

Jørgen Sundbø Jacobsen

# Elevers forståelse for firkanters egenskaper

En kvalitativ undersøkelse av fjerde-trinnselevers kategorisering av firkanter

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.-7. trinn -  
masterstudium (5-årig)

Veileder: Anita Valenta

Mai 2022



Jørgen Sundbø Jacobsen

# **Elevers forståelse for firkanters egenskaper**

En kvalitativ undersøkelse av fjerde-trinnselevs  
kategorisering av firkanter

Masteroppgave i Grunnskolelærerutdanning 1.-7. trinn -  
masterstudium (5-årig)  
Veileder: Anita Valenta  
Mai 2022

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap  
Institutt for lærerutdanning



**NTNU**

Kunnskap for en bedre verden



## Sammendrag

Hensikten med studien er å få et innblikk i 4.trinnselevers forståelse for geometriske figurers egenskaper, ved å undersøke deres forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner. I studien besvarer jeg problemstillingen: *Hva kjennetegner noen 4.trinnselevers kategorisering av firkanter?*

Bakgrunnen for studien er en undersøkelse av Fujita & Jones (2007) som viser at over halvparten av elever som er over gjennomsnittlig sterke i matematikk i hovedsak gjenkjenner firkanter basert på prototypiske eksempler, selv om de kjenner den riktige definisjonen.

Studien jeg har gjennomført har en kvalitativ tilnærming og bygger på transkripsjon av videoptak i en klasse på 4. trinn. Utvalget til undersøkelsen består av ni elever, men ikke alle er representert i analysen. Alle elevene gjennomførte et sett med oppgaver som er inspirert av lignende oppgaver fra en undersøkelse av Fujita & Jones (2007), samt individuelle halvstrukturerte intervjuer om firkanters inklusjonsrelasjoner.

I studien gjennomfører jeg en tematisk analyse av elevenes kategorisering av firkanter ved bruk av van Hiele (1986) nivåmodell for geometriforståelse, Tall & Vinnars (1981) rammeverk for begrepsbilde og begrepsdefinisjon, og Fujita & Jones (2007) rammeverk for firkanters inklusjonsrelasjoner.

Resultatene viser at elevene anvender kunnskap om egenskapene til firkanter i større grad enn det helhetlige utseendet. Elevene i denne undersøkelsen viser forståelse for en hierarkisk måte å kategorisere firkanter på, men preges av prototypiske bilder av rektangler.

## Abstract

The overall purpose of this thesis is to gain an insight to 4th graders' understanding of the properties of geometrical figures, by studying their understanding of inclusion relations of quadrilaterals. In my thesis, I answer the issue: *What are the characteristics of some 4th grade students' categorization of quadrilaterals?*

The background for this study is another study by Fujita & Jones (2007) which suggests that more than half of above average mathematical learners in general recognise quadrilaterals based on prototypical examples, even though they are familiar with the correct concept definition.

The study I have conducted has a qualitative approach and builds upon transcription of video recordings in a 4th grade school class. All the students conducted a set of tasks inspired by similar tasks taken from a study by Fujita & Jones (2007), as well as individual semi-structured interviews about inclusion relations of quadrilaterals.

In my study, I conduct a thematic analysis of the students' categorization of quadrilaterals by using van Hiele's (1986) model of geometric thinking, Tall & Vinner's (1981) theoretical framework for concept image and concept definition, and Fujita & Jones' (2007) framework for inclusion relations of quadrilaterals.

The results show that the students apply knowledge of the properties of quadrilaterals to a greater extent than the overall appearance. The students show understanding of a hierarchical way of categorizing quadrilaterals, but are impacted by prototypical images of rectangles.



## Forord

*Luke, you're going to find that many of the truths we cling to depend greatly on our own point of view – Obi-Wan Kenobi*

Med denne masteroppgaven setter jeg punktum for fem års lærerutdanning ved NTNU, og setter kursen videre mot en karriere som grunnskolelærer. I forkant av det siste semesteret forestilte jeg meg at det skulle bli avslappende å slippe å forholde seg til faste obligatoriske oppmøter, og heller være sjef for egen arbeidstid. Og godt var det nok at oppmøtekravet var minimalt, for semesteret har vært alt annet enn avslappende.

Først og fremst ønsker jeg å takke veileder Anita Valenta, som satt skapet på plass for en student uten mål og retning, for så å stake ut kursen og legge veien, og videre har kommet med konstruktive tilbakemeldinger og motiverende bekreftelser på at den en gang så retningsløse studenten var på god vei. Selv om tilbakemeldingene til tider har fått meg til å stille spørsmålstegn til hva det er jeg driver med, har jeg forstått at hennes mål har vært å bidra til en best mulig masteroppgave.

Jeg vil rette en stor takk til støttende medstudenter for et godt samarbeidsmiljø, hvor vi har kunnet be om råd og veiledning fra hverandre, som har vært til stor hjelp i skrivingen av denne masteroppgaven. I perioder har jeg rådført meg med enkelte av mine medstudenter på det som føles som daglig basis, så noen fortjener en ekstra spesiell takk, men jeg velger å forholde meg til prinsippet «Ingen nevnt – ingen glemt». Til mine gode samarbeidspartnere: *For the Quest is achieved, and now all is over. I am glad you are here with me. Here at the end of all things – Frodo Baggins*

Takk også til skole, kontaktlærer og elever hvor min undersøkelse har funnet sted, som av hensyn til personvern dessverre ikke kan nevnes med navn. Deres gjestfrihet og tilrettelegging har vært en stor del av gjennomføringen av min masteroppgave.

Selvfølgelig må en stor takk også rettes til min samboer Ann-Sofie for tålmodighet, motivasjon og veiledning underveis. Hennes støtte og korrekturlesing har vært uvurderlig for å gjennomføre oppgaven.

Til slutt ønsker jeg også å rette en takk til familie og venner for deres oppmuntrende tilbakemeldinger. Min mors påminnelser om at denne oppgaven markerer slutten på det jeg har jobbet med de siste fem årene har bidratt til å holde meg fokusert og målrettet.

Trondheim, mai 2022  
Jørgen Sundbø Jacobsen





# Innhold

1 Innledning .....	1
1.1 Studiens oppbygging .....	2
2 Teori .....	3
2.1 Læringssyn .....	3
2.2 Van Hieles modell for geometriforståelse .....	3
2.2.1 Van Hiele-modellens nivåer .....	4
2.2.2 Elevers utvikling fra ett nivå til neste i van Hieles modell .....	5
2.3 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon .....	6
2.4 Figurforståelse.....	7
2.5 Forståelse for inklusjonsrelasjoner til firkanter .....	8
2.5.1 Prototypefenomenet .....	9
3 Metode .....	11
3.1 Kvalitativ forskning .....	11
3.1.1 Det hermeneutiske vitenskapssynet .....	11
3.2 Intervju .....	12
3.2.1 Halvstrukturert intervju .....	13
3.2.2 Fokusgrupper / Gruppeintervju .....	14
3.3 Observasjon .....	14
3.3.1 Deltakende observasjon .....	15
3.4 Utvalg .....	15
3.5 Oppgave .....	16
3.5.1 Oppgavens utforming .....	16
3.5.2 Bakgrunn for oppgaven.....	17
3.6 Transkripsjon .....	17
3.7 Tematisk analyse .....	18
3.8 Sensitivitet.....	19
3.9 Validitet og reliabilitet.....	20
4 Resultat.....	22
4.1 Parallellogrammer har linjer som aldri vil krysse hverandre .....	22
4.2 Rektangler tillegges unødvendige egenskaper.....	25
4.3 Elevene viser forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner .....	28
4.3.1 Kvadrat er ikke et rektangel, men de er begge parallellogrammer .....	28
4.3.2 Kvadrat er ikke et rektangel, og rektangel er ikke et parallellogram.....	30
4.4 Beskriver figurers utseende.....	31
4.5 Beskriver figurers egenskaper, og sidene vektlegges over vinklene .....	33
4.5.1 Sammenhenger mellom egenskaper .....	37
5 Drøfting .....	38

5.1 Forståelse for inklusjonsrelasjoner til firkanter .....	38
5.2 Prototypiske bilder av rektangler .....	39
5.3 Parallelogrammer klassifiseres ut fra to par parallelle linjer .....	40
5.4 Sidene vektlegges over vinklene .....	40
5.5 Prototypisk forståelse for parallelogrammer er nesten fraværende.....	41
5.6 Studiens begrensninger .....	42
6 Avslutning .....	43
6.1 Videre forskning .....	43
Referanseliste .....	45
Vedlegg 1: Oppgave om firkanters inklusjonsrelasjoner.....	1
Vedlegg 2: Intervjuguide .....	4
Vedlegg 3: NSD- godkjenning .....	6
Vedlegg 4: Informasjonsskriv til elever og foresatte.....	9

## Figurliste

Figur 1: Kvadrat.....	4
Figur 2: Trekant og konkav firkant.....	6
Figur 3: Oppgave for studien .....	17
Figur 4: Firkanter som inngår i oppgave 1a-d i studiens oppgave.....	22
Figur 5: Firkanter som inngår i oppgave 1a-d i studiens oppgave.....	24

# 1 Innledning

Geometri er et fagområde som bestandig har hatt en sentral plass i matematikkundervisningen. Det er et område i matematikk som dukker opp i alt fra dataanimasjon, til arkitektur og ingeniørvitenskap (Van de Walle et al., 2015). I grunnskolen handler geometri i hovedsak om størrelse, form og plassering av figurer i plan og rom (Jess et al., 2008). I denne masteroppgaven vil jeg ta for meg form-aspektet ved geometri, og undersøke hva slags forståelse elever på 4. trinn har for egenskaper ved geometriske former.

I alle aspekter av matematikken er det et behov for resonnement og å argumentere for og imot ulike påstander; et behov som har blitt usynliggjort i majoriteten av matematikkundervisning, hvor fokus har ligget på å lære og følge formler og algoritmer. Et av kjerneelementene i læreplanen LK20 er *Resonnering og argumentasjon*, og begrunnes med at elevene skal bli i stand til å utforme egne resonnement både for å forstå og for å løse problemer. LK20 sier at matematisk resonnering handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15).

Når elevene etter hvert skal begynne å lære om og anvende bevis i matematikkundervisningen, vil forståelse for matematiske egenskaper være nødvendig for å fremme forståelse gjennom forklaring, ved at man viser hvorfor en påstand er sann og logiske sammenhenger mellom matematiske ideer. I følge Yackel & Hanna (2003) bidrar bevis i størst grad i matematikkundervisningen som en måte å forklare og kommunisere. Det vil si at bevis både fungerer for å vise at noe er sant, men også hvorfor (Reid & Vargas, 2017; Yackel & Hanna, 2003). Altså vil man gjennom forståelse for geometriske figurers egenskaper kunne bruke disse til å følge og utføre bevis i geometrien.

Et forskningsområde som kan bidra til å fremme utviklingen av geometrisk tenking og matematisk argumentasjon, er inklusjonsrelasjonene til firkanter. Dette forskningsområdet vil være spesielt nyttig for deduktiv resonnering og bevis (Fujita & Jones, 2007). For at elever skal kunne klare å resonnerer rundt hvorvidt det er en inklusjonsrelasjon mellom rektangel og parallelogram – altså at rektangel er en type parallelogram, behøver de både å kunne bearbeide bildet av figuren i hodet, og å undersøke egenskapene til figuren. For eksempel kan vi si at en formell definisjon av et rektangel er «en firkant hvor to og to sider er like lange, og alle vinklene er like». I denne definisjonen blir ikke parallelle linjer eksplisitt nevnt. For å komme frem til at dette også er et parallelogram kan elever benytte seg av flere forskjellige tilnærminger. Dette kan blant annet være å tegne eller se for seg et rektangel og gjenkjenne parallelle linjer, å komme frem til at de like vinklene i figuren gjør at den har to sett med parallelle linjer, eller å referere til en definisjon av et parallelogram og sammenligne denne med hva som kan observeres på et rektangel (Fujita, 2010, s. 60).

Inklusjonsrelasjoner til firkanter er et kjent tilfelle hvor mange elever opplever problemer. Et slikt problem kan for eksempel være at elever kan ha et lite fleksibelt bilde av enkelte former, og dermed stå fast i tankegangen om at «rektangler er ikke parallelogrammer, fordi parallelogrammer er skjeve». Flere studier har rapportert denne type utfordringer (f.eks. de Villiers, 1994; Hershkowitz, 1990; Monaghan, 2000;

Nakahara, 1995; Okazaki, 1995; Usiskin et al., 2008). Disse problemene anses som et viktig forskningsområde innenfor undervisningen av matematikk.

I arbeidet med masteroppgaven vil jeg analysere et datamateriale jeg har hentet inn ved å gjennomføre et oppgavearbeid og individuelle intervjuer med noen 4.trinnselever fra Trøndelag. Analysen gjøres med fokus på hva slags forståelse elever på 4. trinn har for geometriske figurers egenskaper, og hvordan dette påvirker deres kategorisering av firkanter. Gjennom analysen vil jeg forsøke å besvare forskningsspørsmålet:  
*Hva kjennetegner noen 4.trinnselevers kategorisering av firkanter?*

## 1.1 Studiens oppbygging

I masteroppgaven presenterer jeg først relevant teori for oppgaven, for å kunne analysere datamaterialet og besvare forskningsspørsmålet. Temaene som presenteres i teorikapitlet vil være begrepsbilde og begrepsdefinisjon, van Hieles modell for geometriforståelse, figurforståelse, firkanters inklusjonsrelasjoner og prototypeteori. Jeg presenterer også tidligere forskning som er relevant for mitt forskningsspørsmål.

Videre følger et metodekapittel hvor jeg presenterer hvilke metoder jeg har tatt i bruk for å hente inn data, og begrunnelse for de metodiske valgene. Her diskuterer jeg også de etiske aspektene ved metodene, samt kvaliteten på undersøkelsen.

I det påfølgende analysekapitlet presenterer jeg en tematisk analyse av funnene i datamaterialet. Her har jeg utredet ulike temaer på bakgrunn av det teoretiske rammeverket, som bidrar til å besvare forskningsspørsmålet.

I drøftingskapitlet knytter jeg funnene opp mot det teoretiske rammeverket, og sammenligner funnene fra undersøkelsen min med tidligere forskning som undersøkelsen baserer seg på, og hva slags implikasjoner dette kan ha for videre forskning, før jeg avslutningsvis foretar en oppsummering i et avslutningskapittel.

## 2 Teori

I dette kapitlet presenterer jeg forskningsteori som er relevant for å analysere datamaterialet jeg har hentet inn i min forskningsundersøkelse om geometriske figurer. Dette er teori som jeg anser som relevant for å besvare forskningsspørsmålet «hva kjennetegner noen 4.trinnslevers kategorisering av firkanter?».».

### 2.1 Læringssyn

Masteroppgaven min er preget av et konstruktivistisk læringssyn, ettersom den i stor grad handler om relasjonell forståelse knyttet til geometri. Et konstruktivistisk læringssyn handler om hva kunnskap er og hvordan læring foregår (Imsen, 2006). Fra konstruktivismens ståsted tilegner man seg kunnskap når man utfører handlinger og danne seg erfaringer fra disse. Ifølge Imsen (2006) oppstår erfaring når man ser hva handlingen fører til. Dermed bidrar man selv til å tilegne seg kunnskap gjennom sine egne handlinger. Læring kan ifølge Piaget beskrives som å lagre kunnskap fra en ytre påvirkning. Han bruker ordet utvikling om læring hvor det kreves forståelse (Imsen, 2006). Konstruksjon er sentralt for læring, ettersom læring ikke først og fremst går ut på å pugge og memorere informasjon, men heller å omdanne informasjonen til sin egen individuelle forståelse, og dermed konstruere kunnskap (Imsen, 2006).

Piaget beskriver to ulike former for kunnskap: Figurativ kunnskap og operativ kunnskap (Imsen, 2006). Den figurative kunnskapen går ut på å kjenne til utseendet og egenskapene til forskjellige objekter. Denne kunnskapen baserer seg på fysisk læring. Figurativ kunnskap begrenser seg som regel til isolerte sansebilder, som for eksempel at man husker navnet til geometriske figurer. Innenfor geometrien er det typisk at elever kjenner igjen figurer basert på utseendet til figuren, og ikke egenskapene. Nettopp disse karakteristikkenene er det som kjennetegner nivå 1 i van Hieles modell for barns geometriforståelse. Denne typen kunnskap vil ikke bidra til at eleven utvikler sin forståelse. Operativ kunnskap derimot, baserer seg på handlingen overfor objektene fremfor egenskapene man kan observere hos dem. Denne kunnskapen bygger på logikk, og blir elevens egne kunnskap. Gjennom tilegnelse av operativ kunnskap vil elevene danne seg forståelse for sammenhengene mellom utseendet og egenskapene til geometriske figurer, og dermed bidrar den til å utvikle elevenes geometriforståelse i henhold til van Hieles modell (Imsen, 2006).

Ifølge en konstruktivistisk læringstilnærming, bygger eleven kunnskapen sin basert på allerede kjente begreper, og ved å bygge videre på dem. Med kjente begreper menes begreper som eleven kjenner til, og som læreren kan bruke i læringen av nye begreper. Derfor bør man kun inkludere begreper som eleven allerede kjenner til, når man skal definere et nytt begrep på en passende didaktisk måte (Winicky-Landman & Leikin, 2000).

### 2.2 Van Hieles modell for geometriforståelse

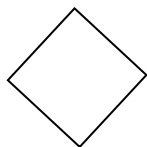
Van Hiele-modellen tar for seg barns geometriforståelse. Ifølge van Hiele (1986) utvikler barns forståelse for geometri seg gjennom fem nivåer. Van Hieles modell beskriver hvilke ferdigheter elevene skal besitte på hvert nivå. Van Hieles modell for geometriforståelse fungerer som en slags paraply for resten av det teoretiske rammeverket, ettersom disse teoriene i stor grad beskriver ferdigheter eller aspekter som inngår i flere av nivåene i

van Hieles modell. Formålet med van Hiele-modellen i dette teoretiske rammeverket er å bruke funnene i analysen til å si noe om nivået for geometriforståelse til deltakerne. Ved å se hva som kjennetegner elevenes klassifisering av firkanter, kan vi gjøre en beregning av hvilket nivå de ligger på i van Hieles modell. Gutiérrez, Jaime & Fortuny (1991) mener disse begrepene er sentrale for å beskrive geometriforståelsen til elevene innenfor de forskjellige nivåene: Identifisering av gruppen som en geometrisk figur hører til i, definisjon av et begrep, klassifisering av geometriske figurer i ulike grupper, og bevis av påstander eller egenskaper. Når det gjelder å definere et begrep, forstår man dette ut fra to ulike utgangspunkt: Å lese definisjoner (altså å anvende definisjoner man blir presentert) og å utlede definisjoner (utrede definisjoner for grupper av geometriske figurer).

På grunnskolenivå vil vi nok i hovedsak komme borti nivåene 1-3 av van Hieles modell, så jeg vil vektlegge disse i større grad enn nivå 4 og 5. I kapittelet under beskriver jeg hva som kjennetegner de fem nivåene.

## 2.2.1 Van Hiele-modellens nivåer

### Nivå 1: Visualisering/gjenkjennelse:



Figur 1: Kvadrat

Nivå 1 kjennetegnes ved at elevene gjenkjenner geometriske figurer ut fra hvordan figuren ser ut. Altså ser elevene kun på egenskaper som henviser til utseendet til figuren. En elev som kaller figuren over for en «diamant» istedenfor «kvadrat» vil sannsynligvis være på nivå 1. På dette nivået bygger elever på gjenkjennelse av den helhetlige figuren, og har ikke konsept for egenskapene til figuren. Årsaken til at eleven ikke kaller figuren for et kvadrat, kan være at eleven i hovedsak har sett kvadrater som står i «standardposisjon», og dermed vil ha utfordringer med å gjenkjenne kvadratet når det står i andre posisjoner. For å motvirke dette er det viktig at læreren legger opp til arbeid som kan bidra til rike erfaringer – gjerne ved bruk av konkrete, og ikke bare figurer på tavla eller i boka (van Hiele, 1986; Smestad, 2008).

