så prøv og ordne det litt sånn fint og strukturert sånn at det er lett å se og vis frem til de andre.	0	1	0	1
	Gi alternative løsningsstrategier		0	0	0	0

Tabell 5.5 viser at det er to grep som ble identifisert hyppigere enn de andre. Grepene er *fokusere på et bestemt aspekt* og *oppmuntre til å ta i bruk flere løsningsstrategier.* I begge tilfellene forsøker lærer å støtte elevene gjennom veiledning. Når læreren fokuserer på et bestemt aspekt skjer dette i tilknytning til presentasjonen av oppgaven i oppstarten av undervisningen. Læreren poengterer sentrale aspekter ved oppgaven slik at elevene får et godt utgangspunkt når de skal løse den. Ved å ta i bruk dette grepet hjelper læreren elevene med å sile ut viktig informasjon i oppgaven. I eksempelet presentert i tabellen gir læreren elevene et tips om at det er lurt å bruke et system. Læreren sier derimot ikke noe om hvordan elevene skal utforme eller bruke systemet. På denne måten skiller dette grepet seg fra *å bli ledet* og *gi forklaring på en prosedyre*, som begge er mer lukkede i form av at lærer leder elevene inn på et spor som ikke gir rom for egen resonnering.

Det grepet læreren har benyttet mest er å oppmuntre til å ta i bruk flere løsningsstrategier. Dette grepet brukes typisk i det han avslutter en sekvens i helklassesamtalen hvor en elev nettopp har presentert et narrativ. Det brukes som en naturlig inngang slik at flere elever får mulighet til å delta i samtalen. Ved dette eksempelet indikerer lærer at det er positivt når elevene har løst oppgaven både på tilsvarende måte som medelever, eller på en ny måte:

> Lærer: Er det noen andre som tenkt noe annet eller tenkte det samme? Var det noen som tenkte annerledes når de fikk oppgaven?

Dette lærergrepet regnes som et grep med høyt potensial. Dersom intensjonen til grepet hadde vært å se sammenhengen mellom de ulike strategiene, hadde funksjonen vært at lærer og elevene sammen kunne ha kommet frem til den mest effektive strategien. Dette kunne bidratt til at elevene måtte resonnere omkring hvilken strategi som var mest hensiktsmessig. I dette tilfellet ser det ut til at intensjonen til læreren kun er at flest mulig elever skal delta i samtalen. Dermed får ikke grepet utnyttet sitt fulle potensial. Oppsummert viser analysen at lærerens grep fungerer som en potensiell støtte dersom man er bevisst det potensialet som ligger i grepet.

5.2.4 Læreren utvider elevenes resonnering

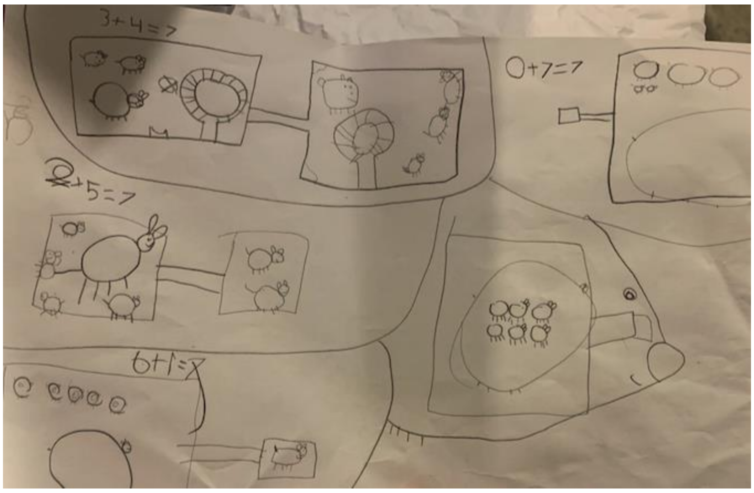
I denne kategorien har lærergrepene en intensjon om å utvikle en mer sofistikert grad av matematisk resonnering (Ellis et al., 2019). Kategorien av lærergrep som har til hensikt å utvide elevenes resonnering ble identifisert 29 ganger, som vist i tabell 5.2. Tabell 5.6 viser hvert grep innenfor denne kategorien, og antall ganger de ulike grepene ble benyttet i hver av de tre delene av aksjonsforskningsprosessen.

Tabell 5.6: Resultat fra analysen i kategorien læreren utvider elevens resonnering

Grep		*Eksempel*	*Antall ganger grepet forekommer*			
			1.	**2.**	**3.**	**Totalt**
Lavt potensial	Etterspørre nøyaktighet	Lærer: Så du rev opp små lapper og skrev stykkene. Kan du si et stykke du skrev opp da?	0	1	0	1
	Oppmuntre til evaluering	Lærer: Er dere enige i at 2+3 og 3+2 er to forskjellige stykker?	0	3	0	3
	Bryte ned begrunnelser	Lærer: Ja du kan vise frem tegningen til slutt. Du hadde tegnet ganske sånn oversiktlig med aper som fordeler seg forskjellig. Så du hadde laget stykkene på siden her og tatt de i en egen sånn greie her. Fant du og 6? Elev: Ja	7	6	0	13
Høyt potensial	Oppmuntre til resonnering	Lærer: Vil du si hva du tenkte?	1	1	0	2
	Oppmuntre til refleksjon	Lærer: Hvorfor tok dere ikke streker fra de andre buksene da? Elev: Fordi vi visste at alle blir fem Lærer: Så dere visste at det er ikke noe annerledes med de andre buksene?	0	1	2	3
	Etterspørre begrunnelse	Lærer: Kan du forklare litt hva du har gjort?	0	2	4	6
	Etterspørre generalisering	Lærer: Okei, da har vi 6 løsninger. Er det noen som testet flere ganger om det var mer enn 6 løsninger? Elev: Nei. Vi testa, men vi fant ikke	0	1	0	1

Tabell 5.6 viser at den første og andre aksjonen har en overvekt av grep med lavt potensial, mens i den tredje har lærer utelukkende benyttet seg av grep med høyt potensial. I de to første er det lærergrepet bryte ned begrunnelser som forekommer hyppigst, totalt 13 ganger. Et eksempel på hvordan lærer benytter dette grepet i den første aksjonen ser slik ut:

> Lærer: Okei, vil dere vise frem? Skal jeg holde den opp så alle ser?
> Elevpar: Det var 1 og 6
> Lærer: 1+6 er lik 7. Ja for det ser jeg dere gjorde annerledes enn noen, dere ordna sånn med tegning også skrev dere også regnestykket. Det var ganske lurt, for da ser dere her er burene ja. Det var lurt, da viser dere at dere to forskjellige måter med regnestykke og tegning. Da blir det veldig oversiktlig.



