Bacheloroppgave

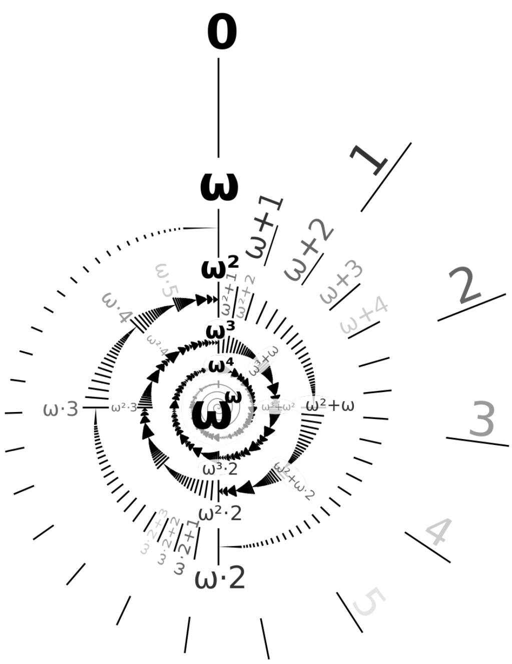
NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Eirik S. Andreassen

Til evigheten – og forbi:

En kort historie om uendelighet fortalt i ZF

Bacheloroppgave i Matematiske fag
Veileder: Sverre o.
Februar 2021



en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_number

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Eirik S. Andreassen

Til evigheten – og forbi:

En kort historie om uendelighet fortalt i ZF

Bacheloroppgave i Matematiske fag
Veileder: Sverre o.
Februar 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Innhold

Forord

Tittelen til denne bacheloroppgaven er nok litt misvisende, for selv om teksten tar for seg **ZF**, tall, ordinaler og universet, så gjør den det uten noen gang å faktisk definere *uendelighet* slik vi ofte tenker på det:

Uendelig stort – uendelig smått,
Uendelig lenge – uendelig kort.

Vi skal derimot ta for oss spørsmål som likner litt mer på det følgende:

Hva vil det si å telle ≪forbi≫ alle naturlige tall?

Det matematiske fagfeltet som per i dag er best egnet[1] til å besvare slike spørsmål, er *mengdelære*. For å unngå å snuble inn i paradoksene som kommer med en *naiv* innfallsvinkel, skal vi bygge opp teorien vår *aksiomatisk*. Den mest anerkjente moderne aksiomatiseringen av mengdelære er systemet **ZF(C)**[2][3], og det er her vi skal arbeide.

Kapittel 1 starter med en kort innføring i det formelle systemet **ZF**. Deretter repeterer vi en del kjente begreper fra naiv mengdelære, men sett fra perspektivet til **ZF**. Til slutt snakker vi litt om klasser.

I kapittel 2 konstruerer vi de naturlige tallene innad i **ZF**. Vi skal se at dette er ganske mye mer arbeidskrevende enn man kanskje skulle tro, men reisen er verdt det: mange av ideene vi skal bruke senere har sitt utspring nettopp her.

Et intermezzo diskuterer ganske uformelt konstruksjonen av heltallene, de rasjonale tallene, og de reelle tallene.

Kapittel 3 handler primært om *ordinaler*. Ordinalene er en spesiell klasse av velordnede mengder som i en viss forstand utvider de naturlige tallene ut i det transendelige.

Til slutt tar kapittel 4 for seg *universet*: uformelt, ≪mengden≫ av alle mengder. Vi vil få bruk for alt vi har lært, og ordinalene vil være en av de viktigste ingrediensene.

---

[1] La oss håpe at ingen ∞-kategoriteoretikere leser dette.

[2] *Ernst **Zermelo*** (1871–1953), tysk matematiker og logiker som i 1904 tok i bruk det beryktede *utvalgsaksiomet* **(C)** i sitt bevis for *velordningsteoremet*.

[3] *Abraham **Fraenkel*** (1891–1965), tysk-israelsk matematiker som i 1922 innførte *erstatningsskjemaet* i (mer eller mindre) dets moderne form.

KAPITTEL 1

ZF

1. Det formelle systemet

Uformelt[1] er et formelt system et forsøk på å formalisere diskurs om en eller flere bestemt(e) type(r) *objekter*. Denne formuleringen er riktignok noe diffus, men vi skal ikke bruke tid her på å gjøre den mer konkret. Målet vårt i denne seksjonen er ikke en innføring i formelle systemer generelt, men **ZF** spesielt.

For våre formål vil et formelt system ha tre bestanddeler:

(1) Et *språk*.
(2) En *grammatikk*.
(3) *Aksiomer*.

De neste to delseksjonene bruker hovedsakelig ideene illustrert i [3, s. 29–34] og [4, s. 13–19, 67–79]. I den tredje forsøker vi å forene perspektivene i [3], [5], [6] og [7] til ett sammenhengende bilde.

Språk. Først må vi bestemme oss for hvilke symboler vi har til rådighet. Samlingen $\mathfrak{O}$ av «lovlige» symboler kalles *ordforrådet* til **ZF**.

$\mathfrak{O}$ består av det følgende:

- En samling $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ av *variable*.
- En *signatur* $\mathfrak{S}$ av *primitive* symboler.
- Logisk *negasjon* $\neg$.
- De logiske *bindeleddene* $\wedge, \vee, \implies$ og $\iff$.
- *Likhetspredikatet* $=$.
- *Kvantorene* $\forall$ og $\exists$.
- Skilletegnene $(,), [,]$ (*parenteser*) og , (*komma*).

Signaturen $\mathfrak{S}$ har kun ett symbol: *medlemskapspredikatet* $\in$ (som for eksempel kan leses «tilhører» eller «er element i»). Noen logikere og mengdelærde (spesifikt [3]) anser også $=$ (som leses «er lik») som en del av $\mathfrak{S}$, men dette er (mer eller mindre) en smakssak.

[1] Dette er en (dårlig) vits.

I noen formaliseringer av mengdelære starter man først med en samling objekter som ikke selv er mengder, og bruker disse til å «bygge» mengder. Et slikt objekt kalles et *urelement*. Et viktig særpreg ved **ZF** er imidlertid det følgende:

Ethvert objekt er en mengde.

Vi har også noen andre måter å uttrykke dette på:

- **ZF** er et *én-sortert* system med mengder som eneste *sort*;
- *ontologien* til **ZF** består utelukkende av mengder;
- **ZF** har ingen urelementer.

Uansett hvordan vi formulerer oss, følger det at enhver variabel i $\mathfrak{X}$ er en *plassholder* for en eller annen mengde.

Foreløpig har vi kun en haug $\mathfrak{O}$ med (ubrukelige) enkeltsymboler. Vi bestemmer derfor at vi også kan betrakte enhver *endelig streng* av symboler i $\mathfrak{O}$. *Språket* til **ZF** er samlingen $\mathfrak{L}$ av alle slike strenger.

Grammatikk. Vi trenger nå et sett med regler som bestemmer hvilke strenger i $\mathfrak{L}$ som har *syntaktisk* betydning; med andre ord, hvilke sammensetninger av symboler fra $\mathfrak{O}$ som er *formler*.

Formler konstrueres som følger:

(1) La x og y være variable. De *atomiske* formlene i $\mathfrak{L}$ er
$$(x \in y),\ (x = y).$$

(2) La φ og ψ være formler. Da er
$$\neg\varphi,\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \Rightarrow \psi),\ (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$
også formler.

(3) La x være en variabel og φ være en formel. Da er
$$(\forall x\ \varphi),\ (\exists x\ \varphi)$$
også formler.

Ettersom symbolene φ og ψ over representerer formler og ikke mengder, tilhører de ikke samlingen $\mathfrak{X}$ av variable som vi beskrev tidligere. Vi skiller derfor mellom

- *mengdevariable*, som tilhører $\mathfrak{X}$.
- *metavariable*, som er formler i språket $\mathfrak{L}$.

Videre innfører vi symbolet $\mathfrak{F}$ om samlingen av alle formler i $\mathfrak{L}$.

Dersom vi alltid skulle være nødt til å skrive en formel som en streng av symboler fra $\mathfrak{L}$, ville vi ikke fått gjort stort. Vi tillater derfor også nye symboler som *forkortelser* for formler i $\mathfrak{F}$.

For eksempel definerer vi $\notin$, $\neq$, $\nexists$, $\exists!$ og $(\nexists \vee \exists!)$ ved

$$\begin{aligned} x \notin y &\iff \neg(x \in y), \\ x \neq y &\iff \neg(x = y), \\ \nexists x\ \varphi(x) &\iff \forall x\ \neg\varphi(x), \\ \exists! x\ \varphi(x) &\iff [(\exists x\ \varphi(x)) \wedge \forall y\ (x \neq y \implies \neg\varphi(y))], \\ (\nexists \vee \exists!) x\ \varphi(x) &\iff [(\nexists x\ \varphi(x)) \vee (\exists! x\ \varphi(x))]. \end{aligned}$$

Disse leses henholdsvis som «x er ikke i y», «x er ulik y», «det finnes ingen x slik at $\varphi(x)$», «det finnes nøyaktig én x slik at $\varphi(x)$», og «det finnes enten ingen eller nøyaktig én x slik at $\varphi(x)$».

Heretter innfører vi nye symboler som i matematikken forøvrig. Vi skal imidlertid huske det følgende:

Enhver forkortelse må kunne reduseres til en formel i $\mathfrak{F}$.

Notis om orden. En viktig konsekvens av reglene for konstruksjon av formler, er at kvantorene $\forall$ og $\exists$ alltid må stå like før en mengdevariabel. Vi sier at $\forall$ og $\exists$ *kvantiserer over mengder*, og dette må naturligvis også gjelde for kvantorer som $\nexists$ og $\exists!$, siden disse er utledet fra $\forall$ og $\exists$.

Denne egenskapen gjør **ZF** til et *førsteordens* system. Et *nullteordens* system har ingen kvantorer i det hele tatt, mens et *andreordens* system har kvantorer som også kvantiserer over formler. Det finnes også systemer av enda høyere orden.

Aksiomer. Det siste vi trenger er *aksiomer*. Uformelt kjenner vi et aksiom som en påstand vi godtar uten bevis, og som danner et grunnlag for videre argumentasjon. For våre formål er et aksiom en førsteordens formel som tilkjennegir delvis informasjon om hvordan $\in$ og $=$ oppfører seg. Vi skal ikke kreve noen mer formell definisjon enn dette.

Her introduserer vi de første fem aksiomene til **ZF**, og i neste delseksjon innfører vi – etter litt om og men – det sjette. De resterende tre vil dukke opp i de påfølgende kapitlene.

Merk at hvert aksiom har en forkortelse skrevet i frakturtype. Vi henviser ofte bare til denne forkortelsen når vi ønsker å fremheve bruken av det aktuelle aksiomet i et resonnement.

Aksiom 1. **Ekstensjonalitet ($\mathfrak{Eks}$)**

$$\forall X\ \forall Y\ [\forall x (x \in X \iff x \in Y) \implies{}^{a} X = Y].$$

[a] Den omvendte implikasjonen er et teorem i førsteordens logikk: hvis to objekter er like, så må enhver egenskap som er sann om den ene også være sann om den andre. Med andre ord er dette en forkledt ekvivalens.

Vårt første aksiom forteller at enhver mengde er entydig bestemt av elementene sine. Vi definerer nå

$$X \subseteq Y \iff \forall x\ [x \in X \implies x \in Y],$$

hvorpå vi sier at X er en *delmengde* av Y. Vi kaller X en *ekte* delmengde av Y hvis $X \subseteq Y$ og $X \neq Y$.

Aksiom 2. **Den tomme mengden ($\mathfrak{Tom}$)**

$$\exists E\ \forall x\ (x \notin E).$$

Det finnes altså en mengde som ikke har noen elementer – en *tom* mengde. Videre er denne mengden unik (bare anta at X og Y er tomme mengder og bruk $\mathfrak{Eks}$), så vi kan rettmessig snakke om *den tomme mengden* $\varnothing$. Vi observerer at $\varnothing \subseteq X$ for enhver mengde X.

Aksiom 3. **Paring ($\mathfrak{Par}$)**

$$\forall x\ \forall y\ \exists Z\ [(z \in Z) \iff (z = x \wedge z = y)].$$

$\mathfrak{Par}$ fastslår eksistensen av *(det uordnede) paret* $\{x, y\}$ for alle mengder x og y. Igjen gir $\mathfrak{Eks}$ at $\{x, y\}$ er unik. Videre definerer vi *ettpunktsmengden* $\{x\}$ ved $\{x\} = \{x, x\}$ for enhver mengde x.

Aksiom 4. **Union ($\mathfrak{Uni}$)**

$$\forall X\ \exists Y\ \forall y\ [(y \in Y) \iff \exists x\ (x \in X \wedge y \in x)].$$

Det ovennevnte definerer *unionen* $\bigcup X$ av en mengde X og forteller at denne finnes for enhver X. Dette lar oss også definere en operasjon *cup* ved

$$X \cup Y = \bigcup \{X, Y\},$$

kalt *unionen* av X og Y. Det er en enkel oppgave å vise at en mengde $x \in X \cup Y$ hvis og bare hvis $x \in X$ eller $x \in Y$.

Aksiom 5. **Potensmengde ($\mathfrak{Pot}$)**

$$\forall X\ \exists Y\ \forall x\ (x \in Y \iff x \subseteq X).$$

Mengden over kalles *potensmengden* til X. Den betegnes $\wp(X)$, eller bare $\wp X$ så lenge dette ikke kan misforstås. $\wp X$ har nøyaktig alle delmengdene av X som elementer. Et ganske umiddelbart resultat sier at dersom $X \subseteq Y$, så er $\wp X \subseteq Y$.

