Oddmund B. Skogen

Degenerering i modulvarieteter

Masteroppgåve i matematiske fag
Rettleiar: Sverre Olaf Smalø
Mai 2021

Masteroppgåve

NTNU
Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Oddmund B. Skogen

Degenerering i modulvarieteter

Masteroppgåve i matematiske fag
Rettleiar: Sverre Olaf Smalø
Mai 2021

Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Samandrag

La M vera matrisa $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, og la gruppa av inverterbare (2×2)-matriser over $\mathbb{C}$, $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$, verke på M ved konjugering. Dersom G er på forma $\left(\begin{smallmatrix}\epsilon & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$, der $0 \neq \epsilon \in \mathbb{C}$, vil $GMG^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \epsilon\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$. Med andre ord er det ein isomorfi mellom matrisene $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ og $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \epsilon\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, så lenge $\epsilon \neq 0$. La ϵ gå mot "grenseverdien" 0. Då vil matrisa $N = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ ligge i tillukkinga til banen av gruppeverknaden på M, og me seier at M *degenererer* til N med den "vanlege" topologien på $\mathbb{C}$.

For å generalisere degenerering til ein vilkårleg algebraisk lukka kropp, K, vert *zariskitopologien* introdusert. Då seier me at M degenererer til N dersom N er inneheldt i zariskitillukkinga av banen til M. Dette gjer degenerering til ein delvis orden på mengda av isomorfiklassar av modular.

Seinare vert denne ordninga generalisert til ein vilkårleg kropp K. I denne oppgåva vert teori og dømer for denne ordninga presentert, spesielt for modular over polynomringen i ein og to variablar.

Abstract

Let M be the matrix $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, and let the group of invertible (2×2)-matrices over a field $\mathbb{C}$, denoted $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$, act on M by conjugation. If G is a matrix of the form $\left(\begin{smallmatrix}\epsilon & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$, with $0 \neq \epsilon \in \mathbb{C}$, then $GMG^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \epsilon\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$. This gives an isomorphism between the matrices $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ and $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \epsilon\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, as long as $\epsilon \neq 0$. Now, let ϵ go to its "limit value" 0. Then the matrix $N = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ is contained in the closure of the orbit of the group action on M, and we say that M *degenerates* to N with the "usual" topology on $\mathbb{C}$.

To generalize this to an arbitrary algebraically closed field K, the *Zariski topology* is introduced. Then we say M degenerates to N if N is contained in the Zariski closure of the orbit of M. This makes degeneration a partial order on the set of isomorphism classes of modules.

Later, this order is generalized to an arbitrary field K. In this thesis theory and examples of this partial order is discussed, especially for modules over the polynomial ring in one and two variables.

Innhald

1 Introduksjon

I samandraget vart det vist at $N = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ er inneheldt i tillukkinga til banen av gruppeverknaden frå den generelle lineære gruppa på $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ under konjugering for komplekse tal. Då seier me at M *degenererer* til N. I dette dømet vert den "vanlege" topologien på $\mathbb{C}$ nytta. Kva skjer dersom ein nyttar zariskitopologien på ein vilkårleg algebraisk lukka kropp i staden? Då vil degenerering danne ein delvis orden på isomorfiklassar av modular. I denne oppgåva er målet å studere denne ordeninga med å presentere teori og dømer. Det er venta at lesaren er kjend med algebraiske strukturar som grupper, ringar og modular. Bakgrunnskunnskapar innan homologisk algebra og topologi er og nyttig. Ein løpande referanse for heile teksten er [Smalø(2008)].

Første steg er å introdusere omgrep frå algebraisk geometri i 2.1. Etter dette, i 2.2, definerer me representasjonar og ser på nokre dømer på desse. Representasjonar gjev opphav til ein modulstruktur, og ein verknad frå den generelle lineære gruppa på desse modulane vert introdusert i 2.3. Banane til denne gruppeverknaden svarar til isomorfiklassar av modular. Då vil ein isomorfiklasse M degenerere til ein annan isomorfiklasse N dersom N er inneheldt i tillukkinga av banen til M. Dette gjev ein delvis orden på isomorfiklassane av Λ-modular. Denne ordninga vert kalla degenerasjonsordninga. I polynomringen kan desse banane reknas ut eksplisitt, som vert gjort i 2.4. Denne seksjonen inneheld og resultat som omhandlar resultanten og dikriminanten av polynom. Seksjon 2 vert avslutta i 2.5 med å sjå på representasjonar av kogger med interessante eigenskapar.

Seksjon 3 startar med nokre eksakte følgjer som gjev degenerering. Spesielt gjev resultata til Riedtmann og Zwara ei komplett algebraisk skildring av degenerasjon. Dette gjev ein ny definisjon av degenerering for ikkje algebraisk lukka kroppar og artinske algebraar generelt. Ein ny orden på isomorfiklassar av modular, *hom*-ordenen, vert introdusert, og samanhengen mellom denne nye ordninga og degenerasjonsordninga vert studert. Vidare, i 3.2, vert groethendieckgruppa over ein algebra definert. Dette gjev ei skildring av komposisjonsfaktorane i ei degenerering . I 3.3 vert degenerering over hovudidealområder, og spesielt polynomringen i ein variabel, studert. Det viser seg at degenerasjonsordninga for desse heng saman med *dominantordninga* for *partisjonar*. Dominantordninga er og ekvivalent med hom-ordenen, så denne situasjonen gjev ei komplett skildring av degenerering. Polynomringen i to variblar vil ikkje vera like enkel å jobbe med, og dømer på dette er gjeve i 3.4. Det same gjeld i ikkje-kommutative tilfeller som vert studerert i 3.5. Seksjon 3 vert avslutta med å sjå på nokre resultat for algebraar av endeleg representasjonstypar i 3.6, og eit resultat som omhandlar Ext i 3.7.

Til slutt, i seksjon 4, vert samanhengen mellom degenerering og visse funktorar introdusert. I 4.1 vert endelegpresenterte funktorar definert og viser nokre resultat som omhandlar desse. Oppgåva avsluttast i 4.2 med å sjå på samanhengen mellom endelegpresenterte funktorar og degenerering.

Eg vil retta ei stor takk til rettleiaren min, Sverre Smalø, for uvurderleg hjelp og støtte både i bachelor- og masteroppgåveskrivinga mi. Takk for gode samtalar, sparring og ein å undre seg over det store matematiske mysteriet saman med. Samtalane våre har bidrege til at mi matematikkinteresse og forståing er vorte større enn ho elles ville vore.

Er i det heile teke takksam for folka eg har møtt i mi tid ved NTNU og Institutt for matematiske fag.

2 Representasjonar

2.1 Affine varietetar

Denne seksjonen er basert på kapittel 4 og 6 frå [Falb(2018)].

La K vera ein algebraisk lukka kropp, og la $\mathbb{A}_K^n$ vera det affine rommmet K^n av n-tuplar over K. Ei mengd $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ vert kalla ei affin algebraisk mengd dersom

$$V = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n \mid f_i(a) = 0, f_i(x) \in K[x_1, \dots, x_n], i \in I\}.$$

Altså er V ei affin algebraisk mengd dersom V er nullpunkta til ein familie polynom i n variablar over K. La $\mathfrak{a} \subseteq K[x_1, \dots x_n]$ vera eit ideal. Då er $V(\mathfrak{a})$ definert som mengda $\{a = (a_1, \dots, a_n) : f(a) = 0, \ \forall \ f \in \mathfrak{a}\}$. Faktisk kan ein alltid sjå på tilfella der $V = V(\mathfrak{a})$, sidan $V(\{f_i \mid i \in I\}) = V(\mathfrak{a})$, der $\mathfrak{a}$ er idealet generert av alle f_i.

Med å la dei affine algebraiske mengdene vera lukka mengder, gjev dette ein topologi på $\mathbb{A}_K^n$. At dette er ein topologi følgjer av at $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \cap V(\mathfrak{a}_i)$ og $V(\mathfrak{a}_i) \cup V(\mathfrak{a}_j) = V(\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j) = V(\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j)$. Vidare er $V(0) = \mathbb{A}_K^n$ og $V(K[x_1, \dots x_n]) = \varnothing$. Denne topologien vert kalla *zariskitopologien* på $\mathbb{A}_K^n$.

Dei opne delmengdene på $\mathbb{A}_K^n$ er definert som komplimentet til dei lukka delmengdene. Altså, dersom $\mathfrak{a}$ er eit ideal i $K[x_1, \dots, x_n]$, og $V(\mathfrak{a})$ er den affine algebraiske mengda på $\mathfrak{a}$, så er $D(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}_K^n \setminus V(\mathfrak{a})$ ei open mengd. Dei opne delmengdene av $\mathbb{A}_K^n$ kan og skildrast som $D(\mathfrak{a}) = \{a \in \mathbb{A}_K^n \mid \exists \ f \in \mathfrak{a} \text{ med } f(a) \neq 0 \ \}$.

Ei delmengd, $V \subset \mathbb{A}_K^n$, vert kalla irredusibel dersom V ikkje kan skrivast som unionen av to ekte lukka delmengder av V. Altså, dersom $V = V_1 \cup V_2$, der V_1, V_2 er lukka delmengder av V, så er $V = V_1$ eller $V = V_2$. Ein *affin varietet* er ei irredusibel affin algebraisk mengd. Ei lukka irredusibel delmengd av ein affin varietet vert kalla ein undervarietet.

Ei delmengd $U \subset X$ vert kalla tett i X dersom tillukkinga av U er heile X, altså $\overline{U} = X$. I zariskitopologien på ein affin varietet er alle opne, ikkje-tomme delmengder tette.

La no $Z \subseteq \mathbb{A}^n$, og la

$$I(Z) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0, \forall a = (a_1, \dots, a_n) \in Z\}.$$

Med andre ord er mengda $I(Z)$ alle polynoma i $K[x_1, \dots, x_n]$ som har punkta i Z som nullpunkt. Då er $\overline{Z} = V(I(Z))$.

2.2 Representasjonar

La K vera ein kropp, og la Λ vera ein endeleggenerert assosiativ K-algebra med 1. Vidare, la $M_d(K)$ vera algebraen av $(d \times d)$-matriser over K. Me definerer

$$\operatorname{rep}_d \Lambda = \{f : \Lambda \to M_d(K) \mid f \text{ ein } K\text{-algebra homomorfi}\},$$

altså mengda av alle homomorfiane frå algebraen Λ til algebraen av $(d \times d)$- matriser over K. Sidan Λ er endeleggenerert, så er Λ isomorf med ${}^{K\langle x_1, \dots x_n\rangle}/_{I}$, der $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ er den frie algebraen i n ikkje-kommuterande variablar over K, og I er eit ideal i $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Denne isomorfien er ikkje eintydig. Då er eit element $\phi \in \operatorname{rep}_d \Lambda$ bestemt av verdiane til elementa $x_1, \dots, x_n$. Difor kan ϕ identifiserast med n-tuppelen
$(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) \in M_d(K)^n$. Sjølv om algebraen er "enkel", kan $\operatorname{rep}_d \Lambda$ vera "stor", spesielt om kroppen ikkje er algebraisk lukka. Her er to dømer som illustrerer dette:

Dømer:

1. Sjå på $\mathbb{C}$ som ein todimensjonal $\mathbb{R}$-algebra. Me ønskjer ei avbilding $\phi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, slik at kvar $\alpha \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ vert sendt til αI, der I er identitetsmatrisa, og ei matrise $M \in M_2(\mathbb{R})$ slik at $M^2 = -I$. Til dømes vil matrisa $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vera slik at $M^2 = -I$. Då er $\phi(a + bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ ein representasjon på $\mathbb{C}$. Dette er ikkje den einaste representasjonen på $\mathbb{C}$. Til dømes vil alle matriser på forma $M = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$, der $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vera slik at $M^2 = -I$. Ei generell matrise, J, slik at $J^2 = -I$ er på forma $J = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-(a^2+1)}{b} & -a \end{pmatrix}$, der $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Altså kan mengda av J, slik at $J^2 = -I$, identifiserast med $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, som er ei uendeleg mengd. Sidan $\phi \in \operatorname{rep}_2 \mathbb{C}$ er gjeve av $\phi(a + bi) = aI + bJ$, så er ϕ bestemt av biletet til i. Altså kan $\operatorname{rep}_2 \mathbb{C}$ identifiserast med mengda $\{J \in M_2(\mathbb{R}) \mid J^2 = -I\}$.

2. La $K = \overline{K}$, og la Q vera koggeren $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Då vil vegalgebraen $\Lambda = KQ$ vera ein algebra av dimensjon 3 med basiselement e_1, e_2 og α, der e_1 er den trivielle vegen ved 1, og e_2 er den trivielle vegen ved 2. Her følgjer multiplikasjonstabellen for denne algebraen:

$$\begin{array}{ccc} e_1 * e_1 = e_1, & e_1 * e_2 = 0, & e_1 * \alpha = 0, \\ e_2 * e_1 = 0, & e_2 * e_2 = e_2, & e_2 * \alpha = \alpha, \\ \alpha * e_1 = \alpha, & \alpha * e_2 = 0, & \alpha * \alpha = 0 \end{array}$$

   Identitetselementet i Λ er $e_1 + e_2$. La $\phi \in \operatorname{rep}_2(\Lambda)$. Då vil $\phi(e_1)$ vera ein idempotent, sei E_1. Dette gjer at elementet e_2 vert sendt til $1 - E_1$. Vidare vil α sendast til ei matrise M, slik at $M \cdot E_1 = M$, $(1 - E_1) \cdot M = M$ og $M^2 = 0$. Altså vil biletet av alle basiselementa vera bestemt av kvar e_1 og α vert sendt. Difor kan $\operatorname{rep}_2 \Lambda$ identifiserast med mengda $\{E_1 \in M_2(\mathbb{R}) \mid E_1^2 = E_1\}$. Dersom $E_1 = 0$, vert e_2 sendt til identitetsmatrisa, som gjev biletet $K^2 \xrightarrow{0} 0$. Om e_1 vert sendt til ei matrise av rang 2, så må dette vera identitetsmatrisa. Då vert e_2 sendt til 0, som gjev biletet $0 \xrightarrow{0} K^2$. Dersom e_1 sendast til ei matrise av rang 1, så er det fleire val. Ei generell idempotent matrise av rang 1 er på forma $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{(a-a^2)}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, for $a, b \in K$ dersom $b \neq 0$. Om $b = 0$, er ei generell idempotent matrise på forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{smallmatrix}\right)$, der $a, c \in K$ og a er idempotent. Sidan K er ein kropp, så må $a = 1$ eller $a = 0$. Dette gjev to matriser, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$ og $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vidare vil e_2 og sendast til ei matrise av rang 1, som gjev biletet $K \xrightarrow{\alpha} K$. Her er det mange val for α, men seinare vert det vist at det berre er to isomorfiklassar, nemleg $K \xrightarrow{0} K$ og $K \xrightarrow{\alpha} K$, der $\alpha \neq 0$ er biletet til α.

I begge desse døma er mengda av representasjonar gjeve av polynomlikningar. Til dømes gjev døme 1, med $J = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, likninga $J^2 + I = 0$. Med å multiplisere ut desse matrisene får ein følgjande polynomlikningar

$$\begin{aligned} a^2 + bc + 1 &= 0 \\ ba + bd &= 0 \\ ca + cd &= 0 \\ d^2 + bc + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dette gjeld generelt og gjev ein ny måte å skildre $\text{rep}_d \Lambda$ på. Meir spesifikt, la $(A_1, \ldots, A_n)$ vera ein n-tuppel i $M_d(K)^n$. La I vera idealet frå $\Lambda \cong K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$. For kvar $\alpha \in I$, så vil $\alpha(A_1, \ldots, A_n)$ gje ei mengd polynomlikningar på elementa i matrisene $A_1, \ldots, A_n$. Då er mengda av alle desse likningane isomorf med $\text{rep}_d \Lambda$. Altså,

$$\text{rep}_d \Lambda \cong \{(A_1, \ldots, A_n) \in M_d(K)^n \mid \alpha(A_1, \ldots, A_n) = 0, \forall \alpha \in I\},$$

og $\text{rep}_d \Lambda$ er ei affin algebraisk delmengd av det affine rommet $M_d(K)^n$.

2.3 Representasjonar og modular

Ein representasjon $\phi : \Lambda \to M_d(K)$ av algebraen Λ, gjev opphav ein venstremodul over Λ. Definer eit produkt på element frå Λ med element frå K^d ved å la $\lambda v = \phi(\lambda)v$ for alle $v \in K^d$, $\lambda \in \Lambda$. Då vert K^d ein venstre Λ-modul. La M vera ein venstremodul over Λ. Fikser ein $\lambda \in \Lambda$. Då vil $\phi(\lambda) : m \mapsto \lambda m$ vera ei lineær avbilding på rommet M. Dersom kvar $\lambda \in \Lambda$ vert tileigna operatoren $\phi(\lambda)$, så gjev dette ein representasjon av Λ som svarar til modulen M. Dersom ein vel basis for M som eit K-vektorrom, så er denne modulen isomorf med K^d som vektorrom. Dette viser at dersom M er ein venstremodul, så kan ein konstruere ein representasjon. Denne konstruksjonen er basert på seksjon 1.3 i [Drozd & Kirichenko(1994)].

La $f \in \text{rep}_d \Lambda$. Tidlegare er det vist at ein representasjon er bestemt av kvar den sender generatorelementa til $\Lambda \cong K\langle x_1, \ldots x_n\rangle/I$. Altså kan f identifiserast med n-tuppelen $(f(x_1), \ldots f(x_n))$. La $\text{Gl}_d(K)$ vera den generelle lineære gruppa av invertible $(d \times d)$-matriser over K, og la $\text{Gl}_d(K)$ verke på $\text{rep}_d \Lambda$ ved konjugering. Med andre ord, for $G \in \text{Gl}_d(K)$ og $f \in \text{rep}_d \Lambda$, så er $G * f = (Gf(x_1)G^{-1}, \ldots, Gf(x_n)G^{-1})$. Banen til eit element $f \in \text{rep}_d \Lambda$ er mengda $O(f) = \{G * f \mid G \in \text{Gl}_d(K)\}$. Lengda til ein bane er talet på distinkte element i banen. Sidan $\text{rep}_d \Lambda$ er ei affin algebraisk delmengd av $M_d(K)^n$, kan $O(f)$ identifiserast med mengda

$$\{(Gf(x_1)G^{-1}, \ldots, Gf(x_n)G^{-1}) \mid \alpha(Gf(x_1)G^{-1}, \ldots, Gf(x_n)G^{-1}) = 0, \forall\ \alpha \in I\}.$$

Difor er verknaden frå $\text{Gl}_d(K)$ på $\text{rep}_d \Lambda$ lukka. Observer at tillukkinga av denne mengda er

$$\overline{O(f)} = V(I(O(f)) = \{g \in \text{rep}_d \Lambda \,\big|\, \alpha(g) = 0,\ \forall\ \alpha \in I \text{ slik at } \alpha(O(f)) = 0\}$$

.

Lemma 1.2.4 i [Ellingsen(2007)] gjev følgjande korrespondanse mellom banane til $\text{rep}_d \Lambda$ og isomorfiklassar av Λ-modular:

Lemma 2.1. *La $f, f' \in \text{rep}_d \Lambda$, og la M_f vera modulen assossiert med f, og $M_{f'}$ vera den assossierte modulen til f'. Då er $M_f \cong M_{f'}$ viss og berre viss f og f' tilhøyrer same bane under gruppeverknaden frå $\text{Gl}_d(K)$, altså $f' \in O(f)$.*

La M og N vera to isomorfiklassar av Λ-modular med dimensjon d som K-vektorrom. Me seier at M degenererer til N dersom banen som korresponderer med isomorfiklassen til N i $\text{rep}_d \Lambda$ er inneheldt i tillukkinga av banen som korresponderer med isomorfiklassen til M. Med andre ord, $n \in \overline{O(m)}$, for $n \in N, m \in M$. Om dette er tilfellet skriv me $M \leq_{deg} N$. Dette dannar ein delvis orden på mengda av isomorfiklassar av modular:

Lemma 2.2. *Isomorfiklassar av Λ-modular dannar ei delvis ordna mengd med $\leq_{deg}$.*

Bevis. La M, N og P vera tre isomorfiklassar av Λ-modular og la $m \in M, n \in N$ og $p \in P$. Må vise at $\leq_{deg}$ er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

1. Refleksiv: $M \leq_{deg} M \iff m \in \overline{O(m)}$, som er klart.

2. Antisymmetrisk: Dette vert utsett til proposisjon 2.4.

3. Transitiv: $M \leq_{deg} N$ og $N \leq_{deg} P \iff n \in \overline{O(m)}$ og $p \in \overline{O(n)}$. La $I = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(m') = 0, \ \forall\ m' \in O(m)\}$. Må då vise at $p \in \overline{O(m)}$, men det er openbart at dersom $\alpha(n) = 0$ for alle $\alpha \in I$, så må $\alpha(p) = 0$. Altså er $p \in \overline{O(m)}$.

□

Neste steg er å vise at $\leq_{deg}$ er antisymmetrisk. Dette er ikkje så rett fram som refleksivitet og transitivitet. Følgjande lemma gjev at degenerering er antisymmetrisk. Dette resultatet er frå 8.3 i [Humphreys(2012)]:

Lemma 2.3. *La K vera algebraisk lukka.*

- *For kvar m i $\operatorname{rep}_d \Lambda$, så er banen $O(m)$ open i tillukkinga si, $\overline{O(m)}$.*

- *For kvar m i $\operatorname{rep}_d \Lambda$, så vil tillukkinga av banen til m, $\overline{O(m)}$, vera ein union av banar.*

- *Dimensjonen til komplementet til ein bane i zariskitillukinga er ekte mindre enn dimensjonen til banen sjølv. Meir eksplisitt,* $\dim(\overline{O(m)} \setminus O(m)) < \dim \overline{O(m)}$.

Proposisjon 2.4. *Dersom $M \leq_{deg} N$ og $N \leq_{deg} M$, så er $M \cong N$.*

Følgjande resultat gjev ein formel for å rekne ut dimensjonen til banane. Dette vert til nytte seinare i teksten.

Lemma 2.5. *Dimensjonen til banen til eit element $m \in \operatorname{rep}_d \Lambda$ er gjeve ved* $\dim O(m) = d^2 - \dim \operatorname{End}_\Lambda(M_m) = \dim \operatorname{Gl}_d(K) - \dim \operatorname{Aut}_\Lambda(M_m)$.

La Λ vera $\mathbb{C}$-algebraen $\mathbb{C}[x]$. Sjå no på $\operatorname{rep}_2 \Lambda$, som korresponderer til $M_2(\mathbb{C})$. Då er banane under verknaden frå $\operatorname{Gl}_2(\mathbb{C})$ gjeve av eigenverdiane til matrisane i $M_2(\mathbb{C})$. Kvar $\alpha \in \mathbb{C}$ gjev opphav til to banar. Bana til matrisa $N = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ med berre eit element, og bana til matrisa $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Begge desse matrisene har α, med multiplisitet 2, som eigenverdi. Anta no at N ligg i banen til M. Då finst ein $G = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Gl}_2(\mathbb{C})$, slik at $GMG^{-1} = N$. Altså $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad\alpha-c(a+b\alpha) & a^2 \\ -c^2 & a(c+d\alpha)-bc\alpha \end{pmatrix}$. Dette gjev at $a = c = 0$, men dette motstrider at G er invertibel. Altså ligg ikkje N i banen til M.

Observer at $(M - \alpha I)^2 = 0$, og at denne relasjonen held for alle elementa i $O(M)$. Dette sidan, for ein $G = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Gl}_2(\mathbb{C})$, så er $GMG^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{ac}{ad-bc} & \frac{a^2}{ad-bc} \\ -\frac{c^2}{ad-bc} & \alpha + \frac{ac}{ad-bc} \end{pmatrix}$. Då er $(GMG^{-1} - \alpha I)^2 = (\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix})^2 = 0$. Dette gjer at $\overline{O(M)} = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid (A - \alpha I)^2 = 0\}$. Då ligg N i $\overline{O(M)}$, men ikkje i $O(M)$, som gjer at $M \leq_{deg} N$ ekte. Same argument vil gjelde for andre kroppar enn $\mathbb{C}$.

