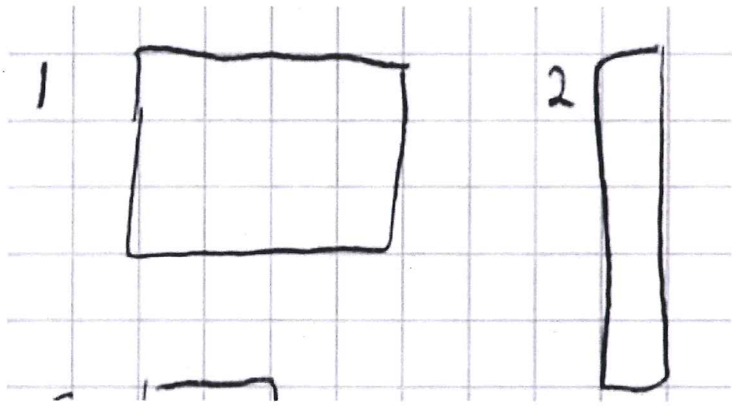
Masteroppgave

Master i matematikkdidaktikk, 5-10

Camilla Stuveseth

«Nei, den er ikke kvadrat, den er mer kvadratat enn den der»

En kvalitativ studie av to 8. trinnselevers forståelse for og bruken av begrepet firkant



Trondheim, mai 2015

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Camilla Stuveseth

«Nei, den er ikke kvadrat, den er mer kvadratat enn den der.»

En kvalitativ studie av to 8. trinnselevers forståelse for og bruken av begrepet firkant.

«No, it is not a square, its look more like a square than the other one."

A qualitative study of two 8th graders' understanding and use of the concept quadrangle.

Masteroppgave, Master i matematikkdidaktikk, trinn 5-10
Trondheim, mai 2015

Veileder:	Hermund André Torkildsen

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning

Forord

Levering av denne masteroppgaven betyr slutten for veldig mye mer enn oppgaven i seg selv, det er slutten på fem utrolig fine år som lærerstudent i Trondheim. Samtidig er det starten på noe nytt, all kunnskapen jeg har tilegnet meg på disse fem årene skal settes ut i praksis i jobben som lærer.

Denne masteroppgaven hadde ikke blitt skrevet hvis jeg hadde stått alene. Derfor vil jeg takke mine informanter og deres lærer for kunnskapen og tiden de har delt med meg. Min veileder, Hermund André Torkildsen, vil jeg takke for alle råd, spørsmål og svar jeg har fått i løpet av denne prosessen. Videre vil jeg takke Susanne Hansen og Lise Gunn Storeheier Skretteberg for lesing av korrektur. Jeg vil også takke mine medstudenter på masterstudiet for mange fine og lærerike stunder sammen. En spesiell takk til «kontoret» for all motivasjonen jeg har fått fra dere, latteren på slitsomme dager og de fine stundene vi har tilbragt sammen. Til slutt vil jeg takke min familie som har støtte meg igjennom disse fem studieårene, og mine venner som har tatt meg med på små og store eventyr.

Trondheim, mai 2015

Camilla Stuveseth

Innholdsfortegnelse

Tabell- og figuroversikt

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Geometri ble i flere oldtidskulturer brukt for å måle landområder, og til konstruksjon av religiøse og kulturelle artefakter. Blant annet ble det i India, Babylon, Egypt, Kina og Hellas utviklet en form for geometri. I senere tid har utviklingen fortsatt, og innenfor den moderne geometrien finnes det flere enn femti former for geometri (Jones, 2002). Dette illustrer viktigheten og variasjonen innenfor emnet geometri i oldtidens, og i dagens samfunn. Geometriens ideer og innhold er viktig i alt fra arkitektur til robotteknologi (Watson, Jones, & Pratt, 2013). Geometri i skolesammenheng kan føre til at elevene utvikler flere ferdigheter, blant annet innenfor visualisering, kritisk tenking, problemløsning, deduktiv resonnering, logisk argumentering og bevis. Geometrisk representasjon kan brukes til å hjelpe elever til å forstå andre matematiske emner som algebra og multiplikasjon (Jones, 2002).

Fordelene med god geometrisk forståelse er mange, men i internasjonale undersøkelser gjør ikke norske elever det optimalt innenfor emnet. I TIMSS 2011 er emneområdet geometri det norske elever på 8. trinn gjør det nest dårligst i etter algebra, mens for elever på 4. trinn er geometri det emnet med høyest prestasjon (Grønmo et al., 2012). Hva skjer mellom 4. og 8. trinn som gjør at elevene presterer dårligere i geometri? I PISA undersøkelsen fra 2012 er matematikk delt opp i fire områder, *forandring og sammenheng*, *rom og form*, *tall og mål* og *usikkerhet*. Norske elever gjør det nest dårligst på området *rom og form*, der geometrisk forståelse er vesentlig for å løse oppgavene (Kjærnsli & Olsen, 2013).

Et av mine gjennomgående spørsmål går på om den gjennomsnittlige elev kan det man skal kunne innenfor geometri. «Analysere eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og beskrive fysiske gjenstandar innanfor daglegliv og teknologi ved hjelp av geometriske omgrep» (Utdanningsdirektoratet, 2012a) er en av kompetansemålene etter 7. trinn i matematikk. Kan en elev som nettopp har begynt i 8. trinn analysere egenskapene til en todimensjonal figur? Ved å ha nådd kunnskapsmålene for etter 7. trinn skal en elev være rustet til å møte matematikken på ungdomsskolen, men er elevene det?

Christine G. Renne (2004) innleder artikkelen «Is a rectangle a square?» med en klasseromsituasjon der hun stiller spørsmålet «er et rektangel et kvadrat?» til sine elever. Overraskende for Renne (2004) kommer ikke fjerdeklassingen ut med et samstemt «NEI» som hun var forberedt på, i stedet svarer halve klassen ja. Elevene kunne på dette stadiet identifisere forskjellige geometriske figurer som kvadrater, trekanter og rektangler, men elevene hadde ikke en forståelse for egenskapene til de geometriske figurene, og evnen til å sammenligne geometriske figurer på en systematisk måte. Et kvadrat er en spesiell type rektangel, men ikke alle rektangler er kvadrater. Renne (2004) fant ut at elevene trengte å utvikle et felles språk og forståelse så de senere kunne utforske relasjonene mellom forskjellige geometriske figurer. Situasjonen viser at det kan være vanskelig for elever å forstå de geometriske figurenes egenskaper og sammenhengene mellom de geometriske figurene. Er det denne grunnleggende forståelsen for geometriske figurer som mangler hos elevene? Ut i fra både min egen erfaring, og lesing vekket det en lyst til å undersøke mer om elevers forståelse om geometriske figurer.

1.2 Forskningsspørsmål

For å avgrense mine spørsmål og undringer rundt geometri i grunnskolen, har jeg valgt å se på forståelsen til elevene for geometriske figurer, herunder firkanter. En firkant er en lukket todimensjonale geometriske figurer som består av fire rette linjestykker som møtes i endepunktene. I teorikapittelet (2.4) vil jeg redegjøre for definisjoner av ulike klasser av firkanter. Videre i denne oppgaven vil «figurer» brukes for begrepet «geometriske figurer». Mitt forskningsspørsmål er som følger:

Hva slags forståelse har to elever på 8. trinn for begrepet firkant?

For å kunne svare på dette må jeg se på noe mer konkret, siden det er vanskelig å kunne belyse elevers forståelse av geometri. Innenfor geometri kan man se på hvilke resonnementer elevene bruker for å svare på oppgaver, der elevenes resonnementer kan si noe om deres forståelse av geometri. Samtidig kan jeg se på hvordan elevene bruker geometriske begreper i ulike sammenhenger, og hvordan elevene sin forståelse for begrepet endrer seg. Derfor stiller jeg to underspørsmål:

1. *Hvilken type resonnementer bruker elevene i møte med oppgaver som legger opp til utforskning av begrepet firkant?*
2. *Hvilke begreper er viktig for elevene i møte med oppgaver som legger opp til utforskning av begrepet firkant, og hvordan forståelse har elevene for disse begrepene?*

Resonnementene innenfor gitte oppgaver kan kategoriseres fra enkle til mer avanserte resonnementer, slik som Lehrer, Jenkins, og Osana (1998) har gjort i sin studie. I studien har de kategorisert åtte forskjellige typer resonnement, for eksempel likheter, størrelser, egenskaper og klassifisering. I kapittel 2.2 i teoridelen vil jeg utdype mer om forskjellige typer resonnementer. I arbeidet med hvilke geometriske begreper som er viktige, og hvordan forståelse elevene viser for disse gjennom oppgavene har jeg basert meg på Tall og Vinner (1981) og Vinner (1991) teorier om begrepsbilde og begrepsdefinisjon.

1.3 Teorigrunnlag

Datamaterialet har blitt analysert med van Hiele-nivåene som grunnlag. Van Hiele har gjennom analyser kommet frem til fem forskjellige nivåer for geometriske tenkning (Van Hiele, 1959/1984). Jeg har valgt å bruke Van Hiele (1959/1984) sin redegjørelse for nivåene, med supplering fra Hoffer (1981) og Burger og Shaughnessy (1986) sine tolkninger av de fem nivåene, visualisering, analyse, abstraksjon, deduksjon og rigor. Nivåene vil bli grundigere beskrevet i kapittel 2.

Gyldigheten til van Hiele-nivåene har blitt undersøkt av flere matematikkdidaktikere. Burger og Shaughnessy (1986) har undersøkt om nivåene kan brukes i å beskrive elevers tankeprosesser om geometrioppgaver, mens Lehrer et al. (1998) har undersøkt tilstrekkeligheten til van Hiele-modellen som en beskrivelse av progresjonen i elevers tenking. I begge studiene har det blitt brukt oppgaver som fører til at elevene må reflektere og tenke høyt om figurenes egenskaper og klassifiseringer. Hoffer (1981) har undersøkt fem grunnleggende ferdigheter han mener burde være til stede i geometriundervisning. Ferdighetene gjør seg gjeldene i alle van Hiele sine nivåer og er beskrevet i hvert nivå (Hoffer, 1981).

1.4 Metode

For min oppgave har jeg valgt en kvalitativ studie for å kunne gå i dybden av elevens forståelse og holde meg innenfor størrelsen et masterprosjekt skal ha. For å nærme meg svaret på mitt forskningsspørsmål har jeg intervjuet to elever på 8. trinn. Oppgavene elevene løste under intervjuet la opp til utforskning av begrepet firkant. Oppgavene er utarbeidet med inspirasjon fra Van de Walle, Karp, og Bay-Williams (2014), Burger og Shaughnessy (1986), Lehrer et al. (1998) og van Hiele-nivåene. Det ble tatt videoopptak av intervjuene for at jeg i ettertid kunne se hva elevene pekte på i enkelte oppgaver, og hvilke konkreter de brukte i en av oppgavene. Det ble også tatt lydopptak for å sikre meg et godt lydmateriale. Mine analyser i denne oppgaven er gjort med bakgrunn i mine observasjoner av datamaterialet. De metodiske valgene som har blitt tatt, vil bli bragt opp og drøftet i kapittel 3 som handler om metode.

1.5 Oppbygning av oppgaven

Oppgaven består av seks hovedkapitler; innledning, teori, metode, analyse av oppgavene, analysen av datamaterialet og drøfting og konklusjon. Teorikapitlet består av et delkapittel som tar for seg van Hiele sine fem nivåer innenfor geometri og Hoffer (1981) sine beskrivelser av geometriske ferdigheter. Det andre delkapittelet tar for seg Lehrer et al. (1998) kategorier for resonnementer. Det tredje delkapittelet tar for seg teori om begrep, hovedfokuset er på begrepsbilde og begrepsdefinisjon, men Fischbeins (1993) figurale begrep vil også bli redegjort for. Til slutt vil teorikapittelet bestå av en del der jeg redegjør for matematiske begreper som er viktige for denne oppgaven.

Metodekapittelet presentere hva kvalitativ forskning er. Jeg har gått nærmere inn på intervju som datainnsamlingsmetode, og hvordan jeg har brukt intervju i denne studien. I dette kapittelet har jeg redegjort for min prosess med denne oppgaven, og hvilke valg jeg har tatt underveis. Jeg har også drøftet oppgavens metodiske svakheter, etiske dilemmaer og gyldighet.

I kapittel 4 er oppgavene som blir brukt i analysen presentert. Kapittelet redegjør for mine matematiske og didaktiske analyser av oppgavene.

Analysekapittelet består av to hoveddeler. I den første presenterer jeg mitt analysearbeid for det første underspørsmålet om elevenes resonnement. I den andre hoveddelen er analysearbeidet gjort om begreper blitt presentert.

I det siste kapittelet diskuterer jeg hovedspørsmålet mitt med bakgrunn i resultatene fra analysen. Deretter har jeg sett på elevenes videre arbeid med geometri, hvordan de kan utvikle seg videre, og hva som venter dem i form av kompetansemål fra kunnskapsløfte og læreboken de bruker. Som en avslutning har jeg drøftet hvordan mine resultater har betydning for meg som fremtidig lærer.

2. Teori

Dette kapittelet vil teorien som ligger til grunnlag for mine analyser og drøftinger bli redegjort for. Ut i fra min problemstilling vil jeg først forklare hva som ligger til grunn for forståelse i geometri. Så vil jeg redegjøre for van Hiele-nivåene og hvilke definisjoner jeg har valgt å bruke videre i oppgaven. Deretter går jeg nøyere inn på hva et resonnement og begrep vil si med tanke på underspørsmålene jeg har stilt. Til slutt vil jeg gå nærmere inn på matematiske begreper som er viktig for oppgaven.

2.1 Geometrisk forståelse og ferdigheter

Van Hiele (1959/1984) mener at å forstå matematikk er å kjenne sammenhenger mellom teoremer. Man kjenner sammenhengen mellom teoremene når man forstår meningen med disse teoremene. Et eksempel som Van Hiele (1959/1984) gir er en lærer som vil undervise symmetri til en rett linje til sine elever. Læreren bruker da sammenhengene mellom linjer, vinkler og normal. For å undersøke om elevene har forstått det læreren har undervist gir læreren elevene en oppgave. Læreren har sett for seg hvordan denne oppgaven kan løses, all den resonneringen har læreren gjort med alle de sammenhengende som læreren kjenner til. Læreren har brukt argumenter som det kan hende eleven ikke kjenner til. For det kan hende elevene ikke kjenner til de samme sammenhengende, fordi eleven ikke har sett mot-eksempelet. Læreren kan ha vist dette, men eleven kan ha mislykkes fordi eleven ikke har et system av relasjoner. Ofte lærer elevene seg et ferdiglaget system av relasjoner, men ikke kunnskapen om å lage slike systemer på egenhånd av læreren. Siden læreren allerede kan teoremene og deres relasjoner, blir lærerens forklaringer uforståelig for elevene. Lærer og elev snakker forskjellige språk, eller de tenker på forskjellige nivåer (Van Hiele, 1959/1984).

Hoffer (1981) vektlegger fem grunnleggende ferdigheter innenfor geometri: visuelle, verbale, tegning, logiske og praktiske ferdigheter. Hoffer (1981) mener det er viktig at elevene får erfaringer med alle disse ferdighetene gjennom undervisningen, siden disse ferdighetene kan utvikle en forståelse og kunnskap man ikke kan tilegne seg ved bare å arbeide med geometriske bevis (Hoffer, 1981).

Elever som får arbeide med sine visuelle ferdigheter får vurdert begreper på nytt, får tenkt på egenskapene til figurene, og undersøkt hvordan figurene relaterer seg til hverandre. En oppgave som utfordrer elevenes visuelle ferdigheter kan være å finne tverrsnittet i en trekantpyramide som danner et rektangel (Hoffer, 1981). Elever kan ofte si at de forstår geometrien, men klarer ikke å formulere det verbalt. Elevens verbale ferdigheter er da ennå ikke utviklet. For å utvikle de verbale ferdighetene mener Hoffer (1981) at man må gi elevene muligheten til å beskrive matematiske relasjoner på egenhånd og gjenkjenne mangelfulle presiseringer i sine forklaringer. Hoffer (1981) har den oppfatningen at mange elever får mer bruk får å kunne tegne en geometrisk situasjon enn å bevise den senere i livet. Tegning innenfor geometri kan hjelpe elevene til å analysere figurer, bruke egenskapene og enklere lære seg geometriske sammenhenger senere. For eksempel kan konstruksjon med passer og linjal hjelpe elevene til å forstå egenskapene til figurene bedre (Hoffer, 1981). Ved å utvikle de logiske ferdighetene til elevene, lærer de å analysere argumenter, og gjenkjenne gode og dårlige argumenter innenfor konseptet geometri og dagliglivet. Et eksempel på en oppgave som kan bidra til utviklingen av logiske ferdigheter er å la elevene få en figur med noen gitte opplysninger, så spørre om elevene har nok informasjon til å finne ut arealet og lignende til figuren (Hoffer, 1981). Praktiske ferdigheter knytter Hoffer (1981) til modellering, som betyr at man beskriver fenomener matematisk. Ved å analysere modeller matematisk kan man ofte få frem informasjon om fenomenet man undersøker. Modeller er noe som brukes i mange fagfelt, så ved å bruke mer tid på å utvikle elevene sine ferdigheter for modellering, kan elevene få brukt sine geometriske kunnskaper praktisk (Hoffer, 1981).

2.1.1 Van Hiele-nivåene

Pierre og Dina van Hiele mener at forståelsen av geometri er utviklet gjennom nivåer (Clements & Battista, 1992). For disse nivåene (som blir gjennomgått senere) er det noen karakterer som er gjeldende i følge Van Hiele (1959/1984):

a. Noe som kan virke vesentlig på et nivå, kan være uvesentlig på et annet. For eksempel på første nivå er ikke elevene bevisste på alle egenskapene til figurene.
b. Hvert nivå har sine egne symboler, og et eget system av sammenhenger mellom symbolene. En relasjon som er gjeldende på et nivå kan vise seg å være ukorrekt på et annet.

c. To mennesker som er på forskjellige nivåer har vanskeligheter for å forstå hverandre, siden det er vanskelig å forstå den andre personen sin tankeprosess. I klasserommet må læreren prøve å se for seg elevenes tankeprosess og respondere på den.
d. Utviklingen som fører til et høyere nivå skjer på en spesiell måte og læringen må være tilpasset så den hjelper eleven effektivt (Van Hiele, 1959/1984).