Elever som befinner seg på Nivå 1 er ikke i stand til å lese matematiske definisjoner, og for mange vil navnet til figuren være selve definisjonen. Elever på dette nivået vil heller ikke kunne se sammenhenger mellom forskjellige grupper av geometriske figurer, eller sammenhenger mellom to figurer innenfor samme gruppe hvor ulikhetene i utseende er store (van Hiele, 1986; Smestad, 2008).

### Nivå 2: Analyse

Endringen vi ser fra Nivå 1 til Nivå 2 er at eleven legger fokuset på figurenes *egenskaper*. En elev som befinner seg på Nivå 2 vil for eksempel kunne se at rektangler er rettvinklede firkanter. Elevene danner seg en forståelse for at utseendet og egenskapene til figuren har en sammenheng. På dette nivået tar elevene i bruk mer enn kun det

visuelle, og vil være i stand til å karakterisere og kategorisere geometriske figurer basert på egenskaper. Elevene anvender kunnskap om geometriske figurer, og knytter kunnskapen til den visuelle figuren. Riktignok vil ikke en elev på Nivå 2 være i stand til å resonnerer seg frem til at dersom alle rektangler er rettvinklede vil dette medføre at alle rektangler har to og to sider som er parallelle (van Hiele, 1986; Smestad, 2008).

På Nivå 2 vil eleven være i stand til å liste opp hvilke egenskaper et rektangel har, men vil ikke kunne si hvilke egenskaper som er *nødvendige* og hvilke som er *tilstrekkelige* for å kunne kalle figuren et rektangel. Når man etter hvert innfører nye figurer, vil elever på Nivå 2 kunne håndtere definisjoner av figuren, mens elever på Nivå 1 kun vil huske hvordan den nye figuren ser ut (van Hiele, 1986; Smestad, 2008).

### Nivå 3: Uformell deduksjon/logisk ordning

Elever som har nådd Nivå 3 vil ha forståelse for grunnleggende definisjoner for geometriske figurer. På dette nivået vil elever være i stand til å forstå sammenhenger mellom ulike egenskaper til en figur og mellom ulike figurer. Her vil for eksempel eleven kunne fastslå at alle kvadrater også er rektangler, ettersom kvadratet har alle egenskapene som rektanglet har. På dette nivået kan eleven også følge uformelle bevis, og i tillegg forstå at kvadratsdefinisjonen «Et kvadrat er en firkant hvor alle sidene er like lange, alle vinklene er  $90^\circ$  og sidene er parvis parallelle» inneholder en opplysning som er overflødig (hvis alle vinklene er  $90^\circ$ , vil automatisk sidene være parvis parallelle, så det vil være nok å skrive at alle vinklene er  $90^\circ$ /rette). Det vil si at elever på Nivå 3 er i stand til å se hvilke egenskaper som er tilstrekkelige for å oppfylle definisjonen til en geometrisk figur (van Hiele, 1986; Smestad, 2008).

### Nivå 4: Deduksjon

Dette nivået handler om deduktive systemer, slik som Euklid forsøkte å bygge opp, hvor hele teorien er bygget opp av aksiomer, definisjoner og logiske slutninger. På dette nivået vil elevene ha grunnlag for å bruke kunnskapen de tidligere har lært seg til å formulere og gjennomføre bevis (van Hiele, 1986; Smestad, 2008).

### Nivå 5: Stringens

Det øverste nivået har å gjøre med å analysere deduktive systemer. Her vil man for eksempel kunne diskutere hvordan en teori blir påvirket dersom man bytter ut et aksiom med et annet (van Hiele, 1986; Smestad, 2008). Som nevnt tidligere er hverken Nivå 4 eller Nivå 5 spesielt relevant for grunnskolen.

## 2.2.2 Elevers utvikling fra ett nivå til neste i van Hieles modell

Selv om disse beskrivelsene er innholdsspesifikke, er van Hieles nivåer faktisk stadier av kognitiv utvikling. Progresjon fra ett nivå til neste nivå er ikke resultat av modning eller naturlig utvikling. Måten undervisningen eller læringsprogrammet er lagt opp, og opplevelsen av den, er det som påvirker et ekte avansement fra et lavere til et høyere nivå (Pegg & Davey, 1998). Derfor er det viktig at elevene oppnår nivåprogresjonen i kronologisk rekkefølge, slik at de ikke går glipp av viktig kunnskap i sin utvikling, og dermed en svekket forståelse for nivået de befinner seg på. Det samme gjelder for undervisning som foregår på et nivå som er høyere enn det elevene befinner seg på. Om nivået på undervisningen er for høy vil ikke kunnskapen som elevene tilegner seg gi mening, og de vil heller lære seg innholdet utenat, istedenfor å forstå teoriene.



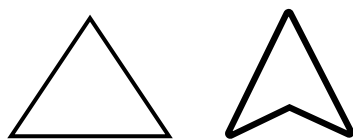
Hvert av nivåene i van Hieles modell inneholder kunnskap og begreper som er tilpasset det spesifikke nivået. Det vil si at den kunnskapen som besittes av noen på ett nivå vil være utilgjengelig for noen på et lavere nivå, og den faglige kommunikasjonen mellom dem vil være vanskelig. Den som befinner seg på et høyere nivå må gjøre seg forstått av den på det lavere nivået ved å tilpasse kommunikasjonen sin til det lavere nivået. Det vil derfor være viktig for lærere å tilpasse undervisningen sin til det nivået den enkelte elev befinner seg på.

### 2.3 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

I matematikk kommer vi over en rekke begreper, uansett hvilket matematisk tema vi konsentrerer oss om. Matematikk er gjerne regnet som et fag hvor vi operer med høy grad av presisjon, hvor begrepene vi bruker kan defineres med høy nøyaktighet for å gi et solid grunnlag for den matematiske teorien (Tall & Vinner, 1981). Det vil si at rommet for feilmargin er lite når det kommer til hva elevenes forestillinger av begreper har å si for riktige definisjoner. En liten misforståelse av begrepenes egenskaper kan føre til store hindringer i utviklingen av geometriforståelse. En elev som tenker at parallellogrammer ikke kan ha rette vinkler, vil kunne hindres forståelse for begrepenes definisjoner og hierarkisk klassifisering, som jeg kommer tilbake til senere.

Når vi snakker om begreper, foreslår Vinner (1983) en måte å se på begreper på hvor han skiller mellom det vi kaller *begrepsbilde* og *begrepsdefinisjon*. De mentale bildene som kommer opp i hodet til en person når man snakker om et begrep, er det vi omtaler som personens *begrepsbilde* (Vinner, 1983, s. 293). Dette inkluderer alle mentale bilder, prosesser og egenskaper som knyttes til bildet (Tall & Vinner, 1981, s. 151). Om vi snakker om fugler, vil de fleste av oss danne oss et bilde i hodet av hva som inngår i begrepet «fugl», som hvordan fugler ser ut og deres egenskaper. Det vil kanskje være slik at en person fra Europa ikke vil ha struts eller pingvin i deres begrepsbilde for fugler, ettersom de kanskje aldri har sett disse i levende live, men er omgitt av andre typer fugler på daglig basis. Dette kan oversettes til matematikkens verden ved at en elev hører begrepet «firkant». Bildene som danner seg i hodet vil basere seg på elevens tidligere erfaring med firkanter, og det går an å tenke seg at prototypiske kvadrater og rektangler vil prege manges begrepsbilde av firkant, mens kanskje de færreste får opp bilde av firkanter uten rette vinkler eller ikke-konvekse firkanter. Begrepsbildet bygges opp over tid gjennom alle typer erfaringer, og justeres etter hvert som individet opplever nye stimuli og modnes. Ulik stimuli kan påvirke ulike deler av begrepsbildet, som vil si at utviklingen av begrepsbildet ikke nødvendigvis utgjør en sammenhengende helhet (Tall & Vinner, 1981, s. 152).

Hva noen tenker at et begrep betyr og hva begrepet faktisk betyr vil ikke nødvendigvis stemme overens. Erfaringene man har gjort seg kan i et tidlig stadie være roten til kognitive misforståelser. For eksempel kan vi se på de geometriske formene i Figur 1.



Figur 2: Trekant og konkav firkant

En elev i tidlig utforskning av geometriske figurer vil kanskje ha et mentalt bilde av at en trekant vil være en figur som ligner på figuren til venstre i Figur 2. Ut fra dette begrepsbildet kan det ligge naturlig for eleven å tenke at figuren til høyre i Figur 2 også er en trekant, ettersom de to visuelt sett ser nokså like ut, selv om den høyre figuren per definisjon er en konkav firkant. Samtidig kan elevens erfaringer med firkanter tilsi at figuren til høyre i Figur 2 ikke oppfattes som en firkant, om eleven kun har sett konvekse firkanter i sitt liv.

Begrepsdefinisjon vil si den verbale definisjonen som nøyaktig forklarer begrepet. En personlig begrepsdefinisjon vil være hvordan eleven husker en definisjon, og videre bruker denne kunnskapen til å forklare et begrep. Dette kan for eksempel være at eleven bruker kunnskapen sin om kvadrater til å formulere en egen definisjon om at kvadrater er firkanter med fire like lange sider. Selv om et kvadrat også må bestå av rette vinkler, vil denne formuleringen av begrepet være elevens personlige begrepsdefinisjon. Vi kan si at en *personlig* begrepsdefinisjon skiller seg fra en *formell* begrepsdefinisjon. En personlig begrepsdefinisjon vil være hvordan eleven formulerer sitt eget begrepsbilde. En formell begrepsdefinisjon derimot, er en definisjon som er akseptert i det matematiske miljøet (Tall & Vinner, 1981, s. 152-153). Elevenes utsagn i datamaterialet som beskriver begreper vil i stor grad være deres personlige begrepsdefinisjoner, ettersom de rekonstruerer en definisjon ut fra et bilde av figurene eller egenskaper ved dem som de kjenner til. Naturlig nok vil ikke 4.trinnselever besitte fullstendige formelle definisjoner av begreper. Denne delen av det teoretiske rammeverket vil derfor bidra til å besvare «hva kjennetegner noen 4.trinnselevs kategorisering av firkanter?» ved å undersøke hvilke mønstre som finnes i elevenes begrepsbilder. For eksempel kan et kjennetegn på elevenes kategorisering være at elevenes begrepsbilder kun inkluderer skråstilte parallellogrammer, som sier noe om kunnskapen om begrepsdefinisjonen.

## 2.4 Figurforståelse

I Duvals (1998) fremstilling av figurforståelse, nevnes det fire typer kognitiv forståelse: perseptuell forståelse (den første oppfatningen av en geometrisk figur), sekvensiell forståelse (oppdagelsen av underfigurer eller grunnleggende figurenheter), diskursiv forståelse (gjenkjennelse gjennom tolkning av diskursive utsagn om en geometrisk figur), og operativ forståelse (måter som en gitt figur kan endres på mens den fremdeles beholder sine geometriske egenskaper). Hvis vi ser figurforståelse i sammenheng med van Hieles modell for geometriforståelse, kan vi si at en perseptuell forståelse beskriver det første nivået av modellen, hvor elever gjenkjenner figurer kun på utseendet. Her har de ikke enda oppdaget de ulike egenskapene, og dannet en forståelse for disse som kan gi dem kunnskap om figurgrupper og klassifisering. En sekvensiell forståelse gjenspeiler det andre nivået i modellen. Her oppdager elevene egenskapene til figurene, og begynner å knytte kunnskap til figurene. Beskrivelsen av diskursiv forståelse inngår i det tredje nivået, hvor elever i stand til å forstå grunnleggende definisjoner.

Videre dro Gal & Linchevski (2010) nytte av Duvals fremstilling av figurforståelse i deres arbeid med elevs utfordringer i geometri. Denne ble spesielt brukt ved å eksemplifisere hvordan prosesser som kommer i forkant av medfølgende «resonnering» påvirker de kognitive prosessene. De fant ut at elever hadde vanskeligheter med å skille mellom hvilke visuelle karakteristikker som er relevante og de som ikke er relevante. De argumenterer for at slike vanskeligheter oppstår fordi elever ikke går videre fra det første blikket på en geometrisk figur, som er resultat av visuell persepsjon. Gal & Linchevski

mener at visuell persepsjon ikke er tilstrekkelig, og kan til og med hindre utvikling av geometriske egenskaper og begreper (Sinclair et al., 2016, s. 693).

## 2.5 Forståelse for inklusjonsrelasjoner til firkanter

En av funksjonene til firkanter er at vi kan klassifisere dem i et «hierarki». Det vil si at noen grupper firkanter hører til innenfor andre grupper firkanter som er mer generelle, og disse igjen hører til under andre firkantgrupper som er enda mer generelle. Altså danner generelle begreper undergrupper av mer spesielle begreper (de Villiers, 1994). For eksempel er definisjonen på et parallellogram «en firkant som har to par parallelle sider». Selv om definisjonen ikke eksplisitt sier det, antyder den at kvadrat, rektangel og rombe også er parallellogrammer, ettersom alle disse også har to par parallelle sider. Altså er parallellogram en mer generell type firkant enn for eksempel kvadrat, som har flere egenskaper som må oppfylles, og dermed er mer spesiell. Det vil si at et utsagn som gjelder for parallellogrammer også vil gjelde for kvadrater, rektangler og romber (Fujita & Jones, 2007, s. 61).

Denne forståelsen for hvordan firkanters egenskaper gjør at noen grupper hører hjemme under andre grupper avhenger av ferdigheter som elevene tilegner seg på nivå 3 i van Hieles nivåmodell. På nivå 2 har elevene kunnskap om egenskaper firkantene har, men hvorvidt de er i stand til å forstå om for eksempel to par parallelle linjer er tilstrekkelig for å klassifisere kvadrat som parallellogram, eller om ikke-rette vinkler er en nødvendig egenskap for parallellogram, kan være det som skiller mellom nivå 2 og nivå 3 for eleven.

Studiet av inklusjonsrelasjonene til firkanter er et viktig element i undervisningen av geometri. En rekke studier har vist at mange elever har store problemer både med dette og det relaterte spørsmålet om hvordan man definerer slike former korrekt (f.eks. Currie & Pegg, 1998; de Villiers, 1994; Erez & Yerushalmy, 2006; Okazaki & Fujita, 2007). Disse studiene antyder at elever ofte har vanskeligheter med de formelle definisjonene til figurer. Andre studier viser til at elevenes geometriske resonnering ofte er sterkt påvirket både av deres nokså statiske mentale bilder av former (f.eks. Fujita & Jones, 2007; Jones, 2000; Monaghan, 2000; Pratt & Davidson, 2003). I en av oppgavene jeg bruker for å samle inn data fra elevene, blir elevene bedt om å ta stilling til om det er mulig å tegne et parallellogram hvor alle hjørnene treffer linja på en sirkel. Det samme spørsmålet ble brukt av Fujita (2012) i en undersøkelse med grunnskolelærerstudenter som hadde studert firkanters inklusjonsrelasjoner. På dette spørsmålet svarte over 70% av de deltagende lærerstudentene at dette ikke vil være mulig, ettersom to av hjørnene vil komme på utsiden av sirkelen. Her refererer de altså til typiske bilder av parallellogrammer som er skrånede (Fujita & Jones, 2007; Fujita, 2012). For å besvare dette spørsmålet riktig, må man først anerkjenne at et rektangel er et parallellogram (Fujita, 2012, s. 61).

Gjennom å undersøke elevenes forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner, kan vi si mye om hva som kjennetegner deres kategorisering av firkanter. Tenker elevene at firkanter med visse egenskaper tilhører én og bare én gruppe, eller forstår de at dersom de nødvendige egenskapene oppfylles vil andre mer spesielle firkanter passe inn i samme gruppe? Bruker de i det hele tatt figurenes egenskaper for å rettferdiggjøre sin kategorisering? I så fall, hvilke egenskaper virker å vektlegges?

Fujita (2012) antar at elevers forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner vil utvikle seg gjennom visse nivåer, når man betrakter van Hieles visuelle, analytiske, uformelt deduktive og deduktive nivåer. Når man tar figurbegrep i betraktning, vurderer man tre sammenhengende komponenter for å forstå den komplekse utviklingsprosessen: «bilder», «definisjoner» og «egenskaper». For eksempel inkluderer definisjoner av geometriske figurer minimale undergrupper av relevante egenskaper til figurene (Hershkowitz et al., 1987, s. 81). Når det gjelder parallellogram, er den avgjørende egenskapen «to par med parallelle linjer». Dette tilsier at et kvadrat også er et parallellogram, ettersom det også har to par med parallelle linjer, og dermed tilfredsstiller definisjonen. På den annen side er noen av de nødvendige egenskapene til kvadrat ikke inkludert i parallellogram, som for eksempel «alle vinklene er like». Altså er kvadrat en mer spesiell figur enn parallellogram, ettersom et kvadrat må ha flere oppfylte krav. På samme måte er rektangel en mer generell figur enn kvadrat, men mer spesiell enn parallellogram (Fujita, 2012, s. 62). I tillegg til disse forholdene, har alle geometriske figurer sine egne visuelle bilder. For å vurdere disse visuelle bildene, mener Fujita (2012) at prototypefenomenet er spesielt viktig.

### 2.5.1 Prototypefenomenet

Prototypefenomenet handler om hvordan individer danner seg et stereotypisk bilde av noe ut fra sitt første møte med fenomenet (Herschowitz, 1990). Vi kan bruke rektangel som eksempel. Elevers første møte med begrepet rektangel er veldig ofte en rettvinklet firkant hvor to av sidene er lengre enn de to andre. Dette blir da en prototype for begrepet rektangel. Ifølge Fujita & Jones (2007) er det vanlig at elever definerer et rektangel på denne måten, og dermed sliter med å akseptere at kvadrat er et rektangel.

Elever blir høyst sannsynlig påvirket av prototypiske eksempler når de utfører grunnleggende aritmetiske operasjoner i matematikk (Fischbein et al., 1985, s. 5-6). For eksempel kan en elev som tror at multiplikasjon alltid gir et større produkt ha vanskeligheter med å håndtere multiplikasjon med brøk og desimaltall. Når det gjelder geometri, forklarer Herschowitz (1990) det som at alle begreper har ett eller flere prototypiske eksempler som man først blir introdusert for, og disse innehar som regel mange egenskaper som skiller dem fra andre begreper. Altså besitter de prototypiske eksemplene både de nødvendige egenskapene og flere unødvendige egenskaper for at de skal fremstå spesielle, som et eget begrep. Dermed oppfattes de unødvendige tilleggsegenskapene som en del av definisjonen på begrepet, noe som fører til en konflikt i forståelsen for firkanters inklusjonsrelasjoner (Walcott et al., 2009; Fujita, 2012).

Prototypefenomenet er en viktig faktor i klassifisering av geometriske former (Herschowitz, 1990). Blant annet tydet resultatene fra en undersøkelse gjort av Fujita & Jones (2007) på at på generell basis gjenkjenner over halvparten av elever som er over gjennomsnittlig sterke, firkanter først og fremst ut fra prototypiske eksempler. Dette til tross for at de er kjent med den riktige definisjonen (Sinclair et al., 2016, s. 694). Selv om elever trolig vil være i stand til å si, for eksempel, at et parallellogram er «en firkant hvor sidene ovenfor hverandre er parallelle», som definisjonen er, kan de gjerne legge til usanne egenskaper som at «i parallellogrammer er lengden på sidene ulike» eller «parallellogrammer har ingen rette vinkler». Dette vil trolig være resultat av prototypebildet av et parallellogram, som ofte er et skråstilt rektangel. Disse prototypebildene dannes når elevene erfarer sin første undervisning om

parallellogrammer på skolen (Okazaki, 1995; Fujita, 2012), og de styrkes gjerne gjennom erfaringer fra hverdagslivet (Hasegawa, 1997; Fujita, 2012).

Fujita (2012) anser disse unødvendige og usanne ekstraegenskapene som hovedårsakene for elevenes vanskeligheter med å forstå firkanters inklusjonsrelasjoner. Elever som tror at disse unødvendige egenskapene er sanne, for eksempel for parallellogrammer, vil sannsynligvis ekskludere kvadrater fra gruppen parallellogrammer, ettersom de er innforstått med at parallellogram ikke har rette vinkler. Det er viktig for oss å ta prototypefenomenet i betraktning når vi vurderer elevers forståelse for inklusjonsrelasjonene til firkanter (Fujita, 2012, s. 62).