Separasjon. Vårt siste aksiom (for nå) er motivert av et ønske om å formalisere den kjente og kjære *abstraksjonsnotasjonen*

$$X = \{x \mid \varphi(x)\}, \tag{$\star$}$$

der φ er en eller annen formel og symbolet $\mid$ leses «slik at». For de tre operasjonene vi har definert er dette ikke noe problem, for

$$\{x, y\} = \{z \mid (z = x) \vee (z = y)\}, \tag{$\mathfrak{Par}$}$$

$$\bigcup X = \{t \mid (\exists x \in X) t \in x\}, \tag{$\mathfrak{Uni}$}$$

$$\wp X = \{Y \mid Y \subseteq X\}, \tag{$\mathfrak{Pot}$}$$

Det generelle tilfellet er imidlertid en helt annen historie, for dersom vi tillater ($\star$) uten begrensninger havner vi fort i trøbbel. For illustrasjon lar vi $\varphi(x)$ være formelen $(x \notin x)$, og hevder eksistensen av en mengde S slik at

$$S = \{x \mid x \notin x\}. \tag{$*$}$$

Vi forsøker nå å ta stilling til om S er et element i seg selv, og går på trynet inn i *Russells*[2] *paradoks*:

Hvis $S \notin S$ gir $(*)$ umiddelbart at $S \in S$.

Hvis $S \in S$, må S oppfylle $(*)$, så $S \notin S$.

Løsningen på dette fjolleriet er å kreve at en mengde definert i abstraksjonsnotasjon må være en delmengde av en mengde som vi allerede vet eksisterer. For enhver mengde Y som vi kan finne ved de andre aksiomene, har vi dermed

$$X = \{x \in Y \mid \varphi(x)\}.$$

Dette leder oss til vårt neste problem: vi ønsker nemlig at en mengde på formen over skal eksistere uansett hvilken formel φ vi ønsker å bruke, men siden **ZF** er et førsteordens system kan ikke allkvantoren $\forall$ stå foran en formel!

Vi løser dette ved å formulere aksiomet som et *skjema* – en uendelig samling av aksiomer der hver *instans* av skjemaet er et aksiom «generert» av en formel.

Vi er endelig klare til å formulere *separasjonsskjemaet*:

[2] *Bertrand Russell* (1872–1970), britisk filosof, logiker, matematiker, historiker, ..., og nobelprisvinner.

AKSIOM 6. **Separasjonsskjema ($\mathfrak{Sep}$)**
For enhver formel φ som ikke inneholder Y er det følgende et aksiom:

$$\forall X\ \exists Y\ \forall a\ [a \in Y \iff (a \in X \wedge \varphi(a, X))],$$

der formelen φ kan henvise til andre mengder enn kun a og X (men ikke til Y). En instans av separasjonsskjemaet kalles et *separasjonsaksiom*.

Det er mulig å vise at det ikke finnes noen endelig omvei om dette problemet. Systemet **ZF** er ikke *endelig aksiomatiserbart*.

Mengdealgebra. Utstyrt med separasjonsskjemaet kan vi nå definere *snittet*

$$X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}$$

og *differansen*

$$X - Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

av X og Y.

En mengde kalles også ofte en *familie*. Vi definerer *snittet* av en familie $\mathcal{A}$ ved

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid (\forall X \in \mathcal{A})\ x \in X\}.$$

To mengder X og Y kalles *disjunkte* hvis $X \cap Y = \varnothing$. Vi sier da også at X er *disjunkt fra* Y (og vice versa). En familie $\mathcal{A}$ er *disjunkt* dersom $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$.

≪Operasjonene≫ $\{\cdot,\cdot\}, \cup, \cap, -$ og $\wp$ utgjør begynnelsen på en *mengdealgebra* med egne algebraiske regler (eksempelvis *De Morgans lover*). En konsis gjennomgang av noen av disse reglene finnes i [9, s. 10–15].

2. Relasjoner & funksjoner

Relasjoner og funksjoner dukker opp i så og si hver eneste matematisk underdisiplin. Her skal vi danne oss et lite overblikk over hvordan disse begrepene formaliseres i **ZF**. Vi skal holde stringensen til et minimum, og heller gi korte beskrivelser av hvordan man kan utlede de viktigste resultatene.

Ordnede par. Gitt mengder x og y definerer vi det *ordnede paret* $\langle x, y\rangle$ av x og y ved

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Eksistensen til $\langle x, y\rangle$ følger ved å bruke $\mathfrak{Par}$ tre ganger: først danner vi $\{x\}$, deretter $\{x, y\}$, og til slutt bruker vi det samme aksiomet på disse to for å produsere $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definisjonen vår sørger for at den ønskede egenskapen

$$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \iff (a=c)\wedge(b=d)$$

er oppfylt. Den venstre implikasjonen følger umiddelbart fra $\mathfrak{Eks}$; den høyre får vi ved å betrakte de mulige tilfellene hver for seg, og bruke $\mathfrak{Eks}$ der det er nødvendig.

Produkt. Hvis X og Y er mengder kan vi danne mengden

$$X\times Y = \{\langle x,y\rangle \mid (x\in X)\wedge(y\in Y)\},$$

kalt *det kartesiske produktet* av X og Y. Eksistensen til $X\times Y$ finner vi ved å betrakte et vilkårlig ordnet par $\langle x,y\rangle$ (der $x\in X$ og $y\in Y$), og vise at $\langle x,y\rangle$ tilhører en mengde vi allerede kjenner.

Etter litt om og men finner vi at

$$\langle x,y\rangle \in \wp\wp(X\cup Y),$$

som er gitt av $\mathfrak{Pot}$ og $\mathfrak{Uni}$. En instans av $\mathfrak{Sep}$ gir nå at

$$X\times Y\subseteq \wp\wp(X\cup Y),$$

og vi er ferdige. Til slutt bemerker vi at også $\times$ ofte regnes som en operasjon i mengdealgebra.

Relasjoner. En *(binær) relasjon* mellom X og Y er en delmengde $R\subseteq X\times Y$. Hvis $X=Y$ sier vi at R er en (binær) relasjon *på* X, og da kaller vi det ordnede paret $\langle X,R\rangle$ en *struktur*.

Dersom $R\subseteq X\times Y$ og $\langle x,y\rangle\in R$ skriver vi ofte bare $x\,R\,y$. Videre definerer vi *domenet*, *rekkevidden* og *feltet* til R ved henholdsvis

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} R &= \{x\in X \mid (\exists y\in Y)\ \langle x,y\rangle\in R\},\\ \operatorname{ran} R &= \{y\in Y \mid (\exists x\in X)\ \langle x,y\rangle\in R\},\\ \operatorname{fld} R &= \operatorname{dom} R\cup \operatorname{ran} R.\end{aligned}$$

Funksjoner. En relasjon $f\subseteq X\times Y$ er en *funksjon* dersom

$$\forall x\in X\ \exists! y\in Y(x\,f\,y).$$

Vi betegner det ovennevnte med $f : X\longrightarrow Y$, og sier at f er en funksjon *fra* X *inn i* Y. Mengdene $\operatorname{dom} f$ og $\operatorname{ran} f$ er definert som for relasjoner forøvrig; i tillegg definerer vi *kodomenet* $\operatorname{cod} f = Y$.

Hvis $y\in Y$ er det entydig bestemte elementet slik at $x\,f\,y$, skriver vi $y=f(x)$ og sier at y er *bildet* av x under f.

Dersom $f : X\longrightarrow Y$, definerer vi *inversen*

$$f^{-1} = \{\langle y,x\rangle\in Y\times X \mid f(x)=y\}.$$

Notasjonen f^{-1} er vanligvis reservert for tilfeller der også f^{-1} er en funksjon, men vi krever ikke dette her.

Hvis også $g : Y \longrightarrow Z$, definerer vi *sammensetningen*

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle \in X \times Z \mid \exists y \in Y\ [f(x) = y \wedge g(y) = z]\}.$$

$g \circ f : X \longrightarrow Z$ er en funksjon så lenge f og g begge er funksjoner.

Gitt en delmengde $A \subseteq \mathrm{dom} f$ definerer vi *restriksjonen*

$$f \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y \mid (x \in A) \wedge f(x) = y\}$$

av f til A, samt *bildet*

$$f[\![A]\!] = \mathrm{ran}(f \upharpoonright A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A(f(x) = y)\}$$

av A under f.

Gitt mengder X og Y kan vi også danne mengden

$$Y^X = \{f \mid f : X \longrightarrow Y\};$$

det vil si, mengden av alle funksjoner fra X til Y. Det faktum at Y^X faktisk eksisterer følger ved å se at

$$f \subseteq X \times Y \iff f \in \wp(X \times Y),$$

hvorpå $Y^X \subseteq \wp(X \times Y)$ ved et separasjonsaksiom. Legg merke til at dette argumentet aldri brukte antakelsen om at f er en funksjon; dette holder altså også for vilkårlige relasjoner.

Noen funksjoner er penere enn andre: Vi sier at en funksjon f er en

- *injeksjon* (ev. at f er *én-til-én*) dersom
$$\forall x_1, x_2 \in X\ [f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2];$$
- *surjeksjon* (ev. at f er *på* Y) dersom $\mathrm{ran}\, f = Y$;
- *bijeksjon* dersom f er både én-til-én og på Y.

3. Klasser

Diskusjonen rundt separasjonsskjemaet illustrerte at selv om ethvert objekt i **ZF** er en mengde, så finnes det interessante ting som ikke nødvendigvis er mengder. Et annet eksempel er det følgende:

La $\mathbb{V}$[3] være *universet*, det vil si, «samlingen» av alle mengder. Er $\mathbb{V}$ en mengde? Vel, hvis dette var tilfelle kunne vi anvendt et separasjonsaksiom på $\mathbb{V}$ for å danne mengden

$$S = \{x \in \mathbb{V} \mid x \notin x\},$$

som igjen er mengden fra Russells paradoks. Konklusjonen må være at heller ikke $\mathbb{V}$ er en mengde.

Vi ønsker imidlertid et språk som også kan snakke om slike «patologiske» samlinger. For å få en idé om hvordan vi kan gjøre dette, ser

[3] for *vniversvm* (denne fotnoten er altså ikke en potens).

vi på hvordan $\mathbb{V}$ ville sett ut i abstraksjonsnotasjon dersom den var en mengde. Vi har

$$\mathbb{V} = \{x \mid x = x\}.$$

Dette er interessant: $\mathbb{V}$ er *definert* av formelen $x = x$, på samme måte som S var definert av formelen $x \notin x$. Lærdommen er at det ikke er noe logisk i veien med disse formlene[4]; problemet oppstår når vi forsøker å danne <u>mengden</u> av alle objekter som oppfyller en av dem.

Motivert av det ovenstående følger vi i fotsporene til [7, s. 5–6], samt [3, s. 46–49], og innfører *klasser* som et nytt, <u>uformelt</u> begrep:

Gitt en formel $\varphi(x, u_1, ..., u_n)$, sier vi at

$$\mathscr{K} = \{x \mid \varphi(x, u_1, ..., u_n)\}$$

er en *klasse*[5]. Merk at $\mathscr{K}$ kun er en forkortelse for den definerende formelen. Vi skriver allikevel

$$x \in \mathscr{K} \iff \phi(x, u_1, ..., u_n),$$

og påpeker at også dette bare er en forkortelse.

Dersom

$$\mathscr{K} = \{x \mid \varphi(x, u_1, ..., u_n)\}$$

og

$$\mathscr{L} = \{x \mid \psi(x, v_1, ..., v_n)\}$$

er klasser, anser vi dem som *like* hvis og bare hvis de definerende formlene φ og ψ er ekvivalente; det vil si,

$$(\mathscr{K} = \mathscr{L}) \iff \forall x\ [\varphi(x, u_1, ..., u_n) \iff \psi(x, v_1, ..., v_n)].$$

Siden parametrene $u_1, ..., u_n$ og $v_1, ..., v_n$ i henholdsvis φ og ψ nå er irrelevante for om to klasser er like, vil vi som oftest sløyfe dem og bare skrive $\varphi(x)$ når vi mener formelen som definerer klassen $\mathscr{K}$.

Vi sier at $\mathscr{K}$ er en *delklasse* av $\mathscr{L}$ hvis og bare hvis

$$\forall x\ [(x \in \mathscr{K}) \implies (x \in \mathscr{L})],$$

og det kommer nok ikke som noen overraskelse at vi da skriver $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}$. Vi definerer også en *ekte delklasse* analogt.

---

[4]Et resultat i kapittel 4 vil medføre at begge formlene er sanne om enhver mengde. Med andre ord er faktisk $S = \mathbb{V}$.

[5]Denne skrifttypen brukes utelukkende om klasser. Som med $\mathbb{V}$ vil også noen andre viktige klasser få mer individuelle symboler.

La $\mathscr{K}$ og $\mathscr{L}$ være klasser definert av henholdsvis φ og ψ. Vi definerer følgende «operasjoner»:

$$\mathscr{K} \cup \mathscr{L} = \{x \mid \varphi(x) \vee \psi(x)\},$$
$$\mathscr{K} \cap \mathscr{L} = \{x \mid \varphi(x) \wedge \psi(x)\},$$
$$\mathscr{K} - \mathscr{L} = \{x \mid \varphi(x) \wedge \neg\psi(x)\}.$$

I tillegg definerer vi *unionen* og *snittet* av en klasse $\mathscr{K}$ ved

$$\bigcup \mathscr{K} = \{x \mid (\exists A \in \mathscr{K})\ x \in A\},$$
$$\bigcap \mathscr{K} = \{x \mid (\forall A \in \mathscr{K})\ x \in A\}.$$

Vi kan også danne klasser av ordnede par. En *funksjonsklasse* er en klasse $\mathscr{F}$ av ordnede par der den definerende formelen til $\mathscr{F}$ er *funksjonsliknende* – et begrep vi skal definere i kapittel 3.

Til slutt påpeker vi at enhver mengde også er en klasse, for hvis X er en mengde har vi

$$X = \{x \mid x \in X\}$$

ved ekstensjonalitet. For distinksjon sier vi derfor at en klasse som ikke er en mengde er en *ekte klasse*.

KAPITTEL 2

ω

1. Induktive mengder

Nå som vi har fått en liten oversikt over det formelle systemet, skal vi vise hvordan de naturlige tallene kan konstrueres innad i **ZF**. Vi må først bestemme oss for hva et naturlig tall er. Definisjonen vi skal bruke er motivert av følgende idé:

Et naturlig tall er mengden av alle mindre naturlige tall.

Det er kanskje ikke umiddelbart innlysende hvorfor vi ønsker nettopp dette, men i løpet av de neste seksjonene vil det sakte men sikkert gå opp for oss at dette er sammenfallende med vår intuisjon om hva et naturlig tall er.