Originalt er nivåene blitt presentert som nivå 0 til 4, blant annet i *«The child's thought and geometry»* av Van Hiele (1959/1984). Senere forskning, blant annet av Clements, Swaminathan, Hannibal, og Sarama (1999), foreslår et pre-nivå før det første nivået. Dette på bakgrunn av at undersøkelser som er gjort viser at yngre elever er i stand til å identifisere et fåtall vanlige former, men kan ikke skille mellom figurer i samme klasse (Clements et al., 1999). Derfor er det flere som nummererer nivåene fra 1 til 5, blant annet Battista (2007) og Hoffer (1981). Denne oppgaven tar utgangspunkt i Van Hiele (1959/1984) sin redegjørelse for nivåene fra 0 til 4, med supplering fra Hoffer (1981) og Burger og Shaughnessy (1986) sine tolkninger av nivåene.

Nivå 0, visualisering. Elevene dømmer figurer etter figuren sitt utseende. De kan resonnere om grunnleggende geometriske begreper, slik som enkle former som for eksempel et rektangel. Eleven vil kjenne igjen et bilde av et rektangel, men vil ikke ha kjennskap til alle egenskapene til rektangelet.

Nivå 1, analyse. Figurer er nå bærere av sine egenskaper. Det vil si at eleven kan analysere egenskapene til figurene, og gjenkjenne figurer gjennom deres egenskaper. Egenskapene er derimot ikke systematisert, og sammenhengen mellom figurene er ikke lagt merke til.

Nivå 2, abstraksjon. Egenskapene til figurene er blitt systematisert. Det betyr at eleven kan ordne figurer logisk og forstår sammenhengen mellom figurer, samt forstår viktigheten av nøyaktige definisjoner. På dette nivået er det definisjonen som er gjeldene.

Nivå 3, deduksjon. Eleven resonnerer formelt innenfor rammen av et matematisk system. Eleven forstår rollen til og det å ta i bruk postulater, teoremer og bevis.

Nivå 4, rigor. Dette nivået er det mest avanserte, og elever i grunnskolen og videregående når sjeldent dette nivået. På dette nivået kan eleven sammenligne systemer basert på forskjellige aksiomer, og kan studere ulike geometrier i fravær av modeller.

2.1.2 Mellomnivåer

Borrow[1] og Battista har utviklet mellomnivåer for van Hiele-nivåene. Mellomnivåene fokuserer på utviklingen av tenking basert på egenskaper og utviklingen av slutninger om egenskaper. Det vil bli bare bli redegjort for nivå 0-2 (1-3 i Battista (2007)) for det er det som er aktuelt for denne studien:

0. Eleven identifiserer, beskriver og resonnerer om figurer i henhold til figurenes fremstilling som visuelle helheter.
   - 0.1. Før-gjenkjennelse: Eleven kan ikke identifisere så mange vanlige figurer.
   - 0.2. Gjenkjennelse: Eleven identifiserer mange vanlige figurer korrekt.
1. Eleven prøver eksplisitt å danne seg et begrep og spesifisere figurer ved å beskrive deler og spatiale sammenhenger mellom delene.
   - 1.1. Visuell-uformell: Eleven beskriver delene og egenskapene til en figur uformelt og upresist. Bruker et uformelt språk basert på sine hverdagserfaringer.
   - 1.2. Uformell og utilstrekkelig: Eleven begynner å tilegne seg formelle konsepter som kan bli brukt til å beskrive spatiale sammenhenger mellom deler av en figur. Bruker en blanding av uformelle og formelle beskrivelser av figurer.
   - 1.3. Formell og tilstrekkelig: Elevene eksplisitt bruker formelle geometriske begreper for å beskrive figurer med tilstrekkelige egenskaper. Bruker ikke en minimal definisjon.
2. Eleven eksplisitt samordner og lager slutninger om geometriske egenskaper, organiserer sett med egenskaper logisk og spesifiserer figurer uten å nevne alle egenskapene.
   - 2.1. Empiriske relasjoner: Bruker empiriske bevis til å konkludere om en figur som har en egenskap, har en annen egenskap.
   - 2.2. Analyse basert på komponenter: Eleven vet at når en egenskap inntreffer, inntreffer også en annen.
   - 2.3. Logisk slutning: Eleven lager logiske slutninger om egenskaper, de operer mentalt og ikke lenger visuelt. Selv om elevene bruker logikk, stiller de seg ikke kritisk til sitt utgangspunkt.
   - 2.4. Hierarkisk klassifisering: Elevene bruker logiske argument for å forsvare deres hierarkiske klassifiseringer av figurene (Battista, 2007).

[1] I Battista (2007) er denne kilden angitt slik: Borrow, C. (2000) *An investigation of the development of 6th grade students' geometric reasoning and conceptualizations of geometric polygons in a computer microworld.* Unpublished doctoral dissertation, Kent State University. Jeg kunne derfor ikke finne orginalkilden.

2.1.3 Nivåenes gyldighet

Burger og Shaughnessy (1986) oppdaget tre punkter i sine undersøkelser av nivåene som man må være klar over i undersøkelser med nivåene. Det første var at nivåene er strukturert komplekse, og inneholder både konsepter og resonneringsprosesser aktuelt for mange oppgavemiljøer. Det andre punktet var at selv om van Hiele har strukturert nivåene slik at de er diskrete, hadde Burger og Shaughnessy (1986) vanskeligheter med å velge mellom nivåer på enkelte elever. Det tredje punktet var at noen elever kunne befinne seg på forskjellige nivåer på forskjellige oppgaver. Dette kom tydelig frem for elever som lå mellom nivå 1 og 2. Burger og Shaughnessy (1986) kom i sine undersøkelser også frem til at nivåene var brukbare til å beskrive elevers tankeprosesser i løsningen av geometrioppgaver.

Battista (2007) stiller spørsmålet hvorfor teoriene til van Hiele har en så sterk validitet, når flere forskere etterlyser mer detaljerte nivåer? Battista (2007) foreslår at validiteten kommer av at nivåene beskriver en progresjon innenfor tenking som er en del av, og et bidrag til matematisk tenking. Man kan tenke på nivåene som en progresjon gjennom fire faser: «perceptualization» som har med sansning å gjøre, resulterer i uformelle, intuitive, overfladiske kategorier og resonneringer. «Conceptualization» som handler om å danne seg en forestilling, resulterer i eksplisitte konsepter og analyser. «Organization» som resulterer i konseptuell organisering. Til slutt «axiomatization» som resulterer i formelle, logiske bearbeidelser. Å bevege seg gjennom disse fire fasene virker for matematikkdidaktiske forskere som en naturligprogresjon, fra intuitiv hverdagsresonnering til formell resonnering (Battista, 2007).

2.1.4 Hvilke ferdigheter kreves?

Hoffer (1981) har laget en tabell som gir beskrivelse av ferdighetene man kan forvente seg av elever på forskjellige nivåer. Her er kun nivå 0-2 tatt med, siden det er disse nivåene som gjør seg gjeldene for dette masterprosjektet.

Ferdighet\Nivå	Visualiserende	Analyserende	Abstraksjon
Visuell	Gjenkjenne forskjellige figurer fra et bilde. Gjenkjenne informasjon gitt en figur.	Legger merke til egenskapene til en figur. Identifiserer en figur som en del av en større figur.	Gjenkjenner innbyrdes sammenhengen mellom forskjellige typer figurer. Gjenkjenner vanlige egenskaper til forskjellige typer figurer.
Verbal	Assosierer riktig navn til en gitt figur. Tolker setninger som beskriver en figur.	Beskriver egenskapene til en figur presist og varierende.	Definerer begrep presist og kortfattet. Formulerer setninger som viser innbyrdes sammenheng mellom figurer.
Tegne	Lager sketsjer av figurer med nøyaktig merking på gitt informasjon.	Oversetter gitt verbal informasjon til et bilde. Bruker gitte egenskaper til en figur for å tegne eller konstruere figurer.	Gitt bestemt figur, kan konstruere andre figurer som er relatert til den gitte.
Logisk	Oppdager at det er forskjeller og likheter mellom figurer. Forstår at man bevarer egenskapene til figuren i ulike posisjoner.	Forstår at figurer kan bli klassifisert som forskjellige typer. Oppdager at egenskaper kan brukes til å atskille figurer.	Forstår kvaliteten i en god definisjon. Bruker egenskapene til en figur for å bestemme om en gruppe figurer er en del av en annen gruppe.
Praktisk	Identifiserer geometriske former i fysiske objekter.	Oppdager geometriske egenskapene til et fysisk objekt. Representerer fysiske fenomen som en modell på papiret.	Forstår konseptet av en matematisk modell som representerer sammenhengen mellom objekter.

Tabell 2.1 Oversatt fra Hoffer (1981).

2.2 Resonnement

Resonneringer kan gi forskere et innblikk i tankene til elevene. Man får muligheten til å se hvordan elevene representerer bilder og bearbeider figural informasjon. Elevers resonnering gir også grunnlag for hvordan lærere kan undervise i geometri (Lehrer et al., 1998).

I sine undersøkelser har Lehrer et al. (1998) funnet åtte kategorier om resonneringen rundt geometriske figurer. Undersøkelsene gikk ut på at elevene skulle gruppere og sammenligne figurer. Kategoriene er *likheter, størrelser, vinkel, retning, omforming, telling, egenskaper* og *klasse*. *Likhet* går ut på at figurene ligner på et annet objekt. Den kan ligne på en prototype av figuren, at den for eksempel er kvadratisk. Den kan ligne på ekte objekter, rektangler kan for eksempel ligne på en dør. Hvis elevene fokuserer på størrelsen til figuren, figuren kan være tynn, tykk, liten, stor eller lang, er det innunder kategorien *størrelse*. Kategorien *vinkel* går ut på at elevene bruker vinklene i sine resonnementer, de kan beskrive vinklene som stumpe, spisse, rette. Kategorien *vinkel* blir brukt på en slik måte at det ikke er en avgjørende egenskap for klassifisering av figuren. *Retning* går ut på rotasjonen til figuren. Retning kan beskrives i form av horisontal, vertikal, på siden eller «feil vei». *Omforming* er en metode der eleven forestiller seg at en figur kontinuerlig blir endret over til en annen figur. Eleven kan si at man kan rette ut en vinkel, eller dytte figuren ned og lage den om til noe annet. Et eksempel fra Lehrer et al. (1998) sin forsking er en elev som mente at firkanten med en vinkel som er større enn 180° (se oppgave 4, deloppgave 2) var mest lik trekanten fordi: «if you pull the bottom [of the chevron] down, you can make it into this [the triangle]» (Lehrer et al., 1998, s. 142). *Telling* går ut på at elevene teller antall sider eller vinkler og bruker det som et resonnement. Eksempler kan være at figurene har fire sider, eller figuren har tre kanter. Disse seks kategoriene er det Lehrer et al. (1998) kaller visuelle og elever som bare bruker disse befinner seg på nivå 0 av van Hiele-nivåene.

Elever som tar i bruk viktige egenskaper som er betydelige for figuren, er et resonnement innenfor kategorien *egenskaper* er på et høyere nivå. Viktige egenskaper kan være at figurene er mest like fordi begge har fire rette vinkler, eller figurene har begge to parallelle linjer. Elevene som konsekvent brukte *klasse,* for eksempel trekant, rektangel, kvadrat, som resonnement befinner seg på nivå 2 av van Hiele-nivåene (Lehrer et al., 1998). Det vil si at elevene mener figurene er mest like på bakgrunn av at de begge er for eksempel rektangler.

2.3 Begreper

2.3.1 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

I følge Vinner (1991) er et begrepsbilde (concept image) noe ikke-verbalt som man assosierer til begrepsnavnet. Når man ser eller hører et begrep vekkes noe i minnet til mennesker. Som regel er ikke dette «noe» en definisjon, men et bilde. Begrepsbildet kan være visuelle representasjoner, inntrykk eller erfaringer (Vinner, 1991). For eksempel i møte med begrepet «kvadrat» er ikke definisjonen på et kvadrat alltid det første som dukker opp i minnet. Man kan se for seg en figur som har hvitt innhold og svarte streker. Figuren har like lange sider og 90° vinkler, altså en visuell representasjon. Man kan også se for seg en lærer som viser frem bordplaten på en pult, og forklarer at den har en kvadratisk form fordi sidene er like lange, som en erfaring personen har opplevd.

Når en person møter nye situasjoner og hendelser som gjør at begrepsbildet endres, mener Tall og Vinner (1981) at begrepsbildet ikke trenger å utvikle seg logisk eller følgeriktig. Derfor kan et begrepsbilde bestå av motstridene aspekter som er erfart i forskjellige kontekster (Tall & Vinner, 1981). I møte med forskjellige kontekster bruker man forskjellige aspekter ved begrepsbildet. Vinner (1991) kaller den delen av minnet som tas i bruk i en gitt kontekst, vekket begrepsbilde (evoked concept image). Så på forskjellige tider kan forskjellige bilder som er i konflikt være vekket. Når motstridene bilder er vekket samtidig blir det en konflikt eller forvirring (Tall & Vinner, 1981).

I følge Tall og Vinner (1981) er en begrepsdefinisjon ord som spesifiserer et begrep. Begrepsdefinisjonen til et begrep kan være en del av begrepsbildet, men trenger ikke være relatert til begrepsbildet i det hele tatt (Tall & Vinner, 1981). Begrepsdefinisjonen kan være det som blir presentert først ved et begrep, for eksempel gjennom en lærerbok eller i en undervisningssituasjon, definisjonen er i slike tilfeller med på å skape et begrepsbilde. Når begrepsbildet er dannet kan definisjonen bli overflødig, derfor kan den ikke bli brukt eller helt glemt i møte med begrepet i senere tid. Dette kalles begrepsformatering, definisjonen er en slags skisse. Når bildet er skapt, blir skissen glemt (Vinner, 1991).

2.3.2 Elevers bruk av begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Vinner (1991) presenterer den kognitive strukturen med denne representasjonen:

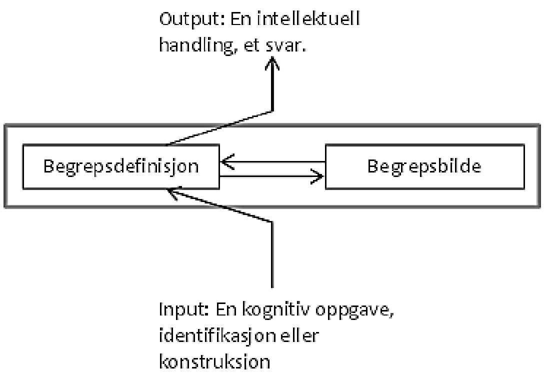
Figur 2.1 Hentet fra Vinner (1991)

For et begrep kan begge cellene (firkantene som representerer begrepsdefinisjon og begrepsbilde) være tomme eller bare en av cellene ha et innhold. Det kan være en interaksjon mellom de to cellene, men de kan også være formet helt individuelt. Hvis man har et begrepsbilde av et begrep, og senere lærer definisjonen er det tre scenarier som kan skje:

1. Begrepsbildet blir endret og inkluderer definisjonen.

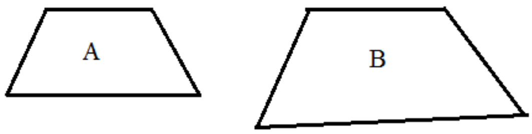
2. Begrepsbildet forblir slik det er. Begrepsdefinisjonen vil inneholde den lærte definisjonen, men den vil bli glemt eller forvridd etter kort tid. Senere møte med begrepet vil fremkalle begrepsbildet.
3. Begge celler forblir slik de er. På et tidspunkt der det blir spurt om å definere begrepet vil personen gjenta den lærte definisjonen, men i alle andre situasjoner vil personen tenke på sitt begrepsbilde.

En annen prosess er hvis man lærer begrepsdefinisjonen først. I slike tilfeller vil begrepsbildet være tomt i begynnelsen, men ved forklaringer, eksempler og inntrykk bli fylt opp. Det er da et samspill mellom begrepsbildet og definisjonen. Vinner (1991) mener at i mange undervisningssituasjoner forventes det en automatikk i at begrepsbildet blir formet etter begrepsdefinisjonen noe som ikke alltid er tilfelle, slik som i noen av scenariene ovenfor. En annen forventing Vinner (1991) mener lærere har, er at når elevene skal løse en oppgave, er det begrepsdefinisjonen som blir aktivert, men for veldig mange elever er det ikke slik. For noen kan det skje et samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde, men for andre er det bare begrepsbildet som blir aktivert. De forskjellige alternativene til utfall kan representeres slik:



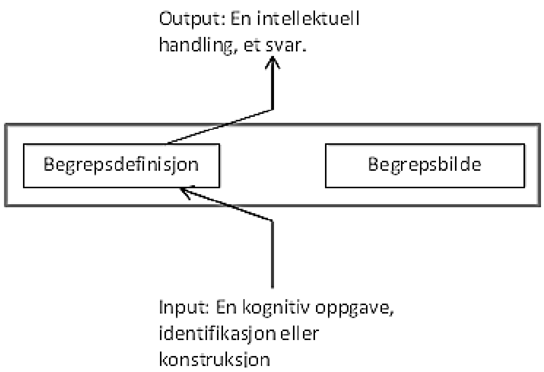
Figur 2.2 Her er det samspill mellom definisjon og begrepsbilde (Vinner, 1991)

Figur 2.2 kan illustrere en elev som har fått en oppgave som skal løses. For å løse oppgaven må eleven ta i bruk et begrep. Eleven minnes begrepsdefinisjonen, men ikke bare den. Eleven har et samspill med begrepsbildet og tar i bruk begge deler av minnet før eleven former et svar (Vinner, 1991). For eksempel kan en elev få en oppgave der eleven skal bestemme hvilke av to firkanter som er trapeser, der de to firkantene ser slik ut:



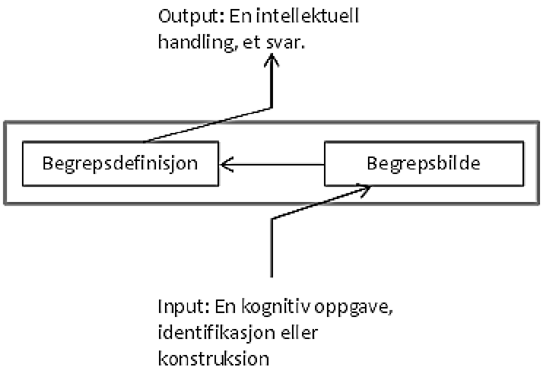
Figur 2.3 eksempeloppgave, firkant A og B

Begrepsdefinisjonen eleven kan ha lært er at et trapes er en firkant med to parallelle sider. Begrepsbildet til eleven kan være at et trapes består av et kortere og et lengre linjestykke som går tilnærmet horisontalt, der linjestykkene i mellom går på skrå ned fra det korte linjestykket til det lange linjestykket. Hvis eleven sin tankeprosess foregår slik som figur 2.2 illustrer, kommer samspillet mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde frem til at firkant A er et trapes. Eleven kan i tillegg utvikle sitt begrepsbilde til at den øverste og nederste siden i firkanten er parallelle.