Ved å undersøke om funnene viser at elever vektlegger usanne eller unødvendige egenskaper i kategoriseringen av firkanter, og dermed ekskluderer noen firkanter fra mer generelle grupper, vil vi kunne fastslå om prototypefenomenet er noe som kjennetegner kategoriseringen til de deltagende 4.trinnselevne. Som jeg utdyper i metodekapittelet, bygger oppgaven min på undersøkelsen av Fujita & Jones (2007). Som nevnt tydet deres funn på at prototypefenomenet i stor grad preget deltakerne i deres undersøkelse. Deres deltakere er i alderen 12-14 år, mens deltakerne i min undersøkelse er i alderen 8-9 år. Om prototypefenomenet preger mine deltakeres kategorisering, gjør den det i så fall i lik grad som i Fujita & Jones (2007)? Eller i større eller mindre grad?

## 3 Metode

I dette kapitlet presenterer jeg valg og vurderinger knyttet til forskningsmetode, og de metodene jeg har benyttet meg av for innsamling og analyse av data. Jeg vurderer i tillegg kvaliteten på studien basert på dens reliabilitet og validitet.

### 3.1 Kvalitativ forskning

Kvalitativ forskning er en tilnærming som brukes for å utforske og forstå betydningen som individer eller grupper knytter til et menneskelig eller sosialt problem (Bryman, 2016). Gjennom forskningsprosessen vil det dukke opp ulike spørsmål som kan påvirke fremgangsmåten. Datainnsamlingen foregår vanligvis i omgivelsene til deltakerne, og dataanalysen foregår ved å utvikle det man finner til generelle temaer. Forskeren tolker deretter betydningen av dataene. (Bryman, 2016). De som benytter denne type undersøkelser er positive til forskning som baserer seg på en induktiv stil, fokus på individuelle meninger og viktigheten av å gjengi kompleksiteten i en situasjon (Bryman, 2016). Generelt kan vi si at kvalitativ forskning brukes for å gå i dybden på et tema. Det kvalitative forskningsdesignet har et klart feste i *hermeneutikken* (Brottveit, 2018, s. 65). En kvalitativ tilnærming er hensiktsmessig for min problemstilling fordi formålet er å undersøke flere aspekter som inngår i elevenes geometriforståelse og kategorisering av firkanter. Jeg ønsker å gå i dybden for å forklare hvilke kjennetegn som går igjen, hvilke problemer som oppstår, og hvorfor.

#### 3.1.1 Det hermeneutiske vitenskapssynet

Begrepet *hermeneutikken* i vitenskapelig sammenheng knyttes til studier av menneskelige handlinger, opplevelser og erfaringer. Dette blir også omtalt som meningsfulle data, ettersom disse fenomenene må forstås og tolkes i sin egen kontekst for at de skal gi mening (Brottveit, 2018, s. 29). Hermeneutikken er en *fortolkende vitenskap*, fordi meningsfulle data ikke i hovedsak kan forklares ut fra sosiale og mindre allmenne lover. Hensikten til hermeneutikken er altså å forstå og fortolke mening i et aktuelt datamateriale, og dermed forme nye meningssammenhenger ut fra den virkeligheten man studerer (Brottveit, 2018, s. 29). Det er en slik tilnærming jeg bruker i min studie for å besvare forskningsspørsmålet «Hva kjennetegner noen 4.trinnselevers kategorisering av firkanter?», hvor jeg tolker utsagnene til elevene i transkripsjon for å finne gjentakende kjennetegn, og deretter forsøke å forklare funnene ved hjelp av teori.

Den hermeneutiske fortolkningsprosessen består av tre stadier som står i gjensidig forhold til hverandre: forståelse, tolkning og anvendelse. I en slik prosess tolker forskeren de opprinnelige dataene og omdanner den til en annen tekst ved bruk av nye ord og begreper. Dette foregår gjennom at forskeren selv uttrykker hvordan hen forstår de opprinnelige dataene. De opprinnelige dataene kan for eksempel være fra et transkribert intervju, eller en tekst om en hendelse eller situasjon. Ut fra denne forståelsen formulerer forskeren en ny tekst, hvor hen forsøker å formidle meningen til dataene på en ny måte (Brottveit, 2018, s. 34). Hensikten med denne tolkningen er å danne et grunnlag for en ny mening om det som undersøkes (Gilje & Grimen, 1993, s. 156). Forskningsresultatet er det forskeren finner ut gjennom sin forståelse og fortolkning av det temaet som undersøkes – nye innsikter og kunnskap som har kommet frem gjennom studien. Deretter kan disse anvendes i en teoretisk eller praktisk sammenheng (Brottveit, 2018, s. 35).

Det er viktig å bemerke seg at det ikke er forskerens oppgave å tolke uavhengig og fritt, men skal derimot forholde seg til temaet som skal undersøkes ved å basere seg på en bestemt teori, eller en antakelse som hen ønsker nærmere forskning på (Brottveit, 2018, s. 35).

### 3.2 Intervju

Som en del av datainnsamlingen har jeg brukt intervju som forskningsmetode. Et intervju er et fleksibelt verktøy for å samle inn data, både gjennom verbalt språk og ikke-verbalt språk, avhengig av intervjuformen (Cohen et al., 2018). Cohen et al. (2018) presenterer fire kategorier av intervju:

- 1. Uformelt samtaleintervju:** I et slikt intervju oppstår spørsmålene ut fra den umiddelbare konteksten, og blir simpelthen stilt i den naturlige flyten til samtalen. Ingen spørsmål er planlagt på forhånd. Et typisk åpningsspørsmål til et slikt intervju kan være «Fortell om din opplevelse av...»
- 2. Intervjuguide:** Temaene som skal gjennomgås i intervjuet blir presentert på forhånd, og intervjueren bestemmer hvilke spørsmål som skal stilles og rekkefølgen på dem gjennom intervjuprosessen.
- 3. Standardisert åpen-slutt-intervju:** I et slikt intervju er ordvalgene i spørsmålene og rekkefølgen på dem bestemt forut for intervjuet. Alle intervjuobjektene blir stilt de samme spørsmålene i den samme rekkefølgen.
- 4. Lukket kvantitativt intervju:** I denne intervjuformen er både spørsmålene og svarene bestemt på forhånd – svaralternativene er konstruert av intervjueren, og intervjuobjektet velger det svaret som stemmer best for dem.

Ettersom studien min er en kvalitativ forskningsprosess, skal vi se nærmere på hva som kjennetegner kvalitative forskningsintervjuer. Disse kan ha ulik utforming og grad av struktur, men vi kan betrakte det som et menneskemøte mellom forsker og intervjuobjekt. Kvalitative intervjuer er ofte kjent for å ta i bruk åpne spørsmål og svarkategorier, slik at intervjuobjektene bruker sine egne ord og begreper i besvarelsene. Intervjuet får dermed preg av en samtale mellom forskeren og intervjuobjektene.

I kvalitative intervjuer bruker forskeren som regel en intervjuguide som en rød tråd for temaene og spørsmålene som skal tas opp i intervjuet. Denne kan ha en mer eller mindre fastlagt struktur, og kan variere fra strukturerte spørsmål som er definert på forhånd, til en åpen temaliste som utgangspunkt for intervjuet. Med en intervjuguide som er fast strukturert med forhåndsdefinerte spørsmål, gis det lite eller ingen spillerom for variasjon, oppfølgingsspørsmål eller utdypning underveis i intervjuet. Dette kaller vi et strukturert intervju. Med en mer åpen temaliste som utgangspunkt, snakker vi om et ustrukturert intervju. En tredje kategori, som befinner seg imellom disse to strukturene, er det halvstrukturerte eller semistrukturerte intervjuet. I en slik strukturform opererer man med faste hovedspørsmål, men har i tillegg mulighet for utdypning og oppfølgingsspørsmål underveis (Brottveit, 2018, s. 89). Denne intervjuformen utdyper jeg videre i neste kapittel.

Til tross for potensielt store variasjoner i form og struktur, hevder Mason (2018) at alle kvalitative intervjuer har følgende kjerneegenskaper til felles:

1. Den interaktive utvekslingen av dialog. Kvalitative intervjuer kan innebære en-til-en-samtaler, fokusgrupper eller større gruppeintervjuer. De kan finne sted for eksempel ansikt til ansikt, online eller over telefon, og dialogutvekslingen kan innebære flere ulike metoder for kommunikasjon.
2. En relativt uformell stil, for eksempel i et ansikt-til-ansikt-intervju som fremstår som en samtale, istedenfor et formelt spørsmål-og-svar-format. Burgess sitt begrep «conversations with a purpose» («samtale med et formål») uttrykker dette på en god måte. Det er viktig å merke seg at uansett hvor uformell samtalen fremstår, skal man anse det som et intervju og ta hensyn til de ulike metodiske og etiske prosedyrene hvis formålet med dialogen er å samle inn data til en studie.
3. En temasentrert eller narrativ tilnærming, hvor forskeren har noen temaer eller problemstillinger hen ønsker å dekke, noen startpunkter for en diskusjon, eller «historier» som hen ønsker at intervjuobjektet forteller. Det er usannsynlig at forskeren har et fullstendig manus med spørsmål. De fleste kvalitative intervjuer er utformet for å ha en flytende og fleksibel struktur, slik at intervjueren og intervjuobjektet kan bevege seg inn på uventede temaer.
4. Mesteparten av kvalitativ forskning handler ut fra perspektivet om at kunnskap er lokalisert og kontekstbasert, og det er derfor intervjuerens jobb å forsikre seg om at den relevante konteksten bringes i fokus for å produsere kunnskapen. For noen strekker dette seg til en antakelse om at data og kunnskap konstrueres gjennom dialog gjennom intervjuet. Mason (2018) sier at kunnskap i det minste er konstruert i en intervjusituasjon, fremfor «objektive» fakta som kun rapporteres. Ifølge dette perspektivet blir meninger og forståelse dannet gjennom interaksjon, altså en samproduksjon mellom forsker og intervjuobjekt. Kvalitative intervjuer blir derfor gjerne sett på som konstruksjon og rekonstruksjon av kunnskap i større grad enn utgraving av kunnskap (Mason, 2002; Mason, 2018).

### 3.2.1 Halvstrukturert intervju

Intervjuet jeg har benyttet meg av kan beskrives som et halvstrukturert eller semistrukturert intervju. Dette er en av de mest brukte intervjuformene i kvalitativ forskning. Målet med et halvstrukturert intervju er i hovedsak å belyse et tema fra flest mulig innfallsvinkler og med flest mulig synspunkter, samtidig som man ivaretar en felles intervjustruktur (Brottveit, 2018, s. 93). Derfor er denne intervjumetoden godt egnet for å besvare forskningsspørsmålet. Forskningsspørsmålet er åpent og søker svar på hva som kjennetegner kategoriseringen til elevene. Dette kan gi flere ulike funn, som enten kan knyttes til andre funn eller er mer isolerte funn. I tillegg kan de ulike funnene knyttes til ulike deler av det teoretiske rammeverket, samtidig som deler av teorien kan belyse flere forskjellige funn. Derfor vil det være viktig å forsøke å besvare forskningsspørsmålet fra flest mulig innfallsvinkler.

I et halvstrukturert intervju er man som forsker ikke like bundet av strukturen på intervjuet som i et strukturert intervju. Det kan riktignok organiseres på samme måte som et strukturert intervju, hvor intervjuguiden er av samme type, og spørsmålene er fastbestemt på forhånd og stilles til alle intervjuobjektene i lik rekkefølge (Brottveit, 2018, s. 92). Jeg har valgt å bruke dette aspektet fra et strukturert intervju i min intervjuform, for at alle intervjuobjektene skal få samme type stimuli. På denne måten vil ikke noen av intervjuobjektene dra nytte av potensielle stimuli de får ved at spørsmålene kommer i en annerledes rekkefølge enn for noen andre (Brottveit, 2018, s. 91). Det som



derimot er en potensiell fordel med et halvstrukturert intervju, er at forskeren har en langt friere rolle, som gir rom for utdypings- eller oppfølgingsspørsmål til spørsmålene i intervjuet. Slik kan både forsker og intervjuobjekt sammen produsere datamaterialet, og på denne måten er et halvstrukturert intervju en gunstig tilnærming om man ønsker å gå i dybden på temaet (Kvale & Brinkmann, 2015; Brottveit, 2007; Brottveit, 2018).

### 3.2.2 Fokusgrupper / Gruppeintervju

Oppfølgingsdelen av elevenes oppgaveløsning kan ses på som et gruppeintervju. Målsettingen med et gruppeintervju er å få fram ulike meninger og synspunkter fra deltakerne i gruppa om et spesifikt tema (Brottveit, 2018, s. 94). I mitt tilfelle er temaet inklusjonsrelasjonene til firkanter. Gruppeintervju kan være en god måte å sørge for effektiv datainnsamling, og det kan inspirere deltakerne at flere deltar i samtalen og bidrar med sine meninger og erfaringer om firkanter. Et gruppeintervju brukes for å avdekke både de kollektive og de individuelle tankene om forskningsområdet. En ulempe med et slikt intervju er at deltakerne potensielt kan holde tilbake informasjon, eller at noen av dem ikke er komfortable med å dele synspunktene sine med de andre i gruppa. Derfor kan det være hensiktsmessig at gruppeintervju kombineres med individuelle samtaler eller intervjuer, slik jeg har valgt å gjøre (Brottveit, 2018, s. 94).

### 3.3 Observasjon

Observasjon er et av de viktigste verktøyene en forsker har for å samle inn forskningsdata (Postholm, 2005). Det er en kvalitativ forskningsmetode som ofte brukes i kombinasjon med intervju (Brottveit, 2018, s. 98). Observasjon handler om å se. Vi observerer ut fra vårt eget ståsted, og danner oss en forståelse basert på våre tidligere opplevelser og erfaringer. Det vil si at opplevelsene og erfaringene våre er med på å påvirke det vi observerer (Postholm, 2004). Riktignok har forskeren et fokus for observasjonene sine, og observasjonene er hensiktsmessige og systematiske (Adler & Adler, 1994, 1998; Postholm, 2005). Forskerens observasjoner styres ut fra teorier, men forskeren er ikke bundet av forhåndsbestemte kategorier når hen observerer aktiviteter i sine naturlige settinger.

I kvalitativ observasjon følger forskeren det naturlige handlingsforløpet i settingen som hen observerer (Adler & Adler, 1994, 1998). Forskeren får hjelp til å rette fokuset sitt mot handlinger som utspiller seg gjennom såkalte forfølere (Jorgensen, 1989) eller arbeidshypoteser (Cronbach, 1975) som er formulert med utgangspunkt i teori. Disse teoriene kalles *substantive teorier*. Omfattende teorier, mellomteorier og teoretiske modeller legger grunnlaget for problemstillinger som forskeren vil undersøke, mens substantive teorier danner utgangspunkt for konkrete problemstillinger som er mulig å forske på. Denne type teorier kan knyttes til spesifikke steder, grupper og situasjoner (Postholm, 2004). Dermed kan forskjellige substantive teorier være utgangspunkt for forskerens hypoteser eller antakelser. Altså kan ulike teorier føre til ulike arbeidshypoteser. Opplevelsene og erfaringene til forskeren, og forskerens individuelle subjektive teorier, påvirker i tillegg hvilke spørsmål forskeren har i forkant av forskningsarbeidet. Gjennom de forskjellige teoriene kan forskeren bedre forstå de prosessene som observeres. Samtidig er det forbeholdt at forskeren, gjennom observasjoner, utvikler sin teoretiske kunnskap og videreutvikler forståelsen sin av forskningsområdet. Slik oppstår det et pågående samspill mellom teori og praksis, og

man konstruerer ny kunnskap om dem begge, samtidig som de kommer sammen til en helhetlig forståelse. Denne prosessen kan bidra til å både belyse og utvikle teorien (Postholm, 2005).

### 3.3.1 Deltakende observasjon

I innsamlingen av data til masteroppgaven, presenterer jeg en geometrioppgave om firkanter for tre grupper med tre elever i hver gruppe. Elevene skal besvare oppgaven, og deretter argumentere for hvorfor de har svart som de har gjort. I denne konteksten har jeg en *passivt deltagende observatørrolle* (Brottveit, 2018, s. 100). Jeg er definitivt involvert i den sosiale samhandlingen, ettersom jeg styrer oppgavene og stiller spørsmål underveis. Det er derfor en deltagende observasjon, heller enn en ikke-deltakende hvor forskeren kun er til stede og observerer, uten å involvere seg i det sosiale samspillet (Fangen, 2004; O'Reilly, 2012. I Brottveit, 2018, s. 101). Innenfor deltagende observasjon skiller man som regel mellom aktiv og passiv deltakelse. Ved *aktivt deltagende observasjon* forutsettes det at forskeren opptre og føler seg som en fullverdig deltaker i miljøet hen studerer, på lik linje med de andre deltakerne som observeres (Brottveit, 2018, s. 100). Det vil si at jeg måtte ha utført oppgavene selv og argumentert for mine besvarelser, om jeg skulle hatt en aktivt deltagende observatørrolle. Som sagt vil jeg heller beskrive min observatørrolle som passivt deltagende. I denne type observasjon deltar forskeren også i den sosiale samhandlingen, men ikke i like stor grad som ved aktivt deltagende observasjon. Her deltar ikke forskeren i de spesifikke aktivitetene for miljøet eller utfører oppgaver med de andre deltakerne. Deltakerne i undersøkelsen er klar over at de blir observert, og forskeren har mulighet til å stille dem spørsmål underveis (Brottveit, 2018, s. 100). Jeg mener denne observasjonsmetoden er mest hensiktsmessig for min studie, ettersom elevene trolig ville blitt påvirket av mine oppgavebesvarelser og argumentasjoner om jeg skulle deltatt på lik linje med elevene. Samtidig ville jeg sannsynligvis ikke fått utdypende begrunnende svar på oppgavene om jeg ikke hadde vært deltagende i form av å lede det sosiale samspillet.

### 3.4 Utvalg

Teoretisk populasjon er et begrep som beskriver de respondentene man ønsker informasjon fra i undersøkelsen (Jacobsen, 2005). I undersøkelsen for min masteroppgave er den teoretiske populasjonen elever i den norske grunnskolen, mer spesifikt 4.trinns elever. Ettersom muligheten for å gjennomføre denne undersøkelsen på alle tilhørere av denne teoretiske populasjonen ikke lar seg gjøre, gjorde jeg et utvalg, som Thrane (2018) beskriver som en del av en større populasjon. Utvalget er da de personene som faktisk deltar i undersøkelsen.

Det finnes forskjellige måter å trekke ut et utvalg på, og utvalgsprosessen avgjør hvorvidt man kan generalisere resultatene fra undersøkelsen til den større populasjonen (Jacobsen, 2005). Brottveit (2018) sier at man vanligvis foretar seg strategiske utvalg til kvalitative studier, altså at man velger ut deltakere som har grunnlag for å bidra med informasjon om det aktuelle forskningstemaet. Kriteriene for utvalg kan blant annet inkludere kjennetegn ved deltakerne, som kjønn, alder, klassetrinn, eller at de besitter kunnskap som er relevant for temaet som undersøkes (Brottveit, 2018, s. 86). Utvalget i undersøkelsen til masteroppgaven min er en veldig liten del av den teoretiske

populasjonen, og derfor vil det være vanskelig å generalisere resultatene. Jeg tok utgangspunkt i to klasser på 4. trinn hvor jeg tidligere har vært i praksis. Selv om utvalget er lite er variasjonen i elevgruppa stor, og består både av sterke og svake matematikkelever med varierende grad av motivasjon for matematikkfaget.

Jeg sendte ut deltakelsesskjema til alle elevene i de to klassene, via deres kontaktlærer. Begge klassene utgjør til sammen 36 elever, hvor 9 av dem ønsket å delta. Disse 9 elevene utgjør dermed utvalget mitt i forskningen. Denne måten å foreta et utvalg på kalles gjerne bekvemmelighetsutvelgelse, hvor man velger ut deltakere av praktiske årsaker (Høgheim, 2020). I mitt tilfelle var det mest praktisk å bruke deltakere som jeg allerede hadde kjennskap til gjennom praksis, ettersom undersøkelsen min inkluderer samtale og intervju. Dermed hadde jeg og deltakerne en etablert relasjon i bunn, som kan være gunstig for at elevene skal delta i samtalen, og ikke vegre seg fra å si sine meninger.

