

Odin Strandkleiv Thorsrud

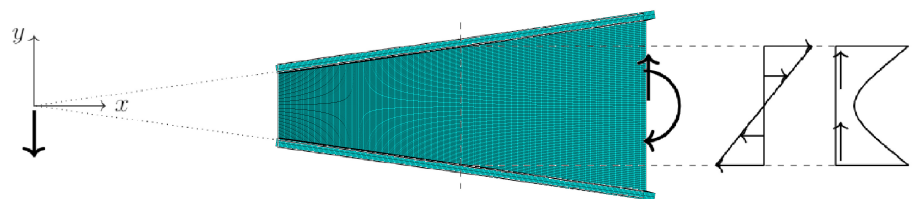
Bjelker med varierende bjelkehøyde

Beams with varying height

Masteroppgave i Bygg- og miljøteknikk

Veileder: Arne Aalberg

Juni 2021



Odin Strandkleiv Thorsrud

Bjelker med varierende bjelkehøyde

Beams with varying height

Masteroppgave i Bygg- og miljøteknikk
Veileder: Arne Aalberg
Juni 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for ingeniørvitenskap
Institutt for konstruksjonsteknikk



Kunnskap for en bedre verden

Måteleg klok
kvar mann vere;
ovklok vere han ikkje.
Lettast er livet
å leva for den
som vel noko veit.

Håvamål vers 56
Til nynorsk av Ivar Mortensson-Egnund (1928)



MASTEROPPGAVE VÅREN 2021

Odin Strandkleiv Thorsrud

Bjelker med varierende bjelkehøyde

Beams with varying height

Bakgrunn

Det finnes flere grunner til å gi bjelker en varierende tverrsnittshøyde langs bjelkeaksen. Det kan for eksempel være for å spare materialer, ved å gi bjelken størst tverrsnittshøyde der hvor momentet er størst, eller for å bygge opp takfall i flate tak. Bjelker med varierende tverrsnittshøyde og/eller vinklede overflenser (og underflenser) finner man i stål, i tre og i betongbjelker. Mest kjent for betongbjelker er trolig tverrsnittet i fritt-frambygg-bruer, der bjelkens tverrsnittshøyde varierer langs hele brua, med størst tverrsnitt inntil bropilarene (søylene).

Når tverrsnittshøyden i en bjelke varierer endres måten tverrsnittet bærer normal- og skjærspenningene. For bjelker med en flens med en vinkel i forhold til bjelkeaksen står flenskraften med en vinkel i forhold til aksene, dette gjør at kraften har en komponent langs bjelkeaksen og en tvers på aksene. Kraften tvers på bjelkeaksen kommer i tillegg til («forstyrrer») den «vanlige» bøyendeinduserte skjærkraften (V) i bjelken. Både aksialspennings- og skjærkraftsituasjonen i bjelketverrsnittet påvirkes således av skråstilling av bøyespenningene. Det finnes ikke vanlig aksepterte metoder for å regne bjelker med varierende tverrsnitt eller flenser med vinkel verken i standarder eller vanlige lærebøker for stålkonstruksjoner.

Oppgaven

Oppgaven skal se på hvordan bjelker med lineært varierende tverrsnittshøyde oppfører seg med hensyn til spenninger og hvordan spenningssituasjonen avviker fra det vi finner med vanlig bjelketeori for bjelker med konstant tverrsnitt.

Oppgaven kan gjennomføres med følgende elementer:

- Gjøre rede for litteratur for bjelker med varierende tverrsnitt(høyde). Startpunkt her er det som kalles *kileteori*, og nyere artikler for bjelker med varierende tverrsnitt (Trahair m.fl.). Presentere teoriene.
- Vise eksempler på bjelker med varierende tverrsnitt og diskutere effektene av dette.
- Lage beregningseksempel for en eller flere bjelker.
- Velge ut bjelkegeometrier for simuleringer i Abaqus eller tilsvarende program.
- Simulere og sammenligne numeriske og analytiske verdier for spenninger i tverrsnittet, vurdere hvor store/små unøyaktigheter forenklete regnemåter fører til.
- Anbefale hva som er riktigst måte å regne slike bjelker på.

Kandidaten kan i samråd med faglærer velge å konsentrere seg om enkelte av punktene i oppgaven, eller justere disse.

Rapporten

Oppgaven skal skrives som en teknisk rapport og ha gode figurer, tabeller og eventuelt foto. Rapporten skal inneholde tittelside, oppgavetekst, forord, sammendrag, innholdsfortegnelse, symbolliste, et fornuftig antall kapitler (med underkapitler), konklusjoner som siste kapittel, referanseliste og vedlegg. Informasjon om innlevering er sendt ut fra instituttet. Det innleveres gjennom Inspira.

Omslag bør ha en illustrasjon fra oppgaven på framsiden. Faglærer ønsker en trykket versjon av oppgaven. Faglærer ønsker at det lages en pakke filer fra arbeidet, med rapporten, forsøksresultater (for oppgaver som har det), bilder, bakgrunns litteraturen, elementmodellene, etc. Dette for å lette oppstarten av studentoppgaver som skal fortsette undersøkelser på området.

Masteroppgaven skal leveres innen 11. juni 2021



Trondheim, 1. juni 2021
Arne Aalberg, Professor

FORORD

“Velg alltid største motstands vei.”

— Nicolai Tangen¹

Rapporten tar for seg bjelker med lineært varierende tverrsnittshøyder, på engelsk kalt “web-tapered beams”, og ser på hvordan spenninger virker i tverrsnittet, samt hvordan slike bjelker bør dimensjoneres for moment, skjær- og aksialkraft i planet.

Dagens litteratur har en begrenset dekning av teorien og praktisk utførelse gjøres dermed som en betydelig forenkling av moderne bjelketeori.

Oppgava er skrevet innen emnet Stålkonstruksjoner hos Institutt for konstruksjonsteknikk ved NTNU i Trondheim. Arbeidet er gjort våren 2021 og rapporten teller totalt 30 studiepoeng.

Det har vært en utfordrende rapport å skrive med et emne som er lite utforsket. Derimot er det et bevisst valg jeg har gjort og i mørke stunder har jeg latt meg inspirere av sitatet til Nicolai Tangen. Veiledningen gitt av professor Arne Aalberg har også vært svært oppmuntrende.

Ellers ønsker jeg å takke venner og familie som har hjulpet og støttet meg. Jeg vil også å rette en særlig dyp takk til alle ukjente personer som legger ut fremgangsmåter på Internett.

Odin Strandkleiv Thorsrud

*Odin Strandkleiv Thorsrud
Trondheim | Ålesund | 2021*

¹I podkasten “Karrierepraten” gitt ut av Handelshøyskolen BI (nov. 2020).

SAMMENDRAG

Hensikten med denne studien er å finne ut hvordan bjelker med varierende tverrsnittshøyde skal dimensjoneres. Slike bjelker har den fordel at de er materialbesparende, at de utnytter geometrien til det fulle, samt at utformingen kan utnyttes arkitektonisk. Allikevel har ingeniører ingen teoretisk dekning bak hvordan man skal dimensjonere bjelker med varierende tverrsnittshøyder — for det meste vil dimensjoneringen bestå i å enten modifisere kjente bjelkelikninger eller i å gjøre konservative vurderinger.

Selve problemet har blitt belyst tidligere. I 1891 gjorde Wilson et fotoelastisk eksperiment, året senere utledet Boussinesq noe teori basert på eksperimentet. Timoshenko har selv dekket pensumet i hans *Theory of elasticity* og i moderne tid har Trahair belyst problemet. Og det er nettopp artikkelen til Trahair denne rapporten vil sentreres rundt: Med utgangspunkt i at spenninger på et halvuendelig medium brer seg ut i sirkler, vil vi anta at bjelker med lineært varierende tverrsnittshøyde oppfører seg som kiler og at spenningene som oppstår brer seg ut radielt fra et *skjæringspunkt*.

Rapporten vil avgrenses til å kun se på oppførsler i-planet. Fokuset ligger på hvordan normal- og skjærspenninger brer seg ut for sirkulære og vertikale tverrsnitt og hvordan resultatene stemmer overens med hverandre. Sammenligninger blir gjort med transformerte spenninger fra elementmetodeprogrammet Abaqus og radielle spenninger fra likninger gitt av Trahair. I tillegg blir forholdet mellom horisontalkomponenter av radielle spenninger og normalspenninger fra klassiske bjelkelikninger belyst.

Fire kiler med ulike vinkler og lengder blir analysert i Abaqus. Disse kilene har som oppgave å (a) gjenskape Trahairs resultater, (b) simulere en “reell” bjelke og (c) se hvordan kileteorien stemmer med økende vinkler. I tillegg blir en I-bjelke modellert i Abaqus og analysert med håndregning.

Resultater fra Abaqus blir eksportert til Excel, hvor de blir sammenlignet med likninger fra kileteorien. Sammenligningen gir et forholdstall, hvor et forholdstall

nærmere 1,000 viser godt samsvar. Forholdstallet til (1) transformerte Abaquuspenninger og radiell normalspenning blir observert for sirkulære og vertikale tverrsnitt. Kun for vertikale tverrsnitt blir også (2) horisontalkomponenten til radiell spenning sammenlignet med kjente bjelkelikninger.

Studien viser at (1) spenninger-fra-Abaqus & kileteori samt (2) kileteori & kjente-bjelkelikninger korrelerer godt for kiler med vinkler opp til $\pm 15^\circ$ både for sirkulære og vertikale tverrsnitt. For kiler med vinkel omtrent 15° vil (2) kjente bjelkelikninger og radielle spenninger dekomponert i horisontalretning skurre og kun være delvis OK. Når vinklene kraftig overstiger 15° vil resultater fra Abaqus, kileteorier og kjente bjelkelikninger sprike så mye at det blir vanskelig å trekke noen slutninger.

En av de vanligste bjelkene med varierende tverrsnittshøyde i bruk er den med horisontal underside og skrå overside. Mangelen med denne studien er at slike bjelker ikke blir studert med FEA. Studien dypper tåen, men dykker ikke ned i materien. Til et videre arbeid er det også nettopp dette som vil være interessant å belyse: Oppførselen i-planet til bjelker med én skrå kant.



For den interesserte har jeg samlet sammen arbeidsfiler i ei Dropbox-mappe. Her vil du finne Excelark, Abaqusmodeller og håndregninger. I tillegg har jeg gjennom semesteret registrert alle arbeidstimer og ukentlig fremgang av masteroppgava. For den som er nysgjerrig vil alt ligge åpent i følgende lenke:

<https://www.dropbox.com/sh/p6y23zguipiwbrd/AABrmGgGaMx2vjf5v0fNRwyoa?dl=0>

ABSTRACT

The purpose of this study is to find out how to dimension web-tapered beams. Such beams have the advantage that they are material-saving, that they utilize the geometry to the full, and that the design can be utilized architecturally. Despite this, do the engineers have little theoretical background to how web-tapered beams shall be dimensioned — in great part it's done by either modifying well-known beam equations, or by doing conservative evaluations.

The problem has been discussed earlier. In 1891 a photoelastic experiment was done by Wilson, the year later Boussinesq developed some theory based on the experiment. Timoshenko has also mentioned the problem in his *Theory of elasticity*, and in modern times has Trahair discussed it. And it's exactly this article of Trahair that this report will cover: Based on the premiss that stresses in semi-infinite solids develops in circles, will we assume that web-tapered beams behave like wedges and that it's stresses develop radially from an *apex point*.

The report will be bounded to only analysing in-plane behavior. The focus will be upon how normal- and shear stresses develops for circular and vertical sections, and to how these results correlates. Comparisons will be done by transformed stresses from the finite element program Abaqus and radial stresses from equations given by Trahair. The horizontal component of radial stresses and normal stresses from classical beam equations will also be compared.

Four wedges with different angles and lengths are analysed in Abaqus. The purpose of these wedges are to (a) recreate the results of Trahair, (b) to simulate a “real” beam, and (c) to view how the theory of wedges behaves with increasing angles. In addition an I-beam will be modelled in Abaqus and analysed with hand calculations.

The results from Abaqus gets exported to Excel, where they will be compared to equations from the theory of wedges. The comparisons give a relation, where a relation closer to 1,000 shows good correlation. The relation for (1) transformed Abaqus-stresses and radial normal stresses will be observed for circular and vertical sections. And only for vertical sections will the (2) horizontal component of the

radial stresses be divided by known beam equations.

This study shows that (1) stresses-from-Abaqus & theory-of-wedges and (2) theory-of-wedges & known-beam-equations correlates well for wedges with angles up to $\pm 15^\circ$, both for circular and vertical sections. For wedges with angles around 15° will (2) known beam equations and horizontally decomposed radial stresses only be partly OK. When the angles greatly surpasses 15° will the stresses from Abaqus, the theory of wedges and known beam equations differ so substantially that it's hard to draw any conclusions.

One of the most commonly web-tapered beam in use got a horizontal underside and an inclined overside. The lack of this study is that such beams are not analyzed with FEA. The study dips it's toe, but does not dive into the matter. For future work I will recommend looking closer at exactly this kind of beam, and it's behavior in-plane.



For the interested reader I have compiled all my working files into a Dropbox-folder. Here you will find Excel sheets, Abaqus models and hand calculations. I have also registered all my working hours and weekly progression. For the curious everything will be in the following link (in Norwegian):

<https://www.dropbox.com/sh/p6y23zguipiwbrd/AABrmGgGaMx2vjf5v0fNRwyoa?dl=0>

INNHOOLD

OPPGAVEBESKRIVELSE	iii
FORORD	v
SAMMENDRAG	vii
ABSTRACT (in English)	ix
FIGURER	xvii
TABELLER	xx
SYMBOLER & FORKORTELSER	xxi
1 INNLEDNING	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Problemstillingen	1
1.3 Avgrensning	2
1.4 Dokumentets oppbygning	3
2 METODE	5
2.1 Gjennomførelse av litteraturstudiet	5
2.2 Utstyr	6
2.3 Analysemetoder	6
2.3.1 Elementmetodeanalyse	6
2.3.2 Håndberegning	7
2.4 Studiens reliabilitet & validitet	7
3 TEORI	9
3.1 Kort om rådende bjelketeorier	9
3.1.1 Bjelketeori uten skjærdeformasjoner	9
3.1.2 Bjelketeori med skjærdeformasjoner	10

3.2	Dimensjonering av bjelker i dag	11
3.2.1	Beregning av spenninger	11
3.2.2	Hvordan bestemme snittet til en skråbjelke	12
3.2.3	Beregning av annet arealmoment	13
3.3	Beregning av annet arealmoment for bjelker med én skrå flens	15
3.4	Transformasjon av spenninger	20
3.5	Introduksjon til kileteorien	24
3.5.1	Utledning av radiell spenning	26
3.6	Kileteorien videreført til praktisk beregning	28
3.6.1	Kileteorien uten flensbidrag	30
3.6.2	Kileteorien med flensbidrag	32
3.6.3	Radielle tverrsnitt v. vertikale tverrsnitt	35
3.7	Dimensjonering av limtrebjelker ved empiriske formler	36
3.8	Oppsummering av teorikapittelet	39
4	RESULTATER	41
4.1	FEA-simulering av kiler med skallelementer	41
4.1.1	Forklaring til de ulike tabellene til kilemodellene	42
4.2	FEA-resultater for kiler	45
4.2.1	Wedge1 $\alpha = 8,2^\circ$	45
4.2.2	Wedge2 $\alpha = 1,9^\circ$	51
4.2.3	Wedge3 $\alpha = 16,7^\circ$	54
4.2.4	Wedge4 $\alpha = 26,6^\circ$	58
4.3	FEA-simulering av I-bjelke med varierende bjelkehøyde	61
4.4	FEA-resultater for I-bjelke med varierende bjelkehøyde	63
4.4.1	Spenningsforløp grunnet aksialkraft	65
4.4.2	Spenningsforløp grunnet skjærkraft	66
4.4.3	Spenningsforløp grunnet moment	67
4.5	Håndberegning av I-bjelke med varierende bjelkehøyde	69
4.5.1	Aksialkraft	70
4.5.2	Skjærkraft	71
4.5.3	Moment	72
4.6	Oppsummering av resultatkapittelet	73
5	DISKUSJON	75
5.1	Tolkning av kileresultater	75
5.1.1	Diskusjon om forholdstallene	75
5.1.2	Diskusjon om påstander	78
5.1.3	Diskusjon om resultater for <i>Wedge1</i>	80
5.1.4	Diskusjon om resultater for <i>Wedge2</i>	83
5.1.5	Diskusjon om resultater for <i>Wedge3</i>	84

5.1.6	Diskusjon om resultater for <i>Wedge4</i>	84
5.1.7	Oppsummering av kileresultatene	89
5.2	Tolkning av resultater for I-bjelke med varierende bjelkehøyde	91
6	KONKLUSJON	93
6.1	Konkludering	93
6.2	Mangler ved studien	94
6.3	Anbefalinger til videre arbeid	94
7	CONCLUSION (in English)	95
7.1	Concluding	95
7.2	Lacks about this study	96
7.3	Future recommendations	96
	REFERANSER	97
A	Utledning av radiell spenning for aksialkraft	i
B	Utledning av radiell spenning for skjærkraft	v
C	Modellere bjelke med varierende bjelkehøyde i Abaqus	vii
D	Utledning av annet arealmoment til bjelke med én skrå flens	xi
E	Epost-korrespondanse med N. S. Trahair	xv
F	Tabellerte verdier for <i>Wedge1</i>	xix

FIGURER

1.1	Akseretninger	3
1.2	Gimsøystraumen bro	4
3.1	Sammenligning Euler-Bernoulli og Timoshenko bjelketeori	10
3.2	Ulike spenningsforløp i en bjelke med rektangulært tverrsnitt.	11
3.3	Bjelke med én skrå flens og tre ulike snittforslag.	13
3.4	Tverrsnitt av I-bjelke.	14
3.5	Bjelker med avtagende tverrsnittshøyde på materialteknisk labora- torium på Gløshaugen	15
3.6	Snitt perpendikulært nøytralakse for I-bjelke.	16
3.7	Overforenklet snitt og “korrekt” snitt til en I-bjelke med én skrå flens.	18
3.8	Forholdet mellom overforenklet og korrekt annet arealmoment på økende flensvinkel.	19
3.9	En plan rettvisklet trekant med hovedspenninger	20
3.10	Definisjonsskisse av Mohrs spennings sirkel.	21
3.11	Element belastet med hovedspenninger σ_1 og σ_3 og vridd 30° mot urviseren.	22
3.12	Mohrs spennings sirkel plottet i et σ - τ -diagram.	22
3.13	Rotert element med lokale og globale akser.	23
3.14	Linjekraft påsatt planet til et halvuendelig medium.	25
3.15	Et kileelement med radielle spenninger.	26
3.16	Bjelke lagt på et flatt underlag med trykkraft og spenningsutbredelse.	27
3.17	Utledning av radiell spenning.	27
3.18	Definisjon av skjæringspunktet.	29
3.19	En bjelke med avtagende tverrsnittshøyde kan betraktes som en kile.	29
3.20	Spenningsforløp til en kile belastet med aksial-, skjærkraft og moment.	31
3.21	Spenningsforløp til bjelke med to skråflenser belastet med aksial-, skjærkraft og moment.	34
3.22	Kile med radielt og vertikalt tverrsnitt.	35
3.23	Radielle kontra lineære spenninger når flensvinkel er under 15°	36

3.24	Saltaksbjelke av limtre	36
3.25	Saltaksbjelke utsatt for jevnt fordelt kraft.	38
4.1	Wedge1 med <i>interaction</i> i Abaqus	45
4.2	Wedge1 med <i>paths</i>	46
4.3	Wedge2 med <i>interaction</i> i Abaqus.	51
4.4	Wedge3 med <i>interaction</i> i Abaqus.	54
4.5	Wedge4 med <i>interaction</i> i Abaqus.	58
4.6	Bjelke brukt til eksempelregning.	63
4.7	Detalj av meshen til bjelke med to skrå flenser.	64
4.8	Abaqus: Spenningsforløp over tverrsnittshøyden grunnet aksialkraft	66
4.9	Spenningsforløpet grunnet aksialkraft tegnet over bjelken.	66
4.10	Abaqus: Spenningsforløp over tverrsnittshøyden grunnet skjærkraft	67
4.11	Spenningsforløpet grunnet skjærkraft tegnet over bjelken.	67
4.12	Abaqus: Spenningsforløp over tverrsnittshøyden grunnet moment . .	68
4.13	Spenningsforløpet grunnet moment tegnet over bjelken.	68
5.1	Radielle normalspenninger fra aksialkraft plottet for <i>Wedge1</i> over <i>circular path</i>	78
5.2	Radielle normalspenninger fra aksialkraft plottet for <i>Wedge4</i> over <i>circular path</i>	79
5.3	Radielle normalspenninger fra skjærkraft plottet for <i>Wedge1</i> over <i>circular path</i>	79
5.4	Radielle normalspenninger fra skjærkraft plottet for <i>Wedge4</i> over <i>circular path</i>	80
5.5	Spenninger i horisontal- og vertikalretning fra aksialkraft for <i>Wedge1</i> .	81
5.6	Spenninger i horisontal- og vertikalretning fra skjærkraft for <i>Wedge1</i> .	82
5.7	Spenninger i horisontal- og vertikalretning fra moment for <i>Wedge1</i> .	83
5.8	<i>Wedge4</i> fra Abaqus.	85
5.9	Dekomponerte spenninger fra aksialkraft plottet over vertikalt tverrsnitt for <i>Wedge4</i>	86
5.10	Dekomponerte spenninger fra aksialkraft inntegnet over vertikalt tverrsnitt for <i>Wedge4</i>	86
5.11	Dekomponerte spenninger fra skjærkraft plottet over vertikalt tverrsnitt for <i>Wedge4</i>	87
5.12	Dekomponerte spenninger fra skjærkraft inntegnet over vertikalt tverrsnitt for <i>Wedge4</i>	87
5.13	Dekomponerte spenninger fra moment plottet over vertikalt tverrsnitt for <i>Wedge4</i>	88
5.14	Dekomponerte spenninger fra moment inntegnet over vertikalt tverrsnitt for <i>Wedge4</i>	88

A.1	Kile påsatt aksialkraft.	i
B.1	Kile påsatt skjærkraft.	v
B.2	Detalj av figur B.1	vi
C.1	Fremgang for Assembly.	ix

TABELLER

3.1	Forhold mellom overforenklet og “korrekt” annet arealmoment om sterk akse til en I-bjelke med én skrå flens.	19
4.1	Wedge1 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus.	47
4.2	Wedge1 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger	48
4.3	Wedge1 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus.	49
4.4	Wedge1 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	50
4.5	Wedge1 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus.	50
4.6	Wedge2 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus.	52
4.7	Wedge2 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	52
4.8	Wedge2 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus.	53
4.9	Wedge2 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	53
4.10	Wedge2 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus.	54
4.11	Wedge3 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus.	55
4.12	Wedge3 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	56
4.13	Wedge3 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus.	56
4.14	Wedge3 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	57
4.15	Wedge3 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus.	57
4.16	Wedge4 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus.	59
4.17	Wedge4 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	59

4.18	Wedge4 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus.	60
4.19	Wedge4 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	60
4.20	Wedge4 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus.	61
4.21	Tverrsnittsdimensjoner brukt av Trahair og Ansourian.	62
4.22	Resultater funnet av Trahair og Ansourian.	62
4.23	Tverrsnittsdimensjoner til figur 4.6.	63
4.24	Spenninger fra Abaqus.	65
5.1	Forholdstall for alle kilene mellom nøytralaksen til kanten.	90
5.2	Denne rapporten og Trahairs FEA-resultater.	91
5.3	Resultater fra håndberegninger sammenlignet med Trahair sine resultater.	92
F.1	Wedge1 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus.	xix
F.2	Wedge1 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	xx
F.3	Wedge1 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus.	xxi
F.4	Wedge1 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	xxi
F.4	Wedge1 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger.	xxii
F.5	Wedge 1 - Vertical path: Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus.	xxii
F.5	Wedge 1 - Vertical path: Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus.	xxiii

SYMBOLER & FORKORTELSER

Store latinske bokstaver

A	tverrsnittsareal
E	elastitetsmodul
G	skjærmodul
I	annet arealmoment
I_z	annet arealmoment om sterk akse
L	lengde
M	moment
M_{Ed}	opptredende moment
N	aksialkraft
R	radius
S	første arealmoment
V	skjærkraft

Små latinske bokstaver

b	tverrsnittsbredde
b_w	steghøyde
$f_{m,d}$	dimensjonerende bøyefasthet
h	tverrsnittshøyde
h_w^{lower}, h_w^{upper} ...	nedre og øvre steglengde, delt av nøytralaksen
k	faktor for beregning av skjærspenningsvariabler, se likn. 3.38

$k_{m,\alpha}$	dimensjoneringsfaktor basert på moment på skråsiden
k_{mod}	fasthetsfaktor for lastvarighet og klimaklasse
q	jevnt fordelt last
r	distanse fra skjæringspunkt til tverrsnitt
w	nedbøyning

Små greske bokstaver

α	vinkel fra senter til flens
γ_m	materialfaktor
γ_{xz}	skjærdeformasjon
θ	vinkel mellom nøytralakse og vilkårlig punkt
κ	skjærdeformasjonskonstant
ν	tverrkontraksjonstall (" <i>Poissons tall</i> ")
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	hovedspenninger
σ_M	bøyespennning
σ_r	radiell normalspenning
σ_θ	tangensiell spenning
$\sigma_{m,\alpha,d}$	dimensjonerende bøyespennning i vinkel på fiberretningen
σ_N	normalspenninger
$\sigma_{p,m}$	plan middelspenning
$\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$...	transformerte spenninger til lokale akser, se likn. 3.18, 3.19, 3.20
σ_x, σ_y	normalspenning i x- og y-retning
τ_V	skjærspenning
$\tau_{\alpha n}, \tau_{0m}, \tau_{\alpha m}$..	skjærspenningsvariabler, se likn. 3.37
$\tau_{r\theta}$	radiell skjærspenning

Forkortelser

EB	Euler-Bernoulli bjelketeori
----------	-----------------------------

FEA	Finite Element Analysis
FEM	Finite Element Method
LTB	Lateral torsional buckling
SLB	Stivlegemebevegelse
TBA	Tapered Beam Analysis

Kapittel 1

INNLEDNING

1.1 Bakgrunn

Bjelker med varierende tverrsnittshøyde er ofte brukt i konstruksjoner fordi de er plass- og materialbesparende. Momentkapasiteten økes ved å forhøye steget der største moment opptrer, likeens fortykkes steget der hvor størst skjærkraft opptrer [1]. Slike bjelker blir brukt som momentstive stålrammer for industribygninger og lagerhaller, som takbjelker og veggsøyler i bygninger, i fritt-frembygg betongbroer og som bjelker i stålbroer (både kasse- og I-tverrsnitt). Men også flyvinger og vind-turbintårn kan anses som slike bjelker [2]. Derimot trenger ikke grunnen til å bruke bjelker med varierende tverrsnittshøyde å være mer komplisert enn nødvendigheten for at vann skal renne av taket, eller at utseendet kan utnyttes arkitektonisk.

Ved dimensjonering antar konstruktører at bjelker med varierende tverrsnittshøyde kan utformes etter vanlig bjelketeori og dimensjonerer etter modifiserte standarder. Dette er tilfredsstillende for bøyeforskyvninger og normalspenninger, men blir unøyaktig for skjærspenninger [3, 4]. Ved å forske på emnet vil konstruktører få muligheten til å dimensjonere nærmere reell bjelkeoppførsel.

Blant annet nevner stålstandarden EC3 [5] ingenting om prosjektering av bjelker med varierende tverrsnittshøyde. Det gjør derimot trestandarden EC5 [6] og en lett gjennomgang blir gjort i kapittel 3.7.

1.2 Problemstillingen

Rapporten skal gå i dybden på oppførselen til bjelker med varierende bjelkehøyde, på engelsk kalt "*web-tapered beams*". Teksten vil fokusere på bjelker hvor steget er

lineært økende, og da først og fremst se på kiler (som vil si: bjelker uten flenser).

I ett tilfelle vil en I-bjelke blir diskutert og da vil flensproporsjonene holdes konstante. I tillegg vil kun oppførsel *i planet* bli betraktet og rapporten vil derfor ikke bevege seg inn på slikt som vippling eller dynamiske egenskaper. Det er fortsatt verdt å nevne at bjelker med varierende tverrsnittshøyde optimaliserer bjelkens motstand mot LTB og at vippekraften (*“buckling load”*) øker med flensvinkelen [7].

Sentralt i rapporten er å sjekke i hvilken grad klassisk Euler-Bernoulli-bjelketeori gjelder for ulike vinkler, og i hvilken grad en radiell teori stemmer. Dette blir gjort ved å først sjekke gyldigheten til radiell teori med FEM-analyse i Abaqus [8]. Deretter blir den radielle teorien sammenlignet med kjente bjelkelikninger. Og selv om masteroppgaven er skrevet under temaet *Stålkonstruksjoner* er innholdet mer mekanikk-relatert og kan være like relevant for betong- og trekonstruktører.

Derfor vil følgende problemstilling være rød tråd gjennom dokumentet:

“Beregning av spenninger i planet til bjelker med varierende bjelkehøyde.”

Som et underspørsmål vil det belyses hvor godt klassiske bjelkelikninger stemmer. For en nærmere undersøkelse av problemet er det først nødvendig å se på hvordan spenninger i en kile opptrer.

1.3 Avgrensning

Rapporten vil basere seg på ny teori fremlagt av Trahair og Ansourian [3]. Antagelsene deres har tidligere blitt diskutert av Timoshenko i hans *Theory of elasticity* [9], men problemet har vært kjent enda lengre og teoretiske løsninger ble laget på seint 1800-tall av Flamant¹, Boussinesq² og finpusset av Michell [10]. Boussinesq utledet teorien basert på eksperimenter gjort av Wilson [11].

Teorien til Trahair og Ansourian baserer seg på at en bjelke vil oppføre seg som en kile. For å teste dette vil fire kiler bli modellert og analysert i Abaqus. Her vil spenninger hentes ut fra sirkulære og vertikale tverrsnitt. Spenningene blir transformert til et *fibers* lokale akse i fiberets lengderetning, avhengig av fibervinkel θ . I tillegg vil samme I-bjelke som Trahair beskriver bli modellert. Dette er nødvendig for å sjekke i hvilken grad Abaqus samsvarer med Trahair sine resultater.

De fire kilene som blir modellert har forskjellig lengde L og vinkel α . Alle kilene har to skråkanter. De er som følger:

¹*Compt. rend.*, vol. 114, s. 1465, 1892, Paris

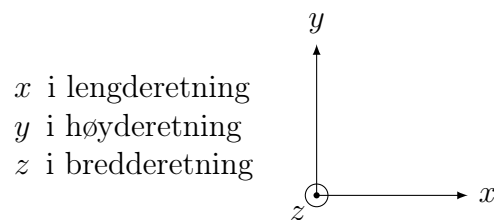
²*Compt. rend.*, vol. 114, s. 1510, 1892, Paris

1. $\alpha = 8,17^\circ$, $L = 152 \text{ mm}$, $r = 177,31 \text{ mm}$
2. $\alpha = 1,91^\circ$, $L = 9\,000 \text{ mm}$, $r = 10\,500 \text{ mm}$
3. $\alpha = 16,70^\circ$, $L = 400 \text{ mm}$, $r = 250 \text{ mm}$
4. $\alpha = 26,57^\circ$, $L = 500 \text{ mm}$, $r = 650 \text{ mm}$

... hvor r er radius fra tuppen av kilen til sirkulært tverrsnitt. α er vinkelen fra senterlinja til én av skråkantene.

Alle kilene blir modellert som *plane, to-dimensjonale* skallelementer med tykkelse én. Kile 1 er som Trahairs I-bjelke (uten flensene), kile 2 skal simulere en reell bjelke, mens kile 3 og 4 er teoretiske eksempler på hva økende vinkel α gjør med teorien. Med tanke på vinkel og lengde er det mulig å diskutere hvorvidt kile 3 og 4 faktisk er bjelker, og kanskje heller skiver. Akkurat den problemstillingen sjekkes derimot ikke i denne teksten.

Med mindre figuren er hentet fra annen kilde³, vil akseretningene konsekvent følge:



Figur 1.1 – Akseretninger

1.4 Dokumentets oppbygning

Oppgava består av seks hovedkapitler delt inn i en logisk fremgang med *innledning*, *metode*, *teori*, *resultater*, *diskusjon* og *konklusjon*. Skrivningen er godt hjulpet av Nils Olssons *Praktisk rapportskriving* (2014).

Kapittel 1, INNLEDNING, gir en introduksjon til oppgava og introduserer hva den handler om og skal dekke. Det er her bakgrunnen til *hvorfor* akkurat denne studien er viktig introduseres, samt at problemstillingen belyses og rapporten avgrenses.

Kapittel 2, METODE, gir en innføring i hvordan det er jobbet med material til oppgava. Den dekker kildebehandling og hvordan kildene er funnet. Det gis også en

³I figurene til artikkelen denne oppgava er basert på [3], vil lengderetninga være gitt som z og y er definert positiv nedover.

innføring i hvordan utregninger til denne studien er gjort; nemlig ved et elementmetodeprogram og håndregning. Videre diskuteres studiens gyldighet og stabilitet.

Kapittel 3, TEORI, tar for seg moderne bjelketeori og forteller om teorien denne studien omhandler. Dette blir gjort ved å klargjøre hvordan man kom fram til teorien og behandlingen av den. I tillegg diskuterer dette kapittelet hvordan en annen type skråbjelke, nemlig den med kun én skråkant, skal beregnes. Det blir derimot ikke gjort noen videre analyse av slike bjelker i resten av oppgava.

Kapittel 4, RESULTATER, viser hvilke resultater undertegnede har kommet fram til ved hjelp av modellering i FEM-program og beregninger med kileteorien, samt en sammenligning med standard bjelketeori. Fire kiler med ulik grad av vinkling vil bli gjennomgått, samt én I-bjelke. Tabeller med resultater fra topp, senter og bunn blir lagt frem i dette kapittelet. I vedlegg F vises mer utdypende resultater for den første kilen, ellers fins alle resultatene til alle kilene i Dropbox-mappa.

Kapittel 5, DISKUSJON, vil diskutere resultatene funnet i kapittel 4. Det blir gjort med ren diskusjon, tegninger og plott.

Kapittel 6, KONKLUSJON, vil tilslutt sammenfatte arbeidet og gi en henvisning til anbefalt videre arbeid. Kapittelet vil også diskutere hva som, sett i ettertid, burde blitt gjort annerledes.



Figur 1.2 – Gimsøystraumen bro er et eksempel på ei fritt-frembygd betongbro med varierende bjelkehøyder. Foto: Statens Vegvesen

Kapittel 2

METODE

2.1 Gjennomførelse av litteraturstudiet

Brorparten av teorien er funnet gjennom litteratursøk på Internett. Her er henholdsvis scholar.google.com og oria.no mest brukt¹. De viktigste stikkordene er “web-tapered”, “I-beam” og “in-plane behavior”. I moderne tider er det professor emeritus Nicholas Snowden Trahair som anses som den globale autoriteten innenfor temaet. Det er også forskningen hans, sammen med førsteamanuensis Peter Ansourian, denne rapporten vil basere seg på og mye av studien vil gå på å validere forskningen deres.

Kilder ført opp som fotnoter er kilder som ikke brukt av meg, men som andre kilder jeg har brukt har referert til. Det er to grunner til at jeg ikke har brukt kildene:

1. Jeg har ikke funnet kildene. Gjerne fordi de:
 - (a) Ikke ligger tilgjengelig med NTNU-lisens.
 - (b) Kun er i fysisk bokform.
2. De fins ikke på norsk eller engelsk.

Tidligere pensumslitteratur har også vært relevant. Ønsker i tillegg å takke Arne Aalberg for lån av hans *Theory of elasticity* av Timoshenko.

¹Tips til seinere studenter! Om kilden du leter etter er gammel, umulig å finne eller du kun sendes til betalingssider: Søk opp magasinet på Wikipedia og på bunnen av artikkelen finner du som regel lenker til gratisversjoner. Det kan også være mulig å finne kilden på archive.org. Bruk for all del også Dorabiblioteket til NTNU.