Figur 5.3: Elevenes eksemplifisering

Elevenes representasjon viser fem ulike kombinasjoner, i arbeid med hamster-problemet. I utdraget fra samtalen ser det ut til at lærerens intensjon er at alle deltakerne i diskursen skal få tilgang til elevparet sin matematiske resonnering. Videre ser vi hvordan læreren kommenterer tegningen til elevene ved å påpeke sentrale aspekter. På denne måten bryter læreren ned elevenes begrunnelser, da elevene ikke får mulighet til å gjøre rede for sin egen resonnering. Dette grepet minner om å *validere et korrekt svar*, som handler om at læreren eksempelvis legger til informasjon til elevenes resonnering. Problemet i dette tilfellet er at læreren fratar elevene muligheten til å kommentere sin egen resonneringsprosess. Når læreren kommenterer elevenes fremgangsmåte uten at elevene selv får si hva de har tenkt, er det vanskelig å vite om lærerens antakelser samsvarer med elevenes matematiske resonnering. På denne måten er dette et grep som stopper elevenes resonneringsprosess.

I den siste aksjonen er grepene med lavt potensial erstattet med grep med utelukkende høyt potensial. Disse grepene var *oppmuntre til refleksjon* og *etterspørre begrunnelse*, og ble identifisert totalt seks ganger i denne undervisningsøkten. Et eksempel på hvordan læreren etterspør begrunnelse i arbeid med antrekk-problemet ser slik ut:

> Lærer: Så du tenkte at nå må jeg ha et system der jeg har både farger og skrift. Hvorfor tenkte du det? Hvorfor var det så viktig?
> Elev: Fordi det er jo mange farger på klærne, og jeg må jo vite liksom hvor og hva de har på seg, og på hvilken dag og, hva jeg har tatt og sånn.

I utdraget ser vi hvordan lærer vurderer hvilke muligheter som er til stede i elevens resonnering, og deretter finner en måte å ekspandere resonneringen på, slik Ellis et al. (2019) foreslår. Dette gjør lærer ved å gjenta to aspekter ved elevens tidligere utsagn (system med farger og skrift), før lærer forsøker å utvide elevenes resonnering ved å spørre om hvorfor det er viktig å lage et slik system. Ut ifra elevens respons ser vi at lærergrepet har fungert godt som en støtte i å fremme elevens matematiske resonnering.

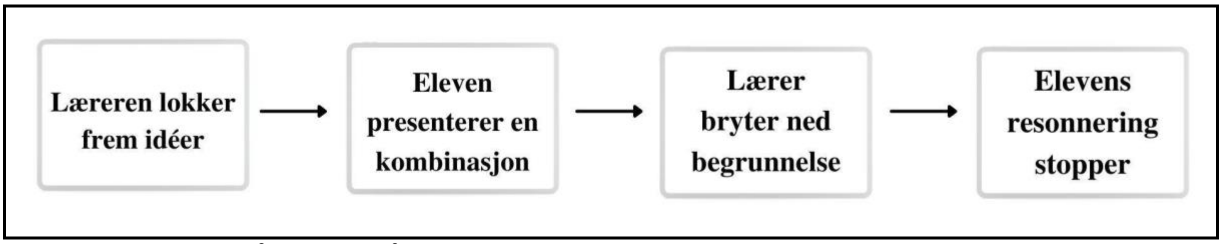
Oppsummert viser analysen at de tre første kategoriene av lærergrep er benyttet gjennomgående i hele aksjonsforskningsprosessen. Grepene i kategorien *å utvide elevenes resonnering* har derimot endret seg gradvis gjennom hele prosessen, fra at lærer benytter seg av grep med lavt potensial, til at lærer avslutningsvis utelukkende bruker grep med høyt potensial. Tiltakene som ble iverksatt undervegs i aksjonsforskningsprosessen dreide seg hovedsakelig om at lærer skulle utvide elevenes resonnering. Målet var at elevene skulle bli i stand til å validere sine matematiske påstander. Dette skulle gjøres gjennom lærerens oppmuntring til bruk av en systematisk oversikt, og spørsmål som "hvordan kan vi vite det?". Funnene fra analysen samsvarer dermed med tiltakene som ble iverksatt undervegs i aksjonsforskningsprosessen. I neste delkapittel vil vi se nærmere på hvordan samspillet mellom læreren og elevgruppa har utviklet seg over tid. Dette gjør vi ved å presentere hvilke utforskende rutiner som har oppstått i aksjonsforskningsprosessen, og hvordan rutinene har påvirket elevenes matematiske resonnering.

5.3 Utforskende rutiner i den matematiske diskursen

I vår studie har vi undersøkt utforskende rutiner ved å identifisere hvilke regler på metanivå som er gjeldende når et narrativ skal aksepteres i diskursen i arbeid med kombinatoriske problem. En rutine benevnes som utforsking dersom den ender med et bidrag til et narrativ. Narrativet kan deretter bli akseptert eller forkastet, på bakgrunn av allerede godkjente narrativer og diskursens regler på metanivå (Sfard, 2008). Vi har identifisert hvordan reglene på metanivå har utviklet seg gjennom aksjonsforskningsprosessen, og har funnet to utforskende rutiner, altså to repeterende kommunikasjonsmønstre mellom deltakerne i diskursen. I dette kapittelet presenterer vi hvilke betingelser som styrer de to utforskende rutinene vi har identifisert, altså hvilke regler på metanivå som var gjeldende. Dette gjør vi ved å vise *hvordan* og *når* de to utforskende rutinene benyttes. I det følgende presenterer vi hvilke prosedyrer, anvendbarhetsbetingelser og avslutningsbetingelser som er gjeldende for rutinene. Vi ser nærmere på hvordan rutinene bidrar til å stoppe eller utvide elevenes matematiske resonnering, og synliggjør reglene på metanivå ved hjelp av figurer og utdrag fra datamaterialet.