### 3.5 Oppgave

I dette kapitlet presenterer jeg oppgaven jeg har brukt i kombinasjon med intervju for å samle inn datamaterialet. Det er denne oppgaven jeg bruker som grunnlag for den kvalitative observasjonsprosessen som jeg omtaler i kapittel 3.3.2.

#### 3.5.1 Oppgavens utforming

Oppgaven elevene gjennomførte består av fem oppgaver presentert på et oppgaveark. Oppgavene baserer seg på inklusjonsrelasjoner til firkanter. I oppgave 1 blir elevene presentert for et rutenett bestående av femten firkanter. I oppgavene 1a-d skal elevene sortere disse firkantene inn i fire grupper: parallellogrammer, romber, rektangler og kvadrater. Oppgave 2 går ut på at elevene skal beskrive med ord hva et parallellogram er. I oppgave 3 skal elevene gjøre det samme som i forrige oppgave, men denne gangen med rektangel. Oppgave 4 presenterer elevene for fem påstander (a-e) som elevene skal avgjøre om er sanne eller usanne. Dette gjør de ved å sette ring rundt bokstaven ved siden av de påstandene de anser som sanne. I siste oppgave skal elevene avgjøre om det er mulig å tegne et parallellogram inni en sirkel, hvor alle hjørnene til parallellogrammet treffer linja på sirkelen. Her blir de gitt tre alternativer: «A. Nei, det er ikke mulig», «B. Ja, det er mulig», og «C. Vet ikke». Velger elevene svaralternativ A, skal de forklare hvorfor dette ikke er mulig, og velger de svaralternativ B, skal de tegne parallellogrammet i sirkelen på arket.



kutting av ord, spesielle dialektord som ikke direkte kan oversettes til hovedmål, og ulike lyder som «hm», «Eh», «Ehm», osv. Jeg har valgt å inkludere enkelte non-verbale elementer, i hovedsak elementer som jeg føler tilfører mening til samtalen. Dette dreier seg blant annet om nikking, risting på hodet, peking og annen gestikulering med hendene for å forklare noe. Når det gjelder nikking og risting på hodet anser jeg dette som relevant i forbindelse med å bekrefte eller avkrefte ulike aspekter innenfor elevenes geometriforståelse, mens gestikulering med hendene kan utfylle tomrom i elevenes forklaringer og beskrivelser. For eksempel dersom en elev holder hendene opp parallelt ovenfor hverandre, kan dette si noe om elevenes forståelse for hva slags egenskaper parallellogrammer har, selv om eleven ikke vet nøyaktig hvordan å ordlegge seg.

I transkriberingsprosessen valgte jeg å transkribere pauser i verbalspråket, men disse har ikke innvirkning på analysen og tolkningen. Pausene representeres i transkripsjonen som «..» ved pauser på 1-2 sekunder, «...» ved pauser på 3-4 sekunder, og «... ...» ved betydelig lengre pauser. Selv om de ikke bidrar til analysen har jeg valgt å ikke fjerne dem fra transkripsjonen av tidsmessige hensyn.

### 3.7 Tematisk analyse

Tematisk analyse er en kvalitativ måte å analysere datamaterialet på, som går ut på å utvikle ulike temaer som man samler data innenfor (Clarke et al., 2015). Det er en fleksibel analysemetode som kan utføres på flere ulike måter, og kan brukes for å analysere de fleste forskningsspørsmål og datamateriale, som for eksempel intervjuer, fokusgrupper, spørreundersøkelser, osv. (Clarke et al., 2015). Ettersom forskningsspørsmålet mitt handler om hva som kjennetegner kategoriseringen av firkanter til de elevene som deltar i undersøkelsen, er en tematisk analyse passende for å samle ulike kjennetegn innenfor hvert sitt tema. Hvert tema refererer da til ulike deler av det teoretiske rammeverket, og presenterer ulike funn knyttet til hva som kjennetegner elevenes kategorisering.

Analysen jeg har gjort bærer preg av flere former for tematisk analyse. Den er først og fremst en *deduktiv* tematisk analyse hvor datamaterialet ses på fra et teoretisk ståsted (Clarke et al., 2015). Blant annet er temaet som går ut på at rektangler tillegges unødvendige egenskaper basert på teori om prototypefenomenet, det overordnede temaet om at firkanter kan tilhøre flere grupper går ut fra teori om firkanter inklusjonsrelasjoner, og beskrivelser av henholdsvis utseendet og egenskapene til figurer baserer seg både på disse og van Hieles modell for geometriforståelse. Analysen bærer også preg av å være en *deskriptiv* tematisk analyse, som primært oppsummerer og beskriver mønstre i datamaterialet (Clarke et al., 2015).

Terry et al. (2017) foreslår en analyseprosess som består av seks faser når man opererer med en tematisk analyse. Den første fasen går ut på å gjøre seg kjent med datamaterialet, en fase som gjerne starter i innhenting av data. I min studie gjorde jeg meg kjent med datamaterialet gjennom samtaler og intervjuene med elevene, hvor jeg selv var aktiv i samlingen av data. Deretter gjorde jeg meg videre kjent med datamaterialet ved å gjennomgå videopptakene fra forskningsprosessen. Etter å ha gjort transkripsjon av datamaterialet, gikk jeg over til det Terry et al. (2017) beskriver som fase to av tematisk analyse: koding av datamaterialet. I denne fasen fordypet forskeren seg ytterligere i datamaterialet for å danne et grunnlag for analysen. Måten jeg gjorde dette på var å lese gjennom transkripsjonene og markere utsagn som kunne knyttes til det teoretiske rammeverket med hensyn til mitt forskningsspørsmål. I løpet av

kodingsprosessen er det vanlig at man som forsker legger merke til likheter og gjentakende mønstre i dataene (Terry et al., 2017). Etter hvert som jeg oppdaget slike gjentakende mønstre, kodet jeg disse utsagnene ved å markere dem i samme farge som tidligere utsagn som omhandlet det samme, altså bygget på samme teoretiske grunnlag, og nye relevante utsagn i ulike farger. Måten jeg gikk frem i kodingen kan ses på som en deduktiv tilnærming, hvor det teoretiske rammeverket bidrar til å legge grunnlaget for hvordan man ser dataene (Terry et al., 2017). Jeg valgte også å gå for en semantisk tilnærming, hvor kodingen i hovedsak oppstår fra det som eksplisitt blir sagt i datamaterialet (Terry et al., 2017). Kodingsprosessen legger grunnlaget for det som Terry et al. (2017) beskriver som den tredje fasen – å utvikle temaer.

De temaene som utvikles i fase tre blir et slags utkast som er åpne for endringer, før man i fase fire vurderer temaene. I denne prosessen må man først vurdere om temaet riktig gjenspeiler det som kommer frem (betydningen) av de kodede dataene (Clarke et al., 2015). Etter å ha vurdert det dit hen at dette var tilfellet, vurderte jeg også temaene i henhold til om de kunne gi svar på forskningsspørsmålet. Noen av temaene sier noe om for eksempel linjenes egenskaper vektlegges over vinklenes egenskaper, mens andre sier noe om elevene vektlegger usanne egenskaper ved figurene i klassifiseringen av dem, som fører til en ekskludering i henhold til firkanters hierarkiske klassifisering. Femte fase går ut på å navngi og definere temaene, hvor man rett og slett skriver en oppsummering av alle temaene, før man i siste fase skriver rapporten, som jeg har presentert i kapittel 4 (Braun & Clarke, 2006).

Temaene svarer på forskningsspørsmålet «Hva kjennetegner noen 4.trinnselevers kategorisering av firkanter?» i all hovedsak. I noen tilfeller derimot, har jeg valgt å inkludere funn som ikke direkte svarer på forskningsspørsmålet. For å svare på hva som kjennetegner elevenes kategorisering, anser jeg det som relevant å også se på hva som ikke kjennetegner dette, men likevel er relatert. De aktuelle temaene er 4.3.2 «Kvadrat er ikke et rektangel, og rektangel er ikke et parallelogram» og 4.5.1 «Sammenhenger mellom egenskaper». I 4.3.2 presenterer jeg funn fra kun én elev som ikke aksepterer inklusjonsrelasjonen mellom rektangel og parallelogram, mens i 4.5.1 finner jeg kun ett utdrag fra én elev som sier noe om sammenhengen mellom ulike egenskaper. Til tross for mangelen på funn, kan vi likevel si noe om hva som kjennetegner kategoriseringen ut fra disse temaene: Flesteparten delvis aksepterer firkanters inklusjonsrelasjoner, ettersom kun én elev uttrykker det motsatte, og kategoriseringen kjennetegnes også i all hovedsak av at elevene ikke ser noen sammenheng mellom en figurs ulike egenskaper.

### 3.8 Sensitivitet

I utførelsen av masteroppgaven har jeg forholdt meg til de etiske retningslinjene fra Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora – NESH (2016). For å ivareta alle deltakerne i undersøkelsen er det viktig at den som utfører undersøkelsen har gjort en vurdering på om forskningstemaet kan være sensitivt, hva slags informasjon man skal samle inn, og hva slags opplevelse deltakerne har av forskningsprosessen (Brottveit, 2018, s. 122). Høgheim (2020) sier at frivillig deltakelse er et sentralt prinsipp for å ivareta integriteten til de som deltar. Dette innebærer at deltakerne skal vite om at de deltar i forskningsprosjektet, samt gi samtykke til sin deltakelse. Det er også krav om anonymisering av deltakernes personlige og sensitive opplysninger.

Før oppstart av datainnsamlingen søkte jeg om godkjenning fra NSD – Norsk senter for forskningsdata. I informasjonsskrivet som jeg sendte til elevene og deres foresatte fikk de informasjon om hva deltakelse i prosjektet ville innebære, hvordan behandlingen av datamaterialet ville foregå, og et samtykkeskjema for deltakelse (se vedlegg). I dette skrivet ble de informert om at deltakelsen var frivillig og at man kunne velge å trekke seg dersom man ombestemte seg.

I henhold til NTNUs retningslinjer for datahåndtering har jeg unnlatt å oppbevare innsamlet datamateriale på private enheter. I innhenting av data har jeg benyttet meg av et videokamera utlånt fra NTNU, og lagret opptakene kun i NTNUs OneDrive. I transkripsjonen har jeg forholdt meg til kravet om anonymitet ved å tilegne hver deltaker et alias i form av «Elev #», og eventuelle navn på personer som nevnes underveis i samtalene sensureres med «\*\*\*». Ved tilbakelevering av lånt utstyr slettet jeg videoopptakene fra kameraet, og ved avslutning av prosjektet slettes de fra oppbevaringsstedet, noe deltakerne og deres foresatte har blitt informert om i informasjonsskrivet.

### 3.9 Validitet og reliabilitet

For å vurdere kvaliteten på undersøkelsen ser man på undersøkelsens *validitet* og *reliabilitet*. Kort fortalt handler validitet om kvaliteten på datamaterialet, og i hvilken grad metoden man bruker gir svar på det man faktisk ønsker å undersøke. Reliabilitet handler om i hvilken grad man kan gjenta undersøkelsen på et annet tidspunkt, med andre deltakere, og kanskje med en annen forsker, og man fremdeles vil få et lignende utfall (Kirk & Miller, 1986). For å forbedre validiteten i undersøkelsen kan man blant annet kontrollere flere variabler og forbedre målingsteknikken (Bryman, 2016). I min undersøkelse ønsker jeg å få svar på hva som kjennetegner kategoriseringen av firkanter til elevene som deltok i undersøkelsen. Svarene på dette kommer frem i begrunnelsene av elevenes svar på oppgavene. Ved at flere av elevene bruker lignende resonnering, og jeg ser gjentakende mønstre i besvarelsene, vil dette kunne regnes som noe som kjennetegner kategoriseringen. Forskningsspørsmålet for undersøkelsen er ganske åpent, som betyr at svaret kan inkludere mange ulike aspekter. Undersøkelsen legger opp til stor frihet for intervjuobjektene når det gjelder hvordan de velger å begrunne besvarelsene sine. Derfor ville det vært vanskelig å forbedre validiteten, ettersom flere forskjellige fokusområder bidrar til å besvare forskningsspørsmålet. Ved å i større grad kontrollere svarene til deltakerne, kunne man gått mer i dybden på et par hovedområder, men kunne risikert å gå glipp av andre viktige aspekter som kjennetegner elevenes kategorisering av firkanter.

For å øke reliabiliteten i en kvalitativ undersøkelse kan man blant annet benytte seg av deltakernes bekreftelse, som kan innebære at forskeren viser sin tolkning av dataene til deltakerne som var involvert i undersøkelsen, for at de skal vurdere om dette representerer deres synspunkter (Bryman, 2016). For å forsikre meg om at deltakernes synspunkter ble representert riktig valgte jeg å oppsummere svarene som deltakerne ga i intervjuene sine, og ba dem bekrefte at dette var deres synspunkter. For å øke reliabiliteten ytterligere kunne jeg ha gjennomgått tolkningen min av dataene etter å ha gjort analysen, slik at elevene kunne vurdert om min tolkning stemte overens med deres synspunkter. Ulempen med dette er at det hadde vært svært tidkrevende, og kunne fått negative konsekvenser for elevenes læring. De deltakende elevene ble i første omgang

tatt ut av undervisningen for å delta i undersøkelsen, og ville vært nødt til å gå glipp av ytterligere undervisning for å vurdere tolkningene.

Når det gjelder å kunne utføre undersøkelsen flere ganger, kan man få andre forskere til å tolke de samme dataene (Bryman, 2016). Jeg har delt noen av observasjonene mine med andre masterstudenter for å få bekreftet mine tolkninger, men kunne ha økt validiteten ved å involvere flere medstudenter i større deler av observasjonene.

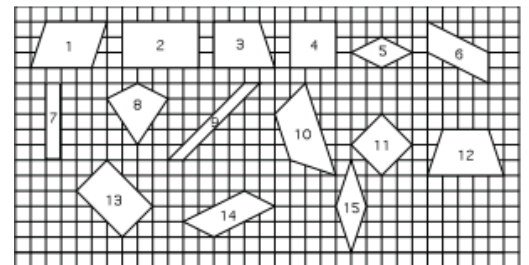


## 4 Resultat

I dette kapitlet presenterer jeg de funnene jeg har gjort i intervjuene med elevene og i samtalene om oppgavene. Jeg har transkribert videoopptakene av disse situasjonene, og presenterer utdrag fra transkripsjonen som er relevant for forskningsundersøkelsen. Gjennom en analyse av elevenes forståelse for geometriske figurers egenskaper er hensikten til funnene først og fremst å bidra til å gi svar på forskningsspørsmålet «Hva kjennetegner noen 4.trinnselevers kategorisering av firkanter?». For å svare på forskningsspørsmålet har jeg fremstilt noen temaer, som tar for seg hvert sitt aspekt som kjennetegner dette. Under hvert tema presenterer jeg funn som omhandler det samme, og dermed er med å underbygge at det aktuelle temaet er noe som kjennetegner elevenes kategorisering av firkanter. Det er ikke nødvendigvis en tydelig avgrensning mellom temaene, og noen av dem går over i hverandre. Blant annet vil det både i 4.1 og 4.5 fremstilles funn hvor elevene beskriver egenskaper ved figurene, men 4.1 handler spesifikt om den ofte repeterte egenskapen om at parallellogrammer har to par parallelle linjer, mens 4.5 presenterer et bredere utvalgt av funn om egenskaper.

### 4.1 Parallellogrammer har linjer som aldri vil krysse hverandre

Flere av elevene benyttet seg av en versjon av definisjonen for parallellogram som å ha linjer som aldri kommer til å krysse hverandre. I oppgave 1a) skrev Elev 1 opp firkanterne 1, 2, 4, 7 og 13. Alle disse er firkanter som passer inn under kategorien parallellogrammer. Jeg tok utgangspunkt i en av firkanterne som eleven hadde valgt, og spurte eleven om hen kunne forklare hvorfor dette er et parallellogram. Elev 1 svarte at det er et parallellogram fordi firkanter har linjer som «aldri treffer hverandre». Videre finner eleven også ut at denne definisjonen passer for flere firkanter som hen ikke hadde skrevet opp, som vi kan se i transkripsjonen:



Figur 4: Firkanter som inngår i oppgave 1a-d i studiens oppgave

50. J: Hvis vi starter med nummer 1 da. Hvorfor tenker du at den er parallellogram?

51. E2: Mm, jeg vet ikke. Jeg er ikke helt sikker på hva parallellogram er

52. J: Nei

53. E2: Fordi linjene aldri treffer hverandre

54. J: Fordi linjene aldri treffer hverandre?

55. E2: Ja

56. J: Hmm. Hva har det å si da?

57. E2: At ... jeg vet ikke

58. J: nei ... .. tenker du på parallell, at linjene går parallelt med hverandre?

59. E2: ja

60. J: hm. Så.. hvilke andre firkanter er det man kan si det om da?

61. E2: 2

62. J: 2 ... E1, kan du se en firkant som man kan si det om, som E2 sa? At linjene er parallelle og ikke kommer til å treffe hverandre?

63. E1: (ser seg rundt, svarer ikke)

64. J: Usikker?

65. E1: (nikker)

66. J: mm.. skal vi se. Mhm. Eh, E2, du hadde svart 2, 1, 4, 7 og 13, at de er parallellogrammer, fordi de har linjer som aldri kommer til å treffe hverandre. Mhm. Stemmer det for alle sammen av de du har skrive opp?
67. E2: ... mmm vet ikke (mister blyanten på gulvet, lener seg ned for å plukke den opp)
68. J: det ser sånn ut ... ser du noen andre som det kan stemme for?
69. E2: Sikkert 5.. eller 6

Også i samtalen mellom Elev 3, Elev 4 og Elev 5 nevner refererer elevene til en definisjon om at parallellogrammer har to par med parallelle linjer, eller ifølge Elev 4, linjer som «ikke kommer til å krasje». Transkripsjonsutdraget under er hentet fra elevenes samtale rundt oppgave 1a) som går ut på å sortere firkanter i gruppa parallellogrammer.

135. E4: Men 10 er jo ikke et parallellogram
136. E3: Det er faktisk det
137. J: Okay, men det er interessant da. Ehm .. E4, hvorfor mener du at 10 ikke er et parallellogram?
138. E4: Fordi hv-, hvis vi fortsetter de to linjene her (Peker) kommer de til å krasje
139. J: O[kay
140. E4: [(Utydelig) .. Og da blir det ikke et parallellogram

I utdraget har Elev 4 sagt at hen har plassert alle firkantene i gruppa for parallellogrammer, med unntak av firkant nummer 3, 8, 10 og 12. Alle firkantene hen har valgt er parallellogrammer, og alle hen har utelatt er ikke parallellogrammer. Elev 5 hadde skrevet at firkant nummer 10 er et parallellogram, hvorpå Elev 4 forklarer at to av linjene i firkant 10 kommer til å krysse hverandre, eller «krasje», og dermed ikke er et parallellogram. Etter litt uenighet mellom Elev 4 og Elev 3, sier Elev 3 seg enig i at linjene i firkant 10 ikke er parallelle. Elev 4 gjentar denne definisjonen på parallellogram senere i oppgave 2, hvor elevene skulle beskrive hva et parallellogram er. I oppgave 2 forklarer også Elev 5 et parallellogram med at det har parallelle linjer:

239. E5: Et parallellogram skriver jeg er sånn at .. (Gestikulerer med hendene) parallelle linjer
240. J: At det har parallelle linjer?
241. E5: Ja

Elev 5 gir ingen videre forklaring utover at parallellogram har parallelle linjer, og sier ikke noe om at det må være to par med parallelle linjer. Elev 4 gjør heller ikke dette i gruppediskusjonen, men antyder det ved å peke ut to linjer i firkant 10 som ikke er parallelle. Denne firkanten har ett par parallelle linjer, så det er implisitt at Elev 4 forstår at begge par linjer må være parvis parallelle. Elev 4 presiserer dette senere i intervjuet, der hen skal forklare likhetene mellom to figurer, og påpeker at begge figurer har to par parallelle linjer, og at begge dermed er parallellogrammer. Elev 3 nevner ingen definisjon av parallellogram hverken i samtalen om oppgavene eller i intervjuet.