Etterfølgere. Det følgende begrepet kan anses å være en generalisering av ideen «+1»:

DEFINISJON 2.1. La x være en mengde. Vi definerer *etterfølgeren* x^+ av x ved

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

Etterfølgere er *veldefinerte*, for

$$\begin{array}{cr} x = y & \\ \Downarrow & (\mathfrak{Eks} \text{ og } \mathfrak{Par}) \\ \{x\} = \{y\} & \\ \Downarrow & (\mathfrak{Eks} \text{ og } \mathfrak{Uni}) \\ x \cup \{x\} = y \cup \{y\}. & \end{array}$$

Videre, hvis X er en mengde og $x \in X$, så er $x^+ \in X \cup \wp X$. Med andre ord er tilordningen

$$\begin{aligned} S : X &\longrightarrow X \cup \wp X \\ x &\longmapsto x^+ \end{aligned}$$

en funksjon – kalt *etterfølgerfunksjonen* – for enhver mengde X. Ved misbruk av notasjon kommer vi til å betegne denne med symbolet S uansett hvilken mengde X vi snakker om.

DEFINISJON 2.2. En mengde I kalles *induktiv* dersom

(i) $\varnothing \in I$; og
(ii) $\forall x\ (x \in I \Longrightarrow x^+ \in I)$.

(Kriterium (ii) sier at I er *lukket under etterfølgere*.)

Vi er klare:

DEFINISJON 2.3. En mengde n kalles et *naturlig tall* dersom n er medlem av enhver induktiv mengde.

Uendelighet. Vi ønsker naturlig[1]vis også å danne mengden av alle naturlige tall, men det krever ikke så forferdelig mye meditasjon for å se at aksiomene vi så langt har innført ikke kan vise eksistensen av en eneste induktiv mengde. Vi trenger derfor

AKSIOM 7. **Uendelighet ($\mathfrak{Inf}$)**

$$\exists I\ [(\varnothing \in I) \wedge \forall x\ (x \in I \Longrightarrow x^+ \in I)]$$

Det ovenstående sier kort og godt at det finnes en induktiv mengde. Gitt en slik mengde I kan vi nå bruke et separasjonsaksiom for å danne

$$\begin{aligned}\omega &= \{n \in I \mid n \in J \text{ for enhver induktiv } J\} \\ &= \{n \mid n \in J \text{ for enhver induktiv } J\} \\ &= \bigcap \{J \mid J \text{ er induktiv}\},\end{aligned}$$

siden også I er induktiv. Nå er n et naturlig tall, så ω må være *mengden av alle naturlige tall*. I matematikken forøvrig er det vanlig å betegne denne mengden med symbolet $\mathbb{N}$, men i aksiomatisk mengdelære bruker man som oftest ω, av grunner vi skal komme tilbake til i neste kapittel.

ω er åpenbart induktiv, samt en delmengde av enhver induktiv mengde. Vi har altså i bunn og grunn allerede vist

TEOREM 1. **(Induksjon på ω)** Hvis I er en induktiv delmengde av ω, så er $I = \omega$.

BEVIS. Siden I er induktiv er $\omega \subseteq I$ per definisjon, så $I = \omega$. $\square$

[1]Dette er et ordspill.

Vi kan nå danne oss et intuitivt bilde av ω, for vi har nemlig

$$\begin{gathered} 0 = \varnothing, \\ 1 = 0^+ = \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \\ 2 = 1^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \end{gathered}$$

og generelt er

$$n + 1 = n^+.$$

Dette kalles *von Neumanns*[2] *konstruksjon* av de naturlige tallene, og regnes som standardkonstruksjonen av ω fra **ZF**-aksiomene.

2. Transitive mengder

Det virker rimelig å tro at maskineriet bestående av etterfølgere, induktive mengder og $\mathfrak{Inf}$ er tilstrekkelig til å konstruere de naturlige tallene. Men for at ω skal oppføre seg slik vi ønsker, trenger vi faktisk litt mer. Det vi ønsker er det følgende:

Etterfølgerfunksjonen $S : \omega \longrightarrow \omega$ er én-til-én.

Hvis dette ikke var tilfelle, kunne det for eksempel hende at det fantes en $n \in \omega$ slik at

$$n \in n^+ \in (n^+)^+ \in ((n^+)^+)^+ \in ... \in n$$

etter endelig mange iterasjoner (hva nå enn «endelig» betyr), og da ville ikke ω stemt overens med vår intuisjon om hva de naturlige tallene er. Med andre ord ønsker vi at regelen $n \longmapsto n^+$ anvendt på et naturlig tall n skal «produsere» en ny mengde ved hver iterasjon, slik at ω i en viss forstand er uendelig (hva nå enn «uendelig» betyr).

For å løse dette skal vi ta veien om transitive mengder:

Definisjon 2.4. En mengde T kalles *transitiv* dersom

$$\forall x \; \forall y \; [(y \in x) \wedge (x \in T) \Longrightarrow y \in T].$$

Transitive mengder leker veldig pent med $\subseteq, \bigcup$ og $\wp$:

[2] *John von Neumann* (1903–1957), ungarsk-amerikansk matematiker som var svært aktiv i tidlige forsøk på å aksiomatisere mengdelære.

LEMMA 2.1. La T være en mengde. Da er de følgende utsagnene ekvivalente:

(1) T er transitiv.
(2) $\forall x\,(x \in T \implies x \subseteq T)$.
(3) $\bigcup T \subseteq T$.
(4) $T \subseteq \wp T$.

BEVIS. ($1 \implies 2$) Hvis $y \in x \in T$ må $y \in T$. Siden dette må gjelde for alle $y \in x$, må nødvendigvis $x \subseteq T$.

($2 \implies 3$) Anta at enhver $x \in T$ også er en delmengde av T, og la $y \in \bigcup T$. Ved $\mathfrak{Uni}$ finnes det nå en $t \in T$ slik at $y \in t$, og siden $t \subseteq T$ må $y \in T$; ergo er $\bigcup T \subseteq T$.

($3 \implies 1$) Anta at $\bigcap T \subseteq T$, så for enhver $y \in \bigcup T$ er også $y \in T$. Igjen gir $\mathfrak{Uni}$ at det finnes $x \in T$ med $y \in x$. Med andre ord har vi vist at $y \in x \in T$ medfører $y \in T$, som ønsket.

($2 \iff 4$) For den høyre implikasjonen lar vi $x \in T$ og antar at $x \subseteq T$. Ved $\mathfrak{Pot}$ er sistnevnte definisjonen på at $x \in \wp T$, så vi har at $T \subseteq \wp T$. For den konverse antar vi at $T \subseteq \wp T$. For enhver $x \in T$ er da $x \in \wp T$. Da gir $\mathfrak{Pot}$ at $x \subseteq T$, og vi er ferdige. $\square$

Vi ønsker nå å vise at ω og enhver $n \in \omega$ er transitiv. Først:

LEMMA 2.2. $\varnothing$ er en transitiv mengde.

BEVIS. Dette krever at vi gjør ingenting, for påstanden $x \in t \in \varnothing$ kan aldri være sann (i kraft av at $\varnothing$ er tom), hvilket medfører at den ønskede implikasjonen alltid er sann. Ergo er $\varnothing$ transitiv. $\square$

LEMMA 2.3. La T være en transitiv mengde. Da er

(i) Etterfølgeren T^+;
(ii) Unionen $\bigcup T$; og
(iii) Potensmengden $\wp T$

også transitive.

BEVIS. (i) Husk at $T^+ = T \cup \{T\}$. La $x \in T^+$ og $t \in x$. Da må enten $x \in T$ eller $x = T$. I førstnevnte tilfelle er $t \in T$ siden T er transitiv; i sistnevnte får vi det samme, i kraft av at $x = T$. Ergo er T^+ transitiv.

(ii) og (iii) følger umiddelbart fra (3) og (4) i lemma 2.1. For hvis T er transitiv er det nok å observere at

$$\bigcup T \subseteq T \Longrightarrow \bigcup\bigcup T \subseteq \bigcup T$$

og at

$$T \subseteq \wp T \Longrightarrow \wp T \subseteq \wp\wp T,$$

så vi er ferdige. □

Som følge av (i) og (ii) i lemmaet over, får vi umiddelbart at ethvert naturlig tall er en transitiv mengde. I tillegg har vi følgende

Proposisjon 2.1. ω er en transitiv mengde.

Bevis. Beviset fremgår ved induksjon. La

$$T = \{k \in \omega \mid k \subseteq \omega\}.$$

Vi må vise at T er induktiv.

(i) Siden $0 \in \omega$, $0 = \varnothing$ og $\varnothing$ er en delmengde av enhver mengde følger det at $0 \in T$.
(ii) La $n \in T$. Vi må vise at $n^+ \in T$. Siden $n \in T$ får vi med én gang at $n \subseteq \omega$. I tillegg må ettpunktsmengden $\{n\} \subseteq \omega$, siden $n \in \omega$. Men nå må også $n^+ = n \cup \{n\} \subseteq \omega$, så $n^+ \in T$.

Som følge av (i) og (ii) må nå T være induktiv og dermed lik ω. □

Resten av seksjonen består av to lemma og et korollar. Det er lite behov for intetsigende småpjatt mellom dem.

Lemma 2.4. La $\mathcal{T}$ være en familie av transitive mengder. Da er $\bigcup \mathcal{T}$ en transitiv mengde.

Bevis. Anta at $t \in x \in \bigcup \mathcal{T}$. Vi må vise at $t \in \bigcup \mathcal{T}$. Per definisjon er dette tilfelle hvis og bare hvis $t \in X$ for en $X \in \mathcal{T}$. Siden $x \in \bigcup \mathcal{T}$ vet vi at det finnes en $Y \in T$ med $x \in Y$. Siden Y er transitiv og $t \in x \in Y$ får vi at $t \in Y$, så $t \in \bigcup \mathcal{T}$. □

Korollar. $\bigcup \omega = \omega$.

Bevis. Siden ω er transitiv, vet vi fra før av at $\bigcup \omega \subseteq \omega$. Der holder altså å vise at $\omega \subseteq \bigcup \omega$. La $n \in \omega$. For at n skal være i $\bigcup \omega$, må det finnes en $m \in \omega$ med $n \in m$. Men en slik m finnes alltid, for vi kan bare velge $m = n^+$ for enhver n. Ergo er $n \in \bigcup \omega$, og vi er ferdige. □

Lemma 2.5. Hvis x er en transitiv mengde, så er $\bigcup x^+ = x$.

Bevis. Ved elementær mengdealgebra er

$$\bigcup x^+ = \bigcup (x \cup \{x\}) = \bigcup x \cup \bigcup \{x\}.$$

Vi viser nå at x og $\bigcup x^+$ er delmengder av hverandre:

I første omgang ser vi at $t \in x$ medfører $t \in \bigcup\{x\}$ ved unionsaksiomet, så $x \subseteq \bigcup x^+$.

Motsatt, hvis $t \in \bigcup x$, så bruker vi at x er transitiv. Da er nemlig $\bigcup x \subseteq x$ per definisjon, så $t \in x$. Hvis derimot $t \in \bigcup\{x\}$ må det finnes en mengde $y \in \{x\}$ som inneholder t. Den eneste mengden i $\{x\}$ er x, så også nå er $t \in x$. Vi har dermed vist at $\bigcup x^+ \subseteq x$. □

Korollar. Etterfølgerfunksjonen S er én-til-én på ω.

Bevis. La $m, n \in \omega$, og anta at $m^+ = n^+$. Da er

$$m = \bigcup m^+ = \bigcup n^+ = n$$

ved proposisjonen over, og vi er ferdige. □

3. Rekursjon & aritmetikk

Foreløpig er ω bare en mengde utstyrt med en funksjon $n \mapsto n^+$. Vi skal snart se at dette er nok for å utlede aritmetikken til ω, men for å få til dette trenger vi et aldri så lite maskineri kalt *rekursjonsteoremet*:

Teorem 2. **(Rekursjon på ω)** La X være en mengde, la $x \in X$ og la $F : X \to X$ være en funksjon. Da finnes det en entydig bestemt funksjon $h : \omega \to X$ som oppfyller følgende kriterier:

(i) $h(0) = x$;
(ii) $\forall n \in \omega\ [h(n^+) = F(h(n))]$.

Beviset for rekursjonsteoremet er gudsjammerlig langt og kjedelig, og siden vi – i kapittel 3 – uansett skal vise et mye mer generelt resultat, velger vi å ikke føre alle detaljene her. For en nærmest smertefullt presis gjennomgang, se [5, s. 73–75].

Vi skal imidlertid illustrere essensen i beviset, og innfører derfor følgende hjelpebegrep:

DEFINISJON 2.5. Under antakelsene i rekursjonsteoremet skal vi kalle en funksjon f *godkjent* dersom

(1) $\operatorname{dom} f \subseteq \omega$;
(2) $\operatorname{ran} f \subseteq X$;
(3) Hvis $0 \in \operatorname{dom} f$ så er $f(0) = x$;
(4) Hvis $n^+ \in \operatorname{dom} f$ så er $n \in \operatorname{dom} f$, og $f(n^+) = F(f(n))$.

Herunder henviser vi til disse punktene ved (1), (2), (3) og (4), mens punktene i formuleringen av teoremet betegnes (i) og (ii).

BEVIS. Aller først lar vi $\mathcal{G}$ være samlingen av alle godkjente funksjoner. Da er $\mathcal{G} \subseteq X^\omega$, så $\mathcal{G}$ er en mengde. Vi setter $g = \bigcup \mathcal{G}$, og ser at $\langle n, y \rangle \in g$ hvis og bare hvis det finnes en godkjent funksjon f slik at $f(n) = y$. Resten av beviset går ut på å demonstrere at g er nøyaktig den ønskede funksjonen h.

Først må vi vise at g er en funksjon. Det holder å vise at delmengden

$$I = \{n \in \omega \mid (\nexists \vee \exists!)y \ [\langle n, y \rangle \in g]\}.$$

av ω er induktiv og dermed lik ω.