5.3.1 Regler på metanivå som fører til at elevens matematiske resonnering stopper

I analyseprosessen identifiserte vi en utforskende rutine som ikke støttet elevenes matematiske resonnering. Vi velger likevel å inkludere dette funnet i studien, fordi det viser hvordan lærerens grep påvirker elevenes mulighet til å validere sine narrativ. Den utforskende rutinen vi nå skal beskrive ble kun identifisert i den første og andre aksjonen og ser slik ut:



Figur 5.4: Regler på metanivå som fører til at elevens matematiske resonnering stopper

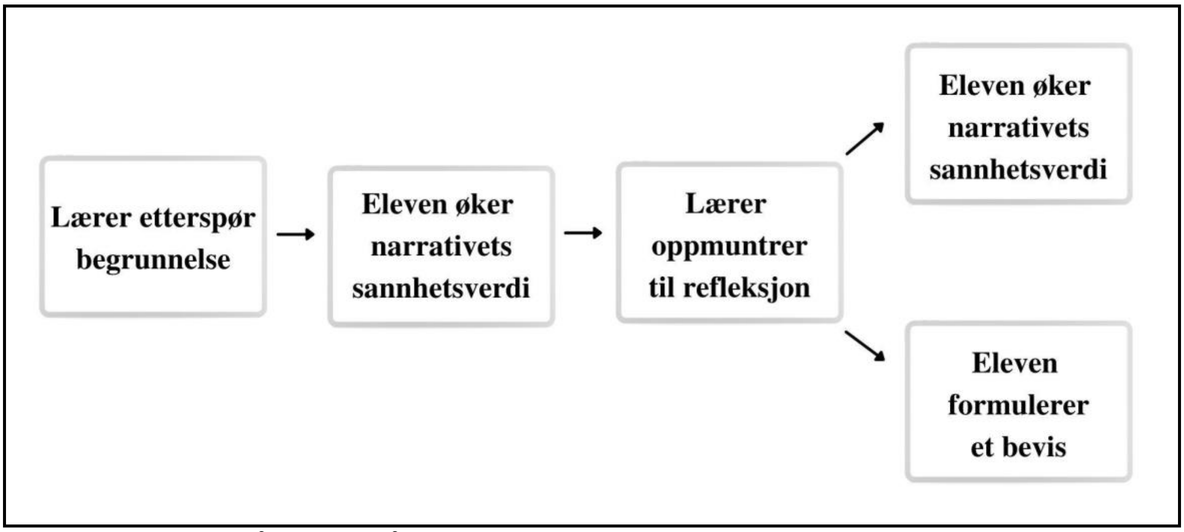
Lærerens intensjon i den utforskende rutinen er å støtte elevenes matematiske resonnering, men lærerens handlinger førte til et annet resultat. For å vise hvordan reglene på metanivå stopper elevenes valideringsprosesser, ser vi nærmere på et utdrag fra aksjonsforskningsprosessen:

> Lærer: Hva tenkte dere? *(læreren lokker frem ideer)*
> Elev: 2 og 5, og det omvendte *(eleven presenterer et narrativ)*
> Lærer: Så dere tenkte omvendt også? Så dere tenkte 2 i det første og 5 i det andre, også bytta dere om og tok 5 i det første og 2 i det andre slik at det ble omvendt og? *(lærer bryter ned begrunnelse)*
> Elev: Ja *(elevens resonnering stopper)*
> Medelever: Hæ, var det lov?
> Lærer: Ja, det er ingen som har sagt at det ikke var lov *(lærer aksepterer narrativet)*

Eksempelet viser hvordan læreren ønsker å få frem elevenes matematiske resonnering ved å lokke frem ideer. Dette betegnes som andvendbarhetsbetingelsen for den utforskende rutinen. Når et nytt narrativ blir presentert må dette aksepteres av fellesskapet gjennom en valideringsprosess, for å bli en del av diskursen. I dette tilfellet ser vi at lærer bryter ned elevens begrunnelse ved å avsløre elevens resonnement, gjennom å formidle det han tror eleven har tenkt i arbeidet med å løse oppgaven. Dette kan ses på som regler som bestemmer hvordan rutinen skal utføres, altså rutinens prosedyrer. Videre ser vi at læreren validerer gyldigheten av narrativet ved å uttrykke "ja, det er ingen som har sagt at det ikke var lov". Dette skjer uten at eleven som presenterte narrativet får mulighet til å argumentere for gyldigheten. Avslutningsbetingelsen som blir identifisert i rutinen er at det er lærer som avgjør om et narrativ skal aksepteres eller forkastes i diskursen. Enighet i en slik rutine vil dermed gjenkjennes av at lærer validerer narrativet som blir presentert. Når elevene ikke får mulighet til å argumentere for sannhetsverdien til sitt eget narrativ, fungerer heller ikke læreren som en støtte for å fremme og utvide elevenes resonnering.

5.3.2 Regler på metanivå som fører til at elevens matematiske resonnering utvides

I analyseprosessen identifiserte vi en utforskende rutine som fremmet elevenes matematiske resonnering. Dette mønsteret gjenspeiler hvordan kommunikasjonen foregikk i den siste delen av aksjonsforskningsprosessen, og ser slik ut:



Figur 5.5: Regler på metanivå som fører til at elevens matematiske resonnering utvides

I den utforskende rutinen benytter læreren seg av grep med høyt potensial innenfor kategorien utvide elevenes resonnering. Figuren viser hvordan reglene på metanivå resulterer i at elevene validerer sine narrativ på et høyt nivå. For å vise hvordan reglene på metanivå bidrar til å utvide elevenes matematiske resonnering, ser vi nærmere på et utdrag fra den siste aksjonen:

> Lærer: Gjorde dere det litt likt? Har dere laget med litt større tegning? Kan dere ikke bare se mot klassen og fortelle dem hva dere gjorde? *(lærer etterspør begrunnelse)*
> Elev: Først så tegna vi opp alle klærne. Og så fargela vi, og så tok vi alle genserne til en bukse, og det ble fem. Vi tok streker fra den første buksa til alle genserne, også skrev vi tallet. Også gjorde vi det samme bare uten å tegne strekene *(eleven øker narrativets sannhetsverdi)*
> Lærer: Hvorfor tok dere ikke streker fra de andre buksene da? *(lærer oppmuntrer til refleksjon)*
> Elev: Fordi vi visste at alle blir fem *(eleven øker narrativets sannhetsverdi)*
> Lærer: Så dere visste at det er ikke noe annerledes med de andre buksene? *(lærer oppmuntrer til refleksjon)*
> Elev: Ja, derfor er det til sammen 15 kombinasjoner av klær *(eleven formulerer et bevis)*

En regel på metanivå som regulerer kommunikasjonsmønsteret vist i eksempelet er at lærer forventer at elevene selv skal begrunne et narrativ for at det skal bli akseptert i diskursen. Læreren gjør dette ved å ta i bruk grep som utvider elevenes resonnering. Først etterspør lærer en begrunnelse, og oppmuntrer deretter til videre refleksjon frem til elevens matematiske resonnering har resultert i formulering av et bevis. Avslutningsbetingelsen blir dermed at eleven må forklare hvorfor narrativet skal aksepteres. Lærer oppfordrer elevene til å validere narrativet ved å forklare hvordan de har kommet frem til narrativet, og hvorfor narrativet er sant. Det er kun i den sistnevnte utforskende rutinen vi har identifisert at elevene var i stand til å formulere et bevis. Dette har sammenheng med avslutningsbetingelsen, hvor elevene blir utfordret til å overbevise diskursen om hvorfor narrativet skal aksepteres. Oppsummert fungerer læreren som en støtte for å fremme deres matematiske resonnering i en slik utforskende rutine.