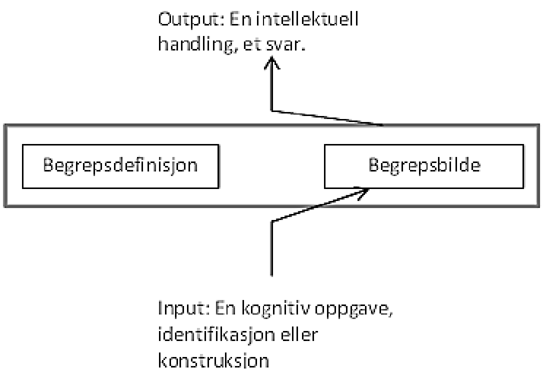
Figur 2.4 Her er det bare begrepsdefinisjonen som er aktivert (Vinner, 1991)

I figur 2.4 har også eleven fått en oppgave og minnes begrepsdefinisjonen. I figur 2. 2 var det et samspill, mens her i figur 2.4 blir bare begrepsdefinisjonen til eleven aktivert. Siden det individuelle begrepsbildet ikke blir aktivert er det ingen garanti for at eleven har en forståelse for sitt svar (Vinner, 1991). Et eksempel kan være eleven som skal bestemme hvilke firkanter som er trapes av firkantene vist i figur 2.3, slik som beskrevet tidligere. I tilfellet med figur 2.4 vil eleven svare firkant A for den er den eneste av de to firkantene med parallelle sider slik som begrepsdefinisjonen sier.



Figur 2.5 Her blir først begrepsbildet aktivert før man følger opp med begrepsdefinisjon (Vinner, 1991)

I figur 2.5 er det først begrepsbildet som blir aktivert hos eleven, men eleven aktiverer også begrepsdefinisjonen før det blir avgitt et svar. På en slik måte får eleven testet ut om begrepsbildet stemmer med begrepsdefinisjonen (Vinner, 1991). Ut i fra figur 2. 5 kunne eleven, som skal bestemme hvilke firkanter som er trapes, først tenkt at begge firkantene er trapeser, siden begge firkantene passer med elevens begrepsbilde. Eleven tester så sitt svar med begrepsdefinisjonen, som utelukker firkant B som et trapes.



Figur 2.6 Her er det bare begrepsbildet som blir aktivert (Vinner, 1991)

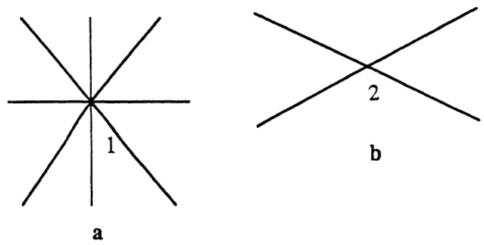
I tilfellet som figur 2.6 representerer er det bare begrepsbildet som blir aktivert før eleven avgir et svar. Begrepsbildet kan inneholde aspekter som ikke er korrekte, derfor kan eleven avgi et galt svar (Vinner, 1991). I tilfellet som er illustrert i figur 2.6 vil eleven i det tidligere eksempelet med sitt begrepsbilde svare at begge firkanter er trapes, siden begge firkantene har kjennetegnene eleven identifiserer med et trapes.

2.3.3 Figurale begrep

I følge Fischbein (1993) blir det i kognitive teorier to ulike kategorier av menneskets mentale realitet, mentale bilder og begrep. Et mentalt bilde er en representasjon som omhandler sanseinntrykket av et objekt eller fenomen. Mens et begrep uttrykker en idé, noe generelt og en representasjon av en klasse objekter basert på deres felles egenskaper. Geometriske objekter eller figurer passer ikke inn i en av disse beskrivelsene. Geometriske objekter kan bli beskrevet som om de har egenskapene til et «begrep». Samtidig mener Fischbein (1993) at det besitter egenskaper som et «begrep» ikke har. Geometriske objekter inkluderer også mentale representasjoner av romlige egenskaper. «Begreper» endrer seg ikke, beveger seg ikke, og mentale bilder besitter ikke perfeksjonen, generaliseringen, det abstrakte og renheten som er påkrevd under en utregning.

Fischbein (1993) presenterer derfor et mentalt fenomen for objektet man undersøker og manipulerer i geometrisk resonnering, figurale begrep (figural concept). Figurale begreper reflekterer spatiale egenskaper, som på samme tid besitter begrepsmessige kvaliteter. Et eksempel er når man ser for seg en sirkel, man kan se for seg en tegnet sirkel inkludert fargen på blekket og mer, ikke den ideelle, perfekte sirkelen. Når man skal resonnere matematisk bruker man den matematiske sirkelen. Den matematiske sirkelen har ingen farge, er ikke noe materie eller noe masse, den er perfekt. Den matematiske sirkelen har alle egenskapene til et «begrep», og kan opptre som et «begrep» i noen sammenhenger, men sirkelen inkluderer også representasjoner for spatiale egenskaper (Fischbein, 1993).

I utviklingen av et figuralt begrep kan det oppstå konflikt gjennom at de to systemene, den figurale og den begrepsmessige, ikke har blandet seg til et figuralt begrep. Det vil si at i en situasjon kan eleven ta i bruk det figurale begrepet, mens i en annen situasjon kan effekten av bildet, eller den figurale fremstillingen, ta overhånd over den begrepsmessige begrensningen. Dette viser kompleksiteten i sammenhengen mellom det figurale og det begrepsmessige i organiseringen av et figuralt begrep, og organiseringen av elevenes tankegang sin skjørhet (Fischbein, 1993). Et eksempel på denne konflikten hentet fra Fischbein (1993) er en elev som mener at et punkt har ingen dimensjoner, og derfor er ingen punkter større eller tyngre enn andre punkter. I møte med en annen oppgave ser eleven annerledes på det: «I figur a møtes fire linjer i punkt 1. I figur b møtes to linjer i punkt 2. Sammenlign de to punktene. Er punktene forskjellige? Er et av punktene større? Hvis ja, hvilket punkt? Er en av dem tyngre? Hvis ja, hvilket punkt Har de to punktene samme størrelse?»

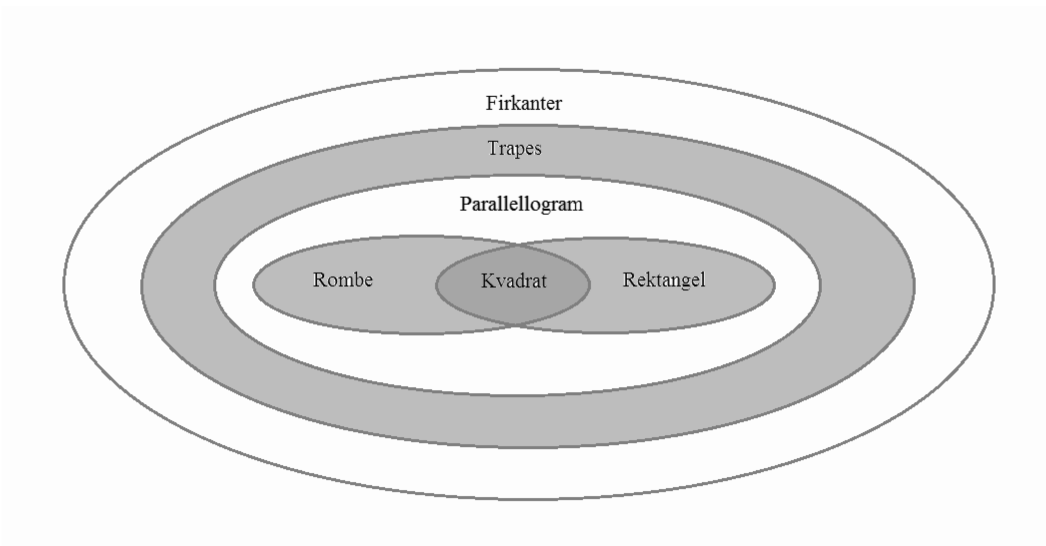


Figur 2.7 Fischbein (1993)

Her blir den figurale effekten for stor for eleven. Eleven uttaler: «Point one is bigger because more lines intersect. Point 2 is smaller because less lines intersect. The point have the same weight" (Fischbein, 1993, s. 147). I en sammenheng mener eleven at et punkt ikke har noen dimensjoner, men i en annen situasjon tar illustrasjonen overhånd og eleven mener det motsatte.

2.4 Firkanter

Figur 2.8 viser relasjonene mellom forskjellige klasser med firkanter. Ut i fra figur 2.8 vil jeg gi uformelle definisjoner av de forskjellige firkantene som er aktuelle for denne studien. Det finnes mange ekvivalente definisjoner for disse typene firkantene. Jeg har valgt å fokusere på parallelle linjer, sider og vinkler. Valget av definisjoner er tatt med tanke på hvilke definisjoner jeg forventet elevene hadde blitt introdusert for, og hvilke som derfor kunne dukke opp i samtalen med elevene.



Figur 2.8 Inspirert av figur i Van de Walle et al. (2014, s. 436)

Helt ytterst i figur 2.8 har man det som omfavner alle firkanter. Firkanter er lukkete todimensjonale geometriske figurer som består av fire rette linjestykker som møtes i endepunktene. Innenfor firkanter finnes det forskjellige klasser, fler enn det som er illustrert i figur 2.8. I figur 2.8 er ikke klasser uten noen parallelle sider, for eksempel drage, blitt tatt med eksplisitt, men de er en del av klassen firkanter. Figur 2.8 illustrerer at innenfor firkanter har man underklassen trapes. Det som er spesielt for trapeser er at trapeset har to sider som er parallelle. Hvis man ikke skal bruke en minimal definisjon kan man si at trapeset har *minst* to sider som er parallelle, for et parallellogram som er et spesielt tilfelle av et trapes der to og to sider er parallelle. Videre har man spesialtilfeller av trapeser og parallellogrammer, nemlig rombe og rektangel. I en rombe er alle sidene like lange og i et rektangel er alle vinklene 90°. Sammensetningen av egenskapene til rombe og rektangel skaper spesialtilfellet kvadrat, der alle sidene er like lange og vinklene er 90°.

3. Metode

Forskningsspørsmålet for dette prosjektet er: *Hva slags forståelse har to elever på 8. trinn for begrepet firkant?* Med underspørsmålene: 2. *Hvilken type resonnementer bruker elevene i møte med oppgaver som legger opp til utforskning av begrepet firkant? 1. Hvilke begreper er viktig for elevene i møte med oppgaver som legger opp til utforskning av begrepet firkant, og hvordan forståelse har elevene for disse begrepene?*

I dette kapittelet skal jeg redegjøre for hvordan jeg metodisk har arbeidet for å få svar på mine spørsmål. Ved at et forskningsarbeid er transparent eller gjennomsiktig klarer man å nå målet om at leseren skal få et godt innblikk i forskningen. Ved å få et godt innblikk kan leseren ta stilling til forskerens troverdighet (Tjora, 2010). Derfor vil jeg først redegjøre for hvorfor jeg har valgt en kvalitativ studie. Så kommer en beskrivelse av min datainnsamling som vektlegger bruken av intervju. Deretter kommer en redegjørelse av min analyse. Kapittelet avsluttes med etiske forholdsregler og metodekritikk.

3.1 Metodeteori

3.1.1 Kvalitative studier

Innenfor samfunnsforskningen skiller man mellom kvantitative og kvalitative studier som to ytterpunkter (Tjora, 2010). Bogdan og Biklen (2007) beskriver kvalitative undersøkelser igjennom fem karakteristikker: naturalistisk, beskrivende data, prosessen er viktig, induktiv, og mening. Alle disse må ikke være tilstede i en kvalitativ undersøkelse, derfor kommer jeg til å redegjøre for de to som er mest gjeldene for min forskning. En kvalitativ undersøkelse vil inneholde beskrivende data, det vil si at materialet ofte består av tekst og bilder istedenfor bare tallmateriale (Bogdan & Biklen, 2007). Dette er gjeldende i min studie ved at analysen er av transkripsjoner gjort av et videoopptak, der transkripsjonene er detaljerte og beskriver situasjonene. Prosessen i kvalitativ forskning er viktig fordi forskeren er mer opptatt av hva som skjer enn utfallet eller produktet (Bogdan & Biklen, 2007). I min forskning skal jeg se på hvordan elevene løser oppgavene og resonnementene og begrepene de bruker for å løse dem. Jeg er ikke opptatt av om resonnementene eller begrepsbruken til elevene er direkte feil eller riktig, men metodene de bruker. Dette samsvarer med at Tjora (2010) trekker frem at kvalitativ forskning legger vekt på forståelse istedenfor forklaring. Denne studien kan også kalles en småskalastudie. En slik studie kan være tilstrekkelig for forskere som ikke har et behov for å generalisere deres funn, og et slik studie inneholder ofte et nøye utvalgt forskningsobjekt (Cohen, Manion, & Morrison, 2013).

3.2 Datainnsamling

3.2.1 Valg av skole, klasse og elever.

Jeg valgte å arbeide med 8. trinns elever fordi elevene etter 7. trinn skulle ha nådd bestemte kompetansemål i Kunnskapsløftet, noe som gjorde datamaterialet sammenlignbart med en norsk standard. Valg av skole og klasse kom som følge av at jeg kjente en lærer som arbeidet som kontaktlærer og matematikklærer på 8. trinn i den aktuelle perioden datainnsamlingen skulle foregå. Siden jeg kjente læreren godt fra før av, var det enkelt og praktisk å opprette et samarbeid. Jeg valgte å intervjue bare to elever for å få en dybde i mitt datamateriale. Lignende studier som er gjort er store og langvarige studier, men for å kunne få den samme dybden innenfor mine tidsrammer var jeg avhengig av å ikke ha for mange deltakere.

Læreren plukket ut to elever hun mente var egnet siden jeg ikke hadde kjennskap til elevene på forhånd. Det ble tatt i bruk det som Cohen et al. (2013) kaller et ikke-sannsynlighets utvalg (non-probability samples) som er vanlig i en småskalastudie. Det vil si at forskeren er innforstått med at utvalget representerer seg selv, og ikke en større gruppe av befolkningen (Cohen et al., 2013). Utvalget ble gjort ut i fra to krav fra meg, det første kravet var at elevene var villige til å delta og det andre var at elevene var snakkesalige. Kriteriene ble satt med tanke på at elevene skulle kunne gi meg et solid datamateriale. Læreren stilte krav til at elevene ikke ble hengende etter faglig på grunn av tapt undervisningstid. Cohen et al. (2013) kaller dette formålstjenlig utvalg (purposive sampling), noe som vil si at utvalget har blitt håndplukket, i dette tilfellet på bakgrunn av noen karakteristikker (Cohen et al., 2013). Før intervjuene fikk jeg vite at elevene var to elever som presterte jevnt godt, og var aktive i undervisningssituasjoner.

3.2.2 Intervjuene

Postholm (2010) skriver at når man samtaler med andre mennesker kan man få et innblikk i den andres tankeverden. Det er ikke alt man kan få greie på med et intervju, men man kan få tak i deler av en persons liv som kan være vanskelig å fange opp på andre måter (Postholm, 2010). Derfor valgte jeg å gjennomføre intervjuer med elever. Intervjuene ble gjennomført på et grupperom i skoletiden. Intervjuene ble filmet, og det ble gjort lydopptak, grunnet usikkerhet rundt kameraets kvaliteter med tanke på lyd.

Intervjuene som ble gjennomført har likhetstrekk med det Tjora (2010) definerer som et fokusert intervju. Innenfor kvalitativ forskning er det normalt med et dybdeintervju, som har som mål å skape en fri samtale. Et fokusert intervju har likhetstrekk med dybdeintervju, men har et sterkt avgrenset tema. I tillegg varer ofte intervjuet kortere enn et typisk dybdeintervju, for når det ikke omhandler følsomme tema kan tillitt opprettes raskt mellom intervjuer og deltaker (Tjora, 2010). Intervjuene med elevene varte omtrent 40 minutter, og inneholdt ikke det som kan defineres som et følsomt tema. Intervjuene var individuelle. Elevene ble kort informert om studiet, oppgavens egenart og mine forventninger.

Tjora (2010) trekker frem at hjelpemidler kan være nyttige i et fokusert intervju. Slike hjelpemidler kan være oppgaver slik som i mitt intervju, der elevene løser oppgaver og de får spørsmål knyttet til hvordan de har løst dem. Intervjuene mine bestod av at elevene løste oppgavene (se vedlegg 2) ved å svare muntlig, eller med tilgjengelige hjelpemidler som ark, konkreter, skrivesaker, linjal, gradskive, og deres eget penal. Det er gjort en analyse av oppgavene i kapittel 4. Elevene fikk på enkelte oppgaver oppfølgingsspørsmål eller beskjed om å utdype hvis nødvendig. Elevene spurte også om bedre forklaring fra meg der det var behov for det. På enkelte oppgaver hadde jeg planlagt oppfølgingsspørsmål. Med slike hjelpemidler skaper man et enda tydeligere tematisk fokus og fremdriften i intervjuet blir mer standardisert og forutsigbart (Tjora, 2010).