I gruppediskusjonen med Elev 6 og Elev 7 har begge en definisjon av parallelogram som ligner på definisjonen som flere av de andre har presentert. I oppgave 1a) har Elev 6 inkludert firkantene 1, 2, 4, 6, 7, 9, 11 og 14 i gruppa for parallelogrammer, mens Elev 7 har inkludert firkantene 2, 4, 6, 7, 11 og 13. Alle firkantene som begge elever har inkludert er parallelogrammer, men begge har utelatt noen som oppfyller definisjonen. I utdraget under begrunner Elev 6 og Elev 7 sine valg av parallelogrammer.

29. J: Ja, så det var mange av de samme som E6 hadde. Hvorfor tenkte du at de var parallelogrammer da?

30. E7: Mm, for .. alle ligner på firkanter og så er linjene på en måte parallelle

31. J: Okay, hva betyr det at linjene er parallelle da?

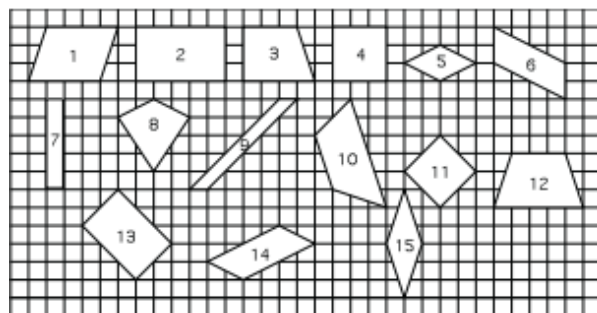
32. E7: At, at .. en linje nedpå (Viser med hendene) og den andre er rett (Holder den ene hånda parallelt over den andre) og begge er rette

33. J: Okay

34. E7: Oppå og nedpå

35. J: Mhm. Har du noe du vil legge til, E6? Hva .. hva betyr det at linjene er parallelle?

36. E6: At de er nesten som togskiner



Figur 5: Firkanter som inngår i oppgave 1a-d i studiens oppgave

Elev 7 bruker visuelle virkemidler i form av å vise med hendene hva som legges i begrepet parallelle linjer, mens Elev 7 sammenligner parallelle linjer med togskiner, som hen videre forklarer har en konstant lik avstand til hverandre og aldri krysser. Når elevene diskuterer oppgave 4d) som går ut på å avgjøre om setningen «noen parallelogrammer har flere enn to sider som er like lange, tegner jeg opp en firkant hvor tre av sidene er like lange, men ikke den siste. Begge elevene påpeker at denne firkanten har parallelle linjer, hvorpå jeg spør dem spesifikt om to og to linjer er parallelle. Elevene kommer frem til at det andre linjeparet ikke er parallelle, og kommer frem til at figuren ikke er et parallelogram. Ingen av elevene sier eksplisitt at de visste at to par parallelle linjer er et krav for å oppfylle definisjonen av parallelogram før jeg nevnte denne egenskapen, men begge har utelatt firkanter hvor kun ett par linjer er parallelle i oppgave 1a).

I sin kategorisering av parallelogrammer i oppgave 1a), har Elev 8 valgt firkant nummer 1, 5, 6, 9 og 14. Ingen av disse firkantene har rette vinkler, og flere av dem, spesielt firkant 1 og 14 kan ses på som prototypiske parallelogram. Transkripsjonsutdraget under viser elevens respons da jeg spurte hen hvorfor hen hadde plassert disse firkantene i gruppa parallelogrammer:

28. E8: Eh, på grunn av at de har linjer som kan gå for alltid framover uten å treffe hverandre, så er de litt på skrå sånn (Peker på en firkant) .. de er ikke akkurat rektangel eller (Stopper setningen)

Elev 8 benytter i likhet med flere av de andre elevene en definisjon som går ut på at linjene i parallelogram fortsetter uendelig uten å krysse hverandre, men denne eleven er den eneste av elevene i undersøkelsen som har tillagt parallelogrammer egenskapen om å være skråstilt. I utdraget sier hen at parallelogrammer «er ikke akkurat rektangel»,

som gjenspeiles i besvarelsen hens i oppgave 1a), hvor hen ikke har valgt noen rektangler.

## 4.2 Rektangler tillegges unødvendige egenskaper

Som jeg nevner i teorikapittelet om prototypefenomen, er det vanlig at elever tillegger figurer unødvendige egenskaper som ikke nødvendigvis stemmer overens med den formelle definisjonen. I teorien bruker jeg parallellogram som eksempel, hvor elever kan komme til å si at parallellogram er skrånstilt, altså at de ikke har rette vinkler. I samtalene med elevene kom dette fenomenet til syne ved flere anledninger mens elevene beskrev egenskapene til rektangler. Under presenterer jeg tre transkripsjonsutdrag fra det Elev 2 sier om rektangler og kvadrater.

77.E2: ... .. mm.. eller.. 4 ... jeg tror rektangel er sånn at alle sidene er like lange

78.J: at rektangel er at alle sidene er like lange? .. hm.. hva er et kvadrat da?

79.E2: (svarer ikke)

80.J: ehm, du har skrive 2 og 7 på den.

81.E2: eller så er rektangel de som er.. er.. et sånn der (peker på en firkant)

82.J: Litt som den 9 der? At det er rektangel?

83.E2: mhm. For at den er .. den er lang

106. J: Nei. Skal vi gå til oppgave 3 da? Hva er et rektangel?

107. E2: ..mmm.. de som har like lange sider på alle kantene

108. J: mhm.. firkant som har like lange sider på alle kantene?

109. E2: mhm.

16.E2: Det er en firkant som for eksempel er ganske langt

17.J: kvadrat er en firkant som er ganske langt?

18.E2: ja

19.J: hm

20.E2: tynt eller tjukt

21.J: det kan være tynt eller tjukt? Hvor langt må det være for at det er et kvadrat da?

22.E2: .. ehm ... hvertfall lengre enn en rektangel

Årsaken til at jeg har valgt å inkludere det Elev 2 sier om kvadrater sammen med rektangler, er at det virker som hen er usikker på hva som er et kvadrat og hva som er et rektangel. I det første utdraget sier hen først at hen tror at rektangel er en figur hvor alle sidene er like lange, men funderer på om rektangel heller kan være en annen figur som er lengre. Hen lurer på om firkant nummer 9 kan være et rektangel fordi det er langt. Uansett virker det ikke som at hen tenker at både firkant 2 og 7, som har fire like lange sider, og firkant 9 med to lengre sider, kan være rektangler. I det neste utdraget ser vi at Elev 2 definerer et rektangel som en firkant med fire like lange sider, som tyder på at hen bruker denne egenskapen på feil figur. Dette er relevant for det nederste utdraget, hvor hen omtaler det prototypiske rektanget som kvadrat. Denne figuren er ifølge Elev 2 «ganske langt», og må være «hvert fall lengre enn et rektangel». Den vesentlige forskjellen vi ser mellom Elev 2 sin beskrivelse av rektangel (som E2 omtaler som kvadrat) og parallellogram er at eleven ikke anvender egenskapene til figuren på

samme måte. Da hen forklarte et parallellogram, lå fokuset på at to og to linjer skal være parallelle, uavhengig av vinkler eller lengde på sidene. Når hen forklarer rektangel, er hens personlige definisjon kun at det er lengre enn en annen figur, og nevner ikke noe om to og to sider som er like lange.

I gruppediskusjonen mellom Elev 3, Elev 4 og Elev 5 sier også Elev 4 at hen ikke er sikker på hva som er et kvadrat og hva som er et rektangel, men kommer etter hvert frem til at kvadrater ha fire like lange sider. I oppgave 4e) skal elevene bedømme om påstanden «det finnes et rektangel som har 4 sider som er like lange» er sann eller usann.

435. J: Så ... Så det skal være to og to sider som er like lange .. E5 og E3, følg med. Så altså, den er like lang som den og den er like lang som den (Peker på sidene til en figur)
436. E4: Ja, de parallelle sidene må være like lange
437. J: Mhm .. Men .. så skal vi altså finne et rektangel som har fire sider som er like lange
438. E4: Det går ikke, da blir det til et kvadrat
439. J: Okay .. Men, vi sa jo at et rektangel, da skal de parallelle linjene være like lange. Hvis den er like lang som den, og den er like lang som den da? (Peker på begge sideparene i et kvadrat)
440. E4: Men det må være to og to .. sider som er like lange, sa vi, så alle sammen kan ikke være like lange
441. J: Okay. Så det må være to forskjellige?
442. E4: Ja, den må være .. hvertfall bittelitt lenger enn den her (Tegner figur)

I utdraget forsøker jeg å anvende definisjonen av rektangler som elevene har blitt enige om, på et kvadrat. Kvadratet oppfyller denne definisjonen, men Elev 4 mener at to av sidene må ha en annen lengde enn de to andre. Hen tillegger rektangel den samme usanne egenskapen som Elev 2 gjorde, om at et rektangel må være lengre enn et kvadrat. I likhet med Elev 2 sier ikke Elev 4 noe om hvor langt et rektangel må være, bare at det må være «hvertfall bittelitt lengre». Det interessante er at Elev 4 ikke bruker det samme resonnementet når hen diskuterer vinklene i parallellogrammer. Et parallellogram vil ha to og to like vinkler, men her aksepterer eleven både at to og to vinkler er like men ulike fra det andre vinkelparet, og at alle vinklene er like, som vi ser i utdraget under:

263. J: He he ... ehm, hvordan er det med vinklene til et parallellogram da?
264. E4: Eh, det .. det må kanskje være nitti grader
265. J: Må det?
266. E4: Jeg er usikker, nå må jeg tenke
267. J: Hva tror dere?
268. E3: Hva?
269. E5: Ehm nei
270. E4: Det MÅ ikke være nitti grader, hvis vi ser på den 15, 15 her (Peker på figur), så MÅ det ikke være nitti grader

I avslutningen av intervjuet med Elev 4 spør jeg først om et rektangel også kan være et parallellogram ved å henvise til definisjonene av figurene, og gjør deretter det samme med rektangel og parallellogram. Elev 4 sier at et rektangel er et parallellogram ved å

henvise til definisjonen for parallellogram, men påstår igjen at et kvadrat ikke kan være et rektangel:

102.E4: Egentlig ikke, fordi da tenker vi heller parallellogram, men hvis det skal være et rektangel, så må .. to og to sider være like lange, at det er to som er enda lengre enn de to .. andre

Selv om Elev 4 nettopp har brukt egenskapene til parallellogrammer til å forstå at rektangel er et type parallellogram, legger hen til en egenskap på rektangel som ikke nevnes i definisjonen, som gjør at kvadrat ikke inkluderes i rektangler.

Elev 3 sier i intervjuet at Figur A og Figur B er en firkant og et rektangel. Jeg spør om figuren hen kaller et rektangel ikke er en firkant, hvorpå Elev 3 svarer at det på en måte er en firkant, men at en firkant må ha like lange sider. Måten hen kan se at Figur B er et rektangel, er at figuren har to lange og to korte sider.

I samtalen min med Elev 6 og Elev 7 kommer det også frem lange sider er en egenskap som knyttes til rektangler. I oppgave 1c) hvor elevene skal kategorisere firkanter etter hvilke som er rektangler, forklarer elevene valgene sine slik:

60. E6: Fordi at de har to korte og to lange streker

66. E7: Eh, fordi .. for rektangler er jo sånn her lange (Viser med hendene), og jeg tok dem fordi at .. for at jeg tenkte at de kanskje kunne være rette, siden rektangler er lange, de er som firkanter, bare at de er litt lengre

Det som skiller besvarelsene til disse to elevene fra for eksempel Elev 4, er at de ikke har tatt vinkler eller parallelle linjer med i betraktningen. Firkantene som Elev 6 har valgt inkluderer en firkant som hverken har rette vinkler eller parallelle linjepar.

Fellesnevneren denne firkanten har med resten av de valgte figurene, men unntak av en, er at den har to linjer som er lengre enn de to andre. Elev 7 har valgt tre firkanter hvor to sider er lengre enn de to andre, men to av firkantene har ikke rette vinkler. Det forunderlige er at begge elevene har inkludert firkant nummer 4, som er en rettvinklet firkant med fire like lange sider, som ikke passer til begrunnelsen deres.

### 4.3 Elevene viser forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner

I undersøkelsen fant jeg ut at flesteparten av elevene har forståelse for at firkanter kan høre til flere grupper ved å henvise til egenskapene som er nødvendige for å kategorisere dem slik. Gjennom flere funn hvor elever uttrykker at en firkant i én gruppe også hører til i en annen gruppe fordi den har de nødvendige egenskapene som oppfyller definisjonen til begge gruppene, kan vi si at forståelse for inklusjonsrelasjoner er noe som kjennetegner disse 4.trinnselevenes kategorisering av firkanter. Funn som eventuelt tyder på at elever ekskluderer undergrupper av firkanter fra mer generelle grupper, kan gi oss et videre grunnlag for å si om prototypefenomenet er noe som kjennetegner én eller flere inklusjonsrelasjoner i elevenes kategorisering. I dette kapittelet presenterer jeg funnene som underbygger at elevenes kategorisering preges av forståelse for inklusjonsrelasjoner. Dataene ga ikke noen funn hvor elever tydelig og eksplisitt klassifiserer kvadrat som en type rektangel. Derfor har jeg delt inn funnene i to kategorier:

- De som aksepterer at noen firkanter tilhører en annen gruppe, men ikke alle firkanter, og;
- De som ikke aksepterer noen firkanter som del av en annen gruppe.

#### 4.3.1 Kvadrat er ikke et rektangel, men de er begge parallellogrammer

I forbindelse med forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner fant jeg ut at noe av det som kjennetegner elevenes kategorisering er at de fleste elevene har en tendens til å kategorisere kvadrater og rektangler i gruppa parallellogrammer på bakgrunn av at de oppfyller kravet om to par parallelle linjer. Jeg fant også at de færreste mener at kvadrat er en type rektangel. Vi kan si at kategoriseringen kjennetegnes ved en inklusjonsrelasjon mellom rektangel og parallellogram, men en ekskludering av kvadrater fra rektangler. Her presenterer jeg funnene hvor elever inkluderer kvadrater og andre rektangler i gruppa parallellogrammer, men enten eksplisitt eller implisitt sier at kvadrat ikke er en type rektangel. I oppgave 4a) har Elev 2 sagt at setningen «Det finnes en type parallellogram som har rette vinkler» er sann. Jeg spurte om eleven kunne peke på noen firkanter i rutenettet på oppgave 1) som oppfylte denne egenskapen. Elev 1 sier da at firkant nummer 4 og 5 er et parallellogram med rette vinkler, og kaller disse rektangel. Tidligere har jeg nevnt at Elev 2 virker usikker på hva som er et kvadrat, og det kan være ubevisst at hen kaller figur 4 et rektangel. Figur 5 har ikke rette vinkler. Videre peker hen også ut figur 13, som er et ikke-kvadratisk rektangel. Uavhengig av Elev 2 sin personlige definisjon av kvadrat, har hen valgt ut både et rektangel med fire like lange sider og et rektangel uten fire like sider som rettvinklede parallellogrammer. I intervjuet spør jeg Elev 2 om en figur kan være både en ting og en annen på samme tid, der hen svarer:

86. E2: fordi .. (peker på en figur) den B

87. J: den B?

88. E2; Ja, den er firkant og så er den kvadrat men A den er firkant også, men .. og så .. den er en rektangel

89. J: Ja:a, akkurat! Mhm. Mm ... ehh ... Hva slags, eh, figur vil du si at det her er da? (peker på Figur 2)

90. E2: hmm .. en firkant

91. J: en firkant ja ... .. kommer du på noe mer den kan være?

92. E2: parallell?

93. J: parallell .. -ogram? .. [mhm

94. E2: [mhm, like lange sider på, altså den og den og så den og den (peker på sidene)]
95. J: mhm ... mm .. Så vi har jo snakka om at .. eh .. et parallellogram har parallelle linjer (peker på parallelle linjer i Figur 2) .. som aldri kommer til å møtes .. mm ... stemmer det for noen av de her? (peker på arket med figurene)
96. E2: ... ja
97. J: Ja. Hvem av de da?
98. E2: .. alle tror jeg

I kapittelet hvor jeg snakker om at rektangler tillegges unødvendige egenskaper, har jeg allerede nevnt at Elev 4 funderer på om parallellogrammer må ha rette vinkler. I utdraget kom hen frem til at dette ikke var tilfelle, men var uansett forstått med at rette vinkler er en egenskap som kan inngå i et parallellogram. Senere, i oppgave 4a), svarer Elev 4 at det er sant at det finnes et type parallellogram med rette vinkler.

286. E4: Det blir jo kanskje ... firkant da
287. J: Firkant?
288. E4: Ja ... Rektangel eller kvadrat

Her sier Elev 4 eksplisitt at rektangel og kvadrat er typer parallellogrammer, og bekrefter i tillegg at dette er hens oppfatning når jeg deretter spør hen spesifikt om kvadrater og rektangler er typer parallellogrammer med rette vinkler. Ordvalget «rektangel *eller* kvadrat» kan tyde på at eleven ikke tenker at kvadrat er en type rektangel, noe hen også argumenterer for ved flere tilfeller, blant annet i kategoriseringen av rektangler i oppgave 1c). Her sier Elev 4 at hen ikke er enig i alle firkantene som Elev 3 har kategorisert under rektangler, fordi noen av dem er kvadrater. Dette skillet gir hen også uttrykk for i oppgave 4e) som går ut på å avgjøre om det er sant at det finnes et rektangel som har fire like lange sider:

418. E4: Men da .. da må jo da, da, da må det jo da bli .. et .. rekt-, da blir det jo da .. et rektangel som har fire sider som er like lange .. da blir det jo til et kvadrat istedenfor et rektangel ... så da blir det et stryk
419. J: Blir det istedenfor et rektangel?
420. E4: Så blir det et kvadrat

Også når jeg viser Elev 4 at et kvadrat oppfyller egenskapen «to og to sider som er like lange», argumenterer eleven for at kvadrat ikke er et rektangel, og at det ikke finnes et rektangel med fire like lange sider. Dette foregår i et transkripsjonsutdrag jeg har presentert tidligere i kapittel 4.2, utdraget som varer fra linje 435 - 442. Elev 4 gjentar dette i intervjuet, på spørsmål om forskjellene mellom to figurer.

440. E4: Men det må være to og to .. sider som er like lange, sa vi, så alle sammen kan ikke være like lange

38. E4: Mmm ... På Figur A så er alle sidene i firkanten like lange, og i B så er det bare to og to sider som er like lange

Det virker som hovedpoenget til Elev 4 er at «fire like lange sider» betyr noe annet enn «to og to sider er like lange», selv om to par like lange sider inngår i fire like sider.



#### 4.3.2 Kvadrat er ikke et rektangel, og rektangel er ikke et parallellogram

Når vi ser på datamaterialet i lys av teori om inklusjonsrelasjoner til firkanter, finner vi ut at elevene har en viss forståelse for at noen figurer inngår i andre figurer. Som vi ser i kapittel 4.3.1, aksepterer de aller fleste minimum at parallellogrammer inkluderer rektangler. Basert på oppgavebesvarelsene og intervjuene, identifiserer jeg kun Elev 8 som ikke inkluderer noen firkanter i andre grupper. I oppgave 1) som går ut på å kategorisere firkanter i grupper, har Elev 8 valgt fem firkanter i gruppa parallellogrammer. Alle disse har parallelle sidepar, og ingen har rette vinkler. I gruppa rektangler har eleven plassert tre firkanter, som alle har rette vinkler, og det ene sideparet er lengre enn det andre. De firkantene som Elev 8 har plassert i gruppa kvadrater har rette vinkler og fire like lange sider. Elev 8 har ikke plassert noen firkanter i flere enn én gruppe. I utdragene nedenfor presenterer jeg begrunnelsene som Elev 8 gir for kategoriseringen av firkantene. Utdrag 28 begrunner klassifisering av parallellogrammer, utdrag 57 begrunner rektangler, og utdrag 73 begrunner kvadrater:

28. E8: På grunn av at de har linjer som kan gå for alltid framover uten å treffe hverandre, så er de litt på skrå sånn (Peker på en firkant)

57. E8: Fordi det er ikke akkurat firkanter og så er de litt lengre, jeg vet ikke om jeg har bytta på dem og (Utydelig), ja, jeg tror det er at firkanter er de øverste er litt lengre enn de andre

73. E8: Eh, fordi de er firkanter som bare har like lange .. sider som .. ja

Utenom for kvadrater, vektlegger Elev 8 unødvendige og til dels usanne egenskaper om de ulike figurklassene, som gjør at det oppstår et hinder for elevens forståelse for firkanters inklusjonsrelasjoner. Etersom eleven tror at rektangler er lengre enn firkanter (Det kommer senere frem at eleven mener kvadrater), vil ikke kvadrater inkluderes i rektangler, og siden eleven mener at parallellogram er skråstilte vil ikke rektangler inkluderes i parallellogrammer.

