

Hans Bulling Johansen

# Ikkjedekomposerbare dekomposisjonar av nokre Quiverrepresentasjonar

Bacheloroppgåve i Matematiske fag - bachelorstudium

Veileder: Sverre Olaf Smalø

Mai 2020



Hans Bulling Johansen

# **Ikkjedekomposerbare dekomposisjonar av nokre Quiverrepresentasjonar**

Bacheloroppgåve i Matematiske fag - bachelorstudium  
Veileder: Sverre Olaf Smalø  
Mai 2020

Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet  
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk  
Institutt for matematiske fag





# Contents

<b>I</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>3</b>
1	Det vi vil oppnå	3
2	Dekomponering	4
3	Dimensjonsvektoren og eksakte sekvensar	11
<b>II</b>	<b>3-underromsproblemet</b>	<b>14</b>
4	Bygging av sekvensen	14
5	Endomorferingane av sekvensen	21
<b>III</b>	<b>4-underromsproblemet</b>	<b>30</b>
6	Det som er likt for tre og fire underrom	30
7	Det som er ulikt	33
8	Kjelder	35

# Part I

## Introduksjon

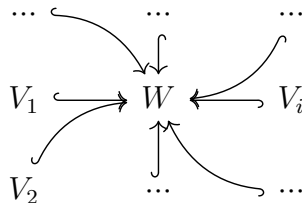
### 1 Det vi vil oppnå

Objekt i algebraiske strukturar kan vere vanskelege å studere. Det kan derfor vere lettare å studere nokre spesielle objekt som gjev utspring til dei andre, dersom strukturen vi jobbar med tillet det.

Dette kan vere mekanismar som simple objekt eller ikkjedekomposerbare objekt.

Storleiken på denne klassa med spesielle objekt er interessant, fordi ei enderleg mengde av slike objekt vil gjere det mogleg å studere alle objekt i strukturen ved kun å studere desse spesielle objekta. Dette gjev grunnlaget for strukturar av enderleg dekomponering eller enderleg faktorisering.

Vi skal her sjå nærare på ikkjedekomposerbare objekt av ein skule med strukturar, nemelig vektorrom med underrom.



Her har vi  $W$  som vektorrom over ein kropp  $k$ , og  $V_i \subset W$ ,  $\forall$  indeksar  $i$

For systemet der vi har  $i = 1$  eller  $i = 2$  er det trivielt å finne dei ikkjedekom-  
 poserbare objekta. Derfor vil vi sjå på  $i = 3$  og  $i = 4$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 V_1 & \longleftrightarrow & W & \longleftrightarrow & V_3 \\
 & & \updownarrow & & \\
 & & V_2 & & \\
 & & & & \\
 & & V_4 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 V_1 & \longleftrightarrow & W & \longleftrightarrow & V_3 \\
 & & \updownarrow & & \\
 & & V_2 & & 
 \end{array}$$

Vi vil no introdusere nokre definisjonar og resultat som vi går ut frå i  
 resten av denne oppgåva. Dei er knytta til Ringteori.

## 2 Dekomponering

**Definisjon 2.1.** *Ein representasjon  $R$  over eit quiver  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ , kan skrivast som ei mengde vektorrom  $V_R$  (som kjem frå  $\Gamma_0$ ), saman med ei mengde lineærtransformasjonar  $F_R$  (som kjem frå  $\Gamma_1$ ).*

$$R = (V_R, F_R)$$

Frå Ringteori veit vi også at ein slik representasjon er ein modul over  $k\Gamma$ -algebraen.

**Definisjon 2.2.** For to representasjonar  $A = (V, F)$  og  $B = (V', F')$  er  $A \oplus B$  definert som:

$$A \oplus B = (V \oplus V', F \oplus F')$$

der  $V \oplus V' = \{V_i \oplus V'_i\}$  for alle indeksar  $i$  i  $\Gamma_0$  og  
der  $F \oplus F' = \{F_j \oplus F'_j\}$  for alle indeksar  $j$  i  $\Gamma_1$ .

For to linjærtransformasjonar  $F : A \rightarrow B$  og  $F' : A' \rightarrow B'$  så er

$$F \oplus F' = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F' \end{pmatrix}$$

Der  $F \oplus F' : A \oplus A' \rightarrow B \oplus B'$

**Definisjon 2.3.** Ein representasjon  $R$  av eit quiver  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  er dekomponerbar dersom  $\exists$  ikkje-trivielle representasjonar  $R_1$  og  $R_2$  over det same quiveret  $\Gamma$  slik at  $R = R_1 \oplus R_2$ .

**Definisjon 2.4.**  $R$  frå **Definisjon 2.3.** er ikkjedekomponerbar dersom  $R$  ikkje kan dekomponerast.

No vil vi knytte dekomponering opp mot endomorfiringen til ein representasjon, då nyttar vi at ein representasjon av eit quiver er ein modul over vegalgebraen til quiveret, dette vart bevist i kurset MA3203, Ringteori.

**Definisjon 2.5.** Gitt to representasjonar  $R = (V_R, F_R)$  og  $R' = (V_{R'}, F_{R'})$  av det same quiveret  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  over ein kropp  $k$ , Då er ein homomorfi  $\eta : R \rightarrow R'$  ei samling av lineære kart  $\eta_i : V_R(i) \rightarrow V_{R'}(i) \forall i \in \Gamma_0$  slik at  $\forall \alpha : i \rightarrow j \in \Gamma_1$  det følgande diagrammet kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} V_R(i) & \xrightarrow{\eta_i} & V_{R'}(i) \\ \downarrow f_\alpha & \circlearrowleft & \downarrow f'_\alpha \\ V_R(j) & \xrightarrow{\eta_j} & V_{R'}(j) \end{array}$$

Altså  $f'_\alpha \circ \eta_i = \eta_j \circ f_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma_1$



**Definisjon 2.6.** For ein modul  $M$  er ein homomorfi  $f : M \rightarrow M$  ein endomorfi.

$$\begin{array}{c} M \\ \downarrow f \\ M \end{array}$$

**Fakta 1.** Mengda  $End(M) = \{ \text{Endomorfiar til ein modul } M \}$  saman med naturleg addisjon av homomorfiar og funksjonskomposisjon er ein ring med multiplikativ identitet.