3.3 Analysemetode

3.3.1 Datamaterialet

Datamaterialet består av video- og lydopptak og skriftlig materiale som elevene produserte under intervjuene. Video- og lydopptaket er transkribert og er hovedmaterialet for analysene, med det skriftlige materiale som støtte. I transkripsjonen har elevene som ble intervjuet fått de fiktive navnene Mats og Frøya.

3.3.2 Analyseprosessen

Den første bearbeidelsen av materialet var å transkribere de to intervjuene, og så lese gjennom dem. I transkriberingen og gjennomlesningen ble jeg godt kjent med materialet. For å arbeide med det enda mer systematisk så jeg på nytt i kildene oppgavene var hentet fra. Jeg brukte deres koder og analyseverktøy for å sortere materialet med forskjellige koder. Koding er første steg i prosessen som skal fange essensen i materialet (Nilssen, 2012). Nilssen (2012) sier at det å identifisere, kode, klassifisere og sette navn på de viktigste mønstrene i materialet er åpen koding, man bestemmer hva som er signifikant. I denne prosessen ble jeg klar over at jeg måtte justere mitt forskningsspørsmål og danne koder som kunne gjelde for alle mine oppgaver før jeg klarte å bestemme hva som var signifikant.

Lehrer et al. (1998) sine kategorier for resonnement ble mitt nye utgangspunkt for mitt første underspørsmål som handler om resonnement. Kategoriene er *transformering*, *spiss/skrå*, *størrelse, likhet, orientering, antall, egenskaper* og *klasse*. Disse kategoriene ble brukt som koder til å kode materialet mitt enda en gang. I dette arbeidet så jeg at det var tre av seks oppgaver som var mest interessante med tanke på det første underspørsmålet. Jeg hadde kommet frem til hva som var data i forskningsmaterialet mitt, og hva som forstyrret (Nilssen, 2012). I tillegg måtte kodene endres for å passe mitt materiale bedre. Neste fase som Nilssen (2012) beskriver er at man skal se på sammenhengen mellom kodene. Målet for dette er å sitte igjen med noen få kategorier som kan gi svar på forskningsspørsmålet (Nilssen, 2012). Kodene *transformering, spiss/skrå, størrelse, likhet, orientering* og *antall* var koder som opptrådte sjeldent i mitt materiale, derfor ble de kategorien *visuelle kjennetegn*. Koden *egenskaper* ble til kategorien *egenskaper* og koden *klasse* ble til kategorien *klassifisering*. *Visuelle kjennetegn* er når elevene resonnerer på bakgrunn av det de ser. Det de ser kan være egenskaper den geometriske figuren har, men det som kjennetegner kategorien *egenskaper* fra *visuelle kjennetegn* er at det er avgjørende egenskaper for den figurens definisjon. Avgjørende egenskaper kan være at figuren har to sider som er parallelle, eller fire rette vinkler. Et eksempel på kategorien *egenskaper* er hvis eleven arbeider med oppgave 4.3 (se figur 4.3 i delkapittel 4.4) og velger å fokusere på at figur 3a og 3b er mest like fordi de begge har to sider som er parallelle. Elevene tar i bruk kategorien *klassifisering* når de argumenterer med hvilken klasse figuren hører til. For eksempel to firkanter er mest like fordi de begge er trapes. I kapittel 5 vil jeg forklare hvordan elevene tar i bruk kategoriene i sine resonnement.

For å svare på det andre underspørsmålet gikk jeg igjennom datamaterialet og markerte viktige geometriske begreper elevene brukte eller snakket om. Resultatet ble et utvalg med begreper og forklaringer fra datamaterialet og dette utvalget ble det datamaterialet som var signifikant i følge Nilssen (2012). Deretter gikk jeg igjennom disse, og undersøkte hvilke begreper som kunne si noe om elevenes forståelse. I følge Nilssen (2012) hadde jeg etter og ha valgt ut begreper sett på sammenhenger i datamaterialet mitt og som kunne gi svar på spørsmålet jeg hadde stilt. Jeg satt da igjen med noen begreper som ble gjeldene for elevene: kvadrat, rektangel, parallellogram, trapes og parallelle linjer. Neste steg var å samle sammen de delene av datamaterialet som kunne si noe om elevenes forståelse av disse begrepene. For å arbeide med dette datamaterialet tok jeg i bruk Tall og Vinner (1981) og Vinner (1991) sin forskning om begrepsbilde og begrepsdefinisjon for å se på utviklingen og bruken av disse begrepene. Resultatet av dette blir presentert i kapittel 5.

3.4 Etiske forholdsregler og metodekritikk

3.4.1 Etiske forholdsregler

Elevene som ble intervjuet ble først spurt om de ville delta av deres lærer, læreren og jeg så det som en fordel å ha motiverte elever som var frivillig med. Deretter sendte jeg informasjonsskjema (vedlegg 1) til foresatte, som ble levert inn igjen med samtykke før intervjuene. I informasjonsskjemaet fikk foresatte informasjon om video- og lydopptak, om masterprosjektet, om selve intervjuet og anonymisering. Ved at elevene har fått fiktive navn og at stedsnavn, navn på skole og lærer ikke blir nevnt i oppgaven har elevene blitt anonymisert. I forskning er intervjuer en form for en intersubjektiv situasjon der personen som blir intervjuet er mindre viktig enn teksten som produseres. Så et slikt intervju vil derfor ikke bli påvirket av at deltakerne anonymiseres (Tjora, 2010).

Jeg valgte å starte intervjuene med informasjon om hva vi skulle gjøre. På denne måten fikk elevene et bilde av hva jeg forventet av dem og hva intervjuet skulle brukes til i etterkant. Tjora (2010) trekker frem at forskningsetikken er opptatt av at deltakeren ikke skal komme til skade, dette gjelder spesielt følsomme temaer. For meg ble det viktig at elevene hadde en god opplevelse under intervjuet. Derfor passet jeg på å være tydelig når jeg informerte elevene om oppgavene, slik at de forstod at oppgavene ikke hadde noen direkte gale og korrekte svar, men kunne løses på flere måter. Siden oppgavene som blir brukt er oppgaver elevene ikke er vant med, var jeg nøye med å oppklare vanskelige situasjoner etter hver oppgave, og underveis i intervjuet.

3.4.2 Metodekritikk

For elevene som ble intervjuet var det en ukjent situasjon, og jeg kom inn som en ukjent person. Dette kan føre til at elever er usikre i sine svar og ikke tør å stille spørsmål, noe som kan ha påvirket mitt datamateriale. Samtidig føler jeg at elevene ble mer åpne og trygge på seg selv i løpet av intervjuet, og at de var flinke til å stille spørsmål når de ikke forstod hva jeg mente.

Nilssen (2012) vektlegger at forskeren er det viktigste instrumentet i kvalitativ forskning, noe som gir mange muligheter. Samtidig blir man begrenset av det å være menneskelig, det blir gjort feil, muligheter går tapt og personlig forutinntatthet griper inn og forstyrrer (Nilssen, 2012). Som forsker er du en del av verdenen du forsker på, derfor kan man ikke være helt objektiv (Cohen et al., 2013). Som kvalitativ forsker har jeg derfor påvirket mitt arbeid. En kvalitativ studie kan aldri bli gjennomført på samme måte om igjen, dette kalles avhengighet. Funnene som blir gjort er avhengig av situasjonen og menneskene som deltok (Nilssen, 2012). For min studie betyr det at materialet mitt kunne vært helt annerledes med for eksempel to andre elever. Derfor er forskningsprosessen min dokumentert slik at den kan gjennomgås, dette kalles ettersporing (Nilssen, 2012).

Forskningsarbeidet mitt har foregått med bare to elever som ikke er representative for en større del av befolkningen. Derfor er ikke mine data representative, og jeg kan ikke trekke generelle slutninger. Tjora (2010) trekker frem at målet med en kvalitativ studie kan være konseptuell generalisering. Da er man ute etter å framstille funn i form av typologier, modeller, begreper, metaforer eller lovmessigheter som ikke bare er knyttet til studiens empiri. I diskusjonen kan man sikre sin relevans med å få støtte fra tidligere forskning og teorier, noe som fører til større gyldighet og generaliserbarhet (Tjora, 2010). I min studie er det konseptuell generalisering ved at jeg i kapittel 6 vil drøfte mine funn opp i mot tidligere forskning og teorier.

4. Analyse av oppgavene

Fra intervjuguiden (se vedlegg 2) har jeg valgt å bare ha med analyse av oppgavene som er brukt i kapittel 5, oppgave 1, 2, 3, og 4. Jeg har først med oppgaveteksten som ble skrevet til intervjuguiden og eventuelt bilde av oppgaven. Deretter har det blitt redegjort for de didaktiske og matematiske aspektene ved oppgaven.

4.1 Oppgave 1: Tegning av firkanter

Tegn først en firkant.
Tegn en firkant til, som er annerledes.
Fortsett til eleven ikke klarer å tegne flere.
Spørsmål:
Hva er forskjellen mellom figurene?
Hvor mange forskjellige firkanter kan du tegne?

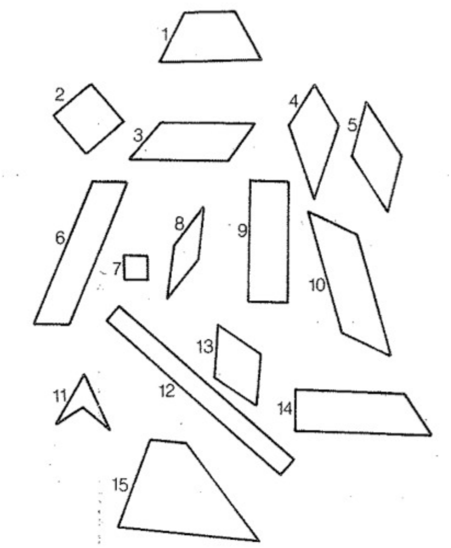
Oppgaven er inspirert av en oppgave om trekanter av Burger og Shaughnessy (1986). I Burger og Shaughnessy (1986) sine undersøkelser skulle oppgaven handle om kategorisering av trekanter. Oppgaven skulle undersøke egenskapene som elevene klarte å variere for å lage forskjellige trekanter. Et annet aspekt oppgaven undersøkte var om elevene mente det finnes uendelig mange trekanter eller et endelig antall (Burger & Shaughnessy, 1986). I min oppgave undersøker jeg det samme, bare at jeg fokuserer på firkanter. Oppgaven er lagt opp på en slik måte at elevene kan besvare oppgaven med lite forkunnskaper, men har mulighet for å ta i bruk forkunnskaper de eventuelt har. Det finnes flere løsninger på denne oppgaven. Man kan bruke klassene man har innenfor firkanter, altså tegne et kvadrat, en rombe, et rektangel, et parallellogram osv. En annen mulighet er å besvare oppgaven ved å gå nærmere inn på egenskapene til figurene, for eksempel bruke 90° vinkler, parallelle og ikke parallelle linjer, vinkler som er større eller mindre en 180° og mye mer. I tillegg kan elevene bruke hvordan firkantene er rotert i planet. Her er det fantasien eller kunnskapen som setter grensene.

På det siste oppfølgingsspørsmålet: *Hvor mange forskjellige firkanter kan du tegne?* Er det ventet at spørsmålet har to mulige utfall i følge Burger og Shaughnessy (1986). Eleven kan se det slik at man har et begrenset antall, det kan tyde på eleven tenker ut i fra firkantens forskjellige klasser. I slike tilfeller er det typisk at elevene svarer at det finnes et sted mellom fire og åtte forskjellige firkanter dem kan tegne. Den andre muligheten er når elevene svarer at de kan tegne for eksempel tjue, hundre, tusen, en million, mange eller uendelig mange. Dette tyder på at eleven ser på det som uendelig mange muligheter å tegne en firkant på og ikke bryr seg om de forskjellige klassene firkantene eventuelt kan tilhøre (Burger & Shaughnessy, 1986).

4.2 Oppgave 2: Identifisering av firkanter

Eleven får utdelt et ark med firkanter (figur 4.1).
Eleven skal markere alle kvadratene med k, rektanglene med r, parallellogrammene med p og trapesene med t. Eleven skal deretter argumentere for sine markeringer og for hvorfor figurer har blitt utelatt.

Spørsmål:
Hva vil du be noen som skal markere alle rektanglene å se etter?
Er nr. 2 et rektangel?
Er nr. 9 et parallellogram?



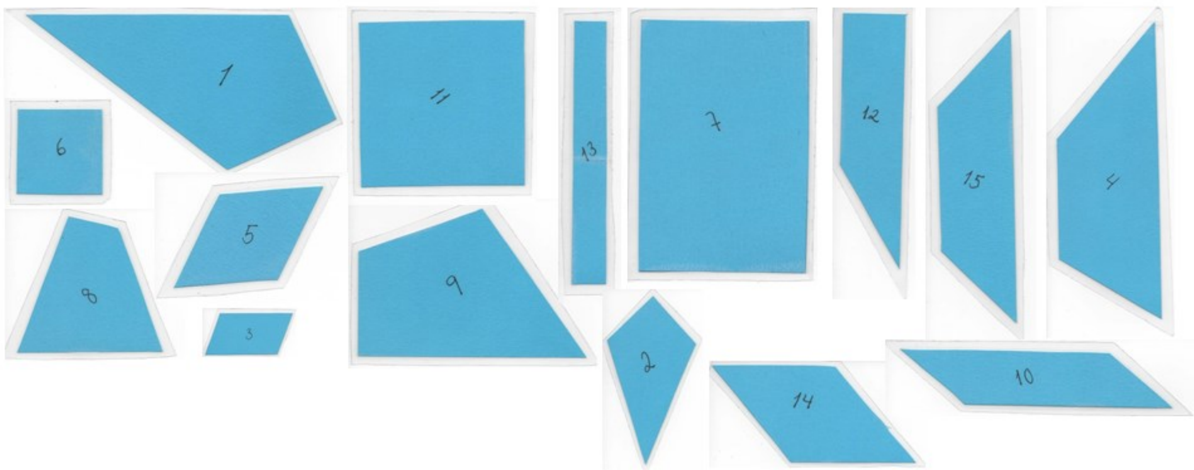
Figur 4.1 oppgave 2, identifisering av firkanter

«Identifisering av firkanter» er hentet fra Burger og Shaughnessy (1986) og utforsker elevens definisjoner og klassifiseringer. Ved løsningen av oppgaven vil det komme frem om eleven er fortrolig med definisjonene. I tillegg åpner oppgaven opp for å vise om eleven tenker at for eksempel kvadrat er en spesiell type rektangel ved at elevene kan markere firkantene med flere bokstaver. Hvis elevene ikke har markert med flere bokstaver vil denne tankegangen bli utfordret i oppfølgingsspørsmålene (Burger & Shaughnessy, 1986). Elevenes besvarelser i denne oppgaven ble bare brukt for det andre underspørsmålet. Besvarelsene til elevene i denne oppgaven kan si mye om deres forståelse av begrepene og nyansene som skiller begrepene fra hverandre.

4.3 Oppgave 3: Sortering

Ett sett med firkanter blir tilfeldig spredt utover bordet. Elevene blir bedt om å sortere firkanter sammen som er like.

Spørsmål:
Hvorfor er de like?
Kan du sortere på en annen måte?(Fortsetter til eleven ikke klarer å sortere på flere måter.)

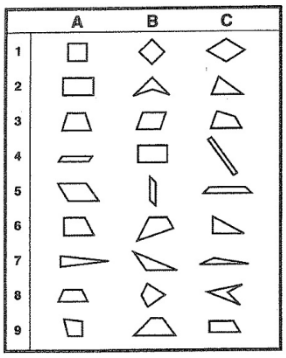


Figur 4.2 oppgave 3, sortering

Denne oppgaven er inspirert av en oppgave med trekanter, også av Burger og Shaughnessy (1986). Denne oppgaven skal få frem hvordan elevene kategoriserer trekanter, og hvilke egenskaper eller definisjoner eleven bruker for å kategorisere (Burger & Shaughnessy, 1986). Oppgavens formål er gjeldene for oppgaven i dette studiet også, bare med kategorisering av firkanter. Oppgaven har i likhet med oppgave 1 mange løsninger. Man kan sortere firkantene etter klasse, men har i tillegg muligheten til å bruke firkantene sine egenskaper, eller etter det visuelle utseendet. Oppgaven er laget slik at elevene kan bruke de geometriske kunnskapene de har og det er de geometriske kunnskapene som antagelig begrenser mulig antall sorteringer. Det er muligheter for at man kan se en utvikling fra oppgave 1, på grunn av spørsmålene og problemene som ble stilt i oppgave 2. Denne oppgaven bidro til å undersøke begge underspørsmålene, ved at eleven må resonnere og forklare hvorfor eleven har valgt å sortere de firkantene sammen. I resonnementene til elevene kan de få bruk for viktige begreper og kan si noe om deres forståelse for dem.

4.4 Oppgave 4: Like figurer

Eleven skal markere hvilke figurer på ett ark (figur 4.3) som er mest like og forklare hvorfor de er mest like.



Figur 4.3 oppgave 4, like figurer

Oppgave 4 er hentet fra Lehrer et al. (1998) og Battista (2007). Meningen med denne oppgaven er å få frem elevenes evne til å resonnere (Lehrer et al., 1998). Denne oppgaven er designet slik at man trenger minimalt med forkunnskaper slik som mange av de andre oppgavene. Elevene kan bruke figurene sitt utseende, deres egenskaper eller klassifisere figurene. Denne oppgaven undersøker begge underspørsmålene. Den får frem elevens resonnering i begrunnelsen av hver deloppgave. I resonneringen bruker elevene ofte begreper, og man kan derfor få informasjon om hvordan elevene forstår begrepene.