2.2 Utstyr

Oppgaven blir skrevet i L^AT_EX gjennom overleaf.com og på en Lenovo ThinkPad T460 med spesifikasjonene:

Operation system Windows 10 Pro 64-bit

CPU Intel Core i5-6200U @ 2.30 GHz

RAM 8,00 GB Single-Channel DDR3 @ 798MHz

Storage Samsung 860 EVO 500 GB SSD

De aller fleste egenskapte figurer i oppgava er laget med enten TikZ [12] eller AutoCAD 2021. Grafer er produsert i enten Python (versjon 3.8), Excel eller av Abaqus.

2.3 Analysemetoder

Modellene blir analysert ved hjelp av to metoder: Med et elementmetodeprogram og håndberegning. Elementmodellene blir brukt til å validere resultatene fra likninger gitt av Trahair. Håndberegningen blir gjort med likninger fra Trahair og klassiske bjelkelikninger.

2.3.1 Elementmetodeanalyse

Elementmodellene er laget i SIMULIA Abaqus FEA [8].

Abaqus er et elementmetodeprogram levert av Dassault Systemes. Det er et effektivt redskap i modellering av tekniske problemer og materialegenskaper. Programmet i seg selv er dimensjonsløst, derfor må man være konsekvent med hvilke enheter man bruker. Til Abaqusmodellene for denne oppgava er det konsekvent kun brukt følgende enheter:

Lengde mm

Kraft N

Moment Nmm

Spenning MPa

Denne oppgaven bruker Abaqus/CAE 2019. En gjennomgang i hvordan modellene er laget, finnes i vedlegg C.

Modellene er homogene skallelementer meshet med S4R² elementtyper. Det vil si: “Element library: Standard”, “Geometric order: Linear” og quad-elementer med

²Fra Abaqus: “S4R: A 4-node doubly curved thin or thick shell, reduced integration, hourglass control, finite membrane strains.”

reduisert integrasjon. Meshingen skjer som *quad-dominated* med *free technique*. Det er ingen felles faktor på hvor fint modellene har blitt diskretisert. Det har kun vært opp til undertegnede å bestemme når diskretiseringen var fin nok.

I-bjelken er hovedsakelig meshet med S4R, men også enkelte triangulære S3-elementer er brukt.

Lastene påføres som *static, linear perturbation* med ikkelinearitet av. En *coupling constraint* med alle seks frihetsgrader huket av sørger for at lastene fordeles over tverrsnittet.

Spenningene hentes ut fra Abaqus ved å definere en *path*.

2.3.2 Håndberegning

Håndberegninger for kiler er utført i Excel. Resultater fra Abaqus eksporteres til Excel hvor de transformeres og kontrolleres opp mot radielle spenninger. I tillegg vil den horisontale komponenten til de radielle spenningene bli kontrollert opp mot Euler-Bernoulli-bjelketeori.

Laster blir påført i et skjæringspunkt med en eksentrisitet r_0 fra kilen/bjelken.

For regning av I-bjelken er det brukt likninger fra vedlegget til Trahair, og det blir gjort med PTC Mathcad Prime 3.1.

2.4 Studiens reliabilitet & validitet

Angående studiens etterprøvbarehet vil oppbygging av elementmetodemodeller være dokumentert i vedlegg C. Elementmodellene er også å finne i Dropbox. Det samme vil Excelfilene være.

Reliabiliteten vil blant annet sjekkes ved å kontrollere Trahairs resultater i [3] opp mot egne fremgangsmåter. Validiteten blir kontrollert ved alle at modellene blir modellert og beregnet på nøyaktig samme metode.

Datamaterialet som samles inn vil være spenninger generert av elementmetodeprogrammet Abaqus og spenninger regnet ut med ulike likninger. Dette analyseres ved å se på forholdet mellom dem. Et forhold på 1,000 betyr at Abaqus og de egenutregnede spenningene er like. Et forhold på 0,950 eller 1,050 viser 5 % avvik. Med tanke på hvilket forhold hvor variansen blir for stor, har det kun vært opp til undertegnede å avgjøre.

Kapittel 3

TEORI

3.1 Kort om rådende bjelketeorier

Siden dette er en oppgave om bjelketeori kan det være godt å friske opp kunnskapen rundt dagens rådende teorier. Dette er Euler-Bernoullis (utviklet på 1700-tallet) og Timoshenkos bjelketeori (utviklet i første halvdel av 1900-tallet).

3.1.1 Bjelketeori uten skjærdeformasjoner

Oppkalt etter Bernoulli-familien og Leonhard Euler. Teorien kan sammenfattes til setninga: “Plane tverrsnitt forblir plane”. Det vil si at et hvert tverrsnitt vil forbli 90° til nøytralaksen. Denne antagelsen er god for mindre og tynnere bjelker, men vil for større bjelker undervurdere deformasjonen og overvurdere egenfrekvensen. Når alle tverrsnittene forblir plane tas det ikke hensyn til *transverse shear strain* og som resultat vil bjelken bli betraktet som stivere enn den egentlig er.

Antagelsen om ingen skjærdeformasjon, $\gamma_{xy} = 0$, fordrer at tverrsnittsrotasjonen følger den deriverte av nedbøyninga, se likn. 3.1.

$$\theta = -w_{,x} \tag{3.1}$$

Og siden tverrsnittene forblir plane er det mulig å regne momentet og skjærkrafta basert på rotasjonen og bøyestivhet:

$$M = -EIw_{,xx} \quad V = -EIw_{,xxx}$$

Likning 3.2 er differensiallikninga som bestemmer nedbøyningen til en bjelke. w er nedbøyning, q jevnt fordelt last, E elastitetsmodul og I annet arealmoment. EI utgjør tilfelles bøyestivheten.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (3.2)$$

Som Per Kr. Larsen skriver i *Konstruksjonsteknikk* (s. 79) [13] forutsetter antagelsen om at “plane tverrsnitt forblir plane” at bjelkehøyden er lav og at forholdet *bjelkehøyde* på *bjelkelengde* ikke overskrider $1/4$. Når dette overskrides bør bjelken anses som en *skive*.

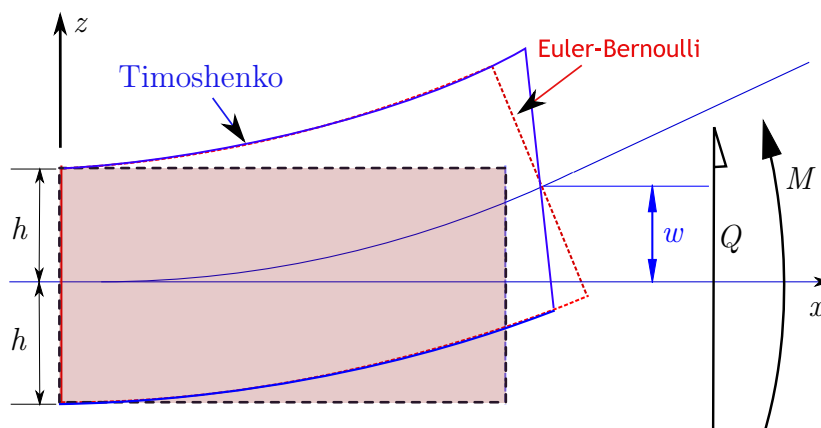
3.1.2 Bjelketeori med skjærdeformasjoner

Ved å tillate skjærdeformasjoner vil ikke tverrsnittsrotasjonen lenger kun være avhengig av helningen til nedbøyninga, se likn. 3.3.

$$\theta = \gamma_{xy} - w_{,x} \quad (3.3)$$

Skjærdeformasjonen defineres som $\gamma_{xy} = \frac{\kappa V}{GA}$, hvor κ er en skjærdeformasjonskonstant avhengig av tverrsnittet, V er skjærkrafta, G er skjærmodulen og A er tverrsnittsarealet. Teorien er oppkalt etter Stepan Timoshenko.

Figur 3.1 viser den hovedsakelige forskjellen mellom Euler-Bernoulli- og Timoshenko-bjelketeori. Det er tydelig å se at den røde, stipla linja (som representerer EB) har et plant tverrsnitt når det forskyves w i z -retning, mens den blå (som representerer Timoshenko) tillater deformasjoner når momentet M opptrer.



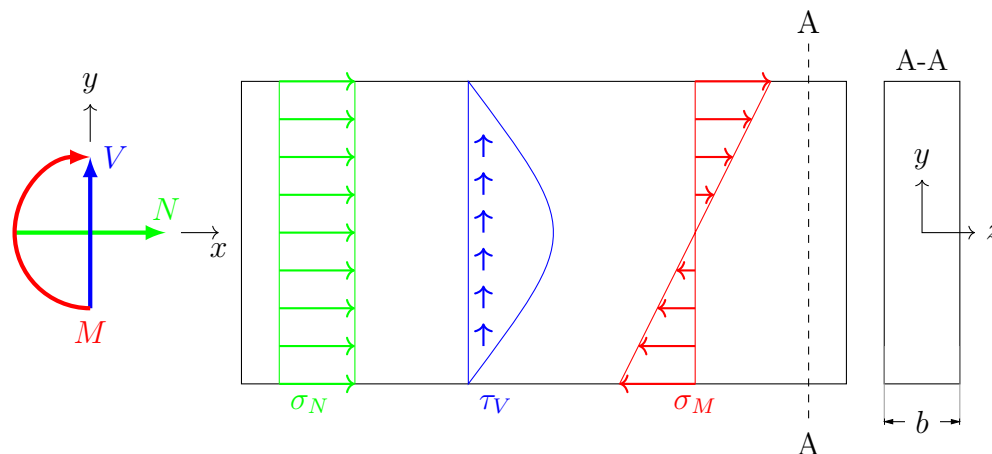
Figur 3.1 – Sammenligning Euler-Bernoulli og Timoshenko, hentet fra https://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko-Ehrenfest_beam_theory

3.2 Dimensjonering av bjelker i dag

Det er flere sentrale prinsipper som ingeniører må hensynta når bjelker skal dimensjoneres. Det åpenbare er at bjelker selvsagt må være sterke nok til å tåle de lastene de utsettes for. Da er det særs viktig å finne ut hvilke spenninger som oppstår. Et annet prinsipp er at bjelkene kun kan deformeres innenfor en tålelig grense. Da er det nødvendig å regne ut bøyestivheten EI , hvor elastitetsmodulen E er konstant for materialet, mens annet arealmoment I avhenger av tverrsnittet. For å kunne beregne korrekt I er det også nødvendig å vite hvordan man skal ta et tverrsnitt for bjelker, og det er ikke nødvendigvis rett frem for bjelker med varierende bjelkehøyde.

3.2.1 Beregning av spenninger

Alle bjelker i dag, uansett om det er stål, betong eller tre, må dimensjoneres til å tåle normal-, skjær- og bøyespenninger. Vi benytter symbolet σ for spenninger som virker med fibrene og τ for spenninger på tvers. SI-enheten for spenning er $\frac{N}{mm^2}$ som tilsvarer MPa. Figur 3.2 viser spenningsforløpet til et element med rektangulært tverrsnitt.



Figur 3.2 – Ulike spenningsforløp i en bjelke med rektangulært tverrsnitt.

Uansett hvordan tverrsnittet ser ut, er normalspenninger kun aksialkraft N over areal A .

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad (3.4)$$

Skjærspenninger avhenger av tverrsnittet og utsatt belastning: Det vil si om skjærspenningene kommer av skjærkraft, bøyning eller torsjon (dekkes ikke her). I tillegg vil ikke skjærspenninger fordele seg jevnt over tverrsnittet, men parabolisk — hvor den største skjærspenningen gjerne opptrer i midten. For I-bjelker neglisjerer vi vanligvis skjærbidraget til flensene og dimensjonerer steget til å ta hele skjærkrafta.

Skjærspenninger i planet er gitt av likning 3.5, hvor V er skjærkraft, S første arealmoment, I annet arealmoment og b bredden.

$$\tau_V = \frac{VS}{Ib} \quad (3.5)$$

Moment vil også gi normalspenninger, henholdsvis strekk- og trykkspenninger på hver sine sider av nøytralaksen. Bøyspenningene er gitt av opptredende moment M i tverrsnittet og motstandsmomentet W . Motstandsmomentet tilsvarer også annet arealmoment delt på avstanden fra nøytralaksen.

$$\sigma_M = \frac{M}{W} = \frac{My}{I} \quad (3.6)$$

Nøytralakse er benevelse på den delen av tverrsnittet som ikke opplever strekk eller trykk som følge av bøyning.

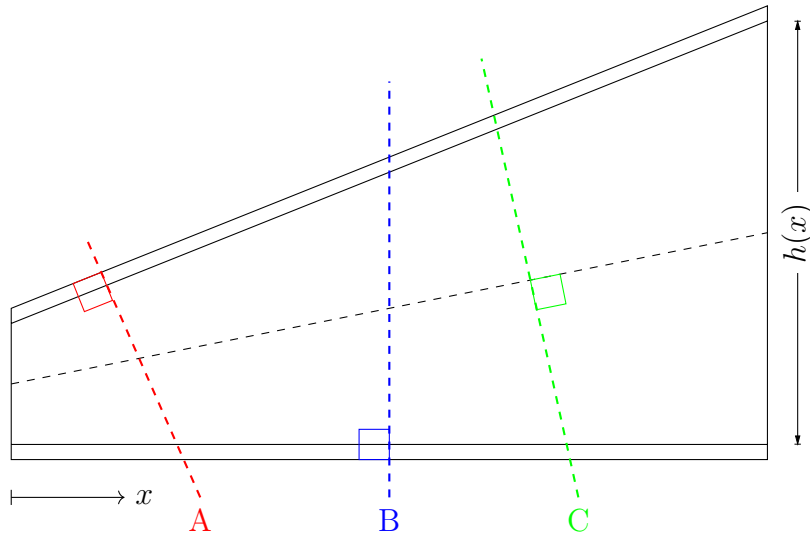
3.2.2 Hvordan bestemme snittet til en skråbjelke

Å definere snittet til en bjelke er viktig for å kunne finne spenningene som opptrer og kunne beregne nedbøyningen. For en bjelke som er symmetrisk om horisontalaksen er det enkelt å skjønne at tverrsnittet står 90° på nøytralaksen. Verre er det å bestemme hvordan tverrsnittet skal tas for en bjelke som ikke er uniform. Figur 3.3 viser tre forslag:

- Snitt A: Vinkelrett på øvre flens.
- Snitt B: Vinkelrett på nedre flens.
- Snitt C: Vinkelrett på $\frac{h(x)}{2}$ -aksen.

For en bjelke med én skrå flens, vil det være naturlig for en ingeniør å ta utgangspunkt i at bjelken skal dimensjoneres for et loddrett snitt (snitt B i figur 3.3). Bjelken vil bli dimensjonert med vanlige, men modifiserte bjelkeformler og konservative vurderinger. Snitt C vil derimot, i følge Trahair (se vedlegg E), være korrekt fremgangsmåte. Trahair hevder at nøytralaksen vil gå i senter av bjelken, altså

langs $\frac{h}{2}$ -aksen, og at tverrsnittet skal tas perpendikulært denne. Mer om hvordan man beregner annet arealmoment for snitt C i kapittel 3.3.



Figur 3.3 – Bjelke med én skrå flens og tre ulike snittforslag.

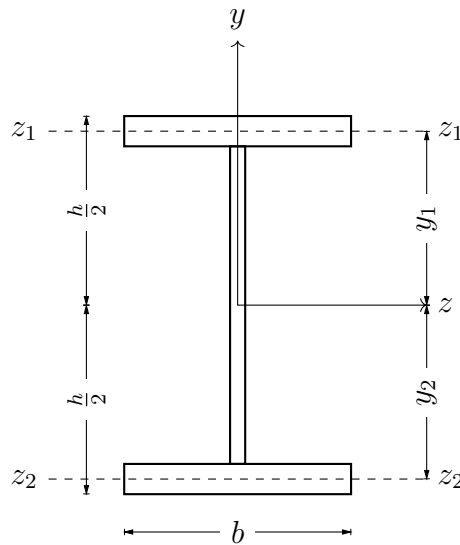
3.2.3 Beregning av annet arealmoment

Annet arealmoment er nødvendig for å bestemme bøyestivheten (EI), bøyespenninger (likn. 3.6) og nedbøyning (likn. 3.2). Ved å dele opp et tverrsnitt i ∞ mange flatelementer, kan man integrere arealet dA med distansen til nøytralaksen kvadrert.

For et rektangulært tverrsnitt med bredde b og høyde h finner vi annet arealmomentet om sterk akse ved å integrere kvadratet av distansen fra nøytralaksen til ytterste fiber over arealet:

$$I_z = \iint_A y^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy dx = \frac{bh^3}{12} \quad (3.7)$$

Siden distansen perpendikulært den gitte aksens opphøyes i tredje potens vil denne faktoren være dominerende. Ved å bare øke denne distansen vil arealmomentet økes kraftig og bjelken vil få mindre nedbøyning, større bøyestivhet og tåle et kraftigere moment.



Figur 3.4 – Tverrsnitt av I-bjelke.

I figur 3.4 er tverrsnittet av en I-bjelke vist. Om vi benevner øvre flens som 1, nedre flens som 2 og steget som 3, finner vi annet arealmoment om sterk akse for et sammensatt legeme som¹:

$$I_z = \overbrace{I_{z_1} + A_1 \cdot y_1^2}^{\text{Øvre flens}} + \overbrace{I_{z_2} + A_2 \cdot y_2^2}^{\text{Nedre flens}} + \underbrace{I_{z_3} + A_3 \cdot y_3^2}_{\text{Steg}} \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Her blir avstanden fra stegets tyngdepunktsakse til nøytralaksen lik 0, og følgelig fjernes arealet.

Likningen kalles *Steiners setning* og funker for hvilken-som-helst sammensatte legemer. Fremgangsmåten er som følger:

1. Finn annet arealmoment for de ulike dellegemene.
2. Finn produktet av arealet til dellegemene og avstanden fra dellegemenes tyngdepunktsakser til nøytralaksen kvadrert.
3. Summér steg 1 og 2.

¹Takk til Øystein Vollens *Statikk og fasthetslære*. Etter flere år med kun tabellerte arealmomenter var det nødvendig med en oppfriskning.

3.3 Beregning av annet arealmoment for bjelker med én skrå flens

Bjelker med én skråflens er det aller vanligste å finne. Kikk opp i taket på ei lagerbygning og bjelkene dukker fram. Fordelen med bjelkene er at man kan tilpasse dem til skråtak. Blant annet vil laboratoriet til materialteknisk på Gløshaugen ha slike bjelker, vist i figur 3.5. Ved å benytte bjelkene vil ellers flate tak få en naturlig vannavrenning.

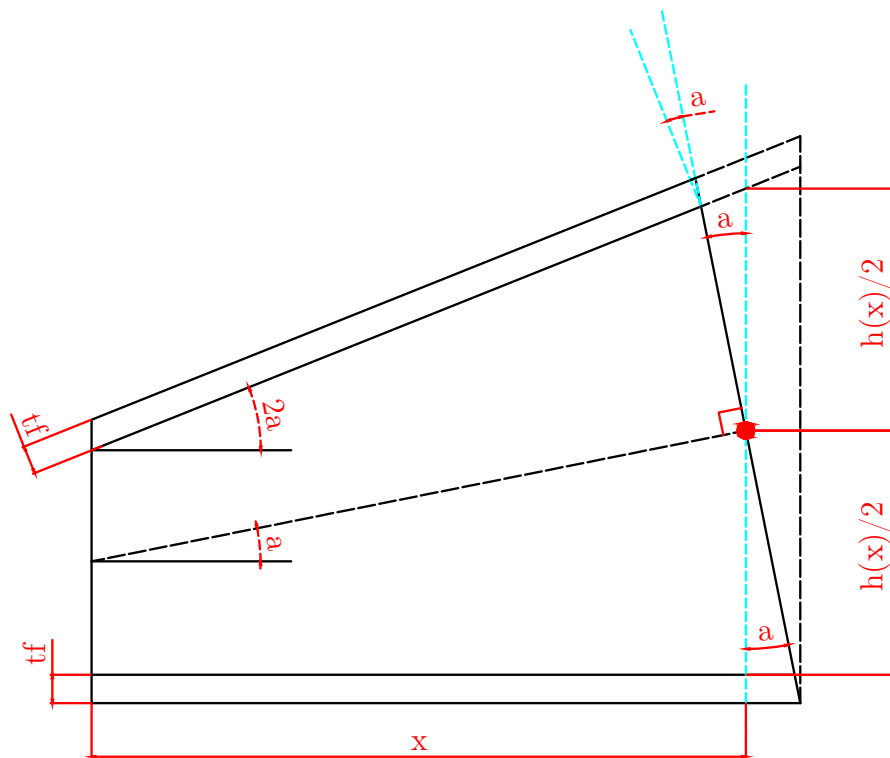


Figur 3.5 – Her kan vi se bjelker med avtagende tverrsnittshøyde bli tatt i bruk på materialteknisk laboratorium på Gløshaugen. Foto: NTNU²

I en epost-korrespondanse (se vedlegg E) forteller prof. Trahair at gitt at flensene er konstante, vil nøytralaksen til en bjelke med én skrå flens følge stegets senterlinje (altså $\frac{h}{2}$ -aksen) og korrekt snitt vil være perpendikulært denne, se figur 3.6.

Korrekt annet arealmoment vil dermed ikke kun være som å ta arealmomentet til en uniform bjelke. Tverrsnittet vil kutte flenser på skrått og steget vil ikke bli like stort over og under senterlinja.

²Hentet fra <https://www.ntnu.no/kt/lab>.



Figur 3.6 – Snitt perpendikulært nøytralakse for I-bjelke med én skrå flens. De cyanfargede strekene er hjelpelinjer for å definere hvor vinkelen α er. De stipla linjene til høyre for snittet viser hvordan bjelken fortsetter videre.

Snittet perpendikulært nøytralaksen gir flensstykker $\frac{t_f}{\cos \alpha}$. Om vi kaller steghøyden på venstre ende h_1 og steghøyden på høyre ende h_2 finner vi vertikalhøyden i x -distanse fra venstre ende som:

$$h(x) = h_1 + \frac{x}{L}(h_2 - h_1) \quad (3.9)$$

... hvor L er bjelkelengden langs horisontalen.

Steglengden til det skråskjærte snittet finner vi i to operasjoner. Den nedre steglengden er lett: Det er ren trigonometri og gir:

$$h_w^{lower} = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} \quad (3.10)$$

Den øvre steglengden er vanskeligere fordi vi må fjerne en bit som går inn i øvre flens. Til slutt vil vi ende opp med at øvre steglengde blir:

$$h_w^{upper} = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} - \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} \tan 2\alpha \tan \alpha \quad (3.11)$$

Når vi slår sammen nedre og øvre steglengde, ender vi opp med:

$$h_w = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [2 - \tan 2\alpha \tan \alpha] \quad (3.12)$$

Som vi ser av likn. 3.10 og 3.11 blir ikke øvre og nedre stegdel like store! Vi må dermed splitte steget i to ved nøytralaksen for å finne arealmomentet, og betrakte øvre og nedre stegdel som to uavhengige dellegemer. Dette blir fort avansert. For utledning, se vedlegg D.

Tilslutt ender vi opp med totalt annet arealmoment om sterk akse for en I-bjelke med én skrå flens lik:

$$\begin{aligned} I^{tot} &= \frac{25}{768} \frac{t_w h(x)^3}{\cos^3 \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha]^3 \\ &+ \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} + \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{128} \frac{t_w h(x)^3}{\cos^3 \alpha} \\ &+ \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} + \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Hvor:

t_w er stegtykkelsen

$h(x)$ er vertikal steghøyde i x

α er vinkel mellom horisontalretning og nøytralaksen

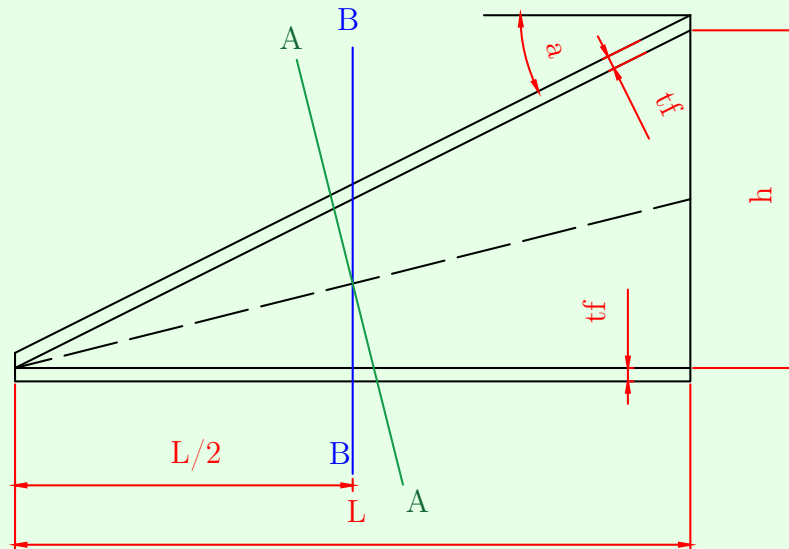
b_f er flensbredden

t_f er flenstykkelsen

Eksempel 1. La oss kjøre et rent teoretisk eksempel hvor vi kun varierer den øvre flensvinkelen. Målet er å sammenligne hva forskjellen blir om vi regner annet arealmoment med et snitt perpendikulært nøytralaksen (snitt A i figur 3.7) eller med en overforenkling (snitt B i figur 3.7). Overforenklingen består i regne I som en uniform bjelke (det vil si: uten å dekomponere flenstykkelsene og regne på vertikal steghøyde) slik at annet arealmoment blir nøyaktig likt Steiners setning fra likning 3.8.

Det loddrette snittet vil også la spenninger peke litt skrått på flensen retning, som er umulig.

Vi lar bjelken være 150 mm lang, ha en venstre steghøyde 0 mm høy, begge flensene er 20 mm brei og 3 mm tykk, steget er 1 mm tykt. Det er kun høyre endekant som endres. Snittet blir alltid tatt halvveis i bjelkespenntet ($x = \frac{L}{2}$).



Figur 3.7 – Overforenklet snitt (B) og “korrekt” snitt (A) til en I-bjelke med én skrå flens. Vær obs på at vinkelen som i denne figuren blir kalt α , benevnes 2α i figur 3.6.

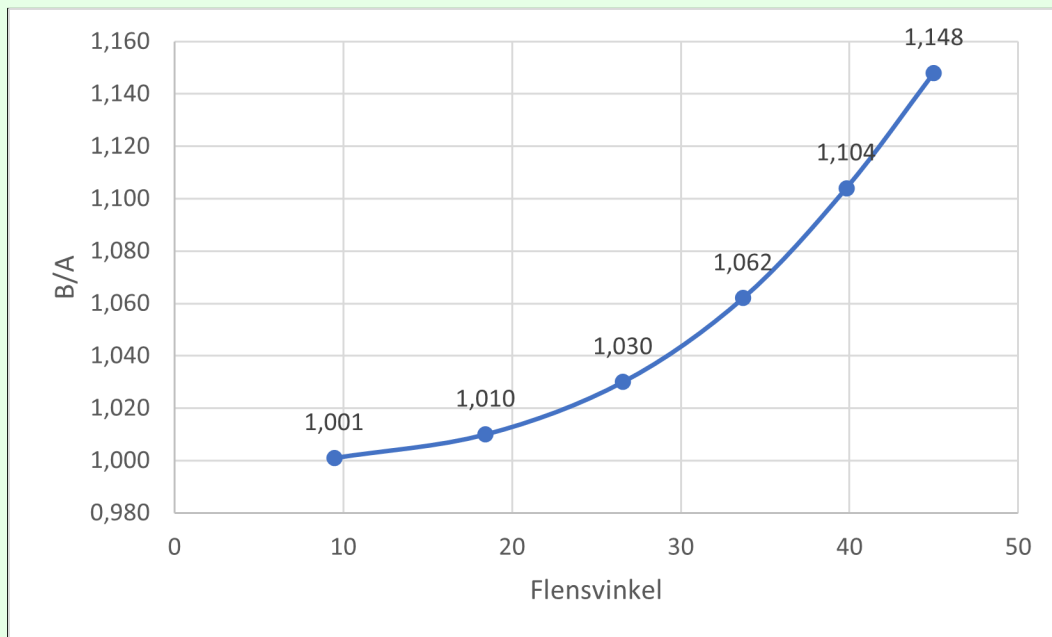
Snitt A er perpendikulært nøytralaksen og snitt B er vertikalt. Legg merke til at flensene holdes konstante og at det kun er steget som endres.

I tabell 3.1 vises forholdet mellom annet arealmoment til de to snittene. Snitt A blir beregnet med likn. 3.13 og snitt B med likn. 3.8.

Tabell 3.1 – Forhold mellom overforenklet (B) og “korrekt” (A) annet arealmoment om sterk akse til en I-bjelke med én skrå flens.

Flensvinkel	Høyre ende [mm]	I^A [mm ⁴]	I^B [mm ⁴]	$\approx B/A$
9,46°	25	7 453,61	7 460,26	1,001
18,43°	50	24 664,90	24 912,08	1,010
26,57°	75	52 132,65	53 692,03	1,030
33,69°	100	89 251,28	94 776,67	1,062
39,81°	125	135 050,21	149 142,55	1,104
45,00°	150	189 687,24	217 766,25	1,148

Vi ser av tabell 3.1 at en overforenklet dimensjonering gjør snittet sterkere enn hva bjelken egentlig er. Som vist i figur 3.8 øker forholdet eksponentielt. Spørsmålet blir derimot når overforenklingen tar for mye feil. Husk på at en overforenklingen gjør at man tror snittet er sterkere enn det egentlig er. Vi må opp på en flensvinkel lik $\approx 40^\circ$ for at forskjellen blir 10,4 % og 45° gir overforenklet snitt 14,8 % sterkere.

**Figur 3.8** – Graf som viser stigningen til forhold mellom overforenklet (B) og korrekt (A) annet arealmoment på økende flensvinkel.

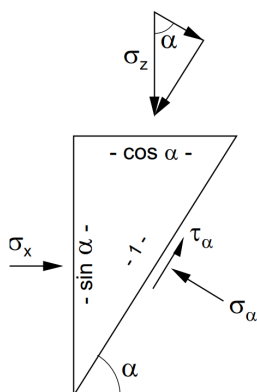
3.4 Transformasjon av spenninger

Ofte oppstår problemet at man ønsker å transformere spenninger til et plan de egentlig ikke stod på. Til dette er Mohrs sirkel et praktisk hjelpemiddel til å skaffe oversikt over spenninger og spenningsretninger [14]. Et spenningselement kan roteres slik at det på et hvert plan virker en hovedspenning og ingen skjærspenning. Om vi betegner hovedspenningene som σ_1 (størst), σ_2 (mellomst) og σ_3 (minst) kan vi grafisk finne løsninger til elementets normalspenninger og skjærspenninger.

Om vi betrakter en plan rettvinklet trekant med spenningene σ_z ($= \sigma_1$) og σ_x ($= \sigma_3$) og vinkelen α fra horisontalen til hypotenusen, se figur 3.9, kan vi bestemme normalspenningen σ_α og skjærspenningen τ_α som:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha \quad (3.14)$$

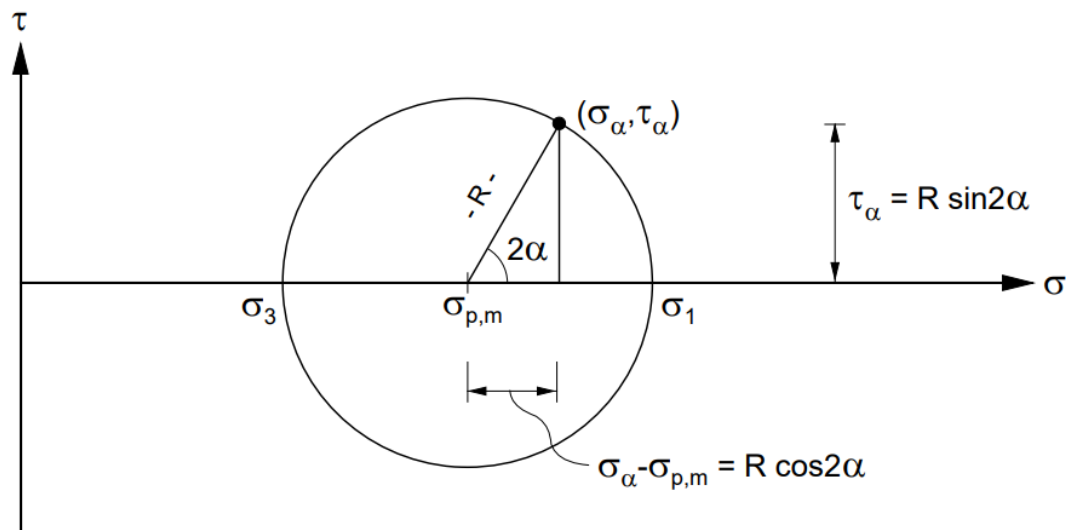
$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha \quad (3.15)$$



Figur 3.9 – En plan rettvinklet trekant med hovedspenninger. Hentet fra [14] side 69.

I et σ - τ -diagram kan hovedspenningene plottes langs σ -aksen (siden $\tau = 0$) og en sirkel trekkes mellom dem. Senter ligger i $(\sigma_{p,m}, 0)$, hvor $\sigma_{p,m} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ (“*plan middelspenning*”) og radiusen blir $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Diagrammet vises i figur 3.10. I diagrammet finner man normal- og skjærspenningene til en hver vinkel elementet vrís til.



Figur 3.10 – Definisjonsskisse av Mohrs spenningsirkel. Hentet fra [14] side 70.

Ved å lese av skissen ser vi at σ_α og τ_α også kan beregnes trigonometrisk:

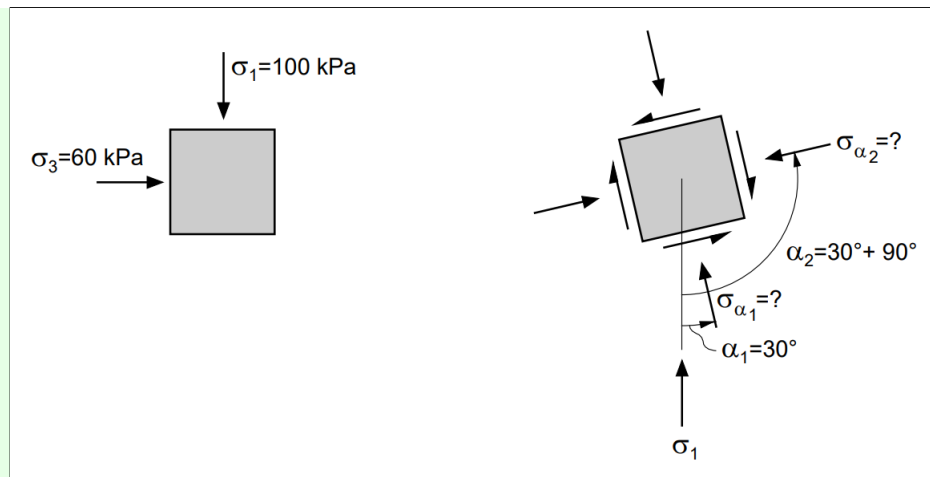
$$\sigma_\alpha = R \cos 2\alpha + \sigma_{p,m} \quad (3.16)$$

$$\tau_\alpha = R \sin 2\alpha \quad (3.17)$$

Eksempel 2. Eksempelet er hentet fra Arnfinn Emdals *Introduksjon til geoteknikk* side 71. Det er modifisert til å utelate poretrykket som opprinnelig var med.

Et rektangulært 2D-element er belastet med hovedspenningene $\sigma_1 = 100$ kPa og $\sigma_3 = 60$ kPa. Elementet vris 30° mot urviseren. Se figur 3.11

Vi ønsker å finne normal- og skjærspenningene som oppstår.



Figur 3.11 – Element belastet med hovedspenninger σ_1 og σ_3 og vridd 30° mot urviseren. Figuren er hentet fra [14] og poretrykket er redigert bort.