Samspillet mellom læreren og elevgruppa har utviklet seg over tid, ved at vi ser en endring reglene på metanivå som styrer hvordan elevene skal validere sine narrativer.

I de to første delene av aksjonsforskningsprosessen var avslutningsbetingelsen for den utforskende rutinen at lærer akseptere et narrativ. I den siste delen var avslutningsbetingelsen at eleven selv skulle overbevise diskursen om gyldigheten til et narrativ.

6 Diskusjon

I dette kapittelet diskuterer vi hvordan lærerens pedagogiske grep fungerer som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering i en helklassesamtale. Analysen viser at elevenes resonnering har utviklet seg gjennom aksjonsforskningsprosessen. Vi ser at lærer benyttet grep fra alle kategoriene i rammeverket til Ellis et al. (2019), og at grep med høyt potensial forekom flest ganger i den siste aksjonen. Det ble identifisert to utforskende rutiner, hvor den ene utvidet og den andre stoppet elevenes mulighet til resonnering. I dette kapittelet diskuterer vi funn fra analysen opp mot tidligere forskning. Videre diskuterer vi hvordan lærergrep fra de ulike kategoriene påvirker elevenes resonnering. Deretter drøfter vi betydningen av reglene på metanivå som vi har identifisert, og ser dette i sammenheng med iverksatte tiltak og undervisningsformen. Vi avslutter kapittelet med å vurdere studiens kvalitet.

6.1 Lærer støtter elevenes matematiske resonnering når bestemte kategorier av grep benyttes på bestemte tidspunkt i samtalene

Resultatet fra vår studie er at lærer støtter elevenes resonnering ved å benytte seg av grep fra alle de fire kategoriene i rammeverket. Dette samsvarer med funn fra studien til Ellis et al. (2019). Analysen vår viser at grep fra de ulike kategoriene hadde ulik funksjon ut ifra når i samtalen de ble brukt. Ved at lærer benyttet seg av grep fra alle kategoriene, fikk klassemiljøet tilgang til den enkelte elev sin resonneringsprosess.

I vår studie benytter lærer seg av grep i kategorien *å lokke frem elevens resonnering* i presentasjon av et matematisk problem, eller i oppstarten av den påfølgende helklassesamtalen. I denne kategorien var grepet å lokke frem ideer mest fremtredende. Her stilte lærer spørsmål som "hva var det første dere tenkte når dere fikk oppgaven?". Grepene læreren benytter i denne fasen av samtalen fungerer som en støtte ved at grepene danner et utgangspunkt for elevenes matematiske resonnering. Deretter, når elevene responderer på lærerens spørsmål, reagerer læreren med et grep fra kategorien *å respondere på elevens resonnering.* Dette samsvarer med Ellis et al. (2019), som sier at grep i denne kategorien ofte benyttes i etterkant av at læreren har lokket fram elevens resonnering. Å validere et korrekt svar var det grepet som vi identifiserte flest ganger i denne kategorien. Læreren benyttet dette grepet for å aktivt bekrefte elevens ideer. Videre i samtalene forsøker lærer *å fremme elevens resonnering* ved å oppmuntre til å ta bruk flere løsningsstrategier. Ved bruk av spørsmål som "er det noen andre som har tenkt noe annet, eller tenkte det samme?", ble dette grepet en inngang til at flere elever fikk mulighet til å delta i samtalen. Når lærer aktivt bekrefter elevenes ideer og deretter oppmuntrer flere til å delta i samtalen på denne måten, engasjerer det flere elever til å dele sine matematiske resonnement. Vi har registrert at elevaktiviteten i klassen er høy når lærer benytter grepene i denne rekkefølgen. Slik fungerer lærer som en støtte i elevenes matematiske resonnering.

Studien til Mueller et al. (2014) konkluderer med at det er avgjørende å ta i bruk ulike kategorier av lærerhandlinger for å understøtte elevenes begrunnelser og få frem ulike former for resonnering. I vår studie benytter lærer seg av grep i kategorien *å utvide elevens resonnering* etter at han har fått tilgang til elevenes resonnering. I den siste aksjonen var det grepene *oppmuntre til refleksjon* og *etterspørre begrunnelse* som var mest fremtredende. Lærer fungerer som en støtte når han finner måter å ekspandere elevenes resonnering på, slik at alle i klassefellesskapet kan dra nytte av den utvidede resonneringsprosessen. Ved at lærer oppmuntrer til refleksjon får elevene tilstrekkelig støtte i å utvikle en mer sofistikert grad av matematisk resonnering. Forskningen til Mata-Pereira & da Ponte (2017) presiserer at ett enkelt spørsmål ofte ikke er nok til å avdekke nok detaljer om elevenes resonneringsprosesser. Dette sier noe om viktigheten av at en lærer benytter seg av spørsmål med ulik funksjon, og er i stand til å følge opp elevens respons med nye spørsmål. Den tidligere forskningen (f.eks. Ellis et al., 2019; Mata-Pereira & Ponte, 2017; Mueller et al., 2014) samsvarer med funn fra vår studie som viser at isolerte enkeltgrep ikke er tilstrekkelig for å få tilgang til elevenes matematiske resonnering. Analysen vår viser at lærerens grep fungerer best som en støtte i de tilfellene der lærer er bevisst det potensialet som ligger i grepet.

Oppsummert, i vår studie fant vi ut at lærer støtter elevenes matematiske resonnering når bestemte kategorier av grep benyttes på bestemte tidspunkt i samtalene. I løpet av en helklassesamtale bør alle kategoriene forekomme fordi grepene i de ulike kategoriene har ulik funksjon: a) å lokke frem elevenes resonnering får frem noen idéer, b) å respondere på elevenes resonnering bekrefter elevenes idéer, c) å fremme elevenes resonnering engasjerer flere elever til å dele sin matematiske resonnering, og d) å utvide elevenes resonnering ekspanderer elevene til å utvikle en mer sofistikert grad av matematisk resonnering. Selv om den sistnevnte kategorien er den som resulterer i at elevene eksempelvis formulerer et bevis, vil det være nødvendig at lærer benytter grep fra de foregående kategoriene underveis i den matematiske samtalen for å lede prosessen fram mot den fasen der dette skjer. Spørsmålene læreren stiller elevene underveis i samtalen legger grunnlaget for at de skal være i stand til å ekspandere sin matematiske resonnering.

6.2 Lærer støtter elevenes matematiske resonnering når eleven får eie sitt eget resonnement

Et annet resultatet fra vår studie er at når eleven får eie sitt eget resonnement, kan elevens matematiske resonnering utvikle seg fra begrunnelse til formulering av et bevis. I analysen ble det identifisert to utforskende rutiner som oppstod i samspill mellom lærer og elevene, hvor den ene stoppet og det andre utvidet elevenes resonnering. I begge tilfellene er intensjonen til læreren å løfte de individuelle ideene opp til klassefellesskapet, slik Ball og Bass (2003) foreslår. Videre diskuterer vi hvordan reglene på metanivå påvirker elevens mulighet til å eie sitt eget resonnement.