Videre bygger Elev 8 opp under denne forståelsen vi har om at hen ikke har forståelse for inklusjonsrelasjon på bakgrunn av unødvendige egenskaper. Dette utdraget er hentet fra oppgave 3), hvor eleven beskriver et rektangel:

78. J: Hmm. Mhm. Hva er et rektangel da?

79. E8: Eh, he, he, det er en firkant hvor to og to linjer er like lange og to og to er .. litt lengre

80. J: Ja. Hvordan er det med de linjene der da, er de parallelle?

81. E8: Eh, de er parallelle, men det er ikke et parallellogram

82. J: Okay, hvorfor ikke det?

83. E8: Eh, på grunn av det er ingen spisse eller stumpe kanter, det er bare rette og så .. ja

Her bruker Elev 8 samme resonnering som jeg omtaler i kapittel 4.2 om at rektangler må ha to lengre sider enn de to andre, som ekskluderer kvadrater fra denne personlige definisjonen. Hen forklarer også at selv om et rektangel har parallelle linjepar er det ikke et parallellogram, fordi rektangelet ikke har stumpe og spisse vinkler, noe som ikke er en nødvendig egenskap for et parallellogram.

#### 4.4 Beskriver figurers utseende

På det første nivået av van Hiele sin modell gjenkjenner elever geometriske figurer basert på utseendet. Selv om jeg ikke vil påstå at noen av elevene befinner seg på dette nivået i modellen, ettersom alle er i stand til å også si noe om figurenes egenskaper, er det flere av figurene i undersøkelsen som identifiseres nettopp ut fra utseende. Flere av utdragene fra kapittel 4.2 kunne ha passet like godt inn under dette kapitlet. Spesielt utdraget fra linje 77-83 og linje 16-22 i nevnte kapittel handler om en beskrivelse av den helhetlige figuren:

82. J: Litt som den 9 der? At det er rektangel?

83. E2: Mhm. For at den er .. den er lang

16. E2: Det er en firkant som for eksempel er ganske langt

20. E2: tynt eller tjukt

I noen av utdragene fra min interaksjon med Elev 3 bruker denne eleven kroppsspråk for å forklare figurer. I de to utvalgte utdragene under spør jeg om hvordan hen kan se at noe er en firkant:

16. E3: Fordi at ... eh, jeg vet ikke om det er riktig, men for at, de er sånn (Holder opp hendene parallelt ovenfor hverandre)

17. J: Mhm

18. E3: Og så sånn (Holder hendene parallelt, med den ene hånda over den andre)

19. J: Sånn, og så sånn? Så hvis man har .. (Tegner to og to parallelle linjer på et ark, som ikke henger sammen)

34. E3: Den må liksom ... (Former en firkant med hendene) jeg vet ikke, sånn

35. J: Okay .. så .. linjene .. må sitte sammen, på en måte?

36. E3: Ja

37. J: Ja

38. E3: Det må de være, eller så slipper på .. ehm, grisene ut av grisebingen

Hovedfunnet i disse utdragene er at eleven bruker hendene til å representere *hele* figuren. Dette, kombinert med at eleven bruker metaforer når hen henviser til figuren, sier oss at denne eleven ikke har noe stor grad av konsept for figurens egenskaper. Selv når jeg introduserer fire usammenhengende linjer for eleven, som jo har med figurens egenskaper å gjøre, velger eleven heller å vektlegge hvordan hen tenker at en firkant i seg selv ser ut. Videre i intervjuet tillegger Elev 3 også deler av figuren et utseendebasert syn. Eleven skal forklare hva som er forskjellen mellom et rettvinklet parallellogram og et skrånstilt parallellogram med like lange sider som hverandre, hvor hen først viser med hendene, for så å si at linjene i den ene figuren er laget på en annen måte enn i den andre figuren. Eleven sier altså ikke noe om at det er vinklene i de to figurene som gjør dem ulike.

I likhet med Elev 3, vektlegger også Elev 4 utseendet når hen i sitt intervju forklarer forskjellen mellom det rettvinklede og det skrånstilte parallellogrammet:

40. E4: Eh, Figur 1 er jo bare et vanlig rektangel med rette linjer, men nummer 2 er på en måte et rektangel som har blitt dytta fra toppen og bortover

41. J: Okay. Hvordan kan du se at den har vært dytta fra toppen og bortover da?

42. E4: Jeg ser at eh streken er .. ehm, på en måte satt en annen vei, så de er .. eh, dratt bortover nesten, at de er på skrå til høyre

I dette utsagnet ser vi på hvordan eleven beskriver Figur 2. Elev 4 sier at det ser ut som at denne figuren har blitt dytta fra toppen mot høyre, og at strekene er en annen vei enn i Figur 1. Dette er ikke beskrivelser som sier noe om egenskapene til Figur 2, men heller om det helhetlige utseendet til figuren. Jeg har tidligere presentert flere eksempler på at Elev 4 har god forståelse for geometriske figurers egenskaper, men i dette tilfellet vektlegger hen hvordan hele figuren ser ut i sin beskrivelse. Når jeg så spør om hen kan si noe om vinklene i figuren, sier eleven at Figur 1 har rette vinkler, mens Figur 2 har to spisse og to stumpe vinkler.

Når jeg senere spør om Elev 4 kan forklare likhetene mellom disse to figurene, sier hen at begge er rektangler, bare at det ene har blitt dyttet mot høyre. Per definisjon er ikke begge disse figurene rektangler, ettersom et rektangel må ha rette vinkler. Det interessante er at i forkant av dette utsagnet har eleven påpekt at de to figurene ikke har like vinkler. Likevel velger eleven å beskrive dem begge som rektangler. Jeg har tidligere vist eksempler på at Elev 4 har en oppfatning av at et rektangel har to like lange sider som er lengre enn to andre like lange sider. Om dette er årsaken til at eleven velger å kalle begge rektangler, vektlegger eleven altså denne usanne egenskapen om to og to ulike par sider over den nødvendige egenskapen om at rektangler må ha rette vinkler. Dette er riktignok kun spekulativt, ettersom eleven ikke eksplisitt sier at dette er grunnen til at de er rektangler.

Som jeg nevner innledningsvis i dette kapittelet, er det flere av transkripsjonsutdragene som presenteres her som kunne passet like godt inn i kapittel 4.2 om å tillegge rektangler unødvendige egenskaper, og motsatt. Ett av disse utdragene, som jeg presenterer i 4.2, er hentet fra Elev 7 sin begrunnelse for oppgave 1c) (hvilke av firkantene tilhører gruppa rektangler?):

66. E7: Eh, fordi .. for rektangler er jo sånn her lange (Viser med hendene), og jeg tok dem fordi at .. for at jeg tenkte at de kanskje kunne være rette, siden rektangler er lange, de er som firkanter, bare at de er litt lengre

Som nevnt i kapittel 4.2 tar ikke Elev 7 hensyn til parallelle linjer eller rette vinkler når hen kategoriserer rektangler. Eleven inkluderer to firkanter som ikke har rette vinkler, basert på at de er lange. Altså, i likhet med Elev 4 vektlegger Elev 7 det helhetlige utseendet til figurene («rektangler er lange») over de nødvendige egenskapene til rektangler. Når Elev 7 skal beskrive hva et rektangel er med sine egne ord i oppgave 3), gjør hen også dette ved å henvise til utseendet fremfor hvilke egenskaper rektangler har:

98. E7: Et rektangel er en firkant som er veldig .. eh, veldig lang, og er stor

I datamaterialet finner jeg ett tilfelle hvor elever tillegger parallellogram unødvendige egenskaper. I oppgave 1a) skal Elev 8 begrunne hvorfor hen har kategorisert et utvalg firkanter inn i gruppen parallellogrammer:

28. E8: Eh, på grunn av at de har linjer som kan gå for alltid framover uten å treffe hverandre, så er de litt på skrå sånn (Peker på en firkant)

I første del av begrunnelsen forklarer eleven parallellogrammer ut fra egenskapen parallelle linjer. Så legger hen til en påstand om at parallellogrammer er skråstilt, som

baserer seg på et prototypisk bilde av utseendet til parallellogrammer. Dette preger besvarelsen til Elev 8, hvor hen utelater rettvinklede firkanter fra parallellogrammer. I intervjuet stiller jeg eleven spørsmål om hvordan man kan se forskjell på to figurer. Jeg bruker kvadrat og parallellogram som eksempel:

19. J: Vi kan ta det litt lettere, og snakke om de som er ikke 3D da, hvordan kan du se forskjell på et .. et kvadrat og et parallellogram?

20. E8: At kvadratet er sånn .. like lange, he he. Og så .. eh, parallellogram, noen er litt sånn lenger, og så .. er de litt sånn på skrå, og så, ja

I dette utdraget uttrykker Elev 8 både at parallellogrammer er lengre enn kvadrater, og at de er skråstilte. Ettersom eleven ikke sier noe om vinklene eller sidene til parallellogrammer, er det trygt å fastslå at eleven henviser til utseendet til figuren i dette utdraget. Dette gjentar seg når jeg spør Elev 8 om å forklare forskjellen mellom Figur 1 og Figur 2, hvor eleven sier at Figur 2 er skrå, men ingenting om at vinklene i de to figurene er ulike.

#### 4.5 Beskriver figurers egenskaper, og sidene vektlegges over vinklene

Som jeg allerede har vært inne på i andre kapitler, er det tydelig at elevene henviser til flere egenskaper i deres kategorisering av firkanter. Når elevene refererer til firkantenes egenskaper, har jeg funnet at de har en tendens til å trekke frem sidene i firkantene oftere enn vinklene, noe som tyder på at den ene egenskapen vektlegges over den andre. I dette kapitlet tar jeg for meg transkripsjonsutdrag hvor elevene vektlegger figurenes egenskaper for å definere begrepene, og hvilke egenskaper som vektlegges, for å videre underbygge at dette er noe som kjennetegner deres kategorisering. Ettersom deler av oppgavene handler om noen spesifikke egenskaper ved figurene, og jeg som intervjuer da styrer elevenes fokus mot et bestemt område, har jeg valgt å plukke ut de utdragene hvor elevenes utsagn ikke er direkte påvirket av oppgavetekst eller mine spørsmål. Unntakene hvor jeg stiller spørsmål knyttet til egenskaper er oppfølgingsspørsmål når elevene allerede har nevnt noe om figurenes egenskaper.

Utdragene er i hovedsak hentet fra oppgave 1-3, hvor elevene skal kategorisere firkanter og beskrive hva et parallellogram og et rektangel er, og fra intervjuet hvor de skal beskrive likheter og forskjeller mellom firkanter. Når det gjelder oppgavene, sier Elev 4 dette i forbindelse med kategorisering av kvadrater:

210. E4: Kvadrater er jo firkanter som har .. alle sidene like lange

211. J: Okay, alle sidene er like lange. Hva med vinklene på et kvadrat da?

212. E4: Det er jo nitti grader

I forbindelse med kategoriseringen i oppgave 1d) spør jeg elevene hva et kvadrat er, hvorpå Elev 4 beskriver kvadrater ved hjelp av egenskapen om at alle fire sider er like lange. Når jeg så spør spesifikt om hvordan vinklene ser ut i et kvadrat, sier hen at de er nitti grader, eller rette. Det kan virke som at Elev 4 vektlegger lengden på sidene over rette vinkler, siden hen ikke beskriver sistnevnte egenskap før jeg etterspør den. Dette underbygges senere i gruppediskusjonen, hvor Elev 4 innser at hen har inkludert en firkant som ikke er rettvinklet i gruppa for kvadrater, og dermed blir usikker på om rette vinkler er en nødvendig egenskap for kvadrater:

228.E4: Men da tok jeg sikkert feil med at et kvadrat MÅ ikke ha rette vinkler, altså nitti grader, at det fortsatt kan være et kvadrat

Det Elev 4 sier i dette utdraget viser klart at hen vektlegger egenskapen om at alle sidene er like lange over egenskapen om rette vinkler. I oppgavene 1a-d nevner også Elev 6 og Elev 7 flere egenskaper i beskrivelsene av parallellogrammer, rektangler og kvadrater. Elev 7 forklarer valget sitt av parallellogrammer slik:

30. E7: Mm, for .. alle ligger på firkanter og så er linjene på en måte parallelle

At figurene ligger på firkanter har ikke noe med egenskaper å gjøre, og dreier seg heller om figurenes utseende, men at linjene er parallelle vil være hvilke egenskaper eleven mener er nødvendige for at figurene klassifiseres som parallellogram. Når Elev 6 så skal begrunne sine valg av rektangler og kvadrater, begrunner hen det slik:

60. E6: Fordi at de har to korte og to lange streker

72. E6: Det er noen av dem som er nitti grader, og de skal være like lange

Utdrag 60 henviser til rektangler, og utdrag 72 henviser til kvadrater. Definisjonen som beskrives i henhold til rektangler er ikke nødvendigvis riktig, ettersom vi vet at rektangler har to par med like lange sider, som kan innebære fire like lange sider. Likevel er det egenskapene til figurene som Elev 6 har benyttet for å kategorisere dem. Det som skiller dette utsagnet fra utdragene jeg har brukt i kapittel 4.4, er at utdragene i 4.4 henviser til figurens helhet – at firkanten er lang, mens Elev 6 beskriver linjene som to korte og to lange, altså egenskaper ved figuren. I utdrag 72 sier hen at kvadrater skal ha like lange sider. Hen sier riktignok ikke konkret at *alle sidene* er like lange, så her er dette underforstått. Eleven sier også at *noen av dem* er nitti grader (underforstått at det snakkes om nitti graders vinkler), men har inkludert to firkanter uten rette vinkler i utvalget sitt. Det virker som Elev 6 forstår at rette vinkler er en egenskap ved kvadrater, men ikke en nødvendig egenskap.

Videre beskriver Elev 6 hva et parallellogram er ved å henvise både til utseendet og egenskapene:

91. E6: Et parallellogram er nesten som en togskinne, det er ofte to like lange streker, og to korte

I flere av utdragene tidligere har elever nevnt togskinner som en sammenligning med parallelle linjer. At parallellogrammer «er nesten som en togskinne» er ikke en direkte henvisning til egenskapene til figuren. Selv om det ligger implisitt at det betyr at linjene har konstant samme avstand til hverandre, slik som togskinner, nevner ikke eleven linjene i forbindelse med togskinnene. Derimot er det egenskapene som trekkes frem når Elev 6 sier at parallellogrammer ofte har «to like lange streker, og to korte». Selv om definisjonen på parallellogram ikke krever at to av linjene er lengre enn de to andre er dette egenskaper som utgjør elevens personlige begrepsdefinisjon. At disse egenskapene trekkes frem kan ha sammenheng med prototypeeksempelet på parallellogrammer, som gjerne er en skråstilt firkant med to sider som er lengre enn de to andre. I denne elevens beskrivelse er det linjene som vektlegges som egenskap for parallellogrammer, og hen nevner ikke noe om figurens vinkler. Dette tilsier at rettvinklede firkanter inkluderes i parallellogramgruppen for Elev 6.

Det siste funnet i forbindelse med de aktuelle oppgavene er hentet fra samtalen med Elev 8. I utdraget under forklarer hen sine valg av kvadrater (oppgave 1d), samt beskriver hva et parallellogram er (oppgave 2):

73. J: Mhm, hvorfor tenker du at de er kvadrater da?

74. E8: Eh, fordi de er firkanter som bare har like lange .. sider som .. ja

75. J: Ja, akkurat. Veldig bra, da kan vi gå til oppgave nummer 2. Hva er et parallellogram?

76. E8: Det er firkant med linjer som kan gå for alltid uten å treffe hverandre

I begrunnelsen sin for hvilke firkanter Elev 8 plasserte i gruppa for kvadrater henviser hen til sidene på firkantene, og at det har noe å gjøre med at de er like lange. Ettersom hen ikke fullfører setningen kan vi bare anta at hen mener at alle sidene er like lange, noe som underbygges av at firkantene hen har valgt har fire like lange sider og rette vinkler. Uansett er det sidene på firkantene som Elev 8 henviser til som årsak for kategoriseringen. For å beskrive et parallellogram sier eleven at denne typen firkant har sider som kan gå for alltid uten å treffe hverandre. Dette er mer en beskrivelse av egenskapene til figuren enn den Elev 6 gir i utdrag 91. Hvor Elev 6 sier at parallellogram *ser ut som noe*, eller *er som noe*, forklarer Elev 8 hvilke egenskaper figuren har, og hva som inngår i denne egenskapen. Hverken i beskrivelsen av kvadrater eller parallellogrammer nevner Elev 8 noe om vinklene til figurene. I kvadrater vil rette vinkler være en nødvendig egenskap, mens både rette og ikke-rette vinkler kan inngå i parallellogrammer. Ettersom dette ikke blir nevnt, ser det ut til at Elev 8 vektlegger sidene til figurene i sin kategorisering.

Når det gjelder utdragene fra intervjuene med elevene, nevnte jeg tidligere at de fleste beskrivelser av figurenes egenskaper kommer frem når elevene skal forklare likheter og forskjeller mellom to figurer. I det første utdraget fra intervjuene skal Elev 2 forklare likhetene mellom Figur A (et kvadrat) og Figur B (et rektangel med to sider som er lengre enn de to andre):

48. E2: Begge har kanter rett framover og de er parallelle

I utdraget sier Elev 2 at begge figurene har kanter som går rett fremover. Dette er en beskrivelse av en egenskap ved figuren, men det er noe uklart hvilken egenskap eleven faktisk henviser til. En mulighet er at eleven blander mellom hva som er kanter og hva som er hjørner, og at dette er elevens måte å beskrive rette vinkler på. Et annet alternativ er at eleven ser at figurene er tegnet slik at sidene er rette i den forstand at de følger rutene på arket, og dermed ikke hadde vært «rett framover» hvis figuren hadde vært snudd slik at to av hjørnene peker opp og ned. Derfor kan vi ikke si med sikkerhet om dette er en beskrivelse av vinklene eller sidene til figurene. «De er parallelle» henviser til sidene i figurene. Begge figurer har to par med parallelle linjer. Riktignok kommer det ikke tydelig frem av utsagnet at eleven spesifikt refererer til sidene, eller om hen oppfatter denne egenskapen som at figurene i sin helhet er parallelle.

I intervjuet med Elev 3 ber jeg hen å forklare forskjellene mellom Figur A og Figur B. Dette svarer Elev 3:

40. E3: (Lener seg over bordet) Det som er forskjellen er at her (utydelig) .. at her er alle sidene like lange (Peker på Figur A). Her er to sider like lange, og to sider like lange (Peker på Figur B)

Istedenfor å si at den ene figuren er lengre enn den andre, altså figurene i sin helhet, velger Elev 3 å beskrive egenskapene til begge figurene. Elev 3 forklarer at Figur A har fire like lange sider, mens Figur B har to sider som er like lange, og to andre som er like lange. Her er det underforstått at hen mener at to av de like lange sidene i Figur B har en annen lengde enn de to andre. Ettersom Figur A og Figur B begge har rette vinkler, er det naturlig at eleven vektlegger sidene når hen beskriver ulikhetene. Videre beskriver Elev 3 likhetene mellom Figur 1 (et rektangel med to sider lengre enn de to andre sidene) og Figur 2 (et parallellogram uten rette vinkler, hvor to sider er lengre enn de to andre):

84. E3: Det som er likt, er at den streken og den streken (Peker på to streker) er like lange

85. J: Mhm

86. E3: Det andre som er likt er at den streken og den streken (Peker på to andre streker) er like lange .. nesten like lange, den her (Peker) er litt lenger

Her peker Elev 3 også på egenskapene til figurene, hvor hen påpeker at det finnes en likhet mellom lengden til de vertikale og de horisontale sidene til de to figurene. Ettersom eleven her skal beskrive likhetene er det naturlig å vektlegge denne egenskapen, ettersom vinklene i de to figurene er forskjellige. Når denne eleven derimot skal beskrive ulikhetene mellom Figur 1 og Figur 2 nevner hen ikke vinklene som en forskjell, men gestikulerer heller formene til figuren med hendene, og forklarer at den ene figuren er «laga på en litt annen måte» enn den andre. Dette virker å referere til det helhetlige utseendet til figurene.

Elev 4 beskriver egenskapene til alle figurene når hen skal forklare forskjellene mellom Figur A og B, og 1 og 2. Jeg har allerede diskutert ett av utdragene som viser dette i kapittel 4.3.1, hvor eleven sier at Figur A har fire like lange sider, mens Figur B har to like lange sider og to andre like lange sider (Utdrag 38). Videre vil jeg referere til utdrag 40-42 i kapittel 4.4, hvor eleven sier at den ene figuren er dyttet bortover fra toppen. Dette er elevens første beskrivelse av forskjellene mellom Figur 1 og Figur 2, og først etter at jeg har spurt spesifikt om det finnes en forskjell på vinklene, sier Elev 4:

44. E4: Ehm, ja. Den her ,(Peker på Figur 1) den her har alle fire i nitti grader, mens den her (Peker på Figur 2) har to spisse og to stumpe vinkler

Selv om dette er beskrivelser av egenskapene til figurene, nevner ikke Elev 4 noe om vinklene før jeg bistod med denne ledetråden. Dette kan tyde på at Elev 4 vektlegger sidene til firkantene i sin kategorisering. Dette støttes opp i flere tilfeller forbundet med Elev 4, blant annet i utdrag 228 i dette kapittelet, hvor Elev 4 tror at kvadrater ikke behøver rette vinkler.

Mitt siste funn under dette temaet er to utdrag hentet fra intervjuet med Elev 8, hvor eleven beskriver likhetene og forskjellene mellom Figur A og Figur B. Utdrag 24 referer til forskjellene mellom de to figurene, og utdrag 32 refererer til likhetene:

24. E8: Mm, at .. A har like rette sid-, eller like lange sider (gestikulerer med hendene), og så B har lengre sider på toppen enn på sidene, og sånn

32. E8: Alle vinklene er nitti grader, og så .. begge to er firkanter

Når Elev 8 beskriver forskjellene mellom figurene, gjør hen det samme som Elev 4 gjorde i sin beskrivelse, hvor hen sier at Figur A har fire like lange sider, mens Figur B har to sider som er lengre enn de to andre. I motsetning til Elev 4 vektlegger Elev 8 vinklene når hen beskriver hva som er likt mellom disse to figurene uten at jeg behøver å spørre om dem.

#### 4.5.1 Sammenhenger mellom egenskaper

I ytterst få tilfeller uttrykker elevene at det er noen sammenheng mellom figurers egenskaper, men i oppgave 4b) sier Elev 4 noe som knytter sammen parallellogrammers egenskaper. Oppgaven gikk ut på å avgjøre om setningen «Vinklene ovenfor hverandre i parallellogrammer er like».

315.E4: Fordi .. eller så kan det bli, hvis den her hadde vært ... en annen form for vinkel ... hvis den der hadde gått der (Viser på arket), så hadde de jo en gang truffet hverandre .. da må det være samme vinkler, så da (Stopper setningen)

I transkripsjonsutdraget skal Elev 4 i utgangspunktet forklare hvorfor hen mener at vinkelparene i parallellogrammer ikke er like, men ombestemmer seg underveis. Hen forklarer at dersom den ene vinkelen ikke hadde vært lik som vinkelen ovenfor, ville linjene treffe hverandre dersom de fortsetter, og dermed ikke vært parallelle. Elev 4 forstår altså her at det er en sammenheng mellom egenskapen «to og to like vinkler» og egenskapen «to og to parallelle linjer». Denne forståelsen kjennetegner det tredje nivået i van Hiele's nivåmodell for geometriforståelse.



## 5 Drøfting

Jeg har analysert noen 4.trinnelevers deltakelse i en gruppediskurs av geometriske figurers egenskaper, samt individuelle intervjuer om samme tematikk. Med hensikt å besvare forskningsspørsmålet «Hva kjennetegner noen 4.trinnelevers kategorisering av firkanter?» har jeg funnet ut at elevene i stor grad henviser til egenskaper når de kategoriserer firkanter, og sjeldnere til figurenes utseende. Når elevene refererer til egenskapene til figurene, vektlegger de gjerne egenskapene til sidene fremfor egenskapene til vinklene. Selv om mange av elevene viser forståelse for firkanters egenskaper, kan vi også si at henvisning til utseende kjennetegner elevenes kategorisering, men i mindre grad. Hovedsakelig henvises det til utseendet når elevene beskriver rektangler, hvor de gjerne beskriver den helhetlige figuren som «lang».

Noe av det som kjennetegner disse elevenes kategorisering av firkanter er at de viser forståelse for at firkanter kan tilhøre flere grupper, og anvender i stor grad kunnskapen sin om egenskaper for å rettferdiggjøre dette. Som nevnt kjennetegnes kategoriseringen i stor grad av å henvise til figurenes egenskaper, og spesielt egenskapen om parallelle linjer for parallellogrammer er noe som går hyppig igjen. Med denne kunnskapen er mange av elevene i stand til å se at andre firkanttyper oppfyller kravene til å klassifiseres som parallellogram. Riktignok tillegger elevene oftere rektangler usanne eller unødvendige egenskaper enn de gjør parallellogrammer, og dette hindrer dem i å danne forståelse for en fullstendig hierarkisk klassifisering. Forståelse for inklusjonsrelasjonen mellom rektangler (inkludert kvadrat) og parallellogrammer kjennetegner kategoriseringen deres, men ikke inklusjonsrelasjonen mellom kvadrat og rektangel. I dette kapittelet diskuterer jeg funnene opp mot relevant litteratur.

### 5.1 Forståelse for inklusjonsrelasjoner til firkanter

Resultatene av undersøkelsen viser at flere av elevene inkluderer noen spesielle firkantgrupper i andre mer generelle firkantgrupper, og dermed viser forståelse for at firkanter kan klassifiseres i et hierarki (de Villiers, 1994). Derimot klarer ikke alle elever å skille ut hvilke egenskaper som er tilstrekkelige for å tilfredsstille definisjonen av begrepene, og tillegger derfor noen figurer usanne eller unødvendige egenskaper. Dette kjennetegner nivå 2 av van Hiele's nivåmodell, og kommer sterkest til syne i klassifiseringen av rektangler. Flere av elevene er i stand til å nevne hvilke egenskaper et rektangel har, men ikke hvilke som er tilstrekkelige for å kalle figuren et rektangel. Dette fører til at flesteparten av elevene ikke er i stand til å se en fullstendig hierarkisk klassifisering. Som regel er elevene villige til å akseptere rektangel og kvadrat som et spesielt parallellogram, noe som gjør at vi kan anta at disse elevene besitter noe kunnskap om sammenhenger mellom figurers egenskaper, og hvilke egenskaper som er tilstrekkelige for parallellogrammer. Prototypiske bilder av rektangler hindrer altså forståelse for inklusjonsrelasjonen mellom kvadrat og rektangel, men ikke mellom rektangel og parallellogram. Dette underbygges også av at ingen av elevene presenterer noe som kan knyttes til at de anser kvadrater som spesielle typer rektangler. I oppgave 1c) har riktignok noen av elevene inkludert kvadrater i gruppa rektangler, men ettersom ingen av disse gir noen begrunnelse for dette valget, er det umulig å si om dette er gjort bevisst eller om elevene «gjorde en feil».

## 5.2 Prototypiske bilder av rektangler

En av de usanne egenskapene som flere av elevene nevner er at to av sidene til rektangler må være lengre enn de to andre, som Fujita & Jones (2007) sier er en vanlig måte for elever å definere rektangler på. I henhold til forskningsspørsmålet, som spør hva som kjennetegner disse elevenes kategorisering av firkanter, kan vi fra prototypefenomenets synspunkt si at mange av elevene vektlegger usanne egenskaper for rektangler fremfor de tilstrekkelige egenskapene som definisjonen oppgir.

Elevene som hevder at rektangler må være lange, eller ha to sider som er lengre enn de to andre, kan ha det Duval (1998) omtaler som en perseptuell forståelse av rektangler. De har altså en forståelse som er preget av den første oppfatningen deres av rektangler: «De er lange». Elevene sliter med å gå videre fra denne oppfatningen, og ser ikke at lengdeforskjellen til sideparene ikke er relevant i henhold til definisjonen. Funnene som kan knyttes til prototypefenomenet støtter altså opp om Gal & Linchevski's (2010) påstand om at perseptuell forståelse kan hindre utvikling av geometriske egenskaper og begreper. Som Herschkowitz (1990) sier oppstår prototypiske bilder gjennom elevenes første møte med begrepet, altså ut fra en perseptuell forståelse. Vektleggingen av usanne/unødvendige egenskaper for rektangler vitner om at de fleste av elevene befinner seg på nivå 2 av van Hiele's modell, hvor ett av kjennetegnene er at elevene ikke er i stand til å si hvilke figuregenskaper som er nødvendige og hvilke som er tilstrekkelige. Den tilstrekkelige egenskapen for rektangler ville vært at alle vinklene er like, men egenskapen som flesteparten oppgir om at to sider er lengre enn de to andre er ikke nødvendig.

Hvis vi ser dette funnet i lys av Vinner (1983) og Tall & Vinner (1981) sin teori om begrepsbilde og begrepsdefinisjon, ser vi at mange av elevene bruker kunnskapen sin om figurer til å bygge opp personlige begrepsdefinisjoner som ikke nødvendigvis stemmer overens med de formelle begrepsdefinisjonene. Vi ser flere tydelige tegn på at elever rekonstruerer definisjoner de har hørt til sine egne formuleringer. Dette kan for eksempel være minimalistiske definisjoner som «et kvadrat er en firkant hvor alle sidene er like lange» eller, som i dette tilfellet, at de har misforstått definisjonen for rektangler («firkant hvor to og to sider er like lange og alle vinklene er like») og rekonstruert den til «en firkant hvor to sider er lengre enn de to andre siden». En forklaring på at prototypefenomenet spiller en stor rolle i inklusjonsrelasjonen mellom kvadrat og rektangel, men ikke mellom disse og parallelogram, kan være at elevene allerede har startet å utvikle et begrepsbilde for kvadrater og rektangler før de har hatt undervisning om geometri i skolen. Disse figurene er ofte mer vanlige eksempler på firkanter, og det er nærliggende å tenke at mange barn har kjennskap til disse allerede før de lærer noen definisjon for dem. Parallelogram derimot, kan det godt tenkes at mange elever ikke har noen bakgrunnskunnskap om før de starter med geometriundervisning, og dermed bygger opp begrepsbildet for dette gjennom formelle definisjoner i undervisning.

En ulempe med undersøkelsen er at den ikke førte til funn knyttet til romber. Deltakerne ga uttrykk for at de hadde hørt om dette begrepet, men ikke hadde særlig kjennskap til det. I videre forskning kunne det vært hensiktsmessig å gjøre en lignende undersøkelse med elever på 5. eller 6. trinn hvor man retter seg i større grad til egenskaper ved romber og trapeser. Dette er begreper som, i likhet med parallelogrammer, elevene trolig først blir introdusert for gjennom geometriundervisning og ikke har særlig stor kjennskap til fra før. Når elevene har fått mer erfaring med disse begrepene vil det trolig være mulig å undersøke om begrepsbildet deres for disse figurene bygges opp ut fra

definisjoner eller preges av prototypiske eksempler. På denne måten vil man kunne teste ut hypotesen om at bakgrunnskunnskap påvirker begrepsbildet.

### 5.3 Parallelogrammer klassifiseres ut fra to par parallelle linjer

Resultatene viser oss at elever i nesten alle tilfeller legger vekt på parallelle sider i klassifisering av parallelogrammer. Når elevene skal forklare hva parallelle sider vil si, sammenligner flere av dem med togs Skinner. Ettersom flere av elevene bruker samme sammenligning for å forklare begrepet, er det veldig sannsynlig at denne sammenligningen har blitt brukt i geometriundervisningen. I lys av nivåene i van Hiele-modellen er det ganske naturlig at elevene legger vekt på denne egenskapen, ettersom den bærer preg av et utseendefokus som inngår i første nivå (van Hiele, 1986). Det er ikke dermed sagt at elevene befinner seg på det første nivået av modellen, siden de aller fleste viser tegn til å ha konsept for figurers egenskaper. Elevene som definerer parallelogrammer som firkanter med parallelle linjer viser heller tegn til ferdigheter som inngår i det tredje nivået av modellen, ettersom mange av dem er i stand til å se at alle kvadrater og rektangler er parallelogrammer fordi de har alle egenskapene som parallelogrammet har.

Det som heller er sannsynlig, er at togs Skinner i stor grad inngår i begrepsbildene til elevene. Sannsynligvis er togs Skinnemetaforen noe som har blitt introdusert tidlig i geometriundervisningen, tatt i betraktning av at elevene på 4. trinn ikke har hatt undervisning om geometri veldig lenge, og flesteparten deler denne beskrivelsen. Det ser ut til at elevene bruker bildet av togs Skinner og kunnskapen sin om dem til å vite at alle firkanter hvis sider har samme egenskaper som togs Skinnene, inngår i parallelogrammer. Dermed blir togs Skinner et verktøy for elevenes personlige begrepsdefinisjon: Togs Skinner vil aldri krysse hverandre, altså er firkanter med to par linjer som aldri vil krysse hverandre parallelogrammer.

### 5.4 Sidene vektlegges over vinklene

Det er vanskelig å gi en sikker forklaring på at flesteparten av elevene vektlegger egenskapene til firkantenes sider fremfor vinklens egenskaper. I resultatene nevnes sidene enten i sammenheng med at de er like lange i et kvadrat, at to av dem er lengre i et rektangel, eller at de er parallelle i et parallelogram. Hvis vi ser på det som at det er et skille mellom lengden på kvadratets og rektangelets side, kan vi knytte det til en prototypisk forståelse for rektangler. Denne forståelsen for lengden på sidene er altså påvirket av elevenes første møter med disse figurene – rektangelet har to sider som er lengre enn de andre, mens kvadratet har fire like lange sider. Kvadrater og andre rektangler har alle rette vinkler, så det er ingen forskjell på vinklens som har innvirkning på deres første møte med disse figurene. Om vi så ser på de parallelle linjene i parallelogrammer, kan vi gå tilbake til det jeg skriver i 5.3. Her diskuterer jeg togs Skinnemetaforen som flere av elevene benytter seg av, som jeg antar har blitt introdusert tidlig i geometriundervisningen, og bygger på et utseendefokus i henhold til van Hieles første nivå. Altså, om alle tilfellene som sider vektlegges av elevene har sammenheng med deres første møte med figurene, er det sannsynlig at begrepsbildene til elevene er bygget opp av erfaringer om sidens egenskaper og i liten grad erfaringer om vinklens egenskaper, som de uttrykker i sine personlige begrepsdefinisjoner.

For å få en tydeligere forklaring på dette funnet, kan det være hensiktsmessig å gjennomføre en videre studie hvor man undersøker spesifikt hva elever i denne alderen

anser som nødvendige egenskaper for å klassifisere en figur som et kvadrat, et rektangel og et parallellogram. Undersøkelsen bør gjennomføres med et betydelig høyere antall deltakere om man skal kunne bekrefte at denne vektleggingen av sidenes egenskaper over vinklens egenskaper er generell for elever på 4. trinn. Jeg foreslår da en kvantitativ undersøkelse med avkrysningskjema, med spørsmål som:

*Hvilke egenskaper må oppfylles for at en firkant er et rektangel?*

- A. *To og to sider er like lange*
- B. *Vinklene er rette*
- C. *Både A og B*

## 5.5 Prototypisk forståelse for parallellogrammer er nesten fraværende

Hvor Fujita & Jones (2007) sin undersøkelse ønsker å kartlegge elevenes nivå av geometriforståelse, sikter min undersøkelse på å undersøke hva som generelt kjennetegner elevenes kategorisering av firkanter. Disse fokusområdene er nært relatert til hverandre, men ikke alle funnene kan direkte sammenlignes. I undersøkelsen til Fujita & Jones presenterer de et funn som sier at deltakerne som har en prototypisk forståelse for parallellogram også har prototypisk forståelse for andre firkanter. I tillegg valgte 7 av 19 deltakere i Fujita & Jones sin undersøkelse prototypiske bilder av parallellogrammer i oppgave 1a), og hevdet at det ikke finnes parallellogrammer med rette vinkler. I min undersøkelse derimot velger kun Elev 8 prototypiske bilder av parallellogrammer i samme oppgave, og alle deltakerne med unntak av Elev 8 sier at det finnes parallellogram som har rette vinkler. Fujita & Jones hevder at deltakerne er i stand til å forstå den formelle definisjonen for parallellogram, men ikke nødvendigvis bruke den til å forstå at et kvadrat er en type parallellogram. I min undersøkelse er flesteparten av deltakerne i stand til å bruke definisjonen for parallellogram til å forstå egenskapene. Det virker som det i større grad vektlegges usanne egenskaper i klassifisering av parallellogrammer i Fujita & Jones undersøkelse enn i min. I de to undersøkelsene finnes det en ulikhet i deltakernes alder og antall deltakere. De eldste deltakerne er i større grad preget av prototypiske bilder av parallellogrammer enn de yngste. Ut fra dette oppstår det spørsmål som kan legge grunnlag for videre forskning: Styrkes prototypisk forståelse gjennom erfaring med geometriundervisning? Ved å se dette i sammenheng med Elev 4 i min undersøkelse, ser vi at denne eleven har generelt god forståelse for egenskaper ved geometriske figurer, men er sterkt preget av prototypiske bilder på rektangel. Elev 4 er den deltakeren som i størst grad argumenterer imot at kvadrat er en type rektangel, selv om hen har god forståelse for geometriske figurer og uttrykker selv at hen er sterk i matematikk, samt kjenner til den riktige definisjonen.

Denne ulikheten i funnene fra de to undersøkelsene er med å støtte opp under hypotesen jeg presenterer i 5.2. Elevene i min undersøkelse er mer preget av prototypisk forståelse knyttet til rektangler enn til parallellogrammer, som jeg i 5.2 foreslår har en sammenheng med hvor lenge elevene har hatt kjennskap til begrepene, eller hvor mye erfaring de har med dem. Samtidig er elevene i undersøkelsen til Fujita & Jones i stor grad preget av prototypiske bilder av parallellogrammer, noe som nesten ikke er til stede i min undersøkelse. I begge tilfeller er erfaring/eksponeringstid en faktor, og i hvert av tilfellene tyder resultatene på at lengre eksponeringstid for et begrep tilsvarer større grad av prototypisk forståelse for begrepet. Premisset for antakelsen er selvfølgelig, som jeg

nevner i 5.2, at de fleste elever har hatt kjennskap til begrepene rektangel og kvadrat lenger enn parallellogram.

## 5.6 Studiens begrensninger

En av studiens klare begrensninger er at den består av få deltakere. Av elevene jeg inviterte til å delta i undersøkelsen valgte 9 stk. å delta. Av disse valgte noen å ikke delta i intervju, og noen av dem bidro ikke til relevante funn for forskningsspørsmålet. Altså representerer datamaterialet et lite utvalg av deltakere, som gjør det vanskelig å generalisere resultatene. Med generalisering menes i hvilken grad resultatene vil gjelde generelt for alle i målgruppen, i dette tilfellet elever på 4. trinn. For å øke potensialet for generalisering av forskningen er det hensiktsmessig med så mange prøvesvar som mulig av et gitt tema (Bryman, 2016). Selv om deltakerne ble valgt ut tilfeldig, kan dette potensielt ha medført at kun matematisk faglig sterke elever deltok i undersøkelsen. Om dette er tilfelle, ville resultatene trolig sett ganske annerledes ut om undersøkelsen hadde vært gjennomført med hele klassen. Med utgangspunkt i denne antakelsen kan det for eksempel tenkes at antall deltakere med prototypisk forståelse for parallellogrammer ville vært betydelig høyere, og resultatene ville kanskje ikke ha vært så ulike fra undersøkelsen til Fujita & Jones.