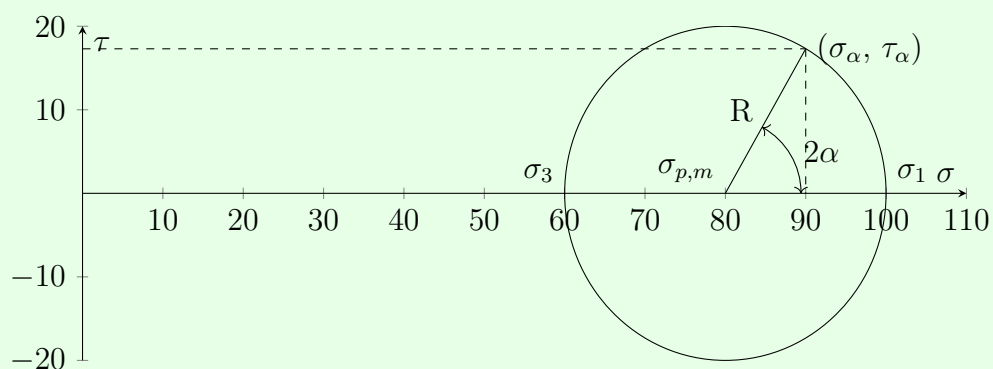
Plan middelspenning blir:

$$\sigma_{p,m} = \frac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ kPa}$$

Radius blir:

$$R = \frac{1}{2}(100 - 60) = 20 \text{ kPa}$$

I figur 3.12 blir plan middelspenning plottet langs σ -aksen og en sirkel med radius R trukket rundt. Deretter kan vi lese av diagrammet hva skjærspenninger og normalspenninger blir på et plan til et element som vris 30° .



Figur 3.12 – Mohrs spennings sirkel plottet i et σ - τ -diagram.

Vi finner følgende normal- og skjærspenninger som:

Avlest

$$\sigma_{\alpha} = 90 \text{ kPa}$$

$$\tau_{\alpha} \approx 17 \text{ kPa}$$

Beregnet

$$\sigma_{\alpha} = R \cos 2\alpha + \sigma_{p,m}$$

$$= 20 \cos 60^{\circ} + 80$$

$$= 90 \text{ kPa}$$

$$\tau_{\alpha} = R \sin 2\alpha$$

$$= 20 \sin 60^{\circ}$$

$$= 17,3 \text{ kPa}$$

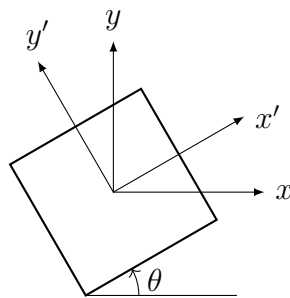
Når det ikke kun er hovedspenninger man er ute etter, men bare finne spenninger til et element som er vridd er likningene nedenfor nyttige³. De viser transformasjon av todimensjonale spenninger fra globale til lokale akser (merket med apostrof ').

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (3.18)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (3.19)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3.20)$$

Figuren under viser et slikt element vridd θ -grader.



Figur 3.13 – Rotert element med lokale og globale akser.

³Likningene er kjente og kan blant annet finnes i Cook & Youngs "Selected chapters from *Advanced Mechanics of Materials*", s. 19.

3.5 Introduksjon til kileteorien

Teorien i dette kapitlet er sentralt i den videre gjennomførelsen av denne studien. Det er her teorien om kileoppførsel og radielle spenninger blir lansert.

Løsningen er basert på teori fremlagt av Boussinesq⁴, utviklet av Flamant⁵ og videre diskutert av blant annet Timoshenko [9]. I nyere tid har N. S. Trahair og Ansourian [3] videreutviklet teorien.

For å skjønne hvordan bjelker med varierende bjelkehøyde oppfører seg, tar man utgangspunkt i at de opptrer mer som kiler (“*wedges*”) enn uniforme bjelker. Man antar videre at spenningene brer seg radielt ut fra kilens ytterpunkt (på engelsk kalt “*apex*”).

Ved å ta utgangspunkt i at en konsentrert jevnt fordelt kraft virker normalt på en plan side av et halvuendelig medium og antar at tykkelsen til mediumet tilsvarer at krafta blir kraft per enhet tykkelse, se figur 3.14, kan man utlede at spenninga σ_r oppfører seg radielt og blir⁶:

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (3.21)$$

... hvor tangensiell spenning $\sigma_\theta = 0$ samt skjærspenning $\tau_{r\theta} = 0$.

I figur 3.14 er $\angle\alpha$ vinkelen mellom lengderetning og én kant av mediumet, og er i figuren lik $\frac{\pi}{2}$ radianer. Om vinkelen derimot snevres inn får vi en kile. Figur 3.15 på side 26 viser en slik kile med spenningene σ_r , σ_θ og $\tau_{r\theta}$ inntegnet. I kapittel 3.5.1 utledes likning 3.21.

Et åpenbart problem med likning 3.21 er hva den radielle spenninga blir når $r \rightarrow 0$. Svaret er singulært og spenninga blir ∞ stor! Akkurat dette er også bemerket av Per Kr. Larsen i hans *Dimensjonering av stålkonstruksjoner*, s. 327 (2. utg.). I praksis vil det derimot alltid være en viss grad av flytning ved kontaktpunktet og krafta vil fordeles over et lite område, som kommentert av Timoshenko på s. 87 i [9]. I tillegg vil en utførelse av dette problemet, som for eksempel oppstår for togskiner (da er $\alpha = \frac{\pi}{2}$), gjerne bli gjort med en flens på toppen som kan anses som bøyestiv, som poengtert av Larsen på samme side som allerede nevnt. På denne måten slipper man unna singularitetsproblemet i den fysiske verdenen.

I figur 3.14 er et halvuendelig medium påsatt linjelasta P . P er definert slik at den jevnt fordelte lasta virker over en like stor tykkelse som det halvuendelige mediumet

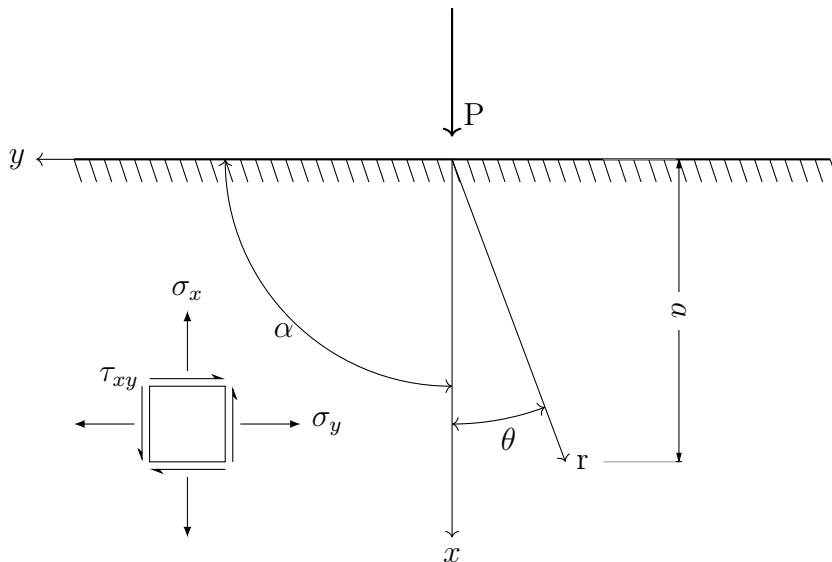
⁴*Compt. Rend.*, vol. 114, s. 1510, 1892

⁵*Compt. Rend.*, vol. 114, s. 1465, 1892

⁶Se blant annet https://en.wikipedia.org/wiki/Flamant_solution

er tykt. x -aksen følger retninga til krafta P . Vinkelen α er definert mellom x -aksen og kanten/overflata til det halvuendelige mediumet. r er radiusen til punktet man ønsker å finne spenningene. Vinkelen θ er mellom vektoren r og x -aksen.

Spenningene σ_r er til enhver tid definert som normale til vinkelen θ .



Figur 3.14 – Linjekraft påsatt planet til et halvuendelig medium.

Videre kan man utlede kartesiske spenninger basert på den radielle, se side 87 i Timoshenkos *Theory of elasticity*, utg. 2:

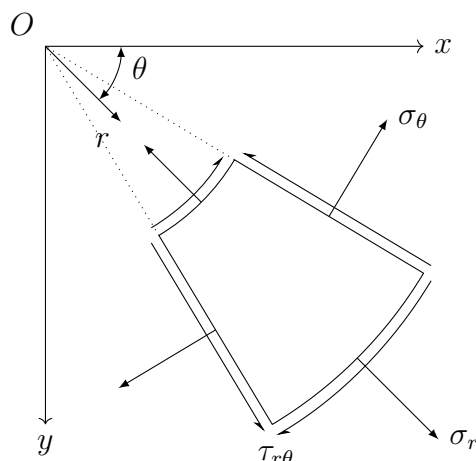
$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta \quad (3.22)$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.23)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta \quad (3.24)$$

σ_x , σ_y og τ_{xy} er alle basert på et *horisontalt* tverrsnitt en loddrett distanse a fra overflata til et hvilket-som-helst punkt (som vist i figuren ovenfor).

Igjen ser vi problemet med singularitet når $a \rightarrow 0$.



Figur 3.15 – Et kileelement med radielle spenninger. Figuren er basert på Timoshenkos *Fig. 40* s. 55 i [9].

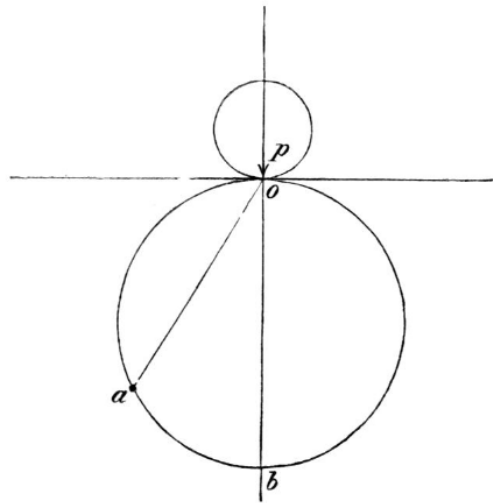
Kommentar: Siden vi tar utgangspunkt i at mediumene vi bruker bare fortsetter i all uendelighet langs ei retning; hva vil skje med teorien vår når vi belaster en kile med fast randbetingelse på motsatt side? Om vi i den ekte verdenen trykker på et medium som har en endelig lengde og mediumet vårt møter en stiv vegg, vil fibre spres til siden. Det samme kan vi ikke nødvendigvis anta i teorien vår når mediumet har en uendelig utstrekning.

3.5.1 Utledning av radiell spenning

Likning 3.21 er mystisk og vanskelig å forstå hvor kommer fra. Oppdagelsen ble gjort av Carus Wilson [11] ved å betrakte en glassbjelke med fotoelastisk metode. Forslaget hans, *Proposition I & II*, var at om en glassbjelke ble lagt på et flatt underlag, ville skjærspenningene til et hvert punkt langs normalen til kontaktpunktet være inversproporsjonal til distansen fra kontaktpunktet.

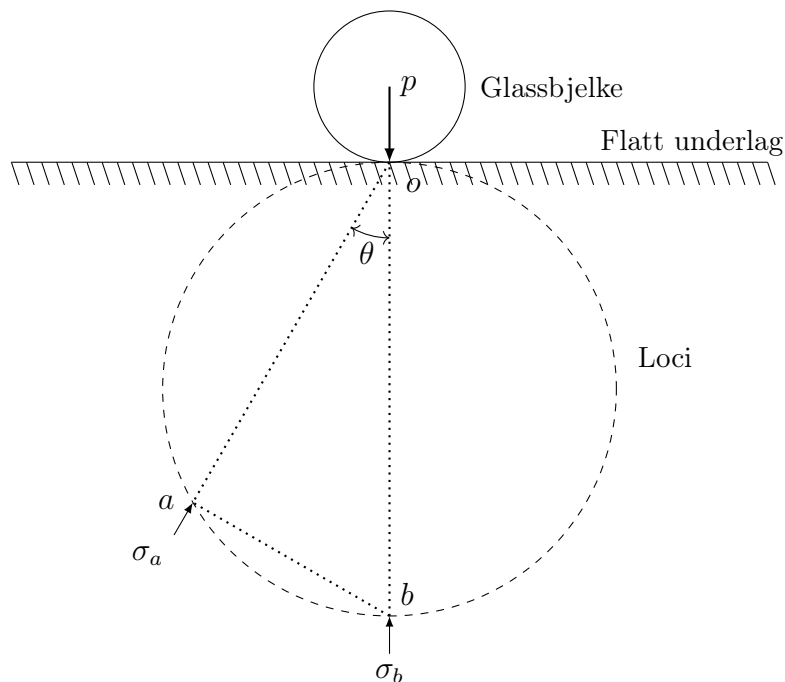
Wilson beskriver i *Experiment 4* at han ved å skinne et hvitt lys og observere tøyninger fant ut at spenninger oppstår i sirkler, se figur 3.16. Her viser øvre sirkel glassbjelken med lasta p , nedre sirkel spenningsutbredelsen (“*loci*”) hvor o er kontaktpunktet, b normalen fra kontaktpunktet og a et tilfeldig punkt. Om tøyningene langs sirkelen er lik, må det også bety at spenningene ved punkt a og punkt b er like⁷ (foruten o som vil være en singularitet).

⁷Jamfør Hookes lov: $\sigma = E\varepsilon$.



Figur 3.16 – Bjelke lagt på et flatt underlag med trykkraft og spenningsutbredelse. Figur hentet fra [11] (Fig. 2, s. 491).

Vi kan dermed utlede spenningsene langs sirkelen. Husk at vi antar at spenningsene vil være inversproporsjonal til distansen med hensyn på lasta. Vi begynner med en oppklarende figur basert på fig. 3.14 og 3.16:



Figur 3.17 – Utledning av radiell spenning.

Igen: I figur 3.17 er o kontaktpunktet, a et vilkårlig punkt, b et punkt på motsatt side av o . p er krafta som påsettes et medium og den stipla sirkelen er tøyning-utbredelsen i mediet. Som vi ser vil oab danne en rettvinkla trekant. Lengda l_{ob} er normalen til kontaktpunktet og hypotenusen. Lengda l_{oa} er distansen fra kontaktpunktet til et vilkårlig punkt a og blir hosliggende katet til vinkelen θ .

Siden spenninga i punkt b er inversproporsjonal med distansen l_{ob} (mm), finner vi spenninga i punktet med linjelasta p (N/mm) og konstanten k (som skal tilfredsstillere randbetingelsene). Husk at tøyningen er lik langs sirkelen, og at σ_b dermed er lik σ_a .

$$\sigma_b = k \frac{p}{l_{ob}} (= \sigma_a)$$

Vi har at vinkelen θ blir:

$$\cos \theta = \frac{l_{oa}}{l_{ob}} \implies l_{ob} = \frac{l_{oa}}{\cos \theta}$$

Spenninga i et vilkårlig punkt a blir altså lik:

$$\sigma_a = k \frac{p}{l_{oa}} \cos \theta \quad (3.25)$$

... hvor l_{oa} tilsvarer r i likn. 3.21. Konstanten k settes lik $\frac{2}{\pi}$ for *flate underlag* med aksiallast, som vist i vedlegg A.

For kiler hvor vinkelen α ikke er 90° blir konstanten lik:

$$k = \begin{cases} \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha} & \text{for aksialkraft, og} \\ \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} & \text{for skjærkraft} \end{cases}$$

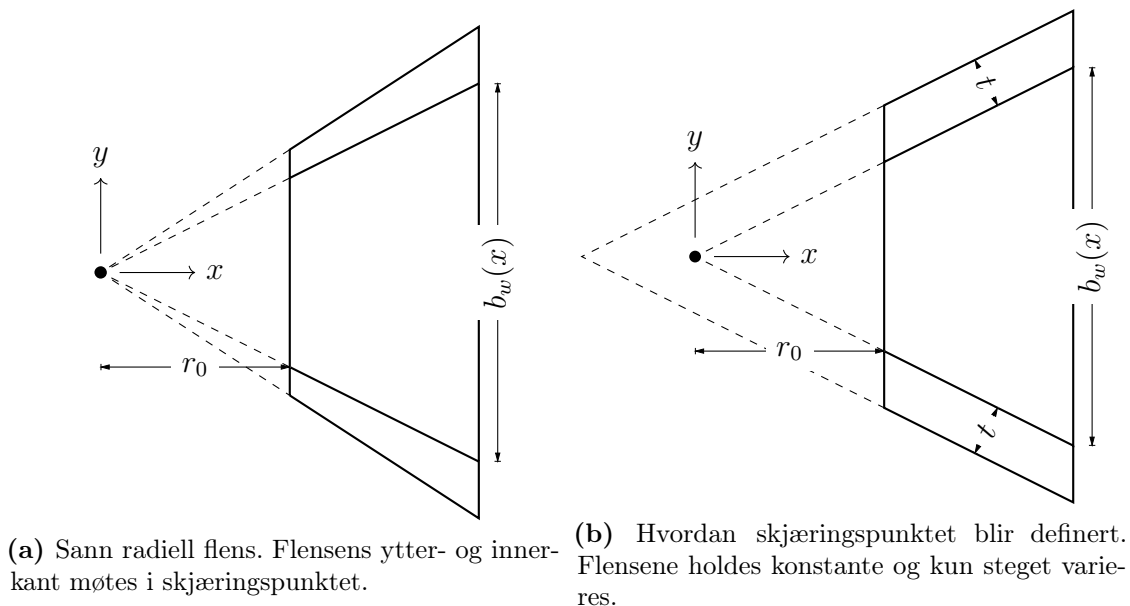
Utledningene fins i vedlegg A og B.

3.6 Kileteorien videreført til praktisk beregning

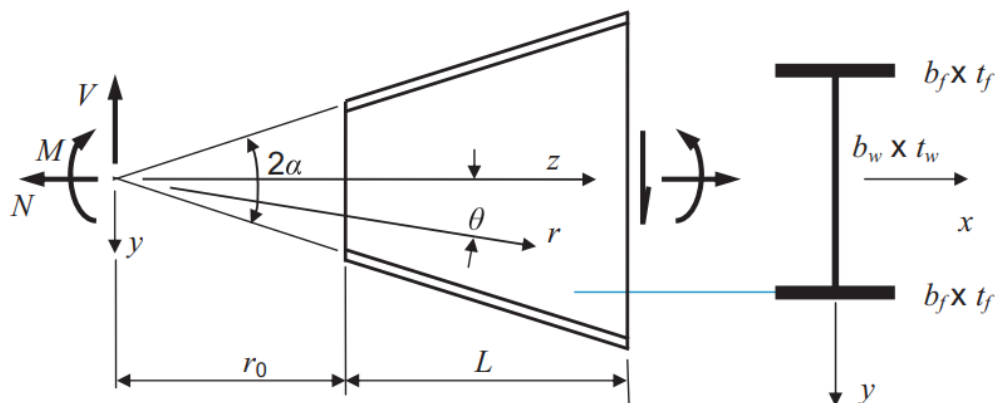
Kileteorien tar i grunn utgangspunkt i at alt skal være radielt. Det vil si at om en I-bjelke skal være *sann* radiell, bør flensene også ta utgangspunkt i skjæringspunktet, som vil si at flenstykkelsen også vil være varierende. Se figur 3.18a. Derimot er det

i praksis umulig, og Trahair definerer skjæringspunktet heller til å være på innsiden av flensene, se figur 3.18b. Da vil flensene være konstante og kun steget vil være varierende.

Skjæringspunktet vises som en svart prikk i figur 3.18. r_0 er distansen fra skjæringspunktet til bjelken. Det er i skjæringspunktet alle lastene i den videre beregningen blir påsatt. $b_w(x)$ er her gitt som steghøyden, som også er gjort i figur 3.19.



Figur 3.18 – Definisjon av skjæringspunktet.



Figur 3.19 – En bjelke med avtagende tverrsnittshøyde kan betraktes som en kile. Hentet fra [3].

3.6.1 Kileteorien uten flensbidrag

En kile med lengderetning langs horisontalen, vinkel fra kant til kant 2α , samt vinkel fra horisontalen til et vilkårlig punkt θ og aksialkraft $-N$ sentrert i lengdeaksen, vil få spenninger i en distanse r lik:

$$\sigma_r = -\frac{2N \cos \theta}{r(2\alpha + \sin 2\alpha)} \quad (3.26)$$

Spenningene sprer seg ut i sirkler (= er radielle) og peker mot skjæringspunktet. Siden spenningene peker inn mot skjæringspunktet vil de ha komponenter i lengderetning (normalspenninger) og i høyderetning (skjærspenninger). I og med at skjærspenningene peker i hver sine retninger over og under nøytralaksen vil de utjevne hverandre og som resultat bli null.

Likeens vil skjærkrafta V gi spenningene:

$$\sigma_r = -\frac{2V \sin \theta}{r(2\alpha - \sin 2\alpha)} \quad (3.27)$$

I motsetning til vanlig praksis (fig. 3.2) vil skjærspenningene være konkave med størst verdi i kantene.

Et moment M gir spenningene:

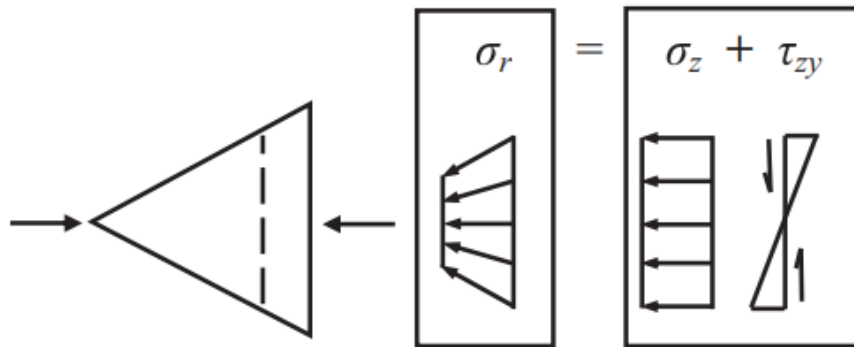
$$\sigma_r = -\frac{4M \sin 2\theta}{2r^2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \quad (3.28)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2M(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{2r^2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \quad (3.29)$$

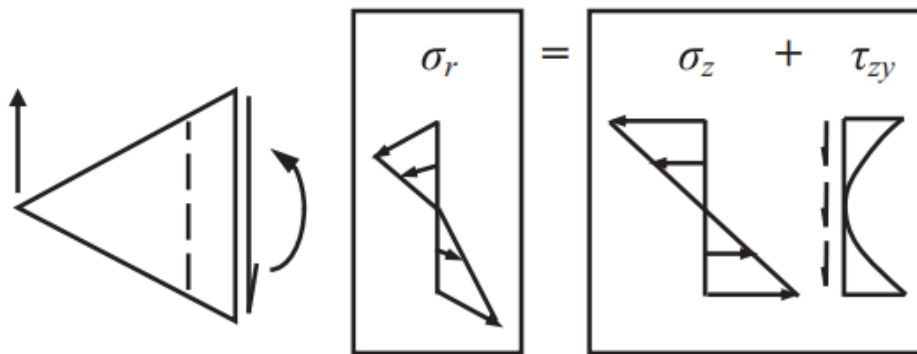
Et moment gir altså både radielle normalspenninger og radielle skjærspenninger.

For å dekomponere den radielle normalspenninga trenger man kun ren trigonometri. Horisontalkomponentene finnes som $\sigma_r \cos \theta$ og vertikalkomponentene som $\sigma_r \sin \theta$. For moment vil total vertikalspenning bli $\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta}$.

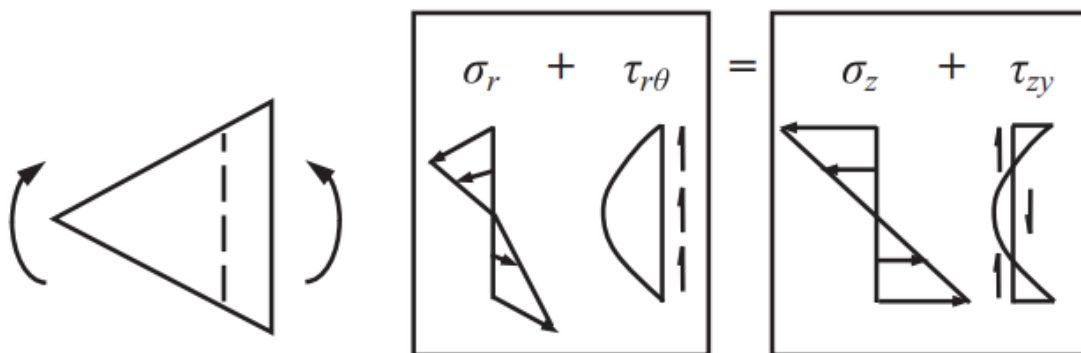
Alle likningene på denne siden er hentet fra Trahairs artikkel [3], men er også å finne i Timoshenkos *Theory of elasticity* s. 96. På neste side vises de tre tilfellene hvor en kile er blitt påført aksial-, skjærlast og moment. Den stipla linja viser et loddrett tverrsnitt hvor de radielle spenningene tas.



(a) Aksialkraftspenninger for en kile.



(b) Skjærkraftspenninger for en kile.



(c) Bøyepenninger for en kile.

Figur 3.20 – Spenningsforløp til en kile belastet med aksial-, skjærkraft og moment. Hentet fra [3]. Vær obs på at z er gitt som lengderetning.

3.6.2 Kileteorien med flensbidrag

For bjelker med varierende bjelkehøyde og konstante flenser, foreslår Trahair [3] å beregne normal- og skjærspenninger⁸ etter følgende formler:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{r\theta} + \theta \sigma_r \quad (3.31)$$

Hvor σ_r hentes fra likn. 3.35 og $\tau_{r\theta}$ hentes fra likn. 3.36.

Spenningsforløpet til en bjelke med to skråflenser blir som i figur 3.21. Til forskjell fra fig. 3.20 ser vi et større bidrag til radielle skjærspenninger $\tau_{r\theta}$, som i følge Trahair må komme fra vertikalkrefter fra flensene.

Modifiserte bjelkelikninger

For å bestemme spenninger til en I-bjelke med varierende tverrsnittshøyde, legger Trahair fram en rekke formler i vedlegget til artikkelen “In-plane behaviour of web-tapered beams”. Disse formlene vil bli gjennomgått her og utførelsen av dem kan ses i kapittel 4.5.

Notasjonen under kommer fra figur 3.19 hvor b_f er flensbredden, t_f er flenstykkelsen, b_w er steghøyden og t_w er stegtykkelsen.

Tverrsnittsarealet er gitt som:

$$A = 2b_f t_f + b_w t_w \quad (3.32)$$

Annet arealmoment om sterk akse gis som:

$$I_z = \frac{b_f t_f b_w^2}{2} + \frac{b_w^3 t_w}{12} \quad (3.33)$$

Snittet er tatt vertikalt og vil i grunn skjære flensene på skrått og det er mulig å regne ut et mer nøyaktig areal og annet arealmoment. Trahair velger derimot å forenkle.

⁸En annen formel for skjærspenninger er også foreslått, uten at undertegnede fikk suksess med den: Likn. (5) $\tau_{xy} = \tau_{r\theta}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \sigma_r \sin \theta \cos \theta$

Vinkelen til et vilkårlig punkt $P(x, y)$ settes til:

$$\theta \approx \frac{y}{x} \quad (3.34)$$

Hvor x er distansen fra origo til snittet og y er høyden fra horisontalen til punktet. Origo defineres i skjæringspunktet.

Radiell normalspenning gis som:

$$\sigma_r = \frac{N}{A} + \frac{Mx\theta}{I_z} \quad (3.35)$$

Ingen hokus pokus her altså. $x\theta$ tilsvarer y og likningen for normalspenningen blir nøyaktig det samme som likning 3.4 og 3.6.

I motsetning er radielle skjærspenninger et kunststykke. $\tau_{r\theta}$ er avhengig av tre variabler, som igjen er avhengig av en faktor k :

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\alpha n} \frac{\theta}{\alpha} + \tau_{0m} + (\tau_{\alpha m} - \tau_{0m}) \frac{\theta^2}{\alpha^2} \quad (3.36)$$

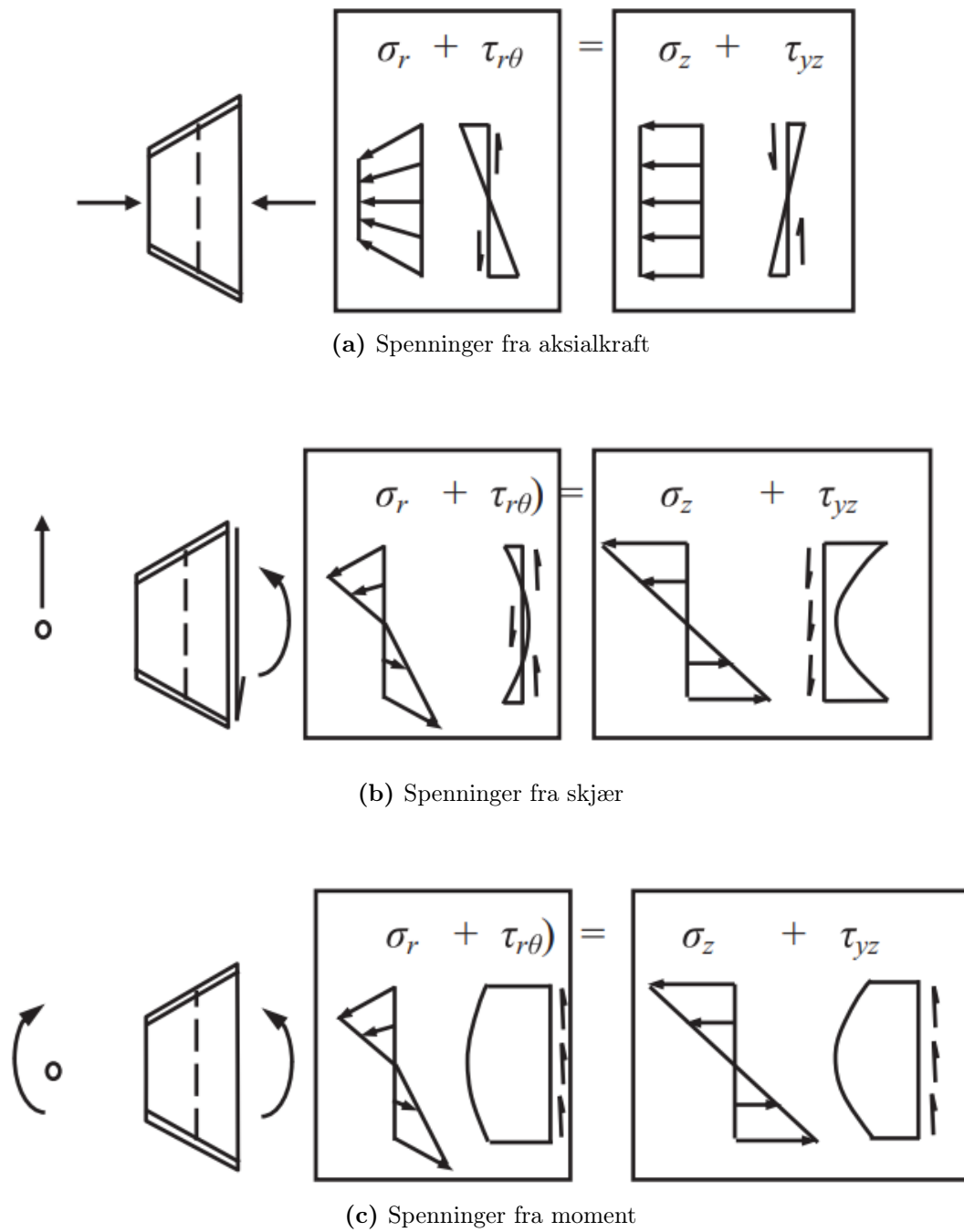
Hvor $\tau_{\alpha n}$, τ_{0m} og $\tau_{\alpha m}$ er ulike variabler avhengig av aksialkraft og moment. Husk at θ er vinkel til det punktet du ønsker å finne spenninger, mens α er vinkelen fra horisontalen til flensen.

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha n} &= -\frac{Nb_f t_f}{A^2 t_w} \frac{dA}{dx} \\ \tau_{0m} &= \frac{Mx\alpha^2(k+1)}{I_z} \left(1 + \frac{2b_f t_f}{b_w t_w} \frac{k}{k+1} \right) \\ \tau_{\alpha m} &= \frac{M\alpha b_f t_f k}{t_w I_z} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Og:

$$k = 1 + \frac{x}{M} \frac{dM}{dx} - \frac{x}{I_z} \frac{dI_z}{dx} \quad (3.38)$$

Siden k -en er avhengig av et moment, vil k -en modifiseres til å droppe det andre leddet ved ren aksialkraftsberegning.



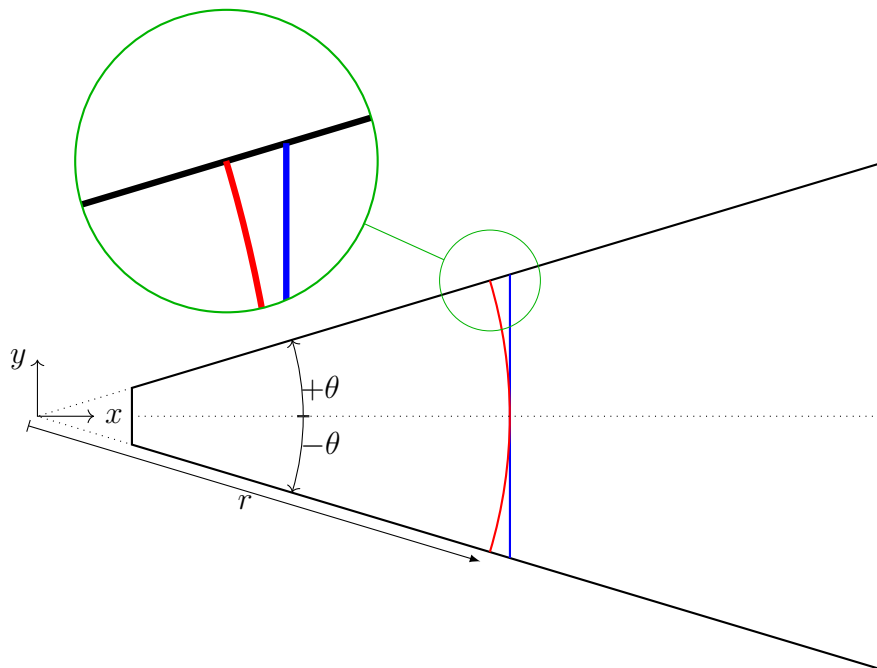
Figur 3.21 – Spenningsforløp til bjelke med to skråflenser belastet med aksial-, skjærkraft og moment. Hentet fra [3]. Vær obs på at z er gitt som lengderetning.

3.6.3 Radielle tverrsnitt v. vertikale tverrsnitt

Selv om teorien baserer seg på radielle spenninger, er det ikke formålstjenlig å trekke buede tverrsnitt. En ingeniør vil gjerne dimensjonere bjelker etter allerede godt utprøvde prinsipper og vil helst trekke strake tverrsnitt.

Konsekvensen av å omgjøre tverrsnittet fra en bue til en loddrett strek er at distansen r ikke lenger vil være konstant. Den vil bli en funksjon av y og x ved å ta pytagoras: $r(y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, hvor $x = r$ for buet tverrsnitt.

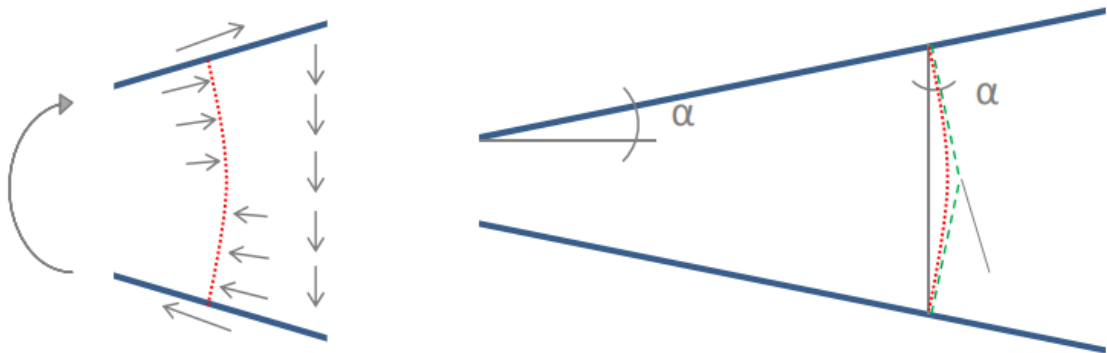
Utover det vil de tidligere likningene 3.26, 3.27, 3.28 og 3.29 være de samme.