**Definisjon 2.7.**  $f : M \rightarrow M$  er ein idempotent i  $End(M)$  om  $f \circ f = f$

**Proposisjon 2.1.**

Gitt  $f \in End(M)$  ein idempotent,  $M$  ein modul

$\Downarrow$

$$M = Kern(f) \oplus Im(f)$$

**Bevis.**

$$Im(f) = \{f(x) \mid x \in M\}$$

og

$$Kern(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

sidan  $f$  er ein idempotent, så kan vi skrive

$$M \ni m = (m - (f \circ f)(m)) + (f \circ f)(m)$$

då har vi at

$$(m - (f \circ f)(m)) \in \text{Kern}(f)$$

sidan

$$\begin{aligned} f(m - (f \circ f)(m)) &= f(m) - (f \circ f \circ f)(m) \\ &= f(m) - f(m) = 0 \end{aligned}$$

Så:

$$[f(m - (f \circ f)(m)) = f(m) - f(m) = 0] \implies [(m - (f \circ f)(m)) \in \text{Kern}(f)]$$

Óg:

$$(f \circ f)(m) \in \text{Im}(f)$$

sidan

$$\begin{aligned} f: \quad M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto n \end{aligned}$$

så:  $f(m) = n$ , med  $n \in M$

derfor er

$$(f \circ f)(m) = f(n) \in \text{Im}(f)$$

Med dette kan vi konkludere at:

$$M = \text{kern}(f) + \text{Im}(f)$$

Til slutt anta:  $\text{Kern}(f) \cap \text{Im}(f) \ni n = f(m)$

Då er det openbart at:  $f(n) = (f \circ f)(m) = m = 0$

Og sidan  $f$  er ein homomorfi, så er  $f(0) = 0$ , som tyder at:

$$n = f(m) = f(0) = 0$$

Dermed må  $n = 0$  og summen er direkte. Altså:  $M = \text{Kern}(f) \oplus \text{Im}(f)$  □

**Proposisjon 2.2** (Frå "Rings and Categories of Modules"<sup>(1)</sup>). *For ein ikkje-null modul  $M$ , så held følgande.*

*$M$  er ikkjedekomposerbar*

⇕

*0 og 1 er dei einaste idempotents av  $\text{End}(M)$*

**Bevis.** (⇕) Vi nyttar **Proposisjon 2.1.** med  $f = 0$  og  $f = 1$ .

Då får vi at

$$M = \text{Kern}(0) \oplus \text{Im}(0) \wedge M = \text{Kern}(1) \oplus \text{Im}(1)$$

Deretter ser vi at  $\text{Im}(0) = \{0\}$  og  $\text{Kern}(1) = \{0\}$

Dermed får vi at

$$M = \text{Kern}(0) \oplus (0), \text{ eller } M = (0) \oplus \text{Im}(1)$$

Dette gjev oss at  $M$  er ikkjedekomposerbar ved nokre fleire steg frå "Rings and Categories of Modules"<sup>(1)</sup>

(⇓) blir også forklart nærare i "Rings and Categories of Modules"<sup>(1)</sup>

□

**Lemma 2.2.1.** *For ein modul  $M$  og ein kropp  $k$  gjeld følgende:*

$$\text{End}(M) \cong k$$

↓

*$M$  er ikkjedekomposerbar*

**Bevis.** Anta at  $e \in k$  er ein ikkjenull idempotent.

Altså:

$$\begin{aligned} e \cdot e = e &\Rightarrow e \cdot e \cdot \frac{1}{e} = e \cdot \frac{1}{e} \\ &\Rightarrow e = 1 \end{aligned}$$

□

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V_4 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 V_1 & \longleftrightarrow & W & \longleftrightarrow & V_3 \\
 & & \uparrow & & \\
 & & V_2 & & 
 \end{array}$$

||

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_4 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 U_1 & \longleftrightarrow & W_1 & \longleftrightarrow & U_3 \\
 & & \uparrow & & \\
 & & U_2 & & 
 \end{array}$$

⊕

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_4' & & \\
 & & \downarrow & & \\
 U_1' & \longleftrightarrow & W_2 & \longleftrightarrow & U_3' \\
 & & \uparrow & & \\
 & & U_2' & & 
 \end{array}$$

Gjev at

$$W_1 \subset W \wedge W_2 \subset W$$

og

$$U_i \subset V_i \wedge U_i' \subset V_i$$

Dette tyder at dimensjonane til desse vektorromma er interessante å sjå på.

### 3 Dimensjonsvektoren og eksakte sekvensar

**Teorem 3.1** (Følge av Zorn's Lemma). *Alle vektorrom har ein basis*

**Bevis.** Følger frå Zorn's Lemma eller ein av dei ekvivalente formane av Zorn's Lemma  $\square$

**Lemma 3.1.1.** *Eit vektorrom  $W$  over ein kropp  $k$  med ein tellbar basis  $\Lambda$  kan skrivast på forma:*

$$W \cong k^{\dim(W)}$$

**Bevis.**  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  er ein basis for  $W$ , noko som tyder at vi kan skrive:

$$W \ni w = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 + \dots$$

med  $k_i \in k$

Dette induserer ein naturleg morfi:

$$\begin{aligned} \psi : \quad W &\longrightarrow k^{\dim(W)} \\ w = (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 + \dots) &\longmapsto (k_1, k_2, k_3, \dots) \end{aligned}$$

$\psi$  er openbart veldefinert, og sidan  $\Lambda$  er ein basis av  $W$  vil lineærkombinasjonen av element i basisen vere unike. Dermed er  $\psi$  surjektiv og injektiv.