Videre må vi forsikre oss om at g selv er godkjent. (1) og (2) følger umiddelbart, siden g er unionen av en familie av funksjoner med nøyaktig disse egenskapene. For (3) holder det å se at $f(0) = x$ for enhver $f \in \mathcal{G}$. For (4) lar vi $n^+ \in \operatorname{dom} g$, hvorpå det finnes en godkjent funksjon f med $n^+ \in \operatorname{dom} f$, og egenskapene til godkjente funksjoner gir dermed at også $n \in \operatorname{dom} g$.

Deretter slår vi fast $\operatorname{dom} g = \omega$. Siden vi allerede vet at $\operatorname{dom} g \subseteq \omega$, holder det å vise at $\operatorname{dom} g$ er induktiv.

Til slutt viser vi at g er entydig bestemt. Dette gjør vi ved å la g_1 og g_2 være funksjoner som oppfyller (i) og (ii), betrakte mengden

$$J = \{n \in \omega \mid g_1(n) = g_2(n)\},$$

og vise at J er induktiv. Med dette er beviset sluttført. □

Aritmetikk. Vi kan nå definere aritmetiske operasjoner på ω. Først trenger vi en ny

DEFINISJON 2.6. La X være en mengde. En *binæroperasjon* på X er en funksjon $f : X \times X \longrightarrow X$.

Rekursjonsteoremet rettferdiggjør de følgende konstruksjonene:

Definisjon 2.7. For enhver $n \in \omega$ definerer vi en funksjon

$$A_n : \omega \to \omega,$$

kalt *n-addisjon*, ved

$$A_n(0) = n,$$
$$A_n(k^+) = A_n(k)^+.$$

Siden det ovenstående må gjelde for enhver $n \in \omega$, gir dette opphav til en binæroperasjon $+$ (*addisjon*) på ω, gitt ved

$$m + n = A_m(n)$$

for $m, n \in \omega$. En ekvivalent, rekursiv definisjon av $+$ er

$$m + 0 = m,$$
$$m + n^+ = (m + n)^+.$$

Addisjon er *assosiativt*, *kommutativt*, og har identitetselement 0; det vil si, for alle $m, n, k \in \omega$ har vi

$$(m + n) + k = m + (n + k),$$
$$m + n = n + m,$$
$$0 + n = n = n + 0.$$

Alle disse bevises enkelt ved induksjon.

Definisjon 2.8. For enhver $n \in \omega$ definerer vi en funksjon

$$M_n : \omega \to \omega,$$

kalt *n-multiplikasjon*, ved

$$M_n(0) = 0,$$
$$M_n(k^+) = M_n(k) + n.$$

Dette induserer en ny binæroperasjon $\cdot$ (*multiplikasjon*) på ω, der

$$m \cdot n = M_m(n),$$

for $m, n \in \omega$.

Som $+$ er også $\cdot$ assosiativ og kommutativ. 1 er identitetselementet til $\cdot$. I tillegg *distribuerer* multiplikasjon (både fra høyre og venstre) over addisjon: for alle $m, n, k \in \omega$ er

$$m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k,$$
$$(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k,$$

Definisjon 2.9. For enhver $n \in \omega$ definerer vi en funksjon

$$E_n : \omega \to \omega,$$

kalt *n-potens*, ved

$$E_n(0) = 1,$$
$$E_n(k^+) = E_n(k) \cdot n.$$

Den tilhørende binæroperasjonen (som er vanskelig å skrive som ett enkeltsymbol) defineres ved å la

$$m^n = E_m(n)$$

for alle $m, n \in \omega$. Denne tilfredsstiller de kjente og kjære *potenslovene*

$$k^m \cdot k^n = k^{m+n},$$
$$(k^m)^n = k^{m \cdot n},$$

der $k, m, n \in \omega$. Det eneste unntaket til alt det ovenstående – inkludert definisjon 2.9 – er uttrykket

$$0^0 = E_0(0),$$

som vi lar stå udefinert.

Intermezzo: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$

Nå som vi har tilgang på de naturlige tallene, er det nærliggende å spørre seg om også $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ kan konstrueres innad i **ZF**. Svaret er så klart ja, og vi skal beskrive kort hvordan dette kan gjøres. Vi bruker ikke tid her på å bevise at disse konstruksjonene fungerer; vi gir kun et ganske uformelt overblikk.

Vi har ikke tidligere definert hva en *ekvivalensrelasjon* er, så vi antar at leseren er kjent med dem og den tilhørende terminologien fra før av. Hvis ikke er [7, s. 12] en veldig konsis innføring.

Heltall. Vi kan konstruere $\mathbb{Z}$ ved ekvivalensklasser av par av naturlige tall. Først definerer vi en ekvivalensrelasjon $\sim$ på $\omega \times \omega$ ved

$$\langle m, n\rangle \sim \langle p, q\rangle \iff m + q = p + n,$$

og i kraft av dette definerer vi $\mathbb{Z} = (\omega \times \omega)/{\sim}$.

En algebraisk velbevandret leser vil kunne kjenne igjen konstruksjonen over. Strukturen $\langle \omega, +\rangle$ er en *kommutativ monoide*, og $\mathbb{Z}$ (med den induserte operasjonen $+_{\mathbb{Z}}$) er *grothendieckgruppa* til $\langle \omega, +\rangle$.

Rasjonale tall. Konstruksjonen av $\mathbb{Q}$ likner på konstruksjonen av $\mathbb{Z}$. Vi lar først og fremst $\mathbb{Z}^*$ betegne mengden $\mathbb{Z} - \{0\}$, og definerer en ekvivalensrelasjon $\sim$ på $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ved

$$\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle \iff a \cdot d = c \cdot b,$$

og på samme måte som med $\mathbb{Z}$ definerer vi nå $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/{\sim}$.

Som en forlengelse av vår forrige algebraiske bemerkning, påpeker vi at denne konstruksjonen av $\mathbb{Q}$ er nøyaktig konstruksjonen av $\mathbb{Q}$ som *brøkringen* til den *kommutative ringen* $\mathbb{Z}$.

Reelle tall. Det finnes flere (mer eller mindre) ekvivalente konstruksjoner av $\mathbb{R}$. En av de vanligste er å definere $\mathbb{R}$ som mengden av alle ekvivalensklasser av *Cauchy-følger* i $\mathbb{Q}$, hvor to følger $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ og $\langle y_n\rangle_{n\in\omega}$ anses å være ekvivalente dersom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}\ (\varepsilon > 0)\ [(\exists N \in \omega)(\forall n > N)\ |x_n - y_n| < \varepsilon],$$

der $|\cdot|$ er *standardnormen* på $\mathbb{Q}$. En leser som er godt kjent med metriske rom vil nok ha en intuitiv forståelse av denne konstruksjonen, selv om hen kanskje ikke har sett alle detaljene.

En annen konstruksjon av historisk verdi er den følgende: vi sier at en delmengde $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{Q}$ er et *dedekindsk snitt (av $\mathbb{Q}$)* dersom

(1) $\varnothing \neq \mathfrak{D} \neq \mathbb{Q}$;
(2) $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ [(x \in \mathfrak{D}) \wedge (y < x) \Longrightarrow y \in \mathfrak{D}]$;
(3) $\forall x \in \mathfrak{D}\ [\exists y \in \mathfrak{D}\ (x < y)]$.

Kriteriene (2) og (3) sier henholdsvis at $\mathfrak{D}$ er *nedad lukket* og at $\mathfrak{D}$ ikke har noe *maksimalt element*.

Vi definerer nå et *reelt tall* til å være et dedekindsk snitt av $\mathbb{Q}$. Hvis r er et reelt tall, får vi dermed at $r \in \wp\mathbb{Q}$. Et separasjonsaksiom lar oss danne mengden

$$\mathbb{R} = \{r \in \wp\mathbb{Q} \mid r \text{ er et dedekindsk snitt}\}$$

av alle reelle tall. Under denne definisjonen er det ikke vanskelig å vise *kompletthetsegenskapen* til $\mathbb{R}$: enhver begrenset, ikke-tom delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$.

KAPITTEL 3

Ω

1. Velordnede mengder

Vi skal snakke kort om velordnede mengder, men først ser vi på noen litt mer generelle begreper.

Delvis & total ordning. Det første vi trenger er å formalisere ideen om «mindre enn» i språket til **ZF**. Vi starter med

DEFINISJON 3.1. La X være en mengde, og la $\prec$ være en relasjon på X som er

(1) *irrefleksiv:* $\forall x\ (x \not\prec x)$;
(2) *transitiv:* $\forall x, y, z\ [(x \prec y) \wedge (y \prec z) \Rightarrow (x \prec z)]$.

Da sier vi at $\prec$ er en *(delvis) ordning* på X, samt at strukturen $\langle X, \prec\rangle$ er en *(delvis) ordnet mengde.* Hvis $\prec$ i tillegg er

(3) *trikotom:* for alle $x, y \in X$ er nøyaktig én av $x \prec y$, $y \prec x$ eller $x = y$ tilfelle,

så sier vi at $\prec$ er en *total* ordning på X, samt at $\langle X, \prec\rangle$ er en *totalt ordnet mengde.*

EKSEMPLER 3.1. (1) La $k \in \omega$. Relasjonen

$$\in_k = \{\langle m, n\rangle \in k \times k \mid m \in n\}$$

definerer en total ordning på k, og relasjonen $\in_\omega$ definert analogt angir en total ordning på ω. Vi bemerker at $\in_k$ og $\in_\omega$ er *restriksjoner* av den primitive medlemskapsrelasjonen $\in$.

(2) La $a, b \in \omega$. Vi sier at b *deler* a (i ω) dersom det finnes en $c \in \omega$ slik at $a = b \cdot c$. Definer relasjonen $|_\omega$ ved

$$|_\omega = \{\langle a, b\rangle \in \omega \times \omega \mid (a \neq b) \wedge \exists c \in \omega\ (a = b \cdot c)\};$$

det vil si, $|_\omega$ er *streng delbarhet* på ω. Merk at $|_\omega$ er en delvis ordning på ω, men ikke en total ordning. For eksempel er $2 \neq 3$, men både $2 \nmid_\omega 3$ og $3 \nmid_\omega 2$, så $|_\omega$ er ikke trikotom.

LEMMA 3.1. Hvis $\langle X, \prec \rangle$ er en delvis ordnet mengde og $x, y \in X$, så er høyst én av $x \prec y$, $x = y$ eller $y \prec x$ tilfelle.

BEVIS. Anta for motsigelse at $x \prec y$ og $x = y$. Siden $\prec$ er transitiv må da $y \prec y$, en motsigelse mot at $\prec$ er irrefleksiv. Et tilsvarende resonnement viser at vi heller ikke kan ha både $x \prec y$ og $y \prec x$. $\square$

Gitt en ordning $\prec$ på en mengde X kan vi definere en ny relasjon $\preccurlyeq$ på X ved

$$\forall x, y \in X \; [x \preccurlyeq y \iff (x \prec y \vee x = y)].$$

En relasjon $\preccurlyeq$ således definert kalles en *ikke-streng ordning* på X. Motsatt, hvis kjenner en slik relasjon på X, så kan vi også finne den underliggende *strenge* ordningen $\prec$ ved å se at

$$\prec \; = \; \preccurlyeq - \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}.$$

Vi ser altså (uformelt) at vi kan sjonglere strenge og ikke-strenge ordninger litt sånn som vi vil: ved konstruksjonen over må enhver streng ordning $\prec$ gi opphav til en ikke-streng ordning $\preccurlyeq$ (den *refleksive tillukningen* til $\prec$), og omvendt (den *irrefleksive kjernen* til $\preccurlyeq$).

KOROLLAR. La $\langle X, \prec \rangle$ være en ordnet mengde. Da har vi

$$x \preccurlyeq y \preccurlyeq x \implies x = y$$

for alle $x, y \in X$.

BEVIS. Hvis $x = y$ er vi ferdige. Hvis ikke måtte både $x \prec y$ og $y \prec x$, som åpenbart bryter med lemma 3.1. $\square$

Før vi går videre til velordnede mengder, tar vi en kort repetisjon av noen kjente begreper. La $\langle D, \prec \rangle$ være en delvis ordnet mengde, la X være en ikke-tom delmengde av D, og la $m \in D$.

- m sies å være et *minimalt* (*maksimalt*) element i X dersom $m \in X$ og $x \not\prec m$ ($m \not\prec x$) for enhver $x \in X$.
- m er et *minste* (*største*) element i X dersom $m \in X$ og $m \preccurlyeq x$ ($x \preccurlyeq m$) for enhver $x \in X$.
- m kalles en *nedre skranke* (*øvre skranke*) for X hvis $m \preccurlyeq x$ ($x \preccurlyeq m$) for enhver $x \in X$.
- m kalles et *infimum* (*supremum*) til X dersom m er en største nedre skranke (minste øvre skranke) for X. Vi skriver da $m = \inf X$ ($m = \sup X$) for å betegne dette.

LEMMA 3.2. La $\langle D, \prec\rangle$ være en delvis ordnet mengde, og la X være en ikke-tom delmengde av D.

(1) Hvis X har et minste (største) element, så er dette elementet entydig bestemt.
(2) Hvis X har en minste øvre (største nedre) skranke, så er denne entydig bestemt.

BEVIS. I hvert tilfelle viser vi kun påstanden utenfor parentesene.

(1) La m og m' være minste elementer i X, så $m \preccurlyeq m'$ og $m' \preccurlyeq m$ per definisjon. Korollaret til lemma 3.1 gir det ønskede resultatet.

(2) La s og s' være minste øvre skranker for X. Da er $s' \preccurlyeq s$ samt $s \preccurlyeq s'$, og igjen følger resultatet fra det nevnte korollaret. $\square$

Velordning. Vi er primært interesserte i totalt ordnede mengder som har en spesielt fin tilleggsegenskap:

DEFINISJON 3.2. La X være en mengde, og la $<$ være en relasjon på X som er irrefleksiv, transitiv, trikotom og *velgrunnet:*

Enhver ikke-tom delmengde av X har et minste element.

Da sier vi at $<$ er en *velordning* på X, at $<$ *velordner* X, samt at strukturen $\langle X, <\rangle$ er en *velordnet mengde.*

I lys av lemma 3.2 kan vi rettmessig snakke om <u>det</u> minste elementet til en delmengde av en velordnet mengde. Vårt neste hjelperesultat er

LEMMA 3.3. La $\langle X, <\rangle$ være en velordnet mengde. Da er enhver ikke-tom delmengde $Y \subseteq X$ selv en velordnet mengde under den *induserte* ordningen $<_{\restriction Y}$.