Figur 3.22 – En kile med et radielt og et vertikalt tverrsnitt. Detaljen viser at distansen r trenger forlenging til vertikalt snitt overalt utenom langs nøytralaksen.

Som blant annet diskutert av Liliana R. S. Marques [15] vil en flensvinkel $\alpha < 15^\circ$ ha så liten betydning på opptredende (radiell) spenning, at en utvidet ordinær bjelketeori er god nok. Se figur 3.23. Den røde streken viser utbredelsen av radielle spenninger, mens den grønne er et *bilineært* tverrsnitt, foreslått av Bleich⁹, som dekker tilfredsstillende et sirkulært tverrsnitt.

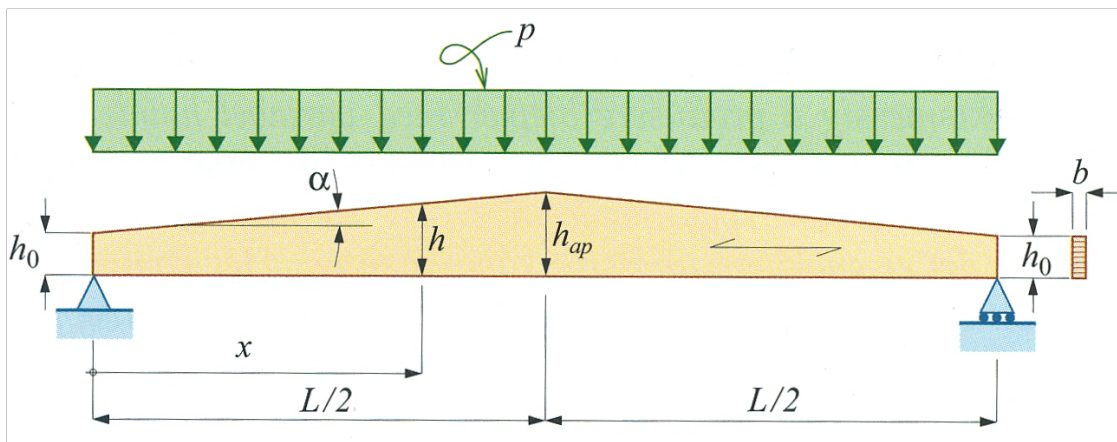
⁹Friedrich Bleich. *Stahlhochbauten ihre theorie, berechnung und bauliche gestaltung*, 1932, Berlin



Figur 3.23 – Om flensvinkelen $\alpha < 15^\circ$ kan radielle spenninger (rødt) beskrives godt av en utvidet ordinær bjelketeori (grønt). Figur laget av L.R.S. Marques [15].

3.7 Dimensjonering av limtrebjelker ved empiriske formler

Limtrebjelker med skråkanter, gjerne kalt enten pult- eller saltaksbjelker, er mye brukt innen trekonstruksjoner. Lamellene legges i lengderetning og utnytter treets styrke på langs.



Figur 3.24 – Saltaksbjelke av limtre. Hentet fra Kolbein Bells *Dimensjonering av trekonstruksjoner* s. 200.

Mye av teorien til dimensjonering av pult- og saltaksbjelker er dekket av Kolbein Bell i boka “Dimensjonering av trekonstruksjoner” [16]. Den samme fremgangsmåten er beskrevet i Eurokode 5 [6]. Bell skriver at problemet ligger i å bestemme hvilket tverrsnitt som er dimensjonerende i bruddgrensetilstanden, hvor det gjelder

å finne krysningspunktet mellom bjelkehøyden (annet arealmoment) og virkende moment.

Nå er ikke trekonstruksjoner et direkte teoretisk material — mye av dimensjoneringen baserer seg på empiri, i tillegg har trekonstruksjoner en annen styrke med tanke på om fiberretningen er langs- eller tverrsgående, men det vil fortsatt være interessant å se på hvordan beregningen gjøres empirisk kontra rent teoretisk (slik teorien til denne rapporten er).

Eurokode 5 kap. 6.4 dekker dimensjoneringsreglene for bjelker med varierende tverrsnittshøyde. Likning 6.38 i EC5 krever at:

$$\sigma_{m,\alpha,d} \leq k_{m,\alpha} f_{m,d} \quad (3.39)$$

hvor $\sigma_{m,\alpha,d}$ er dimensjonerende bøyespenning i vinkel på fiberretningen, $k_{m,\alpha}$ er dimensjoneringsfaktor basert på om momentet på skråsiden er strekk eller trykk og $f_{m,d}$ er dimensjonerende bøyefasthet .

I rektangulære bjelketverrsnitt bestemmes dimensjonerende bøyespenning etter formelen:

$$\sigma_{m,\alpha,d} = \frac{6M_{Ed}}{bh^2} \quad (3.40)$$

Hvor M_{Ed} er opptredende moment og b og h er bredde og høyde.

Det er avgjørende for lamellene i bjelken om de utsettes trykk eller strekk. Derfor er faktoren $k_{m,\alpha}$ ført inn.

For strekkspenninger blir den

$$k_{m,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_{m,d}}{0,75f_{v,d}} \tan \alpha\right)^2 + \left(\frac{f_{m,d}}{f_{t,90,d}} \tan^2 \alpha\right)^2}} \quad (3.41)$$

Og for trykkspenninger blir den

$$k_{m,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_{m,d}}{1,5f_{v,d}} \tan \alpha\right)^2 + \left(\frac{f_{m,d}}{f_{c,90,d}} \tan^2 \alpha\right)^2}} \quad (3.42)$$

Igjen:

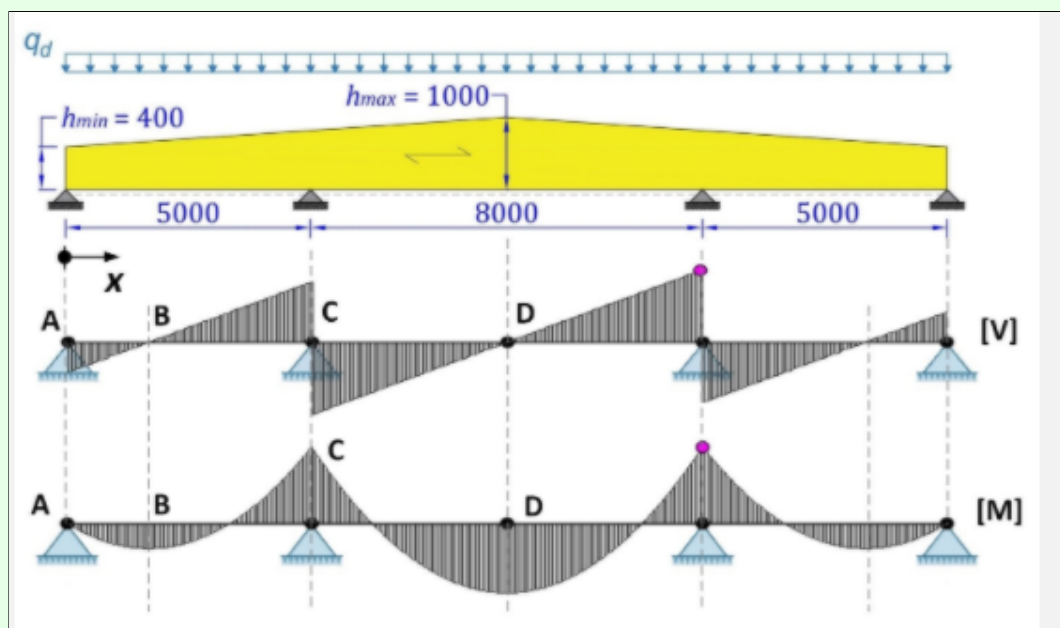
$f_{v,d}$ er dimensjonerende skjærfasthet

$f_{t,90,d}$ er karakteristisk strekkfasthet vinkelrett på fiberretningen

$f_{c,90,d}$ er karakteristisk trykkfasthet vinkelrett på fiberretningen

Eksempel 3. Dette er et eksempel hentet fra TKT4211 Trekonstruksjoner 1 eksamen 2020.

En saltaksbjelke (GL32h) skal dimensjoneres for en jevnt fordelt kraft. Se figur under for opprettede moment og skjærkraft.



Figur 3.25 – Saltaksbjelke utsatt for jevnt fordelt kraft. Figuren er hentet fra eksamenen i *Trekonstruksjoner 1* 2020.

Maks skjærkraft og moment: $x = 5000$ mm, $V = 131$ kN og $M = 138$ kNm (strekk på oversiden).

$k_{mod} = 0,8$ og $\gamma_m = 1,15$ gir:

$$f_{md} = 22,26 \text{ MPa}$$

$$f_{vd} = 2,43 \text{ MPa}$$

$$f_{t,90,d} = 0,35 \text{ MPa}$$

Høyden i tverrsnitt ved $x = 5,0$ m er:

$$h(x) = 400 \text{ mm} + \frac{x}{L} \cdot 600 \text{ mm}$$

og når $L = 9,0$ m blir $h(x = 5000 \text{ mm}) = 733,33 \text{ mm}$.

Finner opptredende moment med likning 3.40:

$$\sigma_{m,\alpha,d} = \frac{6 \cdot 138 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{140 \cdot 733,33^2 \text{ mm}^3} = 11 \text{ MPa}$$

Helningen til skråsiden er:

$$\tan \alpha = \frac{600}{9000} = 0,07$$

Finner strekkfaktoren fra likning 3.41.

$$k_{m,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{22,26}{0,75 \cdot 2,43} \cdot 0,07\right)^2 + \left(\frac{22,26}{0,35} \cdot 0,07^2\right)^2}} = 0,74$$

Som gir dimensjonerende bøyefasthet $k_{m,\alpha} f_{md} = 16,47 \text{ MPa} > \sigma_{m,\alpha,d} = 11 \text{ MPa}$... som er OK.

3.8 Oppsummering av teorikapittelet

Rådende bjelketeorier dekker uniforme bjelker med et konstant tverrsnitt. For å mer nøyaktig kunne dimensjonere bjelker som har et lineært økende tverrsnitt har professor Trahair utviklet en teori basert på at bjelker med varierende bjelkehøyde oppfører seg som kiler. Ved å ta utgangspunkt i at en last påføres tuppen av en kile (*skjæringspunktet* eller "*apex zone*") vil spenningene bre seg radielt utover avhengig av radius, fibervinkel og flensvinkel.

Denne teorien er basert på et allerede kjent problem diskutert av Boussinesq¹⁰, såvel problematisert av Timoshenko [9]. Det var Wilson [11] som satte det hele i gang med eksperimenter gjort i 1891. Med fotoelastiske metode fant han ut at tøyninger opptrer i sirkler fra kontaktpunktet og ved Hookes lov vil spenningene dermed også bre seg ut radielt. Et åpenbart problem som oppstår er hva spenningene blir direkte

¹⁰ *Compt. rend.*, vol. 114, s. 1510, 1892, Paris

under kontaktpunktet. Problemet blir singulært!

For å videre kunne sjekke om teorien til Trahair stemmer, vil en bjelke modelleres i FEM-programmet Abaqus. Derimot gir Abaqus spenninger kun i de globale akseretningene, mens de radielle spenningene sentreres inn mot skjæringspunktet. Så for å kunne oppnå samme resultat må spenningene til elementene transformeres til samme vinkel som spenningene i bjelken hentes fra.

Selv om spenningene brer seg ut radielt, vil det ikke nødvendigvis være hensiktsmessig å også definere radielle tverrsnitt. Derfor er det formålstjenlig å trekke de radielle spenningene ut til et loddrett tverrsnitt og se hvordan radielle normal- og skjærspenninger opptrer der. Tross alt vil ingeniører dimensjonere bjelker ut i fra snitt de kan forstå og likninger de kjenner.

Tilslutt viser teorikapittelet hvordan praksisen er for å dimensjonere limtrebjelker med varierende bjelkehøyde.

Kapittel 4

RESULTATER

4.1 FEA-simulering av kiler med skallelementer

Vi ønsker å sjekke om kileteorien til Trahair [3] stemmer og særlig sjekke om påstandene

“The radial stresses vary with the angle θ from the axis, but are nearly uniform for wedges with small taper angles α .”

stemmer for plater med aksiallast hvor spenningene er beregnet med likning 3.26, og

“The variation of these stresses with the angle θ is nearly linear for small taper angles α .”

stemmer for plater med skjærlast hvor spenningene er beregnet med likning 3.27.

I tillegg påstår Trahair at skjærspenningene fra en skjærlast opptrer (omvendt) parabolisk: Null spenninger i midten, og tre ganger gjennomsnittsverdi i makspunkt.

Flere plane, todimensjonale kiler blir modellert i Abaqus. Fremgangsmåten kan ses i vedlegg C (dropp modellering av flensene). Spenningene hentes ut ved å definere *paths* over tverrsnittet. To *paths* blir definert: En sirkulær med origo i skjæringspunkt og radius r , samt en vertikal i midtsnittet. Begge *pathsene* har samme koordinat langs nøytralaksen ($\implies (x, y)_{NA} = (r_0 + \frac{L}{2}, 0)$).

I Abaqus er vi interessert i S11, S22 og S12 (tilsvarer σ_x , σ_y og τ_{xy}). De eksporteres til Excel hvor de transformeres med likning 3.18, 3.19 og 3.20. Med de samme θ -vinklene som verdier fra *pathen* hentes ut fra, regner vi ut hva σ_r og $\tau_{r\theta}$ blir. Vi er spesielt interessert i å sammenligne hva radielle spenninger mot transformasjons-

spenningene i x' -retning er, se likning 3.18, samt hva den horisontale komponenten til radiell spenning er mot klassisk bjelketeori.

Den horisontale komponenten til radiell spenning finnes ved å gange med cosinus: $\sigma_r \cos \theta$, hvor vinkelen θ er vinkelen fra nøytralaksen og til punktet vi ønsker spenningen i. Normalspenningen til klassisk bjelketeori finner vi med likning 3.4 for aksiallast og likning 3.6 for skjærkraft og moment. Alle lastene blir påsatt med eksentrisitet r_0 og skjærkrafta vil gi et tilleggsmoment. Den horisontale komponenten til radiell spenning sammenlignes også med S11 fra Abaqus.

Totalt blir fire kiler testet:

- Wedge1* – Samme dimensjoner som Trahair, se tab. 4.21.
- Wedge2* – Simulerer en reell bjelke.
- Wedge3* } Rent teoretiske bjelker med stor vinkel α .
- Wedge4* }

Alle fire kilene blir modellert på samme måte. De er *shells* med tykkelse 1, meshet med S4R-elementer og lasten er påført som *Static, Linear Perturbation* i en distanse r_0 fra venstre kant.

Hver kile får påført aksiallast (som trykk), skjærkraft og moment. I høyre ende vil randbetingelsene for hver modell være “XSYMM”: Da vil Abaqus late som om modellen er speilet og holder igjen frihetsgradene U1, UR2 og UR3 (henholdsvis bevegelse i x -retning, rotasjon om y -aksen og rotasjon om z -aksen). For tilfellet med skjær legges det til én ekstra randbetingelse: Én midtnode på enderanden blir leddet. Uten å holde igjen modellen på denne måten vil modellen kun få en stivlegemebevegelse i y -retning på grunn av skjærkrafta.

Videre vises resultatene for de ulike kilene i tabeller. Verdiene for *Wedge1* vil bli nøyere diskutert, mens verdiene for de tre andre kilene blir mindre diskutert. Det er ikke nødvendig å gå like detaljert inn på alle fire; prosessen er uansett den samme. I vedlegg F blir flere verdier for *Wedge1* presentert. For å se nøyere på resultatene til alle kilene, se Excel-filene i Dropbox-mappa. Tilslutt blir resultatene diskutert i kap. 5.

4.1.1 Forklaring til de ulike tabellene til kilemodellene

Tabellene som vises i dette kapittelet er komprimerte versjoner av Excel-arkene. Større og uredigerte tabeller for den første kilen vises i vedlegg F, mens råmaterialet for alle kilene ligger i Dropbox-mappa. De ulike tabellene avhenger av hvilke *paths* verdiene hentes fra. Først vil verdier til *circular paths* vises, deretter *vertical paths*.

Det er kun resultater fra ytterkantene ($\theta = \pm\alpha$) og senter ($\theta = 0^\circ$) som vil vises

i dette kapittelet. Selv om den samme *pathen* til en modell ble brukt til de ulike lastene, har ikke Abaqus alltid hentet ut resultater fra samme koordinat.

Noen ganger vil Excel gi feilmelding. Disse er redigert bort i tabeller i dette kapittelet, men vil belyses med en asterisk *. For tabeller i vedlegg F vil ikke feilmeldingene redigeres bort. De gjennomgående er:

#DIV/0! Forholdet deles på null. I slike situasjoner settes forholdet til 1,000. Poenget med å regne ut forhold er å vise hvor like spenningene fra de forskjellige metodene er. Ofte når denne feilmeldingen dukker opp er forholdet $\frac{0}{0}$, og blir ansett som å ta forholdet på to like verdier.

En singularitet: Et lite tall deles på et mye mindre tall. I disse tabellene skjer det i randsoner hvor spenningene går mot null, men hvor den ene måten å regne ut spenningene på går raskere mot null enn den andre. Ofte oppstår mindre singulariteter også, hvor forholdet kan bli noen tusen ganger større enn i resten av tabellen¹. Løsningen blir å enten ignorere dem, eller behandle dem som 1,000. Dette går fordi i det store perspektivet vil singularitetene oppstå der spenningene går mot null, og forholdet $\frac{\text{en ganske liten verdi}}{\text{en mye mindre verdi}} \approx \frac{0}{0}$.

Andre situasjoner som må hensyntas blir også merket med en asterisk og belyst som fotnoter i tabellene. Blant annet kan Excel vise en **#DIV/0!**-feilmelding, hvor det blir mer naturlig å gi forholdet samme verdi som nærliggende resultater enn 1,000.

¹Eksempel: Et forhold i ytterkanten hvor spenninger går mot null kan vise $\frac{\tau_{x'y'}}{\tau_{r\theta}} = \frac{0,1}{0,001} = 100$, men om resten av tabellen viser verdier som $\frac{100}{100} = 1,000$ blir det foregående forholdet å regnes som $\frac{0}{0}$ og blir ansett som 1,000.

Nedenfor følger en forklaring på de ulike kolonnene til tabellene:

y-koord Viser hvor i tverrsnittet spenningen er hentet.

Vinkel Viser hvilken vinkel θ spenningen er hentet fra.

- For *circular path* tilsvarer det $\sin^{-1} y/r$
- For *vertical path* tilsvarer det $\tan^{-1} y/x$

S11, S22, S12 Resultater gitt av Abaqus. Tilsvarer henholdsvis σ_x , σ_y og τ_{xy} .

Spenningstransformasjoner Resultatene fra Abaqus transformert med likninger 3.18, 3.19, 3.20 til $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ og $\tau_{x'y'}$ tilpasset vinkel θ .

Radielle spenninger Viser hva den radielle normalspenningen σ_r og skjærspenningen $\tau_{r\theta}$ blir i vinkel θ .

Forhold Sammenligner hvor godt overens de ulike metodene stemmer med hverandre.

- $\sigma_{x'}/\sigma_r$ sammenligner normalspenninga i rotert element (Abaqus) og den radielle normalspenninga (Trahair).
- $\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$ sammenligner skjærspenninga i rotert element (Abaqus) og den radielle skjærspenninga (Trahair).
- $(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_x$ sammenligner horisontal komponent til radiell spenning (Trahair) og normalspenningen med vanlig bjelketeori (EB).
- $(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$ sammenligner horisontal komponent til radiell spenning (Trahair) og S11 fra Abaqus.

Horisontale komponenter Den horisontale komponenten til radiell spenning med vinkel θ .

Klassisk bjelketeori Normalspenninger funnet med EB-bjelkelikninger.

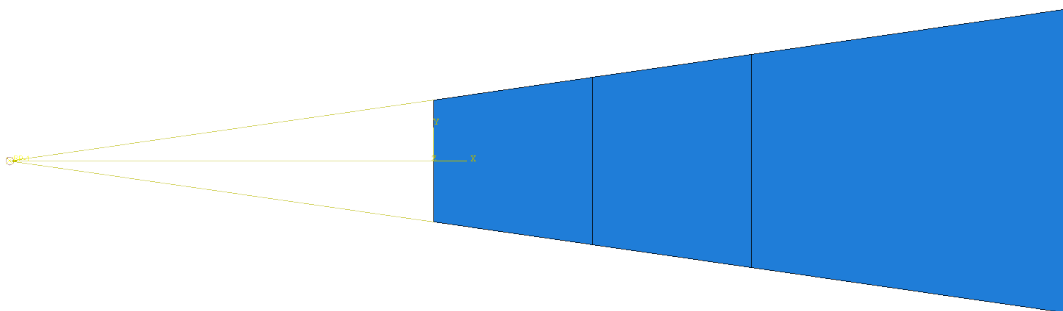
4.2 FEA-resultater for kiler

Videre presenteres resultatene for de ulike plane, todimensjonale kilene. Først ut er resultatene til kilen med samme dimensjoner som steget til Trahair. Denne kilen blir belyst ekstra godt, både fordi vi har resultater fra Trahair å gå etter, men også fordi det er unødvendig å presentere samme fremgangsmåte fire ganger. Deretter blir en kile som simulerer en reell bjelke lagt frem. Den “reelle” simuleringen består i å øke bjelkelengda L og minke vinkelen α , altså få den til å minne om noe som vi kan finne på ekte. Tilslutt blir to kiler med stor vinkel α vist. Poenget med disse er å teste hvordan kileteorien fungerer med økende vinkler.

Modelleringen blir gjort i Abaqus [8] med skallelementer. Lastene blir påført i planet som *Linear perturbation* (med ett steg) i et referansepunkt med distanse r_0 fra venstre ende. Lastene føres over hele tverrsnittet med en *Coupling constraint* hvor alle seks frihetsgradene er huket av. Alle modellene blir påført aksiallast (som trykk), skjærkraft og moment. Spenningene hentes deretter ut fra *paths* og eksporteres til Excel. Elementene blir modellert med fire noders rektangulære elementer, med redusert integrasjon (S4R). Diskretiseringen er noe ulik for de ulike kilene — som utgangspunkt har diskretiseringen stoppet når alle elementene har rektangulær form.

Typiske stålparametre er brukt for materialet: $E = 210\,000$ MPa og $\nu = 0,3$.

4.2.1 Wedge1 $\alpha = 8,2^\circ$



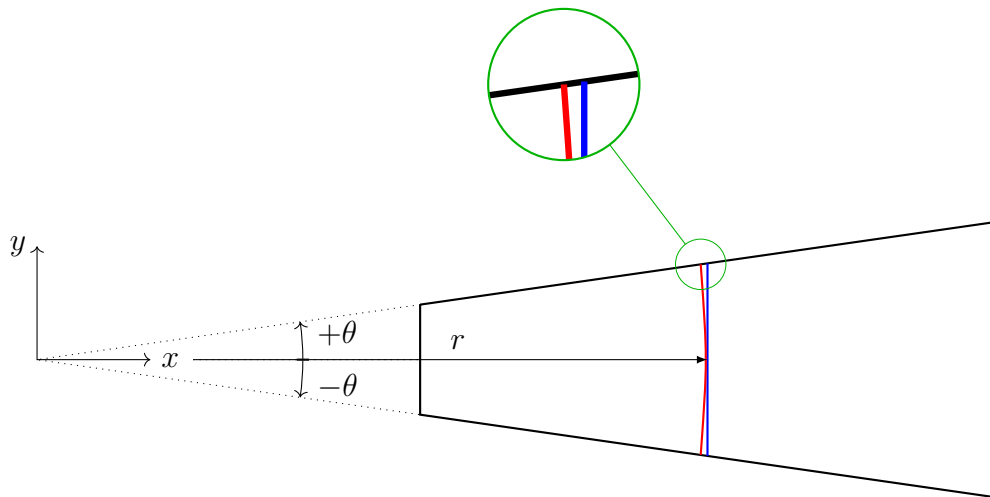
Figur 4.1 – *Wedge1* med *interaction* i Abaqus. De vertikale strekene er *partitions* som gjør meshen finere. De gule strekene er *Coupling constraints*.

Wedge1 skal simulere bjelken til Trahair, bare uten flensene. Tykkelsen er kun 1 mm og kilen blir modellert med skallelementer. Se under for dimensjonene til kilen.

$$\begin{aligned} L &= 152 \text{ mm} \\ \text{Starthøyde} &: 29,1 \text{ mm} \\ \text{Endehøyde} &: 72,76 \text{ mm} \\ \text{Høyde i midtsnittet} &: 50,93 \text{ mm} \\ r_0 &= 101,31 \text{ mm} \\ r &= 177,31 \text{ mm} \end{aligned}$$

Om vi definerer skjæringspunktet som origo, blir en *circular path* definert som en trepunkts bue med vinkelen $2\alpha = 16,34^\circ$ og radius $r = 177,31 \text{ mm}$. *Vertical path* blir definert som en loddrett strek i midtsnittet.

I ytterkantene er $\theta = \alpha$.



Figur 4.2 – *Wedge1* med *paths*. Rødt viser sirkulær *path*, blått viser vertikal *path*. Detaljen viser at distansen r må forlenges til den blå (vertikale) *path*en.

I skjæringspunktet får kilen påsatt aksial- og skjærkraft lik 10 000 N og moment lik 100 000 Nmm. Skjærkrafta vil også gi et tilleggsmoment lik $V \cdot x$. Siden lastene påføres *per enhet tykkelse* blir bidragene N/mm og Nmm/mm.

Circular path

Tabell 4.1 viser spenninger hentet fra Abaqus for tre punkter langs den sirkulære *path*en²:

²Spenningene til alle segmentene i buen finnes i Excel-arket “wedge1.xlsx” i Dropbox-mappa.

Tabell 4.1 – Wedge1 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koord er i mm, vinkel i grader og spenningene i MPa.

	y-koord	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	22,9	7,4	-194,3	-3,3	-25,4
	0,1	0,0	-198,9	-0,1	-0,1
	-22,8	-7,4	-194,3	-3,3	25,2
Skjær	22,9	7,4	-3720,2	-63,3	-485,1
	0,1	0,0	-12,2	0,0	0,0
	-22,8	-7,4	3697,4	62,1	-479,0
Moment	22,9	7,4	2096,5	28,1	244,4
	0,1	0,0	7,0	-0,1	-167,4
	-22,8	-7,4	-2084,3	-27,1	239,3

Med verdiene i tabell 4.1 kan spenningene transformeres til å gjelde for elementer vridt θ grader. Vi benytter likningene på side 23. Eksempelvis vil spenningene i elementet som ligger 22,9 mm fra nøytralaksen, for tilfellet med aksialkraft, gi disse spenningene når elementet vris $\theta = 7,4^\circ$:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'}^{aksial} &= \frac{-194,3 + (-3,3)}{2} + \frac{-194,3 - (-3,3)}{2} \cos(2 \cdot 7,4^\circ) + (-25,4) \sin(2 \cdot 7,4^\circ) = -197,6 \text{ MPa} \\ \sigma_{y'}^{aksial} &= \frac{-194,3 + (-3,3)}{2} - \frac{-194,3 - (-3,3)}{2} \cos(2 \cdot 7,4^\circ) - (-25,4) \sin(2 \cdot 7,4^\circ) = 0,0 \text{ MPa} \\ \tau_{x'y'}^{aksial} &= -\frac{-194,3 - (-3,3)}{2} \sin(2 \cdot 7,4^\circ) + (-25,4) \cos(2 \cdot 7,4^\circ) = -0,2 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Det er nødvendig å transformere spenningene på denne måten fordi Abaqus gir kun verdier i globale akser. De radielle spenningene σ_r tar alle utgangspunkt i skjæringspunktet som origo og sirkulær spredning (se kap. 3.25). Derfor må spenningene fra Abaqus transformeres for å sjekke om de gir samsvar med kileteorien.

Likeens vil kileteorien gi radielle normalspenninger (likn. 3.26) i et punkt med $\theta = 7,4^\circ = 0,130$ rad, distanse $r = 177,31$ mm og vinkel $\alpha = 8,2^\circ = 0,143$ rad:

$$\sigma_r^{aksial} = -\frac{2 \cdot 10\,000 \text{ N/mm} \cdot \cos 0,130 \text{ rad}}{177,31 \text{ mm}(2 \cdot 0,143 \text{ rad} + \sin(2 \cdot 0,143 \text{ rad}))} = -196,9 \text{ MPa}$$

Vi kan dermed sjekke om kileteorien gir fornuftige svar ved å kontrollere radielle spenninger mot transformerte Abaqusverdier. Det blir gjort ved å ta forholdet mellom dem: Et forhold på 1,000 viser at kileteorien og Abaqus gir like svar. Gunstigst resultat blir det om forholdet er rundt 1,000 over hele tverrsnittet³.

For eksempel vil de forrige utregnede verdiene gi et forhold på:

$$\frac{\sigma_{x'}^{aksial}}{\sigma_r^{aksial}} = \frac{-197,6}{-196,9} = 1,004$$

Ergo: 4 promille forskjell.

Tabell 4.2 viser forholdet mellom de teoretiske radielle spenningene, funnet med likning 3.26 og 3.27 og spenningstransformasjoner (likning 3.18, 3.19, 3.20).

Tabell 4.2 – Wedge1 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger i et punkt med vinkelen θ° . Spenningene er i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	7,4	-197,6	0,0	0,0	-197,4	—	1,001	—
	0,0	-198,9	-0,1	0,0	-199,0	—	0,999	—
	-7,4	-197,6	0,0	0,0	-197,4	—	1,001	—
Skjær	7,4	-3783,4	0,0	-0,1	-3782,9	—	1,000	—
	0,0	-12,2	0,0	0,0	-12,1	—	1,016	—
	-7,4	3759,5	0,0	-0,1	3759,0	—	1,000	—
Moment	7,4	2124,6	0,0	-28,9	2124,2	-29,0	1,000	0,995
	0,0	6,8	0,0	-167,4	6,8	-167,5	1,000	1,000
	-7,4	-2111,4	0,0	-30,6	-2111,0	-30,8	1,000	0,996

³Hvilken deviasjon som er godkjent og ikke, blir ikke nærmere drøftet i denne studien (utenom å poengtere åpenbare tilfeller som viser store forskjeller).

Vertical path

Som diskutert i kap. 3.6.3 er det lite hensiktsmessig for ingeniører å vite hvordan forholdet blir for sirkulære tverrsnitt. Vi trekker derfor en loddrett *path* gjennom modellen halvveis i bjelken og henter spenningene fra den.

Tabell 4.3 viser spenningene fra den vertikale *pathen* hentet fra Abaqus.

Tabell 4.3 – Wedge1 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus. y -koordinat er i mm, vinkel i grader og spenningene i MPa.

	y-koordinat	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	25,5	8,2	-191,5	-3,9	-27,2
	0,3	0,1	-198,9	-0,1	-0,4
	-25,5	-8,2	-191,5	-3,9	27,2
Skjær	25,5	8,2	-3996,0	-80,6	-567,6
	0,0	0,0	-0,2	0,0	0,0
	-25,5	-8,2	3996,0	80,6	-567,6
Moment	25,5	8,2	2219,1	43,8	311,8
	0,3	0,1	30,5	-0,6	-167,3
	-25,5	-8,2	-2219,1	-43,8	311,8

Siden kileteorien er avhengig av distansen r , blir det feil å regne radielle spenninger med radiusen gitt på side 46 i alle andre punkter enn langs nøytralaksen. Hvis man studerer figur 4.2 ser man at det er et lite stykke igjen fra det sirkulære snittet til det vertikale. Den korrekte distansen, gitt som $r(y)$, finner man ved å ta pytagoras av x - og y -koordinaten når skjæringspunktet defineres som origo. I tabell 4.4 blir den korrekte distansen r til ytterkantene (hvor $\theta = \alpha$) lik $\sqrt{177,31^2 + 25,47^2} = 179,13$ mm.

Tabell 4.4 viser transformerte Abaquspenninger og radielle spenninger for et vertikalt tverrsnitt, samt forholdet mellom dem.

Tilslutt blir klassiske bjelkelikninger sammenlignet med kileteorien. I denne studien blir det kun sett på forholdet mellom normalspenninger fra klassiske bjelkelikninger og horisontalkomponenten til radielle spenninger. For en ekstra kontroll sammenlignes også horisontalkomponenten med S11 fra Abaqus. Dette vises i tabell 4.5.

Tabell 4.4 – Wedge1 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkelen er i grader, spenningene i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	8,2	-195,4	0,0	0,3	-195,0	—	1,002	—
	0,1	-198,9	-0,1	0,0	-199,0	—	0,999	—
	-8,2	-195,4	0,0	-0,3	-195,0	—	1,002	—
Skjær	8,2	-4076,6	0,0	6,3	-4118,3	—	0,990	—
	0,0	-0,2	0,0	0,0	0,0	—	1,000	—
	-8,2	4076,6	0,0	6,3	4118,3	—	0,990	—
Moment	8,2	2262,9	0,0	-6,9	-2285,0	0,0	-0,990	1,000*
	0,1	29,9	0,0	-167,3	-29,9	-164,4	-1,000	0,999
	-8,2	-2262,9	0,0	-6,9	2285,0	0,0	-0,990	1,000*

* Egentlig “#####”.

Tabell 4.5 – Wedge1 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Horisontale komponenter	Klassisk bjelketeori	Forhold	
	θ	$\sigma_r \cdot \cos \theta$	σ_x	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_x$	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$
Aksial	8,2	-193,0	-196,3	0,983	1,008
	0,1	-199,0	-196,3	1,014	1,001
	-8,2	-193,0	-196,3	0,983	1,008
Skjær	8,2	-4076,5	-4101,5	0,994	1,020
	0,0	0,0	0,0	1,000*	1,000
	-8,2	4076,5	4101,5	0,994	1,020
Moment	8,2	-2261,8	-2313,2	0,978	-1,019
	0,1	-29,9	-29,0	1,029	-0,980
	-8,2	2261,8	2313,2	0,978	-1,019

* Egentlig “#DIV/0!”.

Videre vil resultatene fra de tre andre kilene bli presentert, men uten en like nøye gjennomgang. Fremgangsmåten vil være den samme som for *Wedge1*.

4.2.2 Wedge2 $\alpha = 1,9^\circ$

Denne kilen skal simulere en reell bjelke med fall $\alpha = 1,91^\circ$. Med en så lav vinkel vil den sirkulære *pathen* og den vertikale *pathen* være tilnærmet like.



Figur 4.3 – Wedge2 med *interaction* i Abaqus. Den vertikale streken er en *partition* som gjør meshen finere. De gule strekene er *Coupling constraints*.

I skjæringspunktet får kilen påsatt aksial- og skjærkraft lik $1E5$ N og moment lik $1E8$ Nmm. Skjærkrafta vil også gi et tilleggsmoment lik $V \cdot x$. Siden lastene påføres *per enhet tykkelse* blir bidragene N/mm og Nmm/mm.

Kilen har følgende dimensjoner:

- $L = 9000$ mm
- Starthøyde: 400 mm
- Endehøyde: 1000 mm
- Høyde i midtsnittet: 700 mm
- $r_0 = 6000$ mm
- $r = 10\,500$ mm

Circular path

Tabell 4.6 viser spenningene hentet fra Abaqus for tre punkt langs den sirkulære *pathen*.