5. Analyse

Dette kapittelet vil bestå av to deler. Den første delen vil besvare mitt første underspørsmål som handler om resonnement: *Hvilken type resonnementer bruker elevene i møte med oppgaver som legger opp til utforskning av begrepet firkant?* Den andre delen vil besvare mitt andre underspørsmål som handler om begreper: *Hvilke begreper er viktig for elevene i møte med oppgaver som legger opp til utforskning av begrepet firkant, og hvordan forståelse har elevene for disse begrepene?*

5.1 Hvilke resonnementer tar elevene i bruk?

Igjennom analysearbeidet som er beskrevet i kapittel 3.3.2 har jeg kommet frem til tre kategorier for innholdet i resonnementene elevene bruker. Resonnementer der elevene bruker *visuelle kjennetegn*, der elevene bruker *egenskaper* og der de bruker *klassifisering*. Jeg vil her eksemplifisere kategoriene med episoder fra datamaterialet, og redegjøre for hvordan de to elevene bruker de forskjellige kategoriene i sine resonnementer. Resonnementer vil si elevenes løsninger og argumentasjon på oppgavene, altså det elevene sa da de besvarte oppgavene og spørsmålene fra meg.

5.1.1 Visuelle kjennetegn

Kategorien visuelle kjennetegn har inspirasjon fra kategoriene til Lehrer et al. (1998). Jeg har valgt å kalle Lehrer et al. (1998) sine kategorier for koder, og i dette datamaterialet forekommer kodene *spiss/skrå, størrelse, likhet, orientering* og *antall*. Det å skille mellom kategorien *visuelle kjennetegn* og *egenskaper* kan være vanskelig. Det som avgjør hvilken kategori resonnementet tilhører er om elevene i resonnementet trekker frem korrekte egenskaper og om egenskapen er med i definisjonen av figuren. Det blir sett på som et *visuelt kjennetegn* om eleven lett ser kjennetegnet, eller beskriver en egenskap upresis. Det første eksempelet fra datamaterialet er på koden *spiss/skrå* fra at Mats løser oppgave 4:

118.	Mats:	*Sitter lenge og tenker.* Dem toaen er trapes. *Peker på 8c.*
119.	Camilla:	Nei, det er ikke et trapes. Men det er en?
120.	Mats:	Var det en drage? *Peker fortsatt på 8c.*
121.	Camilla:	Nei, det er heller ikke en drage. (*Mats fortsetter å se på figurene før jeg spør:)* Hvilke

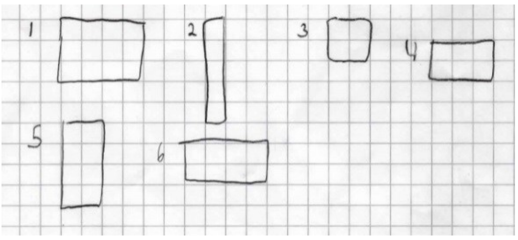
		av figurene synes du er mest like når du ser dem med en gang?
122.	Mats:	Dem toan egentlig. *Peker på 8b og 8c.*
123.	Camilla:	Hva er det som gjør at dem er mest like?
124.	Mats:	Begge har sånne spiss mot fronten *(viser med blyanten)*, det blir kanskje dem da. *Krysser ut figur 8b og 8c.*

Figur 5.1 oppgave 4, deloppgave 8, henholdsvis figur a, b og c

Her bruker Mats spiss som beskrivelse i utsagn 124 etter spørsmål om hva som gjør dem mest like. Spiss er et *visuelt kjennetegn* fordi en spiss vinkel i dette tilfelle er ikke en del av definisjonen til disse figurene. Mats sier at «begge har sånne spiss mot fronten», men mener ikke den matematiske betegnelsen *spiss vinkel* som er en vinkel som er mindre enn 90°.

Neste eksempel er fra oppgave 1 der Frøya forklarer hva som er annerledes med firkant nummer 5 som hun har tegnet.

37.	Camilla:	Mhm, og hva kan du si er forskjellen med den? *Forskjellen mellom 5 og de andre.*
38.	Frøya:	Ehm, den er lang.
39.	Camilla:	Den er lang? Den er lang sånn som toeren?
40.	Frøya:	Ja.
41.	Camilla:	Men hva er forskjellen mellom de to? *Figur nr. 2 og 5*
42.	Frøya:	Den er breiere. *Peker på nr. 5.*



Figur 5.2 oppgave 1, Frøya sine tegninger

I utsagn nummer 38 bruker hun beskrivelsen at den er lang, mens forskjellen mellom firkant 5 og 2 er at den er bredere. Frøya vektlegger her utseende og størrelsene til figurene i resonnementene, dette er et eksempel på koden *størrelse* og *orientering*. *Størrelse* er et *visuelt kjennetegn* for det er et kjennetegn man kan se og måle sammenlignet med de andre kategoriene. Det er *orientering* fordi rotasjonen på figuren avgjør om den er bred eller lang.

I neste eksempel fra oppgave 1 bruker Frøya resonnementet at det ene rektangelet er mer kvadratisk enn det andre rektangelet. Det er et viktig poeng at firkanten ikke er et kvadrat, men ligner mer på et enn den andre firkanten. Dette er et eksempel der Frøya bruker *likhet* i sitt resonnement:

12.	Frøya:	Ehm, skulle til å si den her er lenger. *Peker på firkant nr. 2.*
13.	Camilla:	Den er lenger?
14.	Frøya:	Mhm, den er er mer firkanta, *(peker på firkant nr. 1, flytter hånda over til nr. 2)* mens den er mer. Det er kvadrat *(peker igjen på nr. 1)* og den er mer.. Hva det heter igjen nå da? Vi holder jo på med det hele tida. Det er kvadrat, og den er mer som en… *Peker på nr. 2.*
15.	Camilla:	Er det rektangel?
16.	Frøya:	Rektangel, å Herre Gud er det mulig.
17.	Camilla:	Men, er den et kvadrat? *Peker på nr. 1.*
18.	Frøya:	Nei, den er ikke kvadrat, den er mer kvadratat enn den der. *Nr. 1., mer enn nr. 2*
19.	Camilla:	Den er mer kvadratisk? *Snakker om nr. 1.*
20.	Frøya:	Ja

De *visuelle kjennetegnene* kan være egenskaper figurene har. Det neste eksempelet viser hva som kan være avgjørende for at det er kategorien *visuelle kjennetegn* og ikke kategorien *egenskap*.

256.	Camilla:	Toeren?
257.	Frøya:	Hmm, ikke 90° eller… Ja. Så er det tre hjørner. *Markert 2b og 2c.*
258.	Camilla:	Den der, er ikke det et hjørne? *Peker på den vinkelen som er større enn 180° i figur 2b.*
259.	Frøya:	Nei, jo, glem det.
260.	Camilla:	Men de var mest like kanskje?
261.	Frøya:	Ja

Figur 5.3 oppgave 4, deloppgave 2, henholdsvis figur a, b og c

Dette eksempelet har fått koden *antall*, for det som avgjør for Frøya sitt resonnement er antall hjørner hun mener figuren har. Frøya teller antall vinkler som er mindre enn 180°, vinkelen som er større enn 180° i figur 2b blir derfor ikke telt. Antall vinkler kan ha mye å si for definisjonen til en geometrisk figur, men når antallet blir telt feil blir dette et *visuelt kjennetegn* og kan det virke som figur 2b er en trekant.

I eksemplene som ble kategorisert som *visuelle kjennetegn* fant jeg to trekk for når elevene brukte dette i sine resonnementer med unntak av Frøya sin løsning av oppgave 1 (kommer nærmere inn på dette i delkapittel 5.1.4). Slik som utsagn 118-124 med Mats viser, bruker elevene *visuelle kjennetegn* når det er vanskelig å klassifisere figurene. Da Mats ikke klarer å klassifisere figurene i dette eksempelet, må han ta i bruk andre løsninger. Det andre trekket som ble funnet i datamaterialet, der elevene prøver å bruke egenskapene til figurene, men gjør det ikke korrekt slik som i utsagn 256-261 med Frøya. Selv om både Mats og Frøya tar i bruk kategorien *visuelle kjennetegn* i sine resonnement, er det ikke bruken av den kategorien som kjennetegner elevenes resonnementer. Det er de to neste kategoriene som viser hvordan elevene i de fleste tilfellene resonnerer.

5.1.2 Egenskaper

Elevene tar i bruk *egenskaper* i sine resonnementer når de bruker egenskaper som er avgjørende for den geometriske figuren sin definisjon. Egenskaper kan være blant annet vinkler, sidekanter og diagonaler. Frøya er den eleven som i flest situasjoner tar i bruk *egenskaper* i sine resonnement. I noen situasjoner kan man se at egenskapene blir tatt i bruk på en spesiell måte i resonnementene til Frøya. Frøya bruker *egenskaper* ved hjelp av beskrivelse av egenskapen slik som i dette eksempelet fra oppgave 4:

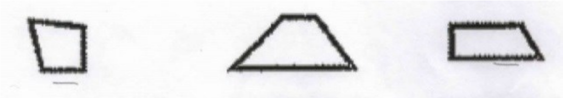
264.	Camilla:	Den synes du var litt vanskelig?
265.	Frøya:	Ja, jeg ble sånn skikkelig "likvis" på den, men så fant jeg ut at det kanskje er dem toan her for der er det faktisk linjer som møtes *(peker på 3a og 3c)*, mens her er det aldri *(3b)*.
266.	Camilla:	Så det er et parallellogram. *Peker på 3b.*
267.	Frøya:	Mhm, så da er det sånn. Derfor tenkte jeg det bare sånn.

Figur 5.4 oppgave 4, deloppgave 3, henholdsvis figur a, b og c

I dette eksempelet bruker Frøya en beskrivelse av parallelle linjer istedenfor begrepet. Selv om begrepet ikke blir brukt går utsagnet inn under kategorien egenskaper fordi dette er en avgjørende egenskap for figurene.

Et annet trekk ved resonnementene til Frøya som handler om *egenskaper* er at hun ofte legger merke til 90° vinkler slik som her:

314.	Camilla:	Nieren da?
315.	Frøya:	Jeg så det på en måte, begge to har en rett vinkel. *Markert 9a og 9c*
316.	Camilla:	Ja, flott.



Figur 5.5 oppgave 4, deloppgave 9, henholdsvis figur a, b og c

Siden Frøya konsentrer seg om de rette vinklene til firkantene overser hun at figur 9b og 9c er begge trapeser eller den mer avgjørende egenskapen at 9b og 9c har to parallelle sider.

Egenskaper i resonnementene blir brukt av elevene for å forsikre, begrunne eller undersøke klassifiseringen slik som i dette tilfellet med Mats i oppgave 4:

98.	Mats:	Fordi begge er kvadrat og har vinkler på 90°. *Snakker om 1a og 1b.*
99.	Camilla:	Mhm ja.

For at to firkanter skal kunne være to kvadrater må de ha vinkler på 90°. Derfor blir overflødig at Mats sier: «og har vinkler på 90°.» Resonnementet om at begge er kvadrater er godt nok.

Neste eksempel viser Frøya på samme oppgave der hun først fastsetter at vinklene er på 90°, før hun etter hint sier at det er to kvadrater:

252.	Camilla:	Hvorfor de to? *Peker på 1a og 1b*
253.	Frøya:	Fordi de er 90° i hjørnene.
254.	Camilla:	Det er…
255.	Frøya:	Det er kvadrat.

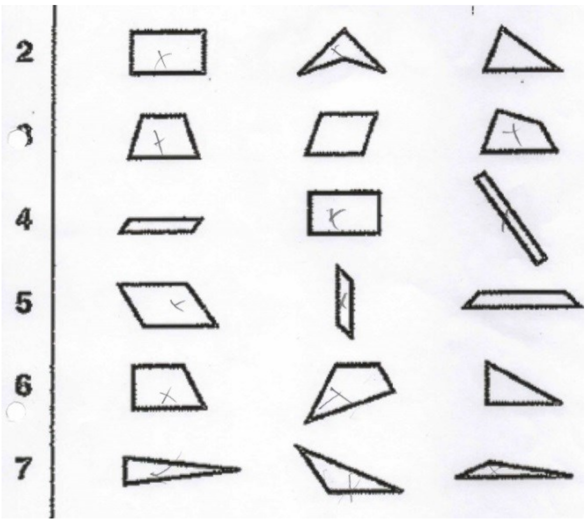
Hun vet det er to kvadrater, men velger heller å konsentrere seg om egenskapene til figurene. Hvordan elevene resonnerer med bruk av *egenskaper* kan oppsummeres med to trekk. Egenskaper som ofte blir lagt merke til er parallelle sider og 90° vinkler. Egenskapene blir brukt for å forsikre eller forklare klassifiseringen elevene gjør. Som skrevet tidligere er det Frøya som i flest tilfeller tar i bruk *egenskaper* i sine resonnementer. I Mats sine resonnementer er det er mer sjeldent tilfelle, han tar i bruk *klassifisering* i de fleste tilfeller.

5.1.3 Klassifisering

Klassifisering er når elevene i sine resonnementer bruker klassen til den geometriske figuren som begrunnelse. Det vil si at eleven kan for eksempel si at det er et parallellogram. I dette eksempelet fra oppgave 4 bruker Mats *klassifisering* i alle sine resonnementer, men i utsagn

108 blir han usikker, men holder seg til samme strategi. Samme skjer da han kommer til deloppgave 7, utsagn 112. Det første han prøver på er å klassifisere i alle disse tilfellene.

100.	Mats:	Dem her er lik, eeh, *(markerer 2a og 2b)* for det her er bare trekanter og det her er firkanter.
101.	Camilla:	Ja
102.	Mats:	*Markerer 3a og 3c.* Her er sånn trapes og begge er det, det er her er bare parallellogram. *Peker på 3b*
103.	Camilla:	Mhm
104.	Mats:	*Markerer 4a og 4b.* Begge her er rektangler.
105.	Camilla:	Ja
106.	Mats:	*Markerer 5a og 5b.* Dem her er begge parallellogram.
107.	Camilla:	Mhm
108.	Mats:	*Markerer 6a og 6b.* Begge her er trapesfigurer
109.	Camilla:	Jeg har glemt å si en ting til deg på om trapes, men jeg kan si det nå. Trapes har to sider som er parallelle. Så den er ikke trapes, men det er en firkant.
110.	Mats:	Den er jo ikke firkant. *Peker på 6c.*
111.	Camilla:	Ja
112.	Mats:	De her toan *(markerer 7b og 7c)*, begge dem her eller den her er rettvinkla trekant, eller? *Peker på 7a.*
113.	Camilla:	Er det det?
114.	Mats:	*Snur arket.* Nei det var det ikke. (*Tenker seg om.)* Da blir det… Begge dem toan er likebeint. *Peker på 7a og 7b.*
115.	Camilla:	Mhm
116.	Mats:	*Visker ut kryssene og krysser ut 7a og 7b.* Dem der er likebeinte trekanter.



Figur 5.6 oppgave 4, deloppgave 2-7, henholdsvis figur a, b og c

Oppgave 3 utmerker seg spesielt med tanke på hvordan elevene resonnerer med bruk av *klassifisering*. Begge elevene klassifiserer først kvadrater, rektangler, parallellogram i adskilte sorteringer slik som her:

71.	Mats:	Ok. *Arbeider.* Så her er kvadrat *(figur 6 og 11)*, rektangler *(figur 13 og 7)*, parallellogrammer *(figur 3, 5, 14 og 3)* og … tra? *(1, 2, 4, 8, 9, 12, 15)*
72.	Camilla:	Trapes?
73.	Mats:	Trapes

186.	Frøya:	Ja. Dem her. *Nr. 6 og 11*
187.	Camilla:	De to?
188.	Frøya:	Mhm. Dem er kvadrat.
189.	Camilla:	Ja.

I disse to eksemplene tar elevene ikke i bruk sammenhengen mellom firkantene som er illustrert i delkapittel 2.4. Da elevene får spørsmål om de kan sortere på flere måter etter de har sortert alle klassene de kan, åpner både Frøya og Mats opp for at noen klasser er underklasser av andre, slik som her:

74.	Camilla:	Kan du sortere dem på en annen måte?
75.	Mats:	*Arbeider, legger kvadratene og rektanglene sammen med parallellogrammene.* Her er alle parallellogram da.
76.	Camilla:	Alle de er parallellogram, ja. Har du noen flere måter du kan sortere dem på?
77.	Mats:	*Legger alle firkantene utover igjen.* Også har du parallellogramma i tillegg trapes. *Samler sammen figurene.*
78.	Camilla:	Så da er alle firkantene som er her trapes?
79.	Mats:	Mhm

Mats viser her i oppgave 3 at han forstår at kvadrat og rektangler også er parallellogram, og alle klassene igjen er trapes. Frøya viser at hun har en forståelse for sammenhengene i oppgave 3:

197.	Camilla:	Men er det flere du kan ha med i denne bunken som ligger utover nå?
198.	Frøya:	Det er jo kvadratene og rektangelet. *Tar opp nr. 13*
199.	Camilla:	Mhm. Er det flere rektangler her?
200.	Frøya:	Her. *Finner nr. 7.*
201.	Camilla:	Den ja.
202.	Frøya:	Der vet du.
203.	Camilla:	Ja. Så da kan vi ha alle de her.
204.	Frøya:	Mhm

I dette eksempelet viser Frøya at kvadratene er en spesiell form for rektangler, men akkurat som Mats kommer dette etter hun har resonnert seg frem til kvadrater og rektangler som adskilte sorteringer. Det at noen firkanter er spesialtilfeller av andre kommer jeg nærmere inn på i analysene om begreper (delkapittel 5.2)

En observasjon jeg gjør er at det virker som det er enklere for elevene å klassifisere firkanter som er mest lik typiske eksempler som ofte blir brukt i undervisning og i lærebøker. Firkanter som ikke er typiske eksempel er for eksempel et trapes med en vinkel som er 90° eller en figur som har en uvant rotasjon.