Vår studie viser at når eleven ikke får eie sitt eget resonnement, resulterer dette i at diskursen ikke får tilgang til elevens personlige matematiske resonnering. Når avslutningsbetingelsen er at lærer er den som validerer narrativet, og på den måten avslører elevens resonneringsprosess, får ikke eleven selv forklart sine egne tanker. Dette finner vi et eksempel på da et elevpar presenterer et narrativ, og lærer svarer "1+6 er lik 7. Ja for det ser jeg dere gjorde annerledes enn noen, dere ordna sånn med tegning også skrev dere også regnestykket. Det var lurt, da viser dere at dere to forskjellige måter med regnestykke og tegning. Da blir det veldig oversiktlig". Eksempelet viser hvordan læreren overtar elevenes matematiske resonnering, og fratar elevene mulighetene til å utvide sin egen resonnering. Mercer og Howe (2012) argumenterer for at elevene må få nok tid til å komme med reflekterte svar på spørsmålene stilt av lærer, noe eleven ikke får mulighet til i dette tilfellet. Når lærer allerede har avslørt resonneringsprosessen oppstår det ingen behov for å avdekke detaljer om elevenes resonneringsprosesser. Studien til Drageset (2016) fremhever at dersom lærere ikke er bevisst på hvordan ulike samtaletrekk påvirker elevens læring og tenkning, kan det redusere muligheten til å utvikle deres matematiske kompetanse. Dermed er lærerens evne til å lede matematiske samtaler en sentral del av lærerens undervisningskunnskap.

Studien vår viser at når lærer bruker grep som har høyt potensial til å utvide elevenes resonnering, får eleven eie sitt eget resonnement. En forutsetning for at dette skal skje er imidlertid at avslutningsbetingelsen er at elevene blir utfordret til å overbevise diskursen om hvorfor narrativet skal aksepteres. Når disse betingelsene er til stede skjer enten det at eleven øker narrativets sannhetsverdi ytterligere, eller at eleven formulerer et bevis. I den utforskende rutinen som utvider elevenes resonnering, stilte lærer spørsmål som inneholdt spørreord som *hvordan* og *hvorfor*. Dette var spørsmål som ga elevene mulighet til å eie sitt eget resonnement. Dersom lærer tilrettelegger for at eleven får eie sitt eget resonnement, fungerer lærer som en støtte i å fremme elevens matematiske resonnering. Våre funn her samsvarer med konklusjonen fra studien til Kyricou og Issit (2008), som er at lærerens spørsmål i helklassesamtaler bør utfordre eleven til å begrunne og forklare sine løsninger. Våre funn samsvarer også med funn fra studien til Wood (1994, som peker på at lærerens innspill bør ha til hensikt å klargjøre tenkningen bak og gjøre de aspektene som har størst betydning for forståelse, eksplisitte.

Vår studie viser at når reglene på metanivå kjennetegnes av at lærer benytter grep fra kategorien *læreren utvider elevens resonnering*, blir elevene tilstrekkelig utfordret og støttet til å klare å formulere et bevis. Ifølge Ball og Bass (2003) kan målrettede lærerhandlinger lede eleven fra empiriske argument mot et generisk eksempel. Hensikten er å få elevene bevisst på at selv om de har funnet løsningen til et problem, er ikke dette tilstrekkelig, de må komme med en form for gyldig argumentasjon. Vår studie viser på dette punktet til tilsvarende funn som Ellis et al. (2019) og Mata-Pereira & Ponte (2017). Ellis et al. (2019) påpeker at grep i kategorien *læreren utvider elevens resonnering* kan resultere i at elevene utvikler mer sofistikerte resonnement. Det betyr at elevene i økende grad blir i stand til å generalisere sine strategier eller ideer, og formulere bevis som er holdbare for aldersgruppen. Dersom elever skal formulere bevis, er de ifølge Mata-Pereira & Ponte (2017) avhengige av at deres matematiske påstander blir utfordret fra læreren. Videre må denne utfordringen følges opp av grep som støtter og veileder elevenes resonnering. Dette finner vi et eksempel på da fra vår studie da en elev forklarer tankegangen sin på et gitt problem, og lærer utfordrer eleven ved å spørre "hvorfor tenkte du at det var så viktig?". Videre kommer eleven med et mer sofistikert argument, som igjen blir fulgt opp og utfordret av lærer. I arbeidet med å utvikle reglene på metanivå har det mest sentrale tiltaket vært å utvikle elevenes forståelse for *hvordan* og *hvorfor* de vet at alle kombinasjonene er funnet. Dette ble gjennomført i heleklassesamtalene ved at lærer fokuserte på elevenes ulike løsningsstrategier og hvorfor de fungerte. Et slikt fokus forutsatte at læreren benyttet seg av grep med høyt potensial fra kategorien utvide elevenes resonnering, og at deres løsningsstrategier ble fulgt opp og utfordret av læreren. Slik fungerer lærer som en støtte i elevenes matematiske resonnering.

Undervisningsformen vi har brukt har trolig hatt betydning for utviklingen av rutinene og elevenes resonneringsferdigheter. Alle oppgavene som ble gitt i vår studie var åpne, utforskende kombinatoriske problemer som aktiviserte elevene. Dette samsvarer med hva Mueller et al. (2014) fant i sin studie. Oppgavedesignet er utformet slik at elevene skal ha mulighet til å formulere et bevis, slik Lin og Tsai (2013, her i Cervantes-Barraza et al., 2020) anbefaler. Elevene arbeidet med oppgavene i par, noe som medførte at de utvekslet ideer og utfordret hverandre, slik Mueller et al. (2014) foreslår. Høyst sannsynlig har alle de aktive valgene knyttet til oppgave- og undervisningsform bidratt til at elevenes matematiske resonnering har utviklet seg. Videre observerte vi at elevene var motiverte i arbeidet med oppgavene, og så at undervisningsformen bidro til høy elevdeltakelse. De ulike rammefaktorene ble trolig utgangspunktet for de to utforskende rutinene som oppstod i helklassesamtalene.