Tabell 4.6 – Wedge2 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koordinat er i mm, vinkel i grader og spenningene i MPa.

	y-koordinat	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	326,5	1,8	-142,8	-0,1	-4,3
	-2,0	0,0	-143,0	0,0	0,0
	-307,1	-1,7	-142,8	-0,1	4,3
Skjær	326,5	1,8	-11508,8	-10,4	-343,3
	-2,0	0,0	72,3	-0,3	-5,2
	-330,6	-1,8	11581,0	10,3	-346,9
Moment	326,5	1,8	1101,8	0,8	29,1
	-2,0	0,0	-7,2	0,0	-20,1
	-330,6	-1,8	-1108,9	-0,8	29,7

Tabell 4.7 – Wedge2 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenningene i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	1,8	-142,9	0,0	0,2	-142,9	—	1,000	—
	0,0	-143,0	0,0	0,0	-143,0	—	1,000	—
	-1,7	-142,9	0,0	0,1	-142,9	—	1,000	—
Skjær	1,8	-11519,0	-0,2	14,7	-12009,9	—	0,959	—
	0,0	72,3	-0,3	-5,2	74,7	—	0,969	—
	-1,8	11591,3	-0,1	17,9	12159,2	—	0,953	—
Moment	1,8	1102,6	0,0	-5,1	1143,5	-2,6	0,964	1,955
	0,0	-7,1	0,0	-20,1	-7,1	-20,4	1,005	0,982
	-1,8	-1109,7	0,0	-5,2	-1157,7	-2,2	0,959	2,372

Vertical path

Tabell 4.8 – Wedge2 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koordinat er i mm, vinkel i grader og spenningene i MPa.

	y-koordinat	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	350,0	1,9	-142,7	-0,1	-4,4
	0,0	0,0	-143,0	0,0	0,0
	-350,0	-1,9	-142,7	-0,1	4,4
Skjær	350,0	1,9	-11932,8	-11,4	-367,5
	-26,9	-0,1	993,4	-0,3	-5,1
	-350,0	-1,9	11930,4	11,1	-366,7
Moment	350,0	1,9	1141,5	0,9	32,6
	0,0	0,0	0,0	0,0	-20,1
	-350,0	-1,9	-1141,5	-0,9	32,6

I det vertikale snittet vil r variere lineært fra $r(y = 0) = 10\,500$ mm til $r(y = \frac{h_{midt}}{2} = 350) = 10\,505,83$ mm.

Tabell 4.9 – Wedge2 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenningene i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel θ	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
		$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	1,9	-142,8	0,0	0,3	-142,8	—	1,000	—
	0,0	-143,0	0,0	0,0	-143,0	—	1,000	—
	-1,9	-142,8	0,0	0,3	-142,8	—	1,000	—
Skjær	1,9	-11944,1	-0,2	30,3	-12860,0	—	0,929	—
	-0,1	993,4	-0,3	-2,5	990,3	—	1,003	—
	-1,9	11941,6	0,0	30,9	12860,0	—	0,929	—
Moment	1,9	1142,4	0,0	-5,4	1223,7	0,0	0,934	1,000*
	0,0	0,0	0,0	-20,1	0,0	-20,4	1,000*	0,985
	-1,9	-1142,4	0,0	-5,4	-1223,7	0,0	0,934	1,000*

* Egentlig “#DIV/0!”.

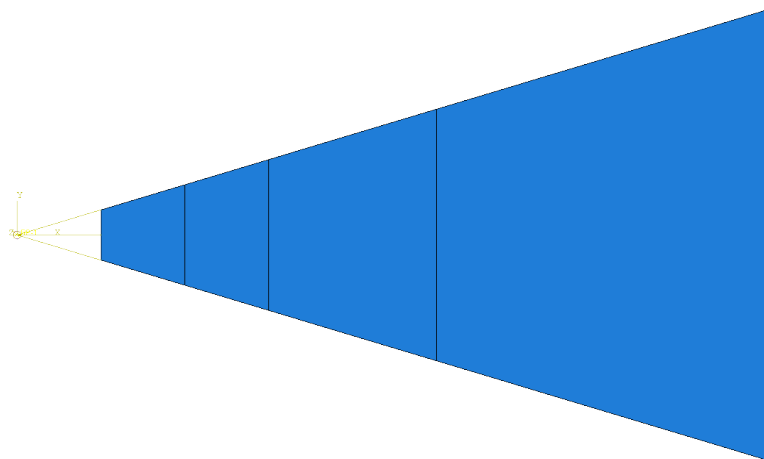
Tabell 4.10 – Wedge2 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Horisontale komponenter	Klassisk bjelketeori	Forhold	
	θ	$\sigma_r \cdot \cos \theta$	σ_x	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_x$	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$
Aksial	1,9	-142,7	-142,9	0,999	1,000
	0,0	-143,0	-142,9	1,001	1,000
	-1,9	-142,7	-142,9	0,999	1,000
Skjær	1,9	-12852,9	-12857,1	1,000	1,077
	-0,1	990,3	989,0	1,001	0,997
	-1,9	12852,9	12857,1	1,000	1,077
Moment	1,9	1223,0	-1224,5	-0,999	1,071
	0,0	0,0	0,0	1,000*	1,000*
	-1,9	-1223,0	1224,5	-0,999	1,071

* Egentlig “#DIV/0!”.

4.2.3 Wedge3 $\alpha = 16,7^\circ$

Denne kilen skal simulere en teoretisk bjelke med fall $\alpha = 16,70^\circ$.



Figur 4.4 – Wedge3 med *interaction* i Abaqus. De vertikale strekene er *partitions* som gjør meshen finere. De gule strekene er *Coupling constraints*.

I skjæringspunktet får kilen påsatt aksial- og skjærkraft lik $1E4$ N og moment lik $1E6$ Nmm. Skjærkrafta vil også gi et tilleggsmoment lik $V \cdot x$. Siden lastene påføres *per enhet tykkelse* blir bidragene N/mm og Nmm/mm.

Kilen har følgende dimensjoner:

$L = 400$ mm
 Starthøyde: 30 mm
 Endehøyde: 270 mm
 Høyde i midtsnittet: 150 mm
 $r_0 = 50$ mm
 $r = 250$ mm

Circular path

Tabell 4.11 viser spenningene hentet fra Abaqus for tre punkt langs den sirkulære *pathen*.

Tabell 4.11 – Wedge3 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koord er i mm, vinkel i grader og spenningene i MPa.

	y-koord	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	71,84	16,7	-62,85	-5,35	-18,34
	0,0	0,0	-70,5	0,1	0,0
	-71,8	-16,7	-62,9	-5,3	18,3
Skjær	71,84	16,7	-638,07	-54,24	-186,04
	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
	-71,8	-16,7	638,0	54,2	-186,0
Moment	71,84	16,7	250,95	20,12	71,06
	0,0	0,0	0,0	0,0	-41,3
	-71,8	-16,7	-250,9	-20,1	71,1

Tabell 4.12 – Wedge3 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenningene i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	16,7	-68,2	0,0	0,5	-67,6	—	1,009	—
	0,0	-70,5	0,1	0,0	-70,6	—	0,998	—
	-16,7	-68,2	0,0	-0,5	-67,6	—	1,009	—
Skjær	16,7	-692,3	0,0	5,4	-708,3	—	0,977	—
	0,0	0,1	0,0	0,0	0,3	—	0,229*	—
	-16,7	692,2	0,0	5,4	708,3	—	0,977	—
Moment	16,7	271,0	0,1	-4,2	276,1	0,0	0,982	1,000**
	0,0	0,0	0,0	-41,3	-0,1	-41,4	0,153*	0,997
	-16,7	-271,0	-0,1	-4,2	-276,1	0,0	0,982	1,000**

* Forholdet er relativt sett som å dele to tilnærmet like verdier på hverandre, som egentlig blir 1,000.

** En mindre singularitet. Viser egentlig et forhold på over 3000. Diskutert på side 43.

Vertical path

Tabell 4.13 – Wedge3 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koord er i mm, vinkel i grader og spenninger i MPa.

	y-koord	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	75,0	16,7	-60,2	-5,1	-17,6
	0,0	0,0	-70,5	0,1	0,0
	-75	-16,7	-60,2	-5,1	17,6
Skjær	75,0	16,7	-611,3	-52,0	-178,2
	0,0	0,0	-0,2	0,0	0,0
	-75	-16,7	611,2	52,0	-178,2
Moment	75,0	16,7	230,2	18,5	65,2
	0,0	0,0	0,1	0,0	-41,3
	-75,0	-16,7	-230,2	-18,5	65,2

I det vertikale snittet vil r variere lineært fra $r(y = 0) = 250$ mm til $r(y = \frac{h_{midt}}{2} = 75) = 261,01$ mm.

Tabell 4.14 – Wedge3 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	16,7	-65,4	0,0	0,5	-64,8	—	1,009	—
	0,0	-70,5	0,1	0,0	-70,6	—	0,998	—
	-16,7	-65,4	0,0	-0,5	-64,8	—	1,009	—
Skjær	16,7	-663,2	0,0	5,1	-678,4	—	0,978	—
	0,0	-0,2	0,0	0,0	0,0	—	1,000*	—
	-16,7	663,1	0,0	5,1	678,4	—	0,977	—
Moment	16,7	248,6	0,1	-3,9	253,3	0,0	0,982	1,000*
	0,0	0,1	0,0	-41,3	0,0	-41,4	1,000*	0,997
	-16,7	-248,6	-0,1	-3,9	-253,3	0,0	0,982	1,000*

* Egentlig “#DIV/0!”.

Tabell 4.15 – Wedge3 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

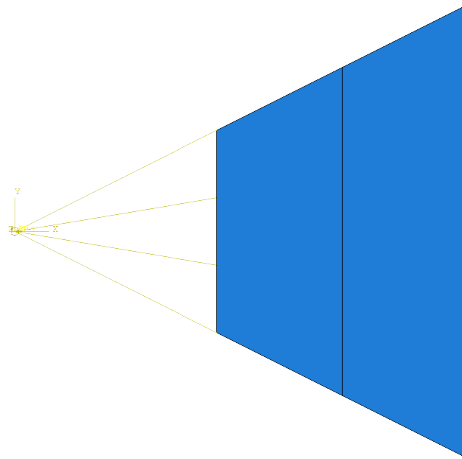
	Vinkel	Horisontale komponenter	Klassisk bjelketeori	Forhold	
	θ	$\sigma_r \cdot \cos \theta$	σ_x	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_x$	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$
Aksial	16,7	-62,0	-66,7	0,930	1,030
	0,0	-70,6	-66,7	1,059	1,002
	-16,7	-62,0	-66,7	0,930	1,030
Skjær	16,7	-649,8	-666,7	0,975	1,063
	0,0	0,0	0,0	1,000*	1,000**
	-16,7	649,8	666,7	0,975	1,063
Moment	16,7	242,6	-266,7	-0,910	1,054
	0,0	0,0	0,0	1,000*	1,000**
	-16,7	-242,6	266,7	-0,910	1,054

* Egentlig “#DIV/0!”.

** Egentlig 0,000.

4.2.4 Wedge4 $\alpha = 26,6^\circ$

Denne kilen skal simulere en teoretisk bjelke med fall $\alpha = 26,57^\circ$.



Figur 4.5 – Wedge4 med *interaction* i Abaqus. Den vertikale streken er en *partition* som gjør meshen finere. De gule strekene er *Coupling constraints*.

I skjæringspunktet får kilen påsatt aksial- og skjærkraft lik $1E5$ N og moment lik $1E7$ Nmm. Skjærkrafta vil også gi et tilleggsmoment lik $V \cdot x$. Siden lastene påføres *per enhet tykkelse* blir bidragene N/mm og Nmm/mm.

Kilen har følgende dimensjoner:

- $L = 500$ mm
- Starthøyde: 400 mm
- Endehøyde: 900 mm
- Høyde i midtsnittet: 650 mm
- $r_0 = 400$ mm
- $r = 650$ mm

Circular path

Tabell 4.16 viser spenningene hentet fra Abaqus for tre punkt langs den sirkulære *pathen*.

Tabell 4.16 – Wedge4 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koordinat er i mm, vinkel i grader og spenninger i MPa.

	y-koordinat	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	290,7	26,6	-113,1	-26,7	-55,0
	0,0	0,0	-184,8	11,3	0,0
	-279,9	-25,5	-117,0	-24,0	53,2
Skjær	290,7	26,6	-886,4	-215,8	-437,3
	0,0	0,0	0,0	0,0	-3,7
	-279,9	-25,5	868,1	198,2	-414,9
Moment	290,7	26,6	123,7	29,0	59,9
	0,0	0,0	0,0	0,0	-33,5
	-279,9	-25,5	-123,9	-25,0	55,7

Tabell 4.17 – Wedge4 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel θ	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
		$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	26,6	-139,8	0,0	1,6	-159,3	—	0,877	—
	0,0	-184,8	11,3	0,0	-178,1	—	1,038	—
	-25,5	-141,1	0,0	-2,7	-160,8	—	0,878	—
Skjær	26,6	-1102,1	0,0	5,8	-1081,0	—	1,020	—
	0,0	0,0	0,0	-3,7	0,0	—	0,900	—
	-25,5	1066,4	-0,1	-0,7	1040,8	—	1,025	—
Moment	26,6	152,7	0,0	-1,9	155,4	0,0	0,982	1,000*
	0,0	0,0	0,0	-33,5	0,0	-38,9	1,013	0,862
	-25,5	-148,9	0,0	-3,4	-151,0	-2,8	0,986	1,199

* En mindre singularitet. Viser et forhold på over 6000. Diskutert på side 43.

Vertical path

Tabell 4.18 – Wedge4 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koordinat er i mm, vinkel i grader og spenninger i MPa.

	y-koordinat	Vinkel	S11 (σ_x)	S22 (σ_y)	S12 (τ_{xy})
Aksial	325,0	26,6	-87,8	-20,3	-42,3
	0,0	0,0	-184,8	11,3	0,0
	-325	-26,6	-87,8	-20,3	42,3
Skjær	325,0	26,6	-789,2	-190,4	-387,8
	0,0	0,0	0,0	0,0	-3,7
	-325,0	-26,6	789,2	190,4	-387,8
Moment	325,0	26,6	95,6	22,3	46,2
	0,0	0,0	0,1	0,0	-33,5
	-325,0	-26,6	-95,6	-22,3	46,2

I det vertikale snittet vil r variere lineært fra $r(y = 0) = 650$ mm til $r(y = \frac{h_{midt}}{2} = 325) = 726,72$ mm.

Tabell 4.19 – Wedge4 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel θ	Spenningstransformasjoner			Radielle spenninger		Forhold	
		$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	26,6	-108,2	0,0	1,6	-142,5	—	0,759	—
	0,0	-184,8	11,3	0,0	-178,1	—	1,038	—
	-26,6	-108,2	0,0	-1,6	-142,5	—	0,759	—
Skjær	26,6	-979,7	0,1	6,8	-966,9	—	1,013	—
	0,0	0,0	0,0	-3,7	0,0	—	0,900*	—
	-26,6	979,7	-0,1	6,8	966,9	—	1,013	—
Moment	26,6	117,9	0,0	-1,7	124,4	0,0	0,948	1,422*
	0,0	0,0	0,0	-33,5	0,0	-38,9	1,013*	0,862
	-26,6	-117,9	0,0	-1,7	-124,4	0,0	0,948	1,422*

* Egentlig “#DIV/0!”, men forholdet settes lik det verdiene rett før og rett etter viser.

Tabell 4.20 – Wedge4 - Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Horisontale komponenter	Klassisk bjelketeori	Forhold	
	θ	$\sigma_r \cdot \cos \theta$	σ_x	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_x$	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$
Aksial	26,6	-127,5	-153,8	0,829	1,451
	0,0	-178,1	-153,8	1,158	0,964
	-26,6	-127,5	-153,8	0,829	1,451
Skjær	26,6	-864,8	-923,1	0,937	1,096
	0,0	0,0	0,0	1,000*	1,000*
	-26,6	864,8	923,1	0,937	1,096
Moment	26,6	111,2	142,0	0,783	1,163
	0,0	0,0	0,0	1,000*	1,000*
	-26,6	-111,2	-142,0	0,783	1,163

* Egentlig “#DIV/0!”.

4.3 FEA-simulering av I-bjelke med varierende bjelkehøyde

Trahair og Ansourian [3] gjør et eksempel med teorien og sammenligner den med et elementmetodeprogram. De bruker en bjelke med lengde $L = 152 \text{ mm}^4$. Tverrsnittene gitt i rapporten ses i tabell 4.21 og resultatene vises i tabell 4.22. *Section 1* er venstre ende og *Section 2* er høyre ende. Spenningene hentes fra midtspennet i bjelken.

Vær obs på at tabell 4.21 er den samme som **Table 1** gitt i [3]. Her oppgir de r som horisontalavstand fra skjæringspunktet (“*apex zone*”) til vertikalsnittet, og setter det lik 177,31 mm til *Section 2*. Hvis *Section 2* skal være høyre ende, kan den umulig ha horisontalavstand lik $r_0 + \frac{L}{2} = 101,31 + \frac{152}{2} = 177,31 \text{ mm}$. Det tilsier at *Section 2* ligger midt i bjelken, noe den ikke gjør. Utregning side 63 beviser dette. Korrekt r blir $r_0 + L = 253,31 \text{ mm}$, se figur 4.6.

⁴Grunnen til at Trahair legger bjelkelengden så kort er for at “*significant shear effects and end stress concentrations may occur*” [3, 4].

Tabell 4.21 – Tverrsnittsdimensjoner brukt av Trahair og Ansourian.

Beskrivelse	Notasjon (mm)	Snitt 1	Snitt 2
Horisontal distanse fra skjæringspunkt til snitt	r	101,31	253,31
Flensbredde	b_f	31,55	31,55
Steghøyde	b_w	29,10	72,76
Flenstykkelse	t_f	3,11	3,11
Stegtykkelse	t_w	2,13	2,13

Tabell 4.22 viser spenningene Trahair og Ansourian kom fram til. *TBA* er forkortelse for *Tapered Beam Analysis* og er beregninger etter Trahair og Ansourians “kileteori”. *FEA* står for *Finite Element Analysis* og er utført i FEM-programmet Strand7 [17].

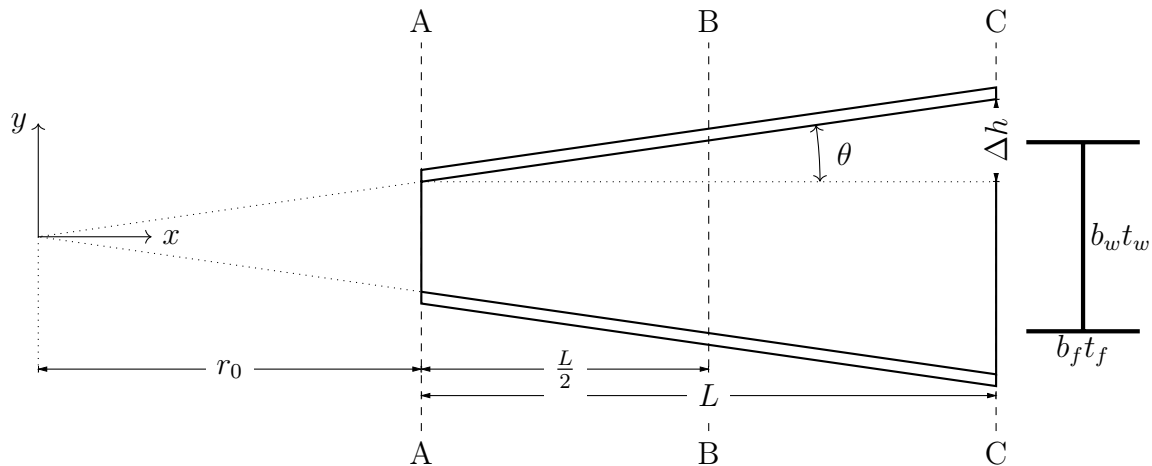
Underindeksene “c” og “α” gjenspeiler henholdsvis *senter* og *topp-/bunnpunkt* (altså hvor steget og flensen møtes).

Tabell 4.22 – Resultater funnet av Trahair og Ansourian.

Figur	Belastning	Analyse	σ_{zc} (N/mm ²)	$\sigma_{z\alpha}$ (N/mm ²)	τ_{yzc} (N/mm ²)	$\tau_{yz\alpha}$ (N/mm ²)
3.21a	$N = -10^4$ N	TBA	-32,8	-33,0	0	-1,7
		FEA	-33,5	-33,1	0	-1,6
3.21b	$V = -10^4$ N	TBA	0	297	6,0	30,5
		FEA	0	297	6,4	28,0
3.21c	$M = 10^6$ Nmm	TBA	0	180	-54,5	-24,9
		FEA	0	177	-52,7	-25,0

Samme bjelke brukt av Trahair og Ansourian [3] blir brukt til modellering i Abaqus. Lengda er $L = 152$ mm og Δh er her gitt som halve differansen mellom steghøyden til tverrsnitt A–A og C–C. Bruker Δh for å finne flensvinkelen θ , som er nødvendig for å finne distansen r_0 . r_0 er lengda fra bjelkens venstre kant til *ytterpunktet* (“*apex zone*”) hvor lastene påføres.

Tverrsnitt A–A er bjelkestart og med lavest tverrsnittshøyde (*Section 1*), B–B er midt i bjelkespenet (der hvor spenningene hentes) og C–C er bjelkeenden (*Section 2*). Tabell 4.23 viser tverrsnittsdimensjonene og likning(er) 4.1 viser utregning for Δh , θ og r_0 .



Figur 4.6 – Bjelke brukt til eksempelregning.

Flenstykkelsen t_f , flensbredden b_f og stegtykkelsen t_w er konstant, mens steghøyden b_w øker lineært.

Tabell 4.23 – Tverrsnittsdimensjoner til figur 4.6.

Tverrsnitt	t_f [mm]	b_f [mm]	t_w [mm]	b_w [mm]
A - A	3,11	31,55	2,13	29,10
B - B	—————	"	—————	50,93
C - C	—————	"	—————	72,76

$$\Delta h = \frac{72,76 - 29,10}{2} = 21,83 \text{ mm}$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta h}{L} \implies \theta = 0,143 \text{ rad} \quad (4.1)$$

$$r_0 = \frac{29,10 \cdot \frac{1}{2}}{\tan 0,143 \text{ rad}} = 101,31 \text{ mm}$$

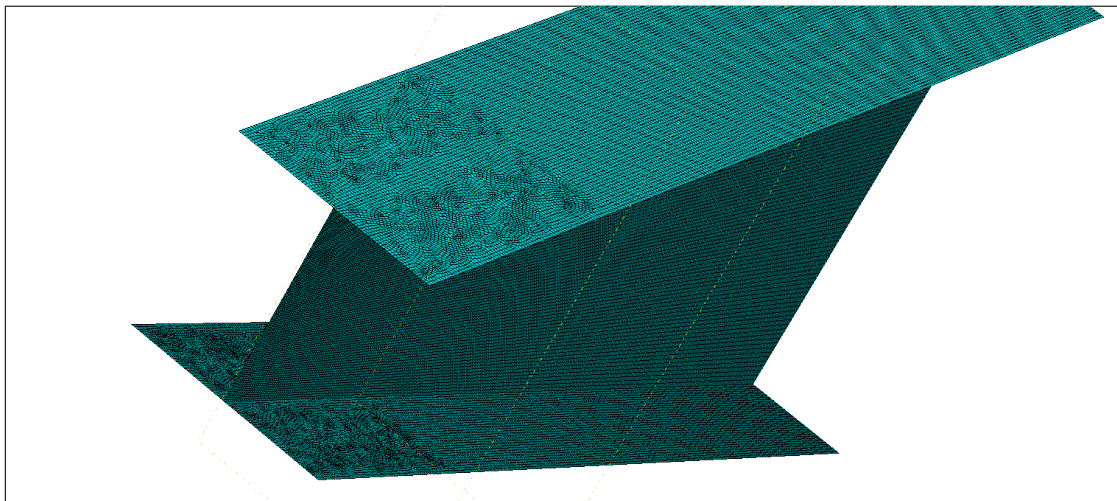
4.4 FEA-resultater for I-bjelke med varierende bjelkehøyde

Bjelken til Trahair er modellert opp i Abaqus. Se vedlegg C for utførelsen. Boksen på neste side viser antall noder og elementer samt elementype generert i Abaqus.

Total number of nodes: 70432
Total number of elements: 70063
69741 linear quadrilateral elements of type S4R
322 linear triangular elements of type S3
Average shape factor: 0.938636

Med tanke på bjelke­dimensjonen blir resultatet en ganske fin mesh. Elementene ble uniforme og fine overalt utenom øvre og nedre flens på venstre kant. Figur 4.7 viser en detalj av meshmodellen hvor vi også kan se hvor diskretiseringen ikke var like fin.

Lastene er påført 101,31 mm fra venstre ende. Følger vi retningene til fibrene i steget er dette hvor skjæringspunktet ligger (forklart i figur 3.18b). Lastene blir påført med *coupling constraint* av kinematisk type: Alle 6 frihetsgrader er huket av (tre stivlegemebevegelser og tre rotasjonsbevegelser). Dette gjør at lastene virker over hele tverrsnittet og ikke kun ett punkt. Høyre ende har randbetingelse *X-Symm*, det vil si at Abaqus har speilet en identisk bjelke om høyre ende. Ved å bruke *X-Symm* lar Abaqus fibrene i bjelken få spre seg utover (skulle bjelken vært innspent ville fibrene vært fastlåst). Eneste tillegget er for tilfellet med skjærkraft: Da ble midtnoden på høyre kant leddet ($U1 = U2 = U3 = 0$). Uten dette tillegget ville bjelken bare fått en stivlegemebevegelse (altså bare dyttet i all evighet oppover). SLB unngår vi for aksialkraft og moment fordi *X-Symm* også speiler lastene.



Figur 4.7 – Detalj av meshen til bjelke med to skrå flenser. Meshen til flensene på enden nærmest er ikke like god som til resten av bjelken. Figuren viser ikke flens- og stegtykkelsen.

Artikkelen [3] nevner ikke hvilke materialparametre som er brukt. I denne Abaqus-simuleringen brukes typiske stålverdier: $E = 210\,000$ MPa og $\nu = 0,3$.

Tabell 4.24 viser resultatene oppsummert for de ulike lasttilfellene. S11 er spenningene Abaqus gir i lengderetning (= normalspenninger) og S12 er spenningene i tverretning av elementene (= skjærspenning). Underindeksen “c” og “ α ” gjenspeiler henholdsvis *senter* og *topp-/bunnpunkt* (hvor flensvinkelen er størst (tilsvarer θ i figur 4.6)).

Tabell 4.24 – Spenninger fra Abaqus.

Last	S11 _c [MPa]	S11 _{α} [MPa]	S12 _c [MPa]	S12 _{α} [MPa]
$N = -1E4$ N	-33,3	-33,1	0	-1,7
$V = -1E4$ N	0	295,9	6,2	30,9
$M = 1E6$ Nmm	0	174,4	-52,7	-24,5

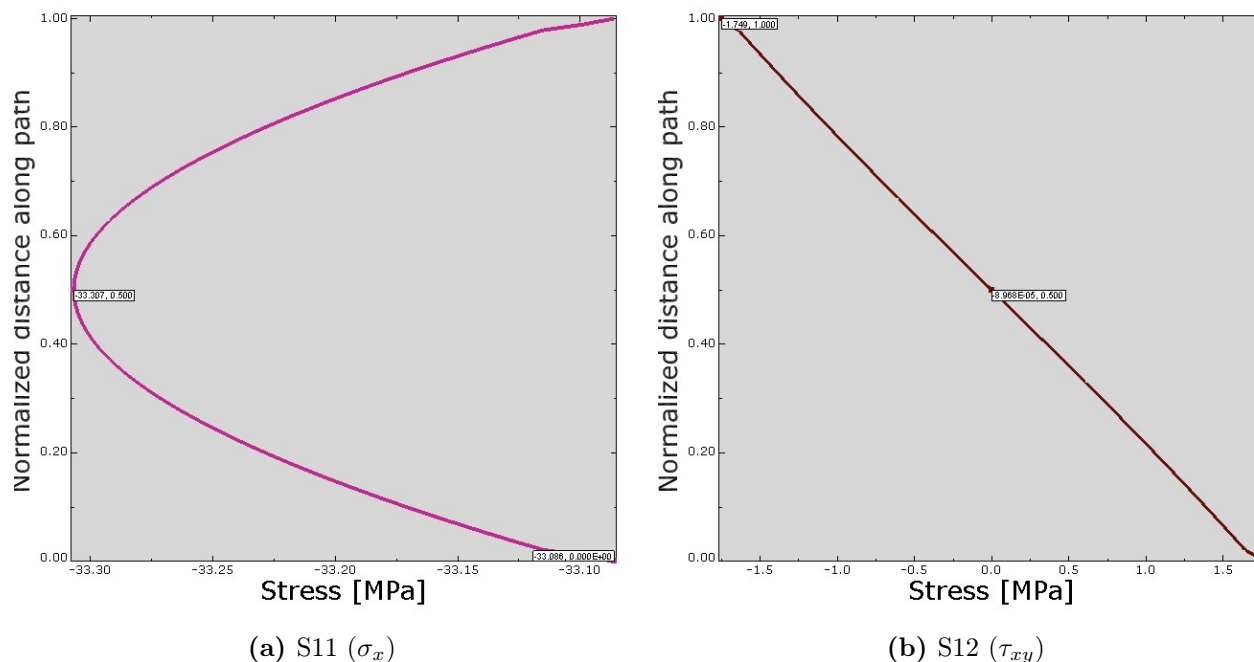
Videre følger XY-plot laget av Abaqus. Spenningene er funnet i midtspennet av bjelken ved å definere en *path* langs tverrsnitthøyden. Spenningene er plottet langs *Normalized distance along path*. Det vil si at *y*-aksen i plottene er gitt som en proporsjon hvor 0 er overgangspunktet mellom steg og flens i bunn, og 1 er overgangspunktet mellom steg og flens i topp. $\frac{1}{2}$ er midt i tverrsnittshøyden. Det vil altså si at spenningsfordelingen vises over **stegplata**.

4.4.1 Spenningsforløp grunnet aksialkraft

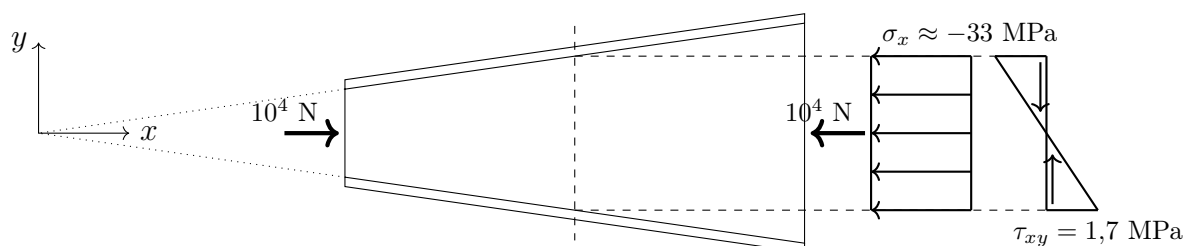
Ei trykkraft på 10^4 N påføres bjelken som *Linear perturbation* i en distanse $r_0 = 101,31$ mm fra venstre ende. Punktlasta fordeles over hele tverrsnittet med *Coupling constraint*. Bjelken får en symmetrisk randbetingelse på motsatt ende. Normal- og skjærspenninger (S11 og S12) hentes fra midtsnittet.

Normalspenningene S11 vist i figur 4.8a er parabelformet, men med ekstremalverdi -33,3 MPa og endeverdi -33,1 MPa er de i bunn og grunn like store — og diagrammet kan i all praksis tegnes som en rett strek (som σ_z vist i figur 3.21a). Skjærspenningene S12 opptrer lineært, med 0 MPa midt i steget. Akkurat likt τ_{yz} i figur 3.21a.

Figur 4.8 viser plottene hentet fra Abaqus. Figur 4.9 viser spenningene tegnet over tverrsnittet.



Figur 4.8 – Abaqus: Spenningsforløp over tverrsnittshøyden grunnet aksialkraft. Verdiene ses i første rad i tab. 4.24.



Figur 4.9 – Spenningsforløpet grunnet aksialkraft tegnet over bjelken.

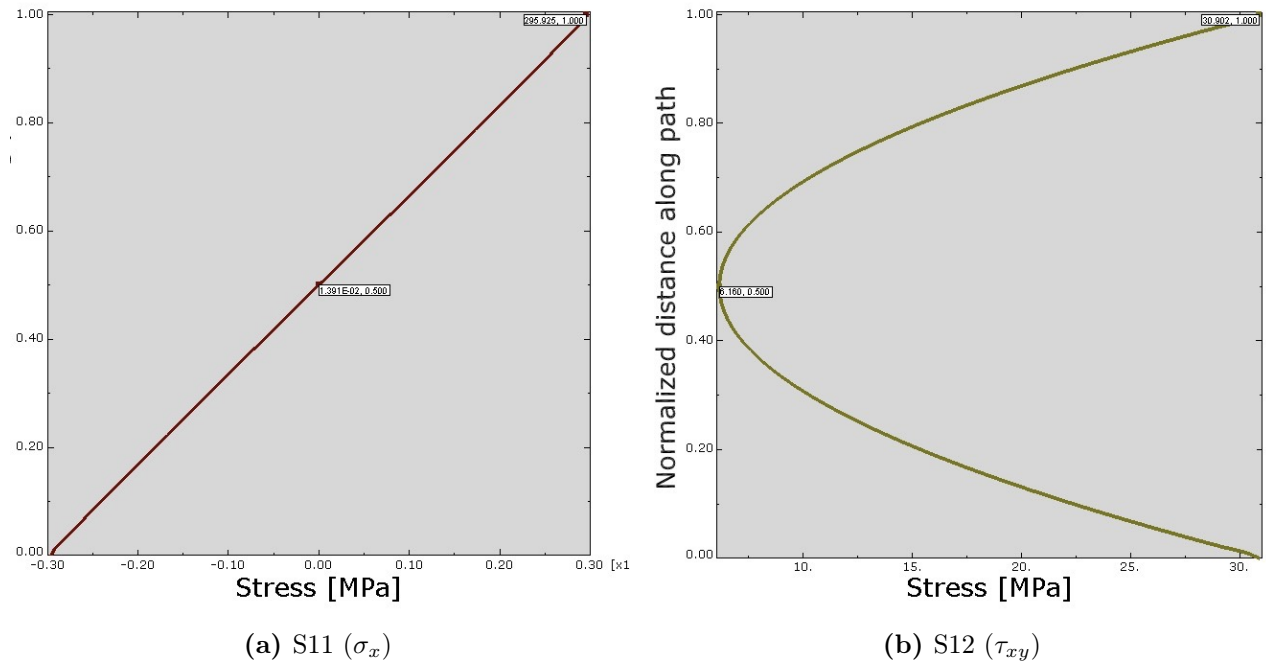
4.4.2 Spenningsforløp grunnet skjærkraft

Ei skjærkraft på 10^4 N påføres bjelken som *Linear perturbation* i en distanse $r_0 = 101,31$ mm fra venstre ende. Punktlasta fordeles over hele tverrsnittet med *Coupling constraint*. Skjærkrafta vil i tillegg lage et moment lik $V \cdot x$. Bjelken får to randbetingelser på motsatt ende: Én symmetrisk over hele tverrsnittet, og én node midt i randen leddes. Normal- og skjærspenninger (S11 og S12) hentes fra midtsnittet.

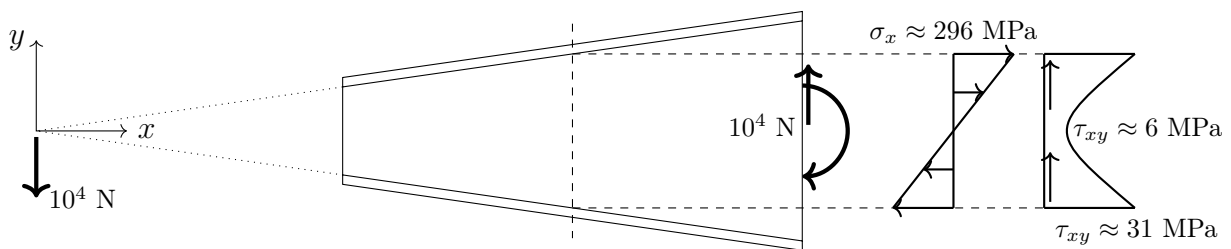
Normalspenningene S11 vist i figur 4.10a er lineære. Det stemmer overens med σ_z

vist i figur 3.21b. Skjærspenningene S12 er parabelformet med ekstremalverdi i midten - Akkurat slik τ_{yz} i figur 3.21b opptrer.