208.	Frøya:	Jo. Og så skal vi se her.*(Legger 4 og 15 sammen).* Du kalte dem noe, du kalte dem noe det vet jeg. Det husker jeg ikke.
209.	Camilla:	Trapes?
210.	Frøya:	Trapes.
211.	Camilla:	Er det flere som kan være med på den? Gruppa der?
212.	Frøya:	Åh, her. Er jo en variant til av …? *Legger sammen 8 og 9.*

Frøya finner her frem til to av trapesene, men går heller videre til to nye firkanter da jeg spør om det er flere som kan tilhøre den gruppen. Hun utelater flere firkanter som kunne vært sortert i den gruppen, men som har et mer uvant utseende, blant annet firkant nummer 12 som har en 90° vinkel.

Figur 5.7 oppgave 3, figur 12

Hvordan elevene bruker *klassifisering* i sine resonnement kan oppsummeres med tre trekk: resonnementer der elevene resonnerer med riktig bruk av klasse for de gitte firkantene, der elevene utelater firkanter som kan tilhøre klassen og der de resonnerer med at firkanten tilhører feil klasse.

5.1.4 Elevene sin bruk av resonnementene

Så hvilke typer resonneringer bruker elevene i oppgavene? Mats resonnerer ved hjelp av *klassifisering* i de fleste tilfeller. Mats gjør det til og med i de tilfellene hvor han er usikker på hvilken klasse firkantene tilhører. Han bruker visuelle kjennetegn og egenskaper i sine resonnementer når han ikke får til å klassifisere eller til å forsvare sine klassifiseringer.

Frøya bruker mest *egenskaper* og *klassifiseringer* i sine resonnementer, der oppgave 1 er et unntak. I oppgave 1 bruker hun nesten bare *visuelle kjennetegn*. Jeg ser på det som et unntak fordi det er første oppgave og hun kan ha vært usikker på hva jeg har spurt etter. Samtidig har hun resonnert mer med bruk av *egenskaper* og *klassifisering* på de andre oppgavene senere i intervjuet. I de to andre oppgavene bruker hun en blanding av resonnementer som inneholder *egenskaper* og resonnementer som inneholder *klassifiseringer*.

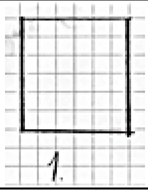
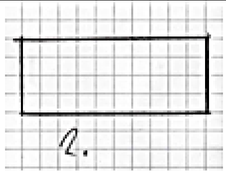
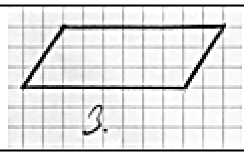
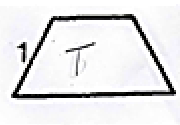
5.2 Hvordan bruker elevene de viktige begrepene?

Jeg har funnet frem til fem begreper som er gjeldene i datamaterialet. Begrepene er kvadrat, rektangel, parallellogram, trapes og parallelle linjer. Analysearbeidet for å komme frem til disse begrepene er beskrevet i metodekapittelet. I dette delkapittelet vil begrepsbildet til hver enkelt elev bli presentert. Deretter vil jeg se på hvordan forståelsen til elevene har endret seg i løpet av intervjuet med tanke på noen begreper.

5.2.1 Begrepsbildet til Mats

Denne første tabellen viser hvordan deler av et begrepsbilde for Mats kan se ut og begrepsdefinisjonen for fire av de fem begrepene nevnt over. Parallelle linjer er ikke et begrep som er viktig i datamaterialet fra Mats sitt intervju. Begrepsbildet som blir presentert her er sammensatt av hvordan Mats løser de første oppgavene i intervjuet, og hvordan han tar i bruk begrepene i sine løsninger.

Begrepsbildet og begrepsdefinisjonene til begrepene kvadrat og rektangel er godt utviklet hos Mats. Mats er usikker på begrepsnavnet til et parallellogram, og begrepet trapes er ikke fullt så mye utviklet som de andre begrepene. Mats har ikke blitt presentert for eller har glemt begrepsdefinisjonen for trapes, derfor er den ruten i tabell 5.1 tom.

	Begrepsdefinisjon	Begrepsbilde	
Kvadrat	Firkant med like lange sider og 90 graders vinkler.	Det er en forskjell mellom et kvadrat og et rektangel. Et kvadrat har vinkler på 90 grader.	
Rektangel	Firkant med to sider som er like lange og 90 graders vinkler.	Det er en forskjell mellom et kvadrat og et rektangel. Et rektangel har to sider som er like lange, motstående sider. Vinklene skal være 90 grader.	
Parallellogram	Firkant der to og to sider er parallelle.	Usikker på begrepsnavnet, men kan uttrykke firkanten visuelt. Han tegner da denne firkanten:	
Trapes		Peker på firkanten til høyre når han blir spurt hva et trapes er. Usikker på begrepsnavnet.	

Tabell 5.1 Mats sitt begrepsbilde

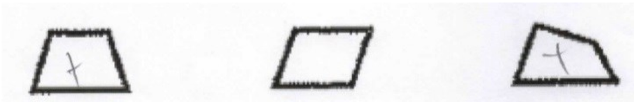
5.2.2 Endring i begrepsbildet til Mats

I løpet av arbeidet med oppgavene blir Mats presentert for ny informasjon som kan endre hans begrepsbilde, og blir introdusert for en begrepsdefinisjon i de tilfellene det mangler. Den nye informasjonen kan oppsummeres i to punkter:

1. Begrepsdefinisjonen til et trapes.
2. Parallellogram er et spesialtilfelle av et trapes. Rektangel er et spesialtilfelle av parallellogram, mens et kvadrat er et spesialtilfelle av rektangel.

Begrepet trapes blir utviklet i løpet av hele intervjuet. I første oppgave blir ikke begrepet nevnt, men han vet det finnes flere typer firkanter enn de han nevner. I oppgave 2 spør jeg om han vet hva et trapes er, Mats peker da ut en av firkantene på arket (se tabell 5.1). Så Mats har et begrepsbilde av hvordan et trapes skal se ut, men jeg er usikker på hva mer det inneholder. I oppgave 3 har han glemt begrepsnavnet, se utsagn 71 over. Det viser at Mats ikke har et fult utviklet begrepsbilde til et trapes. I oppgave 4 oppdaget jeg at han har misforstått begrepet trapes:

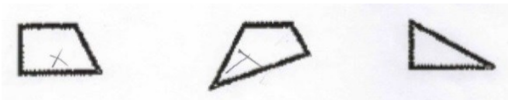
102.	Mats:	*Markerer 3a og 3c.* Her er sånn trapes og begge er det, det er her er bare parallellogram. *Peker på 3b*
103.	Camilla:	Mhm



Figur 5.8 oppgave 4, deloppgave 3, henholdsvis figur a, b og c

Her markerer han en firkant uten parallelle linjer som trapes, mens utelater parallellogrammet som er et trapes. Da han i enda en situasjon bruker begrepet trapes feil griper jeg inn ved å introdusere han for en begrepsdefinisjon:

108.	Mats:	Markerer 6a og 6b. Begge her er trapesfigurer
109.	Camilla:	Jeg har glemt å si en ting til deg om trapes, men jeg kan si det nå. Trapes har to sider som er parallelle. Så den er ikke trapes, men det er en firkant.
110.	Mats:	Den er jo ikke firkant. *Peker på 6c.*
111.	Camilla:	Ja



Figur 5.9 oppgave 4, deloppgave 6, henholdsvis figur a, b og c

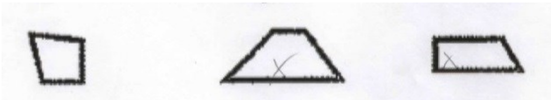
Figur 6b er ikke et trapes og Mats får en forklaring at firkanten må ha to parallelle sider for å kunne være et trapes. Mats blir her introdusert for begrepsdefinisjonen for trapes etter at jeg har oppdaget at hans begrepsbilde ikke samstemmer med begrepsdefinisjonen. I følge Vinner (1991) kan det få tre utfall når en elev har et begrepsbilde og så blir presentert for definisjonen (se delkapittel 2.3.2). Da Mats er usikker på firkantene i en av de senere deloppgavene trekker han igjen frem begrepet trapes:

118.	Mats:	*Sitter lenge og tenker.* Dem toaen er trapes. *Peker på 8c.*
119.	Camilla:	Nei, det er ikke et trapes. Men det er en? *Snakker om 8c.*

Figur 5.10 oppgave 4, deloppgave 8, henholdsvis figur a, b og c

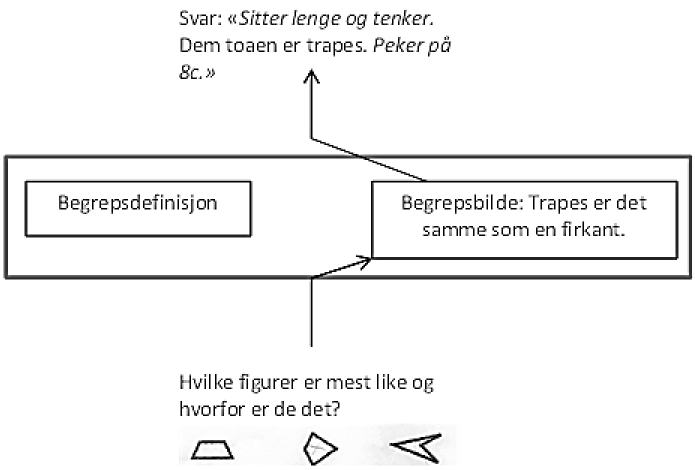
Her er det bare figur 8a som er et trapes, derfor bruker han begrepet ukorrekt etter å ha blitt presentert for begrepsdefinisjonen. I neste deloppgave bruker han begrepet riktig, der to figurer er trapeser og den siste figuren ikke er et trapes.

126.	Mats:	Ja, også dem her toan. *Markerer 9b og 9c*. For begge er trapes.
127.	Camilla:	Så de har begge to sider som er parallelle.



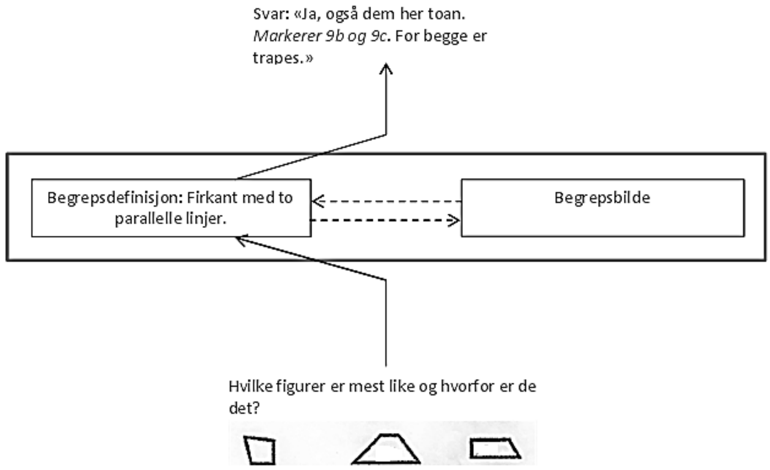
Figur 5.11 oppgave 4, deloppgave 9, henholdsvis figur a, b og c

Ut i fra de to situasjonene over (utsagn 118-119 og 126-127), kan det virke som det er utfall nummer tre som har skjedd: Både begrepsdefinisjon og begrepsbildet forblir slik de er. På et tidspunkt vil Mats gjenta den lærte definisjonen slik som i utsagn 126, men i alle andre situasjoner vil Mats tenke på sitt begrepsbilde slik som i utsagn 118 (Vinner, 1991). Så i deloppgave 8, utsagn 126-125, kan det virke som dette er tankeprosessen til Mats:



Figur 5.12 Vinner (1991)

Ut i fra svaret Mats avgir på deloppgave 8 kan man anta at han ikke har tatt i bruk begrepsdefinisjonen, men avgitt et svar på bakgrunn av bare sitt begrepsbilde noe som fører til feil bruk av begrepet. I deloppgave 9 kan man illustrere en mulig tankeprosess slik:

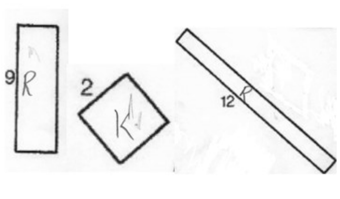


Figur 5.13 Vinner (1991)

Her er det vanskelig å si om Mats bare bruker begrepsdefinisjonen, eller om det er samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde, dette er vist med stiplede piler. Om Mats har tatt til seg begrepsdefinisjonen for trapes, og har et samspill mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde er vanskelig å avgjøre i løpet av et intervju, dette må man undersøke over tid.

Ideen om at firkantene er spesialtilfeller av hverandre blir presentert for Mats da han arbeider med oppgave 2:

47.	Camilla:	Hvis vi ser på nummer 9. Der har du skrevet at det er et rektangel, kan det være noe annet?
48.	Mats:	Det kan være et parallellogram.
49.	Camilla:	Ja, for eksempel. Hvorfor kan det være et parallellogram, vet du det?
50.	Mats:	For dem der møtes aldri, *peker på sidene til nr. 9.*
51.	Camilla:	Ja, så to og to sider er parallelle?
52.	Mats:	Ja
53.	Camilla:	Er det flere da som kan være både rektangel og parallellogram?
54.	Mats:	Den der kan jo det. *Peker på figur nr. 2 og markerer.*
55.	Camilla:	Mhm
56.	Mats:	Den der. *Peker på nummer 12 og markerer. Samme med nr. 9*



Figur 5.14 oppgave 2, figur 9, 2 og 12

Før dette utdraget har vi arbeidet med at et kvadrat også er et rektangel. Mens her spør jeg om nummer 9 som har blitt markert som et rektangel kan inngå under flere definisjoner. På den måten oppfordrer jeg Mats til å klassifisere rektangelet som noe annet. I utsagn 54 foreslår Mats at figur nummer 2, opprinnelig markert som et kvadrat, også kan være et rektangel og parallellogram. Han viser at han har forstått det vi har arbeidet med. Det kan virke som situasjonen har endret Mats sine begrepsbilder for de forskjellige firkantene. I oppgave 3 der Mats skal sortere firkanter kan man få et innblikk i hvordan han har tatt til seg informasjonen. Mats sin første sortering foregikk slik:

70.	Camilla:	Det bestemmer du selv hvordan du vil sortere dem. Så du skal bare lage en gruppe, så skal du forklare meg hvorfor du har satt de sammen etterpå.
71.	Mats:	Ok. *Arbeider.* Så her er kvadrat *(figur 6 og 11)*, rektangler *(figur 13 og 7)*, parallellogrammer *(figur 3, 5, 14 og 3)*og … tra? *(1, 2, 4, 8, 9, 12, 15)*

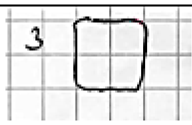
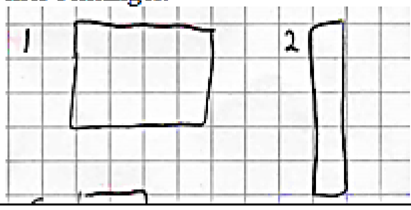
Her har Mats ikke tatt hensyn til at et kvadrat er et spesialtilfelle av et rektangel, det samme gjelder resten av firkantene. Mats tar ikke i bruk den nye informasjonen. Tall og Vinner (1981) mener at et begrepsbilde kan bestå av motstående aspekter så da Mats får spørsmål om han kan sortere på andre måter, sorterer han slik:

74.	Camilla:	Kan du sortere dem på en annen måte?
75.	Mats:	*Arbeider, legger kvadratene og rektanglene sammen med parallellogrammene.* Her er alle parallellogram da.
76.	Camilla:	Alle de er parallellogram, ja. Har du noen flere måter du kan sortere dem på?
77.	Mats:	*Legger alle firkantene utover igjen.* Også har du parallellogramma i tillegg trapes. *Samler sammen figurene.*
78.	Camilla:	Så da er alle firkantene som er her trapes?
79.	Mats:	Mhm

Her bruker Mats den nye informasjonen, og viser at han forstår at firkantene er spesialtilfeller av hverandre. Her er det vekkede begrepsbildet til parallellogram at også kvadrat og rektangler tilhører denne gruppen. Det vekkede begrepsbildet vil si at det er den delen av minnet som blir tatt i bruk i følge Vinner (1991). Begrepsbildene til Mats for forskjellige firkanter er ennå i utvikling. Et begrepsbilde kan endre seg konstant, det får nye erfaringer og situasjoner som er med på å berike forståelsen av et begrep.

5.2.3 Begrepsbildet til Frøya

I intervjuet med Frøya er det alle fem begrepene som utmerker seg. For tre av de fire begrepene som handler direkte om firkanter, så er dette en tabell over mulig begrepsdefinisjoner og begrepsbilder. Informasjonen som danner begrepsbildet til Frøya er løsninger som kommer frem av hennes første møte med begrepene under intervjuet. Begrepet parallelle linjer blir analysert for seg selv.

	Begrepsdefinisjon	Begrepsbilde	
Kvadrat	Firkant med like lange sider og 90 graders vinkler.	Like lange sider. 90 graders vinkler.	 Tegning av et kvadrat.
Rektangel	Firkant med to sider som er like lange og 90 graders vinkler.	To og to sider like lange. 90 grader i hjørner. Tegning nummer 2 er mer rektangel en tegning nummer 1.	Tegninger av rektangler, men der nr. 1 er mer kvadratisk og nr. 2 er mer rektangel. 
Parallellogram	Firkant der to og to sider er parallelle.	Når linjer ikke er parallelle er det ikke et parallellogram. Skrått firkant. To og to linjer like lange. Linjer møtes aldri.	Bilde som har blitt markert som et parallellogram: 

Tabell 5.2 Frøya sitt begrepsbilde

Slik som med Mats er begrepsdefinisjonen og begrepsbilde til begrepene kvadrat og rektangel godt utviklet hos Frøya. Hvis man bruker Fischbein (1993) teori om figurale begrep kan situasjonen der Frøya kaller et rektangel mer kvadratisk enn et annet rektangel, tatt med i tabell 5.2, forklares med at den figurale fremstillingen eller tegningen har tatt overhånd over den begrepsmessige begrensningen til et kvadrat. Mens begrepsbildet til et parallellogram har noen mer motstridende punkter for Frøya. Begrepsdefinisjonen er ikke presentert for Frøya og begrepsbildet til begrepet trapes for Frøya er ikke utviklet.