Dermed er  $W \cong k^{\dim(W)}$

$\square$

**Proposisjon 3.1.** For  $\mathcal{W}_k$  mengda av alle vektorrom med tellbar basis over kroppen  $k \exists$  ein morfi  $\varrho$  definert som:

$$\begin{aligned} \varrho: \quad \mathcal{W}_k &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ W &\longmapsto \dim(W) \end{aligned}$$

**Bevis.** For ein  $W \in \mathcal{W}_k$  har vi ein basis  $\Lambda_W$ .

Ein definisjon av  $\dim(W)$  er  $\dim(W) = \|\Lambda_W\|$ .

Denne  $\|\Lambda_W\|$  er openbart i  $\mathbb{Z}$  når  $\Lambda_W$  er tellbar. □

**Lemma 3.1.1.** For ei ordna undermengd  $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{W}_k$  så kan vi definere ein morfi  $\varrho'$ :

$$\begin{aligned} \varrho': \quad \mathcal{V}_k &\longrightarrow \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}_k|} \\ \{V_1, V_2, \dots\} &\longmapsto \{\varrho(V_1), \varrho(V_2), \dots\} \end{aligned}$$

**Bevis.** Følgjer openbart frå resultatata over. □

**Definisjon 3.1.**  $[dim(V_1) \ dim(V_2) \ dim(V_3) \ \dots]$

Er kalla dimensjonsvektoren til ei mengd  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}$  med vektorrom over den same kroppen  $k$

No veit vi allereie at ein representasjon består av ei mengd vektorrom saman med nokre lineærtransformasjonar mellom desse vektorromma. Dermed vert det mogleg å definere dimensjonsvektoren for ein slik representasjon.

**Definisjon 3.2.** Gitt ein representasjon  $R = (V_R, F_R)$  over eit quiver  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ , så er dimensjonsvektoren til  $R$  dimensjonsvektoren til  $V_R$ .

Dette var det vi trengte om dimensjonsvektorar, no skal vi sjå vidare på eksakte sekvensar over modular.

**Definisjon 3.3.** Ein sekvens av modular

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{\dots}} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

Er kalla eksakt om

$$Im(f_i) = Kern(f_{i+1}) \ \forall \text{ indeksar } i$$

eller

$$A_i \cong Cokern(f_{i-2}) \cong A_{i-1}/Im(f_{i-2}) \ \forall \text{ indeksar } i > 2$$

om Cokernane eksisterer. (I modulkategorien eksisterer Cokernane)



## Part II

# 3-underromsproblemet

Vi vil her sjå på representasjonen:

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{l_1} & W & \xleftarrow{l_3} & V_3 \\ & & \uparrow l_2 & & \\ & & V_2 & & \\ & & \downarrow \varrho' & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dim(V_1) \\ \dim(V_2) \\ \dim(V_3) \\ \dim(W) \end{bmatrix}$$

## 4 Bygging av sekvensen

Vi har ein openbar nullrepresentasjon (der alle nodane er 0), Den neste som er interessant å sjå på er den der noden i midten (Vi kallar denne *Toppen* frå no av) har dimensjon 1.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{(a)} & k & \xleftarrow{(c)} & 0 \\ & & \uparrow (b) & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

**Teorem 4.1.** *Denne representasjonen er ikkjedekomposerbar.*

**Bevis.** Sidan dimensjonen på  $Topp$  er 1, og einaste moglege dimensjonar på underrom er 1 og 0 får vi følgande:

$$k \cong k \oplus (0) \vee k \cong (0) \oplus k$$

Dermed vert  $(0)$  ein  $Topp$  i ein av dekomposisjonsrepresentasjonane. Dette gjev at ein av dekomposisjonsrepresentasjonane er nullrepresentasjonen sidan dei andre nodane er underrom av  $Topp$ , og dimensjonen til  $Topp$  er 0 dermed er nodane sine dimensjonar også 0.  $\square$

No vil vi byggje ein eksakt sekvens frå dette leddet.

$$0 \xrightarrow{f_1} k \xleftarrow{f_3} 0$$

$$f_2 \uparrow$$

$$0$$

$$\eta \downarrow$$

$$k \longrightarrow k \longleftarrow 0$$

$$\uparrow$$

$$0$$

$$\oplus$$

$$0 \longrightarrow k \longleftarrow 0$$

$$\uparrow$$

$$k$$

$$\oplus$$

$$0 \longrightarrow k \longleftarrow k$$

$$\uparrow$$

$$0$$

$$\parallel$$

$$k \longrightarrow k^3 \longleftarrow k$$

$$\uparrow$$

$$k$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{f_1} & k & \xleftarrow{f_3} & 0 \\
 & & \uparrow f_2 & & \\
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow \psi_1 & & \\
 0 & \xrightarrow{f_1} & k & \xleftarrow{f_3} & 0 \\
 & & \uparrow f_2 & & \\
 & & 0 & & 
 \end{array}$$

$\subset$

$$\begin{array}{ccccc}
 k & \xrightarrow{f'_1} & k & \xleftarrow{f'_3} & 0 \\
 & & \uparrow f'_2 & & \\
 & & 0 & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{f_1} & k & \xleftarrow{f_3} & 0 \\
 & & \uparrow f_2 & & \\
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow \psi_2 & & \\
 0 & \xrightarrow{f_1} & k & \xleftarrow{f_3} & 0 \\
 & & \uparrow f_2 & & \\
 & & 0 & & 
 \end{array}$$

$\subset$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{f'_1} & k & \xleftarrow{f'_3} & 0 \\
 & & \uparrow f'_2 & & \\
 & & k & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
0 & \xrightarrow{f_1} & k & \xleftarrow{f_3} & 0 \\
& & \uparrow f_2 & & \\
& & 0 & & \\
& & \downarrow \psi_3 & & \\
0 & \xrightarrow{f_1} & k & \xleftarrow{f_3} & 0 \\
& & \uparrow f_2 & & \\
& & 0 & & \\
& & & \subset & \\
& & & & 0 \xrightarrow{f'_1} k \xleftarrow{f'_3} k \\
& & & & \uparrow f'_2 \\
& & & & 0
\end{array}$$

Her tyder "c" underrepresentasjon. Og dermed er  $\eta$  definert som homomorfi.