Figur 4.10 viser plottene hentet fra Abaqus. Figur 4.11 viser spenningene tegnet over tverrsnittet.



Figur 4.10 – Abaqus: Spenningsforløp over tverrsnittshøyden grunnet skjærkraft. Verdiene ses i andre rad i tab. 4.24.



Figur 4.11 – Spenningsforløpet grunnet skjærkraft tegnet over bjelken.

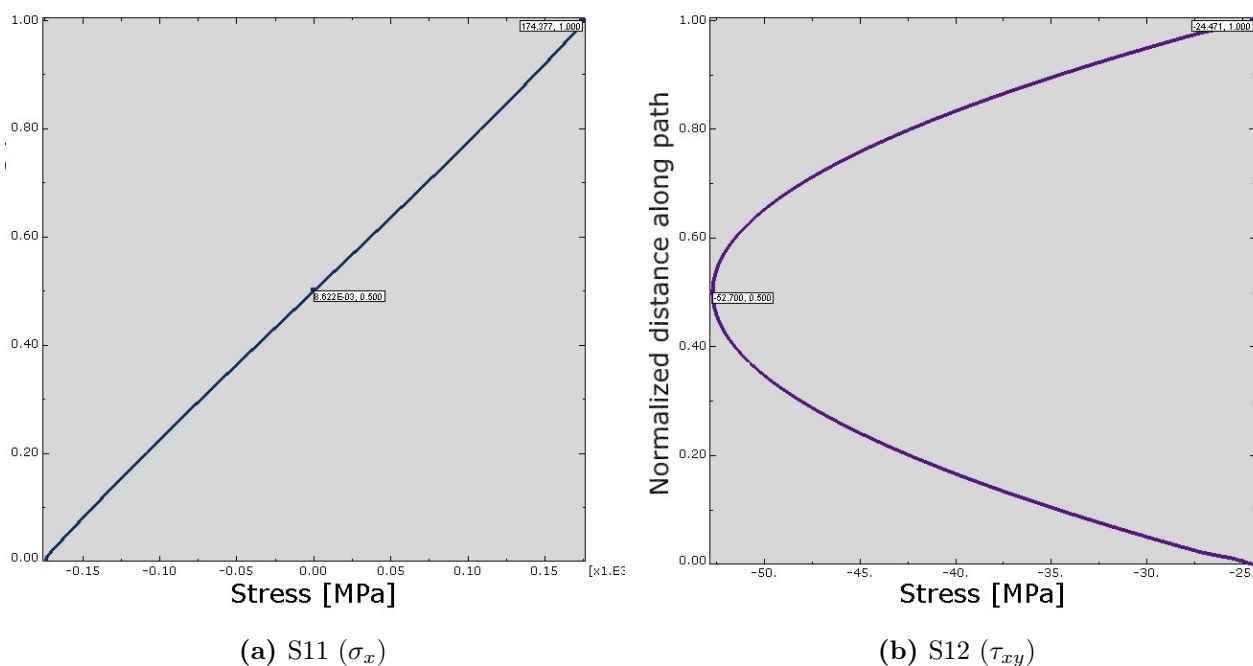
4.4.3 Spenningsforløp grunnet moment

Et moment på 10^6 Nmm påføres bjelken som *Linear perturbation* i en distanse $r_0 = 101,31$ mm fra venstre ende. Momentet fordeles over hele tverrsnittet med

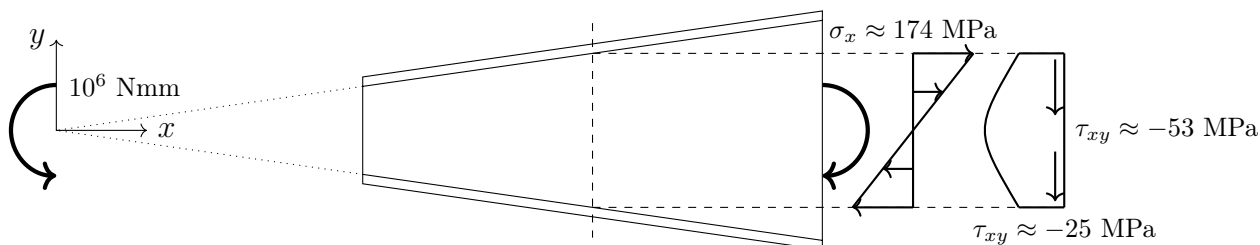
Coupling constraint. Bjelken får en symmetrisk randbetingelse på motsatt ende. Normal- og skjærspenninger (S11 og S12) hentes fra midtsnittet.

S11 gitt av moment er lineær. S12 er parabelformet med ekstremalverdi i midten. Både S11 og S12 kan anses som å opptre likt som σ_z og τ_{yz} i figur 3.21c.

Figur 4.12 viser plottene hentet fra Abaqus. Figur 4.13 viser spenningene tegnet over tverrsnittet.



Figur 4.12 – Abaqus: Spenningsforløp over tverrsnittshøyden grunnet moment. Verdiene ses i tredje rad i tab. 4.24.



Figur 4.13 – Spenningsforløpet grunnet moment tegnet over bjelken.

4.5 Håndberegning av I-bjelke med varierende bjelkehøyde

Håndberegningene er gjort i PTC Mathcad Prime 3.1. Formlene kommer fra “Appendix A. Bending and compression analysis (TBA)” og “Appendix B. Shear stress analysis (TBA)” i Trahairs artikkel [3]. Formlene er tidligere diskutert på side 32. Mathcad-filene finnes i Dropbox-fila, med en pdf-versjon i tillegg.

Flensvinkelen α er gitt som $8,2^\circ$ eller som $0,143$ radianer.

Steghøyden kan beskrives som en funksjon av x :

$$b_w(x) = 2x \tan \alpha \quad (4.2)$$

Høyden i midtsnittet blir dermed:

$$b_w(177,31 \text{ mm}) = 2 \cdot 177,31 \text{ mm} \cdot \tan(0,143 \text{ rad}) = 50,93 \text{ mm}$$

Bruker likning 3.32 og 3.33 for å finne tverrsnittsarealet og annet arealmoment:

$$A = 2 \cdot 31,55 \text{ mm} \cdot 3,11 \text{ mm} + 50,93 \text{ mm} \cdot 2,13 \text{ mm} = 304,73 \text{ mm}^2$$

$$I_z = \frac{31,55 \cdot 3,11 \cdot 50,93^2}{2} + \frac{50,93^3 \cdot 2,13}{12} = 150\,704,39 \text{ mm}^4$$

Vinkelen θ tilsvarer forholdet mellom y og x , hvor y og x er koordinatene til punktet vi ønsker spenningene til. Distansen x vil alltid være den samme til midtsnittet. θ vil derfor bli en funksjon av y :

$$\theta(y) \approx \frac{y}{x} \quad (4.3)$$

Ved flensene er $\theta = \alpha$.

Radielle normal- og skjærspenninger bestemmes av likn. 3.35 og 3.36.

Både arealet og annet arealmoment er avhengig av tverrsnittshøyden (likning 4.2) og kan deriveres på x .

For ordens skyld:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx} &= 2t_w \tan \alpha = 2 \cdot 2,13 \cdot \tan(0,143 \text{ rad}) = 0,61 \text{ (mm)} \\ \frac{dI_z}{dx} &= 4b_f t_f x \tan^2 \alpha + 2x^2 \tan^3 \alpha t_w \\ &= 4 \cdot 31,55 \cdot 3,11 \cdot 177,31 \cdot \tan^2(0,143 \text{ rad}) + 2 \cdot 177,31^2 \cdot \tan^3(0,143 \text{ rad}) \cdot 2,11 \\ &= 1832,1 \text{ (mm}^3\text{)}\end{aligned}$$

Videre vil utregninger med bruk av likningene i kapittel 3.6.2 vises. En diskusjon av resultatene blir gjort i kapittel 5.2.

4.5.1 Aksialkraft

En aksialkraft virker langs nøytralaksen til bjelken. Det oppstår ingen rotasjonsmoment eller skjærkraft.

$$\begin{aligned}N &= -10\,000 \text{ N} \\ V &= 0 \text{ N} \\ M &= 0 \text{ Nmm}\end{aligned}$$

Den radielle skjærspenningsfaktoren (likning 3.38) modifiseres til:

$$k = 1 - \frac{x}{I_z} \frac{dI_z}{dx}$$

Og med parametrene regnet ut tidligere gir det:

$$k = 1 - \frac{177,31 \text{ mm}}{150\,704,39 \text{ mm}^4} \cdot 1832,1 \text{ mm}^3 = -1,2$$

Skjærspenningsvariablene fra likning 3.37 gir:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha n} &= -\frac{-10000 \text{ N} \cdot 31,55 \text{ mm} \cdot 3,11 \text{ mm}}{(304,73 \text{ mm}^2)^2 \cdot 2,13 \text{ mm}} \cdot 0,61 \text{ mm} = 3,03 \text{ MPa} \\ \tau_{0m} &\stackrel{M=0}{=} \stackrel{N_{mm}}{=} 0 \text{ MPa} \\ \tau_{\alpha m} &\stackrel{M=0}{=} \stackrel{N_{mm}}{=} 0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Likning 3.35 gir $\sigma_r = -32,8$ MPa over hele tverrsnittet, mens likning 3.36 gir lineær $\tau_{r\theta}$ fra -3,1 til 3,1 MPa langs $y \in [-\frac{b_w}{2}, \frac{b_w}{2}]$.

Tilslutt finner man normalspenningene i x -retning fordelt over tverrsnittet, $\sigma_x(y)$, med likn. 3.30 og skjærspenningene fordelt over tverrsnittet, $\tau_{xy}(y)$, med likn. 3.31.

$$\begin{aligned}\sigma_x(25,47) &= -33 \text{ MPa} & \sigma_x(0) &= -32,8 \text{ MPa} \\ \tau_{xy}(25,47) &= -1,7 \text{ MPa} & \tau_{xy}(0) &= -0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

4.5.2 Skjærkraft

En skjærkraft virker med eksentrisiteten $r = 101,31$ mm fra venstre ende. Kraften gir et moment lik $V \cdot x$, hvor $x = 177,31$ mm.

$$\begin{aligned}N &= 0 \text{ N} \\ V &= 10\,000 \text{ N} \\ M &= V \cdot x = 1\,773\,100 \text{ Nmm}\end{aligned}$$

Vi bruker hele faktor k og får:

$$k = 1 + \frac{177,31 \text{ mm}}{1\,773\,100 \text{ Nmm}}(10\,000 \text{ N}) - \frac{177,31 \text{ mm}}{150\,704,6 \text{ mm}^4} \cdot 1832,1 \text{ mm}^3 = -0,2$$

Skjærspenningsvariablene blir:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha n} &\stackrel{N=0 \text{ N}}{=} 0 \text{ MPa} \\ \tau_{0m} &= \frac{1\,773\,100 \cdot 177,31 \cdot 0,143^2 \cdot (-0,2 + 1)}{150\,704,39} \left(1 + \frac{2 \cdot 31,55 \cdot 3,11}{50,93 \cdot 2,13} \frac{-0,2}{-0,2 + 1} \right) = 23,9 \text{ MPa} \\ \tau_{\alpha m} &= \frac{1\,773\,100 \cdot 0,143 \cdot 31,55 \cdot 3,11 \cdot (-0,2)}{2,13 \cdot 150\,704,39} = -12 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Både σ_r og $\tau_{r\theta}$ vil variere som en funksjon av y . Det samme vil σ_x og τ_{xy} . Ser vi på topp ($y = 25,47$) og senterpunkt ($y = 0$) vil likn. 3.30 og 3.31 bli:

$$\begin{aligned}\sigma_x(25,47) &= 297,1 \text{ MPa} & \sigma_x(0) &= 0 \text{ MPa} \\ \tau_{xy}(25,47) &= 30,5 \text{ MPa} & \tau_{xy}(0) &= 23,9 \text{ MPa}\end{aligned}$$

4.5.3 Moment

Et moment er påsatt 101,31 mm fra venstre ende. Det virker ingen aksialkraft, eller skjærkraft utenom den som oppstår fra momentet. Leddet $\frac{dM}{dx}$ i likning 3.38 settes lik 0.

$$\begin{aligned} N &= 0 \text{ N} \\ V &= 0 \text{ N} \\ M &= 1\,000\,000 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Faktoren k blir:

$$k = 1 + 0 - \frac{177,31 \text{ mm}}{150\,704,6 \text{ mm}^4} \cdot 1832,1 \text{ mm}^3 = -1,2$$

Skjærspenningsvariablene blir:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha n} &\stackrel{N=0}{=} 0 \text{ MPa} \\ \tau_{0m} &= \frac{1\,000\,000 \cdot 177,31 \cdot 0,143^2 \cdot (-1,2 + 1)}{150\,704,39} \left(1 + \frac{2 \cdot 31,55 \cdot 3,11}{50,93 \cdot 2,13} \frac{-1,2}{-1,2 + 1} \right) = -53,8 \text{ MPa} \\ \tau_{\alpha m} &= \frac{1\,000\,000 \cdot 0,143 \cdot 31,55 \cdot 3,11 \cdot (-1,2)}{2,13 \cdot 150\,704,39} = -50,4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Når vi ser på σ_x (likn. 3.30) og τ_{xy} (likn. 3.31) i topp og senter vil de bli:

$$\begin{aligned} \sigma_x(25,47) &= 179,8 \text{ MPa} & \sigma_x(0) &= 0 \text{ MPa} \\ \tau_{xy}(25,47) &= -26,1 \text{ MPa} & \tau_{xy}(0) &= -53,8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

4.6 Oppsummering av resultatkapittelet

For å kunne kontrollere kileteorien lages fire ulike kiler. Kilene har til hensikt å teste tre ting: De skal (a) kontrolleres opp mot resultatene til Trahair, (b) simulere en *reell* bjelke og (c) teste kileteorien med økende vinkler. Det er mulig å diskutere hvorvidt de to siste eksemplene egentlig er bjelker, eller om de er skiver som lastes i planet, men den diskusjonen blir ikke tatt her.

Kilene modelleres i Abaqus som skallelementer. Lastene påføres som *Static, Linear perturbation* i et referansepunkt som ligger r_0 fra den smalleste enden. For å sørge for at lastene virker over hele tverrsnittet blir lastene påført med en *Coupling constraint* hvor alle seks frihetsgrader er huket av. På motsatt ende får kilene en *X-Symm*-randbetingelse. Denne randbetingelsen “modellerer” en lik modell på motsatt side, med samme krefter. I tilfellet for skjærkraft får modellen også én node leddet (for å unngå SLB).

Spenningsene generert i Abaqus blir hentet gjennom *paths* og eksportert til Excel. To *paths* defineres over steget: Én buet med skjæringspunktet som origo og radius r , samt én loddrett i midtsnittet.

I Excel blir verdiene transformert og sammenlignet med radielle spenninger (σ_r og $\tau_{r\theta}$). For både det sirkulære og det vertikale tverrsnittet er vi interessert i å sjekke de transformerte Abaqusspenningene mot de radielle fra kileteorien. I tillegg sjekkes det hvordan kileteorien stemmer overens med klassiske bjelkelikninger. Dette gjøres ved å se på dekomponert horisontalspenning av radiell normalspenning, mot normalspenninger fra kjente EB-likninger. Et forholdstallet mellom de ulike metodene på 1,000 viser at de gir samme resultat. Større avvik unna 1,000 viser at metodene ikke gir like svar. På denne måten er det mulig å luke ut hvor transformerte spenninger fra Abaqus, kileteori og standardisert bjelket teori skiller lag.

Tilslutt blir samme bjelke som Trahair [3] beskriver modellert i Abaqus og beregnet med modifiserte bjelkelikninger gitt av Trahair.

Kapittel 5

DISKUSJON

5.1 Tolkning av kileresultater

Basert på resultatene i tabellene i forrige kapittel, kan vi tolke om kileteorien til Trahair [3] stemmer. Vi bruker likninger gitt av Trahair som avhenger av en distanse r , en fibervinkel θ og vinkel til kanten α og sammenligner dem med resultater fra Abaqus [8]. Om kileteorien og Abaqus samsvarer forsterker det at antagelsene til kileteorien er korrekte. Videre blir kileteorien sammenlignet med klassiske EB-likninger. Det ønsker vi å gjøre for å sjekke i hvilke vinkelgrader EB-likninger kan brukes for kiler med belastning i planet.

5.1.1 Diskusjon om forholdstallene

Ved å se på forholdstallet $\sigma_{x'}/\sigma_r$ og $\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$ er det mulig å se hvor godt likningene til kileteorien stemmer. $\sigma_{x'}$ og $\tau_{x'y'}$ er transformerte spenninger fra Abaqus (de transformeres til å virke likt σ_r og $\tau_{r\theta}$), mens σ_r og $\tau_{r\theta}$ er gitt fra artikkelen til Trahair [3]. Med forholdstallene er det mulig å kontrollere om Abaqus og kileteorien gir like svar: Et forholdstall på 1,000 viser nettopp det.

Vi betrakter to typer tverrsnitt: Et sirkulært med radius r , samt et vertikalt i midten av bjelken (se figur 3.22, side 35). Begge tverrsnittstypene har like koordinater i nøytralaksen ($\implies (x, y)_{\text{NA}} = (r_0 + \frac{L}{2}, 0)$).

Siden kileteorien tar utgangspunkt i at spenningene brer seg radielt ut fra kontaktpunktet (se kap. 3.5.1), ser vi først på det sirkulære tverrsnittet. Etter det belyses forholdet for vertikale tverrsnitt — tross alt blir bjelker dimensjonert ved tverrsnitt som er strake, og det er dermed mest interessant i et ingeniørmessig perspektiv å se på dette.

Videre blir kileteorien sammenlignet med klassiske bjelkelikninger. Vi gjør det ved å se på forholdstallet mellom horisontalkomponenten til radiell normalspenning ($\sigma_r \cos \theta$) og normalspenningen σ_x som vi finner fra klassiske bjelkelikninger (se likninger i kap. 3.2.1). Dette forholdet blir kun belyst for vertikale tverrsnitt.

Det blir ikke gjort en nærmere diskusjon i denne rapporten om hvilken avvikspersent som er god nok (og ikke).

Totalt er det er fire kiler som blir sett på i denne studien:

- Én får samme dimensjoner som steget i artikkelen til Trahair. Dette gjør vi for å sjekke om resultatene til fremgangsmåten i denne studien gir like svar som resultatene til Trahair.

Wedge1: $\alpha = 8,2^\circ$

- En annen kile blir modellert for å simulere en reell bjelke. Dette gjøres ved å øke bjelkelengden L og minke fallet α .

Wedge2: $\alpha = 1,9^\circ$

- To andre kiler blir modellert med økende vinkler for å teste teorien til ytterpunktet.

Wedge3: $\alpha = 16,7^\circ$

Wedge4: $\alpha = 26,6^\circ$

Vi ser at for kilene med mindre vinkler ($\leq 8,2^\circ$) viser forholdstallene tilfredsstillende resultat over hele spekteret. Som vist i tabell 4.2 stemmer Abaqus og Trahair godt overens i sirkulært tverrsnitt for kiler med flensvinkel $\alpha = 8,2^\circ$. Det samme gjør det for kilen med mindre vinkel, her brukt $\alpha = 1,9^\circ$, som vist i tabell 4.7. For kilen med vinkel $8,2^\circ$ belastet med aksialkraft viser normalspenningsforholdet for sirkulært tverrsnitt kun \pm én promille unna nøyaktig likt resultat og for skjærkraft er spenningsformasjonen 16 ‰ større i senter, mens for moment er kileteorien rundt 5 ‰ mindre i kantene for skjærspenninger.

Når vi sammenligner horisontale komponenter til kileteorien med klassisk bjelketeori for *Wedge1* og *Wedge2* holder forholdet seg også rundt 1,000 over hele tverrsnittet. Dog er klassisk bjelketeori noe større i kantene og noe mindre i senter enn kileteorien, som vist i tabell 4.5 for den første kilen og i tabell 4.10 for den andre.

For kiler med flensvinkel $\alpha = 16,7^\circ$ er forholdet mellom Abaqus og Trahair fortsatt tilfredsstillende, både for tverrsnitt som tas sirkulært og vertikalt. Særlig for normalspenninger fra aksialkraft viser tabell 4.12 og 4.14 at Abaqus og kileteorien gir tilfredsstillende resultat (kun 9 ‰ forskjell i kantene og 2 ‰ i senter for begge tverrsnittene). Det samme rapporteres fra skjærbelastningen og momentet: Spenningsformasjonen og radielle spenninger gir så og si like resultat fra topp til bunn.

Forholdet mellom de horisontale spenningene viser igjen at klassisk bjelketeori er større i kantene enn kileteorien. Når $\alpha = 16,7^\circ$ blir forskjellen 7 % for aksialkraft, 2,5 % for skjærkraft og 9 % for moment. Se tabell 4.15.

I det fjerde tilfellet er det *lite* som kan sies å være tilfredsstillende. $\sigma_{x'}/\sigma_r$ holder seg på omkring ± 5 % avvik for aksialkraft frem til rundt 15° . Det samme forholdet holder seg også på samme avvik over hele tverrsnittet for moment, men ikke for skjærkraft. Forholdet bommer totalt for $\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$. Nøyaktig samme oppførsel ser vi for det vertikale tverrsnittet, i tillegg ser vi at horisontalkomponenten til radielle normalspenninger og klassiske bjelkelikninger aldri gir noe konsekvent svar (kun spredning, og aldri noe likt forhold). Se *wedge4.xlsx* i Dropbox for spredningen.

Forholdstallene forteller oss dermed at for kiler med vinkel $\alpha < 15^\circ$ vil spenningene som *faktisk* opptrer (ergo: radiell spenning) ikke være særlig ulik spenninger vi regner ut med klassiske bjelkelikninger. Forskjellene blir derimot så betydelige for kiler når α kommer opp til $26,6^\circ$, at det ikke er mulig å trekke noen beslutninger om hva som er korrekt, og ikke.

En oppsummering av forholdstallene finnes i tabell 5.1 side 90.

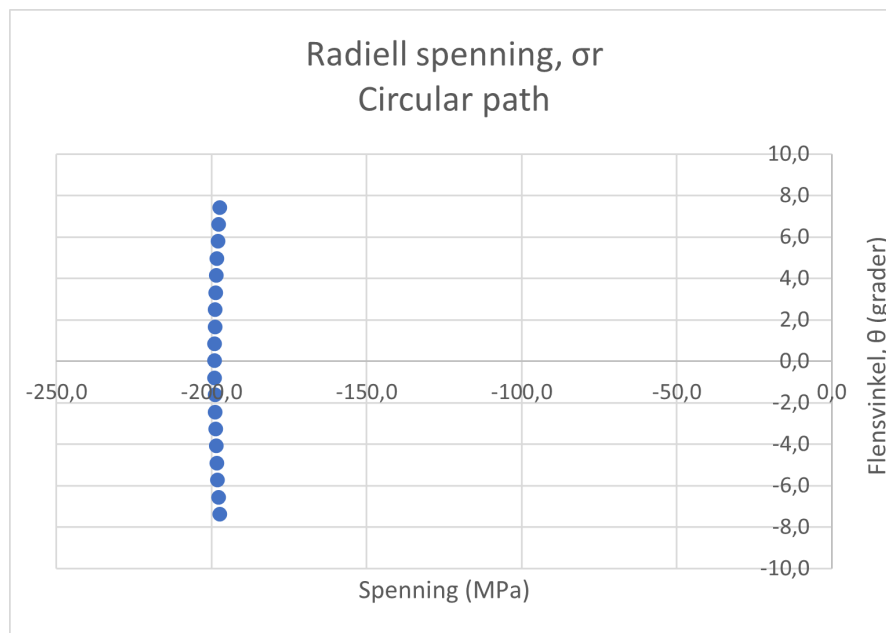
5.1.2 Diskusjon om påstander

I artikkelen [3] legger Trahair frem enkelte påstander for todimensjonale kiler belastet i planet.

En av påstandene for kiler utsatt for aksialkraft var:

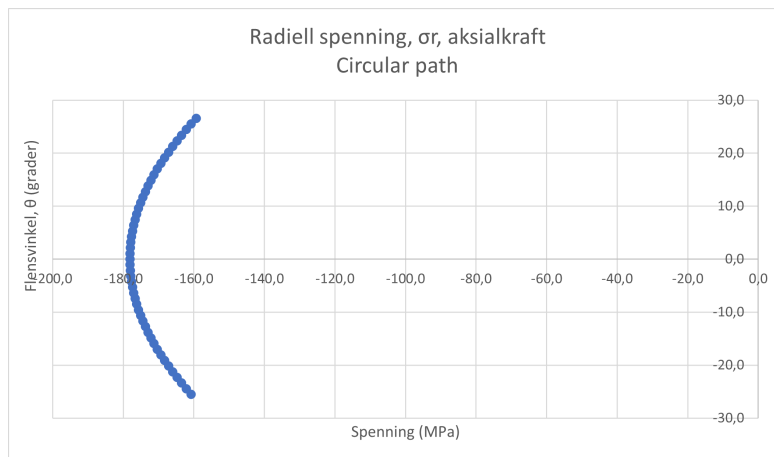
“The radial stresses vary with the angle θ from the axis, but are nearly uniform for wedges with small taper angles α .”

Ved å plotte σ_r -spenningene til *Wedge1* mot θ -vinklene, ser vi tydelig at verdiene gir tilnærmet en loddrett strek når vinkelen på kilen α er $8,2^\circ$. Plottet er gitt i figur 5.1 og flere av verdiene finnes i tabell F.2.



Figur 5.1 – Radiale normalspenninger fra aksialkraft plottet for *Wedge1* over *circular path*.

Når vi plottes σ_r -spenningene for kiler med større vinkler ser vi klart at de radiale normalspenningene er avhengig av vinkelen θ . Her vist i figur 5.2 for *Wedge4* ($\alpha = 26,6^\circ$) over sirkulært tverrsnitt.

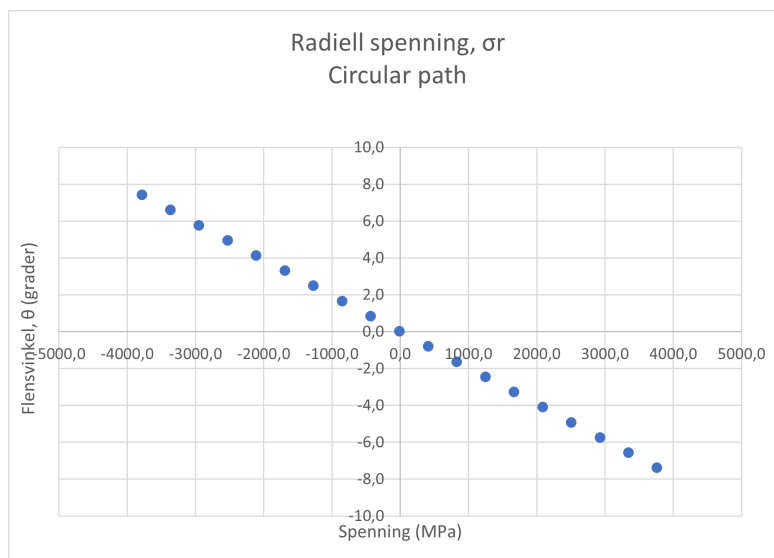


Figur 5.2 – Radielle normalspenninger fra aksialkraft plottet for *Wedge4* over *circular path*.

En annen av påstandene var at normalspenningene for kiler med liten flensvinkel utsatt for skjærkraft vil variere lineært:

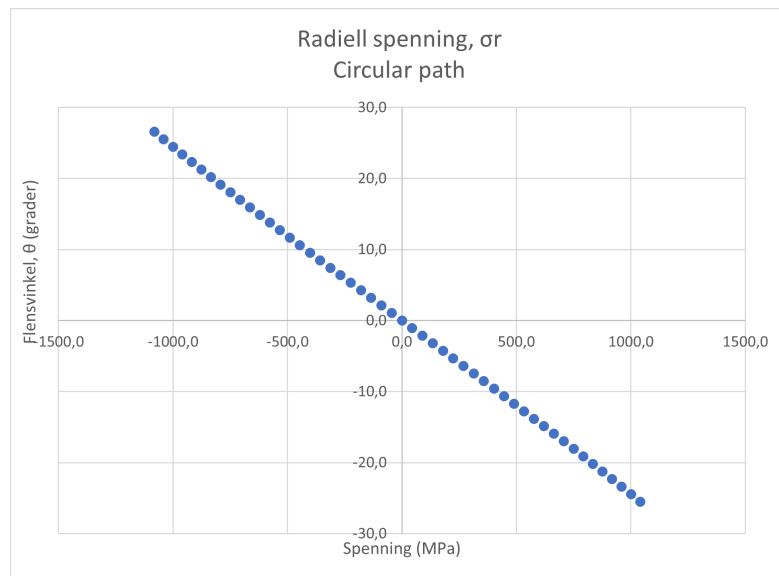
“The variation of these stresses with the angle θ is nearly linear for small taper angles α .”

Dette ser vi ved å plote normalspenningene σ_r for *Wedge1* ($\alpha = 8,2^\circ$), vist i figur 5.3.



Figur 5.3 – Radielle normalspenninger fra skjærkraft plottet for *Wedge1* over *circular path*.

Men den samme tendensen ser vi selv for kiler med større flensvinkel, her vist med *Wedge4* ($\alpha = 26,6^\circ$) i figur 5.4.



Figur 5.4 – Radielle normalspenninger fra skjærkraft plottet for *Wedge4* over *circular path*.

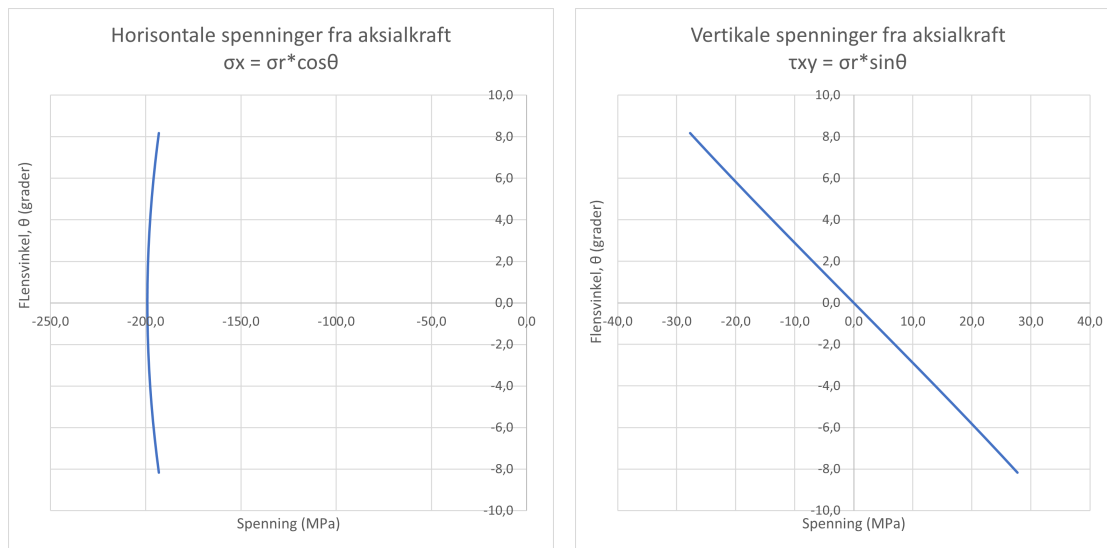
5.1.3 Diskusjon om resultater for *Wedge1*

Vi ønsker å betrakte spenningene som oppstår i et vertikalt snitt og sammenligne kileteorien med klassiske EB-likninger. Denne studien sammenligner kun spenninger i horisontalretning.

Spenninger fra aksialkraft

Radiell kileteori vil spre spenningene utover snittet, med større spenninger i midten og lavere på kantene. I motsetning fordeler EB-likning 3.4 spenningene likt over tverrsnittet. Det vi kan se i tabell 4.5 er at horisontalkomponentene fra kileteorien gir, ved aksialkraft, 1,7 % lavere resultat på kanten enn klassisk bjelketeori. I midten 1,4 % større.

I figur 5.5 plottes dekomponerte spenninger fra kileteorien når kilen utsettes for aksialkraft lik 10^4 N i planet. Sammenlignet med figur 3.20a ser vi at horisontal- og vertikalbidragene fra den radielle spenningen gir forventede diagram. Det vil si: Normalspenningen σ_x er tilnærmet uniform og skjærspenningen τ_{xy} er lineær.



(a) Spenning i horisontalretning

(b) Spenning i vertikalretning

Figur 5.5 – Spenninger i horisontal- og vertikalretning fra aksialkraft for *Wedge1*.

Spenninger fra skjærkraft

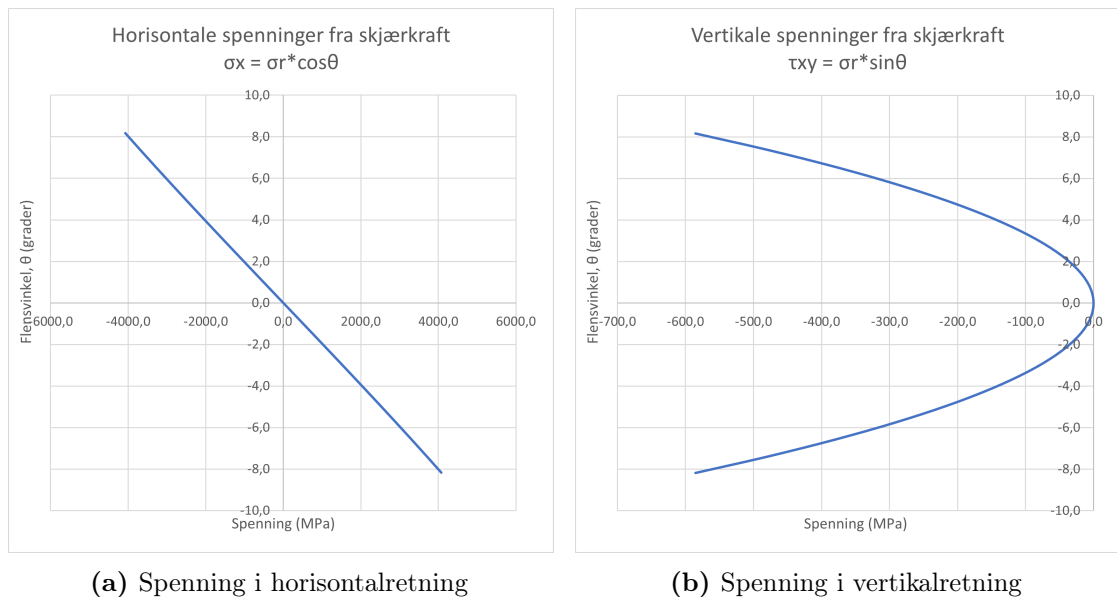
I tilfellet hvor kilen får påsatt skjærkrafta $V = 10^4$ N på tuppen, er det kun radielle normalspenninger σ_r som oppstår. Bidragene i horisontal- og vertikalretning blir dermed kun trigonometriske verdier. Når vi betrakter de dekomponerte spenningene og sammenligner dem med klassiske bjelkelikninger (EB), ser vi i tabell 4.5 at de dekomponerte spenningene gir i horisontal retning 6 ‰ lavere resultat på kanten og 2,4 ‰ høyere i midten.

Siden skjærkrafta gir momentet $V \cdot x$, er EB-likningen i bruk likn. 3.6:

$$\sigma_x = \frac{Vx}{I_z}y \quad \text{hvor } I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

... hvor x er distansen fra skjæringspunktet til snittet og y distansen fra horisontalen til punktet. Husk at kilen er 1 mm tykk (altså er $b = 1$).

I figur 5.6 plottes dekomponerte normalspenninger fra skjærkraft. Sammenlignet med figur 3.20b ser vi at horisontal- og vertikalkomponent gir forventede diagram, som vil si: Normalspenningen σ_x er lineær og skjærspenningen τ_{xy} er parabolisk med null i midten og maksverdier på kantene.