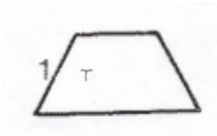
5.2.4 Endring i begrepsbildet til Frøya

I løpet av intervjuet får Frøya slik som Mats ny informasjon som kan oppsummeres i to punkter og det skjer dermed en utvikling med tanke på begrepsbildet:

1. Begrepsdefinisjonen til et trapes.
2. Parallellogram er et spesialtilfelle av et trapes. Rektangel er et spesialtilfelle av parallellogram, mens et kvadrat er et rektangel.

Utviklingen av et begrepsbilde for trapes hos Frøya starter i oppgave 2, da spør Frøya hva et trapes var igjen:

75.	Frøya:	Mhm, *arbeider*. Trapes hva var det igjen?
76.	Camilla:	Trapes, der er to sider i figuren parallelle. Så i et parallellogram er to og to sider parallelle…
77.	Frøya:	Så det vil si at den er skrå på en måte.
78.	Camilla:	Ja, eller, så… Du kan ha to som går innover, bare de to er parallelle, eller så kan de to være parallelle.
79.	Frøya:	På en måte…
80.	Camilla:	Så eneren er et typisk eksempel på et trapes.



Figur 5.15 oppgave 1, figur 1

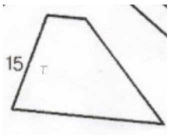
Det at hun sier i utsagn 77 at den er skrå kan vise at hun prøver å skape seg et visuelt bilde av firkanten. Jeg gir henne den ved å peke ut en av firkantene. Rett etter det første møte med begrepet prøver hun å navngi en annen firkant:

83.	Frøya:	Fireren blir det mer, blir det et trapes det og?
84.	Camilla:	Er to av linjene på fireren parallelle? Husker du hva parallell vil si?
85.	Frøya:	Det vil si at de har lik avstand hele tiden.
86.	Camilla:	Har noen av…
87.	Frøya:	Nei
88.	Camilla:	Sånn har ikke noen.
89.	Frøya:	Da betyr det at den var T. *Vil markere figur 4 som et trapes.*
90.	Camilla:	Nei, for da var den ikke trapes.

Figur 5.16 oppgave 1, figur 4

Frøya viser her at hun ikke helt forstår hva et trapes er og etter dette utdraget viser jeg hvorfor figur 4 ikke er et trapes. Begrepsbildet til Frøya trenger fortsatt flere erfaringer og situasjoner hun kan relatere begrepet til. I en senere situasjon i møte med figur 15 i oppgave 2 viser hun hva et trapes er, og hvorfor det er det:

105.	Frøya:	Jeg skulle si at, okay, 15 er en T.
106.	Camilla:	Hvorfor er 15 en T?
107.	Frøya:	Ehm, fordi den har de to linjene. *Peker på de to parallelle linjene.*

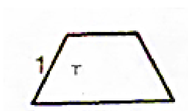


Figur 5.17 oppgave 1, figur 15

I møte med trapeser i oppgave 3 har hun glemt begrepsnavnet helt:

208.	Frøya:	Jo. Og så skal vi se her.*(Legger 4 og 15 sammen*). Du kalte dem noe, du kalte dem noe det vet jeg. Det husker jeg ikke.
209.	Camilla:	Trapes?
210.	Frøya:	Trapes.

I noen situasjoner senere i intervjuet er hun usikker på begrepsnavnet, men andre ganger husker hun det. Situasjonen til Frøya er at hun lærer en begrepsdefinisjon først. Gjennom forklaringer, eksempler og inntrykk hun får av begrepet trapes, skapes det et begrepsbilde. Så etter dette intervjuet kan et mulig begrepsbilde hun har av trapes illustreres slik:

Begrepsdefinisjon:	Begrepsbilde:
Firkant der to sider er parallelle.	Denne firkanten er et trapes:  Figur med ingen parallelle linjer er ikke trapes, slik som denne firkanten:  To sider der linjene er parallelle er et trapes eller to av linjene møtes aldri i et trapes. Kvadrat, rektangel og parallellogram er et trapes.

Tabell 5.3 Frøya sitt begrepsbilde for trapes

Hvor mye begrepsbildet av et trapes har blitt utviklet for Frøya er vanskelig å si noe om med bare dette intervjuet. Det er i senere situasjoner der Frøya må ta i bruk begrepet på nytt at man får undersøkt hva hun har lært over tid. Et begrepsbilde utvikles med nye situasjoner, en slik ny situasjon møter Frøya da hun blir presentert for at noen firkanter er spesialtilfeller av andre:

150.	Camilla:	Nei, vi tar ikke den først. Vi tar nummer 9. Det er et rektangel, det er vi enig om?
151.	Frøya:	Ja.
152.	Camilla:	Kan det også være et parallellogram?
153.	Frøya:	Ja.
154.	Camilla:	Hvorfor det?
155.	Frøya:	Fordi linjene møtes aldri. *Markerer den.*
156.	Camilla:	Ja, er det da flere figurer som kan være parallellogram da?
157.	Frøya:	Skal vi se, da blir vel det her og. Og det kvadratet her. *Nr. 12 (rektangel) og 2 (kvadrat) markeres.*

Etter utdraget av løsningen av oppgave 2 fortsetter vi å arbeide med firkanter som kan markeres med flere bokstaver, og hvorfor de kan det. Det virker som Frøya er åpen for den nye informasjonen og har en forståelse for den. Oppgave 3 åpner opp for at Frøya kan ta i bruk den nye kunnskapen, men i første sortering gjør hun ikke det:

186.	Frøya:	Ja. Dem her. *Nr. 6 og 11*
187.	Camilla:	De to?
188.	Frøya:	Mhm. Dem er kvadrat.
189.	Camilla:	Ja.
190.	Frøya:	Så fortsetter vi med mine kjære styreformer, som jeg styrer mye med. Skal vi se, da er vel den og da blir vel den her og der. For dem er mer "parallellogramisk". *Samler sammen nr. 3, 10, 5 og 14 som er parallellogrammer.*

Hun sorterer først kvadratene som en egen gruppe. Så samler hun sammen firkanter som er typiske parallellogrammer. Etter noen spørsmål om flere kan være med i den gruppen, sier hun dette:

197.	Camilla:	Men er det flere du kan ha med i denne bunken som ligger utover nå?
198.	Frøya:	Det er jo kvadratene og rektangelet. *Tar opp nr. 13*
199.	Camilla:	Mhm. Er det flere rektangler her?
200.	Frøya:	Her. *Finner nr. 7.*

Her viser hun at hun har forstått at kvadrater og rektangler er spesialtilfeller av parallellogrammer. Senere i denne oppgaven viser Frøya at hun forstår at parallellogrammer er spesialtilfeller av trapeser:

234.	Frøya:	Skal vi se nå… Det her kan for så vidt. Det her er en gruppe sånn sett. *Tar hånda over gruppen med rektangler, parallellogram og trapes.*
235.	Camilla:	Mhm
236.	Frøya:	Kan det være.

Med Tall og Vinner (1981) og Vinner (1991) sine beskrivelser av vekket begrepsbilde kan Frøyas bruk av begrepene forklares slik. Frøya tar i bruk forskjellige deler av minnet, så forskjellige deler av begrepsbildet blir aktivert. Frøya sin første idé er å sortere de typiske parallellogrammene for seg selv, men etter flere spørsmål vekkes den delen av begrepsbildet som sier at kvadrater og rektangler også er parallellogram.

5.2.5 Frøya beskriver parallelle linjer

Frøya kommer ofte innom begrepet parallelle linjer i løpet av hele intervjuet. Det som gjør at dette begrepet er signifikant hos henne er at begrepsnavnet ikke blir tatt i bruk. Det første møte med parallelle linjer er da jeg spør om hun vet hva parallelle linjer er i oppgave 2:

84.	Camilla:	Er to av linjene på fireren parallelle? Husker du hva parallell vil si?
85.	Frøya:	Det vil si at de har lik avstand hele tiden.
86.	Camilla:	Har noen av…
87.	Frøya:	Nei

Etter dette blir ikke parallelle linjer nevnt, men en beskrivelse av parallelle linjer kommer i løpet av intervjuet i fire forskjellige situasjoner. Her er to eksempler på slike situasjoner fra henholdsvis oppgave 3 og 4:

194.	Frøya:	Nei, det er ikke et parallellogram dette her for det er bare to linjer som ikke møtes.

Her forklarer Frøya hvorfor en firkant ikke er et parallellogram.

311.	Frøya:	Jeg vet ikke helt hva som var vanskelig, jeg bare… Hva er det du har tenkt? Men jeg fant ut at den der *(8a)*, hadde den der to like linjer, også har den der på en måte møtes aldri. De der møtes, men de to der møtes aldri. Derfor tenkte jeg at da tar vi som noe.

Her argumenterer Frøya for hvorfor hun synes at firkant 8b og 8c er mest like. Firkant 8a er et trapes med to parallelle linjer.

Så begrepsbildet til Frøya for parallelle linjer består av to aspekter som kommer frem under intervjuet:

1. Parallelle linjer har lik avstand hele tiden.

2. Parallelle linjer møtes aldri.

I løpet av intervjuet virker det som om det aspektet som sier at linjene aldri møtes står sterkere i minnet til Frøya en selve begrepsnavnet, parallelle linjer. Så Frøya har et begrepsbilde, men velger å bruke en beskrivelse enn selve begrepet.

I dette kapittelet har det blitt vist hvordan Mats og Frøya i første del resonnerer i sine løsninger av de forskjellige oppgavene. I den andre del har det blitt vist hvordan elevens begrepsbilde og deres utvikling av enkelte begrep har utartet seg i løpet av intervjuet. Disse analysene skal i neste kapittel brukes for å drøfte hva slags forståelse to elever på 8. trinn har for begrepet firkant?

6. Drøfting og konklusjon

Dette kapittelet vil bestå av to deler. Den første delen vil drøfte mitt hovedspørsmål. Den andre delen vil være en avslutning der jeg ser på matematikkdidaktisk forskning innenfor geometri i sammenheng med min egen forskning, tanker om hvilke betydning masterprosjektet har vært for meg som lærer, og jeg vil avslutte kapittelet og oppgaven med en avsluttende oppsummering av mine funn.

6.1 Elevene sin forståelse av begrepet firkant

Hva slags forståelse har to elever på 8. trinn for begrepet firkant?

Dette spørsmålet vil jeg drøfte gjennom mine analyser av elevenes resonnement og begrepsbilder. Drøftingen vil bruke van Hiele-nivåene som et utgangspunkt og et redskap for å kunne si noe om elevenes forståelse. Jeg vil også trekke inn Hoffer (1981) sine grunnleggende ferdigheter innenfor geometri. Til slutt vil jeg drøfte hvordan elevene skal komme seg til neste nivå og se på hvilke utfordringer de kan møte innenfor geometri på ungdomsskolen.

6.1.1 Hva viser resonneringene til elevene?

Etter analysearbeidet satt jeg igjen med tre kategorier for hva resonnementene til elevene inneholdt: *visuelle kjennetegn*, *egenskaper* og *klassifisering*. Hvis man skal rangere kategoriene etter hvor stor forståelse for geometri de tre kategoriene viser at elevene har, indikerer *visuelle kjennetegn* en lav forståelse, *egenskaper* en middels forståelse, og *klassifisering* en høy forståelse. En lignende måte å rangere kategoriene på ble brukt av Lehrer et al. (1998) i sin forskning da de skulle undersøke van Hiele-nivået på elevene.

I resonnementene sine bruker Mats oftest kategorien *klassifisering* som viser en høy forståelse og kjennetegner en elev på nivå 2 i følge Lehrer et al. (1998). Hvis man ser på enkelte av resonnementene til Mats innenfor kategorien *klassifisering* er de ikke korrekte, for eksempel i utsagn 118-120 vist i delkapittel 5.1.1 i analysen. Så ut i fra disse utsagnene kan det tyde på at

Mats ennå ikke er innenfor det som kjennetegnes av en elev på nivå 2. På den andre siden har Mats kommet lengre enn en elev på nivå 1 som ville brukt egenskapene til figurene. Mats kan derfor beskrives som en elev som nærmer seg eller er på vei mot nivå 2.

Frøya bruker (med oppgave 1 som et unntak) en blanding av kategoriene *egenskaper* og *klassifisering*. I følge Battista (2007) indikerer bruken av egenskaper en elev på nivå 1. Siden Frøya også tar i bruk kategorien *klassifisering* kan det tyde på at hun ikke bare er en elev på nivå 1, men en sterk nivå 1 elev som beveger seg mot nivå 2. Hvis man sammenligner Mats med Frøya kan det virke som Mats ligger nærmere et nivå 2 fordi han oftere enn Frøya tar i bruk kategorien klassifisering i sine resonnement.

6.1.2 Hva viser begrepsbruken til elevene?

For å se hva analysen av begrepsbruken kunne si om elevenes forståelse har jeg brukt beskrivelsen av van Hiele sine nivåer som er beskrevet i delkapittel 2.1.1 i teorien. De fire begrepene som blir gjennomgått i analysen viser at både Mats og Frøya ligger på et nivå 1. Selv om de ikke har alle begrepene på plass, kan elevene analysere egenskapene til figurene og gjenkjenne figurer igjennom deres egenskaper. Det som gjør at elevene ennå ikke er på nivå 2 er at egenskapene ikke er systematisert, og sammenhengen mellom figurene ikke helt er lagt merke til ennå. For eksempel er første sortering til Mats i oppgave 3 kvadrater, rektangler, parallellogrammer og trapes for seg selv (se delkapittel 5.2.2). Samtidig utforsker elevene sammenhengen mellom figurene i løpet av hele intervjuet, og som vist i delkapittel 5.2 i analysen er det ikke noen av de geometriske sammenhengene elevene ikke godtar. For eksempel svarer Frøya i oppgave 2 ja på at et rektangel er et parallellogram fordi to og to sider i rektangelet er parallelle (se delkapittel 5.2.4). Van Hiele (1959/1984) trekker frem som et eksempel for hva som kjennetegner en elev på nivå 1 at det ikke er sikkert at et kvadrat er identifisert som et rektangel. Siden definisjonene av figurene blir viktig på nivå 2, blir et kvadrat kjent igjen som et rektangel. Verken Mats eller Frøya har kommet frem til sammenhengen mellom firkantene på egenhånd i intervjuet, det er spørsmål og kommentarer fra meg som fører til at elevene utforsker dette området. Derfor kan ikke Frøya og Mats, ut i fra sin bruk av de utvalgte begrepene, bli beskrevet som elever på van Hiele sitt nivå 2.

6.1.3 Hva viser de geometriske ferdighetene til elevene

Hoffer (1981) beskriver fem grunnleggende ferdigheter innenfor geometri. Ut i fra Hoffer (1981) sine beskrivelser av hver ferdighet innenfor van Hiele-nivåene, kan Mats og Frøya plasseres på et nivå 1, men de har ferdigheter som til tider strekker seg opp til et nivå 2. Jeg velger å begrunne Mats og Frøya sammen her, siden de har oppnådd mye av det samme. I datamaterialet har jeg bare grunnlag for å drøfte tre av de fem ferdighetene. Innenfor visuelle ferdigheter kan Mats og Frøya legge merke til egenskapene til en figur, noe som kjennetegner nivå 1. Samtidig gjenkjenner de vanlige egenskaper til forskjellige typer figurer som er en del av beskrivelsen av en elev på nivå 2. Det som skiller Mats og Frøya fra en elev på nivå 2 er at de ennå ikke gjenkjenner innbyrdes sammenheng mellom forskjellige figurer i enhver situasjon. Når det gjelder de verbale ferdighetene kan elevene beskrive egenskapene til en figur presist og fleksibelt som beskriver en elev på nivå 1. Det som beskriver en elev på nivå 2 er at de definerer begrep presist og kortfattede, og formulerer setninger som viser innbyrdes sammenhenger mellom figurer (Hoffer, 1981). Gjennom intervjuene definerer elevene begreper presist og kortfattet til tider, men det er i varierende grad at de formulerer setninger som viser innbyrdes sammenhenger mellom figurer. Som beskrevet i analysekapittel 5.2 er det usikkert på om elevene har en full forståelse for sammenhengene mellom ulike klasser med firkanter. For logiske ferdigheter dekker elevene beskrivelsen for nivå 1 ved at de forstår at figurer kan bli klassifisert som forskjellige typer, og at egenskaper kan brukes til å skille mellom figurer. Elevene arbeider seg mot nivå 2 ved at underveis i intervjuet arbeider de med å bruke egenskapene til en figur for å bestemme om en gruppe figurer er en del av en annen.

6.1.4 Hvilket Van Hiele-nivå kjennetegner elevene?

Ut i fra Mats og Frøya sine resonnementer, begrepsbruk og grunnleggende ferdigheter innenfor geometri er begge elevene på nivå 1, som er beskrevet slik i teorikapittelet:

> Nivå 1, analyse. Figurer er nå bærere av sine egenskaper. Det vil si at eleven kan analysere egenskapene til figurene, og gjenkjenne figurer gjennom deres egenskaper. Egenskapene er derimot ikke systematisert, og sammenhengen mellom figurene er ikke lagt merke til.