6.3 Vurdering av studiens kvalitet

De metodiske valgene som ligger til grunn for undersøkelsen har hjulpet oss med å beskrive hvordan og på hvilken måte endringen har funnet sted. Kredibiliteten til studien kan anses som høy fordi andre anerkjente forskere som Ball og Bass (2003) og Stylianides (2007) og deres forskning på matematisk resonnering på småtrinnet, peker på flere av de samme funnene som oss. Overførbarheten kan derimot ses på som lav fordi vi har valgt et lite, ikke-tilfeldig utvalg hvor elevene vi har studert er vant til å jobbe utforskende. Dermed kan man ikke generalisere funnene til å gjelde en hvilken som helst klasse. I tillegg har vi analysert undervisningssituasjoner fra ett klasserom med én lærer. Det innebærer at vi heller ikke kan uttale oss om hvordan lærere generelt påvirker elevers resonnering. Likevel mener vi at studien gir verdifull informasjon om hvordan en lærer kan tilrettelegge for at norske elever i begynneropplæringen kan utvikle sine resonneringsferdigheter. I tillegg bidrar studien til en økt innsikt i dynamikken i kommunikasjonen mellom lærer og en elevgruppe i helklassesamtaler i matematikk. Vi har forsøkt å gjøre studien transparent ved å gi rike beskrivelser av konteksten, innsamlingen av datamaterialet og gjennomgangen av analyseprosessen, slik Lincoln og Guba (1985) foreslår. På denne måten kan resultatet fra studien inspirere til å jobbe systematisk og reflektert i tråd med den nye læreplanen.

Metoden for datainnsamling har vært observasjon, uten at vi har supplert med intervju av lærer. I analyseprosessen har dermed ikke lærer fått mulighet til å uttale seg om hvilke intensjoner han har hatt med valg av grep i samtalene. Det betyr at vår tolkning av lærerens intensjoner kan prege analysen av aksjonsforskningsprosessen. Likevel har vi hatt en kontinuerlig dialog med lærer gjennom hele prosessen, både i planlegging og i etterkant av undervisning. På den måten har vi likevel en innsikt i hvilken intensjon læreren har hatt med de ulike lærergrepene i helklassesamtale med elevene. I tillegg er lærergrepene som kommer til syne i helklassesamtalen et resultat av de aksjonene som har vi sammen har kommet frem til for å utvikle matematikkundervisningen.

7 Avsluttende refleksjoner

I vår studie har vi undersøkt hvordan lærerens pedagogiske grep i en helklassesamtale kan fungere som en potensiell støtte for å fremme elevenes matematiske resonnering. Studien viser hvordan kommognisjon (Sfard, 2008) i kombinasjon med Jeannotte og Kieran (2017) og Ellis et al. (2019) kan benyttes for å identifisere rutinen som fremmer elevers matematiske resonnering. Ved å jobbe med en matematisk ide over tid, får elevene mulighet til å utvikle mer sofistikerte strategier og sin evne til matematisk resonnering. Resultatet viser at elever på 3. trinn er i stand til å formulere et bevis i arbeid med kombinatoriske problem når kommunikasjonsmønsteret kjennetegnes av at lærer benytter grep fra kategorien læreren utvider elevens resonnering.

Rammeverkene vi har benyttet i denne studien har gjort synlig hvordan lærer gjennom sine handlinger både kan stoppe og utvide elevers matematiske resonnering i begynneropplæringen. Lærere må kontinuerlig tilpasse lærergrepene ut ifra responsen til diskursen man er i. Vi mener at bevissthet rundt sin egen påvirkning som lærer kan bidra til produktive samtaler som legger til rette for matematisk resonnering i skolen. Studien viser viktigheten av å være systematisk og reflektert i egen praksis, og bevissthet omkring egen rolle og effekten av de handlingene man utfører. Dette kan være et godt redskap som er avgjørende for utvikling av egen profesjon, og noe vi anser som verdifull kunnskap som vi ønsker å ta med oss inn i læreryrket.

Resonnering og argumentasjon er ett kjerneelement i den nye læreplanen, og definerer aspekter ved faget som elevene bør lære for å være i stand til å kunne mestre og til å anvende faget (Utdanningsdirektoratet, 2020). I studien har vi funnet ut at det å jobbe systematisk over tid med samme type problemløsningsoppgaver med elever som er vant til å jobbe utforskende, har ført til at elevene resonnerer på et høyere nivå. En mulig studie kunne ha vært å prøve ut hvordan tilsvarende metode og undervisning hadde fungert på en elevgruppe som ikke er like kjent med dialogisk undervisning. Dersom en slik studie hadde fått tilsvarende funn som oss, ville dette bidratt til å øke overførbarheten for vår studie. Vi hadde også fått innhentet mer kunnskap om dynamikken i kommunikasjonen mellom læreren og elevene.

7.1 Studiens bidrag til forskningsfeltet

Det metodiske utgangspunktet for vår studie har vært aksjonsforskning, noe vi ble introdusert for i forbindelse med forskningsprosjektet vi har deltatt i. Denne metoden er lite brukt i tidligere masterstudier i matematikkdidaktikk, og kan dermed anses som innovativ. Aksjonsforskning er en metode som handler om å endre eller utvikle noe over tid i et likeverdig samarbeid mellom forsker og praksisutøver. Praksisperioden på høstsemesteret ble brukt til å sammen med lærer diskutere hva vi ønsket å endre og utvikle innenfor temaet matematisk resonnering. Vi kom frem til en felles målsetting, som ble utgangspunktet for selve studien. Dette muliggjorde å bruke praksisperioden på høstsemesteret til å innhente samtykke fra elevenes foresatte, og starte planleggingen av aksjonsforskningsprosessen.

Gjennom det likeverdige samarbeidet med praksislærer har vi som studenter følt et større eierskap til forskningen, samtidig som læreren har hatt nytte av studien i form av profesjonsutvikling. Et overordnet mål for forskningsprosjektet er å bidra til skoleutvikling. Et forslag fra vår side er at vi sammen med praksislærer presenterer funn fra forskningen til resten av kollegiet på skolen. Ved at arbeidet for studien har vært betydningsfull for oss som kommende matematikklærere, har det bidratt til en sterkere motivasjon fra vår side. Som lærer i dag er det ønskelig at man har et utviklingsfokus for å forbedre egen profesjonsutøvelse. Gjennom masteroppgaven og forskningsprosjektet LAB-TEd har vi fått erfaring med hvordan man kan forske i egen klasse ut ifra et valgt fokusområde, hvordan man kan identifisere et problem i klassen, systematisk sette inn tiltak, og reflektere over hvilken effekt det har hatt. I studien har vi lært noe om hvilken undervisning som egner seg godt for å jobbe med kjerneelementet resonnering og argumentasjon, samt hvilke kommunikasjonsmønstre som stopper og utvider elevenes resonnering. På bakgrunn av at vi selv har gode erfaringer med aksjonsforskning som metode og et tett samarbeid med skolen, anbefaler vi lærerutdanningen å introdusere denne metoden for masterstudenter i matematikk i fremtiden.

Referanser

Alexander, R. (2017). *Towards dialogic teaching. Rethinking classroom talk* (5. utg.). Dialogos.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I Pimm, D. (Red.). *Mathematics, teachers and children* (s. 216–238). Hodder & Stoughton.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27–44.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.