Figur 5.6 – Spenninger i horisontal- og vertikalretning fra skjærkraft for *Wedge1*.

For en bjelke med uniformt tverrsnitt vil skjærspenningene oppføre seg som i figur 3.2: Parabolsk utforming med null skjær i kantene og normalt 1,5 ganger gjennomsnitt i ekstremalpunktet ($\tau_{max} = 1,5 \frac{V}{A}$).

Som vi ser i figur 5.6b vil skjærspenningene for kiler også være parabolske, men denne gangen med null MPa i midten og maks på kantene. Regner vi på det, ser vi at maksimal skjærspenning er hele 3 ganger større i kantene enn gjennomsnittlig!

$$\tau_{gj.snitt} = \frac{V}{A} = \frac{10^4 \text{ N}}{50,93 \text{ mm}^2} = 196,35 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{gj.snitt}} = \frac{585,50}{196,35} = 2,98 \approx 3,00$$

Det stemmer altså som Trahair skriver:

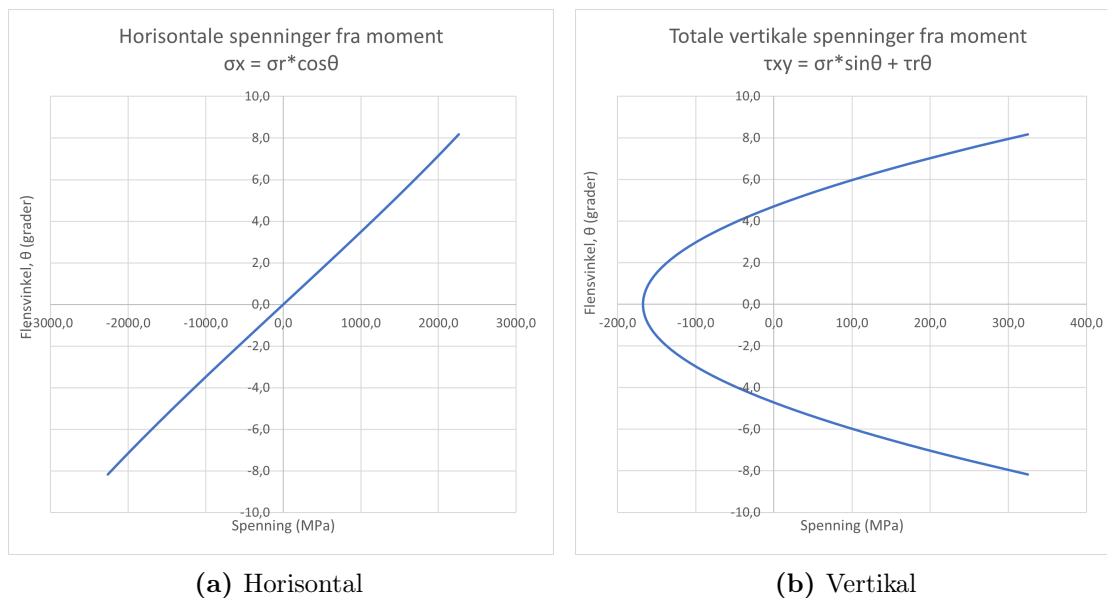
“For the wedge, the shear stress τ_{yz} variation is also parabolic, but with zero stress at the axis and 3 times the average at the top and bottom edges.”

Spenninger fra moment

I tilfellet hvor et moment lik 10^6 Nmm blir påsatt kilen, vil både radielle normal-spenninger σ_r og skjærspenninger $\tau_{r\theta}$ oppstå. Bidraget i horisontalretning blir kun normalspenningen dekomponert ($\sigma_r \cos \theta$), mens bidraget i vertikalretning blir normalspenningen dekomponert pluss skjærspenningen ($\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta}$). Fra tabell 4.5: For radielle spenninger i horisontal retning blir resultatet 2,2 % lavere på kanten enn EB-likninger. I midten 2,9 % større.

Igen er det likn. 3.6 som brukes for klassiske bjelkelikninger.

I figur 5.7 plottes dekomponerte spenninger fra moment. Sammenlignet med figur 3.20c ser vi at horisontal- og vertikalkomponentene gir forventede diagram: σ_x er lineær, mens τ_{xy} er parabolisk.



Figur 5.7 – Spenninger i horisontal- og vertikalretning fra moment for *Wedge1*.

5.1.4 Diskusjon om resultater for *Wedge2*

For kilen med den minste vinkelen er samsvaret mellom Abaqus og kileteorien *spot on* og viser kun noen små avvik her og der.

Det største avviket skjer når Abaqus og kileteorien sammenlignes i kanten for vertikalt tverrsnitt og skjæraft. Der bykser plutselig forholdet $\sigma_{x'}/\sigma_r$ til 0,93.

Utenom dette ene tilfellet ligger forholdene på $\approx 1,0$.

5.1.5 Diskusjon om resultater for *Wedge3*

Ser vi på forholdstallene til sirkulært tverrsnitt, holder $\sigma_{x'}/\sigma_r$ og $\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$ seg jevnt rundt 1,000 for alle tre lasttilfellene. Det samme ser for vertikalt tverrsnitt. Altså kan vi trekke slutningen at radiell kileteori stemmer når transformerte spenninger fra Abaqus gir samme svar.

Variasjonen blir derimot større når vi betrakter den horisontale komponenten til kileteorien mot EB-likninger (se tab. 4.15):

Da viser tilfellet med aksiallast at forholdet:

$$\frac{\sigma_r \cos \theta}{\sigma_N} = \begin{cases} 0,93 & \text{for } \theta = \alpha \\ 1,06 & \text{for } \theta = 0^\circ \end{cases} \quad \text{hvor } \sigma_N = \frac{N}{A}$$

For skjærkraft viser forholdet:

$$\frac{\sigma_r \cos \theta}{\sigma_V} = \begin{cases} 0,98 & \text{for } \theta = \alpha \\ 1,11 & \text{for } \theta = 0^\circ \end{cases} \quad \text{hvor } \sigma_V = \frac{V \cdot x}{I_z} y$$

Og for moment:

$$\frac{\sigma_r \cos \theta}{\sigma_M} = \begin{cases} 0,91 & \text{for } \theta = \alpha \\ 1,13 & \text{for } \theta = 0^\circ \end{cases} \quad \text{hvor } \sigma_M = \frac{M \cdot y}{I_z}$$

Ergo: For horisontalspenninger gir EB-likninger gjennomgående for store spenninger i kant og for små i senter.

5.1.6 Diskusjon om resultater for *Wedge4*

Spenninger fra aksialkraft

Når vi dekomponerer spenningene for *Wedge4* over vertikalt tverrsnitt belastet med aksialkraft ser vi tydelig at de horisontale spenningene σ_x ikke fordeler seg jevnt over tverrsnittet, men får en konveks form. Vertikalspenningene τ_{xy} er heller ikke helt lineære, men får en tydelige S-kurve. I figur 5.9 er horisontal- og vertikalspenningene plottet. I figur 5.10 er plottene tegnet inn i lag med kilen. Figurene ses på side 86.

Spenninger fra skjærkraft

For de dekomponerte spenningene over et vertikalt tverrsnitt for skjærkraft, ser vi for *Wedge4* at horisontalspenningene σ_x får en S-kurve, samt at vertikalspenningene τ_{xy} igjen får en konkav utforming. I figur 5.11 er horisontal- og vertikalspenningene plottet. I figur 5.12 er plottene tegnet inn i lag med kilen. Figurene ses på side 87.

Spenninger fra moment

Dekomponerte spenninger over et vertikalt tverrsnitt for moment gir igjen normalspenninger med S-kurve. Siden det to bidrag til skjærspenningene (fra radiell normalspenning dekomponert; $\sigma_r \sin \theta$ og radiell skjærspenning; $\tau_{r\theta}$ (lik null på kantene)), blir de totale vertikalspenningene negative i midten og positive på kanten. Figurene ses på side 88.

På de tre neste sidene vises plottene for de dekomponerte spenningene fra kileteorien over et vertikalt tverrsnitt. Husk at kilen har følgende dimensjoner:

$$L = 500 \text{ mm}$$

$$\text{Starthøyde: } 400 \text{ mm}$$

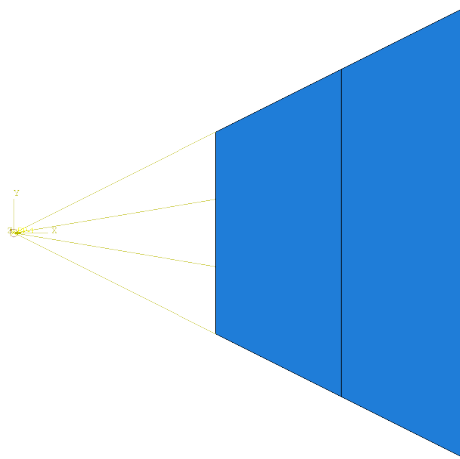
$$\text{Endehøyde: } 900 \text{ mm}$$

$$\text{Høyde i midtsnittet: } 650 \text{ mm}$$

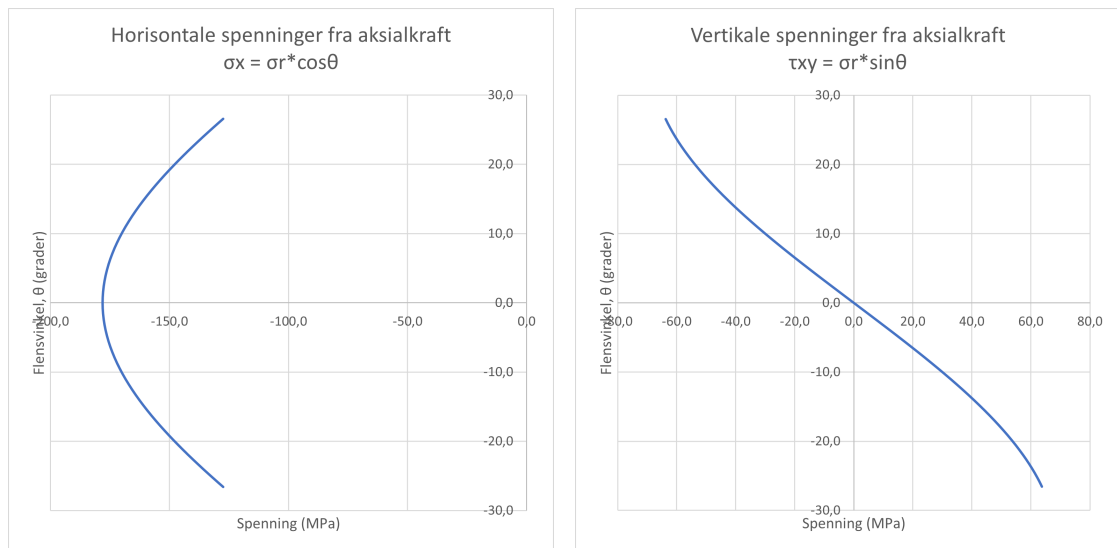
$$r_0 = 400 \text{ mm}$$

$$r = \begin{cases} 650 \text{ mm} & \text{for sirkulært tverrsnitt} \\ [650, 726,6] \text{ mm} & \text{for vertikalt tverrsnitt} \end{cases}$$

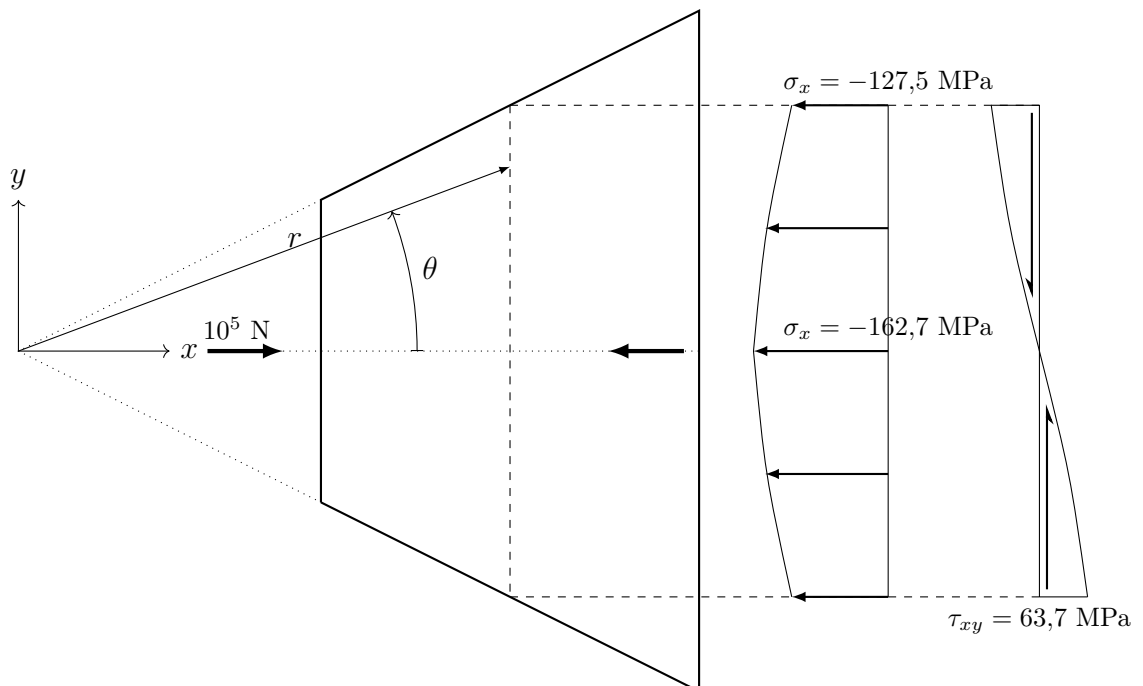
$$\text{Vinkel mellom senterlinje og kant: } \alpha = 26,6^\circ$$



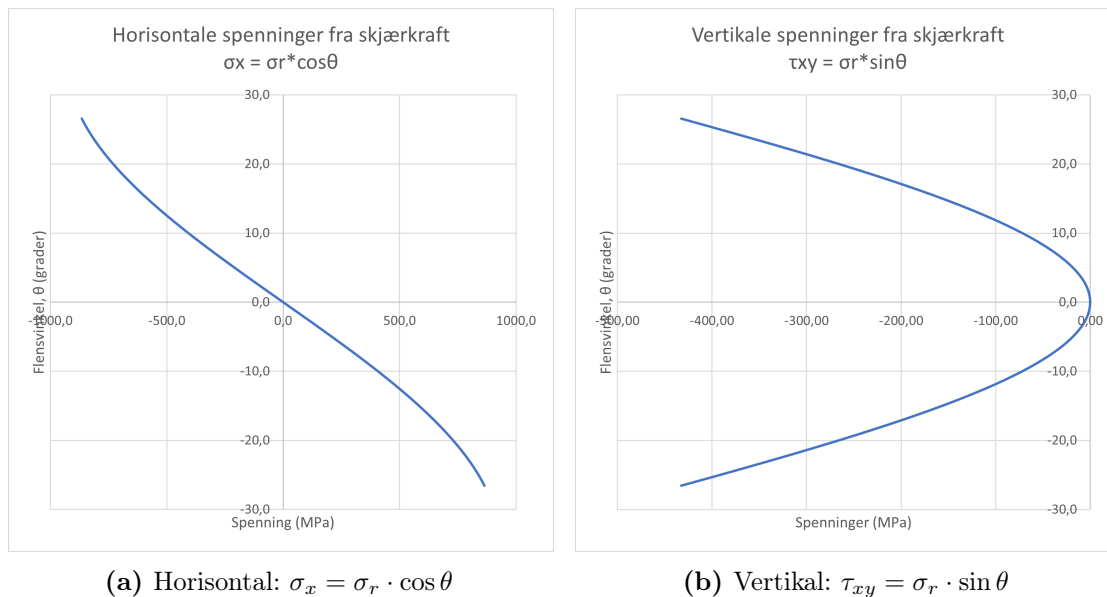
Figur 5.8 – *Wedge4* fra Abaqus.

(a) Horizontal: $\sigma_x = \sigma_r \cdot \cos \theta$ (b) Vertikal: $\tau_{xy} = \sigma_r \cdot \sin \theta$

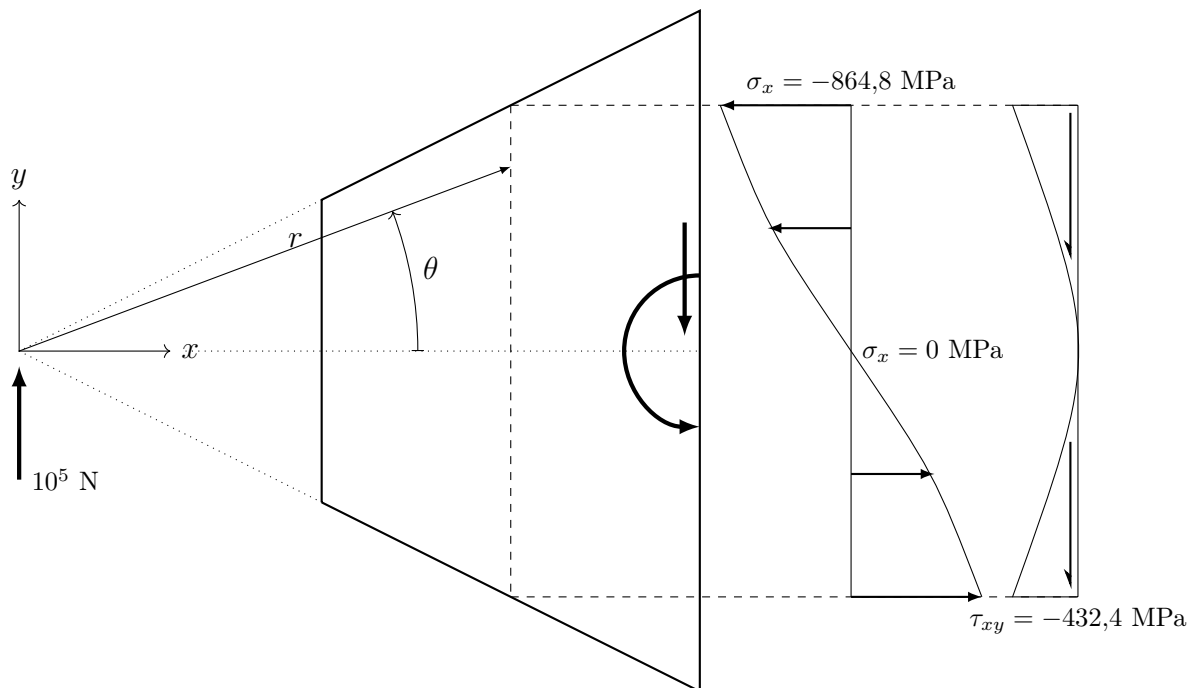
Figur 5.9 – Dekomponerte spenninger fra aksialkraft plottet over vertikalt tverrsnitt for *Wedge4*.



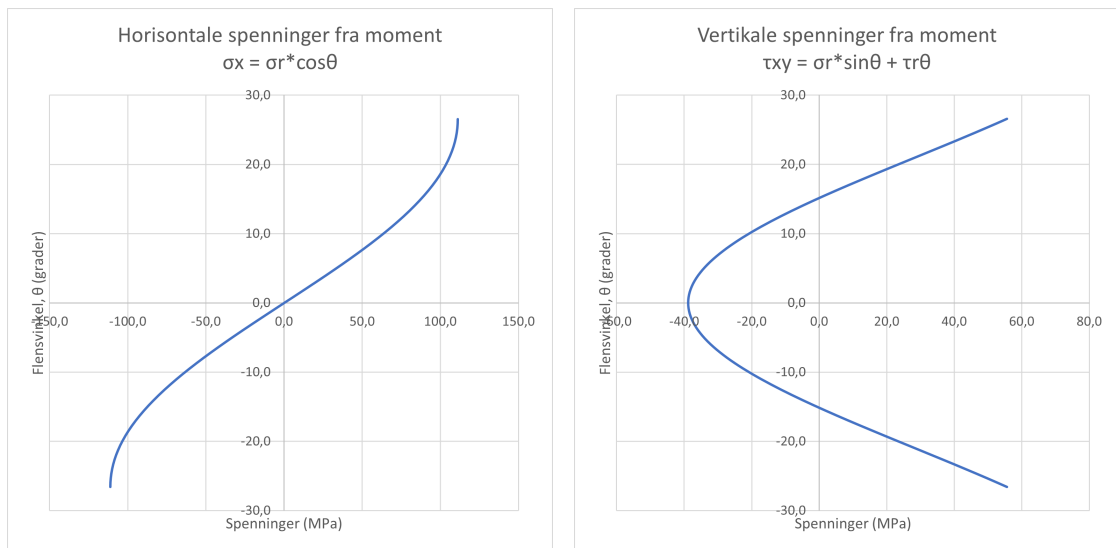
Figur 5.10 – Dekomponerte spenninger fra aksialkraft inntegnet over vertikalt tverrsnitt for *Wedge4*.



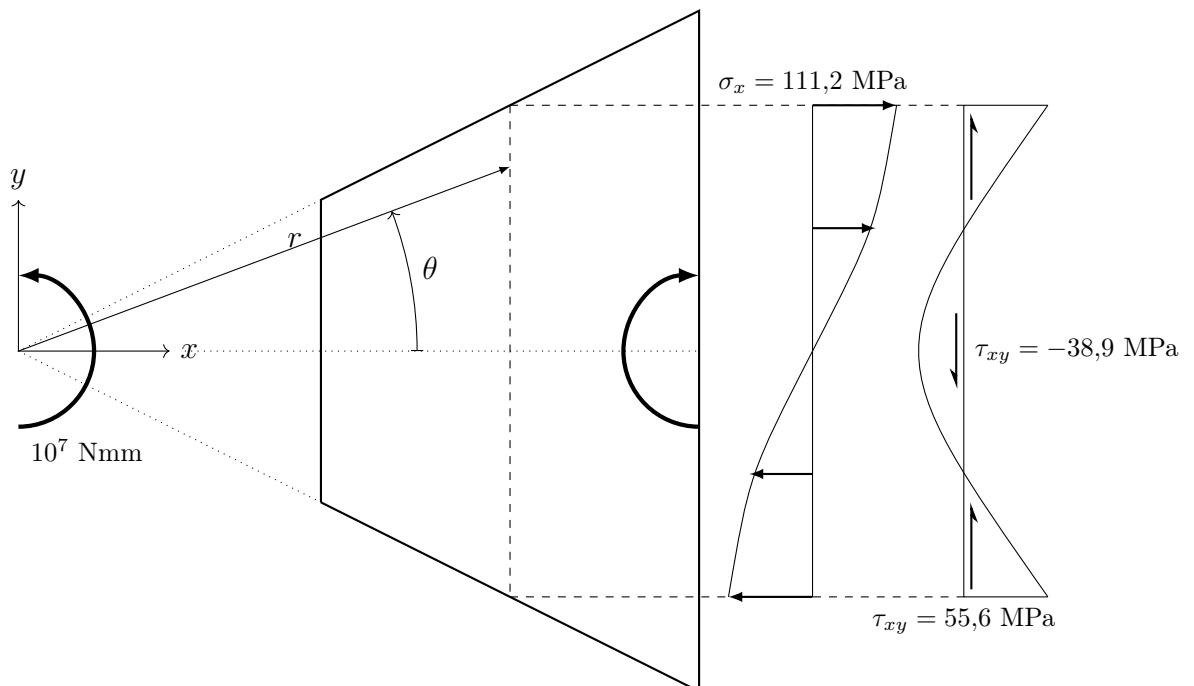
Figur 5.11 – Dekomponerte spenninger fra skjærkraft plottet over vertikalt tverrsnitt for *Wedge4*.



Figur 5.12 – Dekomponerte spenninger fra skjærkraft inntegnet over vertikalt tverrsnitt for *Wedge4*.

(a) Horizontal: $\sigma_x = \sigma_r \cdot \cos \theta$ (b) Vertikal: $\tau_{xy} = \sigma_r \cdot \sin \theta + \tau_{r\theta}$

Figur 5.13 – Dekomponerte spenninger fra moment plottet over vertikalt tverrsnitt for *Wedge4*.



Figur 5.14 – Dekomponerte spenninger fra moment inntegret over vertikalt tverrsnitt for *Wedge4*.

5.1.7 Oppsummering av kileresultatene

Kileresultatene oppsummeres i følgende punkter:

1. For kiler med vinkel opptil $16,7^\circ$ viser Abaqus og kileteorien godt samsvar.
2. EB-likninger passer godt for kiler med vinkel opptil $8,2^\circ$.
3. EB-likninger skurrer for kiler med vinkel $16,7^\circ$.
4. Kiler med vinkel $26,6^\circ$ viser store variasjoner mellom både Abaqus og kileteori, og kileteori og EB-likninger.

Fra punkt 1. kan vi trekke slutningen at likninger fra kileteorien gir korrekte svar for kiler med vinkel opptil $16,7^\circ$. Det kan vi gjøre når kileteorien støttes opp med resultater fra Abaqus.

Punkt 2. forteller oss at kiler med vinkel opptil $8,2^\circ$ godt kan dimensjoneres (i planet) med klassisk Euler-Bernoulli-teori.

Punkt 3. antyder at man bør være obs ved å dimensjonere kiler med vinkel $16,7^\circ$ med EB-likninger, og at disse likningene gir upresise svar. Særlig siden punkt 1. forteller oss at Abaqus og kileteorien er enige i opptredende spenninger.

Fra punkt 4. er det vanskelig å trekke noen slutninger i det hele tatt.

Dermed kan det se ut som om kilevinkel $\alpha < 15^\circ$ har liten betydning på opptredende (radielle) spenninger, slik at en ordinær bjelketeori er god nok for dimensjonering i planet når man trekker vertikale tverrsnitt. Når vinklene derimot blir større øker også avviket, og man kan ikke med sikkerhet si hva som er riktig eller ikke.

Tabell 5.1 på neste side viser forholdstallene til alle kilene oppsummert for $\theta = 0^\circ$, 15° (for *Wedge4*) og α .

Tabell 5.1 – Forholdstall for alle kilene for vinkel $\theta = 0^\circ, 15^\circ$ (for *Wedge4*) og α ved belastning i planet.

		Vinkel	Sirkulært tverrsnitt		Vertikalt tverrsnitt		
		$\theta =$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$	σ_{rx}/σ_x
Wedge1 $\alpha = 8,17^\circ$ $L = 152$ mm	N	α	1,00		1,00		0,98
		0°	1,00		1,00		1,01
	V	α	1,00		0,99		0,99
		0°	1,02		1,00		1,02
	M	α	1,00	1,00	0,99	1,00	0,98
		0°	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Wedge2 $\alpha = 1,91^\circ$ $L = 9000$ mm	N	α	1,00		1,00		1,00
		0°	1,00		1,00		1,00
	V	α	0,96		0,93		1,00
		0°	0,97		1,01		1,00
	M	α	0,96	0,99	0,93	0,96	1,00
		0°	1,01	0,98	1,01	0,99	1,00
Wedge3 $\alpha = 16,70^\circ$ $L = 400$ mm	N	α	1,01		1,01		0,93
		0°	1,00		1,00		1,06
	V	α	0,98		0,98		0,98
		0°	1,01		1,00		1,11
	M	α	0,98	0,99	0,98	0,99	0,91
		0°	1,00	1,00	1,00	1,00	1,13
Wedge4 $\alpha = 26,57^\circ$ $L = 500$ mm	N	α	0,88		0,76		0,83
		15°	0,97		0,97		1,02
		0°	1,04		1,04		1,16
	V	α	1,02		1,01		0,94
		15°	0,99		0,99		1,18
		0°	0,90		0,90		1,31
	M	α	0,98	1,20	0,95	1,42	0,78
		15°	1,01	1,13	1,01	1,13	1,14
	0°	1,01	0,86	1,01	0,86	1,37	

5.2 Tolkning av resultater for I-bjelke med varierende bjelkehøyde

I-bjelken Trahair bruker i sin artikkel [3] blir modellert i Abaqus og deretter beregnet med likninger gitt i vedlegget til samme artikkel. Likningene er gitt på side 32 og utregningen ses fra side 69.

Bjelken blir modellert med for det meste rektangulære S4R-elementer, men også noen triangulære S3.

Denne studiens elementmodell støtter opp FEA-resultatene til Trahair. Håndberegningene viser også noenlunde like resultater, utenom for skjærspenningene i midten τ_{xyc} hvor denne studiens utregninger blir hele fire ganger større enn forventet.

FEA

Ved å sammenligne tabell 4.24 og 4.22 (hhv. denne rapporten og Trahairs FEA-resultater) kan man se hvor nærme de er. Resultatene er gjengitt i tabell 5.2. Underindeksen “c” er spenninger hentet fra senter, “ α ” er spenninger hentet fra kanten. Vær obs på at “z” er brukt av Trahair som aksebenevnelse i lengderetning.

Tabell 5.2 – Denne rapporten (Tab. 4.24) og Trahairs (Tab. 4.22) FEA-resultater.

		$\sigma_{zc} = S11_c$	$\sigma_{z\alpha} = S11_\alpha$	$\tau_{yzc} = S12_c$	$\tau_{yz\alpha} = S12_\alpha$
Aksial	Tab. 4.22	-33,5	-33,1	0	-1,6
	Tab. 4.24	-33,3	-33,1	0	-1,7
Skjær	Tab. 4.22	0	297,0	6,4	28,0
	Tab. 4.24	0	295,7	6,2	30,9
Moment	Tab. 4.22	0	177,0	-52,7	-25,0
	Tab. 4.24	0	174,4	-52,7	-24,5

Som man ser i tabellen ovenfor stemmer resultatene fra Abaqus rimelig godt med FEA-resultatene til Trahair. Avvik kan blant annet komme av elementdiskretiseringen, eller rett og slett hvor nøyaktig undertegnede har vært til å hente spenninger.

Håndregning

Sammenligner man Trahairs resultater i tabell 4.22 med håndregningene, ser man at utregninga for aksialkraft gir prikk like resultat. Det samme gjør utregninga for

skjærkraft, bortsett fra at den bommer kraftig for skjærspenninga i midten. I følge tabell 4.22 skal skjærspenninga i midten være 6,0 MPa (τ_{yzc}), mens utregninga gir den til 23,9 MPa. Trahair sine tall er støttet opp av Abaqus-spenningene som viser $S12_c = 6,2$ MPa. Momentutregninga er kun nokså riktig. I tabell 5.3 vises resultatene.

Tabell 5.3 – Resultater fra håndberegninger sammenlignet med Trahair sine resultater.

		Utregning	Trahair	Forhold
Aksial	σ_{xc}	-32,8	-32,8	1,0
	$\sigma_{x\alpha}$	-33,0	-33,0	1,0
	τ_{xyc}	0	0	1,0
	$\tau_{xy\alpha}$	-1,7	-1,7	1,0
Skjær	σ_{xc}	0	0	1,0
	$\sigma_{x\alpha}$	297	297	1,0
	τ_{xyc}	23,9	6,0	$\approx 4,0$
	$\tau_{xy\alpha}$	30,5	30,5	1,0
Moment	σ_{xc}	0	0	1,0
	$\sigma_{x\alpha}$	179,8	180	$\approx 1,0$
	τ_{xyc}	-53,8	-54,5	0,99
	$\tau_{xy\alpha}$	-26,1	-24,9	1,05

Kapittel 6

KONKLUSJON

6.1 Konkludering

Bjelker med varierende bjelkehøyde er en effektiv måte å utnytte material og geometri på. Det kan være en kostnadsbesparende måte ved å ikke overdimensjonere steget, men kun la steget ta de spenningene som faktisk oppstår. Bjelkens fall vil òg fungere som en naturlig vannavrenning, i tillegg til at geometrien kan utnyttes arkitektonisk.

Det er et vedvarende problem for konstruksjonsingeniører å dimensjonere bjelker med varierende bjelkehøyde. Ingeniørenes retningslinjer innen stålberegning, Eurokode 3 [5], nevner ingen fremgangsmåte for å dimensjonere slike bjelker og man blir latt til å gjøre egne vurderinger. Derimot nevner trestandarden [6] hvordan dimensjoneringen av skrå limtrebjelker skal gjøres. I kapittel 3.7 vises det eksempel på hvordan beregning av en limtrebjelke blir gjort med modifisering av bjelkelikninger.

For å forstå hvordan bjelker med varierende bjelkehøyde skal dimensjoneres tas det her utgangspunkt i at de opptrer som kiler. Rapporten baserer seg på tidligere forskning gjort av Trahair [3], men problemet er også diskutert tidligere og kilebeaktningene finnes blant annet i Timoshenkos *Theory of elasticity* [9], samt andre rådende mekanikkbøker [18, 19].

Kileteorien forteller at normalspenninger σ_r brer seg ut radielt fra et skjæringspunkt avhengig av radius r , fibervinkel θ og flensvinkel α . Kun moment gir radielle skjærspenninger $\tau_{r\theta}$. Av ingeniørmessige hensyn er det nødvendig å gå fra et sirkulært tverrsnitt til et vertikalt. De radielle spenningene blir dermed en funksjon av høyden y fra senterlinja og horisontaldistansen x til tverrsnittet, hvor fibervinkelen blir $\theta \approx \frac{y}{x}$ og radiusen blir $r(y) = \sqrt{y^2 + x^2}$. Videre for å beregne kapasiteten

dekomponeres spenningene til x - og y -komponenter. Spenninger i x - og y -retning blir for aksial-, skjærkraft og moment lik σ_r ganget med henholdsvis $\cos \theta$ og $\sin \theta$, bortsett fra at moment også får tillegget $\tau_{r\theta}$ i y -retning.

Funnene i denne studien viser at for kiler med vinkel α opp mot 15° vil spenninger vi utleder fra kileteorien og spenninger vi utleder fra klassiske Euler-Bernoulli-bjelkelikninger følge hverandre tett. Når vinklene er små vil forskjellene være minimale. Når vinklene derimot blir store, $> 25^\circ$, forsvinner samsvaret mellom de radielle spenningene og de fra klassiske likninger. Samsvaret forsvinner også mellom kileteorien og elementmetodeprogrammet Abaqus når vinklene blir såpass store.

Det er dermed mulig å konkludere med at ingeniører gjerne kan bruke klassiske bjelkelikninger til å dimensjonere bjelker med varierende bjelkehøyde opp mot 15° flensvinkel, gitt at bjelken har to skråkanter. Over dette vil klassiske bjelkelikninger gi for upresise svar. Det er i tillegg ikke mulig å konkludere om kileteorien faktisk stemmer for kiler med vinkel over 25° når Abaqus ikke gir samme svar.

6.2 Mangler ved studien

Et mulig problem ved denne studien er det noe ensidige fokuset på *plane todimensjonale* kiler. Bjelker vil gjerne ha to flenser og det er problematisk at når det endelig modelleres en fullkommen bjelke, er det kun den samme bjelken som Trahair beskriver i sin studie.

Et annet problem er den noe manglende sammenhengen mellom kilene som blir modellert. Skulle de vært modellert på nytt, ville de muligens blitt modellert med samme lengde og samme starthøyde, og deretter variert vinkelen α . Eventuelt variert starthøyden slik at r_0 ble lik for alle. Siden et av premissene er at spenningene brer seg ut inversproporsjonalt med distansen fra kontaktpunktet, ville nok reliabiliteten til studien blitt styrket om forholdene (ergo: distansen r) var lik for alle kilene.

6.3 Anbefalinger til videre arbeid

Til videre arbeid vil jeg anbefale å sjekke nærmere ut hvordan bjelker med én horisontal flens og én skrå fungerer, se figur 3.3. Når det er bruk for skråbjelker er det typisk slike som brukes. Å se på hvordan kiler med to skrå kanter fungerer, som gjort i denne studien, har for det meste kun teoretisk betydning. Professor Trahair har i vedlegg E besvart enkelte spørsmål rundt hvordan slike bjelker skal betraktes.

Kapittel 7

CONCLUSION

7.1 Concluding

Web-tapered beams are an effective way to utilize the geometry and design. It can be a cost-saving method by not overdimensioning the web, but let the web handle the stresses that actually occur. The slope of the beam will also function as a natural water drainage, plus that it's geometry can be utilized architecturally.