Dette er en beskrivelse som passer for begge elevene, men hvis man ser på helheten av begrunnelsene bak begge elevene nærmer både Mats og Frøya et nivå 2. Mats er nok litt nærmere nivå 2 enn det Frøya, er fordi han i flere situasjoner bruker resonnementer innenfor kategorien *klassifisering*, enn det Frøya gjør. Som Burger og Shaughnessy (1986) opplever jeg vanskeligheter med å plassere elevene innenfor et nivå. Vanskelighetene kommer av at elevene har innfridd beskrivelsen av en elev på nivå 1, samtidig som de viser forståelse for enkelte kjennetegn ved en elev på nivå 2 med tanke på resonnementer, begrepsbruk og grunnleggende ferdigheter innenfor geometri. Så i enkelte av løsningene Mats og Frøya har på oppgavene de møter, ligger elevene på et nivå 2, men variasjonen i løpet av hele intervjuet er stor. Et alternativ er Battista og Borrow som har utviklet en beskrivelse som går nærmere inn på overgangene mellom nivåene ved å opprette mellomnivåer som er beskrevet i teorikapittelet (delkapittel 2.1.2). Hvis man tar utgangspunktet i disse nivåene er Mats en elev på nivå 1.3, som beskriver en elev som bruker formelle geometriske begreper for å beskrive figurer med tilstrekkelig egenskaper og bruker ikke en minimal definisjon for figurene. Mats er en slik elev, siden han i sine resonnementer bruker formelle geometriske begreper for å klassifisere firkantene. Frøya er på nivå 1.2, en elev på nivå 1,2 begynner å tilegne seg formelle konsepter og bruker en blanding av uformelle og formelle beskrivelser av figurer. Det som blir avgjørende for at Frøya er på dette nivå 1.2 er blandingen av uformelle og formelle beskrivelser av figurer, som kommer tydelig frem i Frøya sine beskrivelser av parallelle linjer (se delkapittel 5.2.5). En slik inndeling får derfor frem de små forskjellene mellom Mats og Frøya. Mens Mats har beveget seg over til et mer formelt språk, har Frøya fortsatt noen uformelle beskrivelser i sitt språk.

6.1.5 Elevenes videre arbeid med geometri

Å undersøke forståelsen til elevene er viktig fordi den kan si noe om hvordan man kan tilrettelegge for videre læring. For å komme seg til nivå 2 må Mats og Frøya systematisere egenskapene til figurene. Det vil si at figurene må bli ordnet logisk, de må forstå sammenhengene mellom figurene og viktigheten av nøyaktige definisjoner. Mats og Frøya må være innforstått med at det er definisjonene som er gjeldene.

Van Hiele (1959/1984) har fem faser som elevene må igjennom for å komme seg til neste nivå. Første fase handler om *undersøkelse*, det vil si at eleven lærer å kjenne emnet ved hjelp av materialet som er presentert for eleven. Eleven oppdager en viss struktur. Andre fase handler om *direkte orientering*, som vil si at eleven vet hvilken retning aktiviteten er styrt mot og strukturene kommer til syne i materialet som utforskes. Under tredje fase tar *tydelighet* plass, eleven lærer da å uttrykke sin mening om strukturene som er observert. Deler av systemet med relasjoner til eleven blir dannet i denne fasen. Den fjerde fasen er for *fri tilpasning*. I denne fasen er for det meste av emnet kjent for eleven. Ved løsning av oppgaver som kan gjennomføres på forskjellige måter kan eleven oppnå kjennskap til resten av emnet. I femte fase *integreres* den nye kunnskapen eleven har fått et overblikk over til en helhet (Van Hiele, 1959/1984). En annen tilegnelse for at elevene skal komme seg til et nivå 2 er at de blir utfordret i alle de grunnleggende ferdighetene til Hoffer (1981). Hoffer (1981) mener de forskjellige ferdighetene er like viktig for elevene. Derfor må elevene få varierte oppgaver og utfordringer som kan styrke alle elevens ferdigheter, ikke bare en. I Van de Walle et al. (2014), en lærebok for lærerstudenter, blir fem punkter som kan støtte elever fra nivå 1 til nivå 2 presentert. Bakgrunnen for disse punktene er at Van de Walle et al. (2014) mener at en av de viktigste faktorene for at elever skal nå et høyere nivå er erfaringene læreren gir. Punktene til Van de Walle et al. (2014) handler om å utfordre eleven på eleven sitt nivå og på den måten nærme seg det neste nivået. Ved å stille spørsmål, gi utfordringer, teste ut hypoteser og definisjoner, og ta i bruk språket til neste nivå får elevene mulighet til å oppdage nye sammenhenger.

Et av spørsmålene jeg stilte i innledningen var om en elev kan det man skal kunne etter barneskolen. Et av kompetansemålene etter 7. trinn handler om at elevene skal kunne analysere todimensjonale figurer (Utdanningsdirektoratet, 2012a). Mats og Frøya kan analysere egenskaper ved todimensjonale figurer, og derfor nådd det målet som omhandler det jeg har undersøkt i dette masterprosjektet. Hva skal de lære videre i geometriundervisningen? Kompetansemålene i kunnskapsløfte for geometri etter 10. trinn handler blant annet om at elevene skal kunne undersøke og beskrive egenskaper til figurer, bruke og forklare formlikhet og Pytagoras setning, og utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2012b).. Ut i fra kompetansemålene er det fire punkter jeg synes er viktig som elevene skal gjennom, de skal konstruere, utforske, bevise og lage logiske resonnement innenfor geometri. For å kunne gjøre dette kreves det at de grunnleggende geometriske ideene og begrepene er på plass. Mats og Frøya tror jeg er klare for disse utfordringene, men det er viktig at de neste geometriske sammenhengene og begrepene blir presentert og arbeidet med. I denne prosessen kan van Hiele-nivåene være et hjelpemiddel for å tilrettelegge undervisningen for elevene.

I læreboka Mats og Frøya tar i bruk på 8. trinn kan man se nærmere på hvilke geometriske sammenhenger som blir presentert for elevene i nærmeste fremtid. I boka Faktor 1 for 8. trinn er emnene elevene får lære om i kapittelet om geometri listet opp slik: Geometriske begreper og figurer, vinkler, omkrets, tegning og konstruksjon av vinkler, og tegning og konstruksjon av figurer (Hjardar, 2006). Firkantene som blir presentert for elevene i delkapittelet om firkanter er rektangel, kvadrat, parallellogram, rombe og trapes. Det boka dessverre ikke legger opp til er utforsking av sammenhengene mellom de nevnte firkantene, så det blir opp til lærer å få til en slik utforskning.

6.2 Avslutning

6.2.1 Videre forskning

Som Battista (2007) vil jeg fremheve behovet etter studier som beskriver den kognitive utviklingen til elever i geometri. I dette masterprosjektet er det van Hiele-nivåene som har blitt utgangspunkt for forskningen, men jeg vil presisere at det finnes andre utviklede teorier blant annet av Piaget og Duval (Jones, 1998, 2002). Veldig mange studier går ut på, som mitt eget, å undersøke hvilke nivå elevene er på. I mitt arbeid savnet jeg studier som viste hvordan man kunne arbeide for å få elevene videre, men også hvordan man kan tilpasse for flere nivåer samtidig i undervisningen.

6.2.2 Betydning for meg som lærer

Dette masterprosjektet har hatt stor betydning for hvordan jeg kommer til å bli som lærer generelt, i matematikkfaget og spesielt i min undervisning av geometri. Jeg håper dette masterprosjektet i tillegg kan ha en betydning for andres geometriundervisning. Jeg har blitt mer bevisst på mitt eget språk i undervisningen, og hvilke sammenhenger som ligger bak det jeg sier til elevene. Det er viktig å tenke over at man skal undervise i noe man kan, og elevene ikke kan ennå, derfor er det viktig å reflektere over hva som har blitt en selvfølge for meg og ikke elevene. Jeg har blitt mer bevisst på hvordan elever utvikler begrepsforståelsen sin. Som lærer kan man ha en tanke om hvilket resultat undervisningen skal ha for begrepsforståelsen til elevene. Resultatet av undervisningen stemmer dessverre ikke med hensikten i alle tilfeller på grunn av mange faktorer. Noen av disse faktorene er at eleven ikke er mottakelig for den informasjonen, eleven kan mistolke eller allerede ha aspekter i sitt begrepsbilde som ikke samsvarer med den nye informasjonen. Denne informasjonen kan komme frem i elevenes resonnementer, og gjennom dette arbeidet har jeg som lærer fått kunnskap og erfaring i å analysere elevers resonnementer. Elevers resonnementer og begrepsbruk gir mye informasjon om elevens forståelse, og kan være viktige hjelpemidler for å kunne tilpasse undervisningen.

6.2.3 Konklusjon

Jeg tror Mats og Frøya er klare for geometrien de kommer til å møte på ungdomsskolen. Disse to elevene representerer seg selv og ikke hele sin klasse, trinn eller alle 8. trinns elever i Norge. Deres forståelse og nivå er individuelt, men man kan anta at andre elever har en lignende forståelse. For slike elever har dette masterprosjektet vist at elevene ofte bruker egenskapene til geometriske figurer, og klassifiserer geometriske figurer i sine resonnement. Jeg har kommet frem til at elevenes begrepsbilde for kvadrat, rektangel og parallellogram er godt utviklet, mens begrepsbildet for trapes trenger flere erfaringer og aspekter. Elevene trenger å bli utfordret på relasjonene mellom firkantene, slik at de på egenhånd kan komme frem til at noen firkanter tilhører flere enn en klasse. Elevene trenger utfordringer som får dem til å oppdage nye geometriske sammenhenger.

7. Litteraturliste

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. I F. K. Lester (Red.) & National Council of Teachers of Mathematics, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : Vol. 1* (s. 843-859). Charlotte, N.C: Information Age.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theories and Methods*: Pearson A & B.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. I D. A. Grouws (Red.) & National Council of Teachers of Mathematics, *Handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 420-464). New York: Macmillan.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 192-212.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2013). *Research Methods in Education* (7.utg. red.). Taylor & Francis.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *An International Journal, 24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). Framgang, men langt fram, Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011. Oslo: Akademika forlag.

Hjardar, E. (2006). *Faktor 1-3 : 1* (Bokmål[utg.]. red.). Oslo: Cappelen.

Hoffer, A. (1981). Geometry Is More Than Proof. *Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Jones, K. (1998). Geometry Working Group. *British Society for Research into Learning Mathematics*, 29.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. I L. Haggarty (Red.), *Aspects of Teaching Secundary Mathematics: persepectives on practice* (s. 121-139). London: RoutledgeFalmer.

Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (2013). Fortsatt en vei å gå, Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012. Oslo.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal Study of Children's Reasoning About Space and Geometry. I R. Lehrer & D. Chazan (Red.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space, Studies in mathematical thinking and learning* (s. 137-145). Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg. red.). Oslo: Universitetsforlag.

Renne, C. G. (2004). Is a Rectangle a Square? Developing Mathematical Vocabulary and Conceptual Understanding. *Teaching Children Mathematics, 10*(5), Vol.10(15), s.258-263.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Tjora, A. H. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2012a). Læreplan i matematikk fellesfag etter 7. årssteget. Hentet 12.01, 2015, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=372029323&kmsn=-632498266

Utdanningsdirektoratet. (2012b). Læreplan i matematikk fellesfag etter 10. årssteget. Hentet 10.04, 2015, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=98844765&kmsn=583858936

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (8 utg. red.). Essex: Pearson Education Limited.

Van Hiele, P. M. (1959/1984). A Child's Thought and Geometry. I D. Fuys (Red.), English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele (s. 247-255).

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. I D. Tall (Red.), *Advanced mathematical thinking, Mathematics education library* (Vol. 11, s. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). Spatial and geometrical reasoning. I A. Watson, K. Jones, & D. Pratt (Red.), *Key ideas in teaching mathematics : research-based guidance for ages 9-19* (s. 92-116). Oxford: Oxford University Press.

8. Vedlegg

8.1 Vedlegg 1

Til foreldre/foresatte for elever på 8. trinn ved […]

Anmodning om tillatelse til video-/lydopptak av intervju og innsamling av besvarelser.

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærer og tolkeutdanning. Dette skoleåret skal jeg gjennomføre et masterprosjekt som omhandler elevers forståelse av geometriske begreper.

For å få så godt dokumenterte data som mulig, har jeg i samråd med min veileder kommet til at det vil være ønskelig å gjøre videoopptak/lydopptak av intervju med elever. Derfor ber jeg om tillatelse fra dere til å kunne gjøre videoopptak/ lydopptak, samt samle inn tekster skrevet av elever under intervjuet ved […]. Det er snakk om et intervju på omtrent en skoletime med forskjellige typer oppgaver. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert, og at prosjektet ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det.

Intervjuet vil være basert på normale undervisningssituasjoner i klassen. Eleven vil få matematikk oppgaver rundt temaet geometri som han/hun vil måtte løse, jeg vil hjelpe til og stille spørsmål. Opptakene vil kun bli sett/hørt av meg, min veileder og eventuelt av andre masterstudenter i matematikkdidaktikk ved høgskolen. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre, vil involverte personer bli anonymisert. Innsamlede data vil bli slettet etter at prosjektet er avsluttet, senest 1. august 2015.

Hvis noen vil vite mer om dette, eller hva det innsamlede materialet skal brukes til, så er det bare å ta kontakt med meg på telefon eller e-post (se øverst for detaljer). Spørsmål kan også rettes til min veileder: Hermund Andre Torkildsen på: […]

Jeg håper dere synes dette er interessant og viktig, og at dere er villige til å la deres barn være med på det. Jeg ber foreldre/foresatte om å fylle ut svarslippen på neste side om hvorvidt dere gir eller ikke gir tillatelse til å la deres barn være med på prosjektet i klassen.

På forhånd takk!

Vennlig hilsen Camilla Stuveseth

Samtykkeerklæring

Som en del av masterprosjektet mitt ber jeg om tillatelse til å samtale med barnet ditt/deres og gjøre lyd- og videoopptak der han/hun er med og bruke matematikkoppgaver løst av han/henne.

Forutsetningen for tillatelsen er at tekster og annet innsamlet materiale blir anonymisert og behandlet med respekt, og at prosjektet følger gjeldende retningslinjer for etikk og personvern.

Sett kryss:

☐ Jeg/vi gir tillatelse. Jeg/vi har snakket med jenta/gutten vår om dette, og hun/han har også gitt sitt samtykke.

Jeg/vi er klar over at deltagelsen er frivillig, og at vi og barnet når som helst og uten grunn kan trekke oss fra prosjektet.

Dato: ………………………

Elevens fornavn og etternavn:.………………….………………………….……………………..

Underskrift av foresatt(e): ……………………………………………………………………..

Vennligst returner svarslippen til lærer […] så snart som mulig.

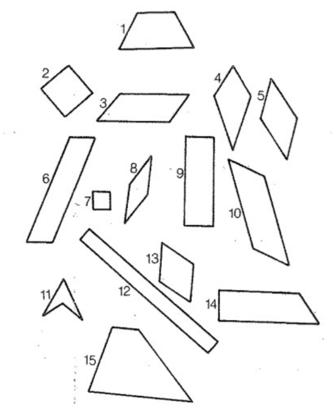
8.2 Vedlegg 2

Intervjuguide

Intervjuet er lagt opp slik at eleven får forskjellige oppgaver som er skrevet inn her. Ut i fra hvordan eleven løser oppgaven vil intervjuer stille forskjellige spørsmål, noen alternativer er skrevet inn her som eksempler.

1. Tegn først en firkant.
   Tegn en firkant til, som er annerledes.
   Fortsett til eleven ikke klarer å tegne flere.
   Spørsmål:
   Hva er forskjellen mellom figurene?
   Hvor mange forskjellige firkanter kan du tegne?

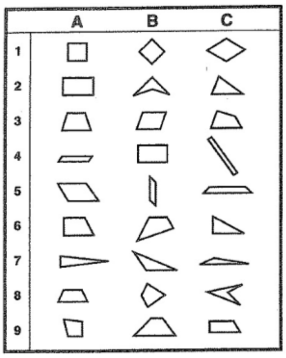
2. Eleven får utdelt et ark med firkanter (figur 8.1).
   Eleven skal markere alle kvadratene med k, rektanglene med r, parallellogrammene med p og trapesene med t. Eleven skal deretter argumentere for sine markeringer og for hvorfor figurer har blitt utelatt.
   Spørsmål:
   Hva vil du be noen som skal markere alle rektanglene å se etter?
   Er nr. 2 et rektangel?
   Er nr. 9 et parallellogram?



Figur 8.1

3. Ett sett med firkanter blir spredt utover bordet. Eleven skal sortere noen figurer sammen som er like på en måte.
   Spørsmål:
   Hvorfor er de like?
   Kan du sortere på en annen måte? (Fortsetter til eleven ikke klarer å sortere på flere måter.)

4. Eleven skal markere hvilke figurer på ett ark(figur 8.2) som er mest like og forklare hvorfor de er mest like.



Figur 8.2

5. Intervjuer har en liste med hint som skal føre frem til en figur. Eleven får et hint om gangen. Når eleven føler han har nok stopper han intervjueren, hvis han vil ha flere varsler han intervjueren. Får bruke tilgjengelige hjelpemidler, som ark og blyant. Når eleven indikerer at han har nok hint spør intervjuer: Er du sikker eller vil et nytt hint kunne endre ditt svar?

   Eksempel på hint, parallellogram:
   1. Lukket figur med 4 rette linjer.
   2. Den har to lengre sider og to kortere.
   3. De to lange sidene er like lange.
   4. De to korte sidene er like lange.
   5. En av vinklene er større enn av de andre vinklene.
   6. To av vinklene har samme størrelse.
   7. De to andre vinklene har også samme størrelse.
   8. De to lange sidene er parallelle.
   9. De to korte sidene er parallelle.

Rektangel:

1. Lukket figur med 4 rette linjer.
2. Den har to lengre sider og to kortere.
3. De to lange sidene er like lange.
4. De to korte sidene er like lange.
5. De to lange sidene er parallelle.
6. De to korte sidene er parallelle.
7. Alle vinklene er like store.
8. Den har bare rette vinkler.

6. Eleven får et ark med en type firkant. Elevene skal arbeide med egenskapene og lage en liste over dem. De får bruke forskjellige typer utstyr som gradskive, linjal, speil osv. Eleven oppmuntres til å bruke ordet minst, for eksempel rektangler har minst to like sider. Deretter skal eleven kategorisere egenskapene etter sider, vinkler, diagonaler og symmetrier.
   Hvis eleven er klar for det kan man utvide oppgaven. Eleven skal da lage en minimaldefinisjonsliste. Det vil si at listen skal inneholde akkurat det eleven trenger for å vite hvilken figur det er.