Cazden, C. (2001). Classroom discourse: *The language of teaching and learning* (2. utg.). Heinemann.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for research in mathematics education*, *24*(5), 428–441. https://doi.org/10.2307/749152

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Cervantes-Barraza, J.A., Hernandez Moreno, A. & Rumsey, C. (2020). Promoting mathematical proof from collective argumentation in primary school. *School Science and Mathematics*, 120(1), 4–14. https://doi.org/10.1111/ssm.12379

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. (2013). *Classroom discussions in math : A teacher's guide for using talk moves to support the common core and more, grades K-6* (3. utg.). Math Solutions.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. R. B. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). Routledge.

Dahl, H., Klemp, T. & Nilssen, V. (2020). Språklige ressurser, en forutsetning for produktivt elevsamarbeid. I Nilssen, V. & Høynes, S. M. (Red.). *Samtaleorientert matematikk - et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner.* (s. 161–191). Fagbokforlaget.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational studies in mathematics*, *85*(2), 281–304.

Drageset, O. G. (2016). Korleis lærarar leier ein matematisk samtale. I R. Herheim, & M. Johnsen-Høines (Red.). *Matematikksamtaler-undervisning og læring-analytiske perspektiv*, 169–180.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. I C. Mammana & V. Villani (Red.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (s. 37–52). Kluwer.

Ellis, A., Özgür, Z. & Reiten, L. (2019). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics education research journal*, *31*(2), 107–132. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0246-6

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational studies in mathematics*, *22*(5), 451–474. https://doi.org/10.1007/BF00367908

English, L. D. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The journal of mathematical behavior*, *15*(1), 81–112. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90042-5

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School science and mathematics*, *106*(3), 124–132. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18169.x

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. I Lester, F. K. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 225–256). NCTM

Graesser, A. C. & Person, N. K. (1994). Question asking during tutoring. *American educational research journal, 31*(1), 104–137. https://doi.org/10.3102/00028312031001104

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. I Grouws, D. A. (Red.),*Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 276–295). Simon and Schuster Macmillan.

Ing, M., Webb, N. M., Franke, M. L., Turrou, A. C., Wong, J., Shin, N. & Fernandez, C. H. (2015). Student participation in elementary mathematics classrooms: the missing link between teacher practices and student achievement? *Educational studies in mathematics*, *90*(3), 341–356. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9625-z

Jeannotte, & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

King, N. (2004). Using templates in the thematic analysis of text. I C. Cassell & G. Symon. (Red.), *Essential guide to qualitative methods in organizational research* (s. 256–271). SAGE Publications. https://doi.org/10.4135/9781446280119.n21

Kyriacou, C. & Issitt, J. (2008). What characterizes effective teacher-pupil dialogue to promote conceptual understanding in mathematics lessons in England in Key Stages 2 and 3. *EPPI-centre report no. 1604R*. Institute of Education, University of London.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Mata-Pereira, J. & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational studies in mathematics*, *96*(2), 169–186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

McNiff, J. (2013). *Action research: Principles and practice*. Routledge.

Mercer, N., Wegerif, R. & Dawes, L. (1999). Children's talk and the development of reasoning in the classroom. *British educational research journal, 25*(1), 95–111. https://doi.org/10.1080/0141192990250107

Mercer, N. & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education*, *20*(6), 507–528. https://doi.org/10.2167/le678.0

Mercer, N. & Howe, C. (2012). Explaining the dialogic processes of teaching and learning:The value and potential of sociocultural theory. *Learning, culture and social interaction*, *1*(1), 12–21. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2012.03.001

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in mathematics learning*, *7*(2), 1–20. https://doi.org/10.1080/24727466.2014.11790339

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

NESH. (2021, 16. desember). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.* Forskningsetikk. Hentet fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske -retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Nowell, L. S., Norris, J. M., White, D. E., & Moules, N. J. (2017). Thematic analysis: Striving to meet the trustworthiness criteria. *International journal of qualitative methods*, *16*(1), 1–13. https://doi.org/10.1177/1609406917733847

Palmér, H. (2016). What is the difference? Young children learning mathematics through problem solving. *Mathematics education in the early years* (s. 255–266). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_14

Piaget, J. & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. Routledge & Kegan Paul.

Postholm, M. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Høyskoleforlaget.

Postholm, M. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Rønning, F. (2020). Opportunities for language enhancement in a learning environment designed on the basis of the theory of didactical situations. *ZDM–Mathematics education*, *53*(2), 305–316. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01199-x

Rønning, F & Burheim, O. T. (2020). Betydningen av en faglig og fagdidaktisk føranalyse i utviklingen av et undervisningsforløp. I Nilssen, V. & Høynes, S. M. (Red.). *Samtaleorientert matematikk – et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner.* (s. 121–158). Fagbokforlaget.

Skott, J., Hansen, H. & Jess, K. (2008). *Delta: fagdidaktik*. Forlaget Samfundslitteratur.

Store norske leksikon. (2017, 30. mai). *Permutasjon.* Snl. Hentet fra https://snl.no/permutasjon

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 289–321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258–288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford university press.

Stylianides, A. J. & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge forteaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(4), 307–332. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Sfard, A. (2006, A). Participationist discourse on mathematics learning. I *New mathematics education research and practice* (s. 153–170). Brill Sense.

Sfard, A. (2006, B). Telling ideas by the company they keep: A response to the critique by Mary Juzwik. *Educational researcher*, *35*(9), 22–27. https://doi.org/10.3102/0013189X035009022

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The journal of* *the learning sciences*, *16*(4), 565–613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Shin, J., & Steffe, L. P. (2009). Seventh graders' use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorial problems. *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education.* Georgia state university.

Tiller, T. (2004). *Aksjonsforskning i skole og utdanning*. Høyskoleforlaget

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1. – 10. trinn. (MAT01-05).* Kjerneelementer. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1. – 10. trinn. (MAT01-05)*. Fagets relevans og sentrale verdier. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier?lang=nob

van Oers, B. (2013). Communicating about number: fostering young children's mathematical orientation in the world. I *Reconceptualizing early mathematics learning* (s. 183–203). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_10

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. I Rieber, R.W. & Carton, A.C. (Red.), *The collected work of L.S Vygotsky. Vol. 1: Problems of general psychology* (s. 39–285). Plenum.