Vi vil no gje desse representasjonane nokre namn.

**Definisjon 4.1.** (i)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Denne vil vi kalle  $\mathcal{R}_{0,4}$

(ii)

$$\begin{array}{ccccc} k & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Denne vil vi kalle  $\mathcal{R}_{1,1}$

(iii)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & k & & \end{array}$$

Denne vil vi kalle  $\mathcal{R}_{1,2}$

(iv)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & k \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Denne vil vi kalle  $\mathcal{R}_{1,3}$

**Definisjon 4.2.** Vi noterer:  $\mathcal{R}_{q,1} \oplus \mathcal{R}_{q,2} \oplus \mathcal{R}_{q,3} = \mathcal{R}_{q,\oplus}$

**Definisjon 4.3.**

$$\eta_q : \mathcal{R}_{q,4} \longrightarrow \mathcal{R}_{q+1,\oplus}$$

Dette er den itterative versjonen av  $\eta$  frå tidlegare. I tillegg:

$$\eta_q = \begin{bmatrix} \psi_{q,1} \\ \psi_{q,2} \\ \psi_{q,3} \end{bmatrix}$$

Der:

$$\psi_{q,i} : \mathcal{R}_{q,4} \longrightarrow \mathcal{R}_{q+1,i}$$

**Definisjon 4.4.**  $\text{Cokern}(\eta_q) = (\varpi_q, \mathcal{R}_{q+1,4})$  der  $\varpi_q$  er kokjernemorfien. Vi noterar kokjernemorfien til  $f$  som:  $\text{Hom}_{\text{Cokern}}(f)$

$$\varpi_q : \mathcal{R}_{q+1,\oplus} \longrightarrow \mathcal{R}_{q+1,4}$$

Og:

$$\varpi_q = [\varphi_{q,1} \quad \varphi_{q,2} \quad \varphi_{q,3}]$$

Der:

$$\varphi_{q,i} : \mathcal{R}_{q+1,i} \longrightarrow \mathcal{R}_{q+1,4}$$

**Definisjon 4.5.**  $\psi_{q,i} = \text{Hom}_{\text{Cokern}}(\varphi_{q-1,i})$

**Fakta 2.**

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_{q,i} & \xrightarrow{\varphi_{q-1,i}} & \mathcal{R}_{q,4} & \xrightarrow{\psi_{q,i}} & \mathcal{R}_{q+1,i} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_{q,i} & \xrightarrow{\varphi_{q-1,i}} & \mathcal{R}_{q,4} & \xrightarrow{\psi_{q,i}} & \mathcal{R}_{q+1,i} \end{array}$$

Om sekvensane på radane er eksakte, så er  $\text{Kern}(\psi_{q,i}) = \text{Im}(\varphi_{q-1,i})$   
Dermed er  $\text{Kern}(\psi_{q,i}) = (\varphi_{q-1,i}, \mathcal{R}_{q,i})$

Med dette her er den eksakte sekvensen vår definert i samsvar med **Definisjon 3.3.**

## 5 Endomorfingane av sekvensen

**Teorem 5.1.**  $\mathcal{R}_{q,i}$  er ikkjedekomposerbar  $\forall q \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, 3, 4\} \wedge q = 0, i = 4$

**Bevis.** Vi vil vise at  $End(\mathcal{R}_{q,i}) \cong k$  og dermed nytte **Lemma 2.2.1** for å konkludere teoremet.

For å vise at  $End(\mathcal{R}_{q,i}) \cong k$  vil vi nytte induksjon over  $q$  og  $i$ .

**Basissteg:**

(1):

$$End(\mathcal{R}_{0,4}) \cong k$$

Anta vi har ein  $\xi \in End(\mathcal{R}_{0,4})$

Frå **Definisjon 2.5.** er  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_4)$

Indeksen  $i$  samsvarer med nodane i diagrammet under.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 4 & \longleftarrow & 3 \\ & & \uparrow & & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Og for  $i = 1, 2, 3$  gjeld følgende diagram for  $\xi_i$ :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{t_1} & 0 \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ & V_{\mathcal{R}_{0,4}}(i) \xrightarrow{\xi_i} V_{\mathcal{R}_{0,4}}(i) & \\ & \downarrow f_\alpha & \downarrow f_\alpha \\ & V_{\mathcal{R}_{0,4}}(4) \xrightarrow{\xi_4} V_{\mathcal{R}_{0,4}}(4) & \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ 0 & \xrightarrow{t_3} & 0 \end{array}$$

$t_2$  (left vertical arrow),  $t_4$  (right vertical arrow),  $\circlearrowright$  (commutative symbol)

Vi ser frå dette at for  $\xi_i$  der  $i = 1, 2, 3$  kan vere vilken som helst skalarmultiplikasjon.

For  $\xi_4$  Gjeld:



$$\begin{array}{ccc}
V_{\mathcal{R}_{0,4}}(4) & \xrightarrow{\xi_4} & V_{\mathcal{R}_{0,4}}(4) \\
\vdots & & \vdots \\
a & \xrightarrow{t_3} & b
\end{array}$$

Så det einaste som sett grenser for kva  $\xi$  er, er  $\xi_4$ .  
Dermed vert:

$$\Upsilon : \quad \text{End}(\mathcal{R}_{0,4}) \longrightarrow k$$

$$\xi = (k, k, k, a) \longmapsto a$$

Ein isomorfi.

$\Upsilon$  er openbart injektiv og surjektiv.