BEVIS. Vi definerer

$$<_{\restriction Y} = < \restriction Y = \{\langle x, y\rangle \in X \times X \mid (x, y \in Y) \wedge x < y\},$$

som er gitt av et separasjonsaksiom. Irrefleksivitet, transitivitet og trikotomi får vi umiddelbart fra de tilsvarende egenskapene til $<$, så det holder å vise at $<_{\restriction Y}$ er velgrunnet. Men dette er enkelt, for hvis $A \subseteq Y$ må $A \subseteq X$, så A har et minste element. $\square$

EKSEMPEL 3.1. Naturlige tall er prototypiske eksempler på (endelige) velordnede mengder. Den aktuelle ordningen er den samme som tidligere: hvis n er et naturlig tall, så er $\in_n$ en velordning på n. Likeledes er $\in_\omega$ en velordning på ω.

Segmenter & induksjon. I arbeidet med velordnede mengder er det en type delmengder som dukker opp ganske naturlig:

DEFINISJON 3.3. La $\langle X, < \rangle$ være en velordnet mengde, og la $t \in X$. Delmengden

$$X(t) = \{x \in X \mid x < t\}$$

kalles *(start)segmentet* av X *bestemt av/gitt ved* t. Som oftest sløyfer vi *start-* og snakker bare om *segmenter* av en velordnet mengde.

Vi utvider nå induksjonsbegrepet til vilkårlige velordnede mengder, og ideen om et startsegment tillater følgende elegante formulering.

TEOREM 3. **(Induksjon på en velordning)** La $\langle X, < \rangle$ være en velordnet mengde. Hvis I er en delmengde av X slik at

$$\forall t \in X \ [(X(t) \subseteq I) \Longrightarrow (t \in I)],$$

så er $X = I$.

BEVIS. Som for induksjon på ω er beviset ved motsigelse. Med dette for øye antar vi at $I \neq X$; med andre ord er $I \subset X$. Følgelig er $X - I$ en ikke-tom delmengde av X, og har dermed et minste element m. Da må enhver $x < m$ være et element i I, men dette er det samme som å si at $X(m) \subseteq I$. Definisjonen av I gir dermed at $m \in I$ allikevel. □

2. Ordinaler

Vi ser nå på en spesiell klasse av velordnede mengder som vil være sentrale i resten av arbeidet vårt. Seksjonen inneholder mange resultater og bevis, og referansene [6, s. 27–28, 67–69, 119–121], [7, s. 19–21] har vært helt uvurderlige. Innfallsvinkelen i [3, s. 16–25, 66–68] er også interessant, men har ikke hatt like stor innflytelseskraft som de to førstnevnte.

Ordinaler. Husk fra lemma 2.1 at en mengde X er *transitiv* dersom ethvert element i X også er en delmengde av X.

DEFINISJON 3.4. En *ordinal* er en mengde X som er transitiv og velordnet av $\in_X$.

Vi sløyfer ofte indeksen $_X$ og sier at $\in$ velordner X. Foreløpig er dette bare notasjonsmisbruk, men vi skal snart se at det ikke er veldig langt unna sannheten.

Tradisjonelt betegnes ordinaler med små greske bokstaver, for eksempel α eller β. Klassen av alle ordinaler betegnes ofte Ord eller On, men i denne oppgaven har vi valgt å skrive $\mathbf{\Omega}$ istedet.

Når vi bruker symbolene $<$ og $\leq$ i forbindelse med ordinaler, er det altså den ovennevnte ordningen vi egentlig mener. Om ikke lenge skal vi se at denne også er ekvivalent med en annen velkjent relasjon.

Vi har mye vi skal få gjort, så la oss komme i gang:

LEMMA 3.4. 0 er en ordinal.

BEVIS. Begge kriteriene er tomt oppfylt, så dette stemmer. □

LEMMA 3.5. For enhver ordinal α er $\alpha \notin \alpha$.

BEVIS. Hvis ikke ville ikke $\in_\alpha$ irrefleksiv, og følgelig ville ikke α vært en ordinal allikevel. □

LEMMA 3.6. La α være en ordinal, og la $\beta \in \alpha$. Da er β en ordinal.

BEVIS. Ettersom α er transitiv, må $\beta \subseteq \alpha$. Hvis $\beta = 0$ er vi ferdige. Hvis ikke er β en ikke-tom delmengde av en velordnet mengde, β er selv velordnet under den induserte ordningen $\in_\beta$.

Det gjenstår å vise at β er transitiv, så la $\delta \in \gamma \in \beta$. Ved transitiviteten til $\in_\alpha$ er da $\delta \in \beta$, som var det vi skulle vise. □

PROPOSISJON 3.1. La α og β være ordinaler. Da er

$$\alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$$

BEVIS. ($\Rightarrow$) La $\alpha \in \beta$ er $\alpha \subseteq \beta$, siden β er transitiv. Ved lemma 3.5 er dermed $\alpha \subset \beta$.

($\Leftarrow$) For den konverse, anta at $\alpha \subset \beta$ og la μ være det minste elementet i $\beta - \alpha$. Vi skal vise at $\mu = \alpha$. La $\gamma \in \mu$. Siden μ er minst i $\beta - \alpha$, får vi umiddelbart at $\gamma \notin \beta - \alpha$. Samtidig er $\gamma \in \beta$, ettersom β er transitiv. Ergo er $\gamma \in \alpha$, så $\mu \subseteq \alpha$.

Det gjenstår å vise at også $\alpha \subseteq \mu$, så la $\delta \in \alpha$. Følgelig er $\delta \in \beta$, og siden $\in_\beta$ er trikotom har vi kun tre muligheter:

$$(\mu \in \delta) \vee (\mu = \delta) \vee (\delta \in \mu).$$

Hvis $\mu \in \delta$ må $\mu \in \alpha$, en motsigelse mot antakelsen om at $\mu \in \beta - \alpha$. Den samme motsigelsen får vi dersom $\mu = \delta$. Ergo er $\delta \in \mu$ eneste mulige konklusjon, hvorpå $\alpha \subseteq \mu$, som var det vi skulle vise. □

LEMMA 3.7. Hvis α og β er ordinaler, så er $\alpha \cap \beta$ en ordinal.

BEVIS. Hvis $\alpha = \beta$ er konklusjonen umiddelbar, og hvis α og β er disjunkte, følger den fra lemma 3.4. De eneste gjenstående mulighetene er $\alpha \subset \beta$ og $\beta \subset \alpha$. Uten tap av generalitet antar vi det sistnevnte. Da er imidlertid $\alpha \cap \beta = \beta$, og vi er ferdige. □

LEMMA 3.8. Hvis α og β er ordinaler, så er enten $\alpha \subseteq \beta$ eller $\beta \subseteq \alpha$.

BEVIS. La $\gamma = \alpha \cap \beta$, som er en ordinal ved det foregående lemmaet. Videre er nå $\gamma \subseteq \alpha$, så enten er $\gamma = \alpha$ eller $\gamma \subset \alpha$. I sistnevnte tilfelle er $\gamma \in \alpha$ ved lemma prop. 3.1, og ved et tilsvarende resonnement ser vi at $\gamma \in \beta$ hvis $\gamma \neq \beta$. Men ved definisjonen av snitt er nå

$$\xi \in \gamma \iff (\xi \in \alpha) \wedge (\xi \in \beta),$$

som tvinger $\gamma \in \gamma$, en motsigelse mot at $\in_\gamma$ er irrefleksiv. Ergo må enten $\gamma = \alpha$ eller $\gamma = \beta$, og konklusjonen følger umiddelbart. □

PROPOSISJON 3.2. For alle ordinaler α og β er nøyaktig én av

$$\alpha \in \beta, \; \alpha = \beta, \; \beta \in \alpha$$

tilfelle.

BEVIS. La α og β være ordinaler. Ved lemma 3.8 er da enten $\alpha \subseteq \beta$ eller $\beta \subseteq \alpha$. Anta uten tap av generalitet at $\alpha \subseteq \beta$. Da må enten $\alpha = \beta$ eller $\alpha \subset \beta$. I førstnevnte tilfeller er resultatet trivielt, og i sistnevnte får vi $\alpha \in \beta$ fra prop. 3.1. Sammen med et tilsvarende resonnement for tilfellet $\beta \subseteq \alpha$ er dette nok til å vise resultatet. □

LEMMA 3.9. Enhver ikke-tom klasse av ordinaler har et minste element.

Bevis. La $\mathcal{A}$ være som foreskrevet, og la $\beta \in \mathcal{A}$. Hvis β er disjunkt fra $\mathcal{A}$, har vi $\alpha \notin \beta$ for enhver $\alpha \in \mathcal{A}$. Ved trikotomien til $\in$ må da $\beta \in \alpha$ eller $\beta = \alpha$, så β er det minste elementet i $\mathcal{A}$.

Ellers er $\beta \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$, og har dermed et minste element μ, i kraft av å være en delmengde av β. La α igjen være et vilkårlig element i $\mathcal{A}$. Hvis $\alpha \notin \beta$ må enten $\beta = \alpha$ eller $\beta \in \alpha$, ved trikotomi. Uansett er da $\beta \subseteq \alpha$, så $\mu \in \alpha$. Motsatt, hvis $\alpha \in \beta$ så er $\alpha \in \beta \cap \mathcal{A}$, hvorpå $\mu \in \alpha$ eller $\mu = \alpha$. Uansett er $\mu \leq \alpha$, som ønsket. □

Korollar. Enhver transitiv familie av ordinaler er en ordinal.

Bevis. Lemma 3.9 sier spesielt at $\in$ velordner enhver familie $\mathcal{A}$ av ordinaler. Dersom $\mathcal{A}$ i tillegg er transitiv, så er $\mathcal{A}$ en ordinal per definisjon. □

Transendelig induksjon. Så langt er 0 den eneste ordinalen vi har å leke oss med. Det er på tide å fikse dette:

Lemma 3.10. La α være en ordinal. Da er α^+ en ordinal, og
$$\alpha^+ = \min\{\beta \mid \beta > \alpha\}.$$

Bevis. α^+ er transitiv ved lemma 2.3(ii). Per definisjon er
$$\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\},$$
så $\beta \in \alpha^+$ hvis og bare hvis enten $\beta \in \alpha$ eller $\beta = \alpha$. Uansett tilfelle er β en ordinal, så α^+ er en transitiv mengde av ordinaler. Ergo er α^+ en ordinal ved korollaret til lemma 3.9.

La $\mathscr{K} = \{\xi \mid \xi > \alpha\}$. Nå er $\alpha^+ > \alpha$, så $\alpha^+ \in \mathscr{K}$. Det gjenstår å vise at α^+ er det minste elementet i $\mathscr{K}$. Vi betrakter derfor en ordinal γ, og antar at $\gamma < \alpha^+$. Det holder å vise at $\gamma \notin \mathscr{K}$. Ved et tilsvarende argument som før, må nå enten $\gamma \in \alpha$ eller $\gamma = \alpha$. Uansett finner vi at $\gamma \notin \mathscr{K}$, så vi er ferdige. □

Lemma 3.11. La $\mathcal{A}$ være en ikke-tom familie av ordinaler. Da er $\bigcup \mathcal{A}$ en ordinal, og
$$\bigcup \mathcal{A} = \sup \mathcal{A}.$$

Bevis. La $\lambda = \bigcup \mathcal{A}$. Lemma 2.4 gir umiddelbart at λ er transitiv, så λ er en ordinal ved korollaret til lemma 3.9.

Det gjenstår å vise at $\lambda = \sup \mathcal{A}$. La derfor $\alpha \in \mathcal{A}$. Ved $\mathfrak{Uni}$ er $\alpha \subseteq \lambda$, så enten er $\alpha = \lambda$ eller $\alpha \in \lambda$. Uansett er λ en øvre skranke for $\mathcal{A}$. Til slutt, hvis det nå finnes en ordinal γ slik at $\alpha \subseteq \gamma$ for enhver $\alpha \in \mathcal{A}$, så må $\lambda \subseteq \gamma$. Da er enten $\lambda \in \gamma$ eller $\lambda = \gamma$, så λ er den minste øvre skranken for $\mathcal{A}$. $\square$

LEMMA 3.12. La $\mathscr{A}$ være en ikke-tom klasse av ordinaler. Da er $\bigcap \mathscr{A}$ en ordinal, og

$$\bigcap \mathscr{A} = \min \mathscr{A}.$$

BEVIS. Vi viser først at snittet av en helt vilkårlig, ikke-tom klasse er en mengde. For å gjøre beviset litt mer leselig setter vi $\mathscr{S} = \bigcap \mathscr{A}$. Husk først at

$$\mathscr{S} = \{a \mid \forall x \in \mathscr{A}\ (a \in x)\}.$$

Følgelig er $\mathscr{S} \subseteq x$ for enhver $x \in \mathscr{A}$, så siden hver slik x er en mengde må også $\mathscr{S}$ være en mengde.

Anta nå at $\mathscr{A}$ er en klasse av ordinaler, og la $\alpha \in \mathscr{A}$. Ved det ovenstående er $\mathscr{S} \subseteq \alpha$, så $\mathscr{S}$ er velordnet av $\in$.

Videre viser vi at $\mathscr{S}$ er transitiv. La fortsatt $\alpha \in \mathscr{S}$, og la i tillegg $\beta \in \alpha$ og $\gamma \in \mathscr{A}$. Ved sistnevnte må nødvendigvis $\alpha \in \gamma$. Siden γ er en ordinal er dermed $\alpha \subseteq \gamma$, så $\beta \in \gamma$. Ergo er $\beta \in \mathscr{S}$, så $\mathscr{S}$ er transitiv.

Vi har slått fast at $\mathscr{S}$ er en ordinal, og vi gir den den navnet μ. Siden $\mu = \bigcap \mathscr{A}$, følger det ved mengdealgebra at μ er den største mengden slik at $\mu \subseteq \alpha$ for enhver $\alpha \in \mathscr{A}$. Ergo er $\mu = \inf \mathscr{A}$.