Wood, T., Williams, G. & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for research in mathematics education, 37*(3), 222–255. https://doi.org/10.2307/30035059

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. I Lerman, S. (Red.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (s. 149–168). Springer.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The journal of mathematical behavior*, *21*(4), 423–440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematial norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for reseach in mathematics education,* 27 (4), 458–477. https://doi.org/10.2307/749877

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I Kilpatrick, J., Martin, W.G. & Schifter, D. (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227–236). NCTM.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring
Vedlegg 2: Prosessdokument

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Informasjonsskriv og samtykkeskjema
Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet «utvikling av elevers evne til resonnering på småtrinnet»

Dette er et spørsmål til deg om ditt barn vil delta vårt forskningsprosjekt. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Bakgrunn og formål
Dette er et forskningsprosjekt som del av en masteroppgave. Masteroppgaven vil omhandle resonnering og argumentasjon, som er et kjerneelement i den nye læreplanen LK20. Matematisk resonnering er et overordnet begrep som omhandler matematisk argumentasjon og bevis. Vi ønsker at elevene skal bli i stand til å generalisere matematiske sammenhenger. Det betyr å kunne se de generelle sammenhengene i ulike matematisk mønster eller strukturer. Innsamlingen av data vil skje i den vanlige undervisningen ved at vi observerer helklassesamtaler eller elevarbeid i mindre grupper.

Formålet med prosjektet er å finne ut hvilke implikasjoner som kan skape gode betingelser for utvikling av elevers evne til resonnering i matematikkundervisningen på 3. trinn. Dette kan eksempelvis være undervisningsmetoder, hvilke grep lærer gjør i undervisningen, hva slags klasseromskultur det er, hvilke konkretiseringsmateriell som tas i bruk, og hvilke matematikkoppgaver elevene får.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Grunnskolelærerutdanningen ved NTNU er ansvarlig for prosjektet. Ledere av forskningsprosjektet er Anne Trondsen og Mari Sørli. Dersom det er noen spørsmål knyttet til prosjektet kan du kontakte vår veileder Yvonne Grimeland på mailadresse yvonne.grimeland@ntnu.no.

Hvorfor får ditt barn spørsmål om å delta?
Vi spør ditt barn om å være med fordi vi skal gjennomføre praksisperioden vår i deres klasse.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?
Metode vi skal benytte oss av i innsamlingen av datamateriale er gruppeintervju og observasjon. Vi samles inn datamateriale ved hjelp av lydopptak og videoopptak. Disse opplysningene lagres på en ekstern harddisk og vil slettes etter at materiale er transkribert og anonymisert. Her er noen eksempler på spørsmål vi kan stille barnet ditt i et gruppeintervju:

- Kan du forklare hva du har tenkt her?
- Er det noen som har løst oppgaven på en annen måte?
- Hvorfor var det lurt å tenke sånn?
- Vil denne metoden alltid fungere? Hvorfor det?

For en fullstendig intervjuguide, ta kontakt med oss.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Dersom du ikke ønsker å delta i studien, vil vi sikre oss at du ikke fanges opp på opptak. Hvis det kun er video du ikke ønsker å bli fanget opp på, vil vi plassere deg utenfor kameraets rekkevidde og du vil kunne gjennomføre undervisningen som normalt. Dersom du derimot ikke ønsker at din stemme skal fanges opp på lydopptak, må en av studentene/forskerne gjennomføre den aktuelle undervisningen.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. De som vil ha tilgang til opplysningene i tillegg til oss, er våre praksisveiledere fra NTNU, samt vår praksislærer. Alle personopplysninger vil bli anonymisert og datamaterialet vil bli lagret på en innelåst og kryptert ekstern harddisk.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er juni 2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- Innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og få utlevert en kopi av opplysningene
- Å få rettet personopplysninger om deg
- Å få slettet personopplysninger om deg
- Å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med: NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anne Trondsen	Mari Sørli
(Forsker)	(Forsker)

Samtykkeerklæring
Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket, og har mottatt og forstått informasjon om prosjektet "*utvikling av elevers evne til resonnering på småtrinnet*" samt fått anledning til å stille spørsmål.

Barnets navn/klasse:

____

Jeg samtykker til at mitt barn:
- deltar i undervisning med lyd- og filmopptak
- deltar i gruppeintervju med lyd- og filmopptak

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

____

(Signert av prosjektdeltakers foresatt, dato)

Vedlegg 2: Prosessdokument

Fra det øyeblikket vi bestemte oss for å gjennomføre masteroppgaven sammen, har samarbeidet vært kjennetegnet av et jevnt og godt arbeid. Vi er begge studenter som jobber strukturert og systematisk, og har fra studiestart skrevet flere oppgaver sammen, inkludert FoU-oppgaven tredje studieår. Derfor var vi godt kjent med hverandres målsetninger og forventninger, samt måte å skrive og studere på. Vi ble enige om å komme raskt i gang med planlegging av masteroppgaven. Allerede i august 2021 fikk vi godkjent søknad til NSD. I løpet av høstsemesteret opprettet vi en felles mappe i google disk, hvor alt lå tilgjengelig for begge. Dette gjaldt både artikler, veiledningsdokumenter, transkripsjoner, oppgaver elevene jobbet med i undervisningen, refleksjoner og en fremdriftsplan. I tillegg opprettet vi en ukeplanlegger som vi har benyttet oss av hele våren. Her har vi lagt inn alle møtetidspunkt som har foregått både digitalt og fysisk på skolen. Planleggeren har også inkludert mål for de ulike dagene, samt hva som skulle ferdigstilles i løpet av ukene. På denne måten har vi hele veien hatt kontroll på hvordan vi ligger an til enhver tid, og sett at vi kommer i mål med oppgaven. Det har også gitt oss mulighet til å se når vi ønsker veiledning på de ulike delene av oppgaven. Gjennom å gi oss selv ulike tidsfrister i form av å skrive inn i ukeplanleggeren, har vi sørget for at vi har tid til å revidere i etterkant av hver veiledning.

Høsten 2021 deltok begge to aktivt i planlegging og gjennomføring av datainnsamlingsperioden. I etterkant samarbeidet vi i arbeidet med å transkribere, slik at det skulle bli så nøyaktig som mulig. Både ansvars- og arbeidsfordeling har vært likt fordelt gjennom hele prosessen. I arbeidet med å finne og lese aktuelle artikler fordelte vi lesestoffet likt mellom oss. Da vi ble enige om hvilke teoretiske rammeverk vi skulle benytte oss av, ble det viktig at begge to satt seg godt inn i disse slik at vi hadde den samme forståelsen når vi skulle begynne å analysere. I arbeidet med analysen jobbet vi sammen og diskuterte fortløpende hvordan kodene skulle benyttes, og om kodene fungerte til den hensikten vi ønsket.

På bakgrunn av at vi har skrevet en del tekster sammen tidligere og begge stiller høye krav til seg selv, har vi ikke vært redde for å gi hverandre konstruktive tilbakemeldinger. For å få oppgaven så god som mulig har vi diskutert mye i løpet av planleggingen og skriveprosessen. Vi har brukt mye tid på å lese gjennom og revidere alle delene av oppgaven sammen. På denne måten er all skriving et resultat av begges betraktninger og språk.

Kunnskap for en bedre verden