Samt:

$$\Upsilon(\xi_a + \xi_b) = \Upsilon((k, k, k, a) + (k, k, k, b)) = a + b$$

$$\Upsilon(\xi_a) + \Upsilon(\xi_b) = a + b$$

og

$$\Upsilon(u \cdot \xi_a) = \Upsilon(u \cdot (k, k, k, a)) = \Upsilon(k, k, k, u \cdot a) = u \cdot a$$

$$u \cdot \Upsilon(\xi_a) = u \cdot a$$

Altså konkluderar (1) med at  $\text{End}(\mathcal{R}_{0,4}) \cong k$

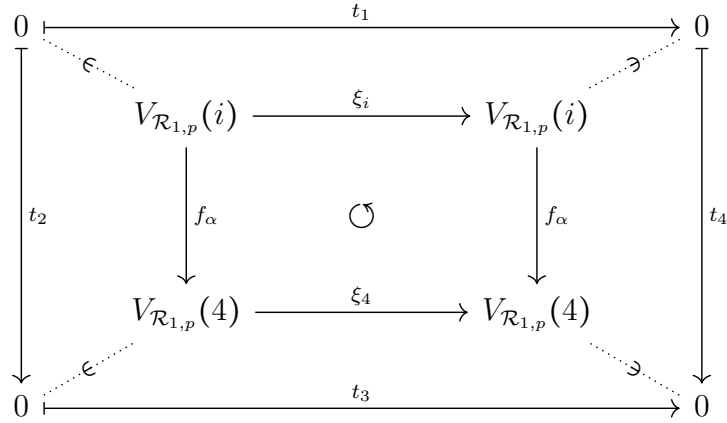
(2):

$$\text{End}(\mathcal{R}_{1,p}) \cong k, \quad \forall p = 1, 2, 3$$

Anta vi har ein  $\xi \in \text{End}(\mathcal{R}_{1,p})$

På same måte som i (1) er  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_4)$  og indeksane er slik som over.

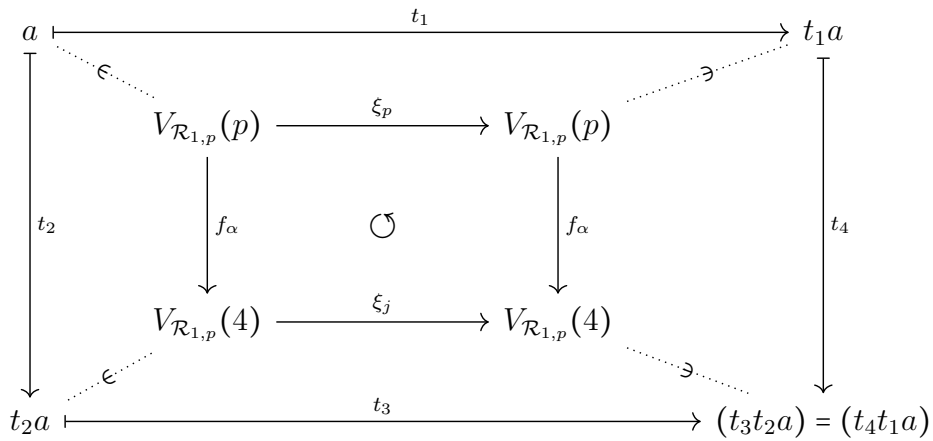
For  $i \neq p$  og  $i \neq 4$  gjeld følgande diagram:



Vi får dermed to interessante avgrensingar for  $\xi$ :  
 For  $\xi_4$  gjeld:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{R}_{1,p}}(4) & \xrightarrow{\xi_4} & V_{\mathcal{R}_{1,p}}(4) \\ \vdots & & \vdots \\ a & \xrightarrow{t_3} & b \end{array}$$

For  $\xi_p$  gjeld:



Sidan alle  $t_j \in k$  og  $a \in k$  og  $k$  er ein kropp, så kan vi finne  $t_1$  ut frå diagrammet:

$$(t_4 t_1 a) = (t_3 t_2 a) \Rightarrow t_1 = \frac{1}{t_4} (t_3 t_2 a) \frac{1}{a} \Rightarrow t_1 = t_3 t_2$$

Der  $t_5$  er ein skalar frå  $k$ .

Så igjen vil  $\xi$  vere avhengig av  $\xi_4$  og vi får ein liknande isomorfi  $\Upsilon$ :