Til slutt viser vi at $\mu \in \mathscr{A}$. Først danner vi etterfølgeren $\mu = \mu \cup \{\mu\}$ av μ. For enhver $\alpha \in \mathscr{A}$ er da enten $\mu^+ \subseteq \alpha$ eller $\alpha \subset \mu^+$, siden $\subset$ ordner $\mathscr{A}$ totalt. Hvis førstnevnte holder for enhver $\alpha \in \mathscr{A}$, får vi umiddelbart at $\mu^+ \subseteq \mu$, som er umulig. Med andre ord finnes det en ordinal $\beta \in \mathscr{A}$ med $\beta \in \mu^+$, som medfører at enten $\beta \in \mu$ eller $\beta = \mu$. Igjen er det første tilfellet absurd, for da er $\beta \subset \mu$, en motsigelse mot at $\mu \subseteq \alpha$ for enhver $\alpha \in \mathscr{A}$. Vi må altså konkludere at $\mu \in \mathscr{A}$. $\square$

På dette tidspunktet introduserer vi symbolet $\mathbf{\Omega}$ for *klassen av alle ordinaler*. Ved redegjørelsen så langt har vi vist det følgende:

PROPOSISJON 3.3. $\mathbf{\Omega}$ er en transitiv klasse velordnet av $\in$.

BEVIS. La β være en ordinal, og la $\alpha \in \beta$. Ved lemma 3.6 er da α en ordinal, så $\mathbf{\Omega}$ er en transitiv klasse. $\in$ er irrefleksiv på $\mathbf{\Omega}$ ved lemma 3.5, trikotom ved prop. 3.2, og velgrunnet ved lemma 3.9. Det gjenstår altså bare å vise at $\in$ er transitiv, men hvis α, β og γ er ordinaler, så har vi

$$\alpha \in \beta \in \gamma \iff \alpha \in \gamma$$

umiddelbart, siden γ er en ordinal. Ergo er $\in$ transitiv. $\square$

Det kommer kanskje ikke som noe sjokk at $\mathbf{\Omega}$ er «for stor» til å være en mengde:

TEOREM 4. **(Burali-Forti)** Klassen $\mathbf{\Omega}$ av alle ordinaler er ikke en mengde.

BEVIS. Dersom $\mathbf{\Omega}$ var en mengde, ville den vært transitiv og velordnet av $\in$ ved lemmaet over. Men da er $\mathbf{\Omega}$ selv en ordinal, så $\mathbf{\Omega} \in \mathbf{\Omega}$, en motsigelse mot lemma 3.5. Ergo er $\mathbf{\Omega}$ ikke en mengde. $\square$

Vi må altså være litt forsiktige med hvordan vi snakker om $\mathbf{\Omega}$, men så lenge vi husker på at utsagn som «$\mathbf{\Omega} \in \mathscr{K}$» bare er sprøyt, så burde dette gå helt fint.

Nå er det en stund siden forrige definisjon.

DEFINISJON 3.5. La α være en ordinal ulik 0. Hvis det finnes en ordinal β slik at $\alpha = \beta^+$, sier vi at α er en *etterfølger(ordinal)*. Hvis ikke kaller vi α en *grense(ordinal)*.

Noen forfattere anser også 0 for å være en grenseordinal, men vi har valgt å styre unna dette for å understreke rollen til 0 som *startobjektet* til klassen $\mathbf{\Omega}$. Videre innfører vi nå notasjonen $\alpha + 1$ for etterfølgerordinalen α^+ til α.

EKSEMPEL 3.2. Ethvert naturlig tall $n \neq 0$ er en etterfølgerordinal. Den første grenseordinalen er ω.

Distinksjonen mellom etterfølgere og grenser er nøyaktig det vi trenger for å kunne utvide induksjonsbegrepet for aller siste gang:

TEOREM 5. **(Transendelig induksjon)** La $\mathscr{K}$ være en klasse av ordinaler slik at

(1) $0 \in \mathscr{K}$;
(2) hvis $\alpha \in \mathscr{K}$ så er $\alpha + 1 \in \mathscr{K}$;
(3) hvis λ er en grenseordinal og $\beta \in \mathscr{K}$ for enhver $\beta < \lambda$, så er $\lambda \in \mathscr{K}$.

Da er $\mathscr{K} = \mathbf{\Omega}$.

Bevis. Anta at det finnes en ordinal som ikke er i $\mathscr{K}$. Siden $\in$ velordner $\mathbf{\Omega}$, kan vi velge den minste ordinalen $\mu \in \mathbf{\Omega} - \mathscr{K}$. Ved (1) er $0 \in \mathscr{K}$, så $\mu \neq 0$. Videre er μ er heller ikke en etterfølgerordinal, for da ville $\mu = \beta + 1$ for en $\beta \in \mathscr{K}$, og (2) ville gitt at også $\mu \in \mathscr{K}$. Den siste muligheten er at μ er en grenseordinal. Men da er $\beta \in \mathscr{K}$ for enhver $\beta < \alpha$, og følgelig gir (3) at $\alpha \in \mathscr{K}$. $\square$

Dette resultatet er ganske spektakulært. $\mathbf{\Omega}$ utvider ω ut i det transendelige, og på tross av at førstnevnte er en ekte klasse, kan vi fortsatt føre induksjonsbevis også her!

Dette fungerer stort sett som vanlig induksjon: gitt en påstand P om ordinaler, beviser vi først at $P(0)$. Deretter antar vi at $P(\alpha)$ og viser at dette medfører $P(\alpha + 1)$. Til slutt kommer steget som skiller transendelig induksjon fra ordinær induksjon: Vi lar λ være en grenseordinal, antar at $P(\xi)$ for enhver $\xi < \lambda$, og viser at dette medfører $P(\lambda)$. Ved teorem 5 må da P være sann for enhver ordinal.

3. Transendelig rekursjon

Det neste åpenbare spørsmålet er om også rekursjonsbegrepet kan utvides til $\mathbf{\Omega}$. Svaret er heldigvis ja, men vi trenger et nytt aksiom for å bevise det.

Erstatning. Vi trenger først litt mer logisk terminologi. Husk at $\mathfrak{F}$ er samlingen av alle formler (metavariable) i språket $\mathfrak{L}$.

Definisjon 3.6. En formel φ i $\mathfrak{F}$ er *funksjonsliknende* dersom

$$\forall x \ (\nexists \vee \exists) y \ \varphi(x, y). \tag{I}$$

Dette er ekvivalent med

$$\forall x \ [(\phi(x, y_1) \wedge \phi(x, y_2) \implies y_1 = y_2], \tag{II}$$

så det er irrelevant hvilken av (I) og (II) vi bruker som definisjon.

Som frampekt i seksjonen om klasser i kapittel 1, definerer vi nå en *funksjonsklasse* til å være en klasse $\mathscr{F} = \{\langle x, y\rangle \mid \varphi(x, y)\}$ der den definerende formelen φ er funksjonsliknende.

Eksempel 3.3. Operasjonene

$$\bigcup : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \ x \longmapsto \bigcup x,$$
$$\wp : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \ x \longmapsto \wp x$$

er funksjonsklasser.

Vi er klare for *erstatningsskjemaet*:

AKSIOM 8. **Erstatning ($\mathfrak{Rep}$)**
For enhver formel φ som ikke viser til mengden Y, er det følgende et aksiom:

$$\forall X\ [\forall x \in X\ (\exists! y\ \varphi(x,y) \Longrightarrow$$
$$\exists Y\ \forall y' [y' \in Y \Longleftrightarrow \exists x' \in X\ \varphi(x',y')])]$$

En instans av dette skjemaet kalles et *erstatningsaksiom*. Som med separasjonsskjemaet tillater vi at φ kan ha andre variable enn kun x og y (så lenge Y ikke opptrer).

Formelen i utsagnet over kan se lang og skremmende ut, men den sier noe vi egentlig allerede har en viss intuisjon om: hvis X er en mengde og $\varphi(x,y)$ er en «tilordning» som assosierer hvert element $x \in X$ med en eller annen mengde y, så finnes det en mengde Y bestående nøyaktig av alle slike y.

En ekvivalent (u)formulering ved klasser er den følgende: hvis $\mathscr{F}$ er en funksjonsklasse med den egenskapen at $\operatorname{dom} \mathscr{F}$ er en mengde, så er også $\operatorname{ran} \mathscr{F}$ en mengde. Følgelig er $\mathscr{F}$ en mengde, og dermed en funksjon i ordinær forstand.

Transendelig rekursjon. Erstatningsskjemaet lar oss nå utvide rekursjonsbegrepet til hele $\mathbf{\Omega}$.

TEOREM 6. La $\mathscr{F}$ være en funksjonsklasse med $\operatorname{dom} \mathscr{F} = \mathbb{V}$. Da finnes det en unik funksjonsklasse $\mathscr{G}$ med $\operatorname{dom} \mathscr{G} = \mathbf{\Omega}$ slik at

$$\forall \alpha \in \mathbf{\Omega}\ [\mathscr{G}(\alpha) = \mathscr{F}(\mathscr{G} \restriction \alpha)]. \tag{$\star$}$$

Det finnes flere (mer eller mindre) ekvivalente formuleringer av, og bevis for rekursjonsteoremet. Forfatteren har hovedsakelig brukt [5, s. 209–212], [7, s. 22] og [8, s. 25] som referanser.

BEVIS. (i) Vi viser først at $\mathscr{G}$ er unik, så anta at $\mathscr{G}_1$ og $\mathscr{G}_2$ er funksjonsklasser som oppfyller ($\star$). Vi viser at $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}_2$ ved transendelig induksjon. Hvis $\alpha = 0$ har vi

$$\mathscr{G}_1 \restriction 0 = 0 = \mathscr{G}_2 \restriction 0$$

ved tom oppfyllelse, så $\mathscr{G}_1(0) = \mathscr{G}_2(0)$ ved ($\star$). La $\alpha = \beta + 1$ være en etterfølgerordinal, og anta at $\mathscr{G}_1(\delta) = \mathscr{G}_2(\delta)$ for enhver $\delta < \alpha$. Spesielt er $\mathscr{G}_1(\beta) = \mathscr{G}_2(\beta)$, så ettersom

$$\mathscr{G}_1 \restriction (\beta + 1) = \mathscr{G}_1 \restriction \beta \cup \langle \beta, \mathscr{G}_1(\beta) \rangle$$

(og tilsvarende for $\mathscr{G}_2$), får vi ved ($\star$) at også $\mathscr{G}_1(\beta+1) = \mathscr{G}_2(\beta+1)$. La til slutt $\alpha = \lambda$ være en grenseordinal, og anta at $\mathscr{G}_1(\delta) = \mathscr{G}_2(\delta)$ for enhver $\delta < \lambda$. Men da er $\mathscr{G}_1 \restriction = \mathscr{G}_2 \restriction \lambda$, så $\mathscr{G}_1(\lambda) = \mathscr{G}_2(\lambda)$ ved ($\star$).

For å vise at $\mathscr{G}$ eksisterer, innfører vi et lite hjelpebegrep:

Definisjon 3.7. Under antakelsene i teoremet sier vi at en funksjon g er en δ-*tilnærming* hvis $\operatorname{dom} g = \delta$ for en ordinal δ, og

$$\forall \xi < \delta\ [g(\xi) = \mathscr{F}(g \restriction \xi)]. \tag{$*$}$$

(ii) Enhver δ-tilnærming er unik, for dersom g_1 og g_2 er henholdsvis δ_1- og δ_2-tilnærminger, viser vi at

$$g_1 \restriction (\delta_1 \cap \delta_2) = g_2 \restriction (\delta_1 \cap \delta_2)$$

ved induksjon på den velordnede mengden $\gamma = \delta_1 \cap \delta_2$. Vi sløyfer detaljene, siden dette resonnementet ligner veldig mye på (i).

(iii) Et viktigere moment er at det finnes en δ-tilnærming g for enhver δ. Basistilfellet $\delta = 0$ er innlysende, for da er g simpelthen den tomme funksjonen $\varnothing$. Hvis $\delta = \beta + 1$ og det finnes en ξ-tilnærming for enhver $\xi < \delta$, så finnes det spesielt en β-tilnærming g. Vi definerer

$$\tilde{g} = g \cup \langle \beta, g(\beta) \rangle,$$

og observerer at $\operatorname{dom} \tilde{g} = \beta + 1$, så $\tilde{g}$ er nå en $\beta + 1$-tilnærming.

La nå $\delta = \lambda$ være en grenseordinal, og anta at det finnes en ξ-tilnærming for enhver $\xi < \lambda$. Vi definerer

$$\mathscr{H} = \{h \mid \exists \xi \in \lambda (h \text{ er en } \xi\text{-tilnærming}\}.$$

Siden enhver δ-tilnærming er unik, gir en instans av $\mathfrak{Rep}$ at $\mathscr{H}$ faktisk er en mengde. Vi setter nå $g = \bigcup \mathscr{H}$, og observerer at

$$z \in g \iff \exists h \in \mathscr{H} (z \in h);$$

det vil si, $z = \langle \delta, h(\delta) \rangle$ for en $h \in \mathscr{H}$. Siden hver h er en δ-tilnærming, er hvert slikt par entydig bestemt av ordinalen δ, så g er en funksjon. Videre, hvis $\alpha < \lambda$, så er

$$g(\alpha) = h(\alpha) = \mathscr{F}(h \restriction \alpha),$$

så g er en λ-tilnærming.

(iv) Helt til slutt definerer vi simpelthen

$$\mathscr{G}(\alpha) = g(\alpha),$$

der g er en δ-tilnærming for en vilkårlig $\delta > \alpha$. $\square$

Følger & operasjoner. Fra vårt perspektiv er nå (u)endelige følger – som brukt i for eksempel analyse – kun spesialtilfeller av et mye mer generelt begrep.

DEFINISJON 3.8. En *følge* er en funksjon f der $\operatorname{dom} f$ er en ordinal. Vi kaller f

- *endelig* dersom $\operatorname{dom} f \in \omega$;
- *transendelig* dersom $\omega \subseteq \operatorname{dom} f$.

I spesialtilfellet $\operatorname{dom} f = \omega$, sier vi at f er *uendelig*. En følge f med $\operatorname{dom} f = \alpha$ kalles ofte en *α-følge*, eller en *følge av lengde α*.