2.4 Representasjon av polynom

Me ønskjer no å studere koggeren $P: \ 1 \circlearrowleft^{\alpha}$. Vegalgebraen til P er isomorf med $K[x]$. La K vera ein kropp. Då vil alle homomorfiar frå $K[x]$ inn i $M_d(K)$ vera gjeve av biletet til x, og alle matriser i $M_d(K)$ kan vera biletet til x. Altså kan $\operatorname{rep}_d K[x]$ identifiserast med $M_d(K)$. La $f \in K[x]$ vera av grad d. Då er $f = f_0 + f_1x + \dots f_dx^d$, og $f_d \neq 0$. Dersom K er algebraisk lukka, så er $f = \prod(x - r_i)^{n_i}$, der r_i er røttene til f, og n_i er multiplisiteten til rota r_i. Dersom det finst ein $n_i \geq 2$ så vil f og den deriverte av f, f', har ei felles rot. Altså er $\gcd(f, f') \neq 1$. Dette kan skildras med *diskriminanten* av eit polynom. Her følgjer nokre definisjonar og resultat frå [W1] og [W2]:

Definisjon 2.1. *La $f, g \in K[x]$ der $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n$, $g(x) = g_0 + g_1x + \dots g_dx^d$ og $f_n, g_d \neq 0$. Resultanten av f og g, $\operatorname{Res}(f, g)$, er deteminanten til matrisa*

$$\begin{vmatrix} f_n & 0 & \dots & 0 & g_d & 0 & \dots & 0 \\ f_{n-1} & f_n & \dots & 0 & g_{d-1} & g_d & \dots & 0 \\ f_{n-2} & f_{n-1} & \ddots & 0 & g_{d-2} & g_{d-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & f_n & \vdots & \vdots & \ddots & g_d \\ f_0 & f_1 & \dots & \vdots & g_0 & g_1 & \dots & \vdots \\ 0 & f_0 & \ddots & \vdots & 0 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & f_1 & \vdots & \vdots & \ddots & g_1 \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots & g_0 \end{vmatrix}$$

Vidare er diskriminanten av eit polynom f, der $\deg f \geq 1$,

$$\operatorname{Disc}(f) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{f_n} \operatorname{Res}(f, f')$$

.

Dersom resultanten av to polynom er null, så vil polynoma ha ein felles faktor. Meir presist:

Proposisjon 2.6. *La $f, g \in K[x]$ med $\deg(f) \geq 1$ og $\deg(g) \geq 1$. Dersom $\operatorname{Res}(f, g) = 0$, medfører dette at $\gcd(f, g) \neq 1$.*

For å vise dette resultatet trengs følgjande lemma:

Lemma 2.7. *La $g, f \in K[x]$. Då har g og f ein felles faktor viss og berre viss det finst $s, t \in K[x] \setminus \{0\}$ slik at $0 \leq \deg s < \deg g, 0 \leq \deg t < \deg f$ og $fs + gt = 0$.*

Bevis. La f og g ha ein felles faktor $h \in K[x]$. Då er $f = (\frac{f}{h})h$ og $g = (\frac{g}{h})h$. Dette gjev $f\frac{g}{h} = \frac{f}{h} \cdot h \cdot \frac{g}{h} = \frac{f}{h} \cdot g$. Då er $f \cdot \frac{g}{h} - \frac{f}{h} \cdot g = 0$. Dette gjer at $s = \frac{g}{h}$ og $t = -\frac{f}{h}$ oppfyller krava.

Anta no at det finst s og t slik at $0 \leq \deg s < \deg g$, $0 \leq \deg t < \deg f$ og $fs + gt = 0$. Altså er $fs = -gt$. Dersom f ikkje har nokon felles faktor med g, så må f vera ein divisor av t. Sidan $t \neq 0$ og har mindre grad enn f, så kan f umogleg vera ein faktor av t. Dette gjer at f og g må ha ein felles faktor. □

Dette gjev følgjande bevis for proposisjon 2.6:

Bevis. La $f, g \in K[x]$ slik at $f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n$ og $g(x) = g_0 + g_1x + \dots g_dx^d$, der $f_n, g_d \neq 0$. Vidare, la $s, t \in K[x] \setminus \{0\}$ vera slik at $0 \leq \deg s < \deg g$ og $0 \leq \deg t < \deg f$. Då er $s(x) = s_0 + s_1x + \dots + s_{d-1}x^{d-1}$, der ikkje alle $s_i = 0$ for $0 \leq i \leq d-1$, og $t(x) = t_0 + t_1x + \dots + t_{n-1}x^{n-1}$, der ikkje alle $t_j = 0$ for $0 \leq j \leq n-1$. La $p(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$. Då er $p(x) = (f_ns_{d-1} + g_dt_{n-1})x^{n+d-1} + (f_ns_{d-2} + f_{n-1}s_{d-1} + g_{d-1} + t_{n-d-2} + g_{d-2}t_{n-d-1})x^{d+n-2} + \dots + (f_0s_0 + g_0t_0)$. Førre lemma gjev at f og g har ein felles divisor dersom $p(x) = 0$, og dette skjer dersom alle koeffisientane er null. Dette gjev likningssystemet

$$\begin{aligned} f_ns_{d-1} + g_dt_{n-1} &= 0 \\ f_ns_{d-2} + f_{n-1}s_{d-1} + g_{d-1} + t_{n-d-2} + g_{d-2}t_{n-d-1} &= 0 \\ &\vdots \\ f_0s_0 + g_0t_0 &= 0 \end{aligned}$$

Likningsystemet kan skrivast på matriseform som

$$\begin{pmatrix} f_n & 0 & \dots & 0 & g_d & 0 & \dots & 0 \\ f_{n-1} & f_n & \dots & 0 & g_{d-1} & g_d & \dots & 0 \\ f_{n-2} & f_{n-1} & \ddots & 0 & g_{d-2} & g_{d-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & f_n & \vdots & \vdots & \ddots & g_d \\ f_0 & f_1 & \dots & \vdots & g_0 & g_1 & \dots & \vdots \\ 0 & f_0 & \ddots & \vdots & 0 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & f_1 & \vdots & \vdots & \ddots & g_1 \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{d-1} \\ s_{d-2} \\ \vdots \\ s_1 \\ s_0 \\ t_{n-1} \\ t_{n-2} \\ \vdots \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Likningssystemet har ei ikkje-triviell løysing dersom determinanten til denne matrisa er null, altså om $\mathrm{Res}(f, g) = 0$. □

Korollar 2.7.1. *La $f \in K[x]$, der K er ein algebraisk lukka kropp. Då har f ei multippel rot viss og berre viss* $\mathrm{Disc}(f) = 0$.

Her kjem eit døme for å illustrere dette: La $f(x) = ax^2 + bx + c$. Då er $f'(x) = 2ax + b$ og $\mathrm{Res}(f, f') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$. Dette gjev at $\mathrm{Res}(f, f') = a(4a - b^2)$, som gjev at $\mathrm{Disc}(f) = \frac{(-1)}{a}a(4ac - b^2) = b^2 - 4ac$. Dette kan me kjenne att frå formelen $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Dette gjer at andregradspolynom har multiple røtter dersom det under rotteiknet er 0.

Eit naturleg spørsmål er om det er "flest" polynom med multiple røtter, eller med distinkte røtter? Svaret er at det er "flest" polynom med distinkte røtter. Meir presist:

Proposisjon 2.8. *La $K = \overline{K}$ vera av karakteristikk 0, la $2 \leq d \in \mathbb{Z}$, og la $\mathcal{F}_d \subset K[x]$ vera mengda av polynom i $K[x]$ av grad d som har distinkte røtter. Då er $\mathcal{F}_d$ tett mengda av alle polynom av grad d.*

Bevis. La $f \in K[x]$ vera av grad d. Identifiserer f med eit element i $\mathbb{A}^{d+1}$ ved $(a_0, a_1, \dots, a_d) \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$. Diskriminanten av f er eit polynom av grad $2d-2$, og $\mathrm{Disc}(f) = 0$ viss og berre viss f har ei multippel rot. Difor kan mengda av polynom med distinkte røtter identifiserast med mengda $\mathcal{F}_d = \{f \in K[x] \mid \deg(f) = d, \mathrm{Disc}(f) \neq 0\}$. Dette er ei open, ikkje-tom, mengd i zariskitopologien. Dessutan er mengda irredusibel, sidan eit element i $\mathcal{F}_d$ kan skrivast på forma $\prod_{i=1}^d (x - r_i)$, der $r_i \neq r_j$ dersom $i \neq j$. Difor er $\mathcal{F}_d$ tett. □

Altså er polynom av grad d med distinkte røtter ei open mengd i rommet av alle polynom av grad $\leq d$. Dette gjer at dei "fleste" polynom $f \in K[x]$ har distinkte røtter. Same resultat gjeld med den "vanlege" topologien på $\mathbb{C}$. Ein naturleg konsekvens av dette resultatet er følgjande:

Korollar 2.8.1. *Mengda av $(d \times d)$-matriser som har distinkte eigenverdiar er tett i $M_d(K)$.*

Bevis. La $\phi : M_d(K) \to K[x]$ sende ei matrise $M \in M_d(K)$ til sitt karakteristiske polynom i $K[x]$. Då vert mengda av matriser med distinkte eigenverdiar sendt til mengda $\mathcal{F}_d$ i $K[x]$. Sidan $\mathcal{F}_d$ er open og tett i $K[x]$, så er $\phi(\mathcal{F}_d)^{-1}$ open og tett i $M_d(K)$. □

Sjå på banane i $\text{rep}_d\, K[x]$. Eit element $\lambda \in \text{rep}_d\, K[x]$ er gjeve av ei matrise i $M_d(K)$. For å få eit endeleg tal av slike matriser, må K vera endeleg. Til dømes, la $K = \mathbb{Z}_2$. Dette gjev at $M_2(\mathbb{Z}_2)$ har $2^4 = 16$ element. For å rekne ut alle banane i $\text{rep}_2\, \mathbb{Z}_2[x]$, treng ein alle elementa i $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}_2)$. Det er $(2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$ element i $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}_2)$, og desse elementa er: $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, og $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. La $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}_2)$ verke på elementa i $M_2(\mathbb{Z}_2)$ ved konjugering. Altså, for $G \in \text{Gl}_2(\mathbb{Z}_2)$, og $M \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, la $G * M = GMG^{-1}$. La $M = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ og $G = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. Då er $GMG^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. Dersom G går gjennom heile $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}_2)$ gjev dette banen $O(M) = \{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\}$. Med å la M gå gjennom heile $M_2(\mathbb{Z}_2)$, gjev dette resten av banane, nemleg $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ og $\{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\}$. Altså er det 6 banar, ein av lengd 6, to av lengd 3, ein av lengd 2, og to av lengd 1.

Eigenverdiane og automorfigruppene til desse matrisene gjev kva modular dei korresponderer til. Til dømes vil banen $\{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\}$ korrespondere til modulen ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \times {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)}$. Dette sidan $\{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\}$ har karakteristisk polynom λ^2 og $\text{Aut}({}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \times {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)}) \cong \text{Gl}_2(\mathbb{Z}_2)$, som gjer at banen er av lengd 1. På same måte korresponderer $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ til modulen ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x+1)} \times {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x+1)}$. Vidare korresponderer banen $\{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\}$ til modulen ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)}$, og $\{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\}$ korresponderer til ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{((x+1)^2)}$. Banen $\{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$ korresponderer til modulen ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2+x+1)}$, sidan gruppa av einingar i ${}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x^2+x+1)}$ er av orden 3. Til slutt vil banen av lengd 6 korrespondere til den semisimple modulen ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \times {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x+1)}$, sidan det berre er ein automorfi på denne.

Dersom ein skal rekne vidare dømer, veks problemet drastisk. Dersom ein skal rekne ut banane i $\text{rep}_3(\mathbb{Z}_2[x])$, vil $\text{Gl}_3(\mathbb{Z}_2)$ ha 168 element og $M_3(\mathbb{Z}_2)$ har 512 element. For å rekne ut banane må ein då konjugere 512 matriser 168 gonger. Dette gjev 172.032 matrisemultiplikasjonar. Difor valde eg å lage eit program i Python som rekner ut desse banane. Koden kan ein sjå i vedlegg A. Denne koden gjev at $\text{rep}_3\, \mathbb{Z}_2[x]$ har 14 banar. Det er to banar av lengd 1, to av lengd 21, to av lengd 24, to av lengd 28, to av lengd 42, to av lengd 56 og to av lengd 84. Vidare har $\text{rep}_4\, \mathbb{Z}_2[x]$ 34 banar.

Koden er generalisert til å rekne ut banar for andre endelege kroppar. Til dømes reknar den at $\text{rep}_2\, \mathbb{Z}_3[x]$ har 12 banar, der tre er av lengd 1, tre av lengd 6, tre av lengd 8 og tre av lengd 12.

2.5 Fleire koggerar

La R vera koggeren $R : 1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2$. Denne liknar på koggeren frå seksjon 2.2, men med to piler frå 1 til 2. Me kan representere R ved å tileigne eit vektorrom på node 1, V_1, og node 2, V_2, samt to lineæravbildingar frå V_1 til V_2 som korresponderer til α, T_α, og β, T_β. Grafisk vil dette sjå slik ut: $V_1 \overset{T_\alpha}{\underset{T_\beta}{\rightrightarrows}} V_2$. Dette gjev ein $K\Lambda$-modul med $V_1 \oplus V_2$ som underliggande vektorrom. Dessutan er vegalgebraen til R isomorf med mengda $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ d & 0 & b \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c, d \in K\}$. Dei ikkje-dekomponerbare representasjonane til R er på ei av dei følgjande formene:

1. $V_1 = K$ og $V_2 = 0$, altså den simple modulen S_1
2. $V_1 = 0$ og $V_2 = K$, altså den simple modulen S_2
3. $\mathrm{Im}(T_\alpha) + \mathrm{Im}(T_\beta) = V_2$ og $\mathrm{Ker}(T_\alpha) \cap \mathrm{Ker}(T_\beta) = 0$

Følgjande klassifikasjon av representasjonar av kroeneckerkoggeren er henta frå Teorem 4.3.2 i [Benson(1991)]:

Teorem 2.9. *La* $V_1 \overset{T_\alpha}{\underset{T_\beta}{\rightrightarrows}} V_2$ *vera ein ikkjedekomponerbar representasjon av kroeneckerkoggeren over ein algebraisk lukka kropp* K*, med* $\dim V_1 = \dim V_2 = n$*. Då er* $\mathrm{rang}(T_\alpha) = n$ *eller* $\mathrm{rang}(T_\alpha) = n - 1$.

Dersom $\mathrm{rang}\, T_\alpha = n$*, så kan me velje basis slik at*

$$T_\alpha = I \text{ og } T_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dersom $\mathrm{rang}\, T_\alpha = n - 1$*, så kan me velje basis slik at*

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } T_\beta = I.$$

Dersom i staden $\dim V_2 = \dim V_1 + 1$*, så kan me velje basis slik at*

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } T_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dersom $\dim V_1 = \dim V_2 + 1$ *kan me velje basis slik at*

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ og } T_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein representasjon av kroeneckerkoggeren kan identifiserast med ein representasjon av polynomringen. Meir presist, sjå på representasjonen $K^n \overset{\mathrm{id}}{\underset{f}{\rightrightarrows}} K^n$, der $f = x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \dots + f_1 x + f_0 \in K[x]$. Då gjev morfien $K^n \xrightarrow{\mathrm{id}} K^n$ diagrammet diagrammet

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "f"] & K^n \arrow[d, shift right, "f^{-1}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \\ K^n \arrow[r, "f^{-1}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

. Observer at matrisa $C(f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}$ har polynomet f som både minimalt og karakteristisk polynom. Me kallar $C(f)$ den assosierte matrisa til f. Dersom A er ei matrise med karakteristisk polynom f, så finst $G \in \mathrm{Gl}_n(K)$ slik at $GAG^{-1} = C(f)$.

La A vera ei inverterbar $(n \times n)$-matrise og la $f_A = \det(xI - A)$ vera det karakteristiske polynomet til A. Då er det karakteristiske polynomet til A^{-1} gjeve ved det *resiproke* polynomet til f_A. Dette sidan $\det(xI - A^{-1})\det(A) = \det(xA - I) = \det(xA - x\frac{1}{x}I) = x^n \det(A - \frac{1}{x}I) = (-x)^n \det(\frac{1}{x}I - A) = (-x)^n f_A(\frac{1}{x})$. Sidan $f_0 = f_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$, så er $f_{A^{-1}} = \frac{x^n}{f_0} f_A(\frac{1}{x})$, som er det resiproke polynomet til f_A, f_A^*.

Altså, om eit polynom $f = f_0 + f_1 x + \cdots + x^n$ har assosiert matrise $C(f)$, så er det karakteristiske polynomet til $C(f)^{-1}$ gjeve ved det resiproke polynomet til f, $f^* = \frac{x^n}{f_0} f(\frac{1}{x}) = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_0} x + \cdots + \frac{f_1}{f_0} x^{n-1} + x^n$. Då finst $G \in \mathrm{Gl}_n(K)$ slik at $C(f)^{-1} = GC(f^*)G^{-1}$, der $C(f^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{f_{n-1}}{f_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{f_1}{f_0} \end{pmatrix}$.

La V_1 vera av dimensjon n, la V_2 vera av dimensjon m, og la T_α og T_β vera $m \times n$ matrisene A og B. Då er isomorfiklassane av denne representasjonen gjeve av simultan multiplikasjon med ei matrise $G \in \mathrm{Gl}_n(K)$ på venstresida og ei matrise $H \in \mathrm{Gl}_m(K)$ på høgresida av A og B, altså GAH og GBH.

Kroeneckerkoggeren kan relaterast til løysinga av lineære differensiallikningar på forma $Ax = B\dot{x}$. Dersom ein vil lese meir om dette vert ein referert til [Rye(2013)].

Vidare, la Q vera koggeren

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \\ Q : 2 & \longrightarrow & 3 & \longleftarrow & 4 \\ & & \uparrow & & \\ & & 5 & & \end{array} \cdot$$

Ein representasjon av denne er gjeve ved å tileigne eit vektorrom til kvar node, og pilene ei lineær avbilding. Dersom nokon av avbildingane ikkje er injektive, så splittar kjernen seg av som ein direkte summand. Difor, sett bort frå dei fire simple modulane, så er dei ikkje-dekomponerbare KQ-modulane i éin-til-éin korrespondanse med fire underromsystemer. Dette er eit vektorrom V med fire underrom V_1, V_2, V_3 og V_4. Dette er kjend som "fire underromsproblemet" som handlar om å identifisere ikkje-dekomponerbare vektorrom med fire underrom. Dette problemet vart løyst i 1970 i [Gel'fand & Ponomarev(1970)].

3 Degenerasjon

3.1 Degenerasjonar og eksakte følgjer

Følgjande resultat vart først vist av Artin i [Artin (1969)].

Proposisjon 3.1. *Gjeve ein endeleggenerert K-algebra Λ og ei eksakt følgje*

$$0 \to N' \to M \to N \to 0$$

av Λ-modular som er endelegdimensjonale som K-vektorrom, så vil M degenerere til $N \oplus N'$.

Dette resultatet gjeld berre dei tilfella der M degenerer til dekomponerbare modular $N = N' \oplus N''$. Dette gjev ikkje ei komplett skildring av degenerering, sidan det finst dømer der M degenererer til ein ikkje-dekomponerbar N, og $M \ncong N$. La Q vera koggeren $Q : 1 \longrightarrow 2 \circlearrowleft \alpha$, der $\alpha^2 = 0$, og la $M = K \xrightarrow{\binom{1}{0}} K^2 \circlearrowleft \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vera ein representasjon av Q. Riedtmann viste at M degenererer til den ikkje-dekomponerbare representasjonen $N = K \xrightarrow{\binom{0}{1}} K^2 \circlearrowleft \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Neste resultat gjev ønskja generalisering av proposisjon 3.1, og vart vist av Riedtmann i [Riedtmann(1986)]:

Proposisjon 3.2. *La Λ vera ein endeleggenerert K-algebra. Dersom det finst ei eksakt følgje $0 \to A \to A \oplus M \to N \to 0$ av Λ-modular der A, M og N er endelegdimensjonale som K-modular, då er* $\dim M = \dim N$ *og $M \leq_{deg} N$.*

La $X = 0 \xrightarrow{0} k^2 \circlearrowleft \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dette gjev ei eksakt følgje:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, bend left, "0"] \arrow[rrr, bend left, "0"] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[rrr, bend left, "0"] \arrow[d, "0"] & \oplus & k \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & k \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & \\
0 \arrow[r] & k^2 \arrow[loop below, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rrr, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & k^2 \arrow[loop below, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rrr, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)"'] & & k^2 \arrow[loop below, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \arrow[loop below, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Denne følgja viser at $M \leq_{deg} N$. Altså er det dømer på ikkje-dekomponerbare modular N slik at $M \leq_{deg} N$ ekte.

Eit naturleg spørsmål er om M og N er to modular slik at M degenererer til N, finst ei følgje på same form som i proposisjon 3.2? Svaret er ja, og dette vart vist av Zwara i [Zwara(2000)].

Proposisjon 3.3. *La Λ vera ein endeleggenerert K-algebra, med $K = \overline{K}$, og la $M, N \in$* $\mathrm{rep}_d \Lambda$ *slik at $M \leq_{deg} N$. Då finst ei eksakt følgje $0 \to A \to A \oplus M \to N \to 0$ av Λ-modular, der A er endelegdimensjonal som ein K-modul.*

Dette gjev ei komplett algebraisk skildring av degenerasjonar, og dette kan brukast til å definere degenerering der K ikkje er ein algebraisk lukka kropp. Til dømes kan K vera ein kommutativ artinsk ring. Dersom Λ er ein K-algebra av endeleg lengd som ein K-modul, vert algebraen Λ kalla ein *artinsk algebra*. Vidare kan ein nytte lengd i stadan for dimensjon for å skildre modulane. Ei naturleg alternativ definisjon av degenerering vert då følgjande:

Definisjon 3.1. *La K vera ein kommutativ artinsk ring, la Λ vera ein artinsk K-algebra, og la M og N vera to Λ-modular av endeleg lengd som K-modular. Me seier at M degenererer til N dersom det finst ei eksakt følgje*

$$0 \to X \to X \oplus M \to N \to 0,$$

der X er ein Λ-modul av endeleg lengd som ein K-modul.

Me seier ei degenerering $M \leq_{deg} N$ er minimal dersom $M \ncong N$, og dersom det finst ein modul M' slik at $M \leq_{deg} M'$ og $M' \leq_{deg} N$, så er $M' \cong N$ eller $M' \cong M$.

Dette gjer at ein kan sjå på mengda $\text{rep}_d \Lambda$ som mengda av Λ-modular av lengd d som K-modular. Følgjande resultat er ein naturleg konsekvens av denne definisjonen:

Proposisjon 3.4. *La Λ vera ein endeleggenerert K-algebra, og la M og N vera Λ-modular. Dersom $M \leq_{deg} N$, så vil $\ell(\text{Hom}(Y, M)) \leq \ell(\text{Hom}(Y, N))$, for alle Λ-modular Y, der Y er av endeleg lengd som ein K-modul.*

Bevis. Sidan $M \leq_{deg} N$, så finst ei eksakt følgje

$$0 \to A \to A \oplus M \xrightarrow{f} N \to 0.$$

La $\text{Hom}(Y, -)$ verke på denne eksakte følgja. Sidan $\text{Hom}(Y, -)$ er venstreeksakt, er

$$0 \to \text{Hom}(Y, A) \to \text{Hom}(Y, A) \oplus \text{Hom}(Y, M) \xrightarrow{\text{Hom}(Y,f)} \text{Hom}(Y, N),$$

eksakt. Dette gjev den korteksakt følgja

$$0 \to \text{Hom}(Y, A) \to \text{Hom}(Y, A) \oplus \text{Hom}(Y, M) \to \text{Im}(Y, f) \to 0.$$

Dette gjev ulikskapen $\ell(\text{Hom}(Y, N)) \geq \ell(\text{Im}(Y, f)) = \ell(\text{Hom}(Y, M) \oplus \text{Hom}(Y, A)) - \ell(\text{Hom}(Y, A)) = \ell(\text{Hom}(Y, M))$, for alle Λ-modular Y av endeleg lengd som K-modul. $\square$

For to Λ-modular M og N i $\text{rep}_d \Lambda$ så seier me at $M \leq_{hom} N$ dersom $\ell(\text{Hom}(X, M)) \leq \ell(\text{Hom}(X, N))$ for alle Λ-modular X av endeleg lengd som K-modular. Auslander viste i [Auslander(1982)] at dette dannar ein delvis orden på $\text{rep}_d \Lambda$. Denne delvise ordninga kallar me *hom*-ordninga.