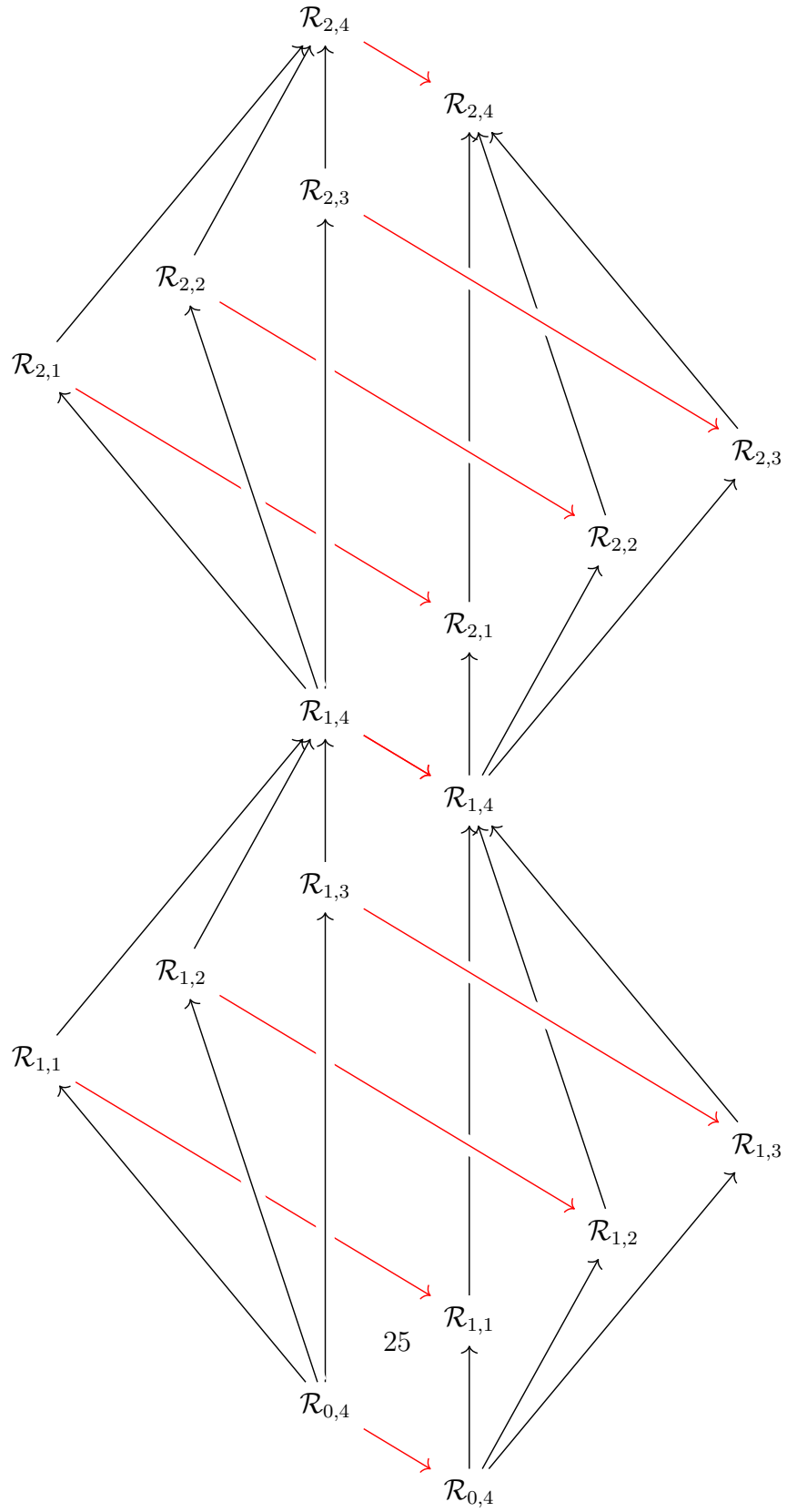
$$\Upsilon : \quad \text{End}(\mathcal{R}_{1,p}) \longrightarrow k$$

$$\xi = (ka, k, k, a) \longmapsto a$$

(for  $p = 1$ )

Dette konkluderer (2) med at  $\text{End}(\mathcal{R}_{1,p}) \cong k$ ,  $\forall p = 1, 2, 3$

Dette er basissteget vårt.



### Induksjonsantagelse:

Vi antar at  $End(\mathcal{R}_{r,i}) \cong k \ \forall r < q \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, 4$

### Induksjonssteg:

Vi vil vise at gitt induksjonsantagelsen vår så er  $End(\mathcal{R}_{q,i}) \cong k \ \forall i = 1, 2, 3, 4$  Vi ser på  $i = 1, 2, 3$  og  $i = 4$  kvar for seg.

( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}(\psi_{q-1,i}, \mathcal{R}_{q,i}) &= Cokern(\varphi_{q-2,i}) \\ (\varphi_{q-2,i}, \mathcal{R}_{q-1,i}) &= Kern(\psi_{q-1,i})\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{R}_{q-1,i} & \xrightarrow{\varphi_{q-2,i}} & \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\psi_{q-1,i}} & \mathcal{R}_{q,i} \\ \downarrow t_1 & & \downarrow t_2 & & \downarrow h \\ \mathcal{R}_{q-1,i} & \xrightarrow{\varphi_{q-2,i}} & \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\psi_{q-1,i}} & \mathcal{R}_{q,i}\end{array}$$

Sidan  $\varphi_{q-2,i}$  er ein Kjerneromorfi, så vil denne vere å gange med ein skalar ( $a \in k$ )

I tillegg veit vi at  $t_1, t_2 \in k$  frå induksjonsantagelsen og at vi kan bestemme dei slik at kvadratet til venstre i diagrammet kommuterer.

Med dette vil  $t_1 = t_2$  sidan:

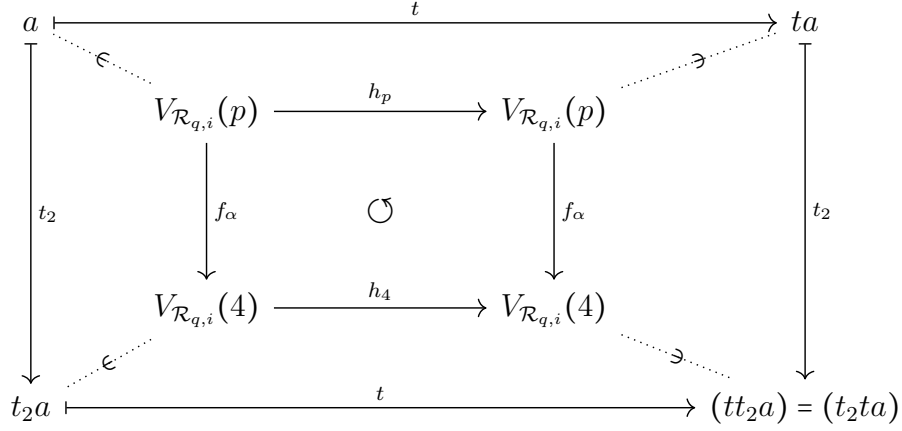
$$\varphi_{q-2,i}t_1 = t_2\varphi_{q-2,i} \Rightarrow at_1 = t_2a \Rightarrow t_1 = t_2$$

Frå no av kallar vi  $t_1, t_2$  for  $t$

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{R}_{q-1,i} & \xrightarrow{\varphi_{q-2,i}} & \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\psi_{q-1,i}} & \mathcal{R}_{q,i} \\ \downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow h \\ \mathcal{R}_{q-1,i} & \xrightarrow{\varphi_{q-2,i}} & \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\psi_{q-1,i}} & \mathcal{R}_{q,i}\end{array}$$

Vi vil sjå om  $h$  eksisterer.

Vi prøver om  $h$  er skalarmultiplikasjon med  $t$  og at dette er ein endomorfi av  $\mathcal{R}_{q,i}$ .