En annen begrensning ved undersøkelsen er at alle deltakerne er elever som tilhører samme klasse. Dersom denne klassen har hatt en veldig grundig innføring i geometriske figurer, eller alternativt veldig dårlig, sammenlignet med andre skoler, vil ikke resultatene være representative for generelle elever på 4. trinn. For å oppnå høyere potensial for generalisering hadde det vært hensiktsmessig med flere deltakere i tillegg til at deltakerne representerte flere skoler.

Årsaken til at jeg valgte denne tilnærmingen til undersøkelsen var å skaffe et grundig innsyn i elevenes forståelse for geometriske figurers egenskaper, og belyse temaet fra flere sider. Tidsbegrensninger hadde hindret undersøkelsen fra å bli gjennomført på et betydelig større antall deltakere fra ulike klasser. Denne tilnærmingen kunne vært ideell for å gjennomføre en undersøkelse med formål å kartlegge en helhetlig geometriforståelse, i likhet med undersøkelsen til Fujita & Jones (2007).

## 6 Avslutning

I denne studien har jeg undersøkt noen 4.trinnselevers forståelse for geometriske figurers egenskaper ved å svare på forskningsspørsmålet:

*Hva kjennetegner noen 4.trinnselevers kategorisering av firkanter?*

Hovedfunnene viser at disse elevene besitter kunnskap om geometriske figurers egenskaper som tillater dem å kategorisere firkanter i et hierarki, men ikke kvadrat som en spesiell type rektangel. Elevene har en prototypisk forståelse for rektangler, og begrepsbildene deres er til dels bygget opp av usanne egenskaper for rektangler. I dette ligger en forestilling om at to av sidene må være lengre enn de to andre. Denne oppfatningen er til stede i alle de deltakende elevenes begrepsbilder. De har derfor vanskeligheter med å forstå det inkluderende forholdet mellom kvadrater og rektangler. Elevene er derimot i stand til å forstå inklusjonsrelasjonen mellom parallellogrammer og dets undergrupper, ved å gjenkjenne parallelle linjer. Gjenkjennelse av parallelle linjer eller å sammenligne definisjonen av parallellogram med hva som kan observeres i andre firkanter er ifølge Fujita (2010) noen måter å komme frem til at andre typer firkanter inngår i gruppa parallellogram.

Den tematiske analysen av elevenes kategorisering og påfølgende begrunnelser avdekker at elevene anvender hovedsakelig kunnskap som tilsvarer nivå 2 av van Hieles (1986) nivåmodell for geometriforståelse, hvilket inkluderer analyse av figurers egenskaper, men ikke en forståelse for egenskapenes nødvendighet og tilstrekkelighet. Samtidig kjennetegnes kategoriseringen til elevene av ferdigheter som inngår i nivå 3 av van Hieles (1986) modell, med forståelse for sammenhenger mellom ulike firkanter, som at kvadrater og andre rektangler kan kategoriseres i gruppa parallellogrammer fordi de har alle egenskapene som parallellogrammet har.

### 6.1 Videre forskning

I denne undersøkelsen benyttet jeg en kvalitativ tilnærming for å danne et omfattende bilde av 4.trinnselevers kategorisering av firkanter. Som nevnt i drøftingen vil en oppfølgende kvantitativ undersøkelse kunne gi oss svar på om resultatene kan generaliseres til 4.trinnselever på generell basis.

I drøftingen diskuterer jeg resultatene i sammenheng med Fujita & Jones (2007) undersøkelse som min studie bygger på, hvor resultatene antyder at prototypisk forståelse for geometriske figurer styrkes gjennom erfaring. Denne hypotesen springer ut fra antakelsen om at elevenes begrepsbilder for kvadrater og rektangler allerede bygges opp før elevene lærer disse begrepene i geometriundervisning i skolen. I videre forskning foreslår jeg å gjennomføre en lignende undersøkelse med elever på mellomtrinnet hvor man i større grad undersøker elevenes kategorisering av romber og trapeser – figurer som elevene trolig opplever sitt første møte med gjennom geometriundervisningen, i likhet med parallellogram. Slik vil man kunne bekrefte eller avkrefte hypotesen om at bakgrunnskunnskap påvirker begrepsbildet.

Elevenes kunnskap om egenskapene til firkanter og firkanters inklusjonsrelasjoner er viktig for å senere bli i stand til å anvende bevis i matematikken, som ifølge Yackel & Hanna (2003) fungerer som en måte å vise at noe er sant, og hvorfor. Ved å videre undersøke hvordan prototypisk forståelse kan motvirkes og dermed hindre at usanne forestillinger og unødvendige egenskaper inngår i elevenes bevis for at en firkant tilhører

en bestemt gruppe, vil man kunne styrke elevenes grunnlag for argumentasjon og bevis i matematikk.

## Referanseliste

- Adler, P. A. & Adler, P. (1994). Observational Techniques. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *Handbook of Qualitative Research* (s. 377-392). Sage Publications.
- Adler, P. A. & Adler, P. (1998). Observational Techniques. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *Collecting and Interpreting Qualitative Materials* (s. 79-109). Sage Publications.
- Barbour, R. (2014). *Introducing Qualitative Research: A Student's Guide* (2. utg.). Sage Publications.
- Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101.
- Brottveit, G. (2007). *Seksuelle overgrep mot barn. En fortolkende tilnærming til barnevernsarbeideres forståelse*. [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Oslo.
- Brottveit, G. (2018). *Vitenskapsteori og kvalitative forskningsmetoder* (1. utg.). Gyldendal Akademisk.
- Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford University Press.
- Clarke, V., Braun, V. & Hayfield, N. (2015). Thematic Analysis. I J. A. Smith (Red.), *Qualitative Analysis: A Practical Guide to Research Methods* (s. 222-248). Sage Publications.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). Interviews. I Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (Red.), *Research Methods in Education*, (8. utg.). Abingdon, Routledge.
- Cronbach, L. J. (1975). Beyond the two disciplines of scientific psychology. *American Psychologist*, 30(2), 116-127.
- Currie, P. & Pegg, J. (1998). Investigating students understanding of the relationships among quadrilaterals. I C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Red.), *Teaching mathematics in new times, proceedings of the annual conference of the mathematics education research group of Australia* (1. utg., s. 177-184). MERGA.
- de Villiers, M. (1994). The role and function of hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. I C. Mammana & V. Villani (Red.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (s. 37-52). Kluwer.
- Erez, M. & Yerushalmy, M. (2006). If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle Young students' experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271-299.
- Fangen, K. (2004). *Deltakende observasjon*. Fagbokforlaget.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.



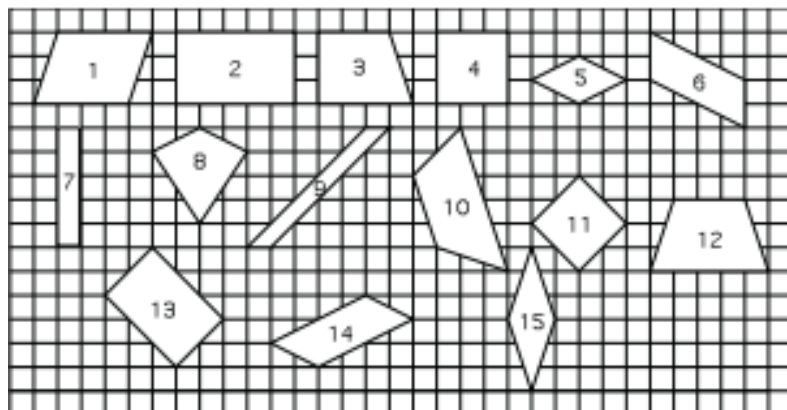
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(2), 3-20.
- Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183.
- Gilje, N. & Grimen, H. (1993). *Samfunnsvitenskapens forutsetninger. Innføring i samfunnsvitenskapens vitenskapsfilosofi*. Universitetsforlaget.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 237-251.
- Hammersley, M. (2010). Reproducing or constructing? Some questions about transcription in social research. *Qualitative Research*, 10(5), 553-569.
- Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 157-179.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. I P. Nesher & J. Kilpatrick (Red.), *Mathematics and cognition* (s. 70-95). Cambridge University Press.
- Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. & Vinner, S. (1987). Activities with teachers base don cognitive research. I M. M. Lindquist, & P. Shulte (Red.), *Learning and teaching geometry, K-12, NCTM 1987 yearbook* (s. 223-235). NCTM.
- Høgheim, S. (2020). Masteroppgaven i GLU. Fagbokforlaget.
- Imsen, G. (2006). *Elevens verden: indføring i pædagogisk psykologi*. Gyldendal.
- Jess, K., Skott, J., Hansen, H. C. & Schou, J. (2008). *Matematik for lærerstuderende: Epsilon. 1.-6. klassetrin*. Forlaget Samfundslitteratur.
- Jones, J. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 55-85.
- Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park. Sage Publications.
- Kirk, J. & Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research*. Sage Publications.
- Kunnskapsdepartementet (2018). *Kjerneelementer i fag*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf>
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Gyldendal Akademisk.

- Mason, J. (2002). *Qualitative researching* (2. utg.). Sage Publications.
- Mason, J. (2018). *Qualitative researching* (3. utg.) Sage Publications.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views on the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179-196.
- Nakahara, T. (1995). Children's construction process of the concepts of basic quadrilaterals in Japan. I L. Meira & D. Carraher (Red.), *Proceedings of the 19th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (3. utg., s. 27-34). Universidade Federal de Pernambuco.
- NESH (2016). Generelle forskningsetiske retningslinjer. De nasjonale forskningsetiske komiteene.
- Okazaki, M. (1995). A study of the growth of mathematical understanding based on the equilibration theory: An analysis of interviews on understanding inclusion relations between geometrical figures. *Research in Mathematics Education*, 1, 45-54.
- Okazaki, M. & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. I J. H. Woo, H. C. Lee, K. S. Park, & D. Y. Seo (Red.), *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (4. utg., s. 41-48). Seoul National University.
- O'Reilly, K. (2012). *Ethnographic methods*. Routledge.
- Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting Student Understanding in Geometry: A Synthesis of Two Models. I R. Lehrer & C. Chazan (Red.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (s. 123-150). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203053461-11>
- Postholm, M. B. (2004). Kvalitativ forskning på praksis: Fra opprinnelse til forskerfokus. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift*, 88(1), 2-18.
- Postholm, M. B. (2005). Observasjon som redskap i kvalitativ forskning på praksis. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift*, 89(2), 146-159.
- Pratt, D. & Davison, I. (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the kite. I N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zillox (Red.), *Proceedings of the 27th international conference for the psychology of mathematics education* (4. utg., s. 31-38). Bergen University College.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691-719.
- Smestad, B. (2008). Geometriaktiviteter i lys av van Hiele's teorier. *Tangenten*.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Terry, G., Hayfield, N., Clarke, V. & Braun, V. (2017). Thematic Analysis. I C. Willig & S. Rogers (Red.). *The Sage Handbook of Qualitative Research in Psychology* (s. 17-37). Sage Publications.

- Thrane, C. (2018). *Kvantitativ metode: en praktisk tilnærming*. Cappelen Damm Akademisk.
- Usiskin, Z., Griffin, J., Witonsky, D. & Willmore, E. (2008). The classification of quadrilaterals: A study in definition. Information Age Publishing.
- van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics* (9.utg.). Pearson Education Limited.
- van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*. Developmental Psychology Series. Academic Press.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Winicky-Landman, G. & Leikin, R. (2000). On equivalent and nonequivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21

## Vedlegg 1: Oppgave om firkanters inklusjonsrelasjoner

1.



Hvilke av firkantene 1 - 15 over er ...

- (a) Med i gruppa «Parallelogrammer» ( )
- (b) Med i gruppa «Romber» ( )
- (c) Med i gruppa «Rektangler» ( )
- (d) Med i gruppa «Kvadrater» ( )

2. Hva er et parallelogram? Beskriv med ord.

3. Hva er et rektangel? Beskriv med ord.

4. Les setningene under nøye, og sett ring rundt de setningene du tror er sanne.

(a) Det finnes et type parallelogram som har rette vinkler ( $90^\circ$ )

(b) Vinklene ovenfor hverandre i parallelogrammer er like

(c) Det finnes et parallelogram som har 4 sider som er like lange

(d) Noen parallelogrammer har flere enn to sider som er like lange

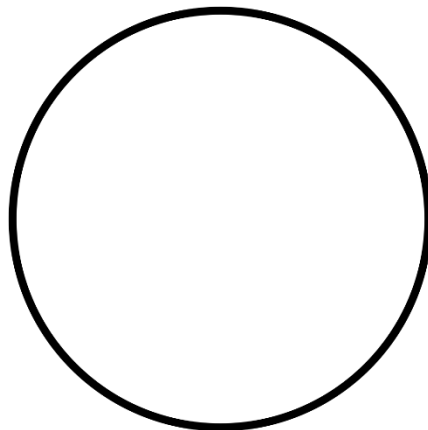
(e) Det finnes et rektangel som har 4 sider som er like lange

5. Går det an å tegne et parallelogram inni en sirkel, hvor alle hjørnene til parallelogrammet treffer linja på sirkelen? Velg svar a. b. eller c. Hvis du velger a., forklar hvorfor det ikke er mulig. Hvis du velger b., tegn figuren inni sirkelen.

a. Nei, det er ikke mulig

b. Ja, det er mulig.

c. Vet ikke.





## Vedlegg 2: Intervjuguide

<b>Fase 1:</b> <b>Rammesetting</b>	<b>1. Løst prat (2 min)</b>  - Uformell prat
	<b>2. Informasjon (5 min)</b>  - Sier litt om temaet for samtalen (bakgrunn, formål) - Forklarer hva intervjuet skal brukes til og forklarer taushetsplikt og anonymitet - Spør om noe er uklart og om respondenten har noen spørsmål - Informerer om evt. opptak, sørger for samtykke til evt. opptak - Starter opptak
<b>Fase 2:</b> <b>Erfaringer</b>	<b>3. Overgangsspørsmål (10-15 min)</b>  - <i>Hva kan du fortelle meg om geometriske figurer?</i> - Oppfølgingsspørsmål
<b>Fase 3:</b> <b>Fokusering</b>	<b>4. Nøkkelspørsmål (20-30 min)</b>  - <i>Forklar hva som er forskjellene mellom Figur A og Figur B</i> - <i>Forklar hva som er likhetene mellom Figur A og Figur B</i> - <i>Her har vi definisjonen av et rektangel: «Et rektangel er en firkant hvor to og to sider er like lange (altså de sidene som er overfor hverandre, og alle vinklene er rette/90 grader». Nå skal vi se på definisjonen for et parallellogram: «Et parallellogram er en firkant hvor to og to sider er like lange, og to og to vinkler er like». Kan en figur være både én ting og samtidig en annen ting? Forklar.</i>  - Oppfølgingsspørsmål
<b>Fase 4:</b> <b>Tilbakeblikk</b>	<b>5. Oppsummering (10 min)</b>  - Oppsummere funn - Har jeg forstått deg riktig? - Er det noe du vil legge til?





# Vedlegg 3: NSD- godkjenning

16.05.2022, 22:36

Meldeskjema for behandling av personopplysninger



## Vurdering

### Referansenummer

558553

### Prosjekttittel

Masteroppgave 2022

### Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) /  
Institutt for lærerutdanning

### Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Anita Valenta , anita.valenta@ntnu.no, tlf: 73558985

### Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

### Kontaktinformasjon, student

Jørgen Sundbø Jacobsen , ojacob@stud.ntnu.no, tlf: 46845345

### Prosjektperiode

01.01.2022 - 25.07.2022

### Vurdering (1)

---

#### 31.01.2022 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen vil være i samsvar med personvernlovgivningen, så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 31.01.2022 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

#### TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 01.06.2022.

#### LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

For alminnelige personopplysninger vil lovlig grunnlag for behandlingen være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 a.

**PERSONVERNPRINSIPPER**

Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen:

- om lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet.

**DE REGISTRERTES RETTIGHETER**

Vi vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

**FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER**

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må prosjektansvarlig følge interne retningslinjer/rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

**MELD VESENTLIGE ENDRINGER**

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til Personverntjenester ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilken type endringer det er nødvendig å melde:

<https://www.nsd.no/personverntjenester/fyll-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema>

Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

**OPPFØLGING AV PROSJEKTET**

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Kontaktperson hos oss: Henning Levold

Lykke til med prosjektet!



## Vedlegg 4: Informasjonsskriv til elever og foresatte

### **Vil du delta i forskningsprosjektet**

### ***”Hvordan argumenterer elever på 4. trinn for geometriske figurer”?***

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å utforske elevers argumentasjon i sammenheng med geometri og geometriske figurers egenskaper. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

#### **Formål**

Formålet med prosjektet er å se på elevenes resonnement for hvordan man kategoriserer geometriske figurer, hvilke egenskaper som gjør at ulike figurer skiller seg fra hverandre, hvilke egenskaper de har til felles, etc. Prosjektet inngår i en masteroppgave i matematikk for våsemesteret 2022.

#### **Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet – NTNU – er ansvarlig for prosjektet.

#### **Hvorfor får du spørsmål om å delta?**

Du får spørsmål om å delta fordi den aktuelle skolen har samtykket til at vi får komme å samle inn datamateriale på den betingelsen at foreldre godkjenner for sitt barn. Du er også spurt fordi det ønskes å samle inn data fra en 4. klasse ettersom læring av geometri er relevant for denne aldersgruppen.

#### **Hva innebærer det for deg å delta?**

Elevene som ønsker å delta vil bli delt inn i grupper på 2-3 elever hvor de deltar i en oppgave som går ut på å sortere geometriske figurer. De vil deretter argumentere for hvorfor de har løst oppgaven som de har gjort. Senere vil elevene som deltar i forskningsprosjektet bli tatt ut til intervju, hvor temaet vil være likt som oppgaven de har gjennomført. Dersom foreldre ønsker å se intervjuguide på forhånd, kan det tas kontakt. Intervjuet vil ta ca. 45 min, og både dette og oppgaven vil bli filmet for transkribering. Både intervjuet og oppgaven vil foregå i et avstengt grupperom på ulike tidspunkt, som vil si at kun elever som har samtykket til å delta vil bli filmet.

Undervisningsøkta vil bli lagt opp slik at de som velger å delta, ikke vil gå glipp av viktig undervisning når de er ute av klasserommet.

#### **Det er frivillig å delta**

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Hvis du ønsker å trekke deg etter videoen er tatt har du krav på å få videoklippet slettet. Med din tillatelse ønsker vi gjerne å bruke videoklippet likevel, men å utelate alle utsagn fra deg i transkripsjon av datamaterialet. Dette er valgfritt. Dersom du velger å ikke delta, vil undervisningen foregå som normalt, men at du ikke blir tatt ut i en gruppe.

### **Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Den som vil ha tilgang til datamaterialet er

Jørgen Sundbø Jacobsen, [ojjacob@stud.ntnu.no](mailto:ojjacob@stud.ntnu.no).

Ved veiledning vil min veileder Anita Valenta, førsteamanuensis i matematikdidaktikk ved NTNU, kunne se videoklippene. Hun vil ikke ha tilgang på disse uten meg. Jeg vil oppbevare alle videoklipp på en mobil enhet tilhørende NTNU. Navn, skole og kjønn vil bli anonymisert med en gang jeg begynner å behandle datamaterialet. Når datamaterialet er transkribert og analysert vil alle videoer bli slettet.

I masteroppgaven vil du dermed ikke kunne bli gjenkjent på grunn av anonymiseringen.

### **Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**

Opplysningene anonymiseres fortløpende, og når oppgaven er godkjent vil video og annet materiale som ikke er anonymisert, slettes. Etter planen vil dette være i slutten av juli 2022.

### **Dine rettigheter**

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

### **Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?**

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

### **Hvor kan jeg finne ut mer?**

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved Anita Valenta, [anita.valenta@ntnu.no](mailto:anita.valenta@ntnu.no) (Veileder)
- Jørgen Sundbø Jacobsen, [ojjacob@stud.ntnu.no](mailto:ojjacob@stud.ntnu.no) (student)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost ([personverntjenester@nsd.no](mailto:personverntjenester@nsd.no)) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Anita Valenta  
(Forsker/veileder)

Jørgen Sundbø Jacobsen