Hvis $f : \alpha \to X$ er en følge, skriver vi f_ξ for bildet av ξ under f, samt $\langle f_\xi \mid \xi \in \alpha \rangle$ – eller bare $\langle f_\xi \rangle$ – for $\operatorname{ran} f$. Vi identifiserer på sett og vis en følge med rekkevidden sin, ettersom denne inneholder det meste av informasjon vi skulle kunne trenge.

PROPOSISJON 3.4. La $\langle X, < \rangle$ være en velordnet mengde. Da finnes det ingen uendelig avtakende følge av elementer i X.

BEVIS. Med *avtakende* mener vi bare en følge f der

$$f_\xi > f_{\xi+1}$$

for alle $\xi \in \operatorname{dom} f$. Anta mot formodning at det finnes en avtakende ω-følge, og la

$$Y = \operatorname{ran} f = \{f(n) \in X \mid n \in \omega\}.$$

Nå er Y en ikke-tom delmengde av X, men Y har ikke et minste element, en motsigelse. □

Vi skal snart snakke om en form for aritmetikk på ordinalene, og vi trenger derfor litt mer terminologi.

DEFINISJON 3.9. La $\mathfrak{t}$ være en funksjonsklasse på $\mathbf{\Omega}$. Vi sier at $\mathfrak{t}$ er en *operasjon* på $\mathbf{\Omega}$ dersom $\mathfrak{t}(\alpha)$ eksisterer og er en ordinal for enhver ordinal α.

En operasjon $\mathfrak{t}$ på $\mathbf{\Omega}$ kan betraktes som en «følge»

$$\langle \mathfrak{t}_\xi \mid \xi \in \mathbf{\Omega} \rangle.$$

Formelt er dette naturligvis en sannhet med modifikasjoner, men intuisjonen er fin.

DEFINISJON 3.10. La $\mathfrak{t}$ være en operasjon på $\mathbf{\Omega}$, la λ være en grenseordinal, og la $t = \mathfrak{t} \restriction \lambda$ være følgen vi får når vi avgrenser $\mathfrak{t}$ til λ. Vi definerer *grenseverdien* av t ved

$$\lim_{\xi \to \lambda} t_\xi = \sup\{\mathfrak{t}_\xi \mid \xi < \lambda\}$$

Vi vet fra før av at den minste øvre skranken til en mengde av ordinaler bare er unionen av denne mengden. Hvis t er en følge av ordinaler har vi med andre ord

$$\lim_{\xi \to \lambda} t_\xi = \sup\{t_\xi \mid \xi < \lambda\} = \bigcup\{t_\xi \mid \xi < \lambda\}.$$

For å få litt enklere notasjon definerer vi nå

$$\sup_{\xi < \lambda} t_\xi = \sup\{t_\xi \mid \xi < \lambda\}$$

samt

$$\bigcup_{\xi < \lambda} t_\xi = \bigcup\{t_\xi \mid \xi < \lambda\}.$$

DEFINISJON 3.11. La $\mathfrak{t}$ være en operasjon på $\mathbf{\Omega}$. Vi sier at $\mathfrak{t}$ er

(1) *monoton* hvis

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \mathfrak{t}_\alpha < \mathfrak{t}_\beta$$

for alle ordinaler α og β.

(2) *kontinuerlig* hvis

$$\mathfrak{t}_\lambda = \lim_{\xi \to \lambda} \mathfrak{t}_\xi$$

for enhver grenseordinal λ.

(3) *normal* hvis $\mathfrak{t}$ er både monoton og kontinuerlig.

KAPITTEL 4

$\mathbb{V}$

1. Transendelig aritmetikk

Som en liten (halv-)digresjon beskriver vi først aritmetikken[1] til ordinalene. Som i den tilsvarende seksjonen i kapittel 2 skal vi ikke være så forferdelig rigorøse.

DEFINISJON 4.1. **Addisjon** La α og β være ordinaler, og la λ være en grenseordinal. Da definerer vi

$$\alpha + 0 = \alpha;$$
$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1;$$
$$\alpha + \lambda = \lim_{\xi \to \lambda} (\alpha + \xi).$$

Per konvensjon anser vi det *venstre leddet* α i $\alpha + \beta$ for å være fiksert, mens det *høyre leddet* β kan variere fritt over $\mathbf{\Omega}$. For enhver ordinal α gir rekursjonsteoremet da en funksjon

$$+_\alpha : \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbb{V}$$
$$\beta \longmapsto \alpha + \beta,$$

så vi kan med rette snakke om $+$ som en funksjonsklasse på hele $\mathbf{\Omega}$. Det samme vil gjelde for multiplikasjon og potenser (med ett unntak), så vi påpeker dette kun her.

Som tidligere er $+$ *assosiativ* og har *identitetselement* 0; det vil si,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$
$$0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$$

for alle ordinaler α, β og γ, som vi enkelt kan bevise ved induksjon. Addisjon er imidlertid <u>ikke</u> kommutativ! For eksempel er

$$\omega + 1 = \omega^+ = \omega \cup \{\omega\},$$

[1] Les: én av mange mulige aritmetikker. For en redegjørelse om såkalte *naturlige* operasjoner og deres anvendelser i teorien om ordnede abelske grupper, se [2].

mens

$$1 + \omega = \lim_{n \in \omega}(1 + n) = \omega.$$

Videre er $+$ en normal operasjon i høyre ledd. La α, β og γ være ordinaler. Normalitet medfører at $+$ er *høyre ordensbevarende*:

$$\beta < \gamma \iff \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

Av samme grunn har vi også en *venstre kanselleringslov*:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \implies \beta = \gamma.$$

Avslutningsvis nevner vi at det finnes en begrenset form for *subtraksjon* av ordinaler: Dersom α og β er ordinaler og $\alpha \leq \beta$, så finnes det en unik ordinal δ (*differansen* av α og β) slik at

$$\alpha + \delta = \beta.$$

Entydigheten til δ følger umiddelbart fra den venstre kanselleringsloven. Vi viser ikke eksistens her.

DEFINISJON 4.2. **(Multiplikasjon)** La α og β være ordinaler, og la λ være en grenseordinal. Da definerer vi

$$\alpha \cdot 0 = 0;$$
$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha;$$
$$\alpha \cdot \lambda = \lim_{\xi \to \lambda}(\alpha \cdot \xi).$$

Multiplikasjon er assosiativ, har identitetselement 1, og *distribuerer fra venstre* over addisjon. Med andre ord har vi

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma),$$
$$1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1,$$
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$$

for alle ordinaler α, β og γ. I tillegg er 0 et *annihilerende element* for multiplikasjon:

$$0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$$

for enhver ordinal α. Som addisjon er heller ikke multiplikasjon kommutativt. For eksempel har vi

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega,$$

mens

$$2 \cdot \omega = \lim_{n \in \omega}(2 \cdot n) = \omega.$$

Vi har igjen normalitet i høyre ledd, under tilleggsantakelsen om at det venstre leddet $\alpha \neq 0$. Som med $+$ er dermed $\cdot$ høyre ordensbevarende:

$$\beta < \gamma \iff \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma,$$

og har en venstre kanselleringslov:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \implies \beta = \gamma,$$

igjen: så lenge $\alpha \neq 0$.

Til slutt har vi også en *divisjonsalgoritme*: hvis α og β er ordinaler der *divisoren* $\beta \neq 0$, så finnes det unike ordinaler κ (*kvotienten*) og ρ (*resten*), slik at $\rho < \beta$ og

$$\alpha = \beta \cdot \kappa + \rho.$$

I det spesielle tilfellet der $\rho = 0$, kan vi finne på å si at β *deler* α.

Definisjon 4.3. **(Potenser)** La α og β være ordinaler, og la λ være en grenseordinal. Da definerer vi

$$\alpha^0 = 1;$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha;$$
$$\alpha^\lambda = \lim_{\xi \to \lambda} \alpha^\xi.$$

Merk at definisjonen over krever et addendum: vi har fortsatt ikke funnet ut hvordan 0^0 kan gi mening, så når vi skriver α^β, antar vi alltid at minst én av α eller β er ulik 0.

Hvis det venstre leddet $\alpha \geq 2$, er potensregning en normal operasjon i høyre ledd. Følgelig har vi

$$\beta < \gamma \iff \alpha^\beta < \alpha^\gamma,$$

samt

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \implies \beta = \gamma,$$

som før, der $\alpha \geq 2$, og β og γ er vilkårlige ordinaler.

De vanlige potenslovene

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma,$$
$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}.$$

gjelder også for ordinaler.

I tillegg kan vi i en viss forstand snakke om *logaritmer* av ordinaler: La α og β være ordinaler, der $\alpha \neq 0$ og *grunntallet* $\beta > 1$. Da finnes det unike ordinaler γ (*logaritmen*), κ (*koeffisienten*) og ρ (*resten*), slik at $0 \neq \kappa < \beta$, $\rho < \beta^\gamma$, og

$$\alpha = \beta^\gamma \cdot \kappa + \rho.$$

Vi runder av denne seksjonen ved å ramme inn – samt stirre litt på – det følgende (fantastiske) resultatet:

TEOREM 7. **(Cantors[a] normalform)** Enhver ordinal $\alpha \neq 0$ har en entydig representasjon på formen

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot k_n,$$

der $\alpha \geq \beta_1 > ... > \beta_n$ er ordinaler og $0 < n, k_1, ..., k_n < \omega$.

[a] *Georg Cantor (1845–1918), tysk matematiker, mengdelærens far.*

BEVIS. Vi skal ikke bevise ikke teoremet fullt ut, men gir likevel noen pekepinner på hvordan det kan gjøres. For entydighet holder det å argumentere ved transendelig induksjon på α.

For eksistens kan vi bruke diskusjonen om logaritmer – med grunntall ω – på α til å finne en logaritme β_1, en koeffisient k_1, og en rest ρ_1. Deretter gjør vi det samme med ρ_1, og finner β_2, k_2 og ρ_2. Slik fortsetter vi, og per antakelsene våre er nå følgene $\langle \beta_\xi \rangle$ og $\langle \rho_\xi \rangle$ avtakende. Siden hver av disse består utelukkende av ordinaler, gir prop. 3.5 at den foreskrevne konstruksjonen før eller senere må ta slutt. □

Notis. Vi bemerker at den ovennevnte utledningen av eksistens har mange likheter med beviset for Euklids algoritme, for eksempel som gitt i [1, s. 26–27].

2. Regularitet

Nå som det meste av det harde arbeidet er overstått, skal vi ta stilling til noen spørsmål av en fundamental[2] natur.

Grunnede mengder. Husk fra forrige kapittel at ingen ordinal er et element i seg selv. En mengde med denne egenskapen kalles *grunnet*.

Når vi snart skal bygge universet, kommer vi på et tidspunkt til å trenge et resultat som sier at enhver mengde er grunnet. Aksiomene vi til nå har innført strekker imidlertid ikke til i så henseende. Vi trenger derfor vårt niende – og siste! – aksiom.

[2] En vits. Det siste aksiomet i **ZF** kalles på engelsk ofte *the axiom of foundation*.

AKSIOM 9. **Regularitet ($\mathfrak{Reg}$)**

$$\forall X\ [X \neq \varnothing \Longrightarrow (\exists m \in X)\ X \cap m = \varnothing]$$

Det ovennevnte bestemmer altså at enhver ikke-tom mengde X må inneholde et element som er disjunkt fra X. Vi kaller et slikt element $\in$-*minimalt* (for X). $\mathfrak{Reg}$ kan med andre ord omformuleres til å si at enhver mengde har et $\in$-minimalt element.

Det ønskede resultatet faller så og si rett i fanget vårt:

TEOREM 8. Enhver mengde er grunnet.

BEVIS. La X være en mengde, og dann ettpunktsmengden $\{X\}$. Det holder å vise at $X \cap \{X\} = \varnothing$. Først observerer vi at $\{X\} \neq \varnothing$. Ved $\mathfrak{Reg}$ finnes det nå en $m \in \{X\}$ som er disjunkt fra $\{X\}$, men vi vet allerede at X er det eneste elementet i $\{X\}$! Fra dette er vi nødt til å konkludere at $X = m$, og vi er ferdige. $\square$

La X være en mengde og α en ordinal. Med en *avtakende medlemskapsfølge* mener vi en α-følge f (dvs. en funksjon $f : \alpha \longrightarrow X$) slik at $f(\beta + 1) \in f(\beta)$ for enhver $\beta \in \alpha$.

Husk at vi kaller en følge f *uendelig* dersom $\operatorname{dom} f = \omega$.

KOROLLAR. Det finnes ingen uendelig, avtakende medlemskapsfølge.

BEVIS. La X være en mengde, og anta for motsigelse at det finnes en følge $f : \omega \longrightarrow X$ slik at $f(n+1) \in f(n)$ for enhver $n \in \omega$. La $Y = \operatorname{ran} f$, så Y består av alle $x \in X$ slik at $x = f(m)$ for en $m \in \omega$. Men nå er $f(m+1) \in f(m) = x \cap Y$; følgelig er $x \cap Y \neq \varnothing$, hvilket er uforenlig med $\mathfrak{Reg}$. $\square$

$\mathfrak{Reg}$ gir også en enklere definisjon av en ordinal:

KOROLLAR. En mengde X er en ordinal hvis og bare hvis X er transitiv og totalt ordnet av $\in$.

BEVIS. Den høyre implikasjonen følger fra vår definisjon av en ordinal. For den venstre må vi vise at $\in$ velordner X. La derfor A være en ikke-tom delmengde av X. Det forrige korollaret gir at A har et $\in$-minimalt element, så X er velordnet av $\in$. $\square$

Transitiv tillukning. Vi har snakket mye om transitive mengder i denne teksten, og vi er ikke ferdige helt ennå.

LEMMA 4.1. For enhver mengde X finnes det en transitiv mengde T slik at X er en delmengde av T.

BEVIS. Vi definerer T ved rekursjon på ω:

$$T_0 = X,$$
$$T_{n+1} = \bigcup T_n,$$
$$T = \bigcup_{n\in\omega} T_n.$$

Opp til enhver $n \in \omega$ følger eksistensen til T_n ved rekursjon på ω. I grensetilfellet T bruker vi at formelen φ som definerer T er funksjonsliknende, som følge av at unionen av en mengde er entydig bestemet. En instans av $\mathfrak{Rep}$ gir dermed at $T = \operatorname{ran}\varphi$ er en mengde.