Sidan  $(\psi_{q-1,i}, \mathcal{R}_{q,i})$  er ein kokjerne, så blir  $f_\alpha$  definert som:

$$f_{\alpha,i} : \quad V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(p)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(p) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(4)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(4)$$

$$r_1 + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(p) \longmapsto r_2 + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(4)$$

Og  $\exists \mathcal{F}_\alpha$ :

$$\mathcal{F}_\alpha : \quad V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(p) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(4)$$

$$r_1 \longmapsto r_2$$

og  $\mathcal{F}_\alpha$  kommuterer med skalarmultiplikasjon med  $t$ .

Dermed:

$$f_{\alpha,i} : \quad V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(p)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(p) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(4)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(4)$$

$$r_1 + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(p) \longmapsto \mathcal{F}_\alpha(r_1) + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(4)$$

Og med dette kommuterer også  $f_{\alpha,i}$  med skalarmultiplikasjon med  $t$ .

Altså er  $t \in \text{End}(\mathcal{R}_{q,i})$

Om vi antar at  $h \in \text{End}(\mathcal{R}_{q,i})$  og:

$$h = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$$

$$h_n : \quad V_{\mathcal{R}_{q,i}}(n) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q,i}}(n)$$

$$\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$h_n : \quad V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(n)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(n)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n)$$

$$v_1 + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n) \longmapsto v_2 + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n)$$

Og  $\exists \xi_n$ :

$$\xi_n : \quad V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(n) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(n)$$

$$v_1 \longmapsto v_2$$

Dermed:

$$h_n : \quad V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(n)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n) \longrightarrow V_{\mathcal{R}_{q-1,4}}(n)/V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n)$$

$$v_1 + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n) \longmapsto \xi_n(v_1) + V_{\mathcal{R}_{q-1,i}}(n)$$

Samt:

$$(\dots, \xi_n, \dots) = \xi \in \text{End}(\mathcal{R}_{q-1,4}) \cong k$$

$$\Rightarrow a = \xi = (\dots, \xi_n, \dots) = (\dots, a, \dots)$$

Derfor er også

$$(\dots, h_n, \dots) = (\dots, a, \dots) = a = h$$

Ergo er  $End(\mathcal{R}_{q,i}) \cong k$

( $i = 4$ ):

$$(\varpi_{q-1}, \mathcal{R}_{q,4}) = Cokern(\eta_{q-1})$$

$$(\eta_{q-1}, \mathcal{R}_{q-1,4}) = Kern(\varpi_{q-1})$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\eta_{q-1}} & \mathcal{R}_{q,\oplus} & \xrightarrow{\varpi_{q-1}} & \mathcal{R}_{q,4} \\ \downarrow t_1 & & \downarrow T_2 & & \downarrow h \\ \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\eta_{q-1}} & \mathcal{R}_{q,\oplus} & \xrightarrow{\varpi_{q-1}} & \mathcal{R}_{q,4} \end{array}$$

Vi antar at vi har  $h \in End(\mathcal{R}_{q,4})$ .

Sidan  $T_2$  er ein morfi mellom representasjonar så kan vi skrive:

$$T_2 = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix}$$

Der

$$g_i : \quad \mathcal{R}_{q,i} \longrightarrow \mathcal{R}_{q,i}$$

$$r_1 \longmapsto r_2$$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{b_1 b_2 b_3} & (b_1 a, b_2 a, b_3 a) \\ \downarrow \epsilon & \swarrow \eta_{q-1} & \searrow \varpi_{q-1} \\ \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\eta_{q-1}} & \mathcal{R}_{q,\oplus} \\ \downarrow \xi_{q-1} & \circlearrowleft & \downarrow T_2 \\ \mathcal{R}_{q-1,4} & \xrightarrow{\eta_{q-1}} & \mathcal{R}_{q,\oplus} \\ \downarrow \epsilon & \swarrow \eta_{q-1} & \searrow \varpi_{q-1} \\ ca & \xrightarrow{b_1 b_2 b_3} & (b_1 ca, b_2 ca, b_3 ca) = (g_1(b_1 a), g_2(b_2 a), g_3(b_3 a)) \end{array}$$



Vi veit frå tidlegare at det eksisterer  $g_i$  slik at diagrammet er komponentvis kommutativt. Altså:

$$g_1(b_1a) = b_1ca, g_2(b_2a) = b_2ca, g_3(b_3a) = b_3ca \Rightarrow g_1, g_2, g_3 = c$$

Dermed blir:

$$T_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = c \cdot 1_{\text{End}(\mathcal{R}_{q-1,4})}$$

Altså er  $T_2 \in \text{End}(\mathcal{R}_{q,\oplus})$  den same skalarmultiplikasjonen som  $\xi_{q-1} \in \text{End}(\mathcal{R}_{q-1,4})$

Vidare følgjer det på same måte som tidlegare ( $h$  indusert ved universaleigenskapen til kokjerner)

Og  $h$  er då ein skalarmultiplikasjon med den same skalaren som  $T_2$ .

Derved blir  $\text{End}(\mathcal{R}_{q,4}) \cong k$

Deretter viser vi til **Lemma 2.2.1.** og vi har at:

$\mathcal{R}_{q,i}$  er ikkjedekomposerbar for alle  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  og  $i = 1, 2, 3, 4$

□

**Fakta 3.** *Vi kan nytte liknande argumentasjon på å utvikle sekvensen mot venstre (nedover i diagramma). Då nyttar vi universaleigenskapen til kjernane der vi her nytta universaleigenskapen til kokjernane.*

*Men desse vil ikkje gje oss partiellordna representasjonar.*

## Part III

# 4-underromsproblemet

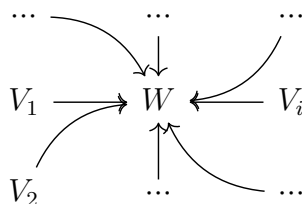
## 6 Det som er likt for tre og fire underrom