It is a standing problem for structural engineers to dimension web-tapered beams. The engineers' guidelines within steel calculations, Eurocode 3 [5], tell of no procedure to dimension such beams and one is let to do each own's evaluations. On the other hand, the guideline for dimensioning tree-structures [6] tell of such. Chapter 3.7 (in Norwegian) shows an example of how to dimension laminated timber beams by using modified beam equations.

In order to understand how web-tapered beams shall be dimensioned, is it taken as a basis that they behave like wedges. The report is based upon research done by Trahair [3], but the problem is discussed earlier and the theory is covered by Timoshenko in his *Theory of elasticity* [9], as well as other prevailing literature [18, 19].

The theory of wedges tells that normal stresses σ_r spreads radially from an apex point depended by radius r , angle of the fibre θ and flange angle α . Only moment produces shear stresses, $\tau_{r\theta}$. From an engineers perspective is it necessary to go from a circular to a vertical sectioning. Therefore the radial stresses becomes a function of the height y from the centreline and the horizontal distance x to the section, where the angle of the fibre becomes $\theta \approx \frac{y}{x}$ and the radius becomes $r(y) = \sqrt{y^2 + x^2}$. Furthermore, in order to calculate the capacity will the stresses be decomposed to

components of x and y . Stresses in x - and y -direction becomes for axial and shear force, and moment equal to σ_r times respectively $\cos \theta$ and $\sin \theta$, except moment which also gets $\tau_{r\theta}$ included in the y -direction.

The results in this study shows that for wedges with an angle α up to about 15° will the stresses we derive from the theory of wedges and stresses from classical Euler-Bernoulli beam equations be close to each other. The difference becomes minimal when the angle gets small. When the angle gets large, $> 25^\circ$, will the correlation between radial stresses and classical equations disappear. The correlation also disappears between the theory of wedges and the FEM-program Abaqus.

We can therefore conclude that it's possible for engineers to use classical beam equations to dimension web-tapered beams with an angle up to 15° , given that the beam's got two inclined edges. Surpassing this will classical beam equations give a too unprecise answer. It's also not possible to actually conclude if the theory of wedges is correct for beams with an angle over 25° when Abaqus doesn't give a correlating answer.

7.2 Lacks about this study

A possible problem with this study is the somewhat one-sided focus on *plane two-dimensional* wedges. Beams will often have two flanges, and it's problematic that when a complete beam finally is modelled, it's only the same one that Trahair describes in his study.

Another problem is the somewhat lacking correlation between the wedges itself. If they were to be modelled again, would they possibly be modelled with the same length and starting height, and thereafter varied the angle α . Or possibly varied the starting height, such that r_0 would become equal for all. Since one of the premisses is that stresses spread across inverse to the distance from the contact point, would the reliability perhaps be strengthened if the circumstances (that is: the distance r) were equal for all wedges.

7.3 Future recommendations

For future works will I recommend looking closer on how beams with one horizontal flange and one inclined behaves, see figure 3.3. These beams are mainly used when inclined beams are needed. To look upon how wedges with two inclined edges behaves, as done in this study, has for the greatest part only theoretical necessity. Professor Trahair has in appendix E (in English) answered some questions about how such beams shall be viewed.

REFERANSER

- [1] Richard C. Kaehler, Donald W. White og Yoon Duk Kim. *Frame Design Using Web-Tapered Members*. American Institute of Steel Construction, 2011.
- [2] P. Bertolini mfl. «Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections». I: *Thin-Walled Structures* (2019).
- [3] N. S. Trahair og P. Ansourian. «In-plane behaviour of web-tapered beams». I: *Engineering Structures* (2015).
- [4] N. S. Trahair og P. Ansourian. «In-plane behaviour of mono-symmetric tapered beams». I: *Engineering Structures* (2015).
- [5] Standard Norge. *Eurokode 3: Prosjektering av stålkonstruksjoner. Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger*. 2005.
- [6] Standard Norge. *Eurokode 5: Prosjektering av trekonstruksjoner. Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger*. 2010.
- [7] Nick Trahair. «Lateral buckling of tapered members». I: *Engineering Structures* (2017).
- [8] Dassault Systemes. *Abaqus 6.14: Abaqus analysis user's guide*.
- [9] S. Timoshenko og J. N. Goodier. *Theory of elasticity*. 2. utgave. 1951.
- [10] J. H. Michell. «Some Elementary Distributions of Stresses in Three Dimensions». I: *Proceedings of the London Mathematical Society* Vol. 32 (jan. 1900), s. 23–61. URL: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1112/plms/s1-32.1.23> (sjekket 15.05.2021).
- [11] Carus Wilson. «The Influence of Surface-Loading on the Flexure of Beams». I: *Philosophical Magazine*. Fifth Series Vol. 32. Number CXCIX (des. 1891), s. 481. URL: https://zs.thulb.uni-jena.de/rsc/viewer/jportal_derivate_00165341/PMS_1891_Bd32_489.tif?logicalDiv=jportal_jpvolume_00128967 (sjekket 14.05.2021).
- [12] Till Tantau, Mark Wibrow og Christian Feuersänger. *The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.8b*. 2020.
- [13] Per Kristian Larsen. *Konstruksjonsteknikk. Laster og bæresystemer*. 2. utgave. Trondheim: Fagbokforlaget, 2008.

-
- [14] Arnfinn Emdal. *Introduksjon til geoteknikk*. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 2017.
 - [15] Liliana Raquel Simões Marques. «Tapered steel members: Flexural and lateral torsional-buckling». Ph.d.-avh. 2012.
 - [16] Kolbein Bell. *Dimensjonering av trekonstruksjoner*. 2017.
 - [17] Strand7 Ptd Ltd. *STRAND7*. Sydney, 2015.
 - [18] Robert D. Cook og Warren C. Young. *Selected chapters from Advanced Mechanics of Materials*. 2. utgave. Pearson, 2015.
 - [19] Per Kristian Larsen. *Dimensjonering av stålkonstruksjoner*. 2. utgave. Trondheim: Fagbokforlaget, 2013.

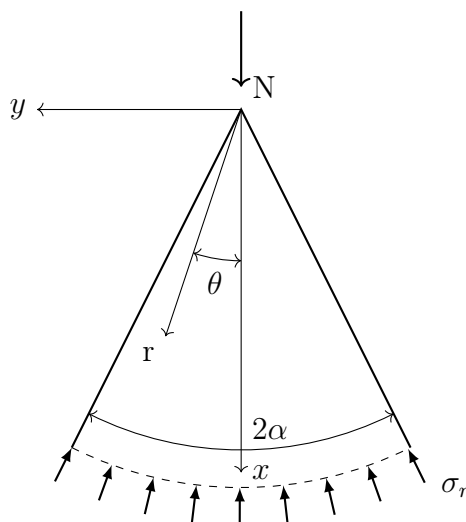
VEDLEGG

Tillegg A

Utledning av radiell spenning for aksialkraft

En aksialkraft N (per enhet tykkelse) er påsatt tuppen av en kile, vist i figur A.1. Vi er interessert i å finne radiell spenning σ_r i et vilkårlig punkt fra tuppen. Dette punktet ligger r avstand fra origo og med en vinkel θ fra kraftretninga. Kilen er 2α brei, hvor halvparten er delt av x -aksen (som også følger kraftretninga).

Spenningene σ_r virker alltid perpendikulært vinkelen θ . Kilen betraktes som et halvuendelig medium.



Figur A.1 – Kile påsatt aksialkraft. Figur hentet (og delvis modifisert) fra Timoshenkos *Theory of Elasticity 2. utg.*, s. 97.

Vi starter med antagelsen om at radiell spenning er gitt som $\sigma_r = -\frac{kN \cos \theta}{r}$ [9] (se også kap. 3.5.1). k er en ukjent konstant som skal tilfredsstille randbetingelsene.

Dekomponerer spenninga (slik at den virker parallelt med krafta).

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{rx}}{\sigma_r} \Rightarrow \sigma_{rx} = \sigma_r \cos \theta$$

Summen av alle (dvs.: integralet) σ_{rx} skal motvirke N .

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \sigma_{rx} \cdot r \, d\theta \cdot 2 &= 2 \int_0^\alpha \sigma_r \cos \theta \cdot r \, d\theta \\ &= 2 \int_0^\alpha -\frac{kN \cos \theta}{r} \cos \theta \cdot r \, d\theta \\ &= -2 \int_0^\alpha kN \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= -2kN \int_0^\alpha \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= -2kN \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^\alpha \\ &= -2kN \left[\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right] \\ &= -kN \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right] \end{aligned}$$

Dette må settes lik krafta.

$$\begin{aligned} -kN \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right] &= -N \\ k &= \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Plugger A.1 inn i uttrykk for radiell spenning.

$$\sigma_r = -\frac{N \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \tag{A.2}$$

... hvor N er gitt som N/mm, θ og α i radianer og r som mm.

Og vi ser at likning A.2 er nøyaktig den samme som foreslått av Trahair i likn. 3.26:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{N \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \\ &= -\frac{N \cos \theta}{\frac{r}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha)} \\ &= -\frac{2N \cos \theta}{r (2\alpha + \sin 2\alpha)}\end{aligned}$$

Om vi gjør kilen plan (det vil si: setter $\alpha = \frac{\pi}{2}$) blir likning A.2 om til

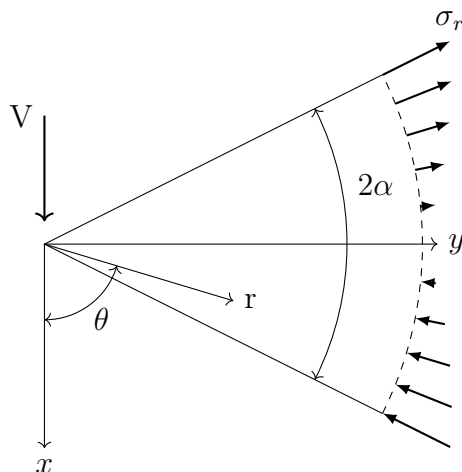
$$\sigma_r = -\frac{2N \cos \theta}{\pi r} \tag{A.3}$$

... som er samme likning gitt av Timoshenko [9] (se likn. 3.21).

Tillegg B

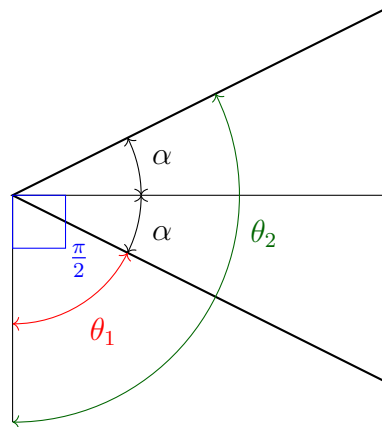
Utleddning av radiell spenning for skjærkraft

En skjærkraft V (per enhet tykkelse) er påsatt en kile, vist i figur B.1. Vi er interessert i å finne radiell spenning σ_r i et vilkårlig punkt fra origo. Dette punktet ligger r avstand fra origo og med en vinkel θ fra kraftretninga. Kilen er 2α bred, hvor halvparten er delt av langsgående akse (her: y -aksen). Kilen betraktes som et halvuendelig medium.



Figur B.1 – Kile påsatt skjærkraft. Figur er basert på samme figur vist i Cook & Youngs “Selected chapters from *Advanced Mechanics of Materials*” s. 154.

For nedre halvdel (området med trykk) vil største fiberspenning skjer hvor $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Likeens vil største strekk være: $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Se figur B.2.



Figur B.2 – Detalj av figur B.1

Radiell spenning på grunn av skjærkraft er gitt som $\sigma_r = -\frac{kV \sin \theta}{r}$.

Vi finner dermed konstanten k ved:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r \sin \theta \cdot r d\theta = V$$

Som gir oss:

$$k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

Normalspenningene fra skjærkraft blir dermed uttrykt som:

$$\sigma_r = -\frac{V \sin \theta}{r(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \quad (\text{B.1})$$

Tillegg C

Modellere bjelke med varierende bjelkehøyde i Abaqus

Overview

Dette er en gjennomgang¹ for å lage nøyaktig samme bjelke som den brukt i artikkelen av Trahair og Ansourian [3]. For øvrige mål, se figur 4.6 og tabell 4.23. For å lage kilen diskutert i kap. 4.1 modelleres kun steget i denne gjennomgangen.

Poenget er å la de som ønsker å kontrollere arbeidet, få en mulighet til å lage nøyaktig samme bjelker og kiler. En annen årsak er for å lette arbeidet til studenter som eventuelt vil fortsette studien.

Part

Lag steget

1. Dobbelklikk på **Part**. Velg:
 - (a) 3D Planar
 - (b) Deformable
 - (c) Shell
 - (d) Planar
2. Tegn geometrien gitt i tabell 4.23. Tips: Legg *Origin* i en distanse $-r_0$ langs senterlinja fra venstre side. (Det letter arbeidet med å tegne *paths*).

¹Inspirasjon hentet fra <https://www.youtube.com/watch?v=3GCdATh3ahg&list=PLanxJDWaSGRecgnaAsPZ0tmUQQT5HI-Hr&index=1>.

Lag flensene

1. Dobbeltklikk på **Part**. Velg:
 - (a) 3D Planar
 - (b) Deformable
 - (c) Shell
 - (d) Planar
2. Tegn geometrien gitt i tabell 4.23.
3. Utvid **Parts** i **Model tree** og høyreklikk på flensdelen. Trykk på **Copy** og godta *default*-innstillinger.

Property

1. Lag et nytt material. Gi verdiene:
 - (a) Young's Modulus: 210000 [MPa]
 - (b) Poission's Ratio: 0.3
2. Lag en **section**. Velg:
 - (a) Shell
 - (b) Homogeneous
3. Tast inn *Shell Thickness* 2.13 for steget og godta alle andre innstillinger.
4. Gjenta steg 2 og 3 for en *section* til flensene, men gi tykkelsen 3.11.
5. I **Model tree**: Utvid **Parts** og **Web** og dobbeltklikk på **Section Assignment**. Gi den sin *section* og sørg for at *Shell offset* ligger i *Middle surface*.
6. Gjør det samme for flensene med og la øvre flens få *Shell offset: Top surface*, mens nedre får *Bottom surface*.

Assembly

1. Trykk på **Create Instance** i **Assembly**-modulen. Merk alle tre delene og huk av “Auto-offset from other instances”.
2. Trykk på **Rotate Instance** og merk begge flensene. Rotér dem 90 grader. (1 i figur C.1.)
3. Trykk på **Create Constraint: Parallel Edge** og gjør flensene parallelle med respektive sider i steget. (2)
4. Trykk deretter på **Translate Instance** og før flensene over til steget. (3)
5. Trykk så på **Merge/Cut Instances** og godta innstillingene. (4)
6. Vi har nå laget en *web-tapered I-beam*.
7. Utvid **Assembly** → **Instances** og høyreklikk på bjelken. Trykk på **Make Independent**.



Figur C.1 – Fremgang for **Assembly**.

Step & Interaction

1. Lag et nytt **Step**. Velg **Linear perturbation**. Godta alle forhåndsinnstillinger.
2. Gå inn på **Interaction module** og lag et referansepunkt 101,31 (mm) fra venstre ende. Tips: Bruk *Query information* til å finne koordinatene til midtnoden.
3. Klikk på **Create Constraint** → **Coupling** og velg referansepunktet som *constrained control point*.
4. Velg venstre ende som *Surface* og **Kinematic** som type. La alle seks frihetsgrader være *Constrained*. Klikk OK.

Load & BC

1. Lag en ny **Load** og velg steget du lagde i forrige punkt. Velg ellers:
 - (a) Category: Mechanical
 - (b) Types for Selected Step: Concentrated force
2. La den virke i referansepunktet og gi den verdien 1E4 i CF1 for aksialkraft, 1E4 i CF2 for skjær.
3. For moment: Gjenta steg 2, men velg **Types for Selected Step: Moment**. La momentet være 1E6 i CF3.
4. Dobbeltklikk på **BC** i **Model tree**. Velg **Step Initial**, **Category Mechanical** og **Symmetry/Antisymmetry/Encastred**.
5. La randbetingelsen gjelde for hele høyre ende.

6. Vi ønsker å bruke *XSYMM*.
7. For skjærtilfellet må vi legge til én randbetingelse til: Bruk **Partition** og lag en node i midten på høyre side. Lag en **Pinned**-randbetingelse i denne noden.

Mesh

1. Sørg for at **Object: Assembly** er på.
2. Lag to *datum planes* med **Create Datum Planes: 3 Points**. Lag det ene midt i bjelken og det andre $\frac{1}{4}$ fra venstre ende.
3. La **Mesh Control** være **Quad-Dominated** med **Technique: Free**.
4. Klikk på **Seed Part Instance** og la **Approximate global size** være 0.5
5. Klikk deretter på **Mesh Part Instance** og mesh hele bjelken.

Plot

Vertikal path

1. Gå inn på **Result tree** når **Job** er ferdig.
2. Dobbeltklikk på **Paths** og bruk **Node list**.
3. La **Part Instance** være **BEAM-1**.
4. Finn midtspennet. Tips: Lag et **Set** i forkant. Settet kan brukes til å finne midtnodene, men kan ikke brukes til *path*-en.
5. Bruk **Add Before** om *path* må forlenges i startnoden. **Add After** hvis *path* må forlenges i endenoden. Obs! Det er viktig at *path* defineres i riktig rekkefølge! Ellers vil ikke plottet gi mening.
6. Dobbeltklikk på **XYData** i **Result tree** → **Path**.
7. I vinduet *XY Data from Path*: Huk av **Include intersections** og **Include all elements**.

Radiell path

1. Dobbeltklikk på **Paths** og bruk **Circular**.
2. Velg:
 - (a) Path type: Circumferential path
 - (b) Circle definition: 3 Points on arc
3. Trykk på pila *Select from Viewport*.
4. Regn ut selv koordinatene til hvor *path*-en passerer.
5. Tast inn *End Angle*: Bruk vinkelen fra senterlinja til kanten, doblet.

Eksportere **XYData** til Excel: Bruk *Plug-ins* → *Tools* → *Excel Utilities...*

Tillegg D

Utleddning av annet arealmoment til bjelke med én skrå flens

Referer til figur 3.4 for å se geometrien. Husk at snittet er skrått og står normalt på nøytralaksen, se snitt C i figur 3.3.

Steget er delt langs nøytralaksen og h_u (upper) er øvre steglengde, mens h_l (lower) er nedre steglengde. $h(x)$ er vertikal steghøyde i punktet hvor snittet treffer nøytralaksen. α er vinkelen mellom nøytralaksen og lengderetningen. t_w er tykkelsen på steget, t_f er original flenstykkelse, mens t_f^* er flenstykkelsen som snittet skaper. b_f er bredden til flensen. L er bjelkens horisontale lengde.

Om vi kaller venstre steghøyde for h_1 og høyre steghøyde for h_2 vil vertikal steghøyde bestemmes av

$$h(x) = h_1 + \frac{x}{L}(h_2 - h_1)$$

Øvre og nedre steglengde bestemmes av:

$$h_u = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha]$$
$$h_l = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha}$$

Tykkelsen på flensen øker til:

$$t_f^* = \frac{t_f}{\cos \alpha}$$

Nøytralaksens totale lengde er

$$L_{NA} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}$$

Vinklene finner vi som

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{h_2 - h_1}{2L} \\ \tan 2\alpha &= \frac{h_2 - h_1}{L} \\ \cos \alpha &= \frac{L}{L_{NA}}\end{aligned}$$

Ved å bruke Steiners setning (likn. 3.8) kommer vi fram til snittets arealmoment.

Øvre stegdel

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{h_u}{2} = \frac{h(x)}{4 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] \\ A_1 &= t_w h_u = \frac{t_w h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] \\ I_{01} &= \frac{t_w h_u^3}{12} = \frac{t_w}{12} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] \right)^3 \\ I_1 &= I_{01} + A_1 y_1^2 = \frac{25}{768} \frac{t_w h(x)^3}{\cos^3 \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha]^3\end{aligned}$$

Øvre flens

$$\begin{aligned}y_2 &= h_u + \frac{t_f^*}{2} = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \\ A_2 &= b_f t_f^* = \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \\ I_{02} &= \frac{b_f t_f^{*3}}{12} = \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} \\ I_2 &= I_{02} + A_2 y_2^2 = \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} + \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \right)^2\end{aligned}$$

Nedre stegdel

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \frac{h_l}{2} = \frac{h(x)}{4 \cos \alpha} \\
 A_3 &= t_w h_l = \frac{t_w h(x)}{2 \cos \alpha} \\
 I_{03} &= \frac{t_w h_l^3}{12} = \frac{t_w}{12} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} \right)^3 = \frac{t_w h(x)^3}{96 \cos^3 \alpha} \\
 I_3 &= I_{03} + A_3 y_3^2 = \frac{1}{128} \frac{t_w h(x)^3}{\cos^3 \alpha}
 \end{aligned}$$

Nedre flens

$$\begin{aligned}
 y_4 &= h_l + \frac{t_f^*}{2} = \frac{h(x)}{2 \cos \alpha} + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \\
 A_4 &= t_f^* b_f = \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \\
 I_{04} &= \frac{b_f t_f^{*3}}{12} = \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} \\
 I_4 &= I_{04} + A_4 y_4^2 = \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} + \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

Totalt

$$\begin{aligned}
 I^{tot} &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
 &= \frac{25}{768} \frac{t_w h(x)^3}{\cos^3 \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha]^3 \\
 &\quad + \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} + \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} [1 - \tan 2\alpha \tan \alpha] + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{128} \frac{t_w h(x)^3}{\cos^3 \alpha} \\
 &\quad + \frac{b_f t_f^3}{12 \cos^3 \alpha} + \frac{b_f t_f}{\cos \alpha} \left(\frac{h(x)}{2 \cos \alpha} + \frac{t_f}{2 \cos \alpha} \right)^2
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Tillegg E

Epost-korrespondanse med N. S. Trahair

Siden Trahair er en av professorene med størst autoritet innenfor feltet, bestemte jeg og Aalberg oss for å kontakte ham. Det var flere ting vi lurte på: Blant annet hvor nøytralaksen ligger og hvordan man beregner annet arealmoment, særlig når vi har kun med én skråflens å gjøre. Rapporten hans [3] (som også er den rapporten jeg refererer til i eposten) dekker kun bjelke med to skråflenser, som forenkler prosessen siden nøytralaksen da ligger i midten.

Svaret vi fikk var at nøytralaksen til bjelker med én skråflens ligger i stegets senterlinje (det vil si: $\frac{h}{2}$ -aksen) og at annet arealmoment skal beregnes etter snittet som ligger perpendikulært denne aksen.

I tillegg la Trahair ved to vedlegg i svaret sitt. *240 LBTM.pdf* er “Lateral buckling of tapered members” [7] og *236 MSTIB.pdf* er “In-plane behaviour of mono-symmetric tapered beams” [4].

Re: Some questions regarding in-plane behaviour of web-tapered I-beams

Nick Trahair <nicholas.trahair@gmail.com>

ti. 09.03.2021 04:30

Til: Odin Strandkleiv Thorsrud <odint@stud.ntnu.no>

📎 2 vedlegg (1 MB)

240 LBTM.pdf, 236 MSTIB.pdf;

Hi Odin,

If one flange is inclined and the other not, then the neutral axis is the web centreline (assuming that the flanges are the same). The section properties should be calculated for the axes perpendicular to the centreline.

I attach 2 papers that may be of interest.

Nick Trahair
Emeritus Professor of Civil Engineering
The University of Sydney

8/8 Lady Penrhyn Drive
Beacon Hill, NSW, 2100, Australia

nicholas.trahair@gmail.com

(612/02) 9451 4874
0480 166 836

On Tue, Mar 9, 2021 at 7:36 AM Odin Strandkleiv Thorsrud <odint@stud.ntnu.no> wrote:

Hello! I first contacted P. Ansourian, but he recommended me contacting you instead.

I'm a M.Sc. student in civil engineering at NTNU (Norwegian University of Science and Technology) and are doing my thesis on the behaviour of web-tapered I-beams. I've come across your paper on the subject, and it's by far the best one published.

There are several things that we're wondering about. For example what happens when only one flange is tilted, and the other is kept horizontal? Where is the neutral axis?! And how shall the sections be put in this case? Or how to calculate the second moment of area? Plenty of questions!

Perhaps we could do a meeting over Teams? The time will of course be in your favour. Sydney is ten hours in front of Norway. So a meeting at 08:00 would result in 22:00 in Norway.

I understand that you're a highly acclaimed professor and are mostly too busy talking to a student on the other side of the globe. But I would still highly appreciate it if you could answer some questions.

My supervisor is Arne Aalberg.
<https://www.ntnu.edu/employees/arne.aalberg>

Kind regards,
Odin Strandkleiv Thorsrud
Sivilingeniørstudent
(+47) 924 87 985

Tillegg F

Tabellerte verdier for Wedge1

Under vises et sammendrag av verdier fra Excel-arket. Det er alltid ti verdier som hentes jevnt spredt utover tverrsnittet. Det er flere verdier enn hva kapittel 4 vil vise, men færre enn Excel-arket. I Dropbox-mappa finner du verdiene til alle kilene.

Tabell F.1 – Wedge1 - Circular path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koordinat er i mm og spenninger i MPa.

y-koordinat	Aksial			Skjær			Moment		
	S11	S22	S12	S11	S22	S12	S11	S22	S12
22,9	-194,3	-3,3	-25,4	-3720,2	-63,3	-485,1	2096,5	28,1	244,4
17,9	-196,1	-2,0	-19,9	-2918,6	-30,0	-295,7	1661,1	0,2	84,9
12,8	-197,5	-1,1	-14,4	-2100,3	-11,1	-152,0	1204,1	-11,6	-37,2
7,7	-198,4	-0,4	-8,7	-1270,0	-2,5	-55,4	731,6	-11,8	-119,9
2,6	-198,8	-0,1	-3,0	-432,3	-0,1	-6,4	249,6	-4,8	-161,9
-2,5	-198,8	-0,1	2,8	-12,2	0,0	0,0	-235,7	4,6	-162,5
-7,6	-198,4	-0,4	8,5	1245,8	2,4	-53,2	-717,9	11,7	-121,7
-12,6	-197,5	-1,1	14,2	2076,5	10,7	-148,6	-1190,7	11,8	-40,1
-17,7	-196,1	-2,0	19,8	2895,4	29,3	-290,9	-1648,2	0,3	80,9
-22,8	-194,3	-3,3	25,2	3697,4	62,1	-479,0	-2084,3	-27,1	239,3

Tabell F.2 – Wedge1 - Circular path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radiell spenning		Forhold	
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$
Aksial	7,4	-197,6	0,0	0,0	-197,4		1,001	
	5,8	-198,1	0,0	-0,1	-198,0		1,000	
	4,1	-198,5	0,0	-0,1	-198,5		1,000	
	2,5	-198,7	-0,1	-0,1	-198,8		1,000	
	0,8	-198,9	-0,1	0,0	-199,0		0,999	
	-0,8	-198,9	-0,1	0,0	-199,0		0,999	
	-2,4	-198,8	-0,1	0,1	-198,9		1,000	
	-4,1	-198,5	0,0	0,1	-198,5		1,000	
	-5,7	-198,1	0,0	0,1	-198,0		1,000	
	-7,4	-197,6	0,0	0,0	-197,4		1,001	
Skjær	7,4	-3783,4	0,0	-0,1	-3782,9		1,000	
	5,8	-2948,6	0,0	-0,1	-3365,9		1,000	
	4,1	-2111,3	-0,1	-0,2	-2111,1		1,000	
	2,5	-1272,4	-0,1	-0,1	-1272,2		1,000	
	0,8	-432,4	0,0	-0,1	-432,2		1,000	
	-0,8	407,9	0,0	-0,1	408,1		1,000	
	-2,4	1248,1	0,1	-0,1	1248,1		1,000	
	-4,1	2087,2	0,1	-0,2	2087,0		1,000	
	-5,7	2924,6	0,0	-0,1	2924,2		1,000	
	-7,4	3759,5	0,0	-0,1	3759,0		1,000	
Moment	7,4	2124,6	0,0	-28,9	2124,2	-29,0	1,000	0,995
	5,8	1661,2	0,0	-83,3	1661,0	-57,9	1,000	0,998
	4,1	1192,4	0,0	-124,2	1192,3	-124,4	1,000	0,999
	2,5	719,8	0,0	-151,7	719,7	-151,8	1,000	0,999
	0,8	244,7	0,0	-165,6	244,7	-165,7	1,000	0,999
	-0,8	-231,1	0,0	-165,7	-231,1	-165,9	1,000	0,999
	-2,4	-706,2	0,0	-152,3	-706,1	-152,4	1,000	0,999
	-4,1	-1178,9	0,0	-125,2	-1178,8	-125,3	1,000	0,999
	-5,7	-1647,9	0,0	-84,6	-1647,7	-84,7	1,000	0,999
	-7,4	-2111,4	0,0	-30,6	-2111,0	-30,8	1,000	0,996

Tabell F.3 – Wedge1 - Vertical path: Spenninger hentet fra Abaqus. y-koord er i mm og spenninger i MPa.

y-koord*	Aksial			Skjær			Moment		
	S11	S22	S12	S11	S22	S12	S11	S22	S12
25,5	-191,5	-3,9	-27,2	-3996,0	-80,6	-567,6	2219,1	43,8	311,8
20,9	-193,7	-2,7	-23,0	-3275,9	-43,3	-376,5	1890,6	14,0	170,8
15,8	-195,9	-1,6	-17,5	-2485,2	-18,6	-214,3	1459,4	-6,4	28,6
10,6	-197,5	-0,8	-11,9	-1670,5	-5,6	-96,1	999,7	-12,8	-77,2
2,9	-198,8	-0,1	-3,3	-420,3	-0,1	-6,1	276,1	-5,3	-160,6
-2,3	-198,8	-0,1	2,6	420,0	0,1	6,1	-215,3	4,2	-163,3
-10,0	-197,7	-0,7	11,2	1670,2	5,6	-96,1	-941,2	12,8	-87,6
-15,2	-196,2	-1,5	16,9	2485,0	18,6	-214,3	-1403,8	7,9	13,4
-20,3	-194,0	-2,6	22,3	3275,8	43,3	-376,5	-1839,0	-10,6	151,4
-25,5	-191,5	-3,9	27,2	3996,0	80,6	-567,6	-2219,1	-43,8	311,8

* Egentlige y-koordinater for skjær er: 25,5 , 20,4 , 15,3 , 10,2 , 2,5 , -2,5 , -10,2 , -15,3 , -20,4 , -25,5.

Tabell F.4 – Wedge1 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radiell spenning		Forhold		
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$	$r(y)$
Aksial	8,2	-195,4	0,0	0,3	-195,0		1,002		179,1
	6,7	-196,5	0,0	-0,1	-196,3		1,001		178,5
	5,1	-197,5	0,0	-0,1	-197,5		1,000		178,0
	3,4	-198,3	0,0	-0,1	-198,3		1,000		177,6
	0,9	-198,8	-0,1	0,0	-199,0		0,999		177,3
	-0,7	-198,9	-0,1	0,0	-199,0		0,999		177,3
	-3,2	-198,3	0,0	0,1	-198,4		1,000		177,6
	-4,9	-197,6	0,0	0,1	-197,6		1,000		178,0
	-6,5	-196,6	0,0	0,1	-196,5		1,001		178,5
	-8,2	-195,4	0,0	-0,3	-195,0		1,002		179,1
	8,2	-4076,6	0,0	6,3	-4118,3		0,990		179,1
	6,6	-3319,1	0,0	-0,2	-3318,8		1,000		178,5
	4,9	-2503,7	-0,1	-0,2	-2503,4		1,000		178,0

Skjær

Tabell F.4 – Wedge1 - Vertical path: Forhold mellom spenningstransformasjoner og teoretisk radielle spenninger. Vinkel er i grader, spenninger i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Vinkel	Spenningstransformasjoner			Radiell spenning		Forhold		$r(y)$
	θ	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	$\tau_{x'y'}$	σ_r	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_{x'}/\sigma_r$	$\tau_{x'y'}/\tau_{r\theta}$	
	3,3	-1676,0	-0,1	-0,1	-1675,8		1,000		177,6
	0,8	-420,4	0,0	-0,1	-420,2		1,000		177,3
	-0,8	420,1	0,0	-0,1	420,2		1,000		177,3
	-3,3	1675,8	0,1	-0,1	1675,8		1,000		177,6
	-4,9	2503,5	0,1	-0,1	2503,4		1,000		178,0
	-6,6	3319,0	0,0	-0,2	3318,8		1,000		178,5
	-8,2	4076,6	0,0	6,3	4118,3		0,990		179,1
Moment	8,2	2262,9	0,0	-6,9	-2285,0	0,0	0,990	####*	179,1
	6,7	1904,6	0,0	-52,5	-1904,4	-52,7	1,000	0,998	178,5
	5,1	1452,9	0,0	-101,4	-1452,8	-101,5	1,000	0,999	178,0
	3,4	986,8	0,0	-137,2	-986,8	-137,3	1,000	0,999	177,6
	0,9	270,7	0,0	-165,1	-270,7	-165,2	1,000	0,999	177,3
	-0,7	-211,1	0,0	-166,0	211,1	-166,1	1,000	0,999	177,3
	-3,2	-928,3	0,0	-140,7	928,3	-140,8	1,000	0,999	177,6
	-4,9	-1395,9	0,0	-106,5	1395,7	-106,6	1,000	0,999	178,0
	-6,5	-1849,5	0,0	-59,3	1849,4	-59,4	1,000	0,998	178,5
	-8,2	-2262,9	0,0	-6,9	2285,0	0,0	0,990	####*	179,1

* Forholdet blir egentlig delt på et utrolig lite tall og verdien $\rightarrow \infty$.

Tabell F.5 – Wedge 1 - Vertical path: Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus. Spenninger er i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Horisontale komponenter	Bjelketeori	Forhold	
	$\sigma_r \cdot \cos \theta$	σ_M	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_N$	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$
Aksial	-193,0	-196,3	0,983	1,008
	-194,9	-196,3	0,993	1,006
	-196,7	-196,3	1,002	1,004
	-198,0	-196,3	1,008	1,001
	-199,0	-196,3	1,013	1,001
	-199,0	-196,3	1,013	1,001

Tabell F.5 – Wedge 1 - Vertical path: Forhold mellom den horisontale komponenten til radiell kileteori og vanlig bjelketeori, samt S11 fra Abaqus. Spenninger er i MPa og forholdet er dimensjonsløst.

	Horisontale komponenter	Bjelketeori	Forhold	
	$\sigma_r \cdot \cos \theta$	σ_M	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/\sigma_N$	$(\sigma_r \cdot \cos \theta)/S11$
	-198,1	-196,3	1,009	1,002
	-196,9	-196,3	1,003	1,004
	-195,2	-196,3	0,994	1,006
	-193,0	-196,3	0,983	1,008
Skjær	-4076,5	-4101,5	0,994	1,020
	-3297,1	-3281,2	1,005	1,006
	-2494,1	-2460,9	1,014	1,004
	-1673,0	-1640,6	1,020	1,002
	-420,2	-410,1	1,024	1,000
	420,2	410,1	1,024	1,001
	1673,0	1640,6	1,020	1,002
	2494,1	2460,9	1,014	1,004
	3297,1	3281,2	1,005	1,007
	4076,5	4101,5	0,994	1,020
Moment	-2261,8	-2313,2	0,978	1,019
	-1891,3	-1902,8	0,994	1,000
	-1447,1	-1434,3	1,009	0,992
	-985,0	-965,9	1,020	0,985
	-270,7	-263,2	1,028	0,981
	211,1	205,2	1,029	0,980
	926,8	907,8	1,021	0,985
	1390,7	1376,3	1,010	0,991
	1837,4	1844,7	0,9960	0,999
	2261,8	2313,2	0,978	1,019

Nå er Den høyes ord kvedet
i Den høyes hall,
til beste for menneskebarn,
til ugagn for jotunsønner.
Hell for den som kvad,
hell for den som kan,
nyte dem nå den som lærte,
hell for den som hørte.

Håvamål vers 164
Til bokmål av Ludvig Holm-Olsen (1975)