Proposisjon 3.4 viser at $M \leq_{deg} N$ medfører $M \leq_{hom} N$. Seinare vert det vist at motsett implikasjon ikkje held. Same dømet vil illustrere at ein ikkje kan kansellere direkte summandar i degenerering generelt, men ein kan kansellere summandar i nokre tilfeller.

Proposisjon 3.5. *La M og N vera to Λ-modular slik at $M \leq_{deg} N$, der $M = M' \oplus X$ og $N = N' \oplus X$. Dersom $\ell(\text{Hom}(X, M)) = \ell(\text{Hom}(X, N))$ eller $\ell(\text{Hom}(M, X)) = \ell(\text{Hom}(N, X))$, så vil $M' \leq_{deg} N'$.*

Bevis. Anta at $\ell(\text{Hom}(X, M)) = \ell(\text{Hom}(X, N))$. Sidan $M \leq_{deg} N$, så finst ei eksakt følgje

$$0 \to A \to A \oplus M' \oplus X \xrightarrow{f} N' \oplus X \to 0.$$

La $\text{Hom}(X, -)$ verke på denne eksakte følgja. Sidan $\text{Hom}(X, -)$ er venstreeksakt er følgja

$$0 \to \text{Hom}(X, A) \to \text{Hom}(X, A \oplus M' \oplus X) \to \text{Hom}(X, N' \oplus X)$$

eksakt. Denne følgja induserer den korteksakte følgja

$$0 \to \text{Hom}(X, A) \to \text{Hom}(X, A \oplus M' \oplus X) \to \text{Im}(X, f) \to 0.$$

Dette gjer at $\ell(\text{Hom}(X, N' \oplus X)) \geq \ell(\text{Im}(X, f)) = \ell(\text{Hom}(X, A \oplus M' \oplus X)) - \ell(\text{Hom}(X, A)) = \ell(\text{Hom}(X, M' \oplus X))$. Sidan $\ell(\text{Hom}(X, M' \oplus X)) = \ell(\text{Hom}(X, N' \oplus X))$, gjev dette at $\ell(\text{Hom}(X, N' \oplus X)) = \ell(\text{Im}(X, f))$. Altså er

$$0 \to \text{Hom}(X, A) \to \text{Hom}(X, A \oplus M' \oplus X) \to \text{Hom}(X, N' \oplus X) \to 0$$

ei korteksakt følgje.

La $i = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_X \end{smallmatrix}\right)$ vera inklusjonen av X i $N' \oplus X$. Sidan $\mathrm{Hom}(X, -)$ er eksakt, gjev dette ei avbilding $g : X \to A \oplus M' \oplus X$, slik at $fg = i$. La $p = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{id}_X \end{smallmatrix}\right)$ vera projeksjonen frå $N' \oplus X$ til X. Då er komposisjonen $X \xrightarrow{i} N' \oplus X \xrightarrow{p} X$ identiteten på X. Dette gjev følgjande diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "i"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \oplus M' \oplus X \arrow[r, "f"] & N' \oplus X \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
 & & & X &
\end{tikzcd}$$

Sidan $fg = i$ og i er injektiv, så er g injektiv. Vidare, sidan g er injektiv, og det finst ei avbilding (pf) slik at $(pf)g = \mathrm{id}_X$, så er $g(X)$ ein summand i $A \oplus M' \oplus X$. Altså eksisterer det Λ-modular A' og M'' slik at $A' \cong A$ og $M'' \cong M'$, og

$$0 \to A \to A' \oplus M'' \oplus g(X) \to N' \oplus X \to 0$$

er ei eksakt følgje. Igjen eksisterer det ein Λ-modul N'' slik at $N'' \cong N'$ og følgja

$$0 \to A \to {}^{(A' \oplus M'')}/_{g(X)} \to N'' \to 0$$

er eksakt. Altså vil $M'' \leq_{deg} N''$, men sidan $M' \leq_{deg} M''$ og $N'' \leq_{deg} N'$, så vil $M' \leq_{deg} N'$. Beviset er dualt dersom $\ell(\mathrm{Hom}(M, X)) = \ell(\mathrm{Hom}(N, X))$. $\square$

Korollar 3.5.1. *La M, N vera Λ-modular.*

- *La P vera ein projektiv Λ-modul slik at $M = M' \oplus P$ og $N = N' \oplus P$. Dersom $M \leq_{deg} N$, så vil $M' \leq_{deg} N'$.*
- *La I vera ein injektiv Λ-modul slik at $M = M' \oplus I$ og $N = N' \oplus I$. Dersom $M \leq_{deg} N$, så vil $M' \leq_{deg} N'$.*

Bevis. La P vera ein projektiv Λ-modul slik at $M = M' \oplus P$ og $N = N' \oplus P$. Sidan P er projektiv så er

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, A \oplus M' \oplus P) \to \mathrm{Hom}(P, N' \oplus P) \to 0$$

er korteksakt følgje. Då er $\ell(\mathrm{Hom}(P, A \oplus M' \oplus P)) = \ell(\mathrm{Hom}(P, A)) + \ell(\mathrm{Hom}(P, N' \oplus P))$. Dette gjer at $\ell(\mathrm{Hom}(P, M' \oplus P)) = \ell(\mathrm{Hom}(P, N' \oplus P))$ og resultatet følgjer av proposisjon 3.5.

Beviset er dualt for det injektive tilfellet. $\square$

Proposisjon 3.6. *La M, N vera to Λ-modular. Dersom $M \leq_{deg} N$, så er $\mathrm{Ann}\, M \cdot N = 0$. Vidare finst ein X slik at $\mathrm{Ann}\, M \cdot X = 0$, og slik at*

$$0 \to X \to X \oplus M \to N \to 0$$

er ei eksakt følgje.

Bevis. Me kan sjå på M som ein ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}$-modul. Dette gjer at $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, M) \cong M$. Altså er $\ell(\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, M)) = \ell(M)$. Sidan $M \leq_{deg} N$ så er $M \leq_{hom} N$. Då er $\ell(\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, N) \geq \ell(\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, M)) = \ell(M)$. Men sidan $\ell(N) = \ell(M)$ og $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, N) \cong \{n \in N \mid (\operatorname{Ann} M)n = 0\}$, så medfører dette at $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, N) \cong N$. Altså er $\operatorname{Ann} M \cdot N = 0$.

La $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, -)$ verke på den eksakte følgja

$$0 \to X \to X \oplus M \to N \to 0.$$

Sidan $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, -)$ er høgreeksakt, så er

$$0 \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \oplus \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, M) \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, N)$$

ei eksakt følgje. Første del av beviset viste at $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, M) \cong M$ og $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, N) \cong N$. Dessutan er $\operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \cong \{x \in X \mid (\operatorname{Ann} M)x = 0\}$. Då er

$$0 \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \oplus M \to N$$

ei eksakt følgje. Lengda på desse modulane som K-modular gjev at den siste avbildinga er ein surjeksjon. Då vil

$$0 \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) \oplus \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, M) \to \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, N) \to 0$$

vera ei eksakt følgje av ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}$-modular. Dette gjer at $\operatorname{Ann} M \cdot \operatorname{Hom}({}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}, X) = 0$. Altså har me funne ei eksakt følgje slik at $M \leq_{deg} N$, og alle modulane i følgja vert annihilert av $\operatorname{Ann} M$. □

Dette gjer at algebraen ein jobbar med kan "reduserast" til ein mindre algebra med å ta kvotienten av algebraen med det idealet som annihilerer den "minste" modulen i degenerasjonsordninga. I seksjonane 3.3 og 3.4, der polynomringen over ein to variablar vert diskutert, vil dette resultat vera til nytte.

Her kjem eit døme der $M \leq_{hom} N$ ikkje medfører $M \leq_{deg} N$. La $\Lambda = {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y^2)}$, der K er algebraisk lukka. Eit element $t \in \Lambda$ er på forma $t = a + b\bar{x} + c\bar{y} + d\bar{x}\bar{y}$. Observer at $\operatorname{End}_{\Lambda}(\Lambda) = \Lambda^{op} = \Lambda$, sidan Λ er kommutativ. Dette gjev at $\operatorname{End}_{\Lambda}(\Lambda)$ er 4-dimensjonal. Altså er $\dim(\mathrm{Gl}_4 * \Lambda) = 4^2 - 4 = 12$ av lemma 2.5. La I_a vera idealet generert av $(\bar{x} + a\bar{y})$ der $0 \neq a \in K$, og la I_b vera idealet generert av $(\bar{x} + b\bar{y})$, der $b \neq a$. Då er $\dim(\operatorname{End}(I_a \oplus I_b)) = 6$, og dette gjev at $\dim(\mathrm{Gl}_4 * (I_a \oplus I_b)) = 4^2 - 6 = 10$. Dette, saman med dei to parametrane a og b, gjev eit objekt av dimensjon 12. La S vera ein simpel modul. Då er

$$0 \to I_a \to \Lambda \oplus S \to {}^{\Lambda}/_{(xy)} \to 0$$

ei eksakt følgje. Altså vil $\Lambda \oplus S \leq_{deg} I_a \oplus {}^{\Lambda}/_{(xy)}$. Sidan I_b vert annihilert av (xy), gjev dette ei eksakt følgje

$$0 \to S \to {}^{\Lambda}/_{(xy)} \to I_b \to 0.$$

Dette gjer at ${}^{\Lambda}/_{(xy)} \leq_{deg} I_b \oplus S$. Transitivitet gjev at $\Lambda \oplus S \leq_{deg} {}^{\Lambda}/_{(xy)} \oplus I_a \leq_{deg} I_a \oplus I_b \oplus S$, for alle $a, b \in K$, der $a \neq b$. Så $\Lambda \leq_{hom} I_a \oplus I_b$, men Λ degenerererer ikkje til $I_a \oplus I_b$ med mindre ein legg til ein simpel summand. Difor vil ikkje $M \leq_{hom} N$ medføre $M \leq_{deg} N$ generelt. Dette dømet viser og at ein generelt ikkje kan kansellere direkte summandar i degenerering.

Det var J. Carlson som først fann eit døme på dette [Riedtmann(1986)]. Han observerte at den eksakte følgja

$$0 \to \langle x, y\rangle \to \Lambda \oplus S^2 \to {}^{\Lambda}/_{(xy)} \to 0,$$

er *nesten splitteksakt*. Ein morfi $f : B \to C$ er høgre nesten splitta dersom den ikkje er ein slittepimorfi, og alle morfiar $X \to B$ som ikkje er ein splittepimorfi, faktoriserer gjennom f. På same måte er ein morfi $g : A \to B$ venstre nesten splitta dersom den ikkje er ein splittmonomorfi, og alle morfiar $A \to Y$ som ikkje er ein splittmonomorfi, faktoriserer gjennom g. Ei eksakt følgje, $0 \to A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \to 0$, vert kalla ei nesten splitteksakt følgje dersom g er venstre nesten splitta og f er nesten høgre splitta.

Det at ein ikkje kan kansellere summandar gjev ein naturleg definisjon.

Definisjon 3.2. *La Λ vera ein endeleggenerert algebra over ein algebraisk lukka kropp, K. Me seier at ein Λ-modul M i $\operatorname{rep}_d \Lambda$ virtuelt degenererer til ein Λ-modul N i $\operatorname{rep}_d \Lambda$, som me skriv som $M \leq_{vdeg} N$, dersom det finst ein endelegdimensjonal Λ-modul B slik at $M \oplus B \leq_{deg} N \oplus B$.*

Igjen, av Zwara sitt resultat, er $M \leq_{vdeg} N$ ekvivalent med at det finst ei eksakt følgje

$$0 \to X \to X \oplus M \oplus Y \to N \oplus Y \to 0,$$

av Λ-modular der X og Y er endelegdimensjonale som K-vektorrom. Dette gjer at ein kan definere denne ordenen over ein artinsk algebra Λ over ein kommutativ artinsk ring K. Då seier me at $M \leq_{vdeg} N$ dersom det finst ei eksakt følgje på forma ovanfor.

Dersom ein set $B = 0$ i definisjonen over har ein trivielt at $M \leq_{deg} N \implies M \leq_{vdeg} N$. Det faktum at ein ikkje kan kansellere summandar gjer at den motsette implikasjonen ikkje held. Ved eit liknande bevis som i korollar 3.4 kan ein vise at $M \leq_{vdeg} N \implies M \leq_{hom} N$. Det er eit ope spørsmål om den andre implikasjonen held.

Proposisjon 3.6 kan generaliserast til virtuell degenerering.

Proposisjon 3.7. *La M, N vera to Λ-modular. Dersom $M \leq_{vdeg} N$, så vil $\operatorname{Ann} M \cdot N = 0$. Vidare finst X og Y slik at $\operatorname{Ann} M \cdot X = 0$ og $\operatorname{Ann} M \cdot Y = 0$, og slik at*

$$0 \to X \to X \oplus M \oplus Y \to N \oplus Y \to 0$$

er eksakt.

Bevis. Same argument som i 3.6 gjev at N vert annihilert av $\operatorname{Ann} M$.

La ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes -$ verke på den eksakte følgja

$$0 \to X \to X \oplus M \oplus Y \to N \oplus Y \to 0.$$

Dette gjev ei eksakt følgje

$${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes X \to {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes X \oplus M \oplus {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes Y \to N \oplus {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes Y \to 0.$$

Observer at ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes X \cong {}^{X}/_{\operatorname{Ann} MX}$ og ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes Y \cong {}^{Y}/_{\operatorname{Ann} MY}$. Dette gjev ei eksakt følgje

$${}^{X}/_{\operatorname{Ann} MX} \to {}^{X}/_{\operatorname{Ann} MX} \oplus M \oplus {}^{Y}/_{\operatorname{Ann} MY} \to N \oplus {}^{Y}/_{\operatorname{Ann} MY} \to 0.$$

Ved å telje lengda som K-modular så må den første avbildinga vera ein injeksjon. Då er

$$0 \to {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes X \to {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes (X \oplus M \oplus Y) \to {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes (N \oplus Y) \to 0$$

ei eksakt følgje av ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M}$-modular. Dette gjer at $\operatorname{Ann} M \cdot {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes X = 0$ og $\operatorname{Ann} M \cdot {}^{\Lambda}/_{\operatorname{Ann} M} \otimes Y = 0$. Me har då funne ei eksakt følgje slik at alle modulane vert annihilert av annihilatoren til M, som var det me ønskja. □

3.2 Grothendieckgruppa

La K vera ein kommutativ artinsk ring, la Λ vera ein K-algebra av endeleg lengd, og la $\operatorname{mod}\Lambda$ vera kategorien av endeleggenererte Λ-modular. Underkategorien av $\operatorname{mod}\Lambda$, der objekta er valde representantar frå isomorfiklassane til modular av endeleg lengd, vert kalla $\mathrm{f.\,l.}\,\Lambda$. La $[M]$ representere isomorfiklassen til M i $\mathrm{f.\,l.}\,\Lambda$. Den frie abelske gruppa på $\mathrm{f.\,l.}\,\Lambda$, med isomorfiklassane til Λ-modular av endeleg lengd som basis, vert kalla $F(\mathrm{f.\,l.}\,\Lambda)$. Elementa i $F(\mathrm{f.\,l.}\,\Lambda)$ er på forma $\sum_{i\in I} a_i[M_i]$, der I er ei endeleg indeksmengd, $a_i \in \mathbb{Z}$, og $[M_i] \in \mathrm{f.\,l.}\,\Lambda$. Grothendieckgruppa til Λ, $G_0(\Lambda)$, er den frie abelske gruppa $F(\operatorname{mod}\Lambda)$ saman med følgjande relasjon: For kvar korteksakt følgje $0 \to A \to B \to C \to 0$ av Λ-modular så er $[A] - [B] + [C] = 0$.

Det viser seg at isomorfiklassen $[M] \in G_0(\Lambda)$ inneheld all informasjonen om komposisjonsfaktorane til M. Dersom M er av endeleg lengd, gjev dette ei korteksakt følgje $0 \to S_i \to M \to M' \to 0$, der S_i er ein simpel modul. Altså er $[M] = [S_i] + [M']$. Ved induksjon, sidan $\ell(M') < \ell(M)$, så er $[M] = \sum_{i\in I} a_i[S_i]$, der I er ei endeleg indeksmengd, $a_i \in \mathbb{Z}$, , og S_i er ein simpel modul for alle i. Dette gjev at grothendieckgruppa på $\mathrm{f.\,l.}\,\Lambda$ er ei fri abelsk gruppe med isomorfiklassane til dei simple modulane som basis. Dessutan er $[M] = \sum_{i\in I} m_{S_i}(M)[S_i]$, der $m_{S_i}(M)$ er talet på simple modular i komposisjonsrekka til M som er isomorfe med S_i (Vist i teorem 1.7 i [Auslander, Reiten & Smalø(1995)]).

Sjå på modulen $\mathbb{Z}_4$. Dette gjev ei eksakt følgje $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$. Då er $[\mathbb{Z}_4] = 2[\mathbb{Z}_2]$. Dette stemmer overeins med resultatet over sidan $0 \subset \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$ er ei komposisjonsrekke til $\mathbb{Z}_4$, med ${}^{\mathbb{Z}_4}/_{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Z}_2$ og ${}^{\mathbb{Z}_2}/_{(0)} \cong \mathbb{Z}_2$ som komposisjonsfaktorar.

La $\operatorname{mod}_d\Lambda$ vera kategorien av valde representantar frå isomorfiklassane av Λ-modular av lengd d. Dersom $M, N \in \operatorname{mod}_d\Lambda$ slik at $M \leq_{deg} N$, så gjev dette ei eksakt følgje $0 \to X \to X \oplus M \to N \to 0$. Dette gjev at $[M] + [X] = [N] + [X]$ i $G_0(\Lambda)$, som gjer at $[M] = [N]$ i $G_0(\Lambda)$. Dette gjer at M og N har dei same komposisjonsfaktorane. La oss summere denne seksjonen i følgjande resultat:

Proposisjon 3.8. *La $M, N \in \operatorname{mod}_d\Lambda$ og la $M \leq_{deg} N$. Då er $[M] = [N]$ i $G_0(\Lambda)$. Spesielt gjer dette at M og N inneheld dei same komposisjonsfaktorane inklusivt multiplisitet.*

3.3 Degenerering over hovudidealområder

Dersom Λ er eit hovudidealområde, følgjer fleire elegegante resultat som omhandlar degenerering. Målet for denne seksjonen er å vise at for to endeleggenererte modular over eit hovudidealområde, M og N, så vil $M \leq_{deg} N$ vera ekvivalent med $M \leq_{hom} N$.

La oss byrje med å rekne ut degenerasjonsordenen på banane frå seksjon 2.4. Då vert det rekna ut at $\operatorname{rep}_2 \mathbb{Z}_2[x]$ hadde seks banar. La $S_0 = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)}, S_1 = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x+1)}$ og $S_2 = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2+x+1)}$. Då vil dei lukka banane korrespondere til dei semisimple modulane $S_0^2, S_1^2, S_0 \oplus S_1$ og S_2. Dei to gjenverande banane er dei som korresponderer til modulane ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)}$ og ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{((x+1)^2)}$. Då vil ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)} \leq_{deg} S_0^2$ og ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{((x+1)^2)} \leq_{deg} S_1^2$.

Sidan $\mathbb{Z}_2$ ikkje er algebraisk lukka, må ein nytte definisjon 3.1. Sjå på modulane ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \oplus {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)}$ og ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)}$. Dersom ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)} \leq_{deg} {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \oplus {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)}$, finst ein $\mathbb{Z}_2[x]$-modul A, slik at

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} A \oplus {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)} \xrightarrow{\beta} {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \oplus {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)} \to 0$$

er ei eksakt følgje. Dersom $A = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x)}$, $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}\right)$ og $\beta = \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{-} \end{smallmatrix}\right)$, der $^-$ sender kvart element på restklassen sin, så dannar dette ei eksakt følgje. La oss verifisere at denne følgja er eksakt. Først må me vise at α er ein injekson. La $a \in \operatorname{Ker}\alpha$, då er $\alpha(a) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a\bar{x} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dette gjev at $a = 0$, som gjev at $\operatorname{Ker}\alpha = 0$. Altså er α er ein injeksjon. Neste steg er å vise at β er surjektiv. La $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}_2[x]/(x) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x)$. Då vil $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b+c\bar{x} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}_2[x]/(x) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$, der $c \in \mathbb{Z}_2$, gje at $\beta(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b+c\bar{x} \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. Dette gjer at β er surjektiv. Siste steg er å vise at $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. La $a \in \mathbb{Z}_2[x]/(x)$. Då vil $\beta(\alpha(a)) = \beta(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ a\bar{x} \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, som gjer at $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \ker\beta$. La $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0'+b_1'\bar{x} \end{pmatrix} \in \ker\beta$. Då er $\beta(b) = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0' \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, som gjev at $b_0 = 0$ og $b_0' = 0$. Dette gjer at $\ker\beta \subseteq \operatorname{Im}\alpha$, som gjev at følgja er eksakt. Denne verifikasjonen er liknande for alle dei eksakte følgjene i denne seksjonen, og vert difor ikkje presentert.

I same dømet vart det rekna ut at $\operatorname{rep}_3 \mathbb{Z}_2[x]$ hadde 14 banar. La $S_0 = \mathbb{Z}_2[x]/(x)$. Dette gjev ei rekke av degenerering på tre modular $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3) \leq_{deg} S_0 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \leq_{deg} S_0^3$, med eksakte følgjer

$$0 \to \mathbb{Z}_2[x]/(x) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{x}^2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}_2[x]/(x) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^3) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{\ } \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}_2[x]/(x) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \to 0$$

$$0 \to \mathbb{Z}_2[x]/(x) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix}} \left(\mathbb{Z}_2[x]/(x)\right)^2 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\ } \end{pmatrix}} \left(\mathbb{Z}_2[x]/(x)\right)^3 \to 0$$

Dersom $S_1 = \mathbb{Z}_2[x]/(x+1)$, så er dei resterande rekkene for $\operatorname{rep}_3 \mathbb{Z}_2[x]$:

1. $\mathbb{Z}_2[x]/((x+1)^3) \leq_{deg} S_1 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/((x+1)^2) \leq_{deg} S_1^3$
2. $S_0 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/((x+1)^2) \leq_{deg} S_0 \oplus S_1^2$
3. $S_1 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \leq_{deg} S_1 \oplus S_0^2$

Dei siste fem banane er lukka, og er gjeve av modulane $S_0 \oplus S_2$, $S_1 \oplus S_2$, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$ og $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+1)$, der $S_2 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$.

Til slutt vart det rekna ut at $\operatorname{rep}_4 \mathbb{Z}_2[x]$ hadde 34 banar. Dette gjev følgjande rekker av degenerering, der dei resterande rekkene er gjeve ved å permutere x og $(x+1)$:

1. $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4) \leq_{deg} S_0 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^3) \leq_{deg} \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \leq_{deg} S_0^2 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \leq_{deg} S_0^4$
2. $S_1 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^3) \leq_{deg} S_1 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus S_0 \leq_{deg} S_1 \oplus S_0^3$
3. $\mathbb{Z}_2[x]/((x^2+x+1)^2) \leq_{deg} S_2^2$
4. $S_2 \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \leq_{deg} S_2 \oplus S_0^2$
5. $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/((x+1)^2) \leq_{deg} \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus S_1^2 \leq_{deg} S_0^2 \oplus S_1^2$

Banane som manglar er dei lukka banane som ikkje er del av nokon rekke. Desse er gjeve med semisimple modular, og det er 8 av desse. Den første av desse er modulen $S_0 \oplus S_1 \oplus S_2$. Det er to irredusible polynom av grad 3, x^3+x+1 og x^3+x^2+1. La $S_3 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$ og $S_{3'} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+1)$. Desse polynom gjev opphav til fire semisimple modular, nemleg $S_3 \oplus S_0$, $S_3 \oplus S_1$, $S_{3'} \oplus S_0$ og $S_{3'} \oplus S_1$. Til slutt er det 3 simple modular, nemleg $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4+x+1)$, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4+x^3+1)$ og $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Frå desse døma kan det sjå ut som det er eit mønster for degenerasjonane, nemleg at modular på forma $\mathbb{Z}_2[x]/(p^i) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(p^j)$ degenererer til modular på forma $\mathbb{Z}_2[x]/(p^{i-1}) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(p^{j+1})$, der $p \in K[x]$ er eit irredusibelt polynom og $j < i$. Dersom $\Lambda = K[x]$ så viser det seg at delmengda av $\operatorname{rep}_d \Lambda$ som berre inneheld komposisjonsfaktorar isomorfe med $K[x]/(p)$, der

p er eit irredusibelt polynom slik at $\deg(p)|d$, heng saman med mengda av *partisjonar* av $\frac{d}{\deg p}$. Vidare viser det seg at ordenen av degenerering på $\text{rep}_d \Lambda$ er ekvivalent med *dominantordenen* på mengda av partisjonar av $\frac{d}{\deg p}$. Denne ideen kan generaliserast til heile $\text{rep}_d \Lambda$ ved å sjå på tuplar av partisjonar. Dette motiverer følgjande definisjon:

Definisjon 3.3. *La $0 < n \in \mathbb{Z}$. Ein partisjon av n er ein tuppel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, slik at $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$ og $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n$.*

Til dømes er det 5 partisjonar av talet 4, nemleg (4), $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,1,1)$, og $(1,1,1,1)$. Her vert konvensjonen der ein ikkje skriv nullane i partisjonen, nytta. Til dømes vert partisjonen $(4,0,0,0)$ skrive som (4). Den konjugerte til ein partisjon $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, er parisjonenen gjeve av $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$, der $\alpha'_i = |\{k \,|\, \alpha_k \geq i\}|$, for $1 \leq i \leq n$. Dette er og ein partisjon av n. La α vera partisjonen $(2,1,1)$. Då er $\alpha'_1 = |\{k \mid \alpha_k \geq 1\}| = 3$, $\alpha'_2 = |\{k \mid \alpha_k \geq 2\}| = 1$, og $\alpha'_j = 0$ for $j > 2$. Altså er $\alpha' = (3,1)$ den konjugerte til α. Ein partisjon vert kalla sjølvkonjugert dersom den samsvarar med sin konjugerte. Til dømes er partisjonen $(2,2)$ sjølvkonjugert.

La $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ og $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ vera to partisjonar av n. Då seier me at $\alpha \geq \beta$ dersom $\sum_{j=1}^{i} \alpha_j \geq \sum_{j=1}^{i} \beta_j$, for alle $1 \leq i \leq n$. Dette dannar ei delvis ordning på mengda av partisjonar av n, og vert kalla dominantordninga på denne mengda. Partisjonane av 4 vil gje rekka $(4) \geq (3,1) \geq (2,2) \geq (2,1,1) \geq (1,1,1,1)$ i dominantordninga.

Eit youngdiagram er eit diagram av boksar der lengda av kvar rad er ikkje-veksande. Me assosierer eit yongdiagram til ein partisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ved å la rad i ha α_i boksar for kvar $1 \leq i \leq n$, og der rad α_j hamner under rad α_{j-1} for $2 \leq j \leq n$. Til dømes vil partisjonen $(3,1)$ ha youngdiagram $\ydiagram{3,1}$. Den konjugerte til eit youngdiagram er gjeve ved den transponerte av diagrammet, altså der ein bytt om radane og kolonnene. Til dømes vil den konjugerte av $\ydiagram{3,1}$ vera diagrammet $\ydiagram{2,1,1}$. Denne definisjonen av konjugering stemmer overeins med definisjonen av konjugering for partisjonar.

Dominantorden for 4 skrive med youngdiagram gjev følgjande rekke

$$\ydiagram{4} \geq \ydiagram{3,1} \geq \ydiagram{2,2} \geq \ydiagram{2,1,1} \geq \ydiagram{1,1,1,1}.$$

Denne rekka viser eit mønster. Kvart steg til høgre i rekka svarar til å flytte ein boks frå ei høgare rad til ei lågare rad i youngdiagrammet. På same måte vil eit steg til venstre svare til å flytte ein boks frå ei lågare rad til ei høgare rad i youngdiagramma. Dette motiverer det me kallar for "flyttfunksjonar".

La $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vera ein partisjon og la $1 \leq i \leq j \leq n$. Definer $f^-_{i,j} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ som

$$f^-_{i,j}(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n).$$

Altså vil funksjonen $f^-_{i,j}$ svare til å flytte ein boks nedover i youngdiagrammet til α. Definer $f^+_{i,j} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, som

$$f^+_{i,j}(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n).$$

Dette svarar til å flytte ein boks oppover i diagrammet til α. Observer at dersom $i = j$, så er $f^+_{i,i}(\alpha) = f^-_{i,i}(\alpha) = \text{id}(\alpha)$.

Neste resultat viser at dersom α og β er to partisjonar av n, så vil $\alpha \leq \beta$ viss og berre viss me kan få youngdiagrammet til β ved å flytte boksar oppover i diagrammet til α, der kvart flytt dannar ein partisjon. Meir konkret:

Lemma 3.9. *La* $0 < n \in \mathbb{Z}$*, og la* α *og* β *vera to partisjonar av* n*. Då er* $\alpha \leq \beta$ *i dominantorden viss og berre viss det finst flyttfunksjonar,* $f^+_{i_1,j_1}, f^+_{i_2,j_2}, \ldots, f^+_{i_m,j_m}$*, slik at* $f^+_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha) = \beta$*, og* $f^+_{i_k,j_k} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha)$ *er ein partisjon for alle* $1 \leq k \leq m$*.*

Bevis. Først, anta at $\beta = f^+_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha)$, og at $f^+_{i_k,j_k} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha)$ er ein partisjon for alle $1 \leq k \leq m$. Då er $\alpha \leq f^+_{i_1,j_1}(\alpha) \leq f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha) \leq \cdots \leq f^+_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha) = \beta$.

Anta at $\alpha \leq \beta$ i dominantorden. Dersom $\beta = \alpha$ så er resultatet trivielt, så anta at α er ekte mindre enn β. Då finst ein minste $1 \leq i < n$ slik at $\alpha_i < \beta_i$. Men då finst ein minste $i < j \leq n$ slik at $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j$. Denne finst sidan $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Me må då vise at $f^+_{i,j}(\alpha)$ er ein partisjon av n. Dette svarar til å vise at $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ og at $\alpha_j > \alpha_{j+1}$. Men sidan i er det minste talet slik at $\alpha_i < \beta_i$, så er $\alpha_{i-1} = \beta_{i-1} \geq \beta_i > \alpha_i$. Vidare, sidan $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} < \beta_1 + \cdots + \beta_{j-1}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + \alpha_j = \beta_1 + \cdots + \beta_{j-1} + \beta_j$ og $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + \alpha_j + \alpha_{j+1} \leq \beta_1 + \cdots + \beta_{j-1} + \beta_j + \beta_{j+1}$, gjev dette at $\beta_j < \alpha_j$ og $\beta_{j+1} \geq \alpha_{j+1}$. Dette gjev at $\alpha_j > \beta_j \geq \beta_{j+1} \geq \alpha_{j+1}$. Altså er $f^+_{i,j}(\alpha)$ ein partisjon og $\alpha \leq f^+_{i,j}(\alpha)$. Resultatet følgjer ved induksjon. □

På same måte, dersom α og β er to partisjonar av n, så er $\alpha \leq \beta$ viss og berre viss ein kan flytte boksar nedover i youngdiagrammet til β der kvart flytt dannar ein partisjon.

Korollar 3.9.1. *La* $0 < n \in \mathbb{Z}$*, og la* α *og* β *vera to partisjonar av* n*. Då er* $\alpha \leq \beta$ *i dominantorden viss og berre viss det finst flyttfunksjonar,* $f^-_{i_1,j_1}, f^-_{i_2,j_2}, \ldots, f^-_{i_m,j_m}$ *slik at* $f^-_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^-_{i_2,j_2} \circ f^-_{i_1,j_1}(\beta) = \alpha$*, og* $f^-_{i_k,j_k} \circ \cdots \circ f^-_{i_2,j_2} \circ f^-_{i_1,j_1}(\beta)$ *er ein partisjon for alle* $1 \leq k \leq m$*.*

Bevis. Dette følgjer av at $f^-_{i,j}$ og $f^+_{i,j}$ er inverse funksjonar av kvarandre. Altså gjev lemma 3.9 at $f^+_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha) = \beta$. Dette gjev at $f^-_{i_1,j_1} \circ f^-_{i_2,j_2} \circ \cdots \circ f^-_{i_m,j_m}(\beta) = \alpha$. □

Ein annan konsekvens av lemma 3.9 er at konjugering av partisjonar reverserer dominantordenen. Dette sidan det å flytte boksar nedover i α, svarar til å flytte boksar oppover i α'. Meir presist:

Korollar 3.9.2. *La* α *og* β *er to partisjonar av* n*, la* α' *vera den konjugerte partisjonen til* α*, og la* β' *vera den konjugerte partisjonen til* β*. Då er* $\alpha \leq \beta$ *i dominantorden viss og berre viss* $\beta' \leq \alpha'$ *i dominantorden.*

Bevis. Av lemma 3.9 er det nok å vise dette for $\beta = f^+_{i,j}(\alpha)$. Altså, dersom $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, så er $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, der $\beta_i = \alpha_i + 1$ og $\beta_j = \alpha_j - 1$. Dette gjer at $\alpha'_i = |\{k \mid \alpha_i \geq k\}| \geq |\{k \mid \alpha_i + 1 \geq k\}| = \beta'_i$. Så $\alpha' \geq \beta'$, og resultatet følgjer ved induksjon. □

Ein tuppel av partisjonar av n, er ein tuppel $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, der $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,k_i})$ er ein partisjon av k_i for $1 \leq i \leq n$, og $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} = n$. Anta at $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ og $Q = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ er to tuplar av partisjonar av n, der $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,k_i})$ og $\beta_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,k_i})$ er partisjonar av k_i for $1 \leq i \leq n$. Då er $P \leq Q$ viss og berre viss $\alpha_i \leq \beta_i$ for alle i. Dersom $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ er ein tuppel av partisjonar av n, så vert youngdiagrammet til P skrive som ein direktesum av youngdiagramma til partisjonane α_i. Til dømes er youngdiagrammet til tuppelen av partisjonar $((2), (1,1))$ av 4 skrive som $\square\square \oplus \begin{array}{c}\square\\ \square\end{array}$. Vidare er den konjugerte til ein tuppel $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ av partisjonar av n, den konjugerte av alle partisjonane, altså $P' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$.

Korollar 3.9.3. *La $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ og $Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vera to tuplar av partisjonar av n. Då er $P \leq Q$ viss og berre viss det for kvar $1 \leq i \leq n$ finst flyttfunksjonar, $f^-_{i_1,j_1}, \dots, f^-_{i_m,j_m}$, slik at $f^-_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^-_{i_2,j_2} \circ f^-_{i_1,j_1}(\beta_i) = \alpha_i$, og $f^-_{i_k,j_k} \circ \cdots \circ f^-_{i_2,j_2} \circ f^-_{i_1,j_1}(\beta_i)$ er ein partisjon for alle $1 \leq k \leq m$.*

Alternativt, $P \leq Q$ viss og berre viss det for alle $1 \leq i \leq n$ finst flyttfunksjonar $f^+_{i_1,j_1}, \dots, f^+_{i_m,j_m}$ slik at $f^+_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha_i) = \beta_i$, og $f^+_{i_k,j_k} \circ \cdots \circ f^+_{i_2,j_2} \circ f^+_{i_1,j_1}(\alpha_i)$ er ein partisjon for alle $1 \leq k \leq m$.

Vidare er $P \leq Q$ viss og berre viss $P' \geq Q'$.

Bevis. Følgjer av induksjon på n og ved å bruke lemma 3.9, korollar 3.9.1, og korollar 3.9.2, sidan $P \leq Q$ viss og berre viss $\alpha_i \leq \beta_i$ for alle i. □

La $\Lambda = K[x]$, og la $\operatorname{mod}_d \Lambda$ vera kategorien (av valde isomorfiklassar) av Λ-modular av lengd d. Strukturteoremet for endeleggenererte modular over eit hovudidealområde [W3], forkorta som strukturteoremet, gjev at dersom $M \in \operatorname{mod}_d \Lambda$ så er

$$M \cong {}^{K[x]}/_{(p_1^{\alpha_{1,1}})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_1^{\alpha_{1,k_1}})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_n^{\alpha_{n,1}})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_n^{\alpha_{n,k_n}})},$$

der p_i er irredusible polynom for alle $1 \leq i \leq n$ og $0 \leq \alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}$, for $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq k_i$. Dette motiverer følgjande definisjon.

Definisjon 3.4. *La $\mathcal{M}_d(p_1, p_2, \dots, p_n)$, der $p_i \in K[x]$ er irredusible polynom for $1 \leq i \leq n$, vera underkategorien av modular i $\operatorname{mod}_d \Lambda$ slik at dersom $M \in \mathcal{M}_d(p_1, p_2, \dots, p_n)$ så har M berre komposisjonsfaktorar på forma ${}^{K[x]}/_{p_i}$, for $1 \leq i \leq n$.*

Til dømes ligg ${}^{K[x]}/_{(x^2)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x+1)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x+1)}$ i $\mathcal{M}_4(x, x+1)$. Proposisjon 3.8 gjev at dersom $M \in \mathcal{M}_d(p_1, \dots, p_n)$ og $M \leq_{deg} N$ så må $[M] = [N]$ i $G_0(\Lambda)$. Dette gjer at $N \in \mathcal{M}_d(p_1, \dots, p_n)$.

Først, la $M \in \mathcal{M}_d(p)$, altså at M berre har kompisisjonsfaktorar på forma ${}^{K[x]}/_{(p)}$. Av strukturteoremet er

$$M \cong {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_1})} \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_2})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_k})},$$

der potensane er ordna slik at $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$. Den assosierte partisjonen til M er partisjonen på forma $\alpha_M = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. Sidan $\alpha_1 \deg p + \cdots + \alpha_k \deg p = d$, så er den assosierte partisjonen til M ein partisjon av $\frac{d}{\deg p}$. Til dømes har modulen ${}^{K[x]}/_{(x^2)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x^2)}$ assosiert partisjon $(2, 2)$, som er ein partisjon av 4.

Lemma 3.10. *La $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$, la α_M vera den assosierte partisjonen til M og la α_N vera den assosierte partisjonen til N. Då er $M \leq_{deg} N$ ei minimal degenerering viss og berre viss $\alpha_N = f^-_{i,j}(\alpha_M)$, der $f^-_{i,j} \neq \mathrm{id}_{\alpha_M}$, og dersom $\alpha_N = f^-_{i_1,j_1} \circ f^-_{i_2,j_2}(\alpha_M)$, så er $f^-_{i_1,j_1} = \mathrm{id}_{\alpha_M}$ eller $f^-_{i_2,j_2} = \mathrm{id}_{\alpha_M}$.*

Bevis. La $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$, der $p \in K[x]$ er eit irredusibelt polynom. Strukturteoremet gjev at

$$M \cong {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_1})} \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_2})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_k})},$$

der potensane er ordna slik at $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$. Igjen gjev strukturteoremet at

$$N \cong {}^{K[x]}/_{(p^{\beta_1})} \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\beta_2})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\beta_l})},$$

der potensane er ordna slik at $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_l$. La $\alpha_M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ vera den assosierte partisjonen til M, og la $\alpha_N = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ vera den assosierte partisjonen til N. Desse er begge partisjonar av $\frac{d}{\deg p}$.

Anta først at $\alpha_N = f^-_{i,j}(\alpha_M)$, altså at

$$\alpha_N = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1, \ldots, \alpha_j + 1, \ldots, \alpha_k).$$

Dette gjev ei eksakt følgje

$$0 \to {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_i-1})} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\bar{p}\\ \bar{}\end{pmatrix}} {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_i})} \oplus {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_j})} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\bar{} & -\bar{p}\end{pmatrix}} {}^{K[x]}/_{(p^{\alpha_j+1})} \to 0 \tag{1}$$

Dette gjer at ${}^{K[x]}/_{p^{\alpha_i}} \oplus {}^{K[x]}/_{p^{\alpha_j}} \leq_{deg} {}^{K[x]}/_{p^{\alpha_i-1}} \oplus {}^{K[x]}/_{p^{\alpha_j+1}}$, og følgjeleg vil $M \leq_{deg} N$. Dessutan må dette vera ei minimal degenerering, sidan dersom det finst ein M', slik at $M \leq_{deg} M'$ og $M' \leq_{deg} N$ så må openbart $M' \cong M$ eller $M' \leq_{deg} N$.

Anta no at $M \leq_{deg} N$ er ei minimal degenerering, og anta at det finst to funksjonar $f^-_{i_1,j_1} \neq \mathrm{id}_{\alpha_M}$ og $f^-_{i_2,j_2} \neq \mathrm{id}_{\alpha_M}$, slik at $\alpha_N = f^-_{i_1,j_1} \circ f^-_{i_2,j_2}(\alpha_M)$. La M' vera modulen som har assosiert partisjon $\alpha_{M'} = f^-_{i_2,j_2}(\alpha_M)$. Men då gjev den eksakte følgja (1) at $M \leq_{deg} M'$ ekte og $M' \leq_{deg} N$ ekte, som motstrider antakinga om at $M \leq_{deg} N$ er ei minimal degenerering. □

Dette gjer at for $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$ så vil $M \leq_{deg} N$ vera ei minimal degenerering viss og berre viss ein kan danne den assosierte partisjonen til N ved å flytte ein boks nedover i den assosierte partisjonen til M. Dersom $m < n$ så vil eit flytt frå rad n til rad m svare til ei eksakt følgje

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & \boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{n} \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & \boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \oplus & \boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{m+1} \arrow[r] & 0 \\ & & \boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{m} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Dersom $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$ er slik at $M \ncong N$ og $M \leq_{deg} N$ ikkje er minimal, så vil dette svare til å gjere "fleire flytt" av boksar i partisjonen assosiert med M for å danne partisjonen assosiert med N. Induksjon på 3.10 gjev følgjande:

Korollar 3.10.1. *La $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$, la α_M vera den assosierte partisjonen til M og la α_N vera den assosierte partisjonen til N. Då vil $M \leq_{deg} N$ viss og berre viss det finst flyttfunksjonar $f^-_{i_1,j_1}, \ldots, f^-_{i_m,j_m}$ slik at $f^-_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ f^-_{i_1,j_1}(\alpha_M) = \alpha_N$.*

Desse resultata gjev ekvivalensen mellom degenerering mellom modular og dominantordninga for partisjonar som vart hinta til tidlegare.

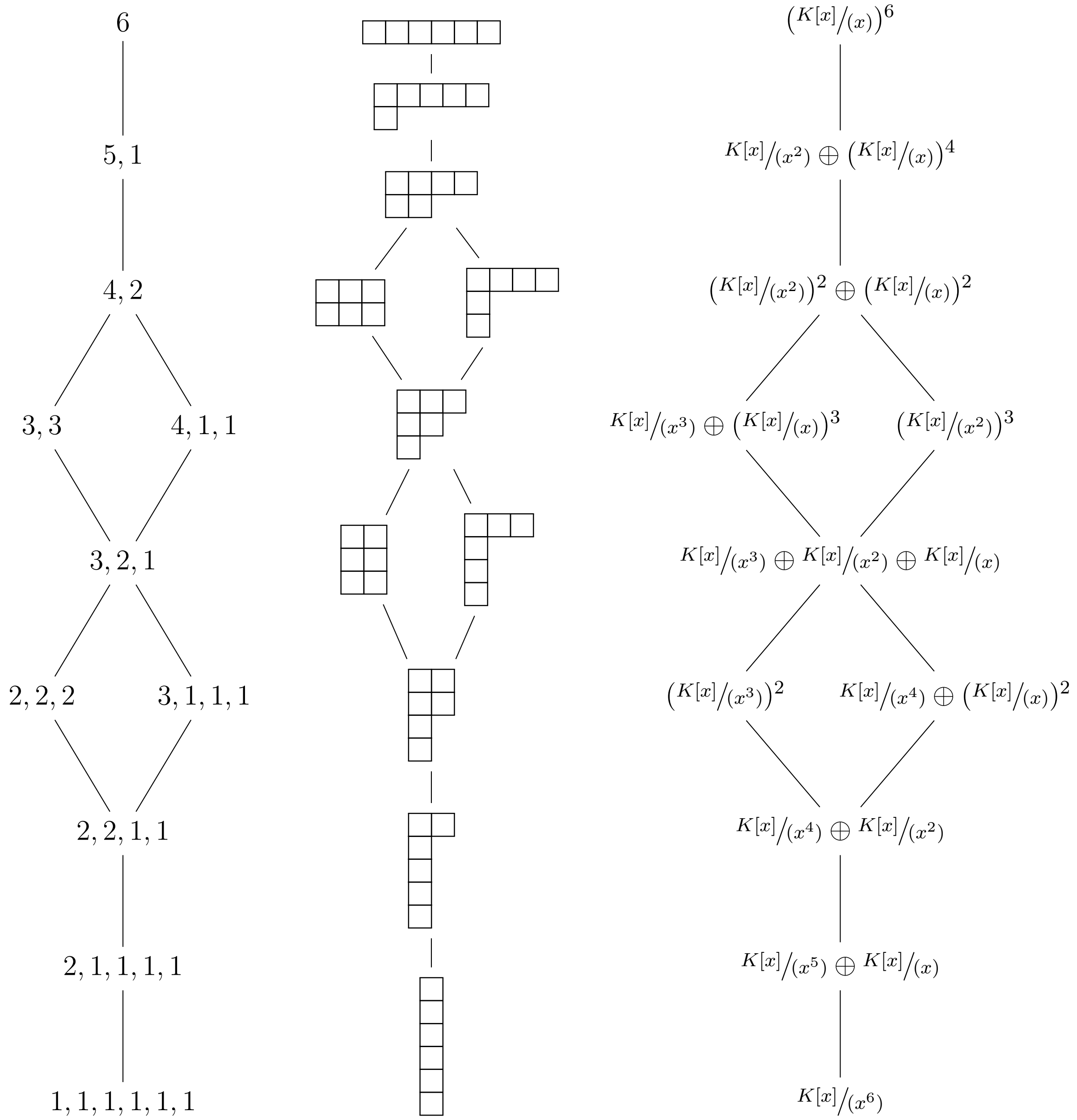
Proposisjon 3.11. *La $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$, la α_M vera den assosierte partisjonen til M og la α_N vera den assosierte partisjonen til N. Då vil $M \leq_{deg} N$ viss og berre viss $\alpha'_M \leq \alpha'_N$ i dominantordninga, der α'_M er den konjugerte partisjonen til α_M og α'_N er den konjugerte partisjonen til α_N.*

Proposisjon 3.11 gjev ei komplett skildring av degenerering for modular i $\mathcal{M}_d(p)$. Gjeve eit irredusibelt polynom p, slik at $\deg p | d$, er degenerasjonsordninga gjeve ved dominantordninga til $\frac{d}{\deg p}$ i motsett rekkefølgje. For å illustrere dette, sjå på $\mathcal{M}_6(x)$. Då svarar degenerasjonsordninga til modular i $\mathcal{M}_6(x)$ til dominantordninga til partisjonar av 6 i motsett rekkefølgje. Ein kan merke seg at 6 er første talet der rekka i dominantorden "deler" seg. Meir presist er $(4,2) \geq (3,3)$ og $(4,2) \geq (4,1,1)$, men $(3,3)$ og $(4,1,1)$ kan ikkje samanliknast. Dette sidan $4 \geq 3$, men $5 \leq 6$. Det er to slike "delingar", den andre er $(2,2,2)$ og $(3,1,1,1)$.

For å illustrere dette grafisk nyttar me *hassediagram*. Dersom $x \leq y$, så er hassediagrammet til denne ordninga

$$\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array} .$$

Då gjev $\mathcal{M}_6(x)$ opphav til tre hassediagram, tuplar til venstre, youngdiagram i midten, og degenerasjonordenen for modular i $\mathcal{M}_6(x)$ til høgre:



For å illustrere samanhengen mellom hom-ordenen og degenerasjonsordenen i polynomringen reknar me ut dimensjonen til endomorfismeringane til modulane i $\mathcal{M}_8(x)$. Sjå på den semisimple modulen $({}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x)})^8$ i $\mathcal{M}_8(x)$. Her vil kvar summand ha ei ikkjenull avbilding til seg sjølv, og ei ikkjenull avbilding til dei andre summandane. Difor er $\dim(\mathrm{End}(({}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x)})^8)) = 8^2 = 64$. Vidare, for ${}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x^2)} \oplus ({}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x)})^6$, vil det vera 2 lineært uavhengige avbildingar frå ${}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x^2)}$ til seg sjølv, og ei ikkjenull avbilding til dei andre summandane. Det er ei ikkjenull avbilding frå dei simple summandane inn i kvar av dei summandane. Dette gjev at $\dim(\mathrm{End}(({}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x^2)} \oplus ({}^{\mathbb{Z}_2}/_{(x)})^6) = 2 + 6 + 6 \cdot 7 = 50$.

Meir generelt, la $M \in \mathcal{M}_d(p)$, og la $\alpha_M = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ vera den assosierte partisjonen til M. Då er $\dim(\mathrm{End}(M))$ gjeve ved $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min\{\alpha_i, \alpha_j\}$. Sidan $\alpha_j \leq \alpha_i$ for $j \geq i$, gjev dette summen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \alpha_2 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots + \alpha_n + \alpha_n + \alpha_n + \cdots + \alpha_n.$$

Då er talet på α_i i summen gjeve ved $i \cdot \alpha_i + (i-1) \cdot \alpha_i = (2i-1)\alpha_i$. Dette gjev at $\dim(\mathrm{End}(M)) = \sum_{i=1}^n (2i-1)\alpha_i$.

Anta at $M, N \in \mathcal{M}_d(p)$, der $\alpha_M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ er den assosierte partisjonen til M og $\alpha_N = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ er den assosierte partisjonen til N. Vidare, anta at $M \leq_{deg} N$ er ei minimal degenerering. Lemma 3.9 gjev då at $\alpha_N = f^-_{k,l}(\alpha_M)$. Sjå på differansen $\dim(\mathrm{End}(N)) - \dim(\mathrm{End}(M))$. Formelen ovanfor, samt at α_N er gjeve ved $f^-_{k,l}(\alpha_M)$, gjer at

$$\dim(\mathrm{End}(N)) - \dim(\mathrm{End}(M)) = \sum_{i=1}^n (2i-1)\beta_i - \sum_{j=1}^n (2j-1)\alpha_j$$
$$= ((2k-1)(\alpha_k - 1) + (2l-1)(\alpha_l + 1)) - ((2k-1)\alpha_k + (2l-1)\alpha_l) = 2(l-k).$$

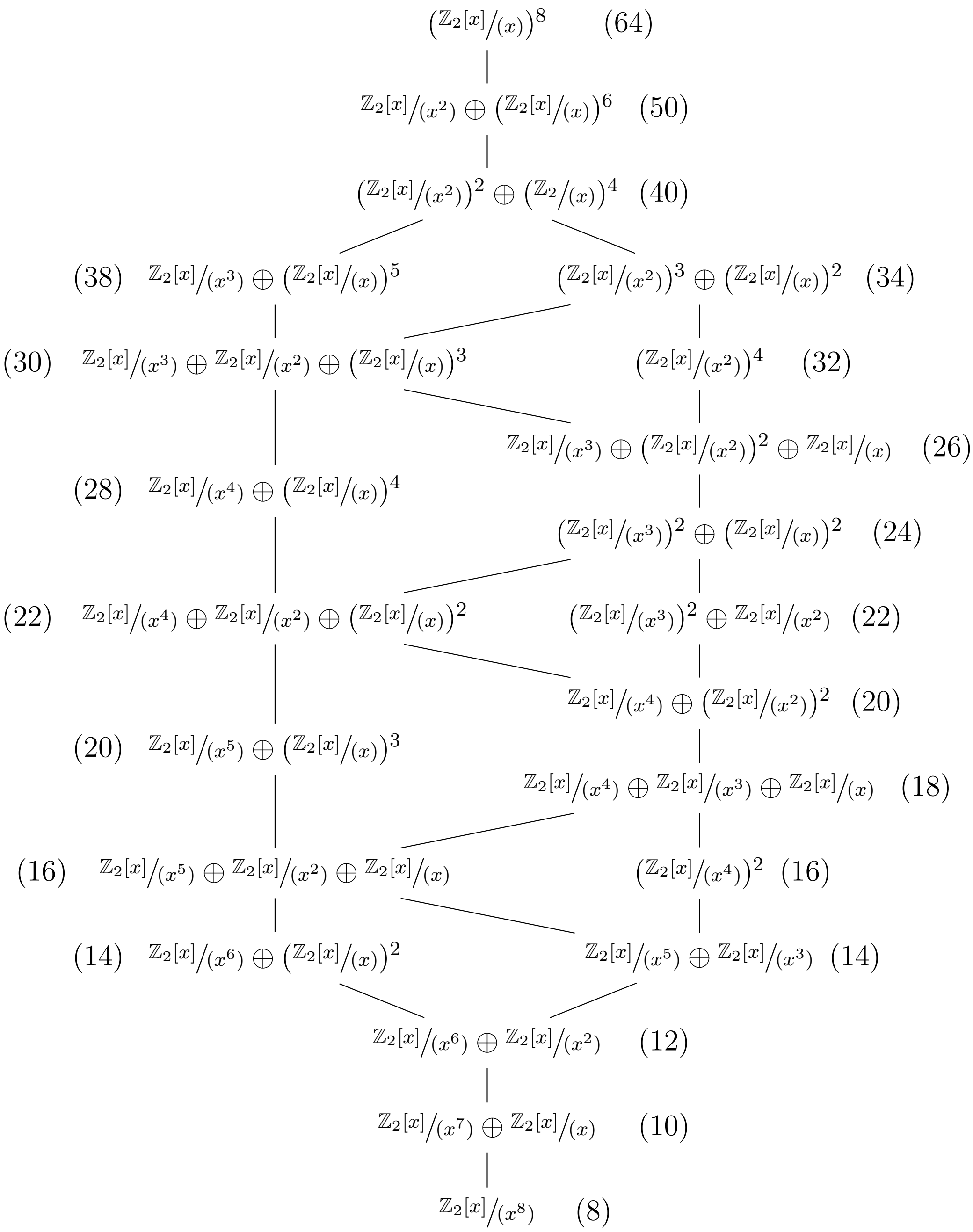
La oss summere dette i eit resultat:

Proposisjon 3.12. *La $M \in \mathcal{M}_d(p)$ og la α_M vera den assosierte partisjonen til M. Då er* $\dim(\mathrm{End}(M)) = \sum_{i=1}^n (2i-1)\alpha_i$.

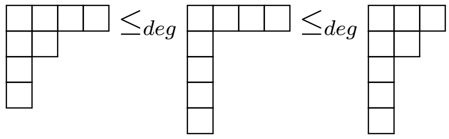
Vidare, la $M, N \in \mathcal{M}_d$, la α_M vera den assosierte partisjonen til M og la α_N vera den assosierte partisjonen til N. Dersom $M \leq_{deg} N$ er ei minimal degenerering, altså at det finst k, l slik at $k < l$ og $\alpha_N = f^-_{k,l}(\alpha_M)$, så er $\dim(\mathrm{End}(N)) - \dim(\mathrm{End}(M)) = 2(l-k)$.

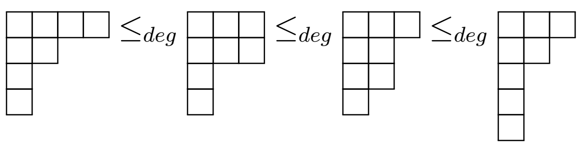
Meir generelt, dersom $M \leq_{deg} N$, så gjev korollar 3.10.1 at det finst flyttfunksjonar $f^-_{i_1,j_1}, \ldots, f^-_{i_k,j_k}$ slik at $\alpha_N = f^-_{i_k,j_k} \circ f^-_{i_1,j_1}(\alpha_M)$. Dette gjer at $\dim(\mathrm{End}(N)) - \dim(\mathrm{End}(M))$ er gjeve ved $2(\sum_{l=1}^k (j_l - i_l))$.

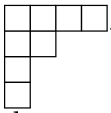
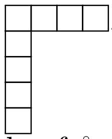
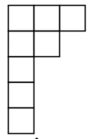
La oss nytte desse resultata til å rekne ut dimensjonane til endomorfismeringane til modulane i $\mathcal{M}_8(x)$. Då vert samanhengen mellom hom-ordenen og degenerering illustrert i følgjande hassediagram, der dimensjonen til endomorfismeringane er teikna i parantes:



Observer at det er rekker av forskjellig lengd i dette diagrammet. Ta til dømes modulane $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus \left(\mathbb{Z}_2[x]/(x)\right)^2$ og $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus \left(\mathbb{Z}_2[x]/(x)\right)^3$. Då vil $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus \left(\mathbb{Z}_2[x]/(x)\right)^2$ degenerere til $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3) \oplus \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \oplus \left(\mathbb{Z}_2[x]/(x)\right)^3$ via to rekker av minimale degenereringar. Youngdiagramma til desse rekkene er





Den øvste rekka inneheld 3 modular, medan den nedste rekka inneheld 4. Sjå på . Då er det 3 moglege måtar å flytte ein boks nedover i diagrammet slik at dette dannar ein partisjon. Det første alternativet er å flytte ein boks frå rad 2 til rad 5, som gjev diagrammet . For å danne diagrammet til  frå dette, er det berre eit mogleg flytt, nemleg frå rad 1 til 2. Dei to siste alternativa er å flytte ein boks frå rad 1 til enten rad 2 eller 3. Men det å flytte ein boks frå rad 1 til rad 3 er det same som å først flytte først frå rad 1 til rad 2 og så flytte frå rad 2 til rad 3. Altså ender ein opp med ei rekke på 4. Difor vil eit diagram med fleire val for flytting av boksar gje rekker av forskjellig lengd.

Neste steg er å generalisere proposisjon 3.11 til tilfella der $M, N \in \mathcal{M}_d(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Igjen av strukturteoremet er

$$M \cong {}^{K[x]}/_{(p_1^{\alpha_{1,1}})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_1^{\alpha_{1,k_1}})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_1^{\alpha_{n,1}})} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_1^{\alpha_{n,k_n}})},$$

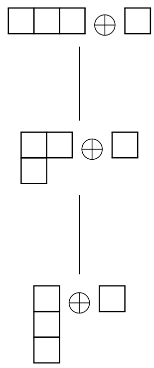
der potensane er ordna slik at $\alpha_{i,1} \geq \alpha_{i,2} \geq \cdots \geq \alpha_{i,k_i}$ for alle i. Då er tuppelen av partisjonar assosiert med M, P_M, tuppelen $((\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,k_1}), \ldots, (\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,k_n}))$. Til dømes vil modulen ${}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^2)} \oplus {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x+1)} \oplus {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x+1)}$ ha assosiert tuppel $((2), (1, 1))$.

Proposisjon 3.13. *La $M, N \in \mathcal{M}_d(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, og la P_M vera tuppelen av partisjonar assosiert med M og la P_N vera tuppelen av partisjonar assosiert med N. Då vil $M \leq_{deg} N$ viss og berre viss $P'_M \leq P'_N$.*

Bevis. Resultatet følgjer av induksjon på n, altså talet av irredusible polynom. Tilfellet $n = 1$ er vist i proposisjon 3.11.

Dersom $n > 1$, altså at $M, N \in \mathcal{M}_d(p_1 \ldots, p_n)$, og anta at $M \leq_{deg} N$. La p_{n+1} vera eit irredusibelt polynom slik at $p_{n+1} \neq p_i$ for $1 \leq i \leq n$. Vidare, la $M' = {}^{K[x]}/_{(p_{n+1}^{\alpha_1})} \oplus \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_{n+1}^{\alpha_k})}$, la $N' = {}^{K[x]}/_{(p_{n+1}^{\beta_1})} \oplus \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}/_{(p_{n+1}^{\beta_l})}$, slik at $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j$ og la $d' = d + \deg(p_{n+1})(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)$. Då ligg $M \oplus M'$ og $N \oplus N'$ i $\mathcal{M}_{d'}(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1})$. Sidan $M \leq_{deg} N$ i $\mathcal{M}_{d'}(p_1, \ldots, p_n)$ så vil $M \oplus M' \leq_{deg} N \oplus N'$ i $\mathcal{M}_{d'}(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1})$ dersom $M' \leq_{deg} N'$ i $\mathcal{M}_{d'-d}(p_{n+1})$. Då vert argumentet det same som for $n = 1$. $\square$

Eit hassediagram for $\mathcal{M}_5(x, x^2 + x + 1)$, med youngdiagram til venstre og degenerering til høgre, ser slik ut:



$$\left({}^{K[x]}/_{(x)}\right)^3 \oplus {}^{K[x]}/_{(x^2+x+1)}$$

$$|$$

$${}^{K[x]}/_{(x^2)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x^2+x+1)}$$

$$|$$

$${}^{K[x]}/_{(x^3)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x^2+x+1)}$$

No er det klart for å vise målet med denne seksjonen, nemleg at for endeleggenererte modular over polynomringen i ein variabel så er hom-ordninga ekvivalent med degenereasjonsordninga.

Proposisjon 3.14. *La $M, N \in \mathcal{M}_d(p_1, \ldots, p_n)$. Då vil $M \leq_{deg} N$ viss og berre viss $M \leq_{hom} N$.*

Bevis. Proposisjon 3.4 gjev at $M \leq_{deg} N \implies M \leq_{hom} N$ generelt, så det er nok å vise at $M \leq_{hom} N \implies M \leq_{deg} N$.

La $M, N \in \mathcal{M}_d(p_1, \ldots, p_n)$. Strukturteoremet gjev at

$$M \cong {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_{1,1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_{1,k_1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_n^{\alpha_{n,1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_n^{\alpha_{n,k_n}}}, \tag{2}$$

der $p_1, p_2, \ldots, p_n$ er irredusible polynom. På same måte er N på forma

$$N \cong {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\beta_{1,1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\beta_{1,l_1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_n^{\beta_{n,1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_n^{\beta_{n,l_n}}}. \tag{3}$$

La oss vise dette ved induksjon på n, altså talet på irredusible polynom.

La $n = 1$. Då er $M \cong {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_{1,1}}} \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_{1,2}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_{1,k_1}}}$. For å forenkle notasjonen, la $\alpha_{1,1} = \alpha_1$, $\alpha_{1,2} = \alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_{1,k_1} = \alpha_k$. Organiser $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ slik at $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$. På same vis er N på forma ${}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\beta_1}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\beta_l}}$, der potensane er organisert slik at $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_l$. Då vil $\dim \operatorname{Hom}({}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_i}}, M)$ vera talet på summandar på forma ${}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_j}}$, der $\alpha_j \leq \alpha_i$. Sidan $\dim \operatorname{Hom}({}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_i}}, M) \leq \dim \operatorname{Hom}({}^{K[x]}\!/\!_{p_1^{\alpha_i}}, N)$ $\forall\ i$, så må $\alpha_1 \geq \beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \geq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k$. Vidare sidan $\ell(M) = \ell(N)$, så vil $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{j=1}^{l} \beta_j$. La $\alpha_M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ og la $\alpha_N = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$. Då er α_M og α_N to partisjonar av $\frac{d}{\deg p_1}$. Dessutan er $\alpha_N \leq \alpha_M$ i dominantorden. Proposisjon 3.11 gjev då at $M \leq_{deg} N$.

La $n > 1$, altså at M er på forma (2) og N er på forma (3), og anta at $M \leq_{deg} N$. Vidare, la p_{n+1} vera eit irredusibelt polynom slik at $p_{n+1} \neq p_i$ for $1 \leq i \leq n$, la $M' = {}^{K[x]}\!/\!_{p_{n+1}^{\alpha_{n+1,1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_{n+1}^{\alpha_{n+1,k_{n+1}}}}$ og la $N' = {}^{K[x]}\!/\!_{p_{n+1}^{\beta_{n+1,1}}} \oplus \cdots \oplus {}^{K[x]}\!/\!_{p_{n+1}^{\beta_{n+1,k_{n+1}}}}$, slik at $\sum_{i=1}^{k_{n+1}} \alpha_{n+1,i} = \sum_{j=1}^{k_{n+1}} \beta_{n+1,j}$. Då vil $M \oplus M' \leq_{deg} N \oplus N'$ dersom $M' \leq_{deg} N'$. Sidan $\operatorname{Hom}({}^{K[x]}\!/\!_{p_i^{\alpha_i}}, {}^{K[x]}\!/\!_{p_j^{\alpha_{n_i}}}) = 0$, dersom $i \neq j$, vil ikkje $M' \leq_{hom} N'$ avhenge av dei andre summandane. Då vil same argument som for $n = 1$ gje at $M' \leq_{deg} N'$. $\square$

Dette resultatet følgjer av strukturteoremet for endeleggenererte modular over eit hovudidealområde. Difor vil dette gjelde meir generelt, berre med å bytte ut $K[x]$ med eit vilkårleg hovudidealområde.

Den siste eigenskapen som vert presentert for endeleggenererte modular over polynomringen i ein variabel er at desse dannar ein *gitterstruktur*.

Definisjon 3.5. *La $(L, \leq)$ vera ei delvis ordna mengd. Dersom alle delmengder med to element $\{a, b\} \subseteq L$ har eit supremum og infimum, vert $(L, \leq)$ kalla eit gitter. La $a \vee b = \sup\{a, b\}$ og $a \wedge b := \inf\{a, b\}$.*

Eit gitter vert kalla avgrensa dersom gitteret har eit største element, 1, og eit minste element, 0, slik at $0 \leq x \leq 1$ for alle $x \in L$.

Det at degenerering over $K[x]$ dannar ein gitterstruktur følgjer av neste lemma, henta frå [Brylawski(1973)].

Lemma 3.15. *Dominantordninga til ein partisjon av eit tal n dannar ei avgrensa gitterstruktur.*

Bevis. La $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vera ein partisjon av n. Definer den assosierte partisjonen til p som $\hat{p} = (0, p_1, p_1+p_2, \dots, p_1+p_2+\dots+p_n)$. Då er $\hat{p}$ ikkje-minkande, altså $\hat{p}_i \le \hat{p}_{i+1}$. Vidare er $\hat{p}$ konkav, sidan $2\hat{p}_i \ge \hat{p}_{i-1} + \hat{p}_{i+1}$.

Dersom to følgjer $p = (p_1, p_2, \dots)$ og $q = (q_1, q_2, \dots)$ er ikkje-minkande og konkave, så er følgja $t = (\min(p_1, q_1), \min(p_2, q_2), \dots)$ ikkje-minkande og konkav. Dette gjer at for to partisjonar p og q så er $p \wedge q$ gjeve ved partisjonen t som har assosiert partisjon

$$\hat{t} = (\min(\hat{p}_1, \hat{q}_1), \min(\hat{p}_2, \hat{q}_2), \dots, \min(\hat{p}_n, \hat{q}_n)).$$

La p' vera den konjugerte partisjonen til p og la q' vera den konjugerte partisjonen til partisjonen q. Då er $p \vee q$ gjeve ved $(p' \wedge q')'$.

Gitteret er grensa ovanfrå av partisjonen (n) og nedanfrå av n-tuppelen $(1, 1, \dots, 1)$. Altså er dette ein avgrensa gitterstruktur. $\square$

Korollar 3.15.1. *Den delvis ordna mengda $(\mathcal{M}_d(p_1, \dots, p_k), \le_{deg})$ dannar ein avgrensa gitterstruktur.*

Bevis. Dette følgjer av proposisjon 3.11. $\square$

Igjen vil resultatet halde meir generelt der Λ er eit hovudidealområde.

3.4 Polynomringen i to variablar

Eit naturleg spørsmål er om degenerering alltid gjev ein gitterstruktur? Svaret på dette er nei.

Sjå på den 3-dimensjonale modulen $({}^{K[x,y]}/_{(x,y)})^3$. Då vil modulen ${}^{K[x,y]}/_{(x^2,y)} \oplus {}^{K[x,y]}/_{(x,y)}$ degenerere til $({}^{K[x,y]}/_{(x,y)})^3$. Dette kjem av den eksakte følgja

$$0 \to {}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0\\ \bar{x}\end{smallmatrix}\right)} {}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \oplus {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\bar{1} & 0\\ 0 & \bar{\ }\end{smallmatrix}\right)} {}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \oplus {}^{K[x]}/_{(x,y)} \to 0.$$

Vidare er dei to følgjene

$$0 \to {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y)} \xrightarrow{\bar{x}} {}^{K[x,y]}/_{(x^3,y)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \to 0,$$

$$0 \to {}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \xrightarrow{\bar{y}} {}^{K[x,y]}/_{(x^2,xy,y^2)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y)} \to 0$$

eksakte. Ved å permutere x og y i følgjene over får ein at ${}^{K[x,y]}/_{(x,y^3)}$ degenererer til ${}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \oplus {}^{K[x,y]}/_{(x,y^2)}$ og at ${}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \oplus {}^{K[x,y]}/_{(x,y^2)}$ degenererer til $({}^{K[x,y]}/_{(x,y)})^3$. Dette gjev hassediagrammet

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & ({}^{K[x,y]}/_{(x,y)})^3 & \\
{}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \oplus {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y)} \arrow[ur] & & {}^{K[x,y]}/_{(x,y)} \oplus {}^{K[x,y]}/_{(x,y^2)} \arrow[ul] \\
{}^{K[x,y]}/_{(x^3,y)} \arrow[u] & {}^{K[x,y]}/_{(x^2,xy,y^2)} \arrow[ul] \arrow[ur] & {}^{K[x,y]}/_{(x,y^3)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Altså er ikkje $K[x,y]/(x^3,y) \wedge K[x,y]/(x^2,xy,y^2)$ veldefinert, og degenerering dannar ikkje ein gitterstruktur for polynomringen i to variablar.

Dersom K er algebraisk lukka så gjev dette eit uendeleg diagram, sidan det finst uendeleg mange modular på forma $K[x,y]/(y^3,x^3)/(x+by)$, der $0 \neq b \in K$. Desse er generert av $\bar{1}, \bar{x}$ og $\bar{x}^2$. På same måte er det uendeleg mange modular $K[x]/(x^2,y^2)/(x+ay)$, der $0 \neq a \in K$, som er generert av $\bar{1}$ og $\bar{x}$. Sjå på $f : K[x,y]/(x^2,x+ay) \xrightarrow{\bar{x}} K[x,y]/(x^3,x+by)$. Dersom f skal vera veldefinert må $f(\bar{x}) = f(-a\bar{y})$, sidan $\bar{x} = -a\bar{y}$ i $K[x,y]/(x^2,x+ay)$. Men $f(\bar{x}) = \bar{x}^2$ og $f(-a\bar{y}) = -a\bar{x}\bar{y}$. Dette gjev at sidan $\bar{y} = -\frac{1}{b}\bar{x}$ i $K[x,y]/(x^3,x+by)$,
så er $f(-a\bar{y}) = -a\bar{x}\bar{y} = \frac{a}{b}\bar{x}^2$. Då er $f(\bar{x}) = f(-a\bar{y})$ viss og berre viss $a = b$. Dette gjev ei eksakt følgje på forma

$$0 \to K[x,y]/(x^2,x+by) \xrightarrow{\bar{x}} K[x,y]/(x^3,x+by) \xrightarrow{\bar{}} K[x,y]/(x,y) \to 0.$$

Altså vil $K[x,y]/(x^3,x+by)$ degenerere til $K[x,y]/(x,y) \oplus K[x,y]/(x^2,x+by)$ for alle $b \in K$. Vidare vil

$$0 \to K[x,y]/(x,y) \xrightarrow{\bar{x}^2} K[x,y]/(x^3,y) \xrightarrow{\bar{}} K[x,y]/(x^2,x+by) \to 0,$$

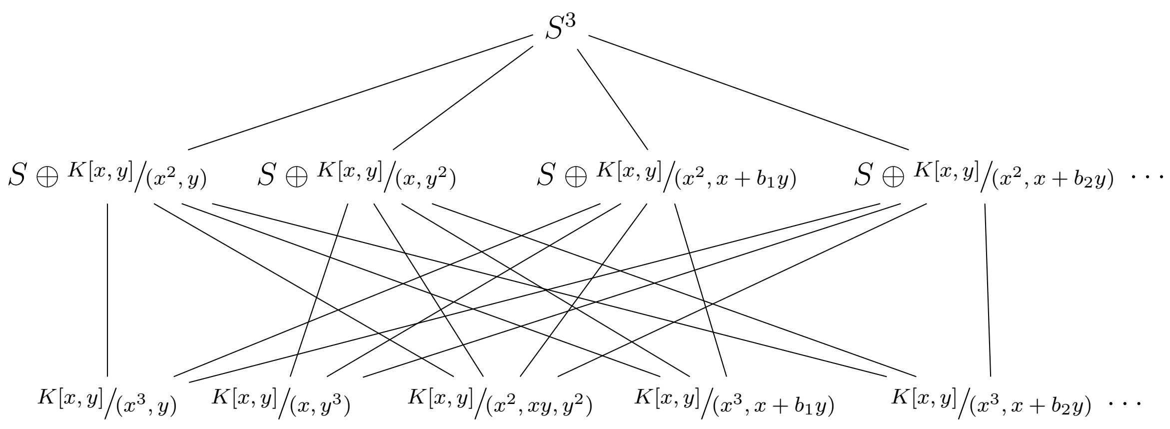
vera ei eksakt følgje, som gjer at $K[x,y]/(x^3,y)$ degenererer til $K[x,y]/(x,y) \oplus K[x,y]/(x^2,x+by)$ for alle $b \in K$. På same måte vil $K[x,y]/(x,y^3)$ degenerere til $K[x,y]/(x,y) \oplus K[x,y]/(x^2,x+by)$, for alle $b \in K$. Dessutan er følgja

$$0 \to K[x,y]/(x^2,y) \xrightarrow{\bar{x}} K[x,y]/(x^3,x+by) \xrightarrow{\bar{}} K[x,y]/(x,y) \to 0$$

eksakt, og dette gjev at $K[x,y]/(x^3,x+by)$ degenererer til $K[x,y]/(x,y) \oplus K[x,y]/(x^2,y)$ og $K[x,y]/(x^3,x+by)$ degenererer til $K[x,y]/(x,y) \oplus K[x,y]/(x,y^2)$, for alle $b \in K$. Til slutt vil $K[x,y]/(x^2,y^2,xy)$ degenerere til $K[x,y]/(x^2,x+by)$, for alle $b \in K$, via den eksakte følgja

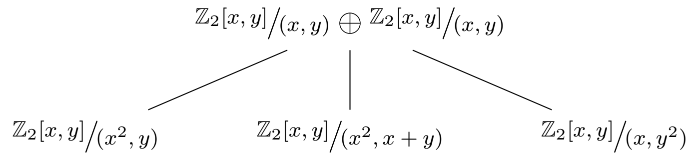
$$0 \to K[x,y]/(x,y) \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} K[x,y]/(x^2,y^2,xy) \xrightarrow{\bar{}} K[x,y]/(x^2,x+by) \to 0.$$

Dette gjev, for $b_1, b_2, \dots \in K$ og $S = K[x,y]/(x,y)$, eit diagram på forma:



La K vera ein endeleg kropp, slik at diagramma vert endelege. Eit naturleg val er å la $K = \mathbb{Z}_2$. Dersom den semisimple modulen på forma $(\mathbb{Z}_2[x,y]/(x,y))^n$ skal ligge i toppen på diagramma, må Λ vera på forma $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^n,x^{n-1}y,\dots,xy^{n-1},y^n)$. Sjå på modulane av lengd 1 over $\Lambda = \mathbb{Z}_2[x,y]/(x,y)$. Då er det berre ein modul av lengd 1, nemleg $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x,y)$. Vidare er det fire modular av lengd 2 over $\Lambda = \mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2,,xy,y^2)$. Den semisimple modulen $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x,y) \oplus \mathbb{Z}_2[x,y]/(x,y)$ som ligg i toppen, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2,y)$, som er generert av $\bar{1}$ og $\bar{x}$ som

$\mathbb{Z}_2$-vektorrom, og ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y^2)}$, som er generert av $\bar{1}$ og $\bar{y}$ som $\mathbb{Z}_2$-vektorrom. I tillegg til desse 3 modulane er det den lineære summanden $\bar{x}+\bar{y}$. Dette gjev ein fjerde modul av lengd 2, nemleg ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,x+y)}$, som er generert av $\bar{1}$ og $\bar{x}=\bar{y}$. Dette gjev følgjande diagram:



Neste steg er å sjå på modular av lengd 3. La $\Lambda = {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,x^2y,xy^2,y^3)}$. Den semisimple modulen $({}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)})^3$ sitt i toppen av diagrammet og under den sit dei 3 modulane av lengd 2 saman med ein simpel summand. Det er 6 modular av lengd 3, nemleg ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,y)}$, ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,y+x^2)}$, ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(y^3,x+y^2)}$, ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,x+y)}$, ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,y^2,xy)}$ og ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y^3)}$. Her er nokre av dei eksakte følgjene:

$$0 \to {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,y)} \xrightarrow{\bar{x}} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,y)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)} \to 0,$$

$$0 \to {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)} \xrightarrow{\bar{x}^2} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,y)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,x+y)} \to 0,$$

$$0 \to {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,y)} \xrightarrow{\bar{x}} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,y+x^2)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)} \to 0,$$

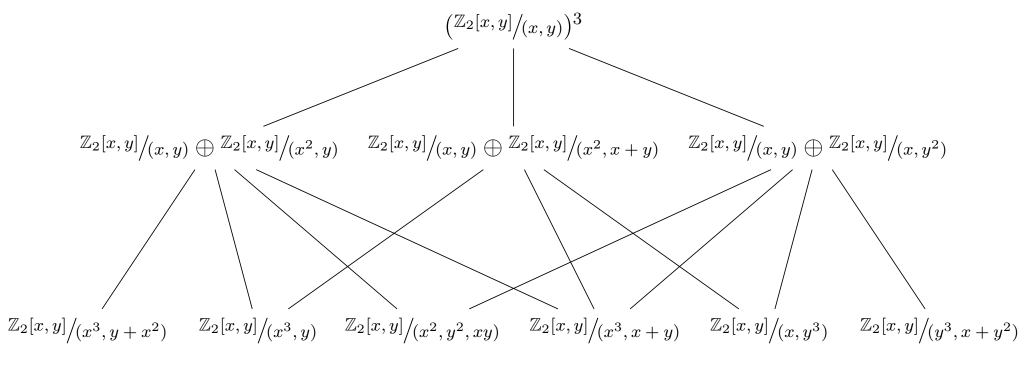
$$0 \to {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)} \xrightarrow{\bar{y}} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,y^2,xy)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,y)} \to 0,$$

$$0 \to {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,y)} \xrightarrow{\bar{x}} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,x+y)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)} \to 0,$$

$$0 \to {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^2,x+y)} \xrightarrow{\bar{x}} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^3,x+y)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)} \to 0.$$

Dei resterande følgjene er gjeve ved å permutere x og y.

Dette gjev følgjande diagram for degenerering:



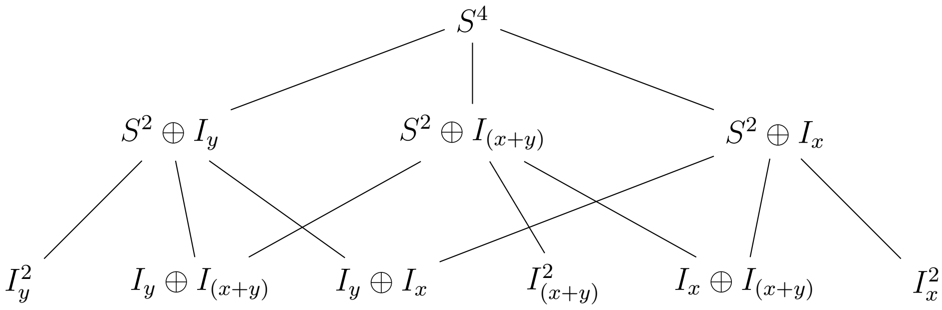
Sjå på dimensjonen til endomorfismeringane til desse modulane. Då er $\dim(\mathrm{End}(({}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)})^3) = 8$. For modulane på "nivå to" vil summanden av lengd 2 ha 2 lineært uavhengige avbildingar til seg sjølv og 1 ikkjenull avbilding til den simple. Vidare har den simple 1 ikkjenull avbilding til begge summandar. Altså er dimensjonen på endomorfismeringane til desse tre modulane 5. Modulane av lengd 3 har 3 lineært uavhengige avbildingar inn i seg sjølv.

Neste steg er å sjå på modulane av lengd 4 over ${}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3,y^4)}$. La $S = {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}\!/\!_{(x,y)}$, og la $I_\lambda = {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2,y^2)}\!/\!_{\lambda}$, der λ er ein av dei lineære formene $\{x,y,x+y\}$ i $\mathbb{Z}_2[x,y]$. Då vil den semisimple modulen S^4 ligge i toppen av diagrammet. Under denne er alle modular på forma $I_\lambda \oplus S^2$. Vidare ligg alle kombinasjonane av $I_\lambda \oplus I_\mu$, for $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y\}$, på "nivå" tre. Altså er det 6 modular, og dei eksakte følgjene er på forma

$$0 \to S \xrightarrow{\binom{0}{\bar\sigma}} I_\mu \oplus I_\lambda \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\bar 1 & 0\\ 0 & \bar{\ }\end{smallmatrix}\right)} I_\mu \oplus S \to 0,$$

der $\sigma \in \{x, y, x+y\}$ er slik at $\lambda \neq \sigma$.

Dette gjev følgjande diagram for degenerering:



Igjen, sjå på dimensjonen til endomorfismeringane til desse modulane. Då er det to tilfeller. Det første tilfellet er om ein har to kopiar av same modul, I_λ^2, for $\lambda \in \{x, y, x+y\}$. Desse har 2 lineært uavhengige avbildingar til seg sjølv og 2 lineært uavhengige avbildingar til den andre summanden, og har difor dimensjon 8. Det andre tilfellet er modulane på forma $I_\lambda \oplus I_\mu$, der $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y\}$ og $\lambda \neq \mu$. Då har kvar summand 2 lineært uavhengige avbildingar til seg sjølv, og 1 ikkjenull avbilding til den andre summanden. Dette gjev at endomorfismeringen er av dimensjon 6.

Dersom ein skulle teikna resten av modulane av lengd 4 ville diagrammet vorte stort. Neste "nivå" av diagrammet ville inneheldt alle modulane av lengd 3 pluss ein simpel summand, altså 6 modular. Vidare ville "nivået" under inneheldt 12 modular av lengd 4, nemleg $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^4, y)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^3, y^2, xy)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2, y^3, xy)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x, y^4)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^4, x+y)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^4, y+x^3)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^4, y+x^2)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(y^4, x+y^3)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(y^4, x+y^2)$, $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2, y^2)$ og $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^3, y^3, x^2+y^2)$.

For å gjere dette meir oversiktleg fokuserer me på modulane som vert annihilert av idealet (x^2, y^2). Med andre ord ser me på modular av lengd 4 over $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2, y^2)$. Då er det berre ein 4-dimensjonal modul som har loewylengd 3, nemleg $\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2, y^2)$. La $\Lambda = \mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2, y^2)$, la $S = \mathbb{Z}_2[x,y]/(x,y)$ og la $I_\lambda = {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2,y^2)}/\lambda$, der λ er ein av dei lineære formene $\{x, y, x+y\}$. Observer at $\Lambda/\operatorname{soc}\Lambda = \mathbb{Z}_2[x,y]/(x^2, y^2, xy)$. Då vil Λ degenerere til modulane $I_\lambda \oplus I_\lambda$ og $S \oplus \Lambda/\operatorname{soc}\Lambda$ ved dei eksakte følgjene

$$0 \to I_\lambda \xrightarrow{\bar\lambda} \Lambda \xrightarrow{\bar{\ }} I_\lambda \to 0,$$

$$0 \to S \xrightarrow{\bar x\bar y} \Lambda \xrightarrow{\bar{\ }} \Lambda/\operatorname{soc}\Lambda \to 0.$$

Vidare, observer at $\operatorname{rad}\Lambda = \langle x, y\rangle$, der $\langle x, y\rangle$ er idealet i Λ generert av $\bar x, \bar y$ og $\bar x\bar y$. Då vil Λ degenerere til $\operatorname{rad}\Lambda \oplus S$ via den eksakte følgja

$$0 \to \operatorname{rad}\Lambda \xrightarrow{\bar 1} \Lambda \xrightarrow{\bar{\ }} S \to 0.$$

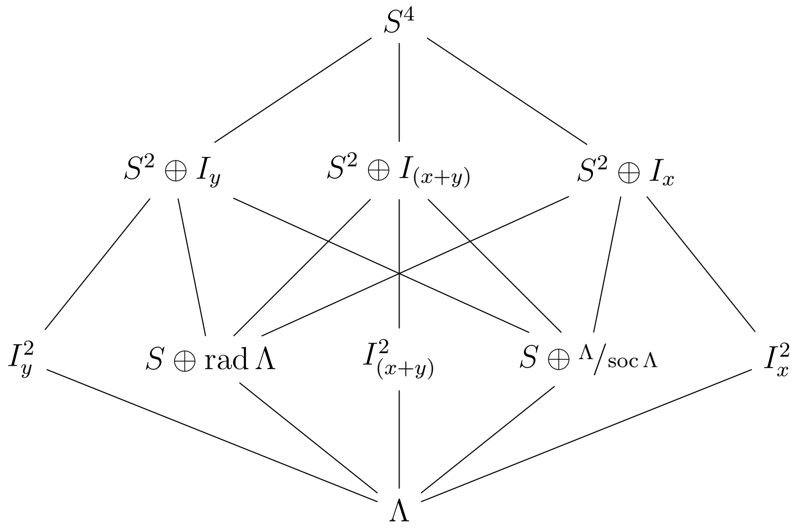
Vidare, vil $S \oplus \Lambda/\operatorname{soc}\Lambda$ degenerere til alle dei tre modulane $S \oplus S \oplus I_\lambda$ via den eksakte følgja

$$0 \to S \xrightarrow{\binom{0}{\bar\lambda}} S \oplus \Lambda/\operatorname{soc}\Lambda \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\bar 1 & 0\\ 0 & \bar{\ }\end{smallmatrix}\right)} S \oplus I_\lambda \to 0.$$

Definer $\phi_{\bar{a},\bar{b}} : \operatorname{rad}\Lambda \to S$, der $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{\mathbb{Z}_2[x,y]}/_{(x,y)}$, til å vera slik at $\phi_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$ sender $\bar{x}$ til $\bar{a}$ og sender $\bar{y}$ til $\bar{b}$. Dette gjev fire moglege avbildingar. Dersom $\bar{a} = \bar{b} = 0$, så er dette nullavbildinga. Vidare, sjå på $\phi_{\bar{1},0}(\bar{x}, \bar{y})$. Denne sender $\bar{x}$ til $\bar{1}$ og $\bar{y}$ til 0. Dette gjer at den lineære forma $\bar{x} + \bar{y}$ vert sendt til $\bar{1}$. På same måte vert $\bar{y}$ sendt til $\bar{1}$ av $\phi_{0,\bar{1}}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x}$ vert sendt til 0 og $\bar{x} + \bar{y}$ vert sendt til $\bar{1}$. Den siste avbildinga, $\phi_{\bar{1},0}(\bar{x}, \bar{y})$, vil sende $\bar{x}$ til $\bar{1}$ og $\bar{y}$ til $\bar{1}$. Dette gjer at $\bar{x} + \bar{y}$ vert sendt til $\bar{1} + \bar{1} = 0$. La $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y\}$. Då kan $\phi_{\bar{a},\bar{b}}$ skildrast som $\phi_{\bar{\lambda}}$ der $\phi_{\bar{\lambda}}$ sender $\bar{\lambda}$ til 0, og sender $\bar{\mu}$ til $\bar{1}$ dersom $\mu \neq \lambda$. Då degenererer $\operatorname{rad}\Lambda$ til $I_\lambda \oplus S^2$ via den eksakte følgja

$$0 \to I_\lambda \oplus S \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{rad}\Lambda \oplus S \xrightarrow{(\phi_{\bar{\lambda}}\ 0)} S \to 0.$$

Dette gjev følgjande diagram for degenerering



Kva skjer dersom ein simpel summand vert lagt til Λ? Då vil $\Lambda \oplus S$ degenerere til ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \oplus I_\lambda$, via den eksakte følgja

$$0 \to I_\lambda \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\ } \end{smallmatrix}\right)} \Lambda \oplus S \xrightarrow{(\bar{\ }\ \bar{\lambda})} {}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \to 0.$$

Vidare vil $\Lambda \oplus S$ degenerere til $\operatorname{rad}\Lambda \oplus I_\lambda$, via den eksakte følgja

$$0 \to \operatorname{rad}\Lambda \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{1} \\ \phi_{\bar{\lambda}} \end{smallmatrix}\right)} \Lambda \oplus S \xrightarrow{(\bar{\ }\ \bar{\mu})} I_\lambda \to 0,$$

der $\mu \neq \lambda$, og $\phi_{\bar{\lambda}}$ er som definert over.

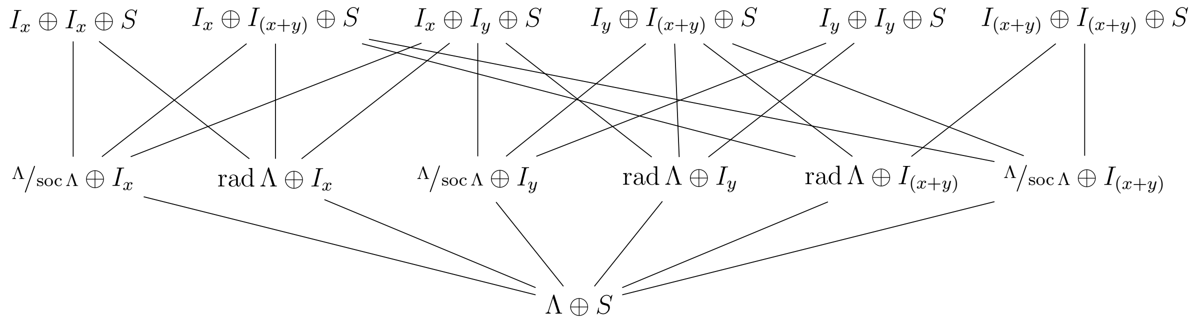
Dessutan vil ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \oplus I_\lambda$ degenerere til alle modular på forma $I_\lambda \oplus I_\mu \oplus S$, for alle $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y\}$, via den eksakte følgja

$$0 \to S \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{\mu} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} {}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \oplus I_\lambda \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{\ } & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{smallmatrix}\right)} I_\mu \oplus I_\lambda \to 0.$$

Dualt vil $\operatorname{rad}\Lambda \oplus I_\lambda$ degenerere til alle modular $I_\lambda \oplus I_\mu \oplus S$ for alle $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y\}$, ved den eksakte følgja

$$0 \to I_\lambda \oplus I_\mu \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{rad}\Lambda \oplus I_\mu \xrightarrow{(\phi_{\bar{\lambda}}\ 0)} S \to 0,$$

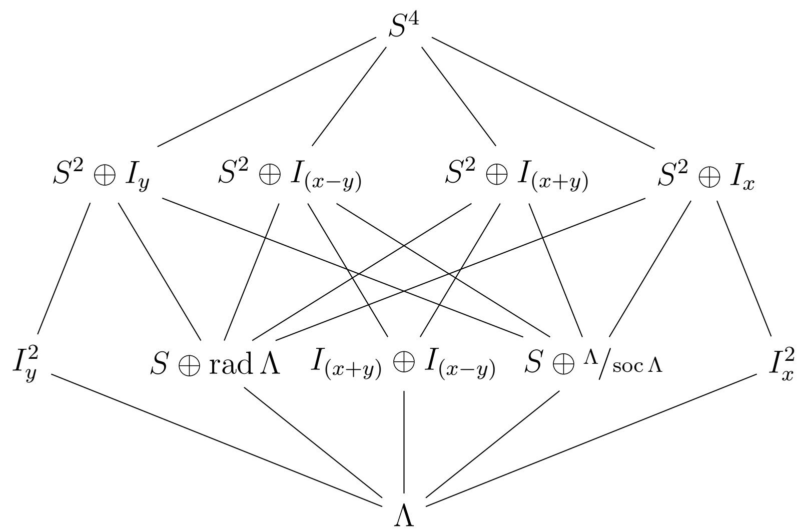
der $\phi_{\bar{\lambda}}$ er gjeve som ovanfor. Dette gjev følgjande diagram



Dette gjer at $\Lambda \oplus S$ degenerer til $I_\lambda \oplus I_\mu$ for alle $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y\}$, men ovanfor vart det vist at Λ berre degenererer til modular av typen I_λ^2. Dette er eit nytt døme på at ein må vera forsiktig med å kansellere summandar i degenerering.

La K vera ein kropp som ikkje har karakteristikk 2, og la $\Lambda = {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y^2)}$. Dersom $\bar{x} + b\bar{y}$, for $b \in K$, er ei lineær form i Λ, så vil $I_{(x+by)} \xrightarrow{\bar{x}+c\bar{y}} \Lambda$ vera veldefinert viss og berre viss $b = -c$. Då vil Λ degenerere til alle modular på forma $I_{(x+by)} \oplus I_{(x-by)}$, for alle $b \in K$.

Igjen, for å få eit endeleg diagram, la $K = \mathbb{Z}_3$. Dette gjev, sidan det berre er to lineære former, følgjande diagram:



3.5 Ytrealgebraen

La $\Lambda = {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy+yx)}$. Dette kallar me ytrealgebraen av lengd 4. Dersom K har karakteristikk 2, så vil $\Lambda = {}^{K[x,y]}/_{(x^2,y^2)}$, som vart studert i førre seksjon. La difor karakteristikken til K vera ulik 2. Vidare, la $S = {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x,y)}$ og la $I_\lambda = {}^{K\langle x,y\rangle/(x^2,y^2,xy+yx)}/_{\lambda}$ for $\lambda \in \{y, x+by\}$, der $b \in K$. Observer at, for $\lambda \in \{x, y\}$, så vil

$$0 \to I_\lambda \xrightarrow{\bar{\lambda}} \Lambda \xrightarrow{-} I_\lambda \to 0$$

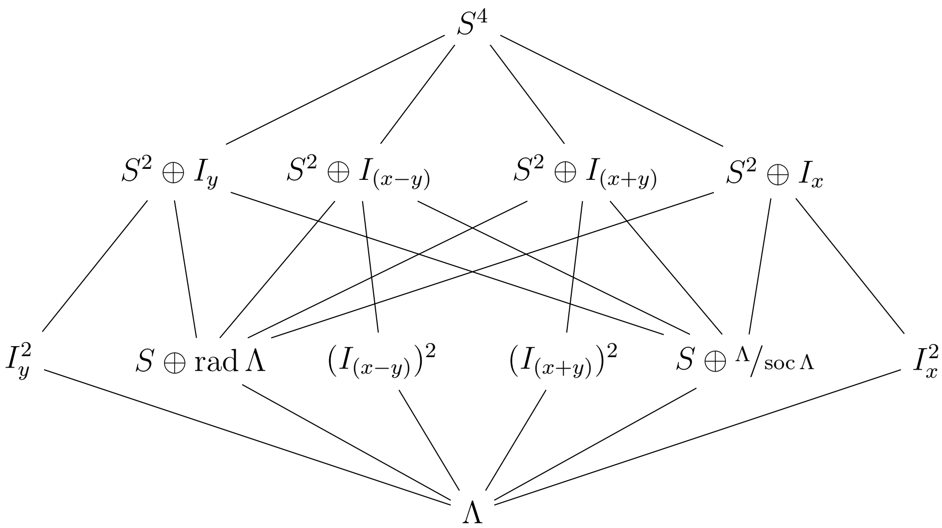
vera ei eksakt følgje. Dersom $\lambda = (x + by)$ vil ikkje Λ degenerere til modular på forma $I_{(x+by)} \oplus I_{(x-by)}$ som i det kommutative tilfellet. Derimot vil Λ degenerere til modular på forma $I_{(x+by)} \oplus I_{(x+by)}$, for alle $b \in K$, via den eksakte følgja

$$0 \to I_{(x+by)} \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda \xrightarrow{-} I_{(x+by)} \to 0.$$

Vidare vil $I_{(x+by)} \oplus I_{(x+by)}$ degenerere til $I_{(x+by)} \oplus S^2$ via den eksakte følgja

$$0 \to S \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{x}+b\bar{y} \end{smallmatrix}\right)} I_{(x+by)} \oplus I_{(x+by)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{\ } \end{smallmatrix}\right)} I_{(x+by)} \oplus S \to 0.$$

Λ vil framleis degenerere til ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \oplus S$, der ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} = {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy,yx)}$. Vidare vil Λ degenerere til $\operatorname{rad}\Lambda \oplus S$, der $\operatorname{rad}\Lambda$ er generert av $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{x}\}$. La $K = \mathbb{Z}_3$. Dette gjev følgjande diagram



Igjen vert ein simpel summand lagt til Λ. Då vil dei eksakte følgjene som vart rekna i førre seksjon for $\Lambda \oplus S$ halde. Altså vil $\Lambda \oplus S \leq_{deg} \operatorname{rad}\Lambda \oplus I_\lambda$ og $\Lambda \oplus S \leq_{deg} {}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \oplus I_\lambda$ for alle $\lambda \in \{x, y, x+y, x-y\}$. Då degenererer både $\operatorname{rad}\Lambda \oplus I_\lambda$ og ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda} \oplus I_\lambda$ til alle modular på forma $I_\lambda \oplus I_\mu \oplus S$ for alle $\lambda, \mu \in \{x, y, x+y, x-y\}$. Dette gjer at virtuell degenerering ikkje medfører degenerering for ytrealgebraen.

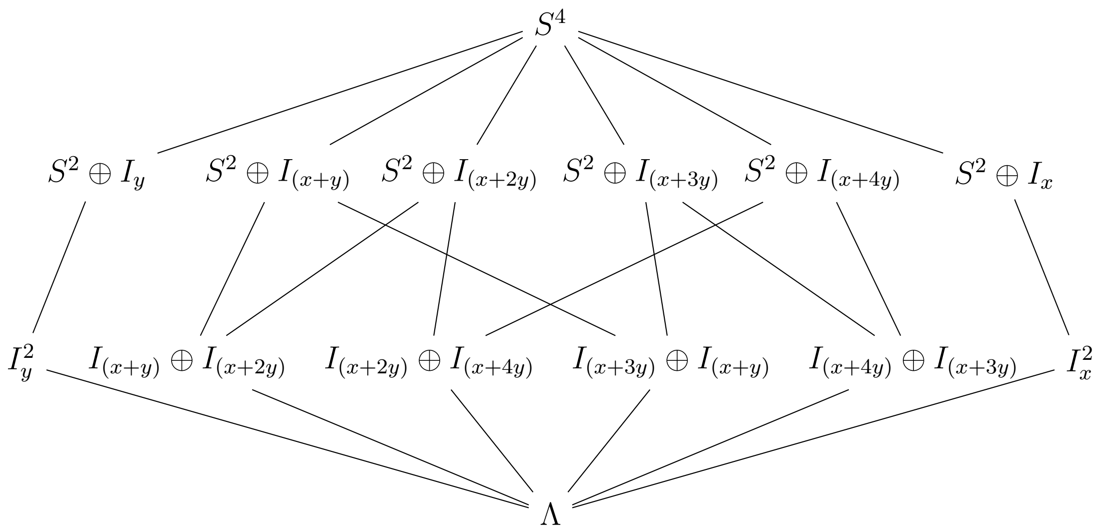
Meir generelt, la $\Lambda = {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy+qyx)}$. Då vil Λ degenerere til modulane $I_x \oplus I_x$ og $I_y \oplus I_y$ som før. Derimot syner det seg eit anna mønster for dei lineære formene $x + by$. Sjå på avbildinga

$${}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,x+by)} \xrightarrow{\bar{x}+m\bar{y}} {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy+qyx)}.$$

Dersom denne avbildinga skal vera veldefinert, må $m(\bar{y}\bar{x}) = -b(\bar{x}\bar{y})$. Sidan $(\bar{x}\bar{y}) = -q(\bar{y}\bar{x})$ i Λ, så er $m(\bar{y}\bar{x}) = -b(-q(\bar{y}\bar{x}))$. Dette gjer at $m = bq$. Altså vil

$$0 \to {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,x+by)} \xrightarrow{(\bar{x}+bq\bar{y})} {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy+qyx)} \xrightarrow{\bar{\ }} {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,x+bqy)} \to 0$$

vera ei eksakt følgje. Dette gjer at Λ degenererer til alle modular på forma $I_{(x+by)} \oplus I_{(x+bqy)}$. Igjen ønskjer me eit endeleg diagram. La difor $K = \mathbb{Z}_5$, og la $q = 2$. Dette gjev $\Lambda = {}^{\mathbb{Z}_5[x,y]}/_{(x^2,y^2,xy+2yx)}$. Då er det 6 lineære former i Λ, nemleg $\bar{y}$ samt $\bar{x} + b\bar{y}$, for $b \in \mathbb{Z}_5$. Modulane $\operatorname{rad}\Lambda \oplus S$ og ${}^{\Lambda}/_{\operatorname{soc}\Lambda}$ vil degenerere til alle modular på forma $I_\lambda \oplus S^2$, og er utelatt frå diagrammet for å gjere det meir oversiktleg.



I vedlegg B er resten av diagramma til ${}^{\mathbb{Z}_5\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy+qyx)}$ for alle $q \in \mathbb{Z}_5$ presentert.

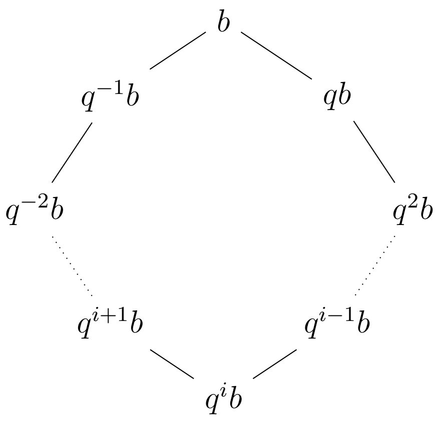
Me skal no sjå at alle desse degenereringane stammar frå ei langeksakt følgje. La $\Lambda_q = {}^{K\langle x,y\rangle}/_{(x^2,y^2,xy+qyx)}$. Sjå på avbildinga $f : \Lambda_q \to \Lambda_q$, der f er gjeve ved multiplikasjon med $(\bar{x} + b\bar{y})$ for ein $b \in K$. Me ønskjer ein $g : \Lambda_q \to \Lambda_q$ slik at $g(\bar{x} + b\bar{y}) = 0$. Dersom g er gjeve ved multiplikasjon med $(\bar{x} + c\bar{y})$, så gjev dette at $gf = (\bar{x} + c\bar{y})(\bar{x} + b\bar{y}) = b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}\bar{x}$. Men $b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}\bar{x} = 0$ viss og berre viss $c = bq$. Altså er g gjeve ved multiplikasjon med $(\bar{x} + bq\bar{y})$. Neste steg er å finne ein $h : \Lambda_q \to \Lambda_q$ slik at $hg = 0$. Igjen, dersom h er gjeve ved multiplikasjon med $(\bar{x} + d\bar{y})$, så er $hg = (\bar{x} + d\bar{y})(\bar{x} + bq\bar{y}) = bq \cdot \bar{x}\bar{y} + d\bar{y}\bar{x}$. Dette gjev at $bq \cdot \bar{x}\bar{y} + d\bar{y}\bar{x} = 0$ viss og berre viss $d = bq^2$. Ved induksjon gjev dette ei langeksakt følgje

$$\cdots \to \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+bq^{-1}\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+bq\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+bq^2\bar{y}} \Lambda_q \to \dots$$

Denne langeksakte følgja induserer den korteksakte følgja

$$0 \to I_{(x+bq^i y)} \xrightarrow{\bar{x}+bq^{i+1}\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{-} I_{(x+bq^{i+1}y)} \to 0,$$

for alle $i \in \mathbb{Z}$. Altså vil Λ_q degenerere til alle "naboar" i den langeksakte følgja. Dersom q er av endeleg orden i K, altså $q^i = 1$ for ein $i \in \mathbb{Z}$, vil det, for ein fiks $b \in K$, vera eit endeleg tal på slike par I_λ, I_μ. Vidare vil det å bytte q med q^{-1} i den langeksakte følgja, svare til å reversere pilene. Altså gjev q og q^{-1} same diagram for degenerering. Dette stemmer for $K = \mathbb{Z}_5$, sidan diagramma for $q = 2$ og $q = 3$ er like. Ein måte å illustrere dette på er å teikne opp eit diagram på forma



Til dømes vil $K = \mathbb{Z}_5$ gje diagramma

$$
q = 2: \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2b \arrow[d, dash] \\
3b \arrow[r, dash] & 4b
\end{tikzcd}
\qquad
q = 3: \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 3b \arrow[d, dash] \\
2b \arrow[r, dash] & 4b
\end{tikzcd}
$$

Då vil desse figurane vera like opp til spegling om diagonalen. Difor viser desse diagramma at diagramma over degenerering for $q = 2$ og $q = 3$ er dei same.

Sidan $K = \mathbb{Z}_7$ har element av orden $1, 2, 3$ og 6, så vil K gje følgjande diagram

$$
q = 2: \quad
\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
4b \arrow[rr, dash] & & 2b
\end{tikzcd}
\qquad
q = 3: \quad
\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
5b \arrow[d, dash] & & 3b \arrow[d, dash] \\
4b \arrow[dr, dash] & & 2b \arrow[dl, dash] \\
& 6b &
\end{tikzcd}
$$

Då vil figuren til $q = 4$ vera figuren til $q = 2$ spegla om $y-aksa$. På same vis vil figuren for $q = 5$ vera figuren til $q = 3$ spegla om y-aksa. Dette gjer at diagrammet for degenerering i tilfella $q = 2$ og $q = 4$ vil vera dei same. Dette gjeld då og for $q = 3$ og $q = 5$. Altså er det 4 ulike diagrammer for degenerering over $K = \mathbb{Z}_7$.

Det siste dømet me skal sjå på er $K = \mathbb{C}$. La $\Lambda_q = {}^{\mathbb{C}[x,y]}\!/\!_{(x^2, y^2, xy + qyx)}$ og la $\bar{x} + b\bar{y} \in \Lambda_q$. Då vil $q = -1$ gje den langeksakte følgja

$$\cdots \to \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_{-1} \xrightarrow{\bar{x}-b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}-b\bar{y}} \Lambda_q \to \dots$$

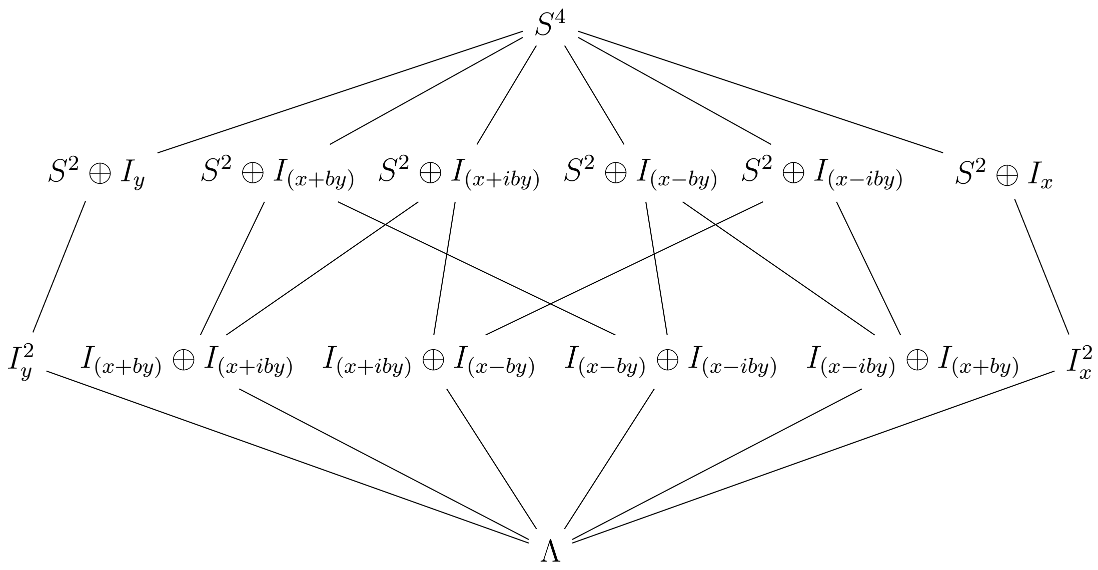
Altså vil Λ_q degenerere til alle par $I_{(x+by)} \oplus I_{(x-by)}$, som er det same som i dei andre kommutative tilfella. På same måte dersom $q = 1$, så gjev dette den langeksakte følgja

$$\cdots \to \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{x+by} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \to \dots$$

Altså vil Λ_q degenererer til $I^2_{(x+by)}$ for alle $b \in \mathbb{C}$, som stemmer overeins med tidlegare resultat for ytrealgebraen. Men det er andre element i $\mathbb{C}$ av endeleg orden. Til dømes er i av orden 4. Dersom $q = i$ gjev dette den langeksakte følgja

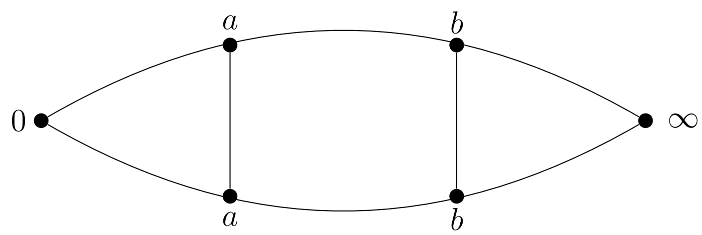
$$\cdots \to \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+ib\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}-b\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}-ib\bar{y}} \Lambda_q \xrightarrow{\bar{x}+b\bar{y}} \Lambda_q \to \dots$$

Fiks ein $b \in \mathbb{C}$. Då gjev $q = i$ diagrammet



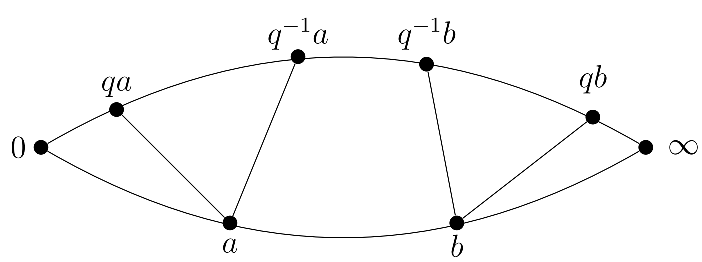
Sidan $e^{\frac{2\pi i}{k}}$, for $k \in \mathbb{N}$, er av orden $k < \infty$, så vil det eksistere ei langeksakt følgje av vilkårleg lengd. Dersom q er slik at $|q| \neq 1$ er ikkje q av endeleg orden, og då er ikkje den tilhøyrande langeksakte følgja periodisk.

La K vera ein kropp og la $x_1, x_2 \in K$, der ikkje både x_1 og x_2 er null. Me seier to par $[x_1 : x_2]$ og $[y_1 : y_2]$ er ekvivalente dersom det finst ein $0 \neq \lambda \in K$, slik at $[x_1 : x_2] = [\lambda y_1 : \lambda y_2]$. Den projektive lina er mengda $\mathbf{P}^1(K) = \{[1 : b] \in \mathbf{P}^1(K) \mid b \in K\} \cup [0 : 1]$, der punktet $[0 : 1] = \infty$ vert kalla *punktet ved uendeleg*. Då vert modulen $I_b = K\langle x, y\rangle / (x^2, x + by)$ identifisert med punktet $[1 : b] \in \mathbf{P}^1(K)$, for alle $b \in K$. Dette gjer at modulen $I_y = K\langle x, y\rangle / (x^2, y)$ identifiserast med $[0 : 1]$. Dersom $q = 1$ så vil kvart punkt identifiserast med seg sjølv gjennom degenerering. Dette gjev eit bilete på forma:



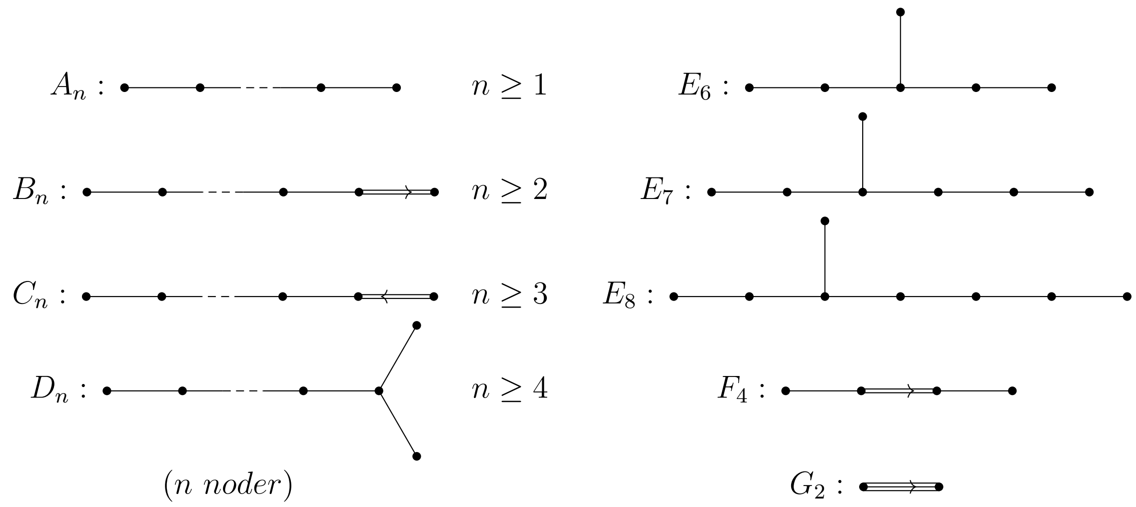
I det kommutative tilfellet, der $q = -1$, vil kvart punkt a identifiserast med berre eit punkt, nemleg $-a$. Dette gjev eit liknande bilete som for ytrealgebraen vist over.

Dersom $q^2 \neq 1$ så vil kvart punkt på den nedste lina degenerere til to punkt på den øvste lina, utanom punkta 0 og ∞ som ligg i ro. Dette gjev eit bilete på forma



3.6 Endelege representasjonstypar

Eit *dynkindiagram* er eit diagram på dei følgjande 9 formene:



Her er $\bullet\!\Rightarrow\!\bullet$ brukt til å vera den merka kanten $\bullet\xrightarrow{(2,1)}\bullet$. På same måte er $\bullet\!\Rrightarrow\!\bullet$ den merka kanten $\bullet\xrightarrow{(3,1)}\bullet$. Ein må visa omsyn når ein jobbar med diagramma med merka kantar sidan desse ikkje er symmetriske.

Ein endelegdimensjonal algebra, Λ, er av *endeleg representasjonstype*, eller *endeleg type*, dersom det er eit endeleg tal av isomorfiklassar av ikkje-dekomponerbare Λ-modular. Me har allereie sett dømer på endelege representasjonastypar. Til dømes er vegalgebraen til koggeren $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ av endeleg type. Ein generell klassifikasjon er gjeve av Gabriel, her henta frå side 118 i [Benson(1991)]:

Teorem 3.16. *Gå ut frå at Q er ein kogger som har eit dynkindiagram som underliggande graf. Då er vegalgebraen til Q av endeleg representasjonstype.*

Observer at koggeren Q ovanfor har dynkindiagrammet A_2 som underliggande graf. Dette viser at vegalgebraen KQ er av endeleg type. Det viser seg at dersom ein algebra er av endeleg representasjonstype så er hom-ordenen ekvivalent med degenerasjonsordenen. Meir presist har Zwara vist det følgjande i [Zwara(1999)]:

Teorem 3.17. *Dersom Λ er ein artinsk K-algebra av endeleg representasjonstype, og M og N er to Λ-modular, så har vil $M \leq_{deg} N$ viss og berre viss $M \leq_{hom} N$.*

3.7 Ext

Bongartz observerte følgjande i [Bongartz(1996)]:

Proposisjon 3.18. *La Λ vera ein artinsk K-algebra og la M og N vera to Λ-modular. Dersom $M \leq_{hom} N$ så vil $\ell(\mathrm{Ext}^i(X, M)) \leq \ell(\mathrm{Ext}^i(X, N))$ og $\ell(\mathrm{Ext}^i(M, Y)) \leq \ell(\mathrm{Ext}^i(N, Y))$ for alle Λ-modular X og Y av endeleg lengd, og for alle $i \geq 0$.*

La $\Lambda = K[x]$, og la S_1 og S_2 vera to simple modular. Då er

$$\mathrm{Ext}^1(S_1, S_2) \cong \begin{cases} S_1, & S_1 \cong S_2 \\ 0, & S_1 \neq S_2 \end{cases}.$$

Modulane $S_1 = {}^{K[x]}/_{p(x)}$ og $S_2 = {}^{K[x]}/_{q(x)}$ er simple dersom $p(x)$ og $q(x)$ er irredusible polynom i $K[x]$. Då er $0 \to K[x] \xrightarrow{\cdot p(x)} K[x] \to 0$ den projektive oppløysinga til S_1. La $\mathrm{Hom}(-, S_2)$ verke på denne oppløysinga. Dette gjev $0 \to {}^{K[x]}/_{q(x)} \xrightarrow{\cdot p(x)} {}^{K[x]}/_{q(x)} \to 0$. Då er

$$\mathrm{Ext}^1(S_1, S_2) = \mathrm{Coker}({}^{K[x]}/_{q(x)} \xrightarrow{\cdot p(x)} {}^{K[x]}/_{q(x)}) \cong \begin{cases} \mathrm{End}(S_1), & S_1 \cong S_2 \\ 0, & S_1 \neq S_2 \end{cases}.$$

Sidan $\mathrm{End}(S_1) \cong S_1$, så gjev dette ønskja resultat.

4 Funktorar

4.1 Funktorkategorien

Denne seksjonen er basert på [Prest(2012)].

Først, la $\mathcal{A}$ vera kategorien av endeleggenererte projektive modular og la M vera ein A-modul. Då vil M gje ein kontravariant funktor $\mathrm{Hom}(-, M) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$. Motsatt, dersom $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ er ein kontravariant funktor, så er $F(A)$ ein modul.

Meir generelt, la $\mathcal{A}$ vera ein preadditiv kategori. Då kan me sjå på ein venstremodul som ein funktor frå $\mathcal{A}$ til $\mathbf{Ab}$. Ei samling av desse skriv me som $(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$. Då seier me at dette er ein $\mathcal{A}$-modul. På same måte er $\mathrm{Mod}\,-\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Ab})$. Dersom $\mathcal{A}$ er ein liten kategori, så er funktorkategorien $\mathcal{A} - \mathrm{Mod} = (\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ abelsk. La $\mathcal{C}$ vera ein liten preadditiv kategori og la $\mathcal{D}$ vera ein abelsk kategori. Då vert $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ kalla funktorkategorien, der objekta er funktorar frå $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ og morfiane frå ein funktor F til ein funktor G er naturlege transformasjonar. Ein underfunktor av ein funktor F er ein funktor G saman med ein naturleg transformasjon $\theta : G \to F$, slik at dersom det finst ei avbilding $\gamma : H \to G$, der $\theta\gamma = 0$, så er $\gamma = 0$. Ein simpel funktor er ein funktor som ikkje er lik null, og som ikkje har nokre underfunktorar. Ein funktor er semisimpel dersom den kan skrivast som ein direktesum av simple funktorar.

La X og Y vera to objekt i ein kategori $\mathcal{C}$. Då vert mengda av morfiar frå X til Y skrive som (X, Y). Dersom C er eit objekt i ein preadditiv kategori $\mathcal{A}$, så vert funktoren $(C, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ kalla ein representabel funktor. Denne funktoren er definert på objekt ved å sende eit objekt $D \in \mathcal{A}$ til objektet $(C, D) \in \mathbf{Ab}$, og det er definert på morfiar ved at ein morfi $f : D \to E$ vert sendt til (C, f), der $(C, f) : (C, D) \to (C, E)$ er gjeve ved $(C, f)g = fg$ for $g \in (C, D)$. På same måte kan ein definere ein kontravariant representabel funktor $(-, C)$. Neste resultat er særs viktig, og dei resterande resultata følgjer av dette:

Lemma 4.1. *(Yonedalemmaet) La $\mathcal{C}$ vera ein preadditiv kategori. For ein $C \in \mathcal{C}$ og for $F \in (\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ så er det ein naturleg ekvivalens*

$$((C, -), F) \simeq FC$$

mellom naturlege transformasjonar frå $(C, -)$ til F, og gruppa FC.

På same måte for $G \in (\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Ab})$ er det ein naturleg ekvivalens $((-, C), G) \simeq GC$.

Korollar 4.1.1. *(Yonedaimbedding) La $\mathcal{C}$ vera ein preadditiv kategori. Då vil funktoren frå $\mathcal{C}^{op}$ til $(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$, gjeve på objekt som $C \mapsto (C, -)$ og som sender morfiar $f : C \to D$ til $(f, -) : (D, -) \to (C, -)$, vera full og trufast.*

På same måte er funktoren som sender $\mathcal{C}$ til $(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Ab})$, der $C \mapsto (-, C)$ og morfiar på den opplagte måten, full og trufast.

Ein funktor $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ab}$ vert kalla endeleggenerert dersom det finst ein $C \in \mathcal{A}^{op}$ og ein epimorfi $(-, C) \to F \to 0$. Dersom det finst ein $B \in \mathcal{A}^{op}$ og ei eksakt følgje $(-, B) \to (-, C) \to F \to 0$ så vert F kalla endelegpresentert. La $\mathrm{FP}(\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Ab})$ vera kategorien av endelegpresenterte funktorar. Dersom $\mathcal{A}$ er ein abelsk kategori, så er $\mathrm{FP}(\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Ab})$ abelsk.

Lemma 4.2. *La C vera eit objekt i ein liten preadditiv kategori $\mathcal{C}$. Då er den er den representable funktoren $(C, -)$ eit endeleggenerert projektivt objekt i $(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$. Spesielt er den endelegpresentert.*

Korollar 4.2.1. *Dersom $\mathcal{C}$ er ein abelsk kategori, vil alle endelegpresenterte funktorar, $\mathrm{FP}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Ab})$, ha ein projektiv dimensjon mindre eller lik 2.*

Bevis. Av lemmaet over vil ein endelegpresentert funktor F ha projektiv oppløysing

$$0 \to (C, -) \to (B, -) \xrightarrow{(f,-)} (A, -) \to F \to 0,$$

der $C = \mathrm{Coker}\{f : A \to B\}$. □

4.2 Endelegpresenterte funktorar og degenerering

I denne seksjonen skal me sjå på samspelet mellom endelegpresenterte funktorar og degenerering. Dette er basert på [Smalø & Valenta(2006)].

La X og Y vera to Λ-modular, la $\mathrm{rad}(Y, X)$ vera undergruppa av $\mathrm{Hom}(Y, X)$ gjeve av

$$\{f : Y \to X \mid pfi \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(Z), \forall i \in \mathrm{Hom}(Z, Y), \forall p \in \mathrm{Hom}(X, Z)\},$$

og la F_X vera funktoren gjeve ved ${}^{\mathrm{Hom}(-,X)}/_{\mathrm{rad}(-,X)}$. Dersom X er ein ikkje-dekomponerbar endelegdimensjonal modul, så vil F_X vera ein simpel kovariant funktor gjeve ved at $F_X(Y) \neq 0$, for ein ikkje-dekomponerbar modul Y, viss og berre viss $X \cong Y$. På same måte, dersom $X = \oplus_{i=1}^{n} X_i$, der X_i er ikkje-dekomponerbar for kvar i, så er F_X den semisimple funktoren $\oplus_{i=1}^{n} F_{X_i}$. Følgjande resultat bind saman degenerering og endelegpresenterte funktorar (Proposisjon 2.1 i [Smalø & Valenta(2006)]):

Proposisjon 4.3. *La M og N vera d-dimensjonale modular. Då held følgjande:*

1. *$M \leq_{vdeg} N$ viss og berre viss det finst ein endelegpresentert funktor $\delta : \mod \Lambda \to \mod k$ slik at $\dim(\delta) = \dim(\mathrm{Hom}(-, N)) - \dim(\mathrm{Hom}(-, M))$.*
2. *$M \leq_{deg} N$ viss og berre viss det finst ein endelegpresentert funktor $\delta : \mod \Lambda \to \mod k$ slik at $\dim(\delta) = \dim(\mathrm{Hom}(-, N)) - \dim(\mathrm{Hom}(-, M))$ og ${}^{\delta}/_{\mathfrak{r}\delta} \cong F_{N'}$, der N' er ein summand i N, og $\mathfrak{r}\delta$ er radikalet til δ.*

Bevis. Anta at $M \leq_{deg} N$. Då finst ei eksakt følgje

$$0 \to X \to X \oplus M \to N \to 0.$$

Dette gjev ei eksakt følgje av kontravariante funktorar

$$0 \to \mathrm{Hom}(-, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-,f)} \mathrm{Hom}(-, X \oplus M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-,g)} \mathrm{Hom}(-, N) \to \delta \to 0,$$

der $\delta = {}^{\operatorname{Hom}(-,N)}/_{\operatorname{Im}(-,g)}$. Då er $\dim(\delta(Y)) = \dim(\operatorname{Hom}(Y,N)) - \dim(\operatorname{Hom}(Y,M))$ for alle Λ-modular Y. Altså finst der ein endelegpresentert funktor δ som ønska. Dessutan gjev den projektive oppløysinga ovanfor at ${}^{\delta}/_{\mathfrak{r}\delta}$ er isomorf med $F_{N'}$, der N' er ein summand i N.

La M og N vera d-dimensjonale modular slik at det finst ein endelegpresentert kontravariant funktor δ slik at $\dim(\delta) = \dim(\operatorname{Hom}(-,N)) - \dim(\operatorname{Hom}(-,M))$. Dette gjer at $M \leq_{hom} N$. La no M' og N' vera eit anna par av d-dimensjonale modular slik at $\dim(\operatorname{Hom}(-,N)) - \dim(\operatorname{Hom}(-,M)) = \dim(\operatorname{Hom}(-,N')) - \dim(\operatorname{Hom}(-,M'))$. Då er $N \oplus M' \cong M \oplus N'$. Dersom M og N ikkje har nokre felles summandar, så er $M' = M \oplus T$ og $N' = N \oplus T$, for ein T. Vidare om $W \neq 0$ er den største felles summanden til M og N, så er $M = M'' \oplus W$ og $N = N'' \oplus W$, der M'' og N'' ikkje har felles summandar, og $M' = M'' \oplus T$ og $N' = N'' \oplus T$, for ein T. Sjå på den projektive oppløysinga til δ. Frå korollar 4.2.1 har δ projektiv dimensjon mindre eller lik 2. Anta no at δ har projektiv dimensjon mindre enn 2. Med andre ord har δ ei projektiv oppløysing på forma

$$0 \to (-,X) \to (-,Y) \to \delta \to 0.$$

Då er $\dim(\delta) = \dim(\operatorname{Hom}(-,N)) - \dim(\operatorname{Hom}(-,M))$
$= \dim(\operatorname{Hom}(-,Y)) - \dim(\operatorname{Hom}(-,X))$. Dette gjer at $N \oplus X \cong M \oplus Y$, som gjer at X og Y er av same lengd. Dette gjer at $X \cong Y$, sidan den projektive oppløysinga gjev ein inklusjon frå X inn i Y. Altså er $M \cong N$, og $\delta = 0$. Anta difor at $\delta \neq 0$. Då har δ projektiv oppløysing

$$0 \to (-,X) \to (-,Y) \to (-,Z) \to \delta \to 0,$$

der X, Y, Z er Λ-modular. La $M = M' \oplus W$ og $N = N' \oplus W$, der M' og N' ikkje har nokre felles summandar. Sidan $\dim(\delta) = \dim(\operatorname{Hom}(-,N)) - \dim(\operatorname{Hom}(-,M))$, så er $X = N_1 \oplus S$, $Y = S \oplus M' \oplus T$ og $Z = N_2 \oplus T$, for nokre S og T og der $N' = N_1 \oplus N_2$. Dette gjev ei eksakt følgje

$$0 \to N_1 \oplus S \to S \oplus M' \oplus T \to N_2 \oplus T \to 0.$$

Ved å leggje til N_1 i andre og tredje ledd i følgja saman med identitetsavbildinga vil $M' \oplus T \leq_{deg} N' \oplus T$. Igjen, ved å leggje til W vil $M \oplus T \leq_{deg} N \oplus T$. Med andre ord $M \leq_{vdeg} N$. $\square$

Dette gjev ein ny måte å karakterisera både degenerering og virtuell degenerering. Det gjev og ein ny metode for å løyse problemet om $M \leq_{hom} N \implies M \leq_{vdeg} N$. Om $M \leq_{hom} N$, finst det ein endelegpresentert funktor δ slik at
$\dim(\delta) = \dim(\operatorname{Hom}(-,N)) - \dim(\operatorname{Hom}(-,M))$?

Referansar

[Artin (1969)] Artin, M. (1969): On Azymaia algebras and finite-dimensional representations of rings. *J. Algebra*, 11, s. 532-563.

[Auslander(1982)] Auslander, M. (1982): Representation theory of finite-dimensional algebras. *Contemp. Math.*, 13, s. 27-39.

[Auslander, Reiten & Smalø(1995)] Auslander, M., Reiten, I. & Smalø, S.O., (1995): *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge: Cambridge University Press.

[Benson(1991)] Benson, D.J., (1991): *Representations and cohomology : 1 : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge: Cambridge University Press.

[Bongartz(1996)] Bongartz, K. (1996): On Degenerations and Extensions of Finite Dimensional Modules. *Advances in Mathematics*, 121(2), s. 245-287.

[Brylawski(1973)] Brylawski, T. (1973): The lattice of integer partitions, *Discrete Mathematics*, 6, s. 201-219. doi: doi: 10.1016/0012-365X(73)90094-0.

[Drozd & Kirichenko(1994)] Drozd, Y. A. & Kirichenko V. V. (1994): *Finite Dimensional Algebras.* Oversatt frå Konechnomemye algebry av V. Dlab. 1. utgåve. Berlin: Springer.

[Ellingsen(2007)] Ellingsen, S. (2007): *Degeneration as a Partial Order on Module Categories.* Masteravhandling. NTNU.

[Falb(2018)] Falb, P. (2018): *Methods of Algebraic Geometry in Control Theory: Part I. Modern Birkhäuser Classics.* Birkhäuser, Cham. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-98026-3_4

[Gel'fand & Ponomarev(1970)] Gel'fand, I. M. & Ponomarev, V. A. (1970): Problems og linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimentional vector space. *Hilbert space operators and operator algebras*, s. 163-237.

[Humphreys(2012)] Humphreys, J. E. (2012): *Linear Algebraic Groups* (Vol. 21). Springer.

[Prest(2012)] Prest, M. (2012): The Functor Category. *Categorical Methods in Representation Theory.* Tilgjengeleg frå: `https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/mike.prest/BristolTalksNotes.pdf` (Henta 4. februar 2021)

[Riedtmann(1986)] Riedtmann, C. (1986): Degenerations for representations of quivers with relations. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 19, s. 275-301.

[Rye(2013)] Rye, A. B. (2013): *The 2-Kronecker Quiver and Systems of Linear Differential Equations.* Masteravhandling. NTNU.

[Smalø(2008)] Smalø, S. O. (2008): Degenerations of Representations of Associative Algebras, *Milan Journal of Mathematics*, 76, s. 135-164. doi: 10.1007/s00032-007-0082-8.

[Smalø & Valenta(2006)] Smalø, S. O. & Valenta, A. (2006): Finitely presented functors and degenerations, *Communications in Algebra*, 34, s. 1861-1889. doi: doi: 10.1080/00927870500542838

[W1] Wikipedia (2020): *Resultant.* Tilgjengeleg frå: `https://en.wikipedia.org/wiki/Resultant` (Henta: 24. september 2020)

[W2] Wikipedia (2020): *Discriminant.* Tilgjengeleg frå: `https://en.wikipedia.org/wiki/Discriminant` (Henta 24. september 2020)

[W3] Wikipedia (2020): *Structure theorem for finitely generated modules over a principle ideal domain.* Tilgjengeleg frå: `https://en.wikipedia.org/wiki/Structure_theorem_for_finitely_generated_modules_over_a_principal_ideal_domain` (Henta 22. januar 2020)

[Zwara(1999)] Zwara, G. (1999): Degenerations for modules over representation-finite algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(5), s. 1313-1322.

[Zwara(2000)] Zwara, G. (2000): Degenerations of finite-dimensional modules are given by extensions. *Compositio Mathematica*, 121, s. 205-218. doi: 10.1023/A:1001778532124

A Kode

Her følgjer koden som vart nytta i utrekninga av banane for $\mathrm{rep}_d\,\mathbb{Z}_2[x]$ i seksjon 2.4:

```
import numpy as np

def mod(M,q): #Funksjon som tar ei matrise som input og returnerer matrisa modulo q
    for i in range (len(M)):
        for j in range (len(M[i])):
            M[i,j]=M[i,j]%q
    return M

def areSame(A,B): #Funksjon som sjekker om to matriser er identiske
   for i in range(len(A)):
      for j in range(len(A[i])):
         if (A[i][j] != B[i][j]):
            return 0
   return 1

def mn(n,q): #Funksjon som genererer alle matriser i Mn(n,q) og plukker ut dei som er i Gl(n,q)
    s=(n,n)
    M=np.zeros(s)
    L=[]
    G=[]
    for i in range (q**(n*n)):
        M[0,0]=M[0,0]+1
        for r in range (n):
            for c in range (n):
                if M[r,c]==q:
                    M[r,c]=0
                    if c==(n-1) and r==(n-1):
                        M[r,c]=0
                    elif c==(n-1):
                        M[r+1,0]=M[r+1,0]+1
                    else:
                        M[r,c+1]=M[r,c+1]+1
        N=np.array(M)
        L.append(N)
        if round(np.linalg.det(N))%q!=0:
            G.append(N)
    return L,G

def invert(M,q): #funksjon som finn inversen til ei matrise
    I=np.identity(len(M[0]))
    L,G=mn(len(M[0]),q)
    for i in range (len(G)):
        A=np.matmul(M,G[i])
        B=mod(A,q)
        if areSame(B,I)==1:
            return G[i]

def invert_2(M): #Funksjon som inverterer ei matrise for Z_2
    return np.linalg.inv(M)

def conj(A,M,q): #Funksjon som konjugerer ei matrise A med ei matrise M
    if q==2:
        return np.matmul(A, M),np.matmul(invert_2(A))
    else:
        return np.matmul(np.matmul(A, M),invert(A,q))

def orbit(M,q,G): #Funksjon som returnerer banen til ei matrise M
    S=[]
    for i in range (len(G)):
        c=0
        N=mod(conj(G[i],M,q),q)
        for j in range (len(S)):
            b=areSame(S[j],N)
            c=c+b
        if c==0:
            S.append(N)
    return S


def orbit_equal(L,O): #Funksjon som sjekker om to banar er like
    b=0
    for i in range (len(O)):
        b=b+areSame(L[0], O[i])
        if b>0:
            break
    return b

def orbits(n,q): #Funksjon som returnerer alle banane i Mn(n,q), og lager ei liste av lengdene
    M,G=mn(n,q)
    O=[]
    for i in range (len(M)):
        c=0
        K=orbit(M[i],q,G)
        for j in range (len(O)):
            b=orbit_equal(K, O[j])
            c=c+b
            if c>0:
                break
        if c==0:
            O.append(K)
        A=np.zeros(len(G)+1)
        for i in range (len(O)):
```

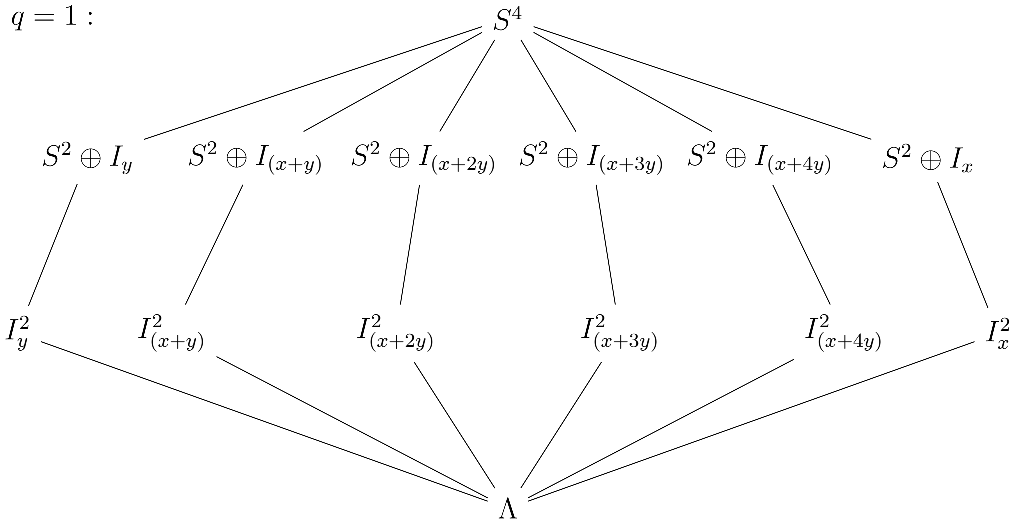
```
            a=len(O[i])
            A[a]=A[a]+1
    return O,A

def output(n,q): #funksjon som gjev antall banar, alle banane av ei viss lengd
    O,A=orbits(n,q)
    print(O)
    print("Det er ",len(O),"banar.")
    for i in range (len(A)):
        if A[i]!=0:
            print("Det er", int(A[i]), "banar av lengd",i)
```

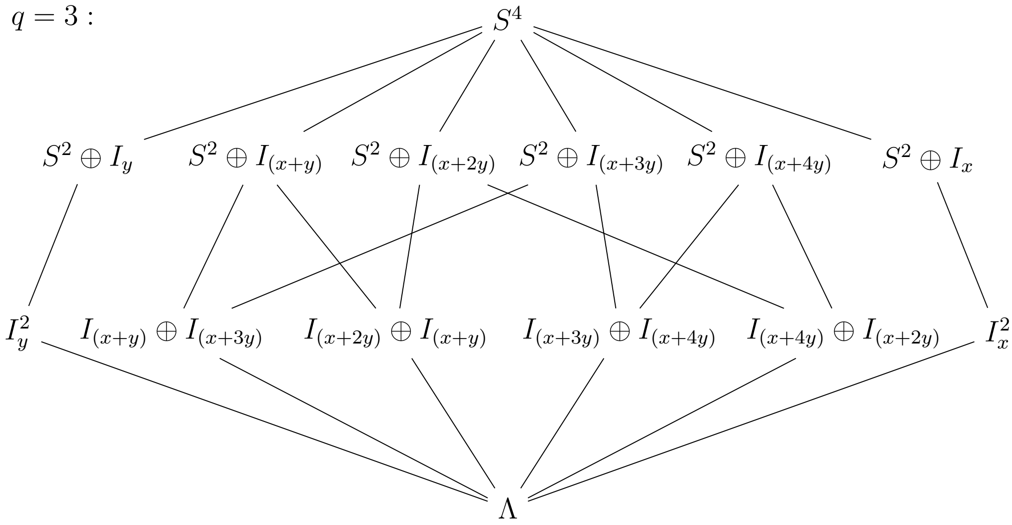
B Fleire diagrammer

Her følgjer dei resterande diagramma for $\Lambda = {}^{\langle x,y\rangle}\!/\!_{(x^2,y^2,xy+qyx)}$. Rekkjefølgja er $q = 1, q = 3$ og $q = 4 = -1$. Altså er det første tilfellet ytralgebraen og det siste er i det kommutative tilfellet.

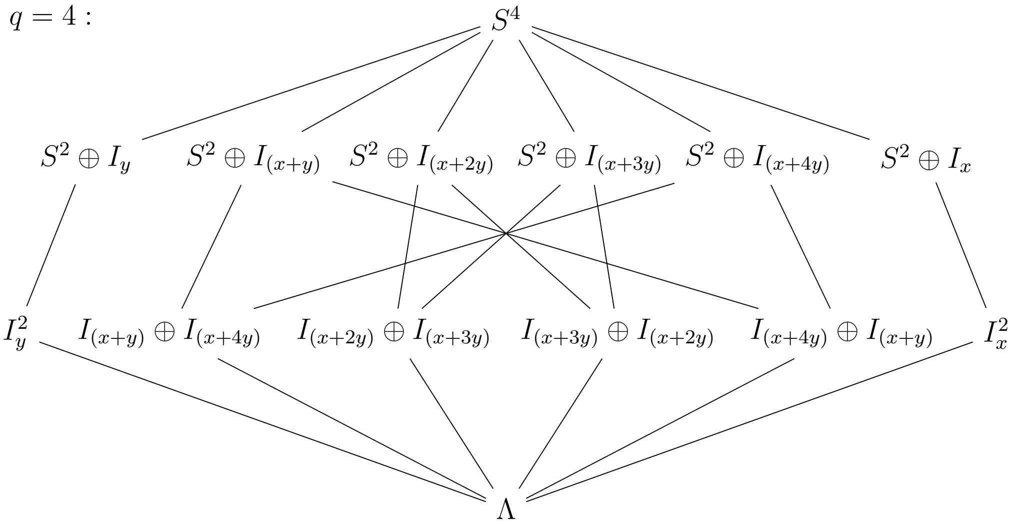
$q = 1:$



$q = 3:$



$q = 4:$


S^4
$S^2 \oplus I_y$
$S^2 \oplus I_{(x+y)}$
$S^2 \oplus I_{(x+2y)}$
$S^2 \oplus I_{(x+3y)}$
$S^2 \oplus I_{(x+4y)}$
$S^2 \oplus I_x$
I_y^2
$I_{(x+y)} \oplus I_{(x+4y)}$
$I_{(x+2y)} \oplus I_{(x+3y)}$
$I_{(x+3y)} \oplus I_{(x+2y)}$
$I_{(x+4y)} \oplus I_{(x+y)}$
I_x^2
Λ

NTNU

Kunnskap for en bedre verden