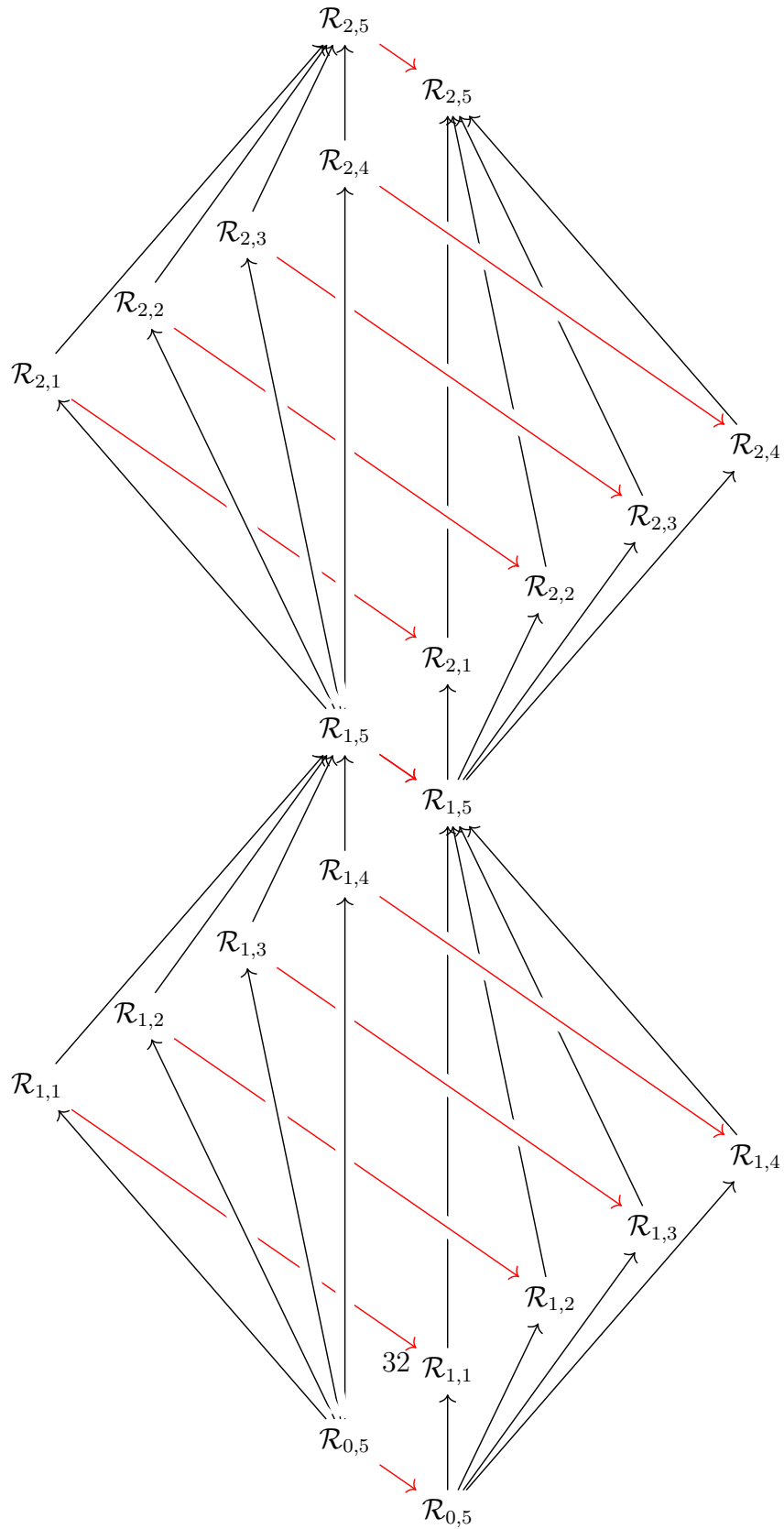
Her tek vi dei komposisjonane vi hadde for tre underrom og løftar dei opp til fire underrom. Gangen på dette vil ellers vere uendra sidan dei prosessane vi nyttar kjem av generelle resultat og er uavhengig tal på vindmølleblad i representasjonen<sup>(\*)</sup>.

Dette vil konkludere med ein eksakt sekvens av representasjonar som er ikkjedekomposerbare.

Avhengig av meir karakteristikk av kroppen  $k$ , kan vi få fleire ikkjedekomposerbare representasjonar utanfor sekvensen som vil vere knytta til røtter av polinom over kroppen.

(\*):





## 7 Det som er ulikt

**Teorem 4.1.** gjeld uavhengig av kva som er på vindmølleblada.

For tre underrom vert desse ikkjedekomposerbare det vi definerte som:

$$\mathcal{R}_{0,4}, \mathcal{R}_{1,1}, \mathcal{R}_{1,2}, \mathcal{R}_{1,3}$$

Men for fire underrom er det nokre av duala av desse som ikkje er med i sekvensen:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ k & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & k & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ k & \longrightarrow & k & \longleftarrow & k \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \downarrow & & \\ k & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & k \\
 & & \uparrow & & \\
 & & k & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \\
 & & k & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & k \\
 & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Vidare vil kroppen kunne påvirke

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & & \downarrow (1 \ \omega) & & \\
 k & \xrightarrow{(1 \ 0)} & k^2 & \xleftarrow{(-1 \ -1)} & k \\
 & & \uparrow (0 \ 1) & & \\
 & & k & & 
 \end{array}$$

Til å forme ei mengd av ikkjedekomposerbare representasjonar som også ikkje blir nemnt ved den tidlegare sekvensen.

Derved konkluderar denne oppgåva med at vi har funne alle ikkjedekomposerbare representasjonane for tre underrom, og ei av fleire mengder av ikkjedekomposerbare representasjonar for fire underrom.

## 8 Kjelder

-Anderson, Frank W. ; Fuller, Kent R.; "Rings and Categories of Modules"  
Second Edition ; *Springer-Verlag* ; (Page 72, 5.10 Proposition)<sup>(1)</sup>