Observer nå at

$$T = \bigcup_{n\in\omega} T_n = \{t \mid (\exists n \in \omega)\ t \in T_n\},$$

så enhver $T_n \subseteq T$. Spesielt er $X = T_0 \subseteq T$.

Det gjenstår å vise at T er transitiv. La $t \in T$. Det holder å vise at $t \subseteq T$. Per definisjon er nå $t \in T_n$ for en eller annen $n \in \omega$. Ved $\mathfrak{Uni}$ er da $t \subseteq T_{n+1}$, så $t \subseteq T$, som ønsket. □

DEFINISJON 4.4. Mengden T beskrevet i lemmaet over kalles den *transitive tillukningen* av X, og betegnes $\operatorname{Tcl} X$.

Det er ingen tilfeldighet at vi har kalt $\operatorname{Tcl} X$ en *tillukning*:

KOROLLAR. $\operatorname{Tcl} X$ er den minste transitive mengden som inneholder X; det vil si,

$$\operatorname{Tcl} X = \bigcap \{S \mid X \subseteq S \wedge S \text{ er transitiv}\}.$$

BEVIS. Det ovenstående er ekvivalent med at $\operatorname{Tcl} X$ er en delmengde av enhver transitiv mengde $S \supseteq X$. Det holder å vise at hver av mengdene T_n – fra konstruksjonen av $\operatorname{Tcl} X$ – er en delmengde av S, og dette kan vi gjøre ved induksjon:

Basissteget er enkelt, for

$$T_0 = X \subseteq S$$

per definisjon. Anta nå at $T_k \subseteq S$. Vi må vise at $T_{k+1} \subseteq S$. Vi har

$$T_{k+1} = \bigcup T_k \subseteq \bigcup S \subseteq S,$$

ettersom S er transitiv og $\bigcup$ bevarer delmengder. Men da er $T_{k+1} \subseteq S$, som var det vi skulle vise. □

3. von Neumanns univers

Vi er nå kun få skritt unna fjelltoppen.

Nivåer. Først påpeker vi at klassen $\mathbb{V}$ som vi har omtalt som *universet*, ofte kalles *von Neumanns*[3] *univers*, til forskjell fra eksempelvis *Gödels*[4] *(konstruerbare) univers* L. von Neumanns univers konstrueres fra bunnen av i *nivåer*, og disse nivåene utgjør til sammen et transendelig *hierarki* av mengder. Detaljene er som følger:

Definisjon 4.5. Nivåene i *von Neumanns hierarki* er gitt ved

$$\mathbb{V}_0 = \varnothing,$$
$$\mathbb{V}_{\alpha+1} = \wp(\mathbb{V}_\alpha),$$
$$\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi,$$

der λ er en grenseordinal.

Vi har tidligere sett at $\wp$ og $\bigcup$ kan betraktes som funksjonsklasser på $\mathbb{V}$, så konstruksjonen over er rettferdiggjort ved transendelig rekursjon.

Lemma 4.2. von Neumanns hierarki har følgende egenskaper:

(i) Hver $\mathbb{V}_\alpha$ er transitiv.
(ii) Hvis $\alpha < \beta$ så er $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\beta$.
(iii) $\alpha \subseteq \mathbb{V}_\alpha$.

Bevis. (i) $\mathbb{V}_0$ er transitiv per definisjon. Hvis $\mathbb{V}_\alpha$ er transitiv, gir lemma 2.3(iii) at også $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ er transitiv; og dersom λ er en grenseordinal og $\mathbb{V}_\xi$ er transitiv for enhver $\xi < \lambda$, så er $\mathbb{V}_\lambda$ transitiv ved del (ii) av ovennenvte lemma. Ved transendelig induksjon er påstanden bevist.

(ii) Også her er beviset ved induksjon, denne gang på ordinalen β. Tilfellet $\beta = 0$ er trivielt: det finnes nemlig ingen ordinal $\alpha < 0$, så

[3] Vi har allerede nevnt von Neumann i en tidligere fotnote, men vi påpeker her at han av mange anses å ha vært et *universal*geni.

[4] *Kurt Gödel* (1906–1978), tysk-østerriksk logiker, blant annet kjent for sine to *ufullstendighetsteoremer*.

utsagnet er tomt oppfylt. La nå $\beta = \gamma + 1$ være en etterfølgerordinal, og anta at $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\delta$ for enhver $\delta < \beta$. Spesielt er

$$\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\gamma \in \wp(\mathbb{V}_\gamma) = \mathbb{V}_{\gamma+1},$$

og siden hver mengde i hierarkiet er transitiv, må vi konkludere at $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_{\gamma+1}$. La til slutt $\beta = \lambda$ være en grenseordinal. Da er $\mathbb{V}_\lambda$ unionen av alle $\mathbb{V}_\xi$ der $\xi < \lambda$. Med andre ord:

$$\forall x\ [x \in \mathbb{V}_\lambda \Longleftrightarrow \exists \xi \in \lambda\ (x \in \mathbb{V}_\xi)].$$

Spesielt er $\alpha < \lambda$, så konklusjonen følger umiddelbart.

(iii) Også dette beviset er ved transendelig induksjon (på α), og vi bruker ikke plass på å føre det her. □

Rang. Vi ønsker nå et begrep om hvor (når?) en mengde først opptrer i hierarkiet vårt.

Definisjon 4.6. *Rangen* $\operatorname{rank} x$ til en mengde x er den minste ordinalen α slik at $x \subseteq \mathbb{V}_\alpha$.

Siden $\mathbb{V}_{\alpha+1} = \wp\mathbb{V}_\alpha$, kunne vi like gjerne definert $\operatorname{rank} x$ til å være den minste ordinalen slik at $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$; de to definisjonene er ekivalente.

Proposisjon 4.1. Hvis $x \in y$, så er $\operatorname{rank} x < \operatorname{rank} y$.

Bevis. La $\operatorname{rank} y = \beta$, så $y \subseteq \mathbb{V}_\beta$. Siden $x \in y$ har vi $x \in \mathbb{V}_\beta$, ettersom $\mathbb{V}_\beta$ er transitiv. Vi har nå to tilfeller:

Hvis $\beta = \gamma + 1$ er en etterfølgerordinal, har vi

$$x \in \mathbb{V}_{\gamma+1} = \wp\mathbb{V}_\gamma \implies x \subseteq \mathbb{V}_\gamma,$$

så $\operatorname{rank} x = \gamma < \gamma + 1 = \operatorname{rank} y$.

Hvis ikke er $\beta = \lambda$ en grenseordinal. Vi har da

$$x \in \mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi \implies \exists \delta < \lambda\ (x \in \mathbb{V}_\delta),$$

hvorpå $x \subseteq \mathbb{V}_\delta$ siden $\mathbb{V}_\delta$ er transitiv. Det er nå uvesentlig hvorvidt $\operatorname{rank} x = \delta$ eller ikke; det viktige er at $\delta < \lambda$. □

Proposisjon 4.2. For enhver $\alpha \in \mathbf{\Omega}$ er $\operatorname{rank} \alpha = \alpha$.

Bevis. Fra lemma 4.2(iii) får vi umiddelbart at $\operatorname{rank} \alpha \leq \alpha$, så det gjenstår å vise den motsatte ulikheten. Anta derfor mot formodning at

$\operatorname{rank}\alpha < \alpha$; det vil si, $\operatorname{rank}\alpha \in \alpha$. Nå er både α og $\operatorname{rank}\alpha$ ordinaler, så prop. 4.1 gir

$$\operatorname{rank}(\operatorname{rank}\alpha) < \operatorname{rank}\alpha,$$

og ved å fortsette slik danner vi en uendelig, avtakende $\in$-følge, i strid med det første korollaret til teorem 8. Vi har nådd en motsigelse, så vi må konkludere at $\alpha \leq \operatorname{rank}\alpha$ allikevel. $\square$

Resultatene over (samt rang forøvrig), gir åpenbart kun mening for mengder som faktisk er inneholdt i von Neumanns hierarki. Så hvilke mengder er dette? Vårt niende – og siste! – teorem gir oss svaret:

Teorem 9. For enhver mengde x finnes det en ordinal α slik at $x \in \mathbb{V}_\alpha$; det vil si,

$$\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{\Omega}} \mathbb{V}_\alpha.$$

Bevis. Vi antar for motsigelse at det finnes en mengde x som ikke er inneholdt i noen $\mathbb{V}_\alpha$ i hierarkiet. Med andre symboler,

$$\exists x\ [\forall \alpha \in \mathbf{\Omega}\ (x \notin \mathbb{V}_\alpha)].$$

Vi har to tilfeller:

(i) Anta at enhver $y \in x$ nå er inneholdt i et nivå av hierarkiet. Ved det påfølgende korollaret har da y en rang[5] α, så

$$y \in \wp\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha+1}.$$

Vi betrakter nå klassen

$$\mathbb{U} = \{\mathbb{V}_{\xi+1} \mid \exists y \in x\ (\operatorname{rank} y = \xi)\}.$$

Nå er $\mathbb{U}$ simpelthen rekkevidden til funksjonsklassen

$$\begin{aligned} \mathscr{U} : x &\longrightarrow \mathbb{V} \\ y &\longmapsto \mathbb{V}_{\operatorname{rank} y+1}, \end{aligned}$$

hvorpå et erstatningsaksiom gir at $\operatorname{ran}\mathscr{U}$ er en mengde. Men sistnevnte er nå bare en familie av ordinaler, og har dermed supremum

$$\kappa = \bigcup \operatorname{ran}\mathscr{U},$$

ved lemma 3.11. Følgelig er $y \in \mathbb{V}_\kappa$ for enhver $y \in x$, så

$$x \subseteq \mathbb{V}_\kappa \implies x \in \wp\mathbb{V}_\kappa = \mathbb{V}_{\kappa+1},$$

en motsigelse mot bevisets aller første antakelse.

[5] Merk at dette ikke leder til et sirkelargument: korollaret er sant for y uavhengig av om det er sant for alle andre mengder.

(ii) Ellers finnes det en $y \in x$ som heller ikke er inneholdt i noen av mengdene $\mathbb{V}_\alpha$. Vi danner da den transitive tillukningen $T = \mathrm{tcl}(x)$ av x, som foreskrevet i forrige seksjon. Videre lar vi

$$Y = \{t \in T \mid \forall \alpha \in \mathbf{\Omega}\ (t \notin \mathbb{V}_\alpha)\};$$

eksistensen til Y er gitt ved en instans av $\mathfrak{Sep}$. Ved antakelsen på x ser vi at $Y \neq \varnothing$, så $\mathfrak{Reg}$ gir at Y har et $\in$-minimalt element m. Dette er den ønskede mengden, for siden $m \cap Y = \varnothing$ må nå enhver $s \in m$ være inneholdt i hvert sitt nivå $\mathbb{V}_\sigma$ i hierarkiet. Vi kan dermed anvende metoden fra (i) på m for å konstruere den ønskede ordinalen μ slik at $m \in \mathbb{V}_\mu$, så vi har en ny motsigelse.

Ved (i) og (ii) må vi nå konkludere at enhver mengde faktisk er inneholdt i et eller annet nivå av von Neumanns[6] hierarki. □

Vi kan for all del betrakte rank som en funksjonsklasse på $\mathbb{V}$, men for våre formål holder det å til enhver tid fiksere en mengde x og betrakte restriksjonen

$$\mathrm{rank} \restriction x = \{\langle y, \alpha\rangle \mid (y \in x) \wedge (\alpha = \mathrm{rank}\, y)\}.$$

Siden uttrykket til høyre over kan skrives om til en funksjonsliknende formel, gir en instans av $\mathfrak{Rep}$ at $\mathrm{ran}(\mathrm{rank} \restriction x)$ er en mengde.

Korollar. Enhver mengde har en rang.

Bevis. Ved teoremet er enhver mengde x inneholdt i en eller annen $\mathbb{V}_\alpha$ i von Neumanns hierarki. Siden $\mathbf{\Omega}$ er velordnet, må delklassen

$$\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{\Omega}\ (x \subseteq \mathbb{V}_\alpha\}$$

av $\mathbf{\Omega}$ ha et minste element, og vi er ferdige. □

$\mathbb{V}.\mathbb{V}.\mathbb{V}.\mathbb{V}.\mathbb{V}.$

[6]Siden vi har litt ekstra plass her, føler vi det er på sin *plass* med noen (riktignok uattesterte) anekdoter om von Neumann:

Han skal for det første ha vært så utilfreds med å jobbe i stillhet, at han på kontoret sitt ved Princeton pleide å spille tysk marsjmusikk på full guffe, til (blant annet) Albert Einsteins store forargelse.

Den samme egenskapen førte visst også til baluba på hjemmebane den gangen kona hans hadde fikset et stille og fredelig hjemmekontor til ham. Det var han slettes ikke interessert i; han skulle sitte i stua med radioen på.

Til slutt var han også kjent som en dårlig sjåfør, til tross for at han elsket å kjøre bil. Grunnen? Han hadde for vane å **lese bøker** mens han gjorde det.

Bibliografi

[1] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. 7. utg. McGraw-Hill Education, 2010. ISBN: 978–0–07–338314–9.

[2] Philip W. Carruth. «Arithmetic of ordinals with applications to the theory of ordered abelian groups». I: *Bull. Amer. Math. Soc.* 48.4 (1942). DOI: 262--271. URL: https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183504256.

[3] Keith J. Devlin. *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory*. 2. utg. Springer-Verlag, 1993. ISBN: 3–540–94094–4.

[4] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. 2. utg. Harcourt Academic Press, 2001. ISBN: 0–12–238452–0.

[5] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, Inc., 1977. ISBN: 0–12–238440–7.

[6] James M. Henle. *An Outline of Set Theory*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, 1986. ISBN: 978–0–387–96368–6.

[7] Thomas J. Jech. *Set Theory*. Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2006. ISBN: 978–3–540–44085–7.

[8] H. Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Bd. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science B.V., 1980. ISBN: 0–444–86839–9.

[9] James R. Munkres. *Topology*. 2. utg. Pearson Education Limited, 2014. ISBN: 978–1–292–02362–5.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden