

Harald Skjulhaug

Uttesting av noen enkle men tilstrekkelige alternativer for diskret regulering av kontinuerlige prosesser

Masteroppgave i teknisk kybernetikk

Veileder: Trond Andresen

Juni 2021

Harald Skjulhaug

Uttesting av noen enkle men tilstrekkelige alternativer for diskret regulering av kontinuerlige prosesser

Masteroppgave i teknisk kybernetikk
Veileder: Trond Andresen
Juni 2021

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for teknisk kybernetikk



Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I denne rapporten er det gjennomgått hvordan det er mulig å konstruere en diskret regulator til en kontinuerlig prosess, ved hjelp av kontinuerlige analysemetoder. Det eksisterer flere måter for å konstruere en diskret regulator med kontinuerlig analyse. De kontinuerlige metodene denne rapporten baserer seg på, er tilnærminger til et holdelement (analog-til-digital (A/D) omsetter) og w-transformasjon.

For å teste metodene for kontinuerlig analyse for konstruksjon av en diskret regulator, blir det gjennomført flere eksperimenter. I hovedsak går eksperimentene ut på å teste 10 strengt propre monovariabelt lineære tidsinvariante transferfunksjoner. Konklusjonen med anbefalingen for bruk av metoder er basert på disse eksperimentene.

De kontinuerlige metodene som det til slutt anbefales å bruke er: w-transformasjon som er mest presis, men er litt tung å implementere. Den rene tidsforsinkelsen som stort sett gir et litt konservativt resultat, men er enklere å implementere enn w-transformasjonen. Padé-approksimasjon som er enda enklere, men kan gi et litt dristig resultat. Disse metodene er vurdert til å gi et tilstrekkelig resultat sett opp mot kompleksiteten ved å bruke metodene.

English title:
Testing of some simple but sufficient options for
discrete control of continuous processes

Abstract

The report will describe how it is possible to construct a discrete controller to a continuous process, with continuous analysis methods. There are several ways to construct a discrete controller with continuous analysis methods. The continuous methods this report is based on, are approximations to a digital-to-analog converter (D/A) and w-transform. The D/A – converter is based on zero-order hold method.

To test the continuous analysis methods for construction of a discrete controller, several experiments are carried out. The experiments are mainly based on testing 10 strictly proper single-input single-output linear time-invariant transfer functions. The conclusion including the recommendation for the use of methods, is based on these experiments.

The continuous methods recommended to use, based on the experiments in this report are: w-transform that is most precise, but a bit complicated to implement.

The pure time-delay which mostly gives a slightly conservative result but is easier to implement than the w-transform.

Padé approximant which is even simpler but can give a slightly bold result. These methods are considered to give a sufficient result evaluated against the complexity of using the methods.

Forkortelser og begrepsavklaring

Tabell 1: Forkortelser

A/D	Analog til Diskret konverterings mekanisme
D/A	Diskret til Analog konverterings mekanisme
Holdeelement	En spesifikk metode for å omforme et signal fra diskret til analogt
Tasting	“Omforming av et kontinuerlig signal til diskret” Engelsk: “sampling”
$h_u()$	Transferfunksjon for systemet som skal reguleres
$h_r()$	Transferfunksjon for regulatoren
$h_0()$	Sløyfetransferfunksjonen
Sløyfetransferfunksjonen	Produktet av alle transferfunksjonene langs reguleringsløyfen “ $h_0()$ ”
$h(j\omega)$	Frekvensrespons
$ h(j\omega) $	Amplitudeforholdet
$\angle h(\omega)$	Fasevinkelen eller faseforskyvningen
Knekkfrekvensen	Der den asymptotiske kurven knekker for et ledd i en transferfunksjon
Kryssfrekvensen (ω_c)	Den frekvensen som krysser 0 [dB] linjen i et Bodediagram
ΔK	Forsterkningsmargin
Normale stabilitetsmarginer	Valgt for denne oppgaven stabilitetsmarginer $\psi \geq 45^\circ$ og $\Delta K \geq 6$, [dB] se delkapittel 6.1
Δ	Greske bokstaven “Delta” brukt i denne rapporten til å referere til en spesifikk ligning
Konvergeringsintervall	En gitt tall serie der alle tall innenfor tall seien, tilsiser at en gitt rekke konvergerer.
Proper	En transferfunksjon som er realiserbar er proper.
Strengt proper	En transferfunksjon med høyere orden i nevneren enn i telleren.
LTI-system	Lineært tidsinvariant system
ZOH	Engelsk forkortelse for “Zero-order hold”
TF	Forkortelse for Transferfunksjon
TF for ZOH	Transferfunksjon for “Zero-order hold”

Innholdsfortegnelse

Sammendrag	i
Abstract	ii
Figurer	vi
Tabeller	ix
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Problembeskrivelse	1
2 Problematikk med diskret regulering av kontinuerlige prosesser	2
3 Diverse reguleringsteknikk teori	5
3.1 Betinget stabilitet	5
3.2 Følgeforholdet, avviksforholdet og reguleringsgrad	5
3.3 Bode og Nyquistdiagram	5
3.4 Nicholsdiagram	7
3.5 Stabilitetsmarginer	9
3.6 Det komplekse plan og rotkurver	9
3.7 Tasteteoremet	10
3.8 PD-regulator	10
3.9 z-transformasjon	10
3.10 Diskrete regulatorer og Hybride systemer	11
4 w-transformasjon	13
4.1 Eksempel med frekvensrespons fra $h(w)$ sammenlignet med $h(s)$.	14
4.2 Finne $h(w)$ fra tilstandsromrepresentasjon	15
4.3 Utfordringer med å finne $h(w)$	16
4.4 Finne $h(w)$ via z-domene	18
4.5 Diskret regulator i w-domene	18
4.5.1 Eksempel på en regulator representert i w-domene	18
4.6 Tidsforsinkelse i w domene	20
4.7 Hybrid system i w-domene	20
4.7.1 Eksempel på hybrid system i w-domene	21
4.8 Praktisk implementasjon av w-transformasjon	22
5 Helt kontinuerlig analyse og tilnæringsmetoder med kontinuerlig analyse	24
5.1 Helt kontinuerlig analyse	24
5.2 Tilnæringsmetoder	24
5.2.1 Kontinuerlig transferfunksjon for holdeelement og taster .	24
5.2.2 Tidsforsinkelse som tilnæringsmetode for holdeelement .	25
5.2.3 Første ordens Padé-approksimasjon av tidsforsinkelse . . .	27
5.2.4 Modifikasjon av Padé-approksimasjon av en tidsforsinkelse	29

5.2.5	Drøfting av modifikasjon av Padé-approksimasjon av en tidsforsinkelse	31
6	Generell metode for diskret regulering av en kontinuerlig prosess	33
6.1	Stabilitetsmarginer brukt i eksperimenter	33
6.2	Valg av tastetid	33
6.3	Generelt for tilnæringsmetodene	33
6.3.1	”Control System Designer” et reguleringsverktøy for MATLAB LAB	34
6.4	Implementasjon i Simulink	35
7	Eksperimenter	37
7.1	Introduksjon til eksperimenter	37
7.2	Åpen sløyfe respons	38
7.3	Eksperiment med system uten dynamikk	40
7.4	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 1	44
7.4.1	Eksperiment 1	44
7.4.2	Eksperiment 2	46
7.4.3	Eksperiment 3	51
7.4.4	Eksperiment 4	52
7.4.5	Oppsummering av eksperimenter med transferfunksjon nummer 1	54
7.5	Eksperiment med transferfunksjon nummer 2	54
7.6	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 3	58
7.7	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 4	62
7.7.1	Eksperiment 1	63
7.7.2	Eksperiment 2	65
7.7.3	Eksperiment 3	68
7.7.4	Oppsummering av analyse av transferfunksjon nummer 4	70
7.8	Eksperiment med transferfunksjon nummer 5	71
7.9	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 6	75
7.9.1	Eksperiment 1	75
7.9.2	Eksperiment 2	78
7.9.3	Oppsummering av eksperimenter med transferfunksjon nummer 6	79
7.10	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 7	79
7.10.1	Eksperiment 1 med tastetid lik 0.25 sekunder	80
7.10.2	Eksperiment 2 med tastetid lik 0.125	82
7.10.3	Eksperiment 3 med PI-regulator	84
7.10.4	Oppsummering av eksperimenter med transferfunksjon nr. 7	86
7.11	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 8	88
7.11.1	Normalt eksperiment	88
7.11.2	Eksperiment med begrensende faktor av derivatorvirkning	89
7.12	Eksperimenter med transferfunksjon nummer 9	93
7.12.1	Eksperiment 1, uten transportsforsinkelse	93

7.12.2	Eksperiment 2, med transportforsinkelse	94
7.12.3	Oppsummering av eksperiment med transferfunksjon nummer 9	95
7.13	eksperimenter med transferfunksjon nummer 10	96
7.13.1	Eksperiment 1 med mye fase løft og uten transportforsinkelse	96
7.13.2	Eksperiment 2 med tilstrekkelig fase løft og uten transportforsinkelse	97
7.13.3	Sammenligning mellom eksperiment 1 og 2	99
7.13.4	Eksperiment 3 med tilstrekkelig fase løft og med transportforsinkelse	99
7.13.5	Eksperiment 4 med tilstrekkelig fase løft og med transportforsinkelse	100
7.13.6	Oppsummering fra eksperiment med transferfunksjon nr. 10101	
8	Drøfting	103
8.1	Enkle og vanskelige systemer	103
8.1.1	Vanskelige systemer	103
8.1.2	Enkle systemer	103
8.2	w-transformasjon sammenlignet med tilnæringsmetodene . . .	103
8.3	w-transformasjon med tidsforsinkelse i et system	104
8.4	Drøfting rundt ukonsistent amplitudefall ved w-transformasjon .	104
8.5	Vurdering av presisjon ved metodene	105
8.5.1	Ren Padé-approksimasjon sammenlignet med modifisert Padé-approksimasjon med $k = 0.32$	105
8.5.2	Presisjon for TF for ZOH	106
8.5.3	Presisjon for w-transformasjon	106
8.5.4	Presisjon med tidsforsinkelse og første ordens Padé-approksimasjon	106
8.6	Andre svakheter	107
8.7	Høyere ordens Padé-approksimasjon	107
9	Konklusjon	109
	Referanser	111
A	Diagrammer	I
A.1	Forstørrelse av figur 29	I
A.2	Nyquistdiagram med prosesser fra tabell 5 med forsterkning lik 1	II
B	Ekstra resultater	III
B.1	Ekstra resultat med transferfunksjon nummer 2	III
B.2	Ekstra resultat med transferfunksjon nummer 3	IV
C	Tilsendte kilder fra Veileder	V
C.1	Approksimasjon til sample and hold	V

Figurer

1	Blokkdiagram for å illustrere bruk av holdeelement i et reelt tilfelle[1].	2
2	Illustrasjon på hvordan holdeelementet fungerer[1].	3
3	Illustrasjon av hvordan tasting fungerer[1].	4
4	Eksempel på Bodediagram av transferfunksjon $h_0 = \frac{1}{s+10}$	6
5	Eksempel på Nyquistdiagram av transferfunksjon $h_0 = \frac{1}{s+10}$	7
6	Eksempel på Nicholsdiagram av transferfunksjon $h_0 = \frac{1}{s(s+0.1)(s+10)}$ vist på norsk måte	8
7	Eksempel på Nicholsdiagram av transferfunksjon $h_0 = \frac{1}{s(s+0.1)(s+10)}$ vist på amerikansk måte	9
8	Illustrasjon av to metoder til å konstruere et diskret system til en kontinuerlig prosess[8].	11
9	Bode av $h(s)$ og $h(w)$	15
10	Frekvensrespons av en diskretisert regulator, vist sammen med kontinuerlig respons for sammenligning.	19
11	frekvensrespons basert på samme kontinuerlige regulator som i figur 10, men ved bruk av en annen tastetid ved diskretisering.	20
12	Blokkdiagram for å illustrere ideell kontinuerlig tilnæringsmetode for regulering av kontinuerlig system [1].	24
13	Blokkdiagram for å illustrere transferfunksjonen for et holdeelement med tasting.	25
14	Blokkdiagram for å illustrere tidsforsinkelse som en tilnæringsmetode for holdeelement[1].	25
15	Illustrasjon av tidsforsinkelse på en halv tastetid, sammenlignet med et holdeelement[1].	26
16	Bodediagram av transferfunksjonen for ZOH og transferfunksjonen for en halv tidsforsinkelse.	27
17	Blokkskjema for bruk av $\frac{1-e^{-Ts}}{1+\frac{T}{4}s}$ som tilnærming av holdeelement	28
18	Fase sammenligning mellom $e^{-\frac{T}{2}s}$ og $\frac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}$	28
19	Sammenligning mellom $\frac{1}{Ts}(1 - e^{-Ts})$ og $\frac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}$ i et bodediagram.	29
20	Bodediagram av $\frac{1-k\frac{T}{2}s}{1+(1-k)\frac{T}{2}s}$ med forskjellige verdier av k , sammenlignet med $\frac{1}{Ts}(1 - e^{-Ts})$. T er lik 0.1 sekunder.	30
21	Nyquistdiagram av $\frac{1-k\frac{T}{2}s}{1+(1-k)\frac{T}{2}s}$ med forskjellige verdier av k , sammenlignet med $\frac{1}{Ts}(1 - e^{-Ts})$	31
22	Blokkdiagram for å illustrere hvordan de kontinuerlige metodene blir testet ut.	34
23	Illustrasjon av hvordan blokkdiagram fungerer i Simulink[25].	36
24	Åpen sløyfe sprangrespons til en enkel første ordens respons med tidskonstant på 5 sekunder, sammen med diskritisert måling og tilnærming for diskritisert måling.	39

25	Forstørret versjon og fjerning av to grafer i figur 24.	40
26	Nyquistdiagram for tilnærming av prosess uten dynamikk, med forsterkning lik en.	41
27	Samme figur som figur 26, bare at analysen er stoppet ved Nyquist-frekvensen.	42
28	Sprangrespons med prosess og forsterkning vist i tabell 5.	43
29	Nyquistdiagram basert på funksjonen i tabell 5.	44
30	Nicholsdiagram for transferfunksjon $\frac{K}{s^2}$ (h_u) koblet i serie med regulatoren h_r , der det er brukt forskjellig tilnærming for diskretisering av h_u . I tillegg til et helt kontinuerlig tilfelle av h_0	45
31	Sprangrespons med de forskjellige regulatorene til h_r fra tabell 7.	47
32	Nicholsdiagram til prosessen $\frac{K}{s^2}$, tilnærmet for et holdelement med regulatorer vist i tabell 7	48
33	Nicholsdiagram til prosessen $\frac{K}{s^2}$, tilnærmet for et holdelement med den samme regulatoren.	49
34	Kontinuerlig Bodediagram av $h_r(s)$ og kontinuerlig tilnærming av diskret Bodediagram av $h_r(w)$	50
35	Sprangrespons ved bruk av begrenset derivator effekt på $T_{db} = \frac{T}{2}$	52
36	Sprangrespons, der fasen ikke er løftet mer enn det tilstrekkelige.	53
37	Sprangrespons til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{s}$ med de forskjellige regulatorene.	55
38	Nicholsdiagram til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{s}$ med de forskjellige regulatorene.	56
39	Bodediagram for h_0 med w-transformasjon og ren tidsforsinkelse.	57
40	Sprangrespons til systemet $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ med de forskjellige regulatorene.	59
41	Bodediagram av $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ med regulatorene som er generert med ren tidsforsinkelse, TF for ZOH og w-transformasjon.	60
42	Sprangrespons på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ med nye regulatorer.	62
43	Sprangrespons nummer 1 på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	64
44	Samme figur som figur 43 bare forstørret versjon.	65
45	Sprangrespons nummer 2 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	66
46	Samme figur som figur 45 bare i en forstørret versjon.	67
47	Nicholsdiagram fra andre omgang med konstruksjon av regulatorer til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	68
48	Sprangrespons nummer 3 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	69
49	Samme figur som figur 48 bare i forstørret versjon.	70
50	Sprangrespons på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s)(T_2s+1)}$	72
51	Samme figur som figur 50, men forstørret inn på toppen av oversvingningen i sprangresponsen.	73
52	Bodediagram for prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s)(T_2s+1)}$ med forskjellige tilnærminger for et holdelement.	74
53	Sprangrespons med diskret og kontinuerlig regulator.	76
54	Nicholsdiagram av prosessen med forskjellige analysemetoder.	77
55	Sprangrespons der diskret regulering er ignorert, sammen med sprangrespons fra figur 53.	78

56	Sprangrespons med regulatorer fra tabell 19.	79
57	Sprangrespons av prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	81
58	Forstørret versjon av figur 57.	82
59	Sprangrespons med prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	83
60	Samme figur som figur 59 bare forstørret inn på oversvingningen i sprangresponsen.	84
61	Sprangrespons på system $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$, med forskjellige PI-regulatorer.	85
62	Samme figur som figur 61 bare forstørret på oversvingningen i sprangresponsen.	86
63	Bodediagram konstruert med transferfunksjoner fra tabell 23.	87
64	Sprangrespons med prosessen $h_u(s) = \frac{(1+T_1s)e^{-\tau s}}{s^2(1+T_2s)}$ med regulatorer fra tabell 24.	89
65	Sprangrespons T_{db} lik $\frac{T}{\pi}$, $\frac{T}{100\pi}$ og $\frac{T}{10\pi}$	90
66	Forstørret versjon av figur 65.	91
67	Nicholsdiagram for sprangrespons vist i figur 65.	92
68	Pådrag fra de diskrete regulerene, som samsvarer med sprangresponsen vist i figur 65.	93
69	Sprangrespons for systemet $h_u(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2(1+T_1s)}$, med regulatorer gitt i tabell 25.	94
70	Sprangrespons for systemet $h_u(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2(1+T_1s)}$, med regulatorer gitt i tabell 26.	95
71	Sprangrespons for prosessen $h_u(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2(1+T_1s)}$, med regulatorer gitt i tabell 27.	97
72	Sprangrespons for systemet $h_u(s) = \frac{(1-T_1s)e^{-\tau s}}{s^2}$, med regulatorer gitt i tabell 28.	98
73	Stabilitetsundersøkelse med w-transformasjon vist for eksperiment 1 og 2.	99
74	Sprangrespons for prosessen $h_u(s) = \frac{(1-T_1s)e^{-\tau s}}{s^2}$	100
75	Sprangrespons for $h_u(s) = \frac{(1-5s)e^{-1s}}{s^2}$ med regulatorer vist i tabell 30.	101
76	III
77	IV

Tabeller

1	Forkortelser	iii
2	Noen tallverdier for fasefallet vist i figur 20.	32
3	Oversikt over alle transferfunksjoner som er blitt testet i denne rapporten.	37
4	Forklaring på forkortelser brukt i tabeller i kapittel 7.	38
5	Forsterkning sammenlignet med prosessen, der holdeelementet er tatt høyde for på forskjellige måter.	43
6	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.	46
7	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.	47
8	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene, med begrenset derivator ledd på $T_{db} = \frac{T}{2}$	51
9	Regulatorer der fasen ikke har blitt løftet mer enn det tilstrekkelige.	53
10	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.	54
11	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.	58
12	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene, men her er forholdet mellom forsterkning og integralvirkning justert.	61
13	Regulatorer som er generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene. Fra eksperiment nummer 1 på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	63
14	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene. Fra eksperiment nummer 2 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	66
15	Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene. Fra eksperiment nr 3 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	69
16	Regulatorer i form av en ren forsterkning som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.	71
17	Regulatorer i form av en ren forsterkning som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.	75
18	To regulatorer, den ene er funnet med helt kontinuerlig analyse og den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.	76
19	To regulatorer, funnet på lik linje som i tabell 18 bare med fritt valg av T_3	79
20	Regulatorer fra eksperiment nr. 1 med prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	80
21	Regulatorer fra eksperiment nr. 2 med prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	83

22	Regulatorer fra eksperiment nr. 3 av systemet $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	85
23	Tilnærminger for $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ med holdelement og taster.	87
24	To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse og den andre med forskjellige metoder for diskret regulering. . . .	88
25	To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for konstruksjon av diskret regulator.	94
26	To regulatorer; den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.	95
27	Regulatorer funnet med helt kontinuerlig analyse, tilnæringsmetoder og bruk av w-transformasjon.	96
28	To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.	98
29	To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.	100
30	Regulatorer funnet med helt kontinuerlig analyse, tilnæringsmetoder og bruk av w-transformasjon.	101
31	Forsterkinger til prosessen $\frac{1}{s}$	III
32	Regulatorer	IV

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Denne masteroppgaven skrives som avslutning på en 2-årig master utdanning i industriell kybernetikk ved NTNU. Oppgaven er valgt fordi studenten ønsket en direkte kybernetisk oppgave, som er generell og ikke knyttet til en spesiell prosess. Temaet ble valgt fordi studenten ønsker å få en dypere forståelse i hvordan et diskret system kan analyseres med kontinuerlig metode. Bedre datateknologi gir mulighet for å bruke metoder som tidligere ikke var reelle valg alternativ. Studenten valgte derfor en oppgave som gir mulighet for å få bedre innblikk i om det er hensiktsmessig å ta i bruk andre metoder, enn eksisterende praksis. Denne oppgaven skal beskrive en arbeidsmengde som tilsvarer 30 studiepoeng ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

1.2 Problembeskrivelse

Det skal kartlegges og forklares forskjellige metoder for hvordan det kan konstrueres en diskret regulator for en kontinuerlig prosess. Metodene skal sammenlignes med tilnæringsmetoder for å konstruere en diskret regulator, for den samme kontinuerlige prosessen. Metodene skal så prøves ut på et utvalg av forskjellige prosesser. Metodene skal vurderes med hensyn til hvor enkle de er å benytte, opp mot hvor tilfredsstillende de fungerer.

Med forskjellige typer prosesser menes det mer presist forskjellige typer transferfunksjoner i s-dommene. Alle disse transferfunksjonene skal representere kontinuerlige systemer.

Metoder som skal være diskutert i denne rapporten er:

- w-transformasjon.
- Bruk av $e^{-\frac{T_s}{2}}$ som en tilnærming for holdeelement på et kontinuerlig system.
- Bruk av første ordenstilnærmingen av $e^{-\frac{T_s}{2}}$ som er $\frac{1-\frac{T_s}{4}}{1+\frac{T_s}{4}}$ som en tilnærming for holdeelement på et kontinuerlig system.
- Modifikasjoner av $\frac{1-\frac{T_s}{4}}{1+\frac{T_s}{4}}$, skal testes ut som tilnærming for holdeelement
- Bruk av $\frac{1-e^{-T_s}}{T_s}$, som en tilnærming for holdeelement på et kontinuerlig system. Denne metoden skal ikke vektlegges på lik linje med de andre metodene.

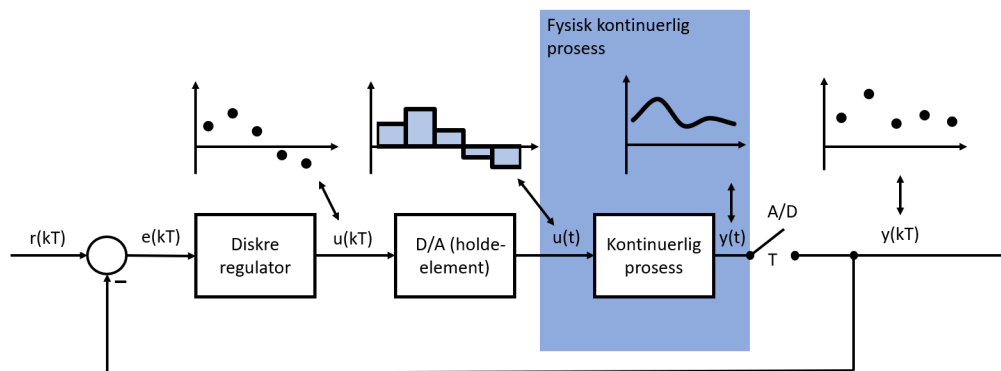
2 Problematikk med diskret regulering av kontinuerlige prosesser

Datamaskiner fungerer i sin natur tidsdiskret, samtidig som datamaskiner blir brukt til å regulere kontinuerlige systemer. Dette vil føre til feil i analysen, hvis systemet analyseres som helt kontinuerlig. I utgangspunktet fungerer en kontinuerlig analyse ved at pådraget på systemet settes inn i det samme tidspunktet som målingen foretas. I et virkelig tilfelle vil det av forskjellige årsaker fremkomme forsinkelser fra måling til pådrag.[1]

Boken “Reguleringsteknikk” av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss, beskriver at: “Den viktigste forsinkelsesfaktor skyldes diskret regulering” [1].

En diskret tallfølge framkommer av at det tas måling av en eller flere kontinuerlige variabler med jevne mellomrom. Dette blir beskrevet som tasting i boken “Reguleringsteknikk”. Tasting er en oversettelse fra det etablerte engelske faguttrykket “sampling”. Etter tasting utfører datamaskinen en beregning som omgjøres til et kontinuerlig signal. Dette trinnet skaper en viktig tidsforsinkelse når taste-tidsintervallet blir relativt stort i forhold til prosessens dynamikk. Datamaskinens beregning er den diskrete regulatoren. [1]

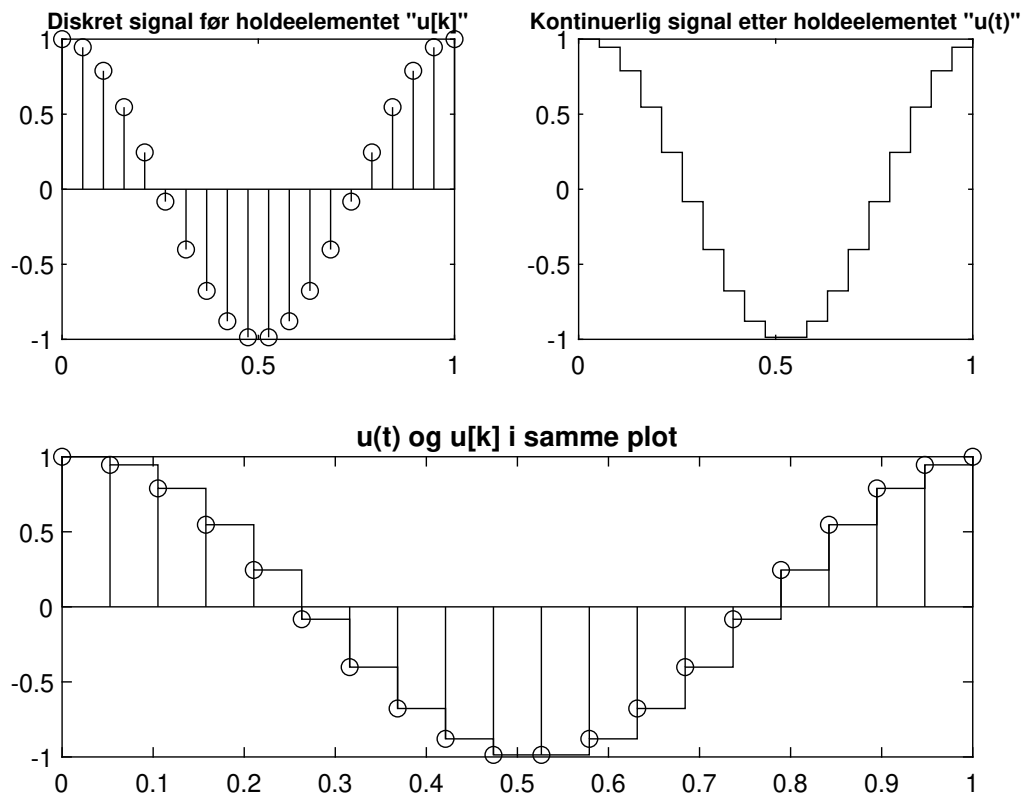
Dette danner grunnlaget for problematikken med diskret regulering av kontinuerlig prosesser. For å kunne håndtere slike situasjoner må det brukes flere analyseverktøy enn kun ren kontinuerlig reguleringsteknisk analyse. Under vises blokkskjema (figur 1) som skal illustrere problematikken med diskret regulering av kontinuerlige prosesser, i det monovariabel tilfelle. [1].



Figur 1: Blokkdiagram for å illustrere bruk av holdeelement i et reelt tilfelle[1].

Figur 1 viser hvordan en diskret regulator fungerer for å regulere et kontinuerlig system. Utgangen $y(kT)$ fra figuren er den tastede utgangen av $y(t)$ fra den kontinuerlige prosessen. Hakeparentes $[]$ symboliserer diskret tid. Derfor kan $y(kT)$ skrives som $y[k]$ når tastetiden T er gitt. Pådraget $u(t)$ er et kontinuerlig signal som er konstruert av et holdeelement. Holdeelementet tar inn $u[k]$ som er en rekke av diskrete pulser og omgjør disse til et kontinuerlig signal. Holde elementet kan forklares konseptuelt ved at det beholder den diskrete pulsen konstant, helt til det kommer en ny verdi. [1]

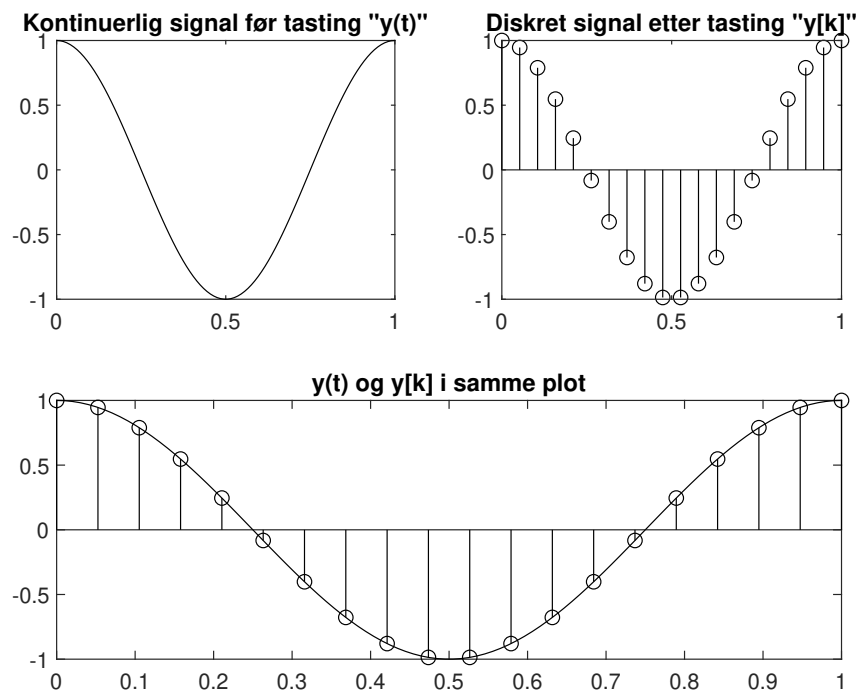
Figur 2 skal illustrere hvordan holdeelementet fungerer, $u(t)$ og $u[k]$ er i analogi med figur 1.



Figur 2: Illustrasjon på hvordan holdeelementet fungerer[1].

ZOH er den engelske ¹ forkortelsen for et holdeelement fra “zero-order hold” [2]. Figur 3 skal illustrere hvordan tasting fungerer, $y(t)$ og $y[k]$ er i analogi med figur 1.

¹Med “engelsk” er det som i det engelske fagspråket.



Figur 3: Illustrasjon av hvordan tasting fungerer[1].

3 Diverse regulerings-teknikk teori

I dette kapitlet vil forskjellig regulerings-teknisk teori relevant for denne rapporten bli gjennomgått.

3.1 Betinget stabilitet

Betinget stabilitet er et system som har spesielle stabilitets kriterier. Ved å plote et Bodeplot av et system som har "betinget stabilitet", blir faseforskyvningen til høyre og til venstre for fasemarginen lik eller under -180° . Det vil i praksis si at avtagende positiv forsterkning i tilbakekoblingsløyfen vil føre til et ustabilt system. [1]

3.2 Følgeforholdet, avviksforholdet og reguleringsgrad

Responsen til et monovariabelt system består av summen av to bidrag. Et som skyldes referansen og et som skyldes en forstyrrelse. Det er derfor hensiktsmessig å se på disse to hver for seg. Dette er mulig for lineære systemer. For å se på responsen for et system er det innført to ligninger: [1]

$$M(s) = \frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} = \frac{y}{r}(s) = \text{følgeforholdet} \quad (1a)$$

$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} = \frac{e}{r}(s) = \text{avviksforholdet} \quad (1b)$$

Følgeforholdet $M(s)$ er et uttrykk for hvor godt et system klarer å få utgangen y til å følge en referanse. Mens avviksforholdet gir uttrykk for hvor stort reguleringsavviket e er i forhold til referansen r . $N(s)$ kan også finnes ved å undersøke systemets respons for en gitt forstyrrelse v . Dermed kan også $N(s)$ finnes som en reguleringsgrad med ligningen under. [3]: [1]

$$N(s) = \frac{\text{Virkningen som } v \text{ har på utgangen med tilbakekobling}}{\text{Virkningen som } v \text{ har på utgangen uten tilbakekobling}} \quad (2)$$

$N(s)$ som reguleringsgrad blir brukt til å uttrykke hvilken grad tilbakekoblede systemer reduserer virkningen en forstyrrelse har på utgangen [3].

$N(s)$ og $M(s)$ har sin ekvivalent i frekvensplanet med [1]:

$$M(j\omega) = \frac{h_0(j\omega)}{1 + h_0(j\omega)} \quad (3a)$$

$$N(j\omega) = \frac{1}{1 + h_0(j\omega)} \quad (3b)$$

3.3 Bode og Nyquistdiagram

Bode og Nyquistdiagram er to hovedformer for grafisk representasjon av den komplekse størrelsen $h(j\omega)$. $h(j\omega)$ er en frekvensrespons som finnes ved å sette $s = j\omega$ inn i en transferfunksjon $h(s)$. Ved å undersøke systemets frekvensrespons i et åpen-sløyfe system kan vi finne systemets stabilitetsmarginer.

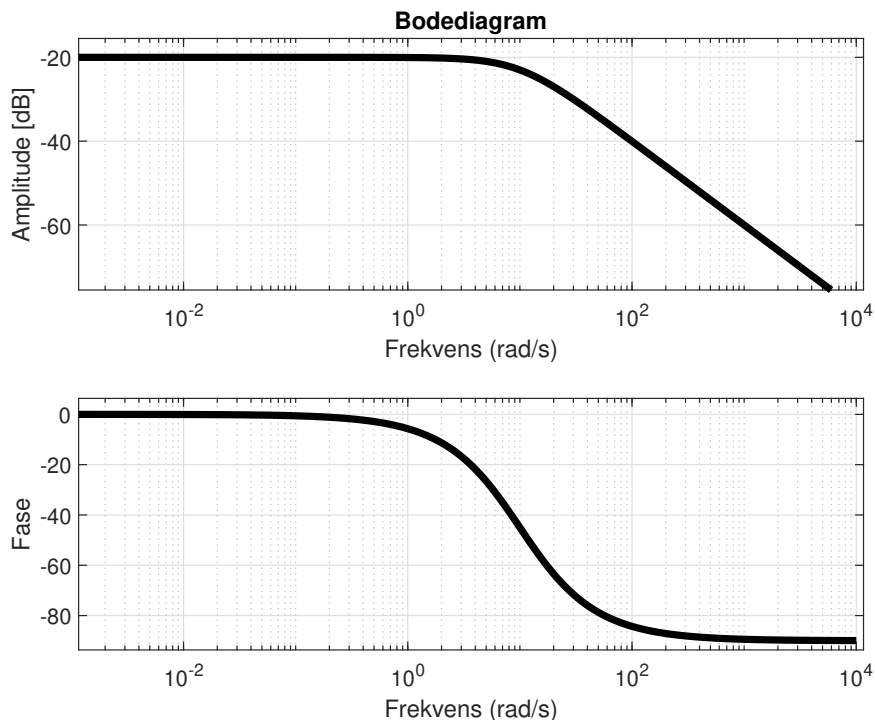
Bodediagram eller amplitude/fase/frekvens-diagram (AFF-diagram), blir grafisk fremstilt i to deler. I første del er tallverdien $|h(j\omega)|$, i øverste del av diagrammet. Nederste del framstiller vinkelen $\angle h(\omega)$, begge funksjoner av ω . Den horisontale aksene kalles for abscissaksen og er felles for begge deler av Bodediagramet. Abscissaksen er ofte skalert logaritmisk, og er også skalert logaritmisk i denne rapporten. $|h(j\omega)|$ er ofte gitt i desibelskalen, og enheten er definert som: [1]

$$|h(j\omega)|[\text{dB}] = 20\log_{10}|h(j\omega)|$$

Antall grader kryssfrekvensen er unna -180° i fase forskyvning, angir fasemarginen i et Bodediagram. Kryssfrekvensen er den frekvensen som krysser 0 [dB] linjen i et Bodediagram, og er gitt ved: [3]

$$|h(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ [dB]}$$

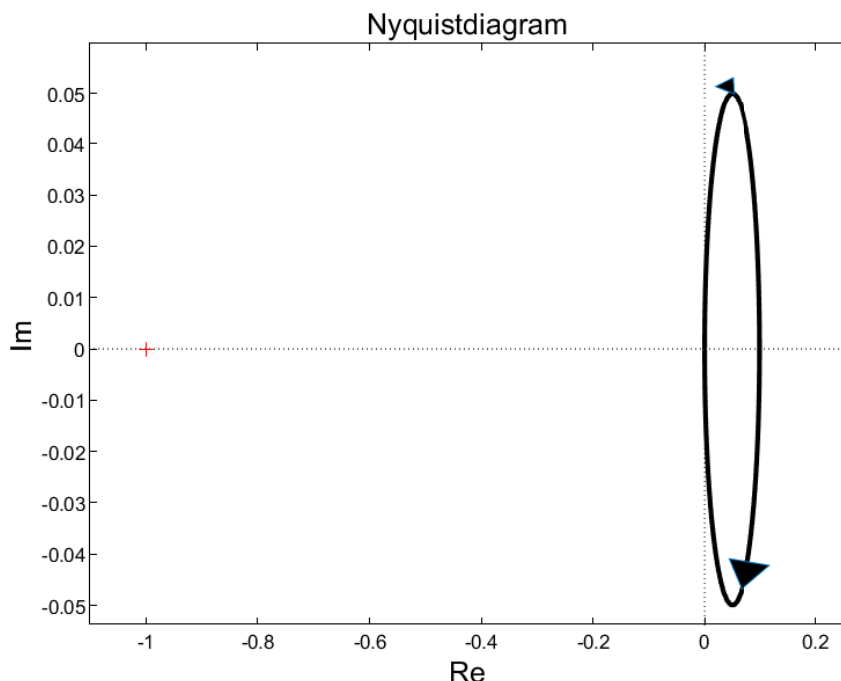
Forsterkningsmarginen blir funnet i et Bodediagram ved å avlese avstanden fra amplitudekurven til 0 [dB] linja der fasen er på -180° . På grunn av den logaritmiske skalaen i amplitude delen i et Bodediagram, kan vi addere $|h(j\omega)|$ og $\angle h(\omega)$ hver for seg, når to transferfunksjoner blir multiplisert. [1] Et eksempel på Bodediagram er gitt i figur 4.



Figur 4: Eksempel på Bodediagram av transferfunksjon $h_0 = \frac{1}{s+10}$

Nyquistdiagram framstiller endepunktet av vektoren $h(j\omega)$ i det komplekse planet. Endepunktet danner en kurve, i forhold til endret verdi av frekvensen. Det kritiske punktet for stabilitet er $(-1, 0)$. Avstanden fra punktet $(-1, 0)$ langs den

reelle aksen til kuven indikerer forsterkningsmarginen. Ved å måle avstanden blir ikke forsterkningsmarginen direkte funnet, men kan tolkes indirekte. Antall grader som kurven kan roteres rundt origo, før kurven treffer punktet $(-1, 0)$, angir fasemarginen. Andre navn for en slik framstilling av $h(j\omega)$ er polardiagram og en stedkurve. Et eksempel på Nyquistdiagram av den samme transferfunksjonen som i figur 4 er vist i figur 5.[1]



Figur 5: Eksempel på Nyquistdiagram av transferfunksjon $h_0 = \frac{1}{s+10}$

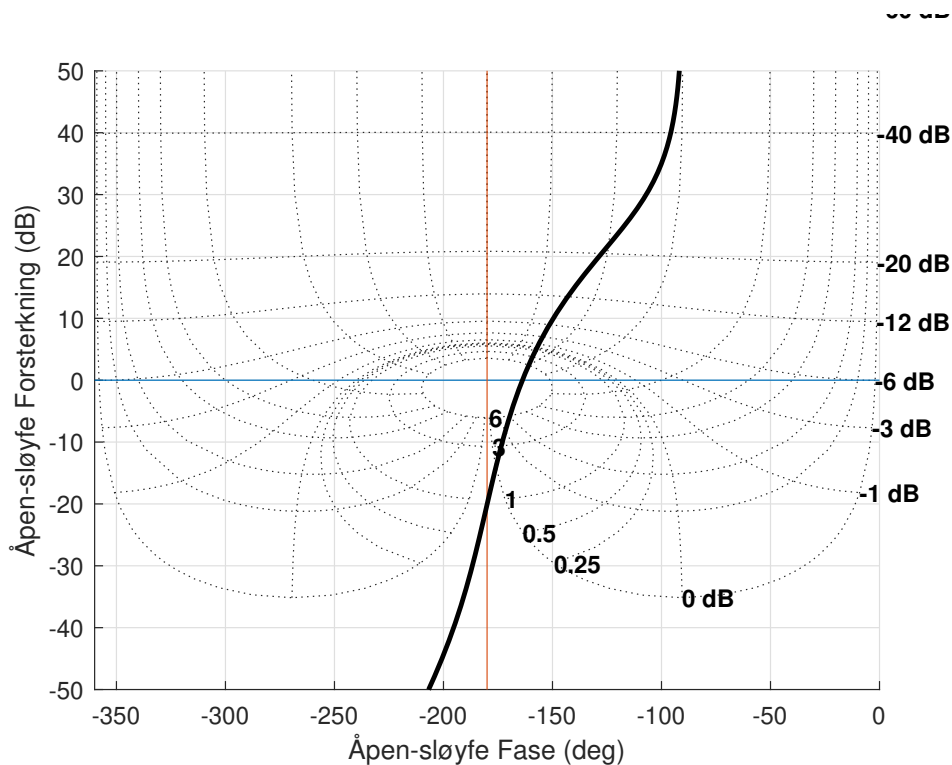
3.4 Nicholsdiagram

Nicholsdiagram er som Bode og Nyquistdiagram en metode for å grafisk representere den komplekse størrelsen $h(j\omega)$. Dette diagrammet framstiller $|h(j\omega)|$ [dB] som en funksjon av $\angle h(j\omega)$, med ω som parameter. Den vertikale aksene gir $|h_0(j\omega)|$, mens den horisontale aksene gir $\angle h_0(j\omega)$. I tillegg til framstilling av $|h(j\omega)|$ er det tegnet inn kurver “isokurve” som gjør det mulig å ta direkte avlesning av $M(j\omega)$ og $N(j\omega)$. Isokurver uttrykker sammenhengen: [3]

$$N(j\omega) = \frac{1}{1 + h_0(j\omega)}$$

Ved å plote $h_0(j\omega)$ kan $N(j\omega)$ leses av direkte, ved å se på verdien av isokurvene langs $N(j\omega)$. $M(j\omega)$ kan leses ved å speile $h_0(j\omega)$ om punktet $(-180, 0)$, og vi får en graf av $1/h_0(j\omega)$. Forsterkningsmarginen kan leses av ved å finne avstanden langs en loddrett linje til kurven som representerer $h_0(j\omega)$, fra punktet $(-180,$

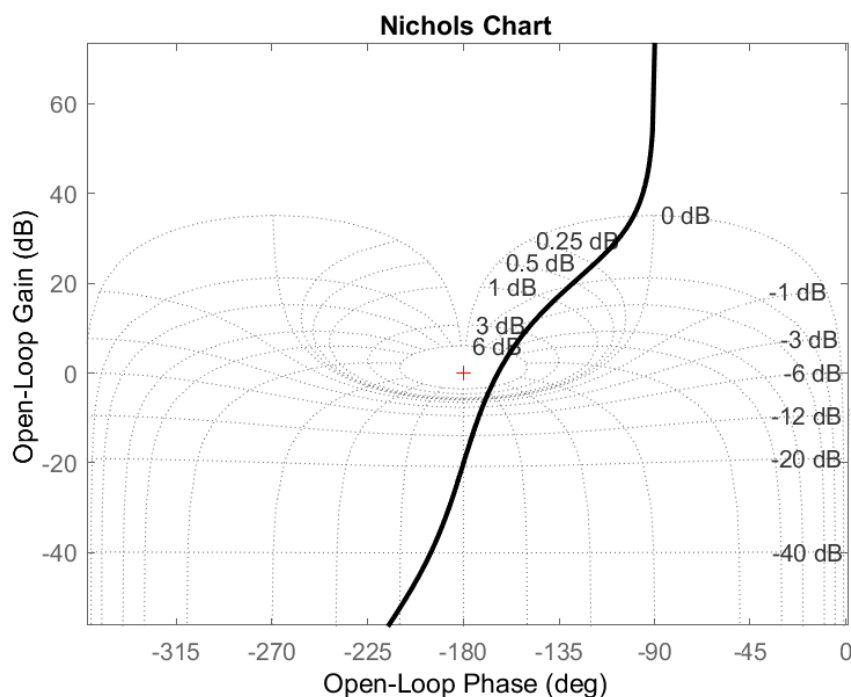
0). Fasemarginen kan leses av ved å finne avstanden langs en horisontal linje til kurven som representerer $h_0(j\omega)$, fra punktet $(-180, 0)$. Figur 6 viser et eksempel på Nicholsdiagram som er plottet slik det beskrives i norsk litteratur. [1][3]



Figur 6: Eksempel på Nicholsdiagram av transferfunksjon

$$h_0 = \frac{1}{s(s+0.1)(s+10)}$$

Opprinnelig når Nicholsdiagrammet ble utviklet ble $M(j\omega)$ framstilt og ikke $N(j\omega)$. I amerikansk litteratur og i innebygde MATLAB koder er det denne framstillingen som blir brukt. For å framstille Nicholsdiagrammet på en amerikansk måte, blir $h_0(j\omega)$ speilet om punktet $(-180, 0)$ og hele grafen blir rotert 180 grader om origo. I figur 7 vises Nicholsdiagrammet plottet slik det beskrives i amerikansk litteratur, av samme transferfunksjon som i figur 6. [3]



Figur 7: Eksempel på Nicholsdiagram av transferfunksjon

$$h_0 = \frac{1}{s(s+0.1)(s+10)} \text{ vist på amerikansk måte}$$

En relevant detalj er at Nicholsdiagram og Nyquistdiagram har frekvensen implisitt gitt, mens i Bodediagram er frekvensen gitt eksplisitt [1].

3.5 Stabilitetsmarginer

Fase- og forsterkningsmarginer er stabilitetsmarginer, som igjen er spesialtilfelle av et mer generelt begrep parametermargin[1].

3.6 Det komplekse plan og rotkurver

Det komplekse plan består av en reell x-akse og en imaginær y-akse. Poler og eventuelle nullpunkts baner i dette planet kan kartlegges, som regulatorparametere. Dette kalles rotkurver. Rotkurver fra engelsk "Root locus".

Komplekse poler kommer i par, med dette menes det at polene har samme avstand fra den reelle aksene, henholdsvis i positiv og negativ retning parallelt med den imaginære aksene. Større avstand fra den reelle aksene tilsier mer oscillatorisk oppførsel av systemet. Poler lenger ut på den negative delen av den reelle aksene tilsier et raskere system. [1]

3.7 Tasteteoremet

Tasteteoremet sier at et tastet diskret system ikke klarer å representere alle frekvenser. Signalene det diskrete systemet ikke kan representere er kontinuerlige signaler som inneholder frekvenskomponenter over π/T . Frekvenskomponenter over π/T vil fremstå som ikke-eksisterende (uekte) frekvenskomponenter “under” π/T . π/T kalles for Nyquistfrekvensen eller foldingsfrekvensen [4]. Til sammenligning er tastefrekvensen $2\pi/T$. Etter tasting vil det for eksempel ikke være mulig å skille en frekvens på $9\pi/4$ og en på $\pi/4$ ved $T = 1$. [1]

3.8 PD-regulator

For at en kontinuerlig PD-regulator skal være fysisk realiserbar må den inneholde et begrenset derivator ledd. Med dette leddet er PD-regulatoren proper og gitt ved:[1]

$$PD = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_{db} s} \quad (4)$$

Den begrensende faktoren er ofte uttrykt med α , for å uttrykke forholdet for hvor mye fasen har blitt løftet [5] [1]. I denne oppgaven er det større fokus på hva den begrensede faktoren faktisk er, istedenfor forholdet. Derfor blir leddet T_{db} innført og brukt istedenfor αT_d .

3.9 z-transformasjon

Fra kontinuerlig analyse jobbes det i s domene for å analysere kontinuerlige prosesser. Dette kan for eksempel gjøres ved å utføre Laplacetransformasjon² på et kontinuerlig signal $f(t)$. [1]

En direkte Laplacetransformasjon kan ikke foretas på et diskret signal $f[k]$. Derfor er det innført z-transformasjon. z-transformasjon er for diskrete systemer og signaler. Av den grunn blir dette sett på som “tvilingen” til Laplace-transformasjonen. z-transformasjon er definert som: [1]

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} \quad (5)$$

Ved z-transformasjon kan det nå jobbes i z-domene, og “z-planet” blir analogt med “s-planet”. En viktig forskjell er at systemer med poler innenfor enhets sirkelen blir ansett som stabile i ”z-planet”, i motsetning til “s-planet” der polene må være i venstre halvplan. Å jobbe i z-domene gir en nøyaktig representasjon av diskretete systemer. [1]

²Laplacetransformasjon er antatt kjent.

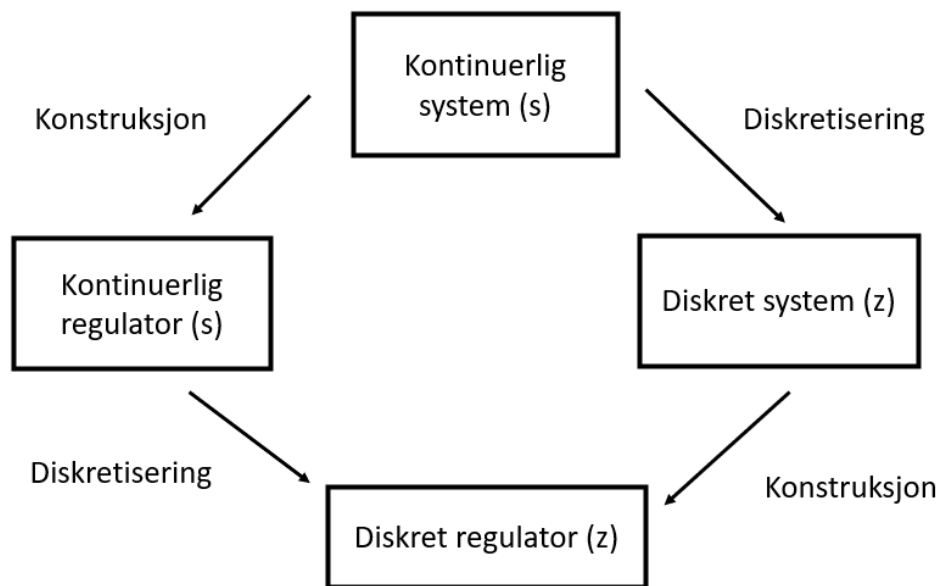
3.10 Diskrete regulatorer og Hybride systemer

En diskret regulator kan betraktes som en rekursiv formel. Algoritmen som utfører den diskrete formelen, gjør en utregning etter en tidsperiode. Denne tidsperioden er tastetiden. Det er vanlig å matematisk representere en diskret regulator med z -transformasjon. Ved å uttrykke regulatoren i z -domene blir den rekursive formelen nøyaktig representert. [1] [6]

Hybride systemer består av et diskret system og et kontinuerlig system, koblet i serie. For at et slikt system skal kunne fungere må det implementeres på en måte som får digitale og analoge signaler til å kommunisere.

En grunn til at dette er viktig problematikk, er at de fleste systemer det er ønskelig å regulere er kontinuerlige. Samtidig er det ofte ønskelig å bruke diskrete regulatorer [6]. Alle analyser og eksperimenter i denne oppgaven baserer seg på håndtering av hybride systemer. Det er ofte problematisk å få hybride systemer tilbake til tilstandsromrepresentasjon. [7]

Normalt benyttes det to forskjellige metoder for å konstruere en diskret regulator til et kontinuerlig system, som er illustrert med figur 8.



Figur 8: Illustrasjon av to metoder til å konstruere et diskret system til en kontinuerlig prosess [8].

Den mest nøyaktige metoden er å diskretisere systemet til z -domene og konstruere en diskret regulator i z -domene. Med denne metoden må det jobbes i z -domene. Et problem med å jobbe i z -domene er at det ikke er mulig å benytte seg av alle analyse verktøyene som er tilgjengelig i s -domene. For å kunne ta i bruk de kontinuerlige analyseverktøyene, kan regulatoren konstruere på den andre metoden med helt kontinuerlig analyse. Som nevnt i delkapittel 2 er dette ikke

helt nøyaktig. Det er også mulig å bruke kontinuerlige tilnæringsmetoder³ og w-transformasjon. [1] [8]

³Noen kontinuerlige tilnæringsmetoder blir forklart senere i oppgaven. Disse blir også testet ut i eksperimenter sammen med w-transformasjon.

4 w-transformasjon

w-transformasjon er en transformasjon som er utviklet for å kunne bruke de kontinuerlige analyseverktøyene i s-domene, også ved analyse av et diskret system. Bodeplot, Routh/Hurwitz stabilitetskriteriet og Nyquist diagram er kontinuerlige analyseverktøy som kan benyttes. w-transformasjon er en metode som skal være helt presis, ifølge veilederen for denne rapporten. Dette er grunnen til at den er sett på som referansemetoden (benchmarkmetoden) i denne rapporten. [1]

I et system som er diskritisert i z-domene er sammenhengen mellom z og w gitt av ligning 6[1][9].

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}, \text{ eller: } w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6)$$

Dette fører til at enhver rasjonal transferfunksjon i z blir en rasjonal funksjon også i w . Det vil være slik at området innenfor enhetssirkelen i z-planet, vil bli transformert til venstre halvplan i w . Videre vil området utenfor enhetssirkelen danne høyre halvplan, mens enhetssirkelen blir den imaginære aksene i w . [1]

Ved w-transformasjon vil w spille samme rolle som s i $h(s)$, når tastetiden T er liten sammenlignet med prosessens dynamikk. Ved å sette $z = e^{j\omega T}$ i ligning 6 for å søke frekvensresponsen til $h(w)$, og ved litt manipulering av ligningen får vi: [1]

$$w(\omega) = \frac{j2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (7)$$

Ved å definere en ny variabel v slik at $w = jv$. Sammenhengen mellom v og virkelig frekvens ω finnes med ligningen under[1]:

$$v = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right), \text{ eller: } \omega = \frac{2}{T} \cdot \arctan\left(\frac{vT}{2}\right) \quad (8)$$

Ved å sette $w = jv$ får vi frekvensresponsen til $h(w)$. Til sammenligning får vi frekvensresponsen til $h(s)$ ved å sette $s = j\omega$. Når T er liten i forhold til ω er $v \approx \omega$. Videre ser vi at $v \rightarrow \infty$ så går $\omega \rightarrow \pi/T$ (dette er en konsekvens av tasing). [1]

Dette fører til at frekvensresponsen til et diskret system $h(w)$ ikke blir fremstilt helt nøyaktig. Hvis w substitueres med $w = jv$, uten å ta høyde for at v ikke er en reell frekvens. v blir betraktet som hjelpe“frekvensen” og vil være nær virkelig frekvens ved relativt lave frekvenser. Ved å bruke Bodediagram for å plote amplitude og faseforløpet for $h(w)$, uten å justere for den uekte hjelpe“frekvensen”. Blir frekvensen strukket mer og mer, desto lenger du kommer til høyre i diagrammet sammenlignet med det kontinuerlige systemet. [1]

4.1 Eksempel med frekvensrespons fra $h(w)$ sammenlignet med $h(s)$

Eksempel på en kontinuerlig prosess er:

$$h(s) = \frac{1}{1 + T_1 s} \text{ med } T_1 = 4.48 \quad (9)$$

Ved å z-transformere ligning 9 med $T = 1$ får vi [1]:

$$h(z) = \frac{0.2}{z - 0.8} \quad (10)$$

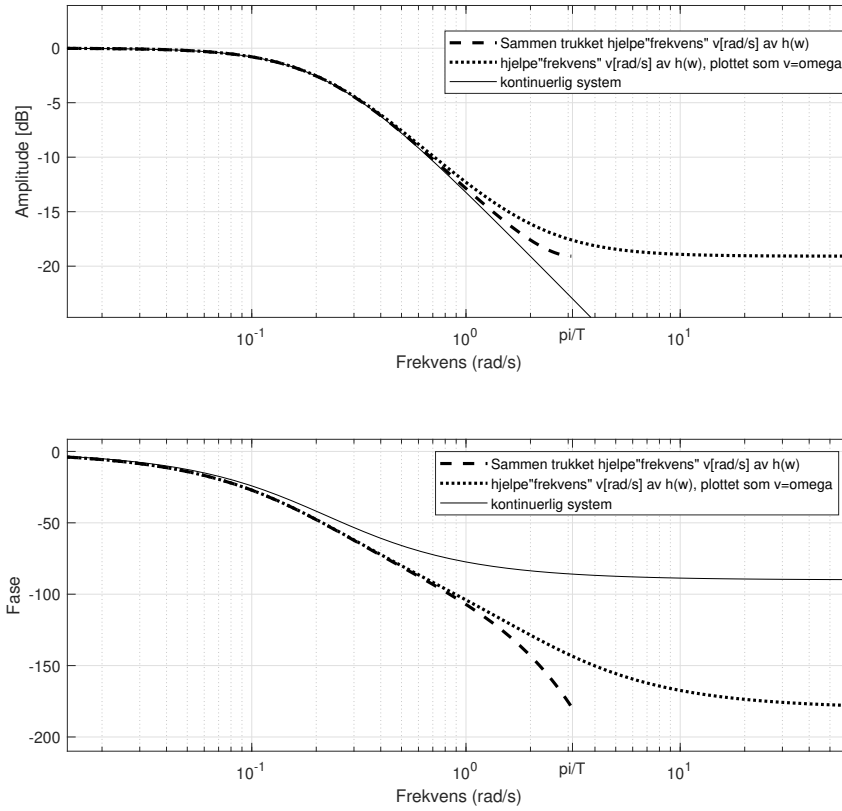
Ved å w-transformere ligning 9 med $T = 1$ får vi [1]:

$$h(w) = \frac{1 - 0.5w}{1 + 4.5w} \quad (11)$$

Nå er $h(s)$ diskretisert med hensyn til tasting, og omgjort til $h(w)$. Det kan nå brukes kontinuerlige analyser for å finne stabilitetskriterier. Ved bruk av Nyquist diagram vil stabilitetskriteriene bli akkurat de samme som for $h(z)$, siden frekvensen ikke er eksplisitt gitt.

Ved bruk av et Bodediagram må det tas høyde for at w ikke spiller samme rolle som s , når T er stor i forhold til prosessens dynamikk. Dette fordi frekvensen er eksplisitt gitt i analysen. Ved hjelp av ligning 8 kan vi ta høyde for dette. [1]

Figur 9 viser Bodepdiagram av $h(w)$, der $h(w)$ fremkommer på riktig måte og et plott som ikke er reelt. Linjen som består av punkter er ikke reell og skulle vært plottet mot hjelpe "frekvens" v , fra ligning 8. Den stripete linjen (som stopper ved frekvens = π/T) gir den reelle stabilitets analysen av det diskrete systemet $h(w)$. Her er ligning 8 brukt for å få $h(w)(h(jv))$ som en funksjon av ω og ikke v . Kontinuerlige $h(s)$ er tatt med som sammenligningsgrunnlag i figuren.

Figur 9: Bode av $h(s)$ og $h(w)$.

4.2 Finne $h(w)$ fra tilstandsromrepresentasjon

Et multivariabelt LTI-system er gitt med tilstandsromrepresentasjon [1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (12)$$

I denne rapporten vil det det kun bli testet transferfunksjoner som er strengt propre, derfor vil alle tilfeller av \mathbf{D} matrisen være lik null. For å finne den multivariable transferfunksjon av tilstandsromrepresentasjonen har vi [1]:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Delta + \mathbf{D} \quad (13)$$

Der Φ og Δ er:

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T} \quad (14a)$$

$$\Delta(T) = \mathbf{A}^{-1}(\Phi(T) - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad (14b)$$

Ved å substituere z i ligning 13 med venstre del av ligning 6 får vi:

$$\mathbf{H}(w) = \mathbf{C} \left(\frac{1 - \frac{T \cdot s}{4}}{1 + \frac{T \cdot s}{4}} \mathbf{I} - \Phi \right)^{-1} \Delta + \mathbf{D} \quad (15)$$

Ved en matrisemanipulasjon kan vi skrive om ligningen 15 til [1]:

$$\mathbf{H}(w) = \left(1 - \frac{T}{2}w\right) \mathbf{C}(w\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{D} \quad (16)$$

der $\tilde{\mathbf{A}}$ og $\tilde{\mathbf{B}}$ er definert som [1]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\frac{T}{2}\right)^{-1} \tanh\left(\frac{\mathbf{A}T}{2}\right) \quad (17a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left(\frac{\mathbf{A}T}{2}\right)^{-1} \tanh\left(\frac{\mathbf{A}T}{2}\right) \mathbf{B} \quad (17b)$$

4.3 Utfordringer med å finne $h(w)$

Det er mulig å finne $\mathbf{H}(w)$ med både ligning 15 og ligning 16, først skal det undersøkes hvordan det er å implementere ligning 16.

Legg merke til at ligning 17b har inverse av \mathbf{A} multiplisert med tanh. Dette betyr at det er umulig å finne $\tilde{\mathbf{A}}$ hvis \mathbf{A}^{-1} ikke-eksisterer, ved å bruke ligning 17b direkte. Ligning 17b kan skrives om ved å bruke rekkeutviklingen til tanh som er gitt ved [10]:

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, x^2 < \frac{\pi^2}{4} \quad (18)$$

Der er B_n er definert med følgende funksjon [10]:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (19)$$

Noen Bernoulli tall blir da [10]:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}$$

Dette betyr at vi kan multiplisere $\left(\frac{\mathbf{A}T}{2}\right)^{-1}$ inn i rekkeutviklings-uttrykket for tanh, dermed kan uttrykket for $\tilde{\mathbf{B}}$ skrives om til:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} \mathbf{x}^{2n-2} \mathbf{B}, \text{ der } \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}T}{2} \quad (20)$$

Nå kan ligning 16 brukes selv om \mathbf{A}^{-1} ikke-eksisterer. Et annet problem med å bruke rekkeutviklingen for tanh, er at tanh har et skalart konvergeringsintervall på $x^2 < \frac{\pi^2}{4}$. Dette fører til at ligning 20 ikke alltid konvergerer. Ligning 21 vil ha samme konvergeringsintervall som ligning 18 i det skalare tilfelle. Hvis x trekkes ut fra rekkeutviklingen av tanh, får vi ligningen ⁴ [1]:

$$\tanh x = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-2}, x^2 < \frac{\pi^2}{4} \quad (21)$$

⁴Det er ikke eksplisitt gitt i boken "Reguleringsteknikk" at ligning 21 og ligning 18 har samme konvergeringsintervall. Dette kan sees ved å sammenligne ligning (11.93) og (11.94) i boken, med korrigering for tastefeil.

Ved å erstatte \mathbf{x} med $\left(\frac{\mathbf{A}T}{2}\right)$ går rekken fra å være et skalart tilfelle, til å bli et multivariabelt uttrykk. Ved å se på et n grads polynom av en gitt matrise $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ kan, konvergeringsintervallet til multivariable tilfelle finnes. Først er \mathbf{E} diagonalisert [11]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1} \quad (22)$$

$\mathbf{\Lambda}$ er en diagonalmatrise, der diagonalleddene i $\mathbf{\Lambda}$ er egenverdiene til \mathbf{A} . [11] Ved å multiplisere \mathbf{E} med seg selv får vi:

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{M}^{-1} \quad (23)$$

Dette gir at n -te polynomet av \mathbf{E} er [11]:

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{M}^{-1} \quad (24)$$

Som videre fører til at ligning 20 kan skrives om til:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^{2n-2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \quad (25)$$

Siden $\mathbf{\Lambda}$ er en diagonal matrise, vil den største egenverdien avgjøre om rekken konvergerer eller ikke. Dermed blir konvergeringsintervallet for ligning 20, med en diagonaliserbar \mathbf{x} :

$$\text{Max}(\lambda_{1,\dots,n}) < \frac{\pi}{2} \quad (26)$$

En annen metode for å finne $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ er å regne den direkte ut fra ligning 15. Δ kan ikke finnes direkte uten at \mathbf{A}^{-1} eksisterer. Ved hjelp av Rekkeutviklingen til e^x kan uttrykket for Δ skrives om. Rekkeutviklingen for e^x er gitt ved[12]:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x^2 < \infty \quad (27)$$

Gjør nå om rekkeutviklingen til å gjelde for en matrise og skriver om uttrykket til Δ :

$$\Delta = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^n}{n!} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B} \quad (28a)$$

$$\Delta = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^{n-1}}{n!} \right) \mathbf{B} \quad (28b)$$

Her er konvergeringsintervallet uendelig stort for den uendelige lange rekken, og dermed er rekken analytisk [13]. Det er ikke praktisk mulig å regne ut en uendelig lang rekke, av åpenbare grunner. Ved å sette ligning 28b inn i ligning 15 skal det nå være teoretisk mulig å finne $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ for alle endelige verdier av matrise \mathbf{A} .

Til sammenligning er ligning 25 ikke analytisk, fordi den er sammensatt av en rekke som ikke alltid konvergerer.

4.4 Finne $h(w)$ via z -domene

Det er blitt beskrevet hvordan det er mulig å gå fra tilstandsromrepresentasjon av et kontinuerlig system til w -domene. Det er også mulig å gå veien igjennom z -domene. Dette starter med et system på kontinuerlig form i s -domene. Deretter transformeres systemet til z -domene med hjelp av “zero-order hold” transformasjon. Nå er systemet i z -domene. For å få systemet til w -transformasjon brukes ligning 6. Dette blir ekvivalent med å bruke Tustins metode. Disse transformasjonene har MATLAB innebygde funksjoner for. [14] [1]

Det er mulig å gå direkte til z -domene fra tidsplanet, som representerer et system med holdeelement. Dette gjøres med direkte z -transformasjon. [15] [1]

4.5 Diskret regulator i w -domene

Fram til nå er det sett på hvordan et kontinuerlig system blir representert i w -domene i henhold til et holdeelement. Nå skal det sees på hvordan en kontinuerlig regulator blir fremstilt i w -domene. Dette blir gjort ved å diskretisere et kontinuerlig system i s -domene, med bilinear transformasjon. Nå er systemet i z -domene og ligning 6 blir brukt til å komme til w -domene. Dette blir eksakt det samme som å bytte ut “ s ” i s -domene og erstatte den med “ w ”. Den eneste forskjellen mellom w -domene og s -domene for det diskrete systemet, blir forskjellen s og w representerer.[1]

Bilinear transformasjon eller Tustins metode, er den metoden som gir best likhet mellom diskretisert og kontinuerlig system i frekvensdomene [14].

Forskjellen i frekvensrespons med to regulatorer der den eneste forskjellen er variablene s og w , blir vist med figur 10 og figur 34. Hvis endringene i frekvensresponsen dynamikk stopper et stykke før Nyquistfrekvensen for det kontinuerlige systemet, blir frekvensresponsen for disse to systemene “like”⁵. Dette kan observeres i figur 11, og påstandene vises i det neste delkapitlet.

4.5.1 Eksempel på en regulator representert i w -domene

For å vise at en regulator i w -domene gir den beste kontinuerlige tilnærmingen en diskret regulator kan ha, er det gitt et eksempel. Hvis vi tar for oss regulatoren som blir funnet ved hjelp av w -domene i tabell 7:

$$h_r(s) = \frac{280.14(s + 0.1478)}{(s + 31.42)}$$

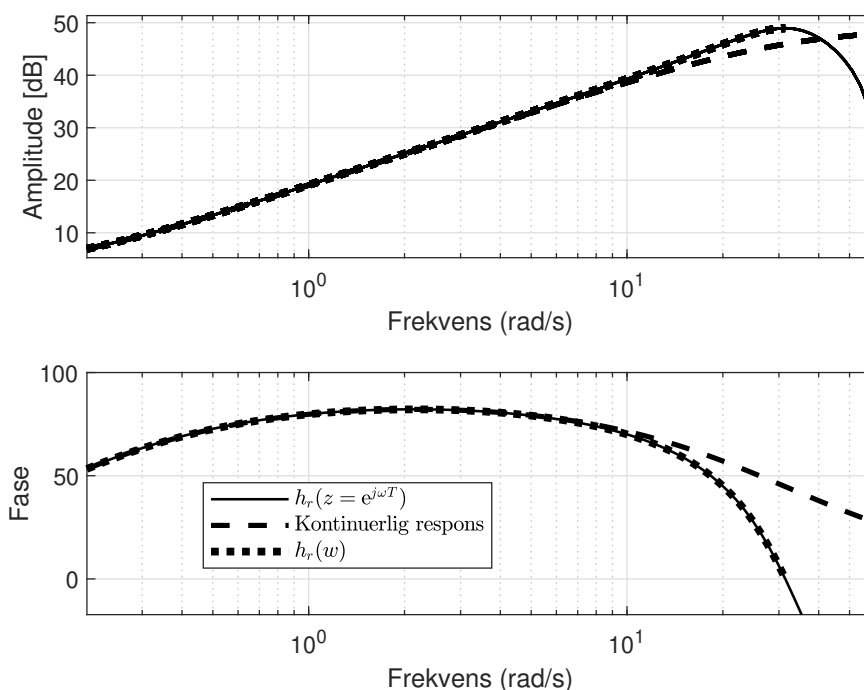
Ved Tustins metode og med $T = 0.1$ får vi:

$$h_r(z) = \frac{(109.8z - 108.2)}{(z + 0.222)}$$

Ved å erstatte z med $e^{j\omega T}$ kan fase og amplitudeforløpet for frekvensresponsen bli funnet. Ved bruk av w -transformasjon blir fase og amplitudeforløpet for frekvensresponsen funnet som ved kontinuerlig analyse. Deretter blir hjelpe“frekvensen”

⁵Med “like” frekvensresponser menes det at frekvensresponsene er like frem til Nyquistfrekvensen.

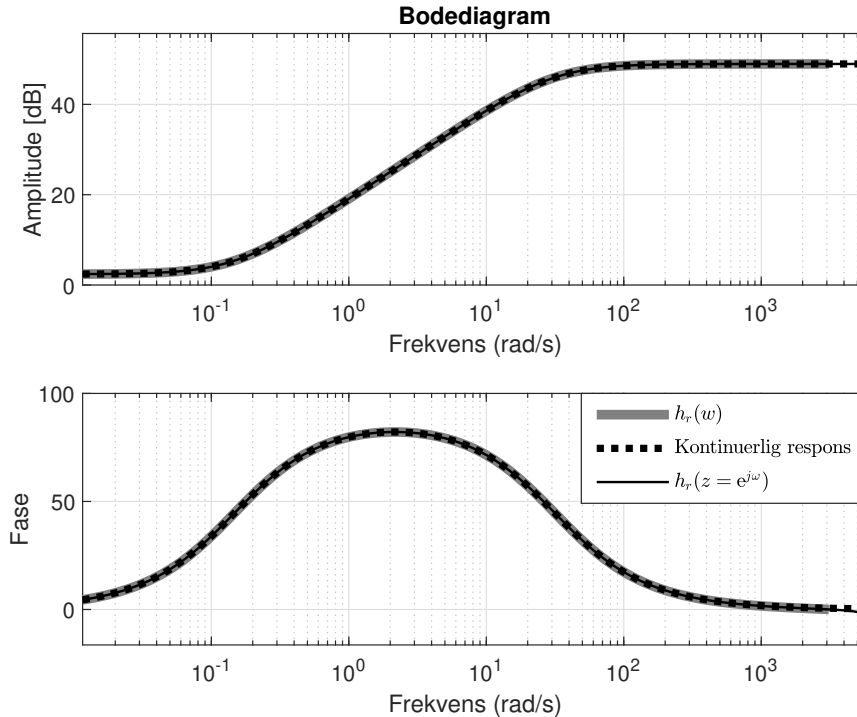
omgjort til reell frekvens, ved hjelp av ligning 6. Det er da rimelig å anta at disse metodene må gi samme resultat, hvis bruk av w transformasjon skal gi en korrekt analyse. Frekvensresponsen av $h_r(s)$ ovenfor, diskretisert med disse to metodene, er da gitt i bodediagrammet under, med den kontinuerlige frekvensresponsen til sammenligning: [1]



Figur 10: Frekvensrespons av en diskretisert regulator, vist sammen med kontinuerlig respons for sammenligning.

Figur 10 viser at frekvensresponsene for de to metodene blir like. Den eneste forskjellen er at regulatoren i w -domene stopper ved Nyquistfrekvensen " $\frac{\pi}{T}$ (rad/s)". Dette er på grunn av at w -domene regner ut frekvensresponsen med hjelp av en hjelpe"frekvens". Frekvensresponsene over Nyquistfrekvensen er som nevnt ikke reelle frekvensresponser og blir sett på som nedfolding [16][3].

Ved å ta utgangspunktet i den samme kontinuerlige regulatoren ($\frac{280.14(s+0.1478)}{(s+31.42)}$), men ved å diskretisere med en tastetid lik 0.001 sekunder, blir frekvensresponsen som vist i figur 11.



Figur 11: frekvensrespons basert på samme kontinuerlige regulator som i figur 10, men ved bruk av en annen tastetid ved diskretisering.

4.6 Tidsforsinkelse i w domene

Sammenhengen mellom tidsforsinkelse i s-domene og w-domene er gitt ved ligning 29[1]:

$$h(s)e^{-\tau s} \xrightarrow[\text{diskretisert}]{} h(w) \left(\frac{1 - \frac{T \cdot s}{4}}{1 + \frac{T \cdot s}{4}} \right)^m \quad (29a)$$

$$m = \tau/T, \text{ (m må være et heltall)} \quad (29b)$$

Hvor τ er prosessens tidsforsinkelse. Siden m er et heltall går ikke denne w-transformasjon alltid opp, med mindre m blir et heltall. Ved m som et desimaltall må den bli rundet opp eller ned til nærmeste heltall. Dette medfører en transformasjon som ikke er helt presis.

4.7 Hybrid system i w-domene

Å analysere et hybrid system i w-domene blir gjort ved å studere sløyfetransferfunksjonen $h_0(w) = h_r(w)h_u(w)$. Det kan brukes Nyquist, Nichols- og Bode-diagrammer til stabilitetsundersøkelse, analyse og syntese, helt tilsvarende som det gjøres for kontinuerlige systemer. [1]

$h_1(s)h_2(s)$ diskretisert blir ikke det samme som $h_1(s)$ og $h_2(s)$ diskretisert hver

for seg og deretter multiplisert. For å gjøre kontinuerlig analyse i w -domene brukes $h_0(w) = h_r(w)h_u(w)$, det er da rimelig å anta at vi må diskretisere $h_r(s)$ og $h_u(s)$ hver for seg. For å illustrere hva som skjer hvis den totale transferfunksjonen diskretiseres og det kontinuerlige systemet og den diskrete regulatoren ikke diskretiseres hver for seg, er det gitt et eksempel. [1]

4.7.1 Eksempel på hybrid system i w -domene

Vi tar for oss et eksempel regulator h_r og et eksempel system h_u som danner sløyfetransferfunksjonen h_0 gitt under:

$$\begin{aligned} h_r(s) &= \frac{1 + T_2 s}{s} \\ h_u(s) &= \frac{1}{(1 + T_1 s)} \\ h_0(s) &= \frac{1 + T_2 s}{s(1 + T_1 s)} \end{aligned}$$

Ved å diskretisere disse til w -domene i henhold til framgangsmåten forklart i avsnittene over får vi⁶ [1]:

$$\begin{aligned} h_r(w) &= \frac{1 + T_2 w}{w} \\ h_u(w) &= \frac{1 - \frac{T}{2} w}{(1 + \gamma_1 T_1 w)} \end{aligned}$$

Den greske bokstaven γ_1 i ligning over er definert som [1]:

$$\gamma_i = \frac{T}{2T_i} \coth\left(\frac{T}{2T_i}\right) \quad (32)$$

Ved å multiplisere $h_u(w)$ med $h_r(w)$ får vi:

$$h_0(w) = \frac{1 - \frac{T}{2} w(1 + T_2 w)}{w(1 + \gamma_1 T_1 w)}$$

Ved å diskretisere $h_0(s)$ til w -domene får vi⁷[1]:

$$h_0^*(w) = \frac{(1 - \frac{T}{2} w)(1 + (T_2 + (\gamma_1 - 1)T_1)w)}{w(1 + \gamma_1 T_1 w)}$$

Vi ser nå at $h_0(w)$ ikke er lik $h_0^*(w)$ med mindre $\gamma_1 = 1$. γ_1 kan ofte tilnærmes lik en, men dette blir da en tilnærming, i dette tilfelle [1].

Bakgrunnen for denne ulikheten er at $h_0^*(s)$ ikke tar hensyn til at $h_r(s)$ ikke er et kontinuerlig system, men en rekursiv formel. $h_0^*(w)$ har antatt at systemet er

⁶ $h_u(w)$ er tatt fra tabell 11.1 i boken "Reguleringsteknikk" av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss.

⁷ $h_0(w)$ er tatt fra tabell 11.1 i boken "Reguleringsteknikk" av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss.

helt kontinuerlig og diskretisert i henhold til et holdeelement. Fremgangsmetoden for å finne $h_0(w)$ har tatt hensyn til dette fenomenet siden $h_r(s)$ har blitt diskretisert til w -domene med $h_r(w)$.

Dermed kan det konkluderes med at for å kunne analysere det hybride systemet kontinuerlig i w -domene, må regulatoren og det kontinuerlige systemet diskretiseres hver for seg. I henhold til hva slags system de representerer w -domene. Slik at de blir diskretisert i henhold til hva de faktisk representerer.

4.8 Praktisk implementasjon av w -transformasjon

w -transformasjon blir funnet ved bruk av MATLAB, ved å implementere ligning 15. Φ og Δ blir funnet ved hjelp av ligning 28b og ligning 14a. For å finne $e^{\mathbf{A}T}$ blir den innebygde funksjonen “`expm()`” brukt. Denne er egnet for å finne $e^{\mathbf{A}}$, når \mathbf{A} er en matrise [17]. For å finne Δ er det blitt tatt i bruk rekkeutvikling når \mathbf{A}^{-1} ikke eksisterer ved bruk av ligning 28b. Når \mathbf{A}^{-1} eksisterer, kan ligning 14b brukes direkte, og funksjonen “`expm()`” blir brukt i stedet for rekkeutvikling. Ved hjelp av rekkeutvikling for å finne Δ er det valgt å ta med så mange ledd i rekken, at det ikke blir observert noen endring i data typen **double**. **double** er datatypen i MATLAB som lagrer skalarer eller matriser som inneholder desimaltall [17].

I tillegg til å bruke ligning 15, er det også mulig å finne w -transformasjon med bruk av Ligning 16. Ligning 16 er ikke brukt som fremgangsmåte i denne oppgaven. Det er fordi at konvergeringsintervallet i rekken som må brukes når \mathbf{A}^{-1} ikke eksisterer er begrenset. Derfor blir ligning 15 brukt. Den får et uendelig konvergeringsintervall ved litt manipulasjon av ligningen når \mathbf{A}^{-1} ikke eksisterer. Dette valget er gjort selv om boken “Reguleringsteknikk” [1] implisitt sier at ligning 16 er en bedre måte å finne w -transformasjonen på.

I denne oppgaven starter alle reguleringstestene med kontinuerlige transferfunksjoner. Det er valgt å føre transferfunksjonene over på tilstandsromrepresentasjon, for at ligning 15 skal kunne brukes. I denne oppgaven blir MATLAB funksjonen “`tf2ss`” brukt. Denne formelen tar koeffisientene i nevneren og telleren til en transferfunksjon som inngang i funksjonen og gir matrisene \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} og \mathbf{D} . Dette danner grunnlaget for en tilstandsromrepresentasjon. På grunn av at alle transferfunksjonene i denne rapporten er strengt propre vil \mathbf{D} matrisen være lik null.[18]

For å finne koeffisientene i telleren og nevneren av en gitt transferfunksjon i MATLAB må transferfunksjonen være rasjonell [19]. Dette medfører et problem når transferfunksjonen inneholder en tidsforsinkelse. Tidsforsinkelsen er representert med en ikke rasjonell funksjon i s -domene. Derfor er det valgt å bruke ligning 29 for å representere en tidsforsinkelse i w -domene. I denne oppgaven er det alltid valgt tastetid slik at m blir lik τ/T uten å avrunde⁸.

⁸I et reelt tilfelle kan det tenkes at dette ikke er mulig, derfor må vi være oppmerksomme på at det ikke alltid blir en helt presis analyse.

Derfor blir w -transformasjonen på en transferfunksjon med tidsforsinkelse gjort som om tidsforsinkelsen ikke eksisterer. Den eneste forskjellen er at når w -transformasjonen er ferdigutregnet blir leddet $\left(\frac{1-\frac{T \cdot s}{4}}{1+\frac{T \cdot s}{4}}\right)^m$ multiplisert inn i transferfunksjon $H(w)$ og tidsforsinkelsen er bevart.

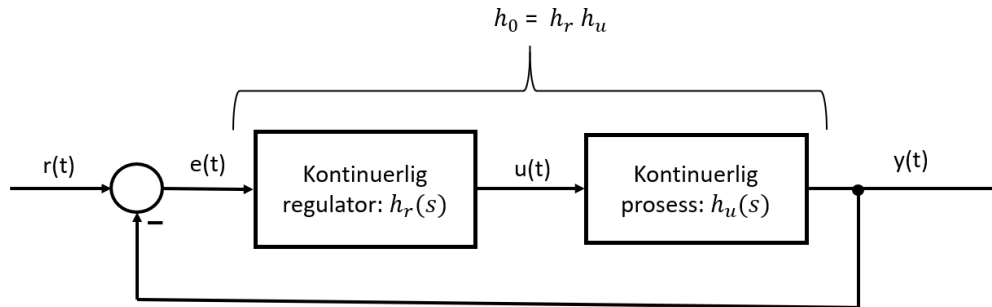
Fordi arbeidet med å implementere en metode for å bruke w -transformasjon via tilstandsromrepresentasjon er gjort, er det denne metoden som er brukt i rapporten. En annen grunn til dette valget er å vise at det er mulig å gjøre all analyse uten z -domene⁹. Selv om det er mulig å komme fram til w -domene via z -domene som beskrevet i delkapittel 4.4.

⁹ z -domene blir selvfølgelig brukt i implementasjonen av regulatoren, men ikke i analysen for implementasjonen av regulatoren.

5 Helt kontinuerlig analyse og tilnæringsmetoder med kontinuerlig analyse

5.1 Helt kontinuerlig analyse

Testene i denne rapporten tar først for seg en kontinuerlig transferfunksjon $h_u(s)$ som skal representere et fysisk system. Det første som blir gjort er å konstruere en kontinuerlig regulator, illustrert med figur 12:



Figur 12: Blokkdiagram for å illustrere ideell kontinuerlig tilnæringsmetode for regulering av kontinuerlig system [1].

Den helt kontinuerlige analysen er den eneste analysen som blir testet ut med helt kontinuerlig regulator i eksperimentene. Dette blir brukt som en referanse mot de forskjellige hybride systemene som blir testet ut.

5.2 Tilnæringsmetoder

I dette kapitlet vil de kontinuerlige tilnæringsmetodene for holdelementet bli forklart.

5.2.1 Kontinuerlig transferfunksjon for holdelement og taster

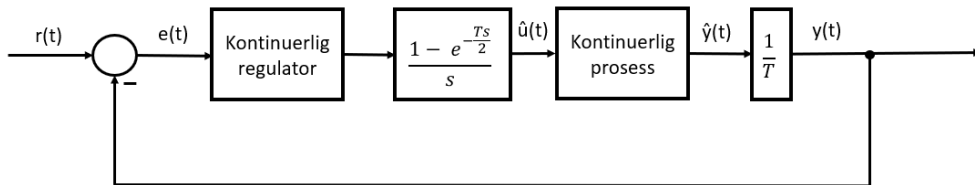
Den kontinuerlige transferfunksjonen for et holdelement er [2]:

$$\text{Holdeelement}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \quad T \text{ er tastetid.} \quad (33)$$

Blir tasteren tatt med inn i transferfunksjonen får vi denne funksjonen [20]:

$$\text{Holdeelement med taster} = \frac{1 - e^{-sT}}{Ts} \quad (34)$$

Ligning “34” vil bli omtalt som transferfunksjonen for ZOH i denne oppgaven. forkortet med “TF for ZOH”. Ved å erstatte holdelementet og tasteren i blokkdiagrammet i figur 1 med transferfunksjonen deres, dannes figur 13.

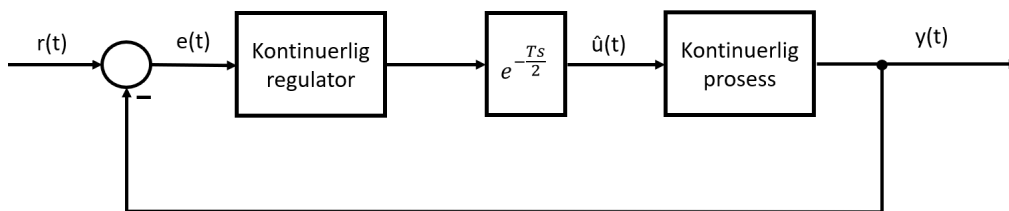


Figur 13: Blokkdiagram for å illustrere transferfunksjonen for et holdelement med tasting.

På grunn av at TF for ZOH er den kontinuerlige funksjonen for det som ønskes å tilnærmes, antas det at dette er den beste kontinuerlige tilnæringsfunksjonen. Ulempen med denne tilnærmingen er at ligningen ikke er rasjonell. Hvis ligningen multipliseres inn i en transferfunksjon er det ofte at den tvinges over på en tilnærmet tilstandsromrepresentasjon. Dette er uheldig, siden det medføres at MATLAB håndterer dette numerisk. Frekvensrespons for ZOH blir utforsket senere i figur 16.

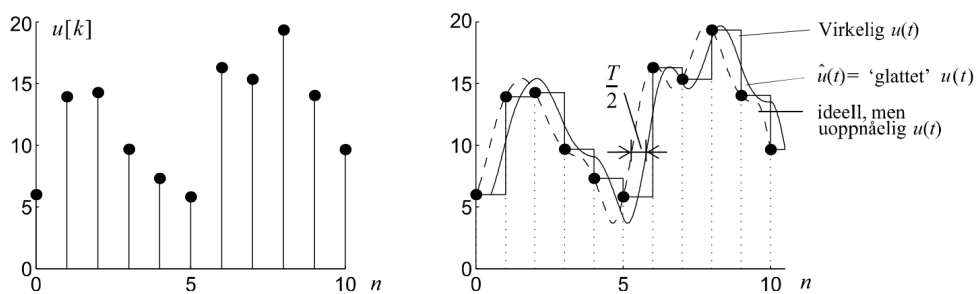
5.2.2 Tidsforsinkelse som tilnæringsmetode for holdelement

En tidsforsinkelse på $\frac{T}{2}$ i s-dommene blir representert med $e^{-\frac{T_s}{2}}$. Tidsforsinkelsen som tilnærmingen tar hensyn til er den viktigste bivirkningen av et holdelement, fordi at det oppstår en tidsforsinkelse. Dette legger grunnlaget for å bruke $e^{-\frac{T_s}{2}}$ som tilnæringsmetode for et holdelement, der T er tastetiden. Denne metoden er en kjent tilnærming for et holdelement, og en metode som blir brukt [21][22]. Med en tidsforsinkelse som tilnærming vil systemet bli som vist i figur 14: [1]



Figur 14: Blokkdiagram for å illustrere tidsforsinkelse som en tilnæringsmetode for holdelement[1].

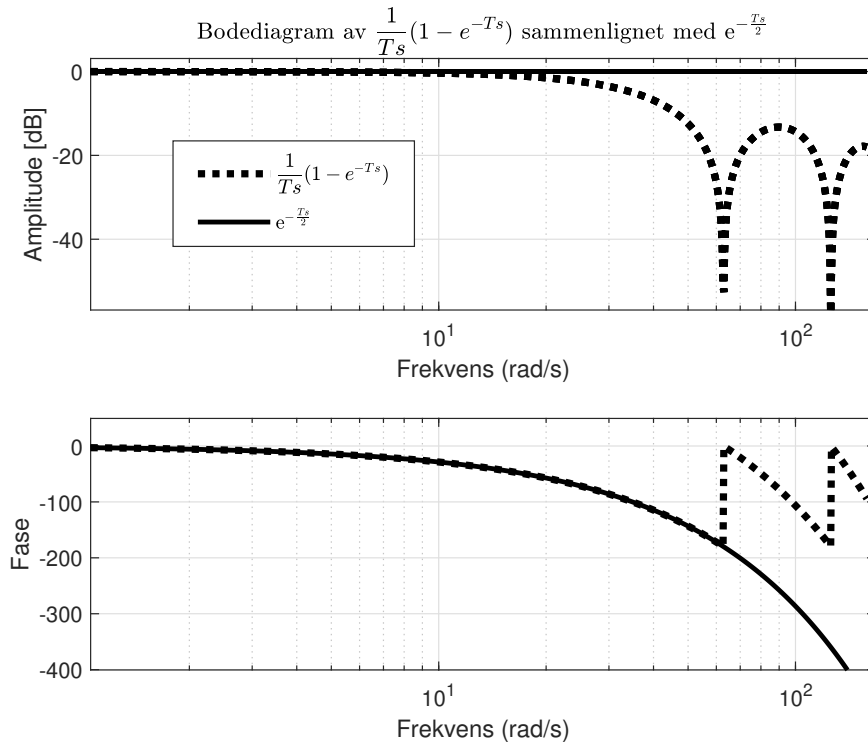
En sammenligning mellom et holdelement og en tidsforsinkelse på halve tastetiden er vist i figur 15. Dette plottet er klippet ut fra boken “Reguleringsteknikk” av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss for å illustrere sammenligningen mellom holdelement og en tidsforsinkelse på $\frac{T}{2}$. [1]



Figur 15: Illustrasjon av tidsforsinkelse på en halv tastetid, sammenlignet med et holdeelement[1].

Venstre del av figur 15 er et eksempel på diskret tallfølge som kommer fram av en diskret regulator. Ideelt sett vil man at pådraget på et system skulle blitt den stripelede linjen i høyre del av figur 15, men dette er uoppnåelig. Den trappeformede linjen viser hva som skjer med en diskret tallfølge når den går igjennom et holdeelement. Til sammenligning er den heltrukne “glatte” linjen, en tidsforsinkelse på en halv tastetid, av det ideelle kontinuerlige pådraget. Den ideelle kontinuerlige stripelede linjen er det pådraget som det blir antatt at eksisterer, ved kontinuerlig analyse uten tilnærminger. [1]

For visuell sammenligning er en tidsforsinkelse og TF for ZOH plottet med et Bodediagram vist i figur 16:



Figur 16: Bodediagram av transferfunksjonen for ZOH og transferfunksjonen for en halv tidsforsinkelse.

Ved å utforske figur 16 ser vi at fasefallet en halv tidsforsinkelse gir, er en god tilnærming for TF til ZOH. Figuren viser at amplituden til en halv tidsforsinkelse holdes konstant og at den ikke får samme amplitudedefallet som TF til ZOH. En fordel med den rene tidsforsinkelsen er at det er innebygde funksjoner i MATLAB som håndterer den. Dette medfører at systemet fortsatt kan representeres med transferfunksjoner i MATLAB. Dette er fordi hele telleren i brøken til en transferfunksjon får en tidsforsinkelse, ikke bare deler av telleren som med TF for ZOH. Tastediden for frekvensresponsen som er vist i figur 16 er på 0.1 sekunder. [14]

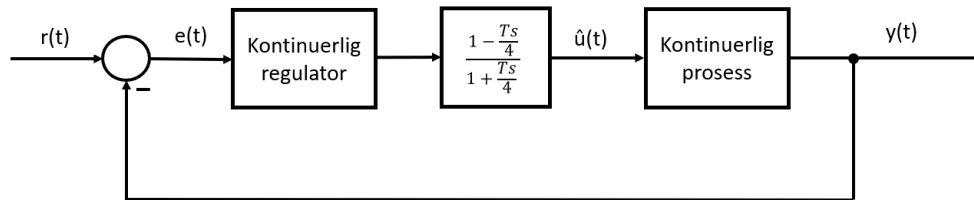
5.2.3 Første ordens Padé-approximasjon av tidsforsinkelse

$e^{-\frac{T_s}{2}s}$ er ikke et rasjonelt uttrykk, men $e^{-\frac{T_s}{2}s}$ kan approksimeres for å få et rasjonelt uttrykk. Dette kan gjøres ved å benytte førstegradsleddet i en Taylor-rekke for $e^{-\frac{T_s}{2}s}$. Dette kalles en første ordens Padé-approximasjon, og vi får uttrykket: [1]

$$e^{-\frac{T_s}{2}s} = \frac{e^{-\frac{T_s}{4}}}{e^{+\frac{T_s}{4}}} \approx \frac{1 - \frac{T_s}{4}s}{1 + \frac{T_s}{4}s} \quad (35)$$

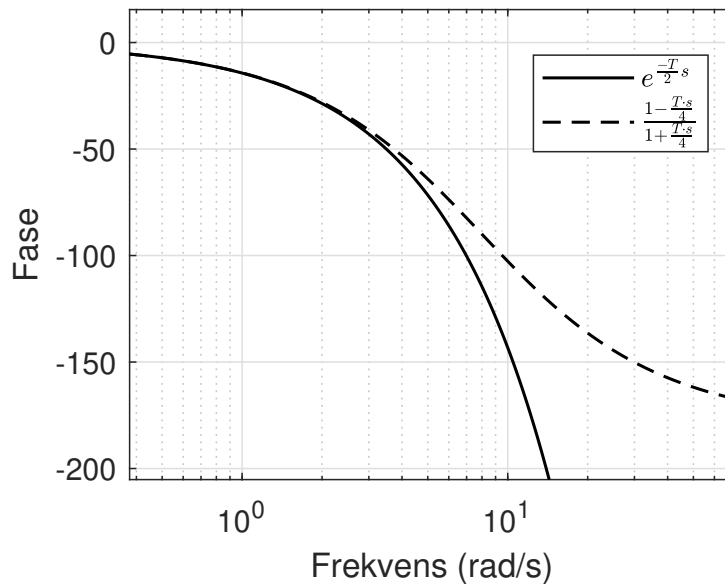
Det er nå dannet et enklere matematisk uttrykk. Hvor god denne Padé-approximasjonen er for å tilnærme holdeelementet skal bli testet empirisk i denne rapporten. An-

tagelsen fra veileder er at dette er en “dristigere”¹⁰ metode enn bruk av $\mathbf{H}(w)$ og ren tidsforsinkelse som metode. På grunn av at fasen til systemet ikke vil falle i like stor grad som ved en ren tidsforsinkelse. Metoden er interessant for utprøving siden den ikke er utprøvd før, i følge veilederen for denne oppgaven. Blokkdiagrammet for denne tilnæringsmetoden er vist i figur 17:



Figur 17: Blokkskjema for bruk av $\frac{1 - \frac{T}{4}s}{1 + \frac{T}{4}s}$ som tilnærming av holdelement

Forskjellen mellom Padé-approksimasjon av tidsforsinkelse og tidsforsinkelsen er illustrert med figur 18. Figuren inneholder den nedre delen av et Bodediagram, som er den delen som inneholder informasjon om fase. Amplitude delen av diagrammet er ikke tatt med, siden denne delen er identisk i de to forskjellige tilfellene. Det er viktig å legge merke til at i starten av fasefallet er tilnærmingen veldig lik en ren tidsforsinkelse.



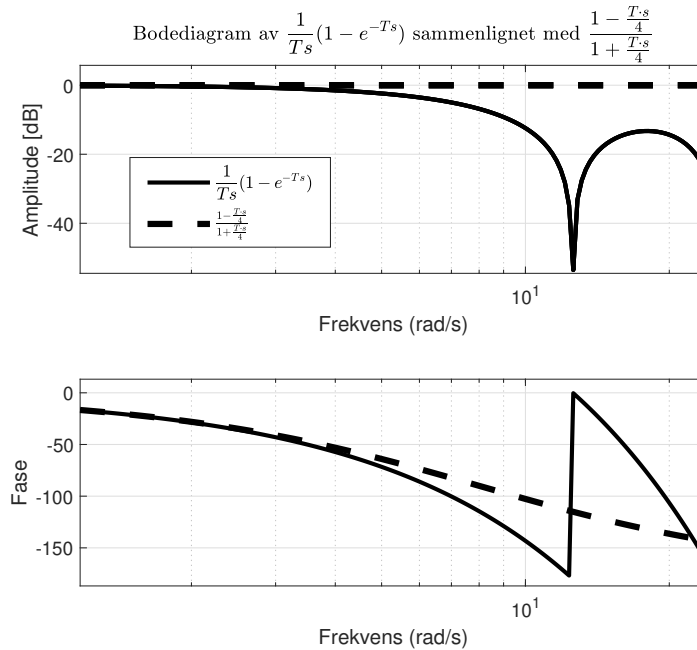
Figur 18: Fase sammenligning mellom $e^{-\frac{T}{2}s}$ og $\frac{1 - \frac{T}{4}s}{1 + \frac{T}{4}s}$.

¹⁰Med “dristigere” menes det at, metoden gir for store forsterkings og fasemarginer, slik at det kan dannes regulator som ønsker å regulere systemet kjappere enn det som er reelt mulig.

Figur 18 viser at Padé-approximasjon for tidsforsinkelse har et lavere fasefall enn en faktisk tidsforsinkelse. På bakgrunn av dette er antagelsen fra veileder at Padé-approximasjon vil være en mer “dristig” tilnærming av holdelementet enn en ren tidsforsinkelse.

5.2.4 Modifikasjon av Padé-approximasjon av en tidsforsinkelse

En ren tidsforsinkelse og Padé-approximasjonen av en tidsforsinkelse har til felles at amplitudeforsterkningen holder seg konstant på 0 [dB]. I motsetning har $\frac{1}{T_s}(1 - e^{-Ts})$ et fall i amplitude ved økende frekvens. Sammenligningen mellom $\frac{1}{T_s}(1 - e^{-Ts})$ og $\frac{1 - \frac{T_s}{4}}{1 + \frac{T_s}{4}}$ er vist ved et Bodediagram i figur 19:



Figur 19: Sammenligning mellom $\frac{1}{T_s}(1 - e^{-Ts})$ og $\frac{1 - \frac{T_s}{4}}{1 + \frac{T_s}{4}}$ i et bodediagram.

Av figur 19 kan det sees at $\frac{1}{T_s}(1 - e^{-Ts})$ har en fallende amplitude, mens tilnærmingen $\frac{1 - \frac{T_s}{4}}{1 + \frac{T_s}{4}}$ ikke har en fallende amplitude. På bakgrunn av dette har veileder

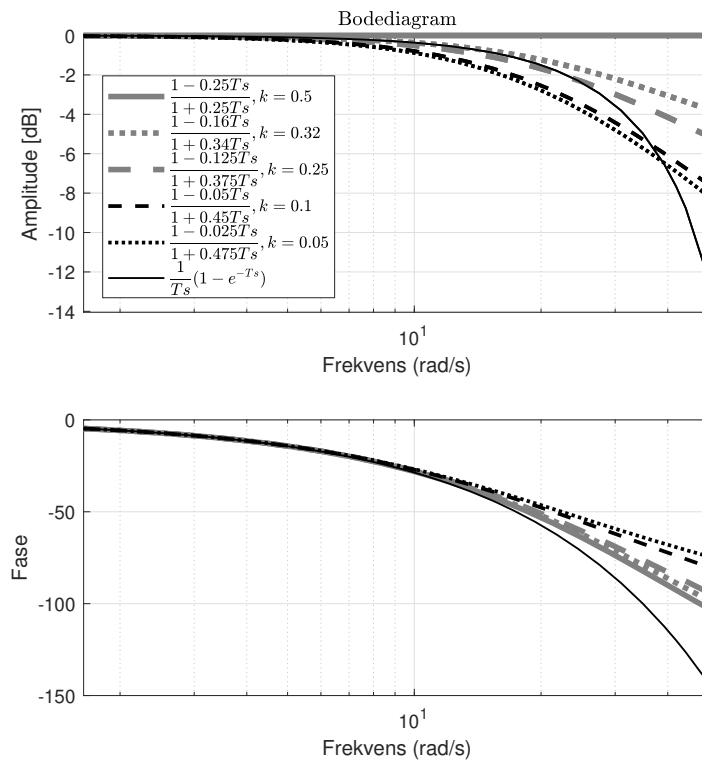
gitt en metode for modifikasjon av Padé-approximasjonen $\frac{1 - \frac{T_s}{4}}{1 + \frac{T_s}{4}}$, slik at tilnærmingen for holdelementet også har noe fallende amplitude.

Ligningen som tar utgangspunktet i videre manipulasjon av Padé-approximasjonen $\frac{1 - \frac{T_s}{4}}{1 + \frac{T_s}{4}}$ er gitt som:

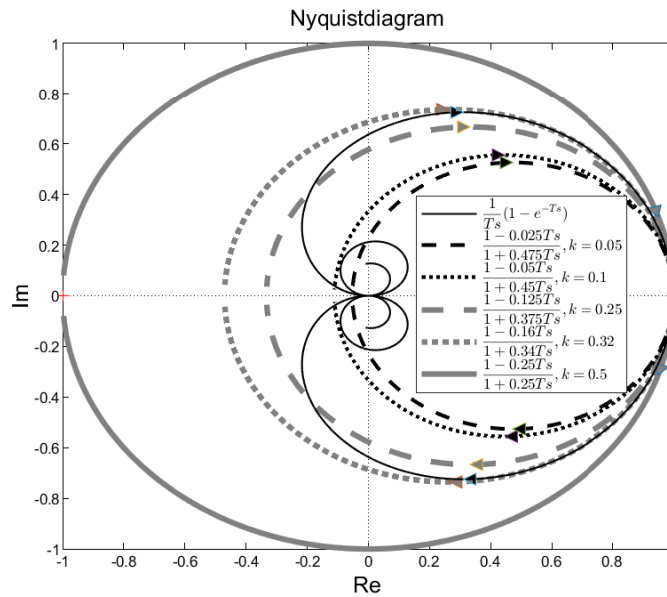
$$\widehat{ZOH} = \frac{1 - k1\frac{T}{2}s}{1 + k2\frac{T}{2}s} = \frac{1 - k\frac{T}{2}s}{1 + (1 - k)\frac{T}{2}s} \quad (36)$$

Der “ $k1$ ” og “ $k2$ ” er parametere til å tune denne tilnærmingen. Ligningen over blir lik første ordens Padé-approksimasjonen av halv tidsforsinkelse av tastetiden, med $k1 = k2 = 0.5$. I prinsippet kan $k1$ og $k2$ være mange forskjellige verdier, men det tas utgangspunkt i å manipulere $k1$ og $k2$ med verdien k . Der k er ($0 \leq k \leq 0.5$). $k = 0$ gir et vanlig første ordens lavpass filter, mens med $k = 0.5$ blir det den vanlige første ordens Padé-approksimasjonen.

Poenget med denne modifiseringen av første ordens Padé-approksimasjonen er at litt endring i fasefallet skal kunne føre til at det dannes amplitudefall. Målet er å ende opp med en så lik transferfunksjon som transferfunksjon for ZOH som mulig. Spørsmålet er om endringen i fasefallet er akseptabel for å få dannet et amplitudefall? For å teste ut dette spørsmålet blir det konstruert et Bodediagram og et Nyquistdiagram med forskjellige verdier av k , som sammenlignes med TF for ZOH. Bodediagrammet blir vist i figur 20, mens Nyquistdiagrammet blir vist i figur 21. Uansett hvor lik transferfunksjonen i ligning 36 blir TF for ZOH, er det de reelle eksperimentene som bestemmer, hvor god denne tilnærmingen blir.



Figur 20: Bodediagram av $\frac{1-k\frac{T}{2}s}{1+(1-k)\frac{T}{2}s}$ med forskjellige verdier av k , sammenlignet med $\frac{1}{Ts}(1 - e^{-Ts})$. T er lik 0.1 sekunder.



Figur 21: Nyquistdiagram av $\frac{1-k\frac{T}{2}s}{1+(1-k)\frac{T}{2}s}$ med forskjellige verdier av k , sammenlignet med $\frac{1}{T_s}(1 - e^{-T_s})$.

5.2.5 Drøfting av modifikasjon av Padé-approximasjon av en tidsforsinkelse

Fra figur 20 og 21 observeres det at ved lavere verdi av k blir det større amplitudefall og mindre fasefall. Dette tilsier at ved lavere verdi av k , blir en raskere diskret regulator konstruert. Derfor er denne metoden grovt sett bare interessant hvis den rene første ordens approximasjonen av en tidsforsinkelse, gir en tilstrekkelig konservativ løsning. Dette er fordi at desto større amplitudefallet er, desto dristigere blir regulatoren. Det samme gjelder for fasefallet bare motsatt vei, desto mindre fasefallet blir desto dristigere blir resultatet.

Det kan legges merke til at ved lav verdi av k blir amplitudefallet større i en liten periode, enn amplitudefallet med TF for ZOH. Til sammenligning gir alle verdier av k et mindre fasefall, enn fasefallet TF for ZOH genererer. Det viktige spørsmålet er: Hvilke av tilnæringsmetodene er det mest hensiktsmessig å bruke for å konstruere en diskret regulator?

Av modifikasjonene kan det i første omgang se ut som at k med verdi 0.32 kan være en god tilnærming. Fordi her får vi generert en del amplitudefall, uten å miste mye av fasefallet. Denne verdien får heller ikke et synlig¹¹ amplitudefall som overstiger amplitudefallet til TF for ZOH. En k verdi på 0.25 kan også være interessant, hvis det viser seg at en k verdi på 0.32 er en bedre metode enn den

¹¹Hvis vi forstørrer figur 20 kan det sees at også denne tilnærmingen for et amplitudefall som marginalt overstiger amplitudefallet til TF for ZOH. Dette er det valgt å se bort i fra.

vanlige Padé-approksimasjonen. Dette er neste steg, men det er selvsagt mulig å bruke andre verdier av k . k lik 0.05 er interessant å se nærmere på, siden dette er en ekstrem versjon av modifikasjons alternativene. Det er selvsagt teoretisk mulig med andre verdier, men disse kan heller testes ut hvis det mot formodning viser seg at det er behov for en enda dristigere regulator enn det k lik 0.05 frembringer.

Tabell 2 gir eksempler på hvordan tallverdien for fasefallet utvikler seg. I tabellen er det vist det tregeste fasefallet fra modifisert Padé-approksimasjon med k lik 0.05, representert med “ $k = 0.05$ ”. Dette er sammenlignet med det raskeste fasefallet fra figur 20, og den rene Padé-approksimasjonen.

Tabell 2: Noen tallverdier for fasefallet vist i figur 20.

	Frekvens lik $1/T$	Nyquistfrekvensen
$k = 0.05$	-26.8398°	-60.6637°
$\frac{1 - \frac{T \cdot s}{4}}{1 + \frac{T \cdot s}{4}}$	-28.0725°	-76.2921°
TF for ZOH ¹²	-28.6479°	-90°

Tabellen over er gitt for å tydeliggjøre likheten i fasefallet i starten av frekvensforløpet.

Det siste som kan leses av figur 20 er at selv om ikke den rene tidsforskjellen er plottet i figuren, kan den undersøkes fra figuren. Som sett av figur 16 har denne det “samme”¹³ fasefallet som TF for ZOH. Denne har som nevnt det samme amplitudefall som den rene Padé-approksimasjonen. Dette medfører at alle tilnæringsmetodene for konstruksjon av diskret regulator kan undersøkes fra figur 20.

¹²Gir de samme verdiene som med en ren tidsforsinkelse.

¹³Samme fasefall før Nyquistfrekvensen, det området som er interessant.

6 Generell metode for diskret regulering av en kontinuerlig prosess

6.1 Stabilitetsmarginer brukt i eksperimenter

Reguleringsystemene i denne rapporten er konstruert slik at det dannes fornuftige stabilitetsmarginer og det er gjort en vurdering av systemets totale stabilitet. Eksempler på hva som kan være fornuftige stabilitetsmarginer er [1]:

$$\begin{aligned}\psi &\geq 45^\circ \\ \Delta K &\geq 6, [\text{dB}]\end{aligned}$$

Ved bruk av begrepet normale stabilitetsmarginer, blir det i denne rapporten referert til disse stabilitetsmarginene. Dette er ikke et etablert faguttrykk, men et begrep som blir brukt i denne rapporten. Det er vurdert som viktig at testene i eksperimentene blir konstruert mot de samme stabilitetsmarginene, for å danne et mest mulig objektivt sammenligningsgrunnlag mellom metodene.

6.2 Valg av tastetid

Etter at det ideelle/helt kontinuerlige systemet er konstruert, blir tastetiden valgt. Tastetiden er valgt i henhold til to prinsipper. Første prinsipp er at tastetiden skal være høy for å illustrere effekten av et holdeelement på en mest mulig klar måte i denne rapporten. Prinsipp nummer to er at tastetiden må være liten nok til at systemet fungerer på en hensiktsmessig måte. For å få en fornuftig tastetid er det utviklet en ligning for å beregne hva tastetiden bør være[1]:

$$T < 2d\psi/\omega_c \quad (37)$$

Her er $d\psi$ akseptabel reduksjon av fasemargin, og ω_c er kryssfrekvensen. [1] Ligning 37 er blitt brukt som referanse for valg av tastetid, men den er ikke blitt brukt som en absolutt formel. Enkelte tester vil bli kjørt med en mye høyere tastetid, enn det man ville brukt i et reelt reguleringsystem. Dette er for å prøve å fremprovosere en tydeligere effekt av holdeelementet i simuleringseksperimentene. Vanligvis blir tastetiden valgt slik at det negative fasebidraget ved prosessens kryssfrekvens ikke gir mer en 3-5 graders redusert fasemargin¹⁴.

Det er bemerket at det finnes flere forskjellige metoder for å velge tastetid. For å sitere boken “Process Dynamics and Control” av Dale E. Seborg, Thomas F. Edgar, Duncan A. Mellichamp og Francis J. Doyle III, sies det at: “Selection of the sampling period remains more of an art than a science” [22].

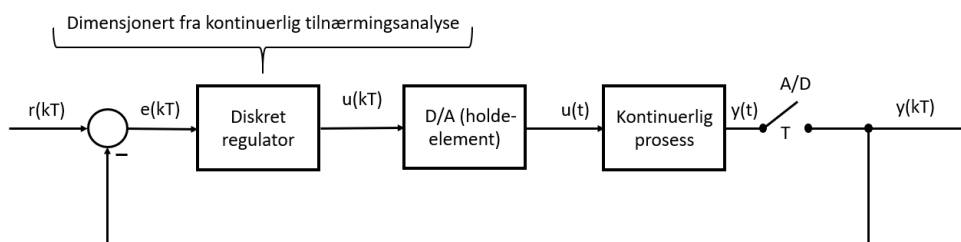
6.3 Generelt for tilnæringsmetodene

Alle tilnæringsmetodene blir gjennomført hver for seg ved å analysere systemets stabilitet. Felles for alle de kontinuerlige metodene er at stabilitetsanalysen blir gjort helt kontinuerlig. Hensikten er å undersøke om den kontinuerlige

¹⁴for kilde se vedlegg C.1.

tilnærmingen for holdeelement og tasting, kan representere holdeelementet og tastingen på en kontinuerlig og tilstrekkelig måte.

Et annet fellestrekk er at i alle metodene blir den kontinuerlige regulatoren omgjort til en diskret regulator ved hjelp av bilinear transformasjon. Slik at den fysiske testen av systemet blir gjort med en diskret regulator sammen med et kontinuerlig system. Selv om den diskrete regulatoren er dimensjonert fra en kontinuerlig tilnæringsanalyse.



Figur 22: Blokkdiagram for å illustrere hvordan de kontinuerlige metodene blir testet ut.

6.3.1 ”Control System Designer” et reguleringsverktøy for MATLAB

”Control System Designer” er et reguleringsverktøy for MATLAB som skal gjøre det lettere å konstruere regulatorer til lukkede monovariabel systemer. Dette reguleringsverktøyet fungerer ved at polene og nullpunktene fra transferfunksjonen til regulator kan endres. Endringene skjer ved at verdiene ”dras” fysisk med pc-musen. Dette kan gjøres ved enten å dra verdiene i et Bodediagram, Nicholsdiagram eller i det komplekse planet med rotkurver inntegnet. [23]

Dermed kan det fysisk observeres hvordan dynamikken i et Bodediagram, Nicholsdiagram og rotkurvene endrer seg mens enkelte verdier i regulatoren blir endret. Ulempen med denne metoden er at det jobbes numerisk og derfor er det ikke mulig å sette regulator parameterne helt vilkårlig. Ved bruk av dette reguleringsverktøyet i bakgrunnsarbeidet for denne rapporten, ligger unøyaktigheten i fasemarginen på for eksempel 0° til 0.5° . Fase og forsterkningsmarginen blir helt presis¹⁵, men det er begrensinger på hvor presist regulatorparameterne kan settes. [23][14]

I tillegg til at regulatorparameterne kan endres mens de blir fremstilt i Bodediagram, Nicholsdiagram og i det komplekse plan, er det en del egenskaper som kan bli vist. Som standard blir sprangresponsen til systemet vist, denne blir også endret etter som parameterverdiene for regulatoren blir regulert. [14]

Årsaken til at ”Control System Designer” er relevant for oppgaven, er at alle tilnæringsmetodene for konstruksjon av en diskret regulator og w-transformasjon

¹⁵Hvis det antas at den kontinuerlige regulatoren og det kontinuerlige prosessen blir representert helt nøyaktig, med transferfunksjonen som brukes.

kan bruke dette reguleringsverktøyet. Implisitt er det forståelig at denne metoden kan benyttes, fordi den er laget for kontinuerlig analyse av monovariabel systemer. Det er viktig å huske på at tilnæringsmetodene gir en tilnærmet modell, av det faktiske systemet som skal reguleres. For eksempel er det ikke gitt at sprangresponsen vist i reguleringsverktøyet blir lik sprangresponsen til det reelle hybride systemet. [14]

Som gitt i delkapittel 4.7 kan sløyfetransferfunksjonen for et hybrid system i w -domene analyseres som et kontinuerlig system. Derfor kan "Control System Designer" brukes for systemer i w -domene. En viktig detalj er at Bodediagrammet som blir brukt i reguleringsverktøyet ikke er korrekt, på grunn av at amplitude og faseforløpet blir plottet mot hjelpe"frekvensen" og ikke den reelle frekvensen. Uansett blir stabilitetsmarginene det samme for w -domene om amplitude og faseforløpet blir plottet mot hjelpe"frekvensen" eller den reelle frekvensen. Dette er fordi Nyquistdiagrammet og Nicholsdiagrammet blir likt uavhengig om det brukes en reell frekvens eller en hjelpe"frekvens", siden her er frekvensen implisitt gitt. Hvis det er forvirrende at Bodediagrammet ikke viser den reelle frekvensen, kan regulator parameterne reguleres med Nicholsdiagrammet istedenfor.

Siden alle metodene som omtales i denne rapporten kan implementeres med "Control System Designer", kan en diskret regulator konstrueres relativt enkelt. Den åpenbare svakheten er at det må foretas Tustins transformasjon på den kontinuerlige regulatoren som "Control System Designer" gir.

6.4 Implementasjon i Simulink

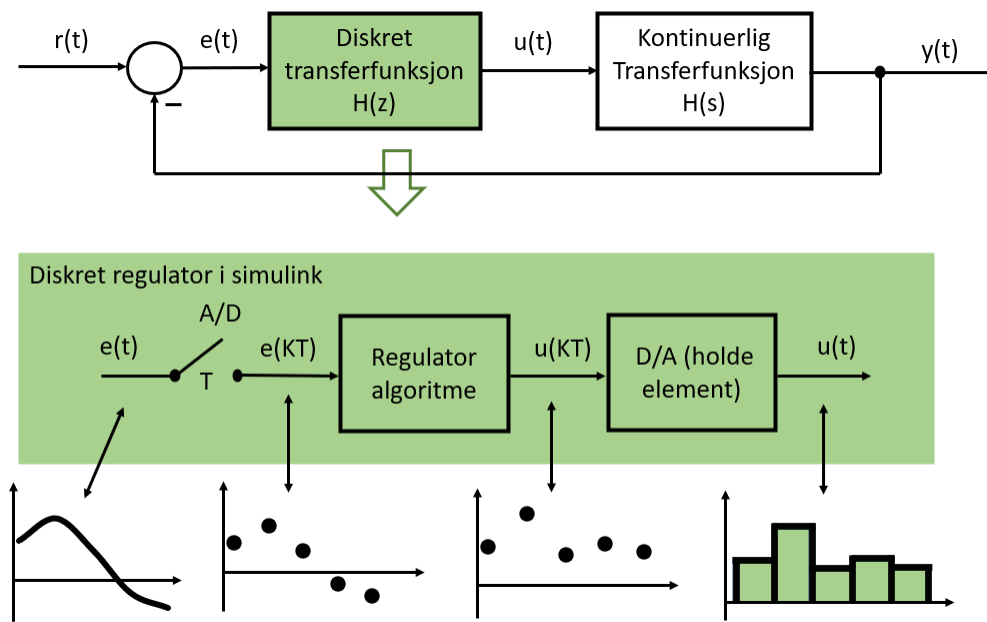
Alle simuleringsforsøk for denne oppgaven er utført i Simulink. For at forsøkene i Simulink skal være valide må det kontrolleres at simuleringsforsøkene i Simulink gjenspeiler et reelt reguleringsstille. En digital datamaskin fungerer i sin natur diskret. Digitale datamaskiner brukes til å kjøre Simulink, og Simulink brukes til å simulere kontinuerlige systemer. Derfor undersøkes det om Simulink klarer å representere kontinuerlige systemer med en tilstrekkelig nøyaktighet. Spesielt interessant er det hvordan Simulink håndterer overgangen mellom kontinuerlig system og diskret regulator.

De kontinuerlige systemene blir simulert som om de er kontinuerlige systemer i Simulink. Denne simuleringen er utført med varierende tastetider. Dette er ved bruk av standard innstillinger. Simuleringene blir utført med ordinære differensial ligninger fra engelsk "Ordinary differential equation" (ODE). Ved simulering av de kontinuerlige systemene, regner Simulink nøyaktigheten til tastetiden. Slik at tastetiden blir regulert, ved for stor unøyaktighet.[24] Dette er en annen tastetid enn tastetiden til den diskrete regulatoren. Det er viktig at denne tastetiden er tilstrekkelig større enn tastetiden til de kontinuerlige systemene.

Når et diskret system i z -domene blir simulert sammen med et kontinuerlig sys-

tem i s-domene, blir dette kategorisert som et hybrid system også i Simulink. Tasteriden til det diskrete systemet blir brukt som en betingelse når Simulink regner ut tasteriden til det kontinuerlige systemet. Fra bruker manualen til Simulink er det anbefalt å bruke “ode45” eller “ode23”, for hybride systemer. Det er valgt å bruke “ode45” fordi det er den Simulink automatisk velger, når det ikke er spesifisert en numerisk løsningsmetode for simuleringen. “ode45” har i tillegg en høyere nøyaktighet enn “ode23” [17]. [25]

Figur 23 viser hvordan Simulink konseptuelt håndterer et enkelt hybrid system.



Figur 23: Illustrasjon av hvordan blokkdiagram fungerer i Simulink[25].

Dette bildet er litt annerledes enn figur 1. En viktig forskjell er at her er det “kun” regulatoren som er diskret. Simulink behandler resten av systemet som om det var kontinuerlig. Dette medfører at signalene Simulink bruker er “analoge” i motsetning til det diskrete signalet som ville vært ønsket. Figur 1 viser hvordan det ønskelige tilfelle ville sett ut. Ved å forskyve tasteren i figur 1 og innføre en kontinuerlige referanse, blir figur 1 lik figur 23. Begge figurene er et reelt hybrid system. Hvis det sees bort i fra at den kontinuerlige delen er en tilnærming for et kontinuerlig system i Simulink. [26] [27]

Den diskrete regulatoren har med innstillingen taster basert prosessering “sample-based processing”. I praksis har den en taster og et holdeelement innebygd. Dette kan testes ut ved å implementere den diskrete blokken “Zero-Order Hold”, på reguleringssystemet og det vil genereres samme resultat¹⁶. “Zero-Order Hold” blokken er Simulinks metode for å innføre et holdeelement til reguleringssystemet. [28] [25]

¹⁶forbeholdt at “Zero-Order Hold” har samme tasterid som den diskrete regulatoren.

7 Eksperimenter

7.1 Introduksjon til eksperimenter

I dette kapitlet vil alle transferfunksjonene som det er eksperimentert med i denne rapporten gjennomgås. Målet med dette kapitlet er å konkludere kvantitativt vedrørende hvor godt de kontinuerlige analysemetodene fungerer, for å konstruere diskrete regulatorer til kontinuerlige systemer. Metodikken i eksperimentene er like og mange av eksperimentene er ligner på hvorandre. Grunnen til at alt er vist er for å bygge opp en konklusjon kvantitativt. Det er itillegg gjort flere eksperimenter enn det er vist i rapporten. Alle eksperimentene er gjort på kontinuerlige systemer som er monovariabel, strengt propre, LTI-systemer. I tabell 3 er de forskjellige transferfunksjonene listet opp. Mange av disse transferfunksjonene er hentet fra boken “Reguleringsteknikk” av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss.

Tabell 3: Oversikt over alle transferfunksjoner som er blitt testet i denne rapporten.

Nr	Transferfunksjon	Spesifikasjoner
0	$h_u(s) = 1$	Dette er en tilnærming
1	$h_u(s) = \frac{K}{s^2}$	
2	$h_u(s) = \frac{1}{s}$	
3	$h_u(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)}$	$T_1 = 4.48$
4	$h_u(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$	$T_1 = 1, T_2 = 0.1$
5	$h_u(s) = \frac{1}{(T_1 s)(1 + T_2 s)}$	$T_1 = 1, T_2 = 0.1$
6	$h_0(s) = \frac{K(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_4 s)(1 + T_5 s)}$	$T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5 > 0$
7	$h_u(s) = \frac{K(1 + sT_3)e^{-\tau s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$	$T_1 = 0.5 \quad T_2 = 10 \quad T_3 = 2$
8	$h_u(s) = \frac{(1 + T_1 s)e^{-\tau s}}{s^2(1 + T_2 s)}$	$T_1 = 8, T_2 = 1$ og $\tau = 0.1$.
9	$h_u(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s^2(1 + T_1 s)}$	$T_1 = 5$
10	$h_u(s) = \frac{(1 - T_1 s)e^{-\tau s}}{s^2}$	$T_1 = 5$

I tabellene i dette kapitlet er det listet forskjellige regulatorer fremstilt fra de ulike kontinuerlige analysene. I disse tabellene er det brukt forkortelser, forkla-

ring på disse forkortelsene er listet opp i tabell 4.

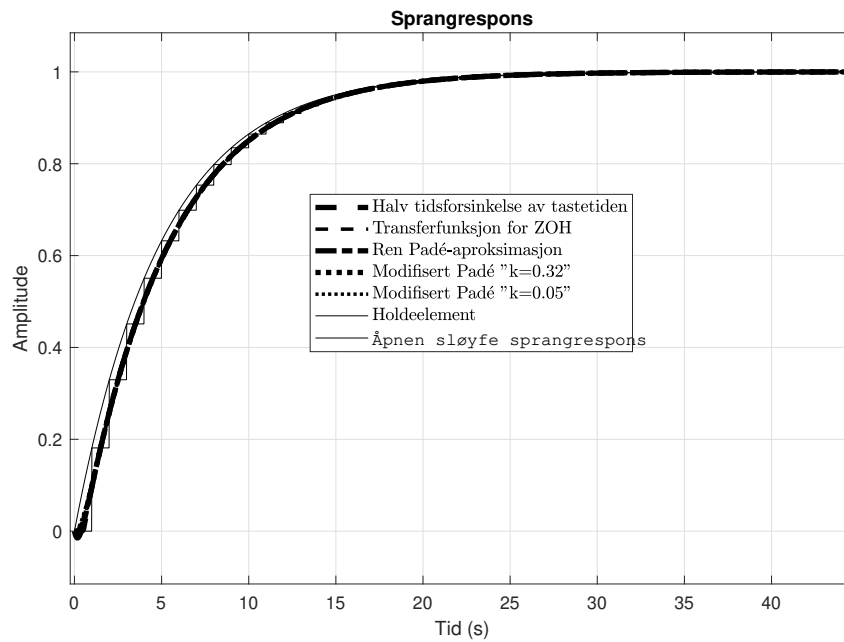
Tabell 4: Forklaring på forkortelser brukt i tabeller i kapittel 7.

Forkortelse	Forklaring
Kontinuerlig	Helt kontinuerlig analyse for konstruksjon av regulator
Tidsforsinkelse	En ren tidsforsinkelse for konstruksjon av regulator
Padé	Padé-approksimasjon for konstruksjon av regulator
Mod. “ $k = x$ ”	Modifisert Padé-approksimasjon med k verd lik “ x ” for konstruksjon av regulator. Der x er et tall mellom 0 og 1
$H(w)$	w -domene brukt til konstruksjon av regulator

7.2 Åpen sløyfe respons

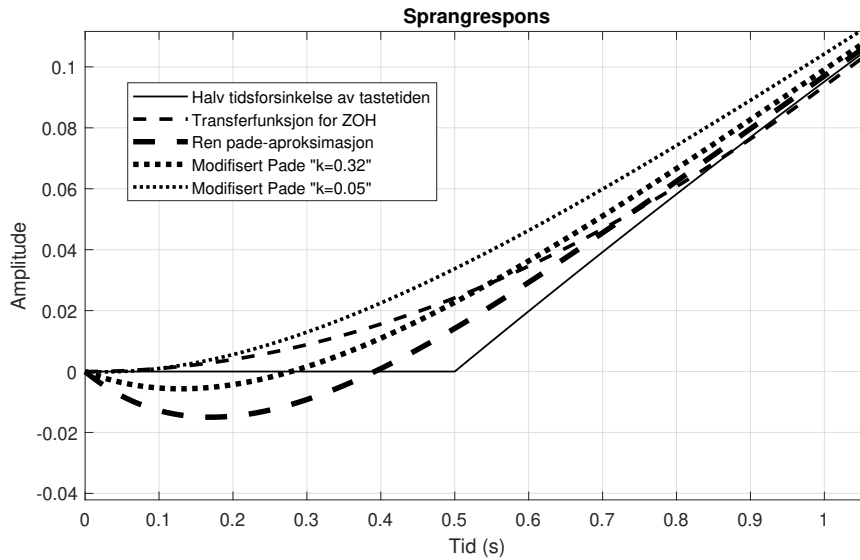
Dette eksperimentet skiller seg ut fra de andre eksperimentene, siden det her blir koblet på en åpen sløyferespons. Dette eksperimentet er ikke en reell test på hvordan tilnæringsmetodene for et holdelement fungerer for å konstruere en diskret regulator til et kontinuerlig system. Hensikten med testen er å kontrollere at metoden gir samme resultat som ved testen utført av “Ivar Halvorsen” sendt til studenten på mail, se vedlegg C.1. I tillegg er det inkludert Padé-approksimasjon av en halv tidsforsinkelse og modifikasjoner av denne.

En åpen sløyfe sprangrespons til en enkel første ordens respons, med tidskonstant på 5 sekunder blir studert. Deretter blir signalet sendt gjennom et Holdeelement. Parallelt blir signalet sendt gjennom transferfunksjoner som representerer tilnæringsmetodene for et holdelement, henholdsvis; halv tidsforsinkelse av tastetiden, TF for ZOH, ren Padé-approksimasjon, og modifisert Padé-approksimasjon med “ $k= 0.32$ ” og “ $k=0.05$ ”.



Figur 24: Åpen sløyfe sprangrespons til en enkel første ordens respons med tidskonstant på 5 sekunder, sammen med diskritisert måling og tilnærminger for diskritisert måling.

Det er vanskelig å se detaljene av figur 24, da det ikke er synlige forskjeller mellom denne og testen gjort i vedlegg C.1. Ved fjerning av den åpne sløyfe sprangresponsen, fjerning av det diskritiserte signalet og forstørret visning av de 2 første sekundene i figur 24, blir resultatet som vist i figur 25:

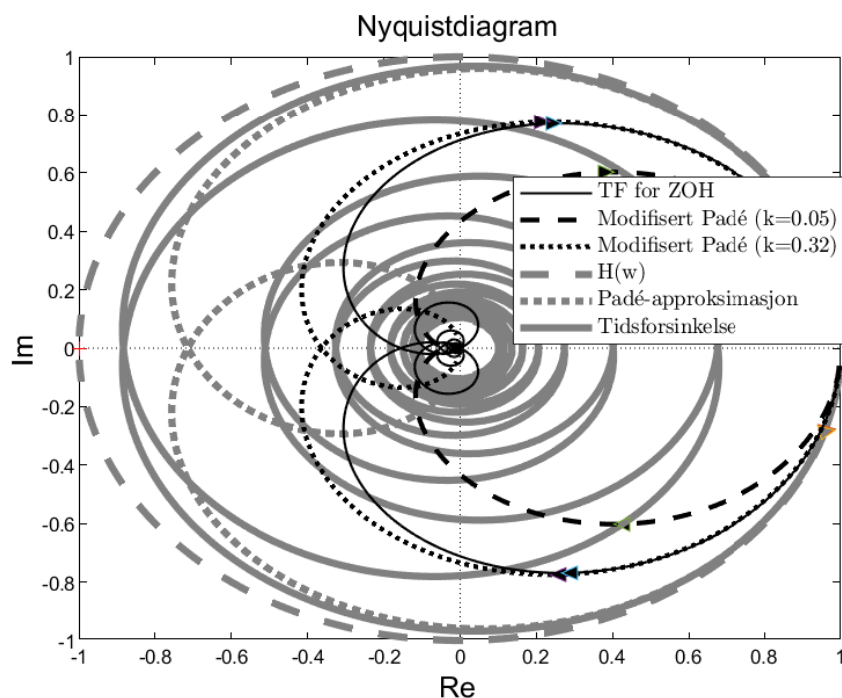


Figur 25: Forstørret versjon og fjerning av to grafer i figur 24.

Det kan tilsynelatende se ut som den modifiserte Padé-approksimasjonen med “ $k=0.32$ ” gir den beste tilnærmingen for transferfunksjonene til ZOH. Hovedsakelig blir tilnæringsmetodene veldig like i denne testen.

7.3 Eksperiment med system uten dynamikk

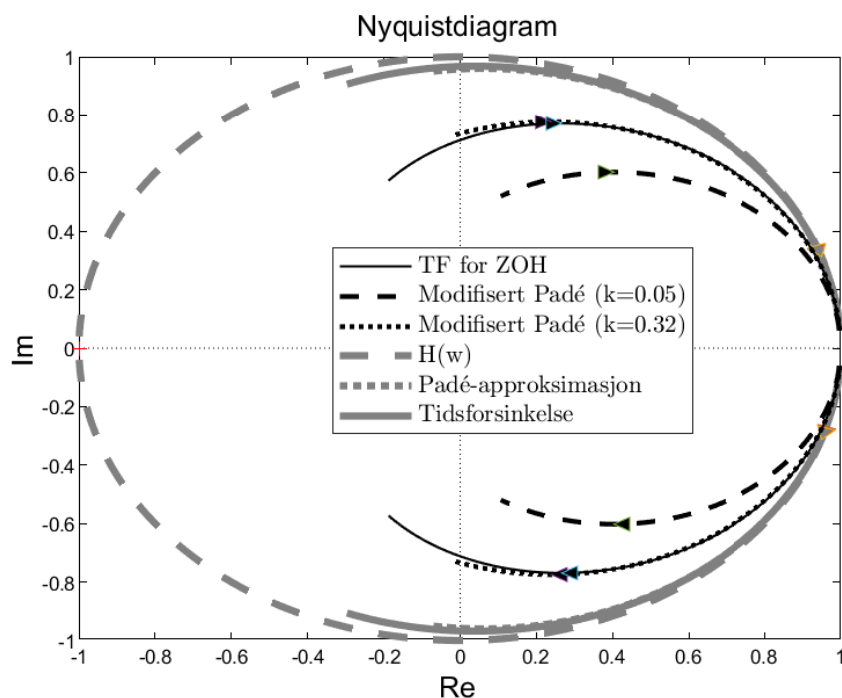
Dette eksperimentet tar for seg det veldig spesielle tilfellet med en prosess uten dynamikk, der kun tastingen i seg selv gir det negative fasebidraget til kryssfrekvensen. Sløyfen til et system uten dynamikk er lukket, i et forsøk på å “regulere” systemet med en forsterkning. For at systemet skal kunne simuleres, tas det utgangspunkt i systemet $h_r = \frac{1}{1+T_1s}$ og lar T_1 gå mot null. Slik at det oppnås et system med tilnærmet null dynamikk, og som kan simuleres med en ren forsterkning. Årsaken til at det er interessant å analysere systemet med kun en forsterkning, er at den diskrete regulatoren blir lik den kontinuerlige regulatoren. Hvis det lykkes å tilnærme prosessen slik at den blir tilnærmet dynamikk løs, da vil kun holdelementet generere fasefall og amplitudedefall. T_1 blir satt til 0.01 og tastetiden blir satt til 0.1 sekunder. Tilnærmingen for prosessen uten dynamikk og med holdelement er vist i tabell 5. Først undersøkes prosessen med en forsterkning lik en. Dette vises med et Nyquistdiagram i figur 26, eventuelt i vedlegg A.2 for en forstørret versjon.



Figur 26: Nyquistdiagram for tilnærming av prosess uten dynamikk, med forsterkning lik en.

Fra figur 26 observeres det at fasefallet med w -domene stopper ved 180° grader. En annen observasjon med w -domene er at amplitudedefallet er nesten ikke eksisterende. Dette kan tyde på at Holdeelementet skaper et rent fasefall på 180° grader. Fordi bidraget i fasefall fra førsteordens prosessen som er forsøkt tilnærmet det dynamikkløse systemet, er 17.4° grader på Nyquistfrekvensen. Det vil ved flere anledninger senere i rapporten observeres at fasefallet stopper med w -transformasjon på akkurat -180° grader.

De andre approksimasjonene får naturlig nok et større amplitudedefall og fasefall, siden stabilitetsundersøkelse med Nyquistdiagram ikke stopper på Nyquistfrekvensen. Hvis stabilitetsundersøkelsen med Nyquistdiagram stopper ved Nyquistfrekvensen blir Nyquistdiagrammet som vist i figur 27.



Figur 27: Samme figur som figur 26, bare at analysen er stoppet ved Nyquistfrekvensen.

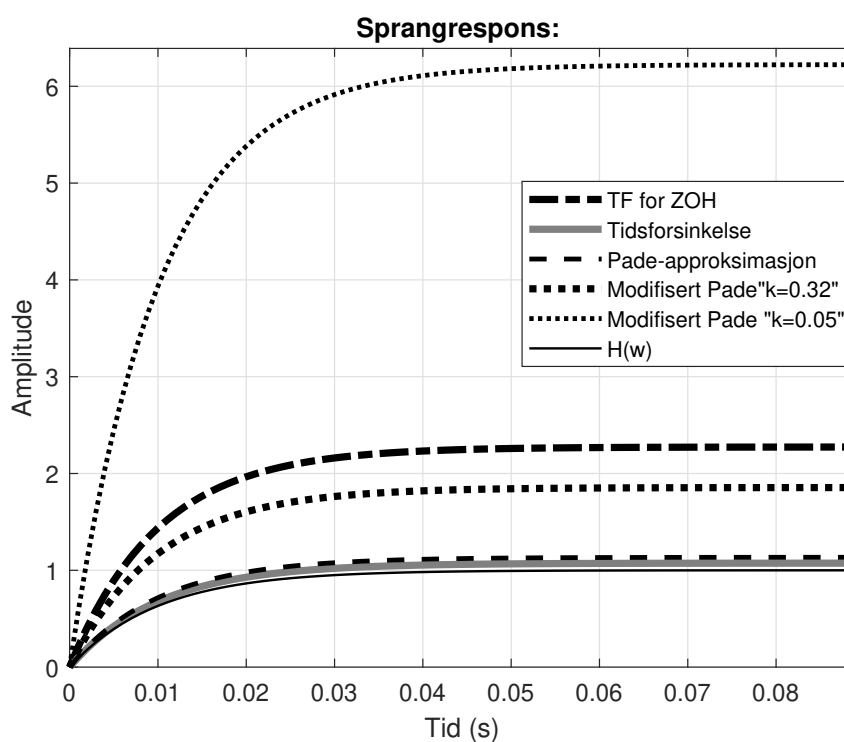
Fra figur 27 observeres det at TF for ZOH og modifikasjonen av Padé-approximasjonen med k verdi 0.32 har et tilsynelatende lignende amplitudeforløp og faseforløp. Den viktigste forskjellen mellom disse to er at TF for ZOH får et kjappere fasefall og amplitudefall i forhold til frekvensforløpet. Dette observeres ved at grafen for TF for ZOH har kommet "lengre".

Fra figur 27 observeres det også at amplitudefallet for w -transformasjon er lavere enn amplitudefallet for den rene tidsforsinkelsen og den rene Padé-approximasjonen. Siden disse tilnærmingene ikke genererer noe ekstra fasefall på prosessen, ser det ut til at w -transformasjon faktisk reduserer det lille fasefallet prosessen gir.

Når det kom til valg av hva forsterkningen skulle reguleres mot, ble det valgt å ignorere amplitudemarginen. Det ble valgt å regulere mot en fasemargin på 45° . Dette genererte forsterkninger vist i tabell 5, med tilhørende sprangrespons vist i figur 28.

Tabell 5: Forsterkning sammenlignet med prosessen, der holdelementet er tatt høyde for på forskjellige måter.

Metode	Regulator	Prosess
Tidsforsinkelse	1.0738	$\frac{1e^{-0.05s}}{0.01s + 1}$
Padé	1.1345	$\frac{-0.4s + 16}{0.004s^2 + 0.56s + 16}$
Mod. "k = 0.32"	1.8549	$\frac{-0.016s + 1}{0.00034s^2 + 0.044s + 1}$
Mod. "k = 0.05"	6.224	$\frac{-0.0025s + 1}{0.000475s^2 + 0.0575s + 1}$
H(w)	1.0001	$\frac{-7.205 \cdot 10^{15}w + 1.441 \cdot 10^{17}}{7.206 \cdot 10^{15}w + 1.441 \cdot 10^{17}}$
TF for ZOH ¹⁷	2.2737	$\frac{1(1 - e^{-0.05s})}{(0.01s + 1)0.05s}$

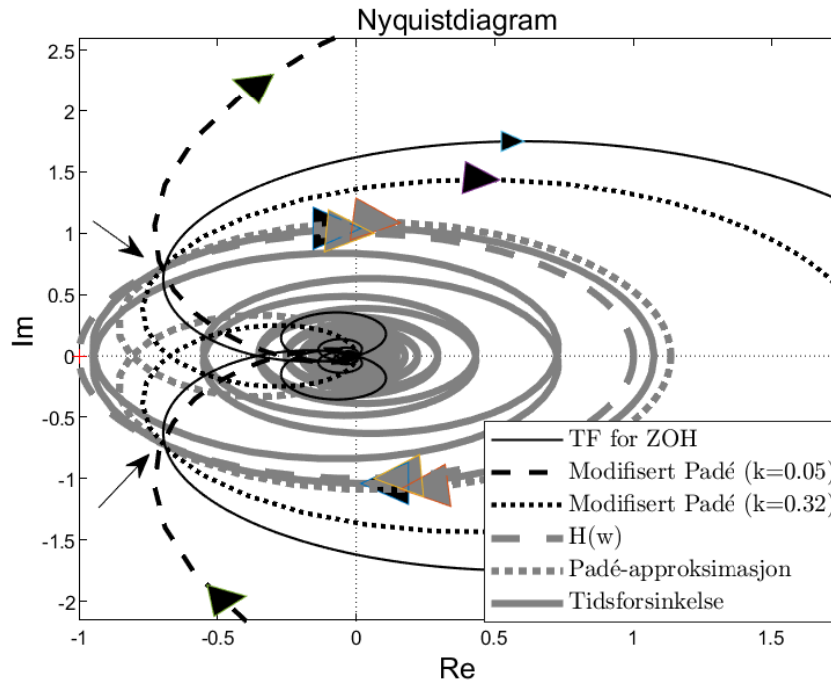


Figur 28: Sprangrespons med prosess og forsterkning vist i tabell 5.

Med forsterkninger vist i tabell 5, bør det ikke være overraskende at sprangre-

¹⁷Tabellen gir ikke verdien av prosessen for TF for ZOH som MATLAB håndterer, fordi denne verdien er tilnærmet på tilstandsromrepresentasjon.

sponsen vist i figur 28 blir som den er. Det interessante her bør være stabilitetsundersøkelsen som viser hvordan holdelementet påvirker fase og amplitudefall på et system med tilnærmet null dynamikk. Derfor er stabilitetsanalyse fra tabellen 5 vist i figur 29, denne figuren kan også finnes i vedlegg A.1 for en forstørret versjon. Pilene i figuren viser de to punktene som representerer en fasemargin på 45° grader.



Figur 29: Nyquistdiagram basert på funksjonen i tabell 5.

7.4 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 1

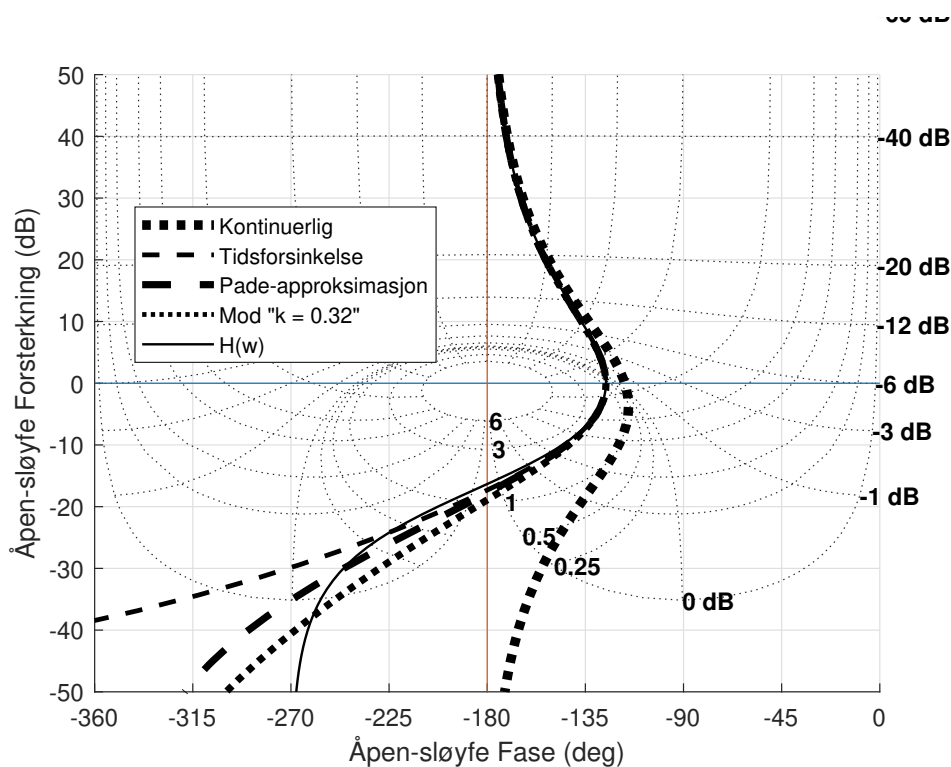
7.4.1 Eksperiment 1

I eksperimentet blir transferfunksjon $\frac{K}{s^2}$ studert. Det startes med å sette $K = 1$, for enkelthets skyld. I boken “Reguleringsteknikk” av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss, er det konstruert en fornuftig regulator til denne prosessen ved hjelp av w -transformasjon [1]. Med denne regulatoren skal det sees på hva slags stabilitetsmarginer som er gitt ved de andre kontinuerlige analysemetodene. Regulatoren er gitt under og det opereres med en tastetid lik ett sekund.

$$h_r(w) = K_p \frac{1 + T_d w}{1 + \frac{T}{2} w} = 0.0289 \frac{1 + 10w}{1 + \frac{1}{2}w} \quad (38)$$

Ved å transformere denne regulatoren til en kontinuerlig form, kan det utføres en kontinuerlig analyse og samtidig kontinuerlige tilnærmingsanalyser for det

diskretiserte systemet. Denne analysen blir vist ved et Nicholsdiagram i figur 30.



Figur 30: Nicholsdiagram for transferfunksjon $\frac{K}{s^2} (h_u)$ koblet i serie med regulatoren h_r , der det er brukt forskjellig tilnærming for diskretisering av h_u . I tillegg til et helt kontinuerlig tilfelle av h_0 .

Resultatet viser at tilnæringsmetodene for diskretisert analyse gir relativt samme resultat som ved den kontinuerlige analysen. Det kan være vanskelig å tyde forskjellen mellom tilnæringsmetodene, derfor er stabilitetsmarginene gitt i tabell 6.

Tabell 6: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.

Metode	Transferfunksjon (s)
Kontinuerlig	Forsterkningsmargin: uendelig Fasemarginmargin: 63.1 ved frekvens 0.301
Tidsforsinkelse	Forsterkningsmargin 7.35 ved frekvens 1.64 Fasemargin: 54.4 ved frekvens 0.301
Padé	Forsterkningsmargin : 7.74 ved frekvens 1.706 Fasemargin: 54.5 ved frekvens 0.301
Mod. "k = 0.32"	Forsterkningsmargin : 8.81 ved frekvens 1.73 Fasemargin: 54.5 ved frekvens 0.300
H(w)	Forsterkningsmargin 6.56 ved frekvens 1.90 Fasemargin 54.5 ved frekvens ¹⁸ 0.302

Tabell 6 viser at fasemarginene er tilnærmet like med fasemarginen til den rene tidsforsinkelsen og marginalt dårligere enn i de andre tilfellene. Forsterkningsmarginen varierer mer enn fasemarginen. Forsterkningsmarginen er ikke like relevant for å lage en effektiv regulator i dette tilfellet, sammenlignet med fasemarginene.

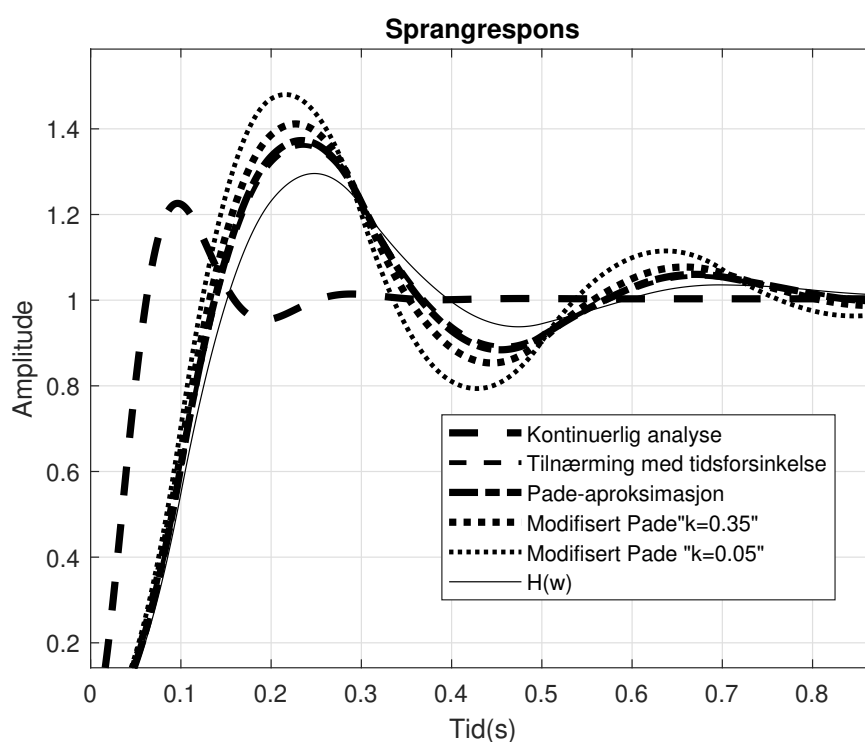
7.4.2 Eksperiment 2

Tabell 6 viser at det er relativt store stabilitetsmarginer, slik at det er en del å gå på sammenlignet med de normale stabilitetsmarginene. Derfor konstrueres nye regulatorer for samtlige analysemetoder. Målet er å få et så kjapt reguleringsystem som mulig, uten å oversi de normale stabiliseringsmarginene. Resultatet fra denne konstruksjonen er gitt i tabell 7. Tabellen viser diskret og kontinuerlig transferfunksjon av regulatorene. Senere er kun kontinuerlig funksjon vist fordi at den diskrete versjonen kan finnes direkte med Tustins metode. Prosessene med tilnærming for holdelement vil heller ikke bli vist senere. Det skal være gitt hva disse er ut ifra tastetiden og den kontinuerlige prosessen. Tastetiden T er nå 0.1 sekunder.

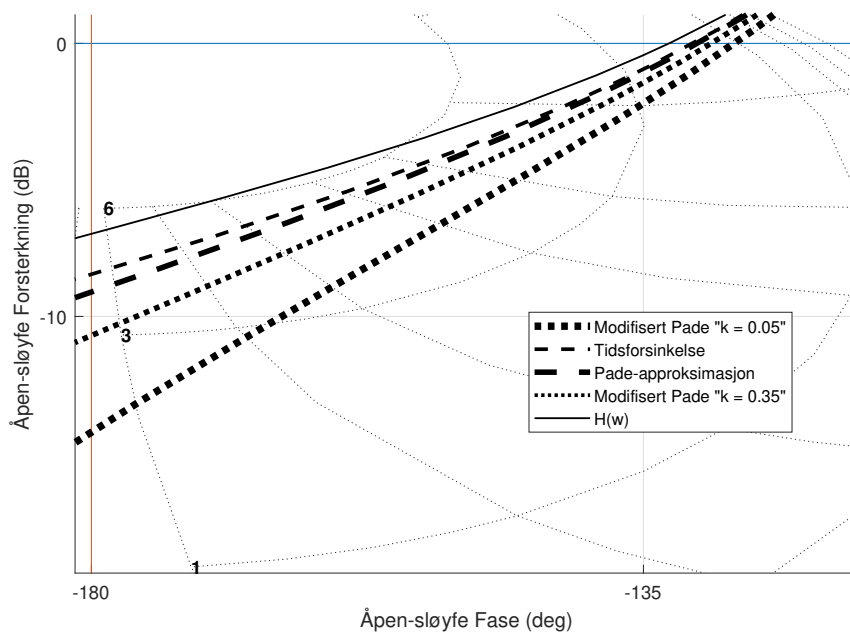
¹⁸Dette er den reelle frekvensen, uten bruk av ligning 8 vi ville analysen gitt den uekte frekvensen på 0.304.

Tabell 7: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.

Metode	Transferfunksjon (s)	diskritisert (z)	Prosess
Kontinuerlig	$\frac{1312.1(s + 0.1478)}{(s + 31.42)}$		$\frac{1}{s^2}$
Tidsforsinkelse	$\frac{307.83(s + 0.1478)}{(s + 31.42)}$	$\frac{120.6z - 118.9}{z + 0.222}$	$\frac{1e^{-0.05s}}{s^2}$
Padé	$\frac{312.68(s + 0.1478)}{(s + 31.42)}$	$\frac{122.5z - 120.7}{z + 0.222}$	$\frac{-0.4s + 16}{0.4s^3 + 16s^2}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{329.43(s + 0.1478)}{(s + 31.42)}$	$\frac{129.1z - 127.2}{z + 0.222}$	$\frac{-0.016s + 1}{0.034s^3 + s^2}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{359.23(s + 0.1478)}{(s + 31.42)}$	$\frac{140.8z - 138.7}{z + 0.222}$	$\frac{-0.0025s + 1}{0.0475s^3 + s^2}$
H(w)	$\frac{280.14(w + 0.1478)}{(w + 31.42)}$	$\frac{109.8z - 108.2}{z + 0.222}$	$\frac{-w + 20}{20w^2}$

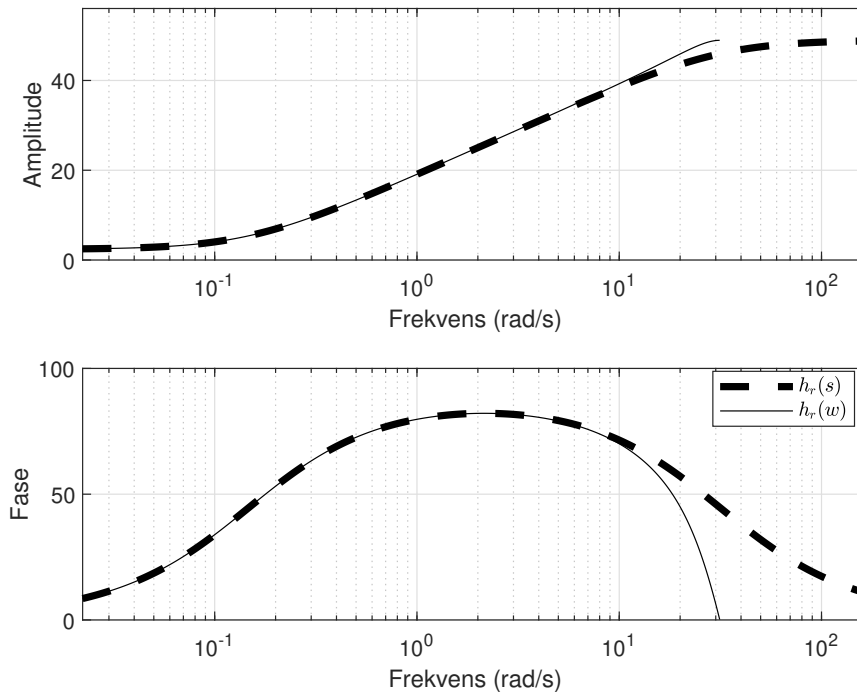
Figur 31: Sprangrespons med de forskjellige regulatorene til h_r fra tabell 7.

For å kunne opprettholde de samme stabilitetskriteriene for sløyfetransferfunksjonene som inneholder en diskret regulator, må naturligvis systemet reagere seinere på en sprangrespons enn det kontinuerlige systemet. Det er kanskje overraskende at



Figur 33: Nicholsdiagram til prosessen $\frac{K}{s^2}$, tilnærmet for et holdeelement med den samme regulatoren.

Figur 33 viser at w -transformasjon for h_u gir de dårligste stabilitetsmarginene. Derfor er det naturlig at regulatoren som er konstruert med w -transformasjon gir den tregeste sprangresponsen. Bakgrunnen for at w -transformasjon gir de dårligste stabilitetsmarginene er at w -transformasjon tar høyde for at h_r er diskret, i motsetning til de andre analysemetodene. I dette eksempelet er det kun forsterkningen i regulatoren som skiller regulatorne. Dette gjør det enklere å sammenligne regulatorne. Derfor blir regulatoren h_r funnet ved w -transformasjon vist med et Bodediagram i figur 34.



Figur 34: Kontinuerlig Bodediagram av $h_r(s)$ og kontinuerlig tilnærming av diskret Bodediagram av $h_r(w)$.

Heltrukken linje viser hvordan $h_r(w)$ blir analysert med w -transformasjon. Stiplet linje viser hvordan $h_r(w)$ hadde blitt analysert ved bruk av de kontinuerlige analysene, fordi $h_r(w)$ må bli omformet til $h_r(s)$. Det fallende faseforløpet og det økende amplitudeforløpet gir forklaringen på hvorfor w -transformasjon i dette tilfellet gir det minst dristige resultatet. Forklaringen på hvorfor den diskrete varianten av regulatoren h_r har et raskere amplitudefall, enn den kontinuerlige versjonen ligger i forholdet mellom dynamikken i regulatoren og tastetiden. I det gitte tilfellet vist i figur 34, har regulatoren en begrensende derivatorvirkning på $T_{bd} = \frac{T}{\pi}$. Denne verdien er lav i forhold til tastetiden.

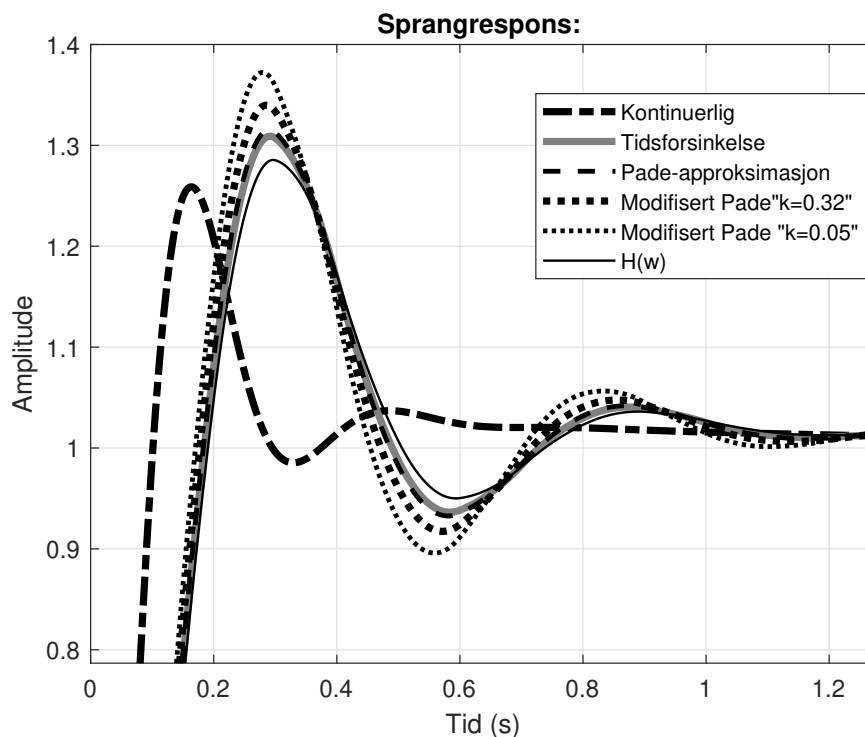
Ved å undersøke h_u og tilnærmingene for holdelement, skal den rene tidsforsinkelsen gi et mer konservativt resultat enn ved bruk av w -transformasjon. På tross av dette gir w -transformasjonen det minst dristige resultatet. For å videre undersøke om det begrensede derivatorleddet er relevant for at tidsforsinkelsen gir et mer dristig resultat enn ved bruk av w -transformasjon, blir det gjort nye eksperimenter. I det nye eksperimentet blir faktoren for begrenning av derivatorvirkning satt til $\frac{T}{2}$. Dette er siste eksperiment med konstruksjon av en regulator der fasen ikke blir løftet mer enn nødvendig. I motsetning til regulatorene i tabell 7, som er konstruert for å lage en så rask regulator som mulig.

7.4.3 Eksperiment 3

Ved implementering av $T_{bd} = \frac{T}{2}$ er regulatorene gitt i tabell 8 med tilhørende sprangrespons vist i figur 35.

Tabell 8: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene, med begrenset derivator ledd på $T_{db} = \frac{T}{2}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{476.54(s+1)}{(s+20)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{164.89(s+0.1609)}{(s+20)}$
Padé	$\frac{166.5(s+0.1609)}{(s+20)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{172.79(s+0.1609)}{(s+20)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{181.33(s+0.1609)}{(s+20)}$
H(w)	$\frac{158.93(w+0.1609)}{(w+20)}$



Figur 35: Sprangrespons ved bruk av begrenset derivator effekt på $T_{db} = \frac{T}{2}$.

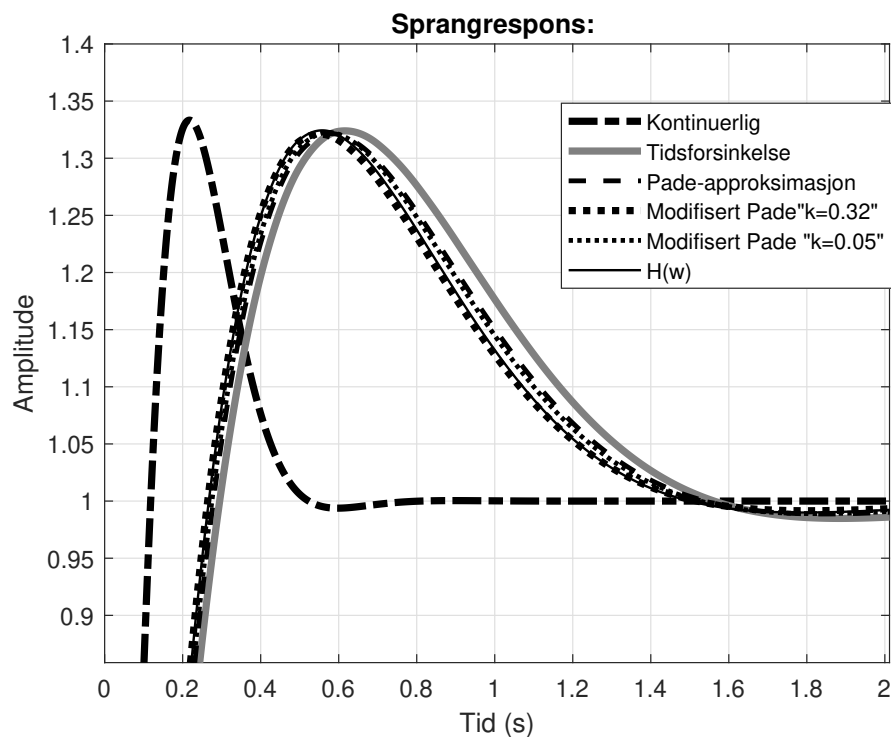
Dynamikken i sprangresponsene fra figur 35 er noe tregere, enn sprangresponsene i figur 31. Det ser ut til at de kontinuerlige analysemetodene i figur 35 gir et mer entydig resultat.

7.4.4 Eksperiment 4

Eksperiment 4 er fra konstruksjonen av regulatorer der fasen ikke er løftet mer enn minimum, for å opprettholde en fasemargin på 45° . Resultatet er vist i tabell 9 med tilhørende sprangrespons i figur 36.

Tabell 9: Regulatorer der fasen ikke har blitt løftet mer enn det tilstrekkelige.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{421.85(s + 5.351)}{(s + 31.42)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{123.56(s + 1.974)}{(s + 31.42)}$
Padé	$\frac{130.69(s + 1.974)}{(s + 31.42)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{137.6(s + 1.987)}{(s + 31.42)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{132.28(s + 1.987)}{(s + 31.42)}$
H(w)	$\frac{135.79(w + 2.008)}{(w + 31.42)}$



Figur 36: Sprangrespons, der fasen ikke er løftet mer enn det tilstrekkelige.

Ved observasjon av figur 36, sees det at ved en mer nøysom konstruksjon av regulatoren enn i eksperiment 2, får vi et system med mindre oscillerende dynamikk. Alle metodene gir relativt like resultater, og den rene tidsforsinkelsen gir et marginalt mindre dristig resultat.

7.4.5 Oppsummering av eksperimenter med transferfunksjon nummer 1

Ved å eksperimentere med transferfunksjon nummer 1, er det fremprovosert et tilfelle der den rene tidsforsinkelsen gir et mer dristig resultat, enn ved bruk av w-transformasjon. Dette skjedde ved forsøk på å lage et så kjapt reguleringsystem som mulig, med en lav verdi på T_{db} og mye løfting av fasen med derivatvirkning. Ved å konstruere regulatoren som i eksperiment 1 og i eksperiment 4 ble det observert en litt annen dynamikk. Den rene tidsforsinkelsen ga et mer konservativt resultat enn de andre analysemetodene. Det kan argumenteres for at disse eksperimentene gjenspeiler et mer realistisk tilfelle. Fordi at ved disse eksperimentene er det ikke forsøkt å framprovosere en rask regulator.

Det er verdt å merke seg at i noen av tilfellene ble det veldig lite, til ikke noe skille i resultat. Dette gjelder ved bruk av de forskjellige metodene for kontinuerlig analyse, til konstruksjon av en diskret regulator. Hvis regulatoren blir konstruert med samme metode som i eksperiment 1, blir det i praksis ikke hensiktsmessig å skille resultatet fra de forskjellige metodene. Fra disse eksperimentene gir den rene Padé-approksimasjonen en litt dristig, men god tilnærming for diskret regulering. Modifisert versjon av Padé-approksimasjonen gir et litt dristige, men fortsatt god tilnærming.

7.5 Eksperiment med transferfunksjon nummer 2

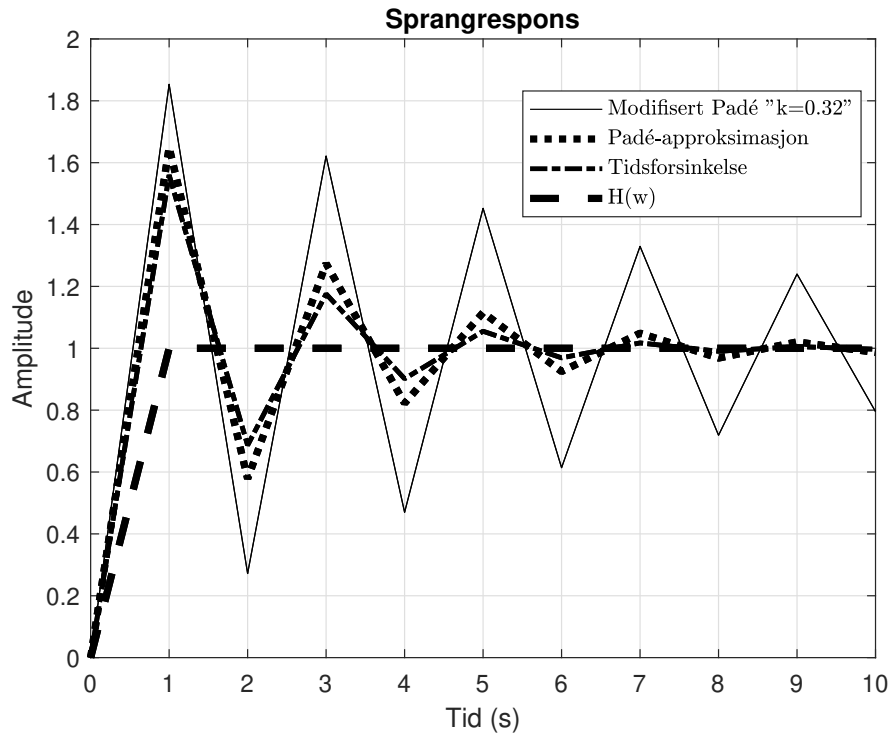
I dette kapitlet skal det lages regulatorer til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{s}$. Det blir valgt en enkel forsterkning som regulator til denne prosessen. Den helt kontinuerlige analysen sees bort i fra, på grunn av at denne kan konstrueres uendelig kjapt. Tastetiden blir satt til 1 sekund. Forsterkningene som er blitt konstruert med de forskjellige metodene er gitt i tabell 10.

Tabell 10: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.

Metode	Transferfunksjon
Tidsforsinkelse	1.5601
Padé	1.6494
Mod. "k = 0.32"	1.8533
Mod. "k = 0.05"	2.4897
H(w)	1

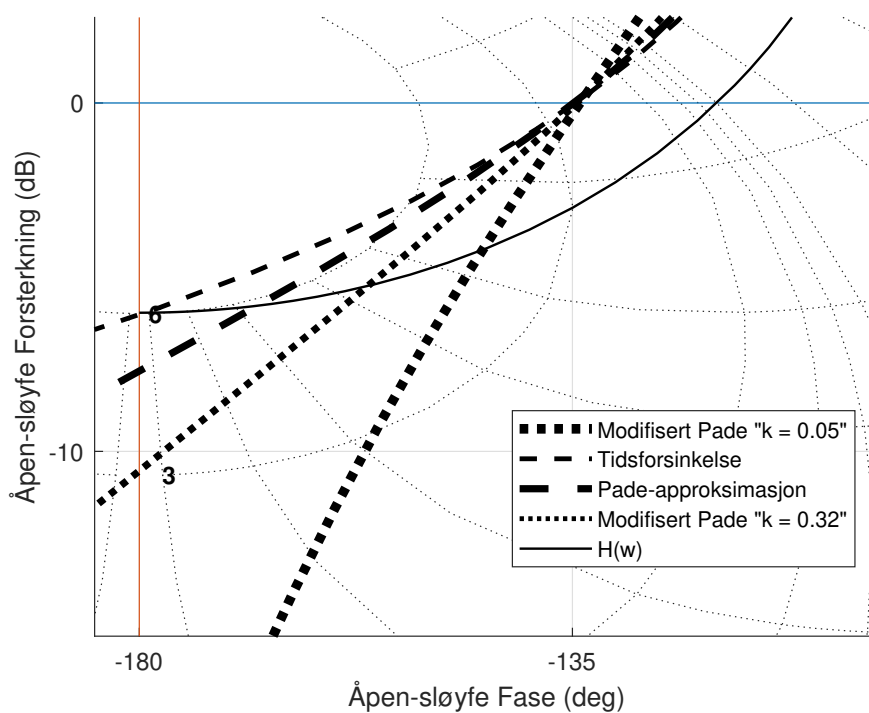
Sprangrespons for h_u med de forskjellige regulatorene er vist i figur 37. Forsterkningen som ble konstruert med Padé-approksimasjon med k verdi på 0.05 er ikke

tatt med, siden dette ga et ustabilt system.



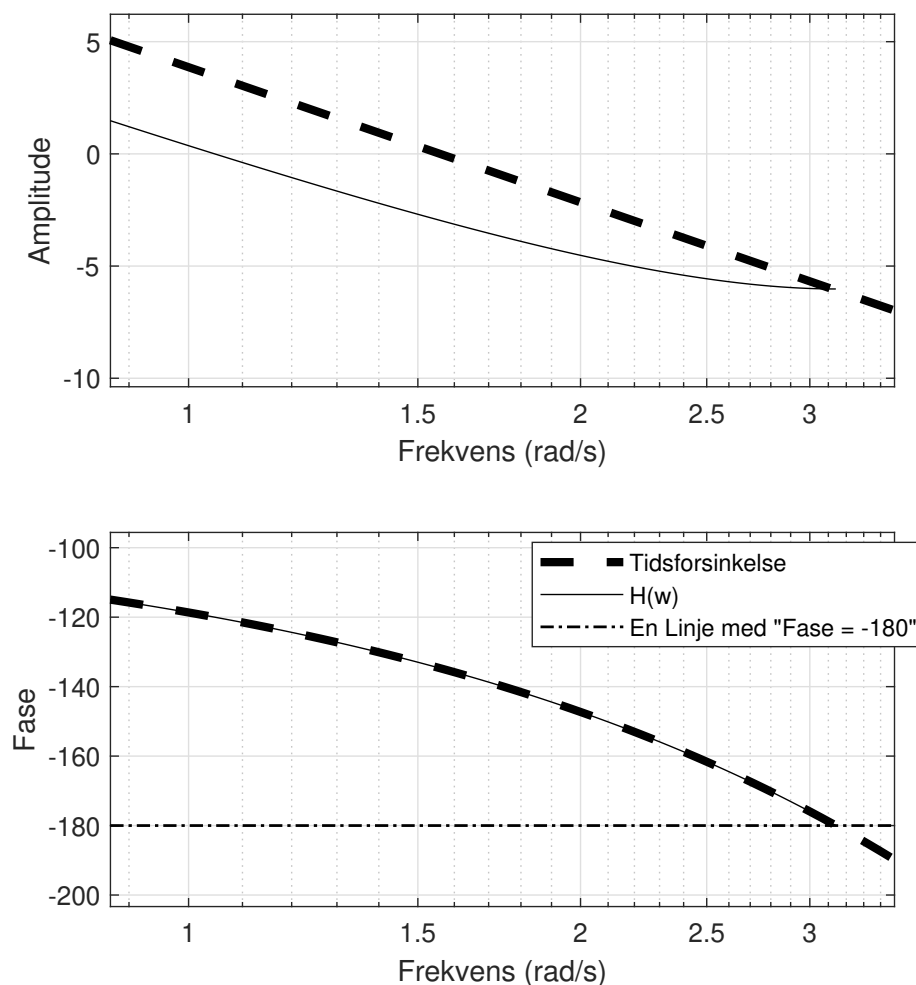
Figur 37: Sprangrespons til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{s}$ med de forskjellige regulatorene.

Stabilitetsundersøkelse av prosessen med de forskjellige regulatorene er vist i form av et Nicholsdiagram i figur 38:



Figur 38: Nicholsdiagram til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{s}$ med de forskjellige regulatorene.

Det bemerkes at fasemarginen er den begrensende faktoren når en skal konstruere en rask regulator, ved bruk av kontinuerlige tilnæringsmetoder. Ved w -transformasjonen er det forsterkningsmarginen som begrenser hvor raskt reguleratoren kan konstrueres. Den rene tidsforsinkelsen viser at forsterkningsmarginen begrenser i tillegg til fasen, hvor rask en regulator kan konstrueres. For videre analyse blir de to minst hissige sprangresponsene sammenlignet i et Bodediagram. Disse er ren tidsforsinkelse og w -transformasjon.



Figur 39: Bodediagram for h_0 med w -transformasjon og ren tidsforsinkelse.

Figur 39 viser at w -transformasjonen stopper ved Nyquist frekvensen " $\frac{\pi}{T}$ [rad/s]" som all analyse med w -transformasjon gjør. Det bemerkes i tillegg at fase fallet stopper på -180° , ved bruk av w -transformasjon. Som sett tidligere i figur 16 ser vi at en ren tidsforsinkelse følger fasefallet til transferfunksjonen for ZOH meget bra. Til sammenligning følger fasefallet for den rene tidsforsinkelsen w -transformasjonen tilsynelatende perfekt helt til w -transformasjon stopper ved Nyquist frekvensen. Det overraskende er at w -transformasjonen gir et redusert amplitudedefall sammenlignet med de øvrige metodene, når vi nærmer oss Nyquist frekvensen. Dette er overraskende fordi transferfunksjonen for ZOH, nærmere bestemt " $\frac{1}{T_s}(1 - e^{-Ts})$ ", tilsier at amplitudedefall skal akselerere når vi nærmer oss Nyquist frekvensen. Dette samsvarer med det som blir observert i delkapittel 7.3.

Dette eksemplet var av et enkelt system, som gir muligheten til å konstruere en

relativt kjapp regulator. I et virkelig tilfelle er det kanskje alt for optimistisk å la kryssfrekvensen være så nærme Nyquist frekvensen. Kryssfrekvensen finnes fra den stiplede linjen i figur 39, og er cirka 1.55 (rad/s). Kryssfrekvensen for de andre tilnæringsmetodene er enda større.

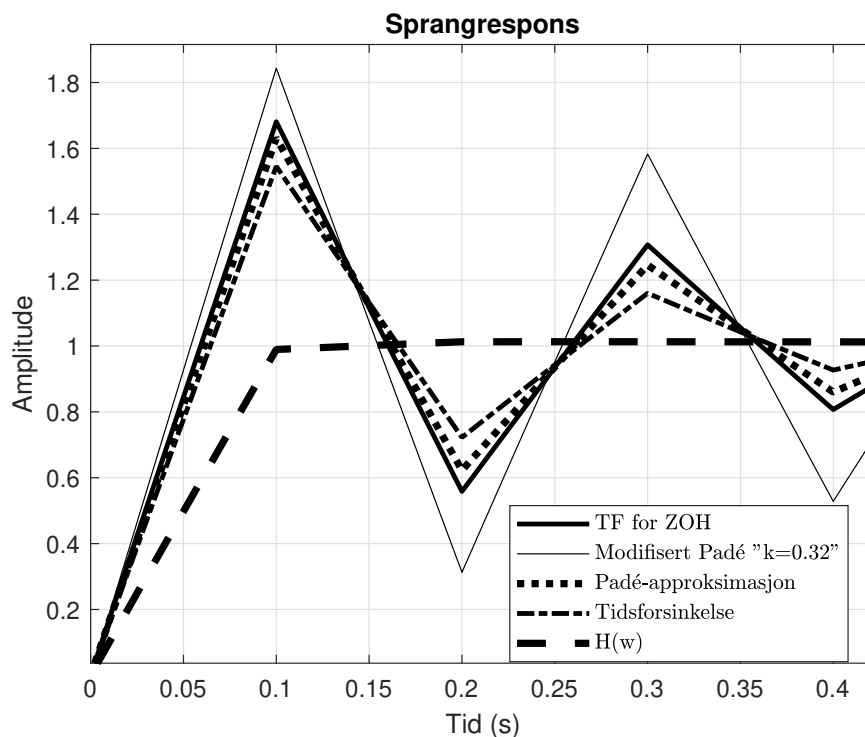
7.6 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 3

I dette eksperimentet skal regulatorer bli konstruert til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}$, med $T_1 = 4.48$. Resultatet av dette eksperimentet ligner på mange måter eksperimentet på systemet $h_u^*(s) = \frac{1}{s}$. En likhet er at den kontinuerlige analysen blir ignorert, siden det er teoretisk mulig å konstruere et uendelig kjapt system i dette tilfellet også. En viktig forskjell er at dette eksperimentet i tillegg tar for seg transferfunksjonen for zero-order hold “TF for ZOH”. Tastetiden er lik 0.1. De genererte regulatorene er vist i tabell 11.

Tabell 11: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.

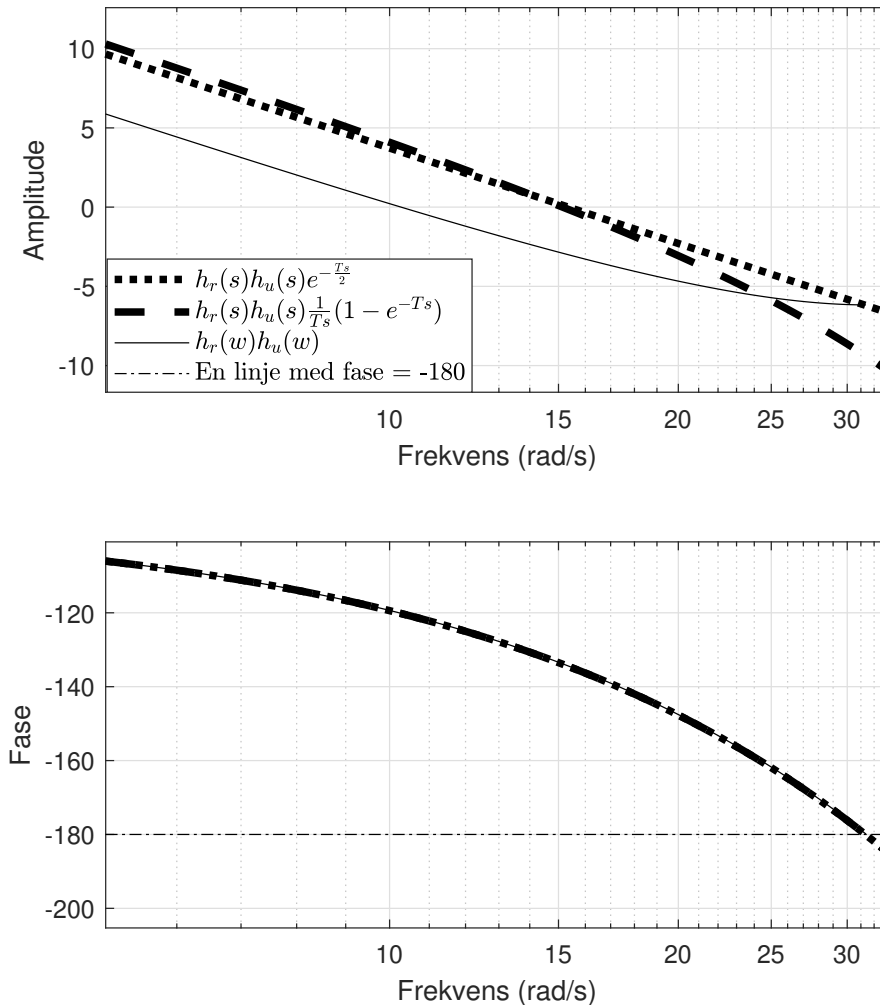
Metode	Transferfunksjon
Tidsforsinkelse	$\frac{68.786(s + 0.3582)}{s}$
Padé	$\frac{72.612(s + 0.3582)}{s}$
Mod. “k = 0.32”	$\frac{82.041(s + 0.3582)}{s}$
Mod. “k = 0.05”	$\frac{111.28(s + 0.3582)}{s}$
H(w)	$\frac{44.035(w + 0.3582)}{w}$
TF for ZOH	$\frac{74.806(s + 0.3582)}{s}$

Tabell 11 over viser at alle regulatorene har samme forhold mellom forsterkning og integraleffekten, dette er for å lettere kunne sammenligne systemene. Sprangresponsen med regulatorene fra tabell 11, koblet i serie til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{4.48s + 1}$ er vist i figur 40.



Figur 40: Sprangrespons til systemet $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ med de forskjellige regulatorene.

Figur 40 viser at de kontinuerlige tilnæringsmetodene, inkludert TF for ZOH, gir for hissige regulatorer. Modifikasjon av Padé-approximasjon med k verdi på 0.05 er ikke tatt med, siden denne metoden frembrakte et ustabil system. For å undersøke bakgrunnen for hvorfor disse regulatorene gir et så hissig resultat er et Bodediagram med bruk av; ren reguleringsystem, TF for ZOH og w-transformasjon vist i figur 41



Figur 41: Bodediagram av $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ med regulatorne som er generert med ren tidsforsinkelse, TF for ZOH og w-transformasjon.

Som forventet viser figur 41 over at metodene tilsynelatende gir eksakt samme fasefall, fram til Nyquist frekvensen der w-transformasjonen stopper. Det bemerkes at i dette eksperimentet som med eksperiment for $h_r = \frac{1}{s}$, stopper fasefallet med w-transformasjon ved -180° . Det er ikke enkelt å observere at den heltrukne linjen stopper ved 180° ut ifra figur 41, men dette er et faktum.

Ved bruk av TF for ZOH sees det at det er et akselererende amplitudedefall når frekvensen nærmer seg Nyquistfrekvensen. Det er forventet at det ikke skjer noe med amplitudedefallet når frekvensen nærmer seg Nyquist frekvensen, ved bruk av en ren tidsforsinkelse. Dette observeres av figur 41. Overraskende blir amplitudedefallet “bremset” med w-transformasjon. “Bremsingen” ligner på “bremsingen” vi så i case av systemet $h_r = \frac{1}{s}$ i figur 39. “Bremsingen” resulterte i at w-

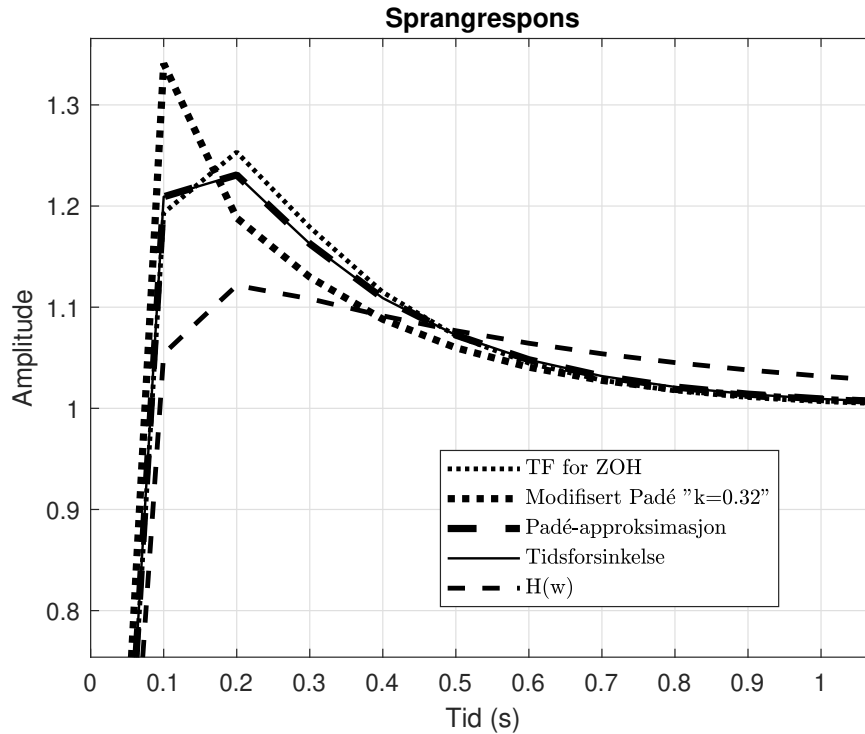
transformasjon ga en mindre hissige regulator, ved konstruksjon mot de normale stabilitetsmarginene.

I et virkelig tilfelle er det kanskje alt for optimistisk å la kryssfrekvensen være så nærme Nyquist frekvensen, også her. Med andre ord gir det enkle systemet oss muligheten til å konstruere en kjapp regulator relativt til tastetiden. Å konstruere et så raskt reguleringsystem er kanskje ikke relevant i et reelt tilfelle. For å prøve å lage et mer reelt reguleringsystem blir konstruksjon av regulatorer gjort på nytt. Denne gangen blir forholdet mellom integral og forsterking også endret, for å prøve å få et mest mulig optimalt reguleringsystem. De nye regulatorer er gitt i tabell 12.

Tabell 12: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene, men her er forholdet mellom forsterkning og integralvirkning justert.

Metode	Transferfunksjon
Tidsforsinkelse	$\frac{47.955(s + 2.845)}{s}$
Padé	$\frac{47.955(s + 2.845)}{s}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{53.178(s + 2.845)}{s}$
H(w)	$\frac{44.398(w + 1.507)}{w}$
TF for ZOH	$\frac{46.871(s + 3.064)}{s}$

Fordi konstruksjonen med Padé-approksimasjon og ren tidsforsinkelse hadde tilnærmet likt fasefall ved kryssfrekvensen, ble disse to regulatorer helt like ved numerisk konstruksjon. Derfor vil de to regulatorer være helt identiske. Sprangresponsen for de forskjellige regulatorer med prosessen $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ er gitt i figur 42.



Figur 42: Sprangrespons på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{4.48s+1}$ med nye regulatorer.

Det er mindre forskjell mellom sprangresponsene i figur 42 sammenlignet med sprangresponsene i figur 40. Den rene tidsforsinkelsen og den rene Padé-approximasjon gir samme resultat. Bortsett fra dette, er rekkefølgen av "hissighet" den samme i figur 42 og figur 40. Med rekkefølgen av "hissighet", menes det at modifisert Padé med $k = 0.32$ gir et mer hissig resultat enn TF for ZOH. TF for ZOH gir et mer hissig resultat enn den rene tidsforsinkelsen og den rene Padé-approximasjon. Dette gir igjen en mer hissig regulator, enn ved bruk av w -transformasjon. Det kan fortsatt argumenteres for at dette er en for kjapp sprangrespons i forhold til tastetiden.

7.7 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 4

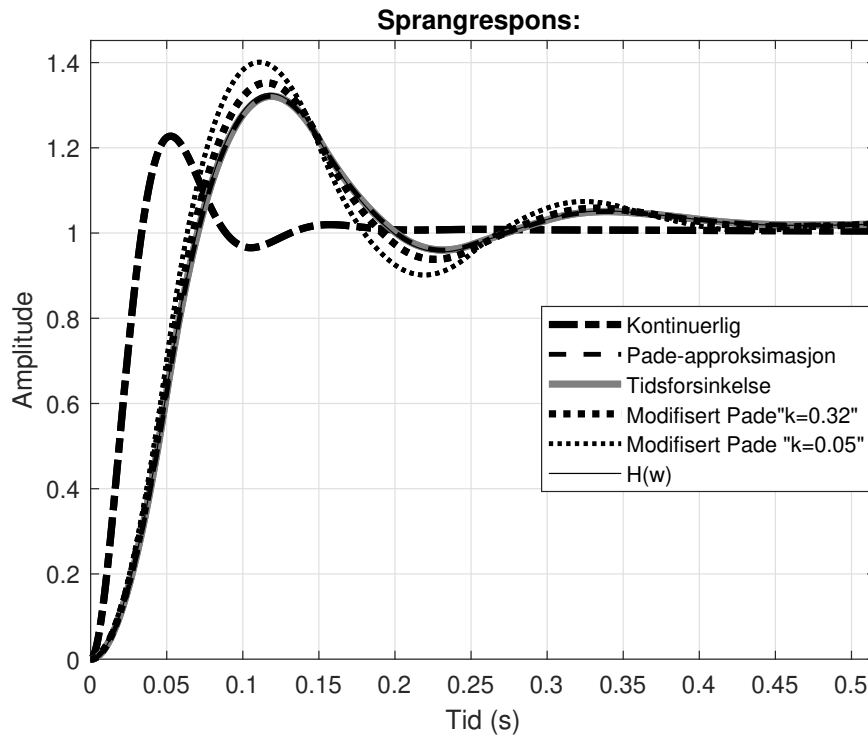
I dette eksperimentet skal det konstrueres en regulatorer til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$, med $T_1 = 1$ og $T_2 = 0.1$. Tastetiden er satt til 0.05 sekunder. Det er valgt å konstruere en PID-regulator til systemet. Det er mulig å benytte en PI-regulator om det er ønskelig å bruke en mindre komplisert regulator. Dette eksperimentet er delt i tre eksperimenter. I første eksperiment er det laget regulatorer der forholdet mellom integralvirkning og derivatvirkning er likt. Resultatene fra første eksperiment sees i tabell 13, med tilhørende sprangrespons vist i figur 43. I andre eksperiment er derivatorvirkningen også endret, og det blir brukt en høyere integralvirkning. Resultatene for eksperiment nummer 2 er gitt i tabell 14 med tilhørende sprangrespons vist i figur 45. I siste eksperiment blir derivatorvirkningen regulert og integralvirkningen er den samme som

i første eksperiment. Resultatene for eksperiment nummer 3 er gitt i tabell 15 med tilhørende sprangrespons vist i figur 48.

7.7.1 Eksperiment 1

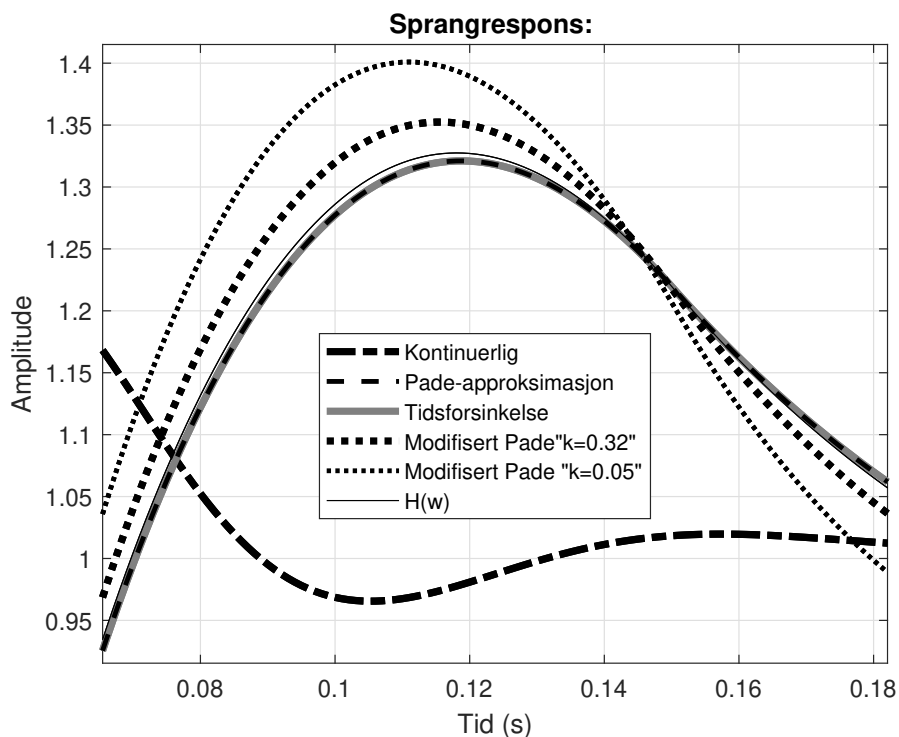
Tabell 13: Regulatorer som er generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene. Fra eksperiment nummer 1 på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{449.75(s+10)(s+2)}{s(s+60)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{114.85(s+9.486)(s+2)}{s(s+60)}$
Padé	$\frac{114.85(s+9.486)(s+2)}{s(s+60)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{120.45(s+9.486)(s+2)}{s(s+60)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{129.27(s+9.486)(s+2)}{s(s+60)}$
H(w)	$\frac{115.99(w+9.486)(w+2)}{w(w+60)}$



Figur 43: Sprangrespons nummer 1 på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.

For å tydeliggjøre detaljene fra figur 43, er det vist en forstørret versjon i figur 44.



Figur 44: Samme figur som figur 43 bare forstørret versjon.

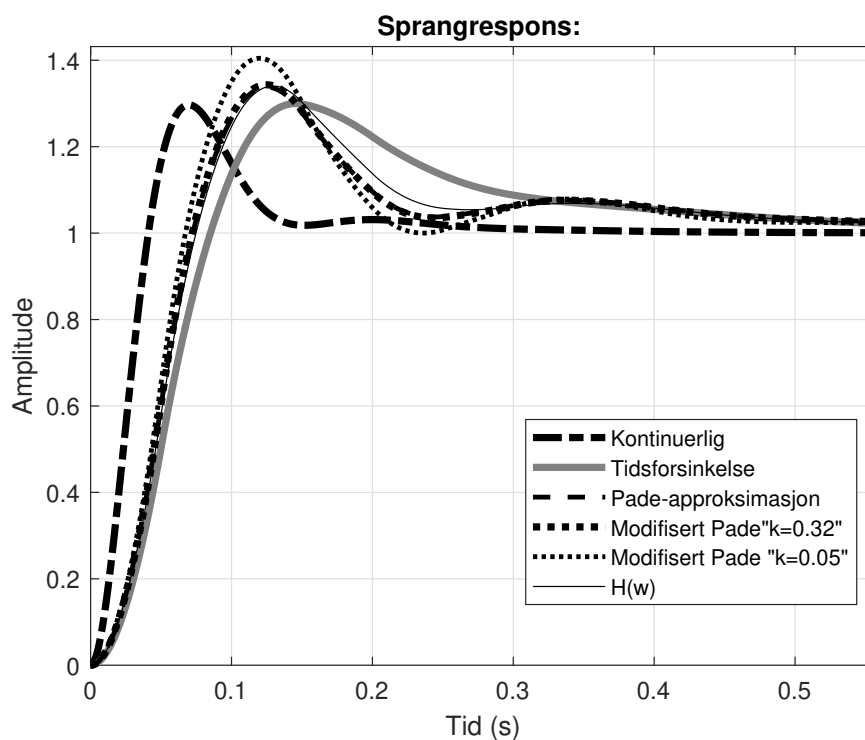
Vi kan se av Figur 43 og figur 44 at w -transformasjon gir en marginalt dristigere regulator enn ved bruk av den rene Padé-approximasjonen og den rene tidsforsinkelsen. I tillegg er det positivt at alle analysemetodene som tar høyde for diskret regulering, har en relativ lik sprangrespons sammenlignet med den kontinuerlige sprangresponsen.

7.7.2 Eksperiment 2

Resultatene med endring av derivatorvirkning blir vist i dette delkapittelet.

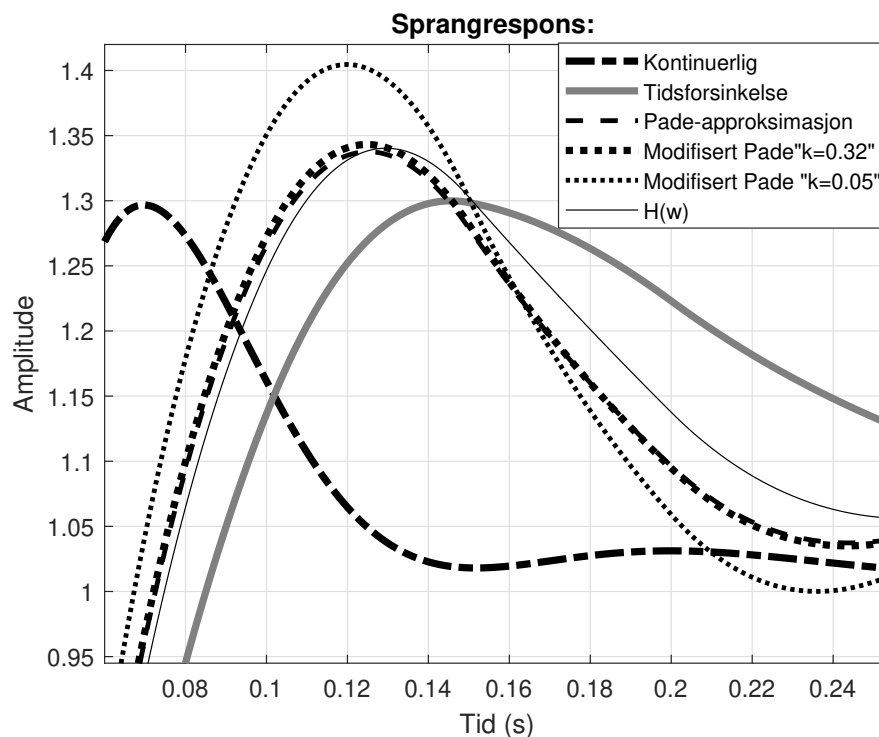
Tabell 14: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene. Fra eksperiment nummer 2 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{298(s+10)(s+8.535)}{s(s+60)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{88.124(s+9.093)(s+4.443)}{s(s+60)}$
Padé	$\frac{108.7(s+7.519)(s+4.443)}{s(s+60)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{109.27(s+7.567)(s+4.443)}{s(s+60)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{117.13(s+7.927)(s+4.443)}{s(s+60)}$
H(w)	$\frac{103.47(w+8.164)(w+4.443)}{w(w+60)}$



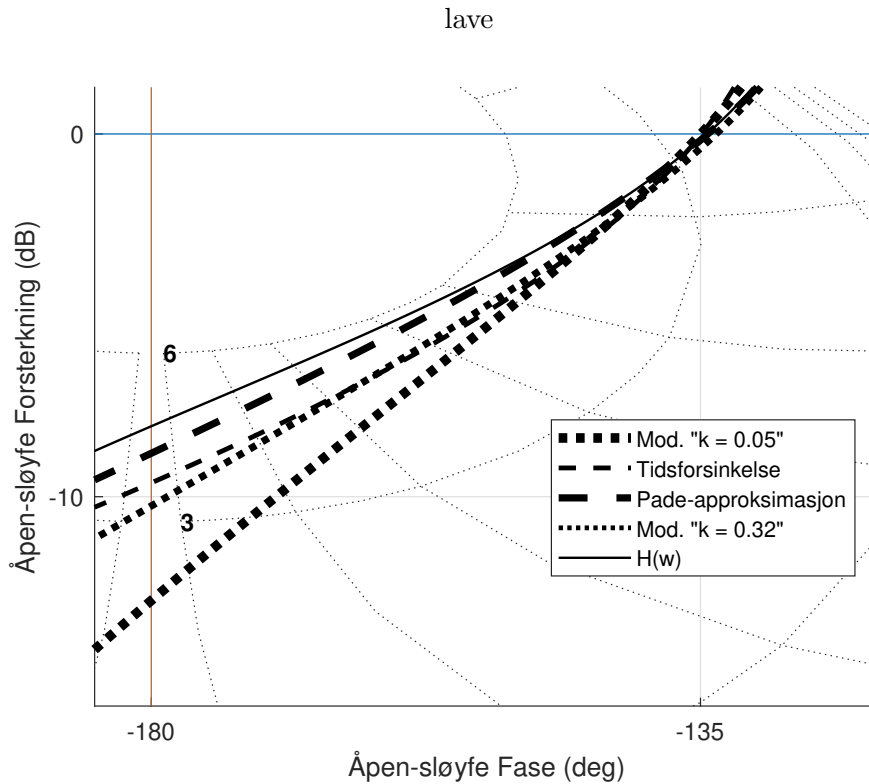
Figur 45: Sprangrespons nummer 2 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.

For å tydeliggjøre detaljene fra figur 43, er det gjengitt en forstørret versjon i figur 46.



Figur 46: Samme figur som figur 45 bare i en forstørret versjon.

Vi ser av figur 45 og figur 46 at tilnærmingen med den rene tidsforsinkelsen får et tydelig skille fra bruk med den rene Padé-approximasjonen. Bruk av tidsforsinkelsen gir en mindre kjapp regulator, enn de andre analysemetodene og dette er som forventet. Den modifiserte Padé-approximasjonen med k lik 0.32 og den rene Padé-approximasjonen gir et relativt likt resultat som w -transformasjonen. Dette taler i positiv favør for å kunne bruke disse metodene, som tilnæringsmetoder for diskret regulering. Tilhørende stabilitetsanalyse fra Sprangresponsen over er vist i figur 47.



Figur 47: Nicholsdiagram fra andre omgang med konstruksjon av regulatorer til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.

Ikke overraskende er det fasemarginen som er den begrensende faktoren ved konstruksjon av regulatorene.

Ved å sammenligne figur 43 og tabell 13 med figur 45 og tabell 14, er det en del vi kan legge merke til. Det første er at sprangresponsen til figur 43 er kjappere og har en mer oscillerende oppførsel enn sprangresponsen til figur 45. Ved en høyere integralvirkning blir det vanskeligere å løfte fasen for å oppnå en akseptabel fasemargin. Dette medfører at reguleringssystemet må ha en tregere dynamikk for å kunne opprettholde stabiliseringsmarginene. En observasjon fra sprangrespons i figur 45, er at den rene tidsforsinkelsen gir et mer markant konservativt resultat, når det blir vanskeligere å øke fasen. Med konservativt resultat menes det at den er konservativt sammenlignet med de andre resultatene. Dette fører til konstruksjon av et tregere reguleringssystem.

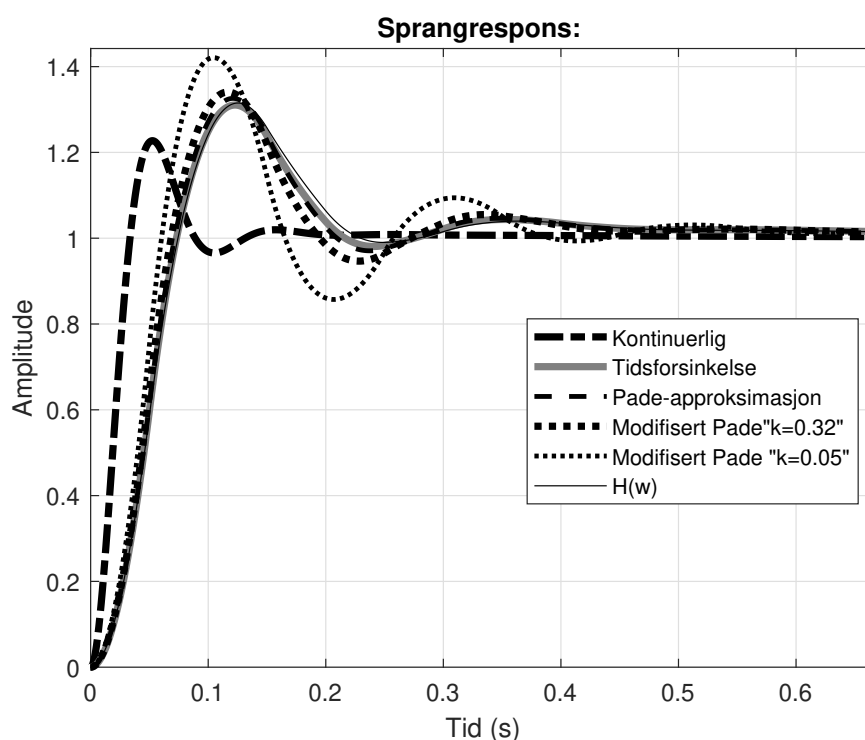
7.7.3 Eksperiment 3

Ved å konstruere enda et sett med regulatorer der integrator effekten og den begrensede derivator effekten er låst, er det dannet regulatorer vist i tabell 15.

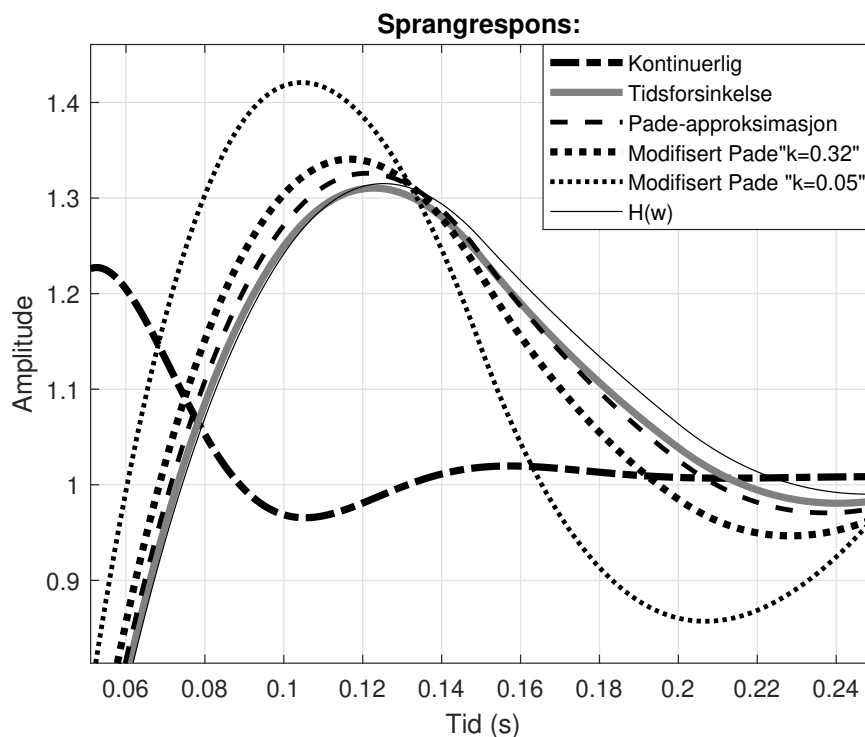
Tabell 15: Regulatorer som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene. Fra eksperiment nr 3 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{449.75(s+10)(s+2)}{s(s+60)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{108.93(s+10)(s+2)}{s(s+60)}$
Padé	$\frac{111.64(s+10)(s+2)}{s(s+60)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{118.35(s+9.486)(s+2)}{s(s+60)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{140.74(s+8.553)(s+2)}{s(s+60)}$
H(w)	$\frac{105.59(w+10.54)(w+2)}{w(w+60)}$

Regulatorene fra tabell 15, sammen med systemet danner sprangresponsen vist i figur 48. Figur 49 er en forstørret versjon av figur 48.



Figur 48: Sprangrespons nummer 3 av prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$.



Figur 49: Samme figur som figur 48 bare i forstørret versjon.

Ved å tolke figurene ovenfor “48 og 49” kan det sees at bruk av w -transformasjon og ren tidsforsinkelse ga et veldig likt resultat. Den rene tidsforsinkelsen gir et marginalt mer konservativt resultat. Padé-approximasjonen gir også et bra resultat, men denne er dristigere enn w -transformasjon og gir et resultat som er nærmere ustabilitet.

7.7.4 Oppsummering av analyse av transferfunksjon nummer 4

En positiv observasjon ved eksperimentene med de tre settene med regulatorer er at; tilnæringsmetodene skiller seg markant fra den helt kontinuerlige analysen. Det negative er at de ulike tilnæringsmetodene skiller seg fra hverandre på forskjellige måter. Dette er negativt fordi det blir vanskeligere å predikere utfallet av tilnæringsmetodene, siden det blir flere faktorer som teller inn på hvor gode tilnærmingene er.

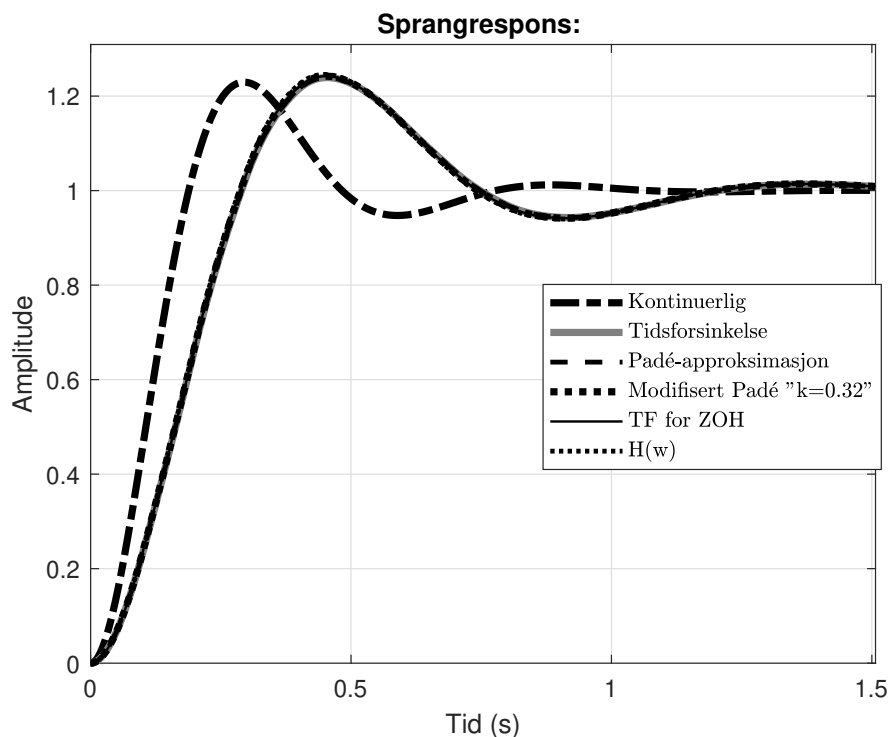
Fra sprangresponsene vist i dette kapitlet sees det at den rene tidsforsinkelsen gir en meget bra, til en litt konservativ metode for konstruksjon av en diskret regulator. Mens den rene Padé-approximasjonen gir en meget bra, til en litt dristig metode for konstruksjon av diskret regulator. De modifiserte Padé-approximasjonene gir en litt mer dristig, til betraktelig mer dristig metode.

7.8 Eksperiment med transferfunksjon nummer 5

I dette eksperimentet skal regulatorer bli konstruert til prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s)(T_2s+1)}$, med $T_1 = 1$ og $T_2 = 0.1$. Årsaken til at T_1 blir satt til 1 er at endringer i verdi av T_1 , er ekvivalent med endringer av K_p . I dette eksperimentet er tastetiden lik 0.1 sekunder. I dette eksperimentet blir det dannet en enkel forsterkning som regulator til prosessen. De konstruerte regulatorene er vist i figur 16, med tilhørende sprangrespons i tabell 51.

Tabell 16: Regulatorer i form av en ren forsterkning som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.

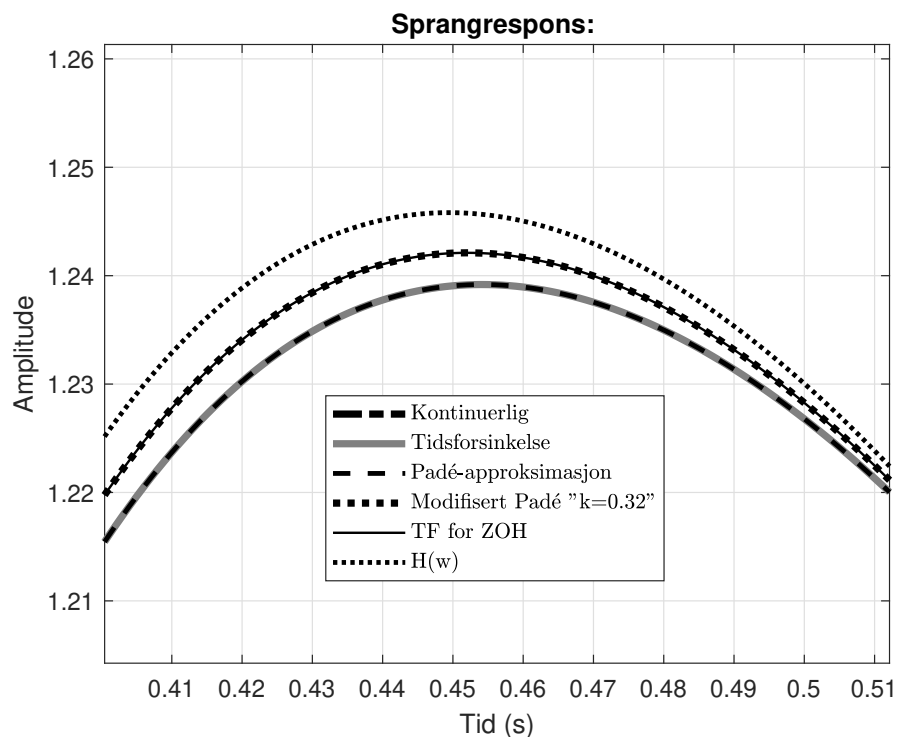
Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	13.885
Tidsforsinkelse	6.3489
Padé	6.3489
Mod. "k = 0.32"	6.3949
H(w)	6.4534
TF for ZOH	6.3949



Figur 50: Sprangrespons på prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1s)(T_2s+1)}$.

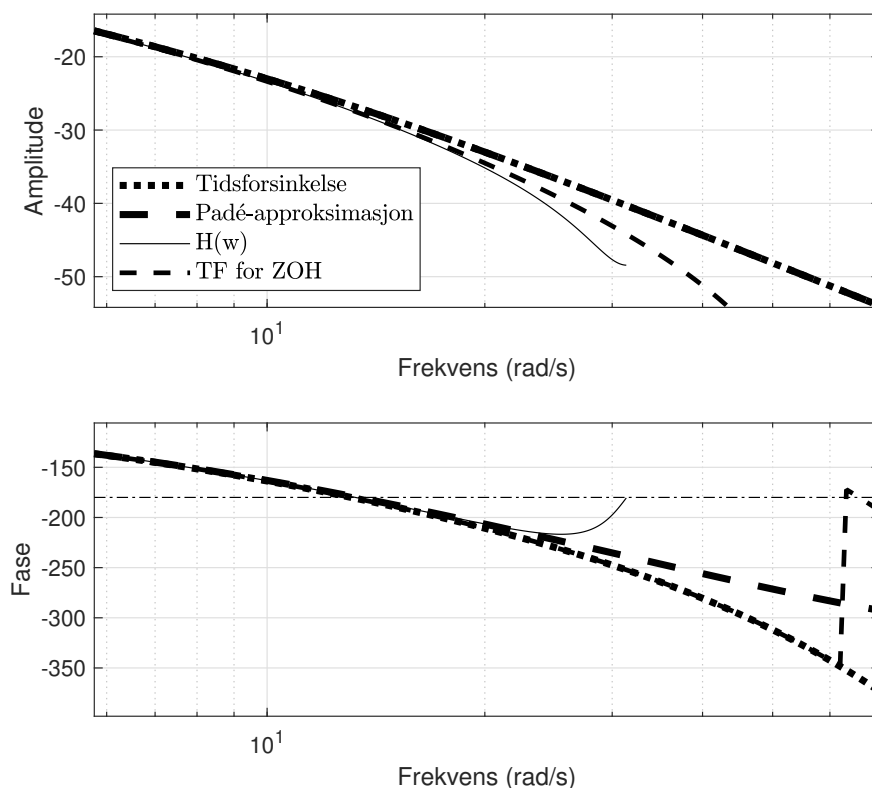
Figur 50 viser at resultatet fra tilnæringsmetodene for kontinuerlig analyse og w-transformasjon skiller seg godt fra resultatet med den helt kontinuerlige analysen. Alle tilnæringsmetodene gir tilnærmet samme resultat. Dermed kan det konkluderes med at alle de kontinuerlige metodene for analyse av diskret regulering i dette tilfellet fungerer bra.

Selv om sprangresponsene fra figur 50 ble veldig like, ble de ikke helt identiske. Dette kan sees fra figur 51 som er lik figur 50, bare forstørret inn på oversvingen i sprangresponsen.



Figur 51: Samme figur som figur 50, men forstørret inn på toppen av oversvingningen i sprangresponsen.

Av figur ovenfor sees det at de forskjellige regulatorne ikke danner eksakt samme resultat. Noen av regulatorne har gitt eksakt samme resultat, men det er fordi det i praksis ikke har lyktes å skille disse numerisk. Uansett er sprangresponsene så like at de blir ansett som om de ga det samme resultatet. Det er interessant at w -transformasjon ga det mest dristige resultatet. For å undersøke dette blir prosessen med noen kontinuerlige tilnæringer for holdelementet vist i figur 52.



Figur 52: Bodediagram for prosessen $h_u(s) = \frac{1}{(T_1 s)(T_2 s + 1)}$ med forskjellige tilnæringer for et holdeelement.

Tidligere har vi sett at w-transformasjon har gitt en reduksjon i amplitudefall. Det motsatte observeres fra figur 52 ved at w-transformasjon gir et større amplitudefall, enn ved bruk av TF for ZOH. Dette er også overraskende, for det er forventet at w-transformasjon gir tilnærmet samme amplitudefall som TF for ZOH. En annen observasjon er at fasefallet starter veldig likt, men fasefallet til w-transformasjonen begynner å stige og stopper på -180° . Dette er i tillegg overraskende og det kan konkluderes med at fase og amplitudeforløpet til w-transformasjonen ikke alltid er helt konsistent. Det er viktig å ta med seg at starten av faseforløpet er veldig likt selv om, fasefallet økte tilbake til -180° med w-transformasjon. Systemene som er brukt til å generere Bodediagrammet i figur 52, er vist i tabell 17. Dette gjelder ikke TF for ZOH som er tilnærmet på tilstandsromrepresentasjon.

Tabell 17: Regulatorer i form av en ren forsterkning som er blitt generert med de forskjellige kontinuerlige analysemetodene.

Metode	Prosess
Tidsforsinkelse	$\frac{1e^{-0.05s}}{0.1s^2 + s}$
Padé	$\frac{-0.4s + 16}{0.04s^3 + 2s^2 + 16s}$
H(w)	$\frac{-1.345 \cdot 10^{30}w^2 - 1.372 \cdot 10^{32}w + 3.282 \cdot 10^{33}}{3.551 \cdot 10^{32}w^2 + 3.282 \cdot 10^{33}w}$

7.9 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 6

Dette eksperimentet er litt annerledes enn de andre eksperimentene hittil. Det er fordi eksperimentet tar utgangspunkt i en eksisterende sløyfetransferfunksjon og ikke en kontinuerlig prosess som det skal konstrueres en diskret regulator til. Dette eksperimentet tar utgangspunget i eksempel 8.17 fra boken “Regulerings-teknikk” av J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss [1]. Eksemplet er brukt til å illustrere konseptet med betinget stabilitet. Systemet som skal analyseres har betinget stabilitet og systemet er: $h_0(s) = \frac{K(1+T_2s)(1+T_3s)}{s^2(1+T_1s)(1+T_4s)(1+T_5s)}$, med spesifikasjoner som følger $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5 > 0$.

For å kunne bruke systemet til analyse for hybride systemer med diskret regulator og kontinuerlig system, må vi dele opp systemet. En del skal representere et fysisk kontinuerlig system, mens den andre delen skal representere den diskrete regulatoren. På grunn av at sløyfetransferfunksjonen har to poler i origo, har sløyfetransferfunksjonen god integraleffekt. Det er heller ikke hensiktsmessig å bruke integraleffekt i regulatoren på et system med god integraleffekt. Derfor velges det å dra ut en PD-regulator fra sløyfetransferfunksjon, for å danne prosessen som skal reguleres og regulatoren. Dette for å prøve å gi et mest mulig realistisk reguleringstilfelle.

$$h_u(s) = \frac{(1 + T_2s)}{s^2(1 + T_1s)(1 + T_4s)} \quad h_r = \frac{K_p(1 + T_3s)}{(1 + T_5s)} \quad (39)$$

Spesifikasjoner $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5 > 0$ som var gitt ovenfor er benyttet for at sløyfetransferfunksjonen skal opprettholde betinget stabilitet.

7.9.1 Eksperiment 1

Verdiene T_i er satt til “ $T_1 = 5, T_2 = 0.5, T_3 = 0.05, T_4 = 0.005, T_5 = 0.0005$ ”. Tastetiden T blir satt i forhold til hva T_5 verdien er, siden T_5 gir den begrensede faktoren i derivator funksjonen. Tastetiden har tidligere vært cirka 3 ganger større enn den begrensende faktoren i derivator leddet. Dette valget blir gjort her også, med T lik 0.0015. K_p blir regulert inn slik at den totale sløyfetransferfunksjon får den fasemargin som gir kjappest regulator, på 45° ²¹.

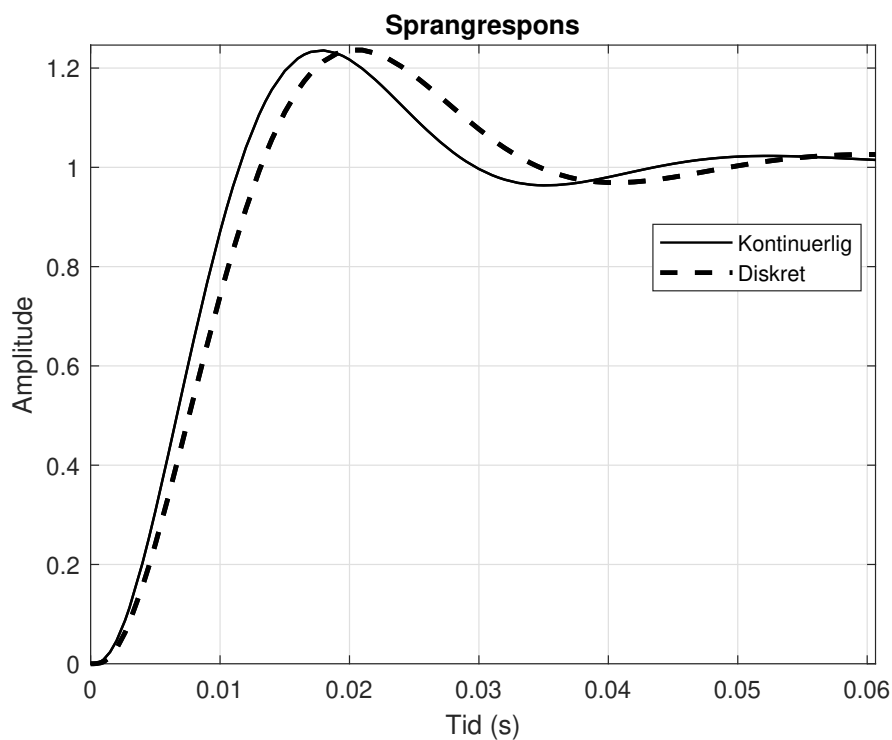
²¹Det er to mulige fasemarginer på 45° , når K_p blir endret i dette tilfellet. Det blir spesifisert at det konstrueres mot den fasemarginen som gir høyest kryssfrekvens.

Resultatet av denne metoden er vist i tabell 18.

Tabell 18: To regulatorer, den ene er funnet med helt kontinuerlig analyse og den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.

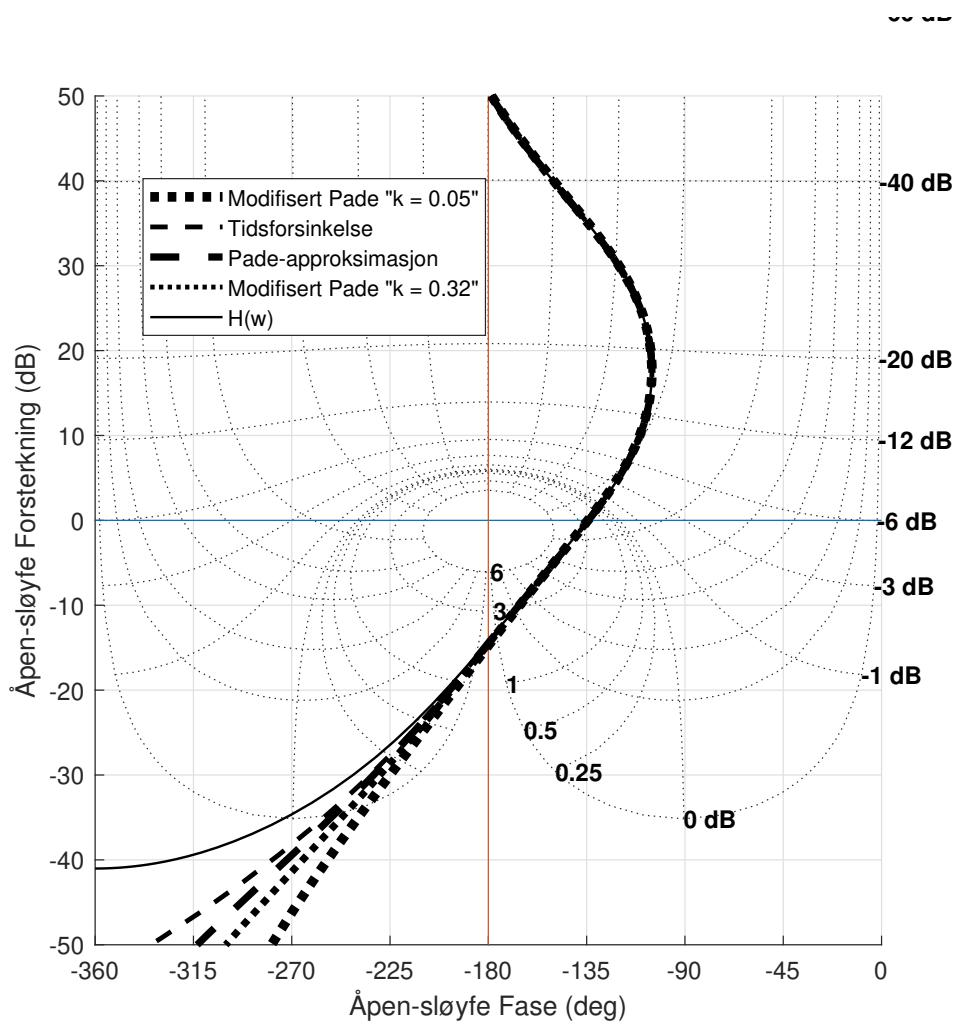
Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{4.158 \cdot 10^5 (s + 1)}{(s + 2000)}$
Diskrete metoder ²²	$\frac{3.1909 \cdot 10^5 (s + 1)}{(s + 2000)}$

Metodene for konstruksjon av diskret regulator til kontinuerlig system ga samme resultat. Fra stabiliseringsanalysen ble det en forskjell i fasemargin med $\pm 0.2^\circ$, noe som det er vanskelig å se av figur 54. Sprangrespons ved bruk av de to regulatorene er gitt i figur 53.



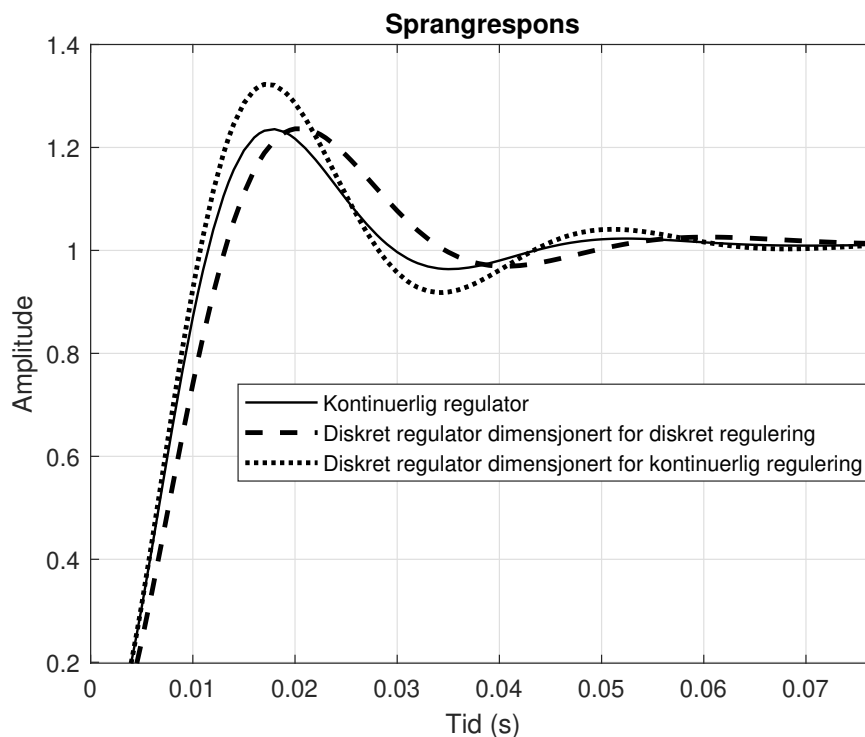
Figur 53: Sprangrespons med diskret og kontinuerlig regulator.

²²Metodene som er bruk er: w-transformasjon, ren tidsforsinkelse, Padé-approksimasjon, modifisert Padé-approksimasjon med k verdi fra 1 til 0.05, og TF for ZOH.



Figur 54: Nicholsdiagram av prosessen med forskjellige analysemetoder.

Figur 53 og figur 54, viser at metodene for konstruksjon av diskret regulator er meget bra. Dette fordi at de gir samme resultat og en akseptabel sprangrespons. Det forsøkes med følgende påstand: "sprangresponsene i figur 53 er like nok til at de kan ses bort fra ved diskret regulering"? Denne påstanden testes ved å bruke bilinear transformasjon på den første transferfunksjonen i tabell 18. På denne måten bli den kontinuerlige regulatoren implementert som en diskret regulator, på lik linje med de kontinuerlige tilnæringsmetodene. Denne implementasjonen er vist i figur 55, sammen med de gamle sprangresponsene fra figur 53.



Figur 55: Sprangrespons der diskret regulering er ignorert, sammen med sprangrespons fra figur 53.

Figuren ovenfor viser at den nye sprangresponsen gir et mer underdempet system og er dermed nærmere ustabilitet. Selv om det ikke er hold i påstanden ovenfor, viser figur 55 et eksempel på hva som skjer hvis diskret regulering blir sett bort ifra.

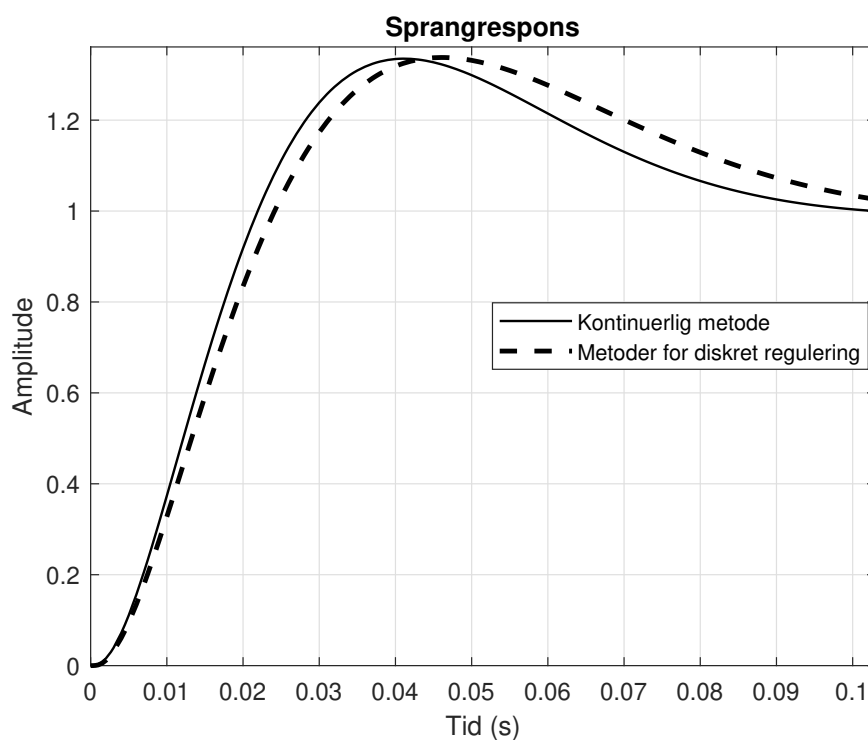
7.9.2 Eksperiment 2

Det blir konstruert et nytt sett med regulatorer, men denne gangen blir T_3 endret slik at fasen ikke blir løftet mer enn tilstrekkelig²³. De kontinuerlige analysemetodene for diskret regulering gir den samme regulatoren også i dette tilfellet. Det dannes en annen regulator ved helt kontinuerlig analyse. Disse regulatorene er vist i tabell 19, med tilhørende sprangrespons vist i figur 56.

²³Med tilstrekkelig menes at det løftes til systemet får en fasemargin på 45° .

Tabell 19: To regulatorer, funnet på lik linje som i tabell 18 bare med fritt valg av T_3 .

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{1.3909 \cdot 10^5 (s + 27.68)}{(s + 2000)}$
Diskrete metoder	$\frac{1.1988 \cdot 10^5 (s + 24.18)}{(s + 2000)}$



Figur 56: Sprangrespons med regulatorer fra tabell 19.

7.9.3 Oppsummering av eksperimenter med transferfunksjon nummer 6

Fra dette eksperimentet observeres det at resultatet fra analysemetodene for konstruksjon av diskret regulator får samme resultat, i de aktuelle tilfellene. Eksperimentet viser at diskret regulering gir et bedre resultat, selv om tilnæringsmetodene gir en ganske lik sprangrespons som helt kontinuerlig analyse.

7.10 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 7

I dette eksperimentet skal det lages regulatorer til transferfunksjon

$$h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}. \text{ Denne transferfunksjonen har en del likheter med } h_u(s)$$

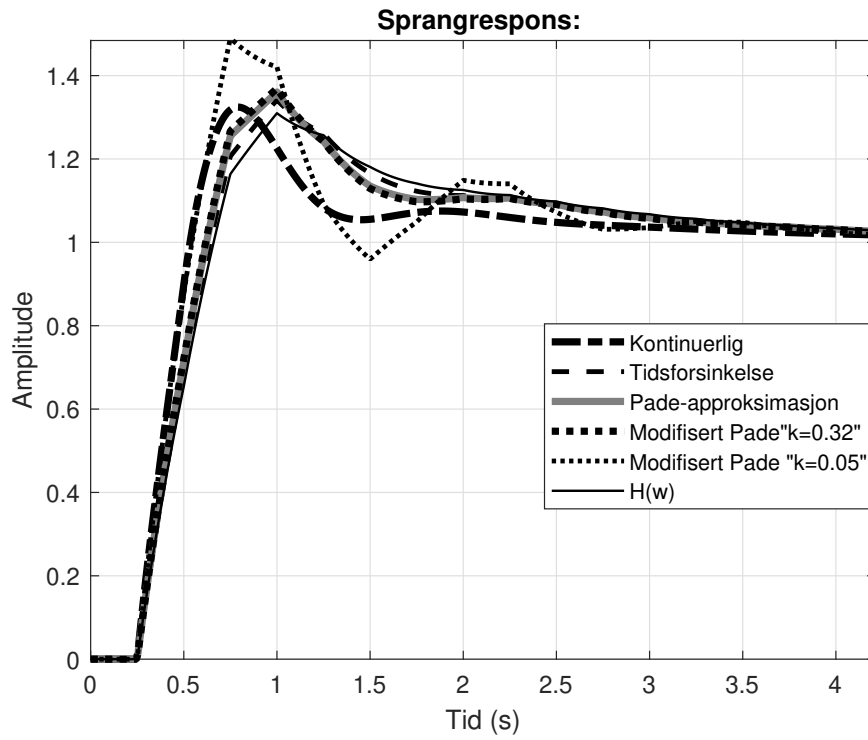
fra ligning 39. Hovedforskjellen er at det nå er en tidsforsinkelse i systemet og ikke en dobbel virkning av integraleffekten. Verdiene på T_i er også litt endret med $T_1 = 0.5$, $T_2 = 10$ og $T_3 = 2$. På grunn av tidsforsinkelsen blir det generert et fasefall. Derfor ønskes det en derivatorvirkning for å motvirke fasefallet som blir generert. Det er ingen integraleffekt i systemet, derfor blir det bestemt å lage en PID-regulator. Hvis det kan aksepteres en saktere dynamikk i systemet er det tilstrekkelig med en PI-regulator. Transportforsinkelsen er satt til 0.25 sekunder ved alle eksperimenter.

7.10.1 Eksperiment 1 med tastetid lik 0.25 sekunder

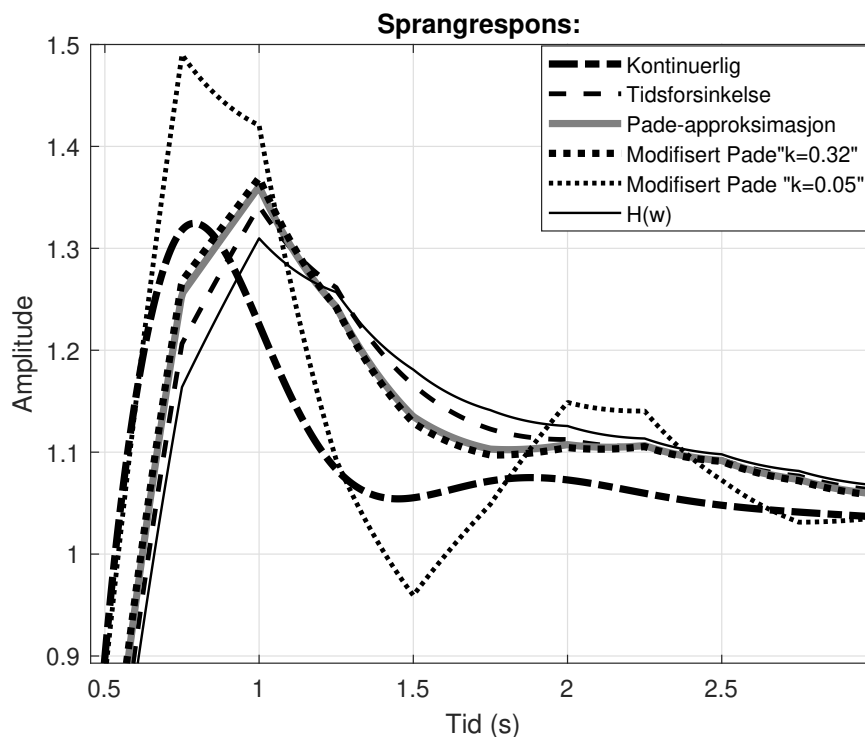
I første eksperiment blir det konstruert regulatorer med tastetid lik 0.25 sekunder. Hensikten med denne konstruksjonen er å konstruere et så kjapt, hybrid reguleringsystem som mulig. Resultatet kan sees av tabell, 20 med tilhørende sprangrespons vist i figur 57.

Tabell 20: Regulatorer fra eksperiment nr. 1 med prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{2.2543(s + 8.182)(s + 2)}{s(s + 12.57)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{1.7825(s + 5.25)(s + 2)}{s(s + 10.04)}$
Padé	$\frac{1.8994(s + 5.065)(s + 2)}{s(s + 10.04)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{1.9184(s + 5.065)(s + 2)}{s(s + 10.04)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{2.4589(s + 4.425)(s + 2)}{s(s + 10.04)}$
H(w)	$\frac{1.7195(w + 5.25)(w + 2)}{w(w + 10.04)}$



Figur 57: Sprangrespons av prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$.



Figur 58: Forstørret versjon av figur 57.

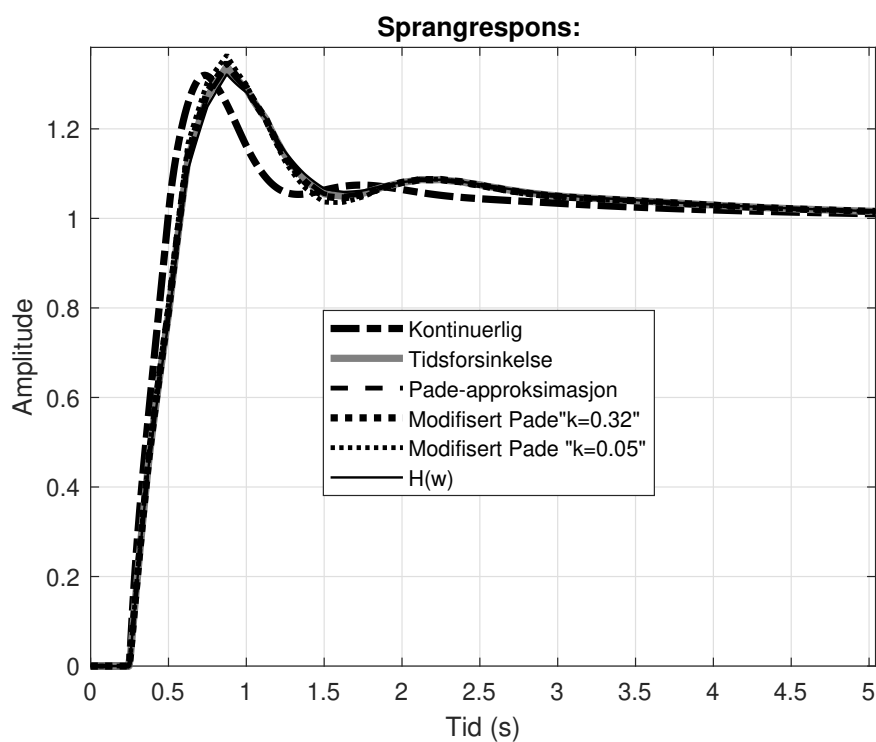
Fra figur 57 og figur 58 kommer det fram at alle tilnæringsmetodene gir et mer dristig resultat enn ved bruk av w -transformasjon. Av dynamikken til sprangresponsene kommer tastetiden tydelig frem. Derfor kan det argumenteres for at tastetiden er altfor høy. For ytterligere å se nærmere på dette, settes tasteiden til 0.125 og eksperimentet blir kjørt på nytt.

7.10.2 Eksperiment 2 med tastetid lik 0.125

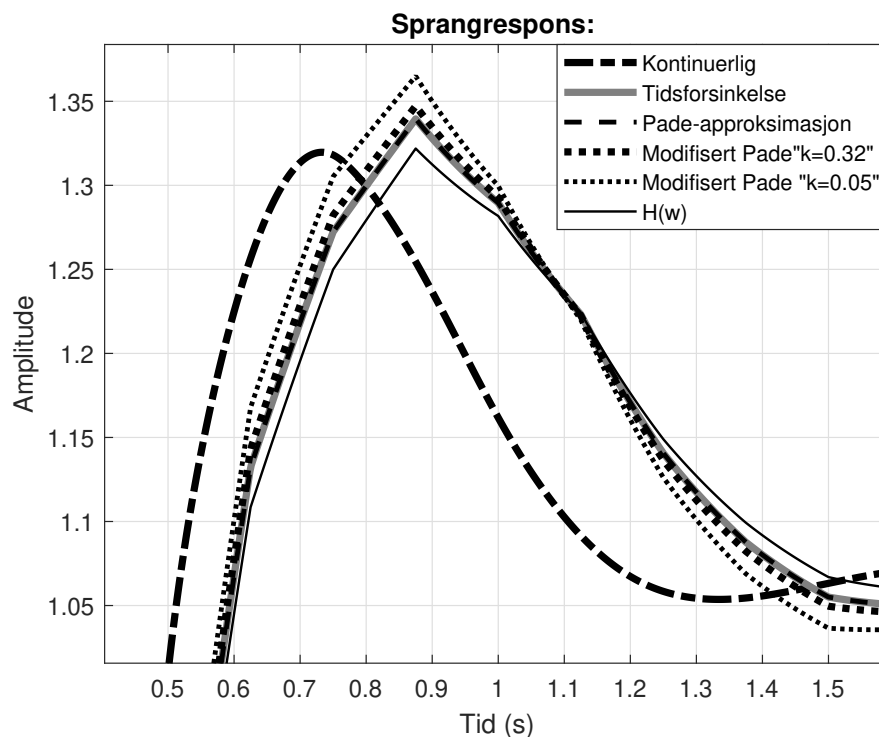
Regulatorer generert med ny tastetid er gitt i tabell 21, med tilhørende sprangrespons i figur 59.

Tabell 21: Regulatorer fra eksperiment nr. 2 med prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{3.7349(s + 10.56)(s + 2)}{s(s + 25.13)}$
Tidsforsinkelse	$\frac{2.5303(s + 10.56)(s + 1.703)}{s(s + 20.42)}$
Padé	$\frac{2.5303(s + 10.56)(s + 1.703)}{s(s + 20.42)}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{2.554(s + 10.56)(s + 1.703)}{s(s + 20.42)}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{2.6095(s + 10.56)(s + 1.703)}{s(s + 20.42)}$
H(w)	$\frac{2.477(w + 10.56)(w + 1.703)}{w(w + 20.42)}$



Figur 59: Sprangrespons med prosessen $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$.



Figur 60: Samme figur som figur 59 bare forstørret inn på oversvingningen i sprangresponsen.

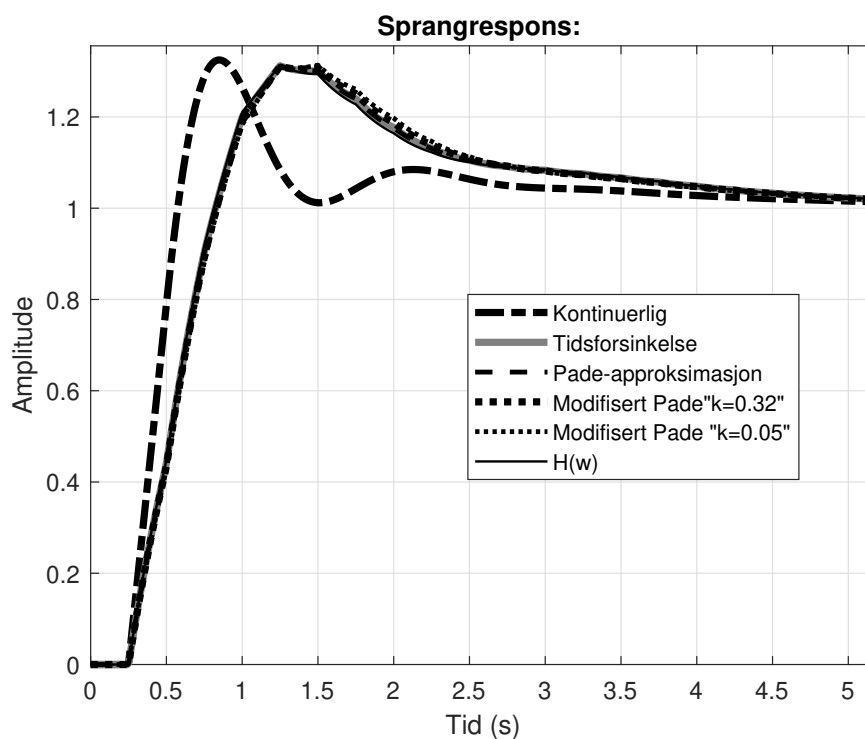
Det observeres av figur 59 og figur 60, at analysemetodene for konstruksjon av en diskret regulator gir mer sammenfallende resultat når tastetiden går ned. Metodene for ren tidsforsinkelse og Padé-approximasjon gir et helt identisk resultat. Med implementasjon av enda lavere tastetid, $T = 0.0625$, var det ikke mulig å skille de forskjellige resultatene fra analysemetodene.

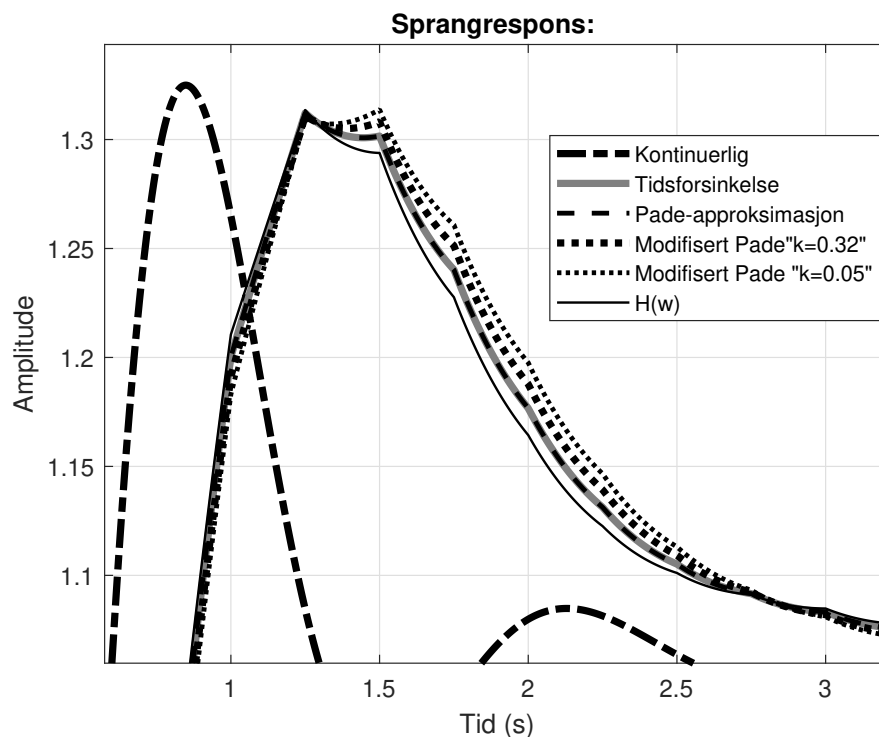
7.10.3 Eksperiment 3 med PI-regulator

Det ble observert i eksperiment 1 “7.10.1” at dynamikken til sprangresponsen var kjapp i forhold til tastetiden. For å endre på dette ble tastetiden satt ned. Det er mulig å lage en mindre hissige regulator, for å få en roligere dynamikk i forhold til tastetiden. Regulatoren fra tabell 20 viser at den begrensende faktoren for derivatorvirkningen har en lav verdi på “ $T_{bd} \approx \frac{T}{3}$ ”. Denne verdien økes for å lage en mindre hissige regulator. Det viser seg at amplitudedefallet nå blir begrensende for å lage et kjapt reguleringsystem. Derfor velges det heller å konstruere en PI-regulator. PI-regulatorer konstruert med de forskjellige metodene er vist i tabell 22. Tastetiden er det samme som i eksperiment 1 med $T = 0.25$ sekunder.

Tabell 22: Regulatorer fra eksperiment nr. 3 av systemet $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$.

Metode	Transferfunksjon
Kontinuerlig	$\frac{1.5744(s + 1.578)}{s}$
Tidsforsinkelse	$\frac{0.87498(s + 1.714)}{s}$
Padé	$\frac{0.87498(s + 1.714)}{s}$
Mod. "k = 0.32"	$\frac{0.8585(s + 1.747)}{s}$
Mod. "k = 0.05"	$\frac{0.84412(s + 1.776)}{s}$
H(w)	$\frac{0.89366(w + 1.678)}{w}$

Figur 61: Sprangrespons på system $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$, med forskjellige PI-regulatorer.



Figur 62: Samme figur som figur 61 bare forstørret på oversvingningen i sprangresponsen.

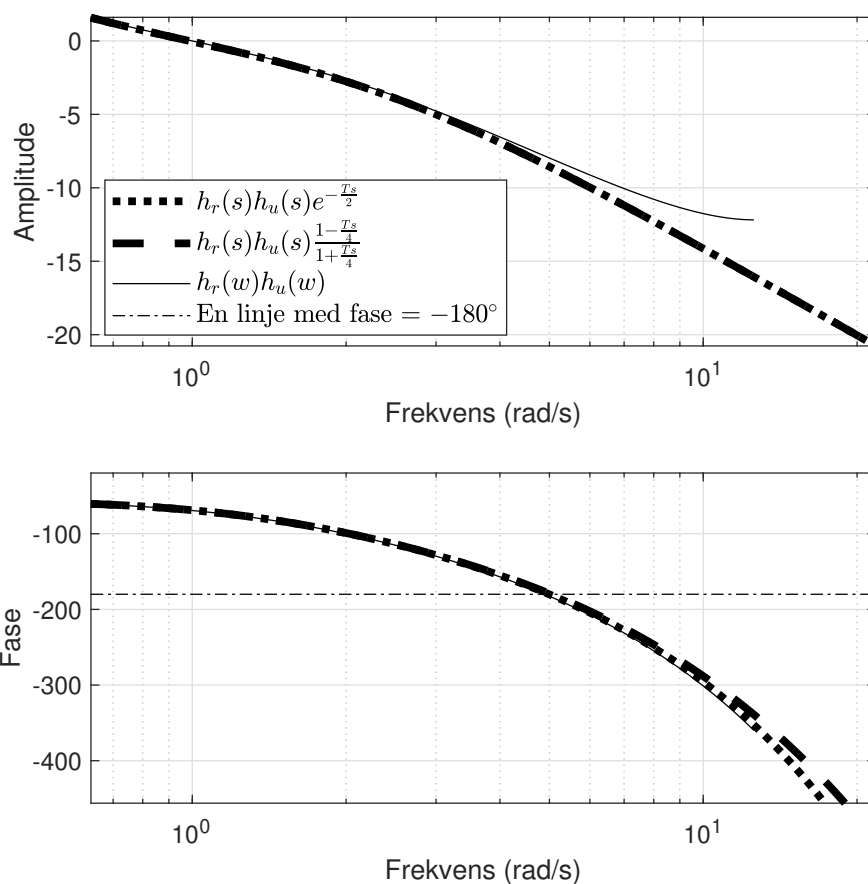
Figur 61 og 62 viser at alle metodene for konstruksjon av diskret regulator gir tilnærmet samme resultat.

7.10.4 Oppsummering av eksperimenter med transferfunksjon nr. 7

Som observert tidligere kan en lav T_{db} føre til at tilnæringsmetodene for diskret regulator får et dristigere resultat enn ved bruk av w -transformasjon. For enkelte transferfunksjoner observeres det en reduksjon i amplitudefallet for den kontinuerlige transferfunksjonen, når det brukes w -transformasjon. En effekt av dette er at tilnæringsmetodene kan bli for dristige. Det er ikke åpenbart hvilken av disse effektene som gjør til at alle tilnæringsmetodene ga et dristigere resultat enn ved bruk av w -transformasjon. For å undersøke om w -transformasjon fører til en reduksjon i amplitudefall på den kontinuerlige funksjonen, blir det konstruert et Bodediagram vist med figur 63. Det er konstruert Bodediagram med tilnærming for et kontinuerlig system og holdelement. Dette er funnet med ren Padé-approximasjon, tidsforsinkelse og w -transformasjon og er vist i tabell 23. Det er brukt en tastetid på $T = 0.25$.

Tabell 23: Tilnærminger for $h_u(s) = \frac{K(1+sT_3)e^{-\tau s}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ med holdeelement og taster.

Metode	Transferfunksjon
Tidsforsinkelse	$\frac{2(s+0.5)e^{-0.38s}}{(s+2)(s+0.1)}$
Padé	$\frac{-2(s-16)(s+0.5)e^{-0.25s}}{(s+16)(s+2)(s+0.1)}$
H(w)	$\frac{5.066 \cdot 10^{32}w^3 - 7.854 \cdot 10^{33}w^2 + 2.839 \cdot 10^{34}w + 1.614 \cdot 10^{34}}{2.06 \cdot 10^{33}w^3 + 2.072 \cdot 10^{34}w^2 + 3.434 \cdot 10^{34}w + 3.228 \cdot 10^{33}}$



Figur 63: Bodediagram konstruert med transferfunksjoner fra tabell 23.

Figur 63 viser at bruk av w-transformasjon gir en reduksjon i amplitudedfall. Dette kan være medvirkende til at tilnæringsmetoden ga dristige resultat i eksperiment 1 og 2. Det observeres at tilnæringsmetodene følger faseforløpet godt.

En kombinasjon av å konstruere en så kjapp regulator som mulig, og med høy tastetid. Ga i eksperiment 1 relativt store forskjeller i resultat mellom analysemetodene for diskret regulering.

7.11 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 8

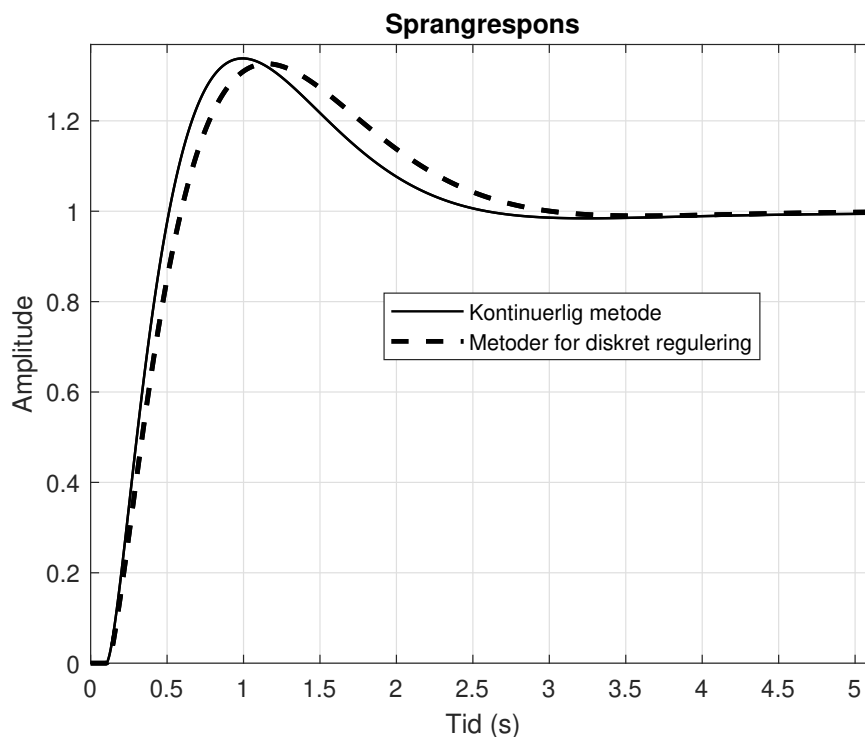
7.11.1 Normalt eksperiment

I dette eksperimentet skal det konstrueres regulatorer til prosessen $h_u(s) = \frac{(1+T_1s)e^{-\tau s}}{s^2(1+T_2s)}$, med $T_1 = 8$, $T_2 = 1$ og $\tau = 0.1$. For å konstruere et stabilt reguleringsystem for denne transferfunksjonen må fasen løftes. Det er da naturlig å velge å bruke en PD-regulator. Tastetiden ble først satt til 0.1, da viste det seg at det ikke var mulig å øke fasemarginen til over 45° , med metodene for konstruksjon av en diskret regulator. Dermed blir tastetiden satt til 0.05 og det ble dannet regulatorer som er gitt i tabell 24. Det lykkes ikke å skille resultatet fra de forskjellige kontinuerlige tilnæringsmetodene.

Tabell 24: To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse og den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{1553.9(s + 0.4727)}{(s + 62.83)}$
Diskrete metoder ²⁴	$\frac{1207.1(s + 0.2555)}{(s + 62.83)}$

²⁴Metodene som er bruk er: w-transformasjon, ren tidsforsinkelse, Padé-approksimasjon, modifisert Padé-approksimasjon med k verdi fra 1 til 0.05, og TF for ZOH.



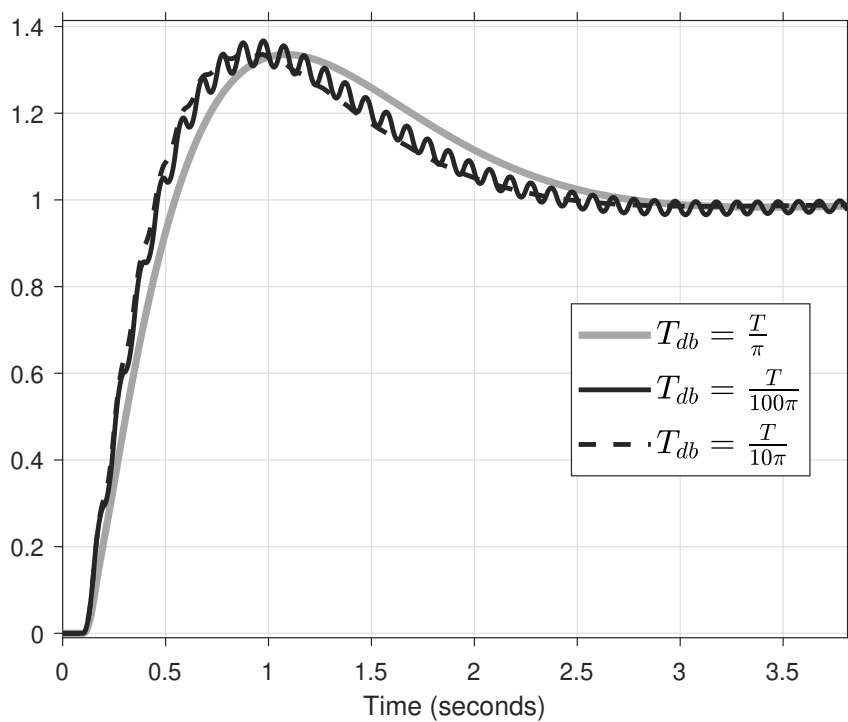
Figur 64: Sprangrespons med prosessen $h_u(s) = \frac{(1+T_1s)e^{-\tau s}}{s^2(1+T_2s)}$ med regulatorer fra tabell 24.

Fra sprangrespons vist i figur 64, er det ingen overraskende observasjoner.

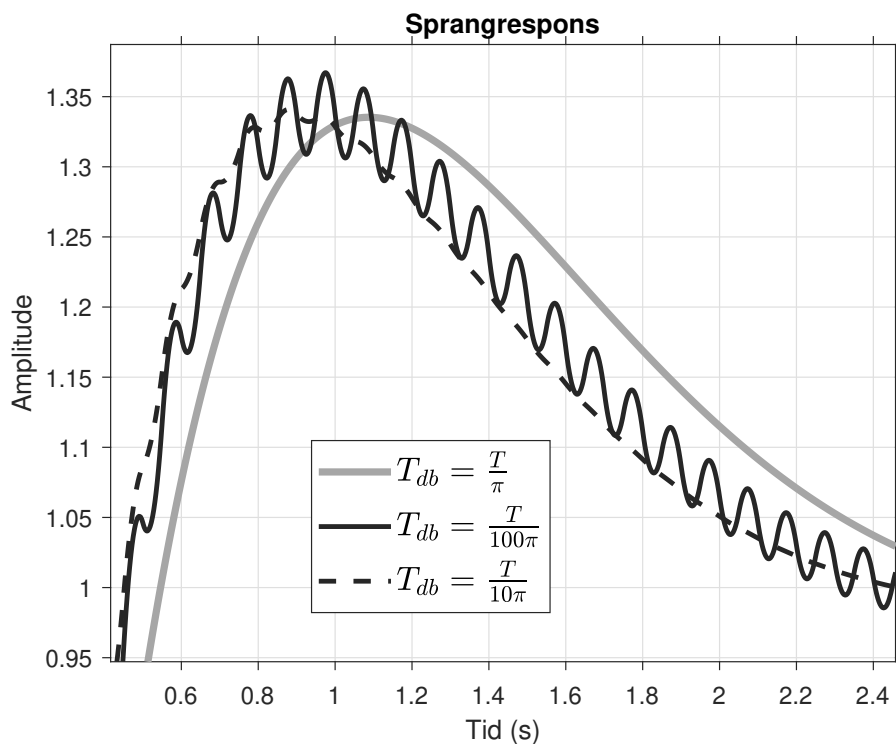
7.11.2 Eksperiment med begrensende faktor av derivatorvirkning

Av åpenbare grunner kan ikke den begrensende derivatorvirknings faktoren være for lav. Det er ikke alltid eksplisitt gitt ved bruk av w-transformasjon, at T_{db} ikke kan settes lavt. Ved de kontinuerlige tilnæringsanalysene må det stort sett forstås implisitt at T_{db} ikke kan settes for lavt. For eksperimentets skyld blir T_{db} satt veldig lavt. Grunnen til at dette eksperimentet er gjennomført er fordi det ikke kommer eksplisitt fram av w-transformasjon på $h_u(s) = \frac{(1+T_1s)e^{-\tau s}}{s^2(1+T_2s)}$ at T_{db} ikke kan settes for lavt.

T_{db} blir satt til " $\frac{T}{\pi}$ ", " $\frac{T}{100\pi}$ " og " $\frac{T}{10\pi}$ ". Etter konstruksjon av nye regulatorer blir sprangresponsen som er funnet, vist i figur 65.



Figur 65: Sprangrespons T_{db} lik $\frac{T}{\pi}$, $\frac{T}{100\pi}$ og $\frac{T}{10\pi}$.

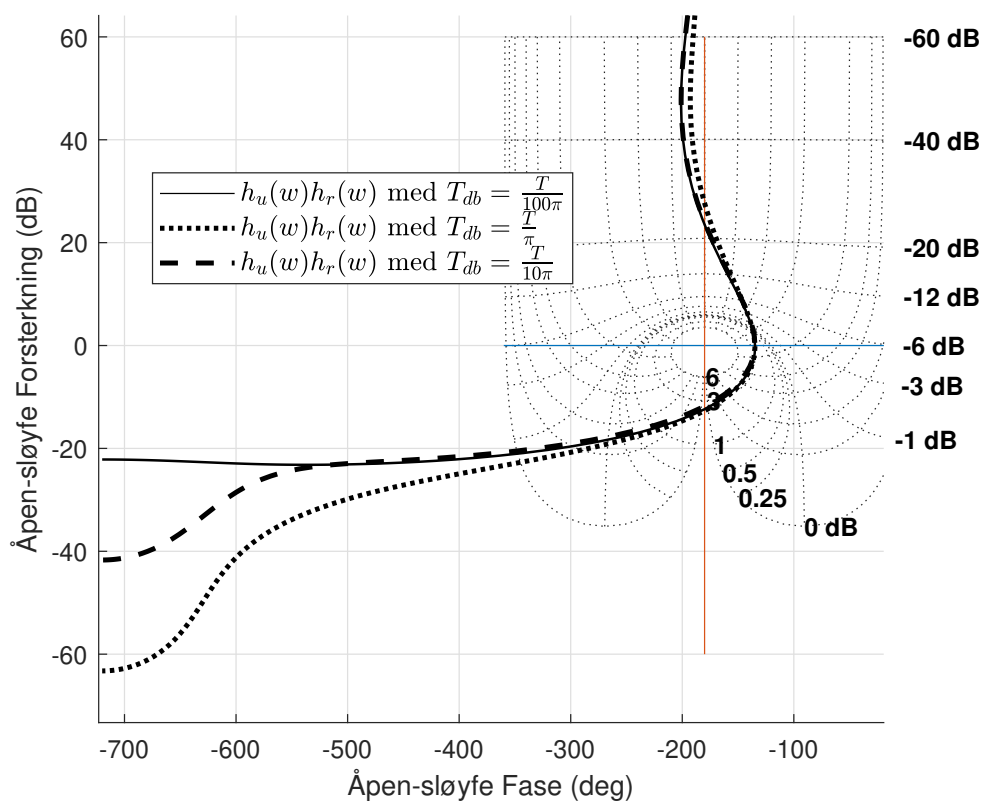


Figur 66: Forstørret versjon av figur 65.

Figur 65 og figur 66 viser sprangresponsen for systemet med forskjellige verdier av T_{db} i Simulink. Det er usikkert hvor reelt dette simuleringsforsøket er, men i Simulink ser vi at det blir en mer oscillerende oppførsel på sprangresponsen med en lavere T_{db} . Med w-transformasjon er systemet gitt w-domene med:

$$h_u(w) = \frac{3.774 \cdot 10^{26} w^5 - 2.116 \cdot 10^{30} w^4 + 2.482 \cdot 10^{32} w^3 - 9.714 \cdot 10^{33} w^2 + 1.226 \cdot 10^{35} w + 1.325 \cdot 10^{35}}{6.625 \cdot 10^{32} w^5 + 5.309 \cdot 10^{34} w^4 + 1.067 \cdot 10^{36} w^3 + 1.325 \cdot 10^{35} w^2}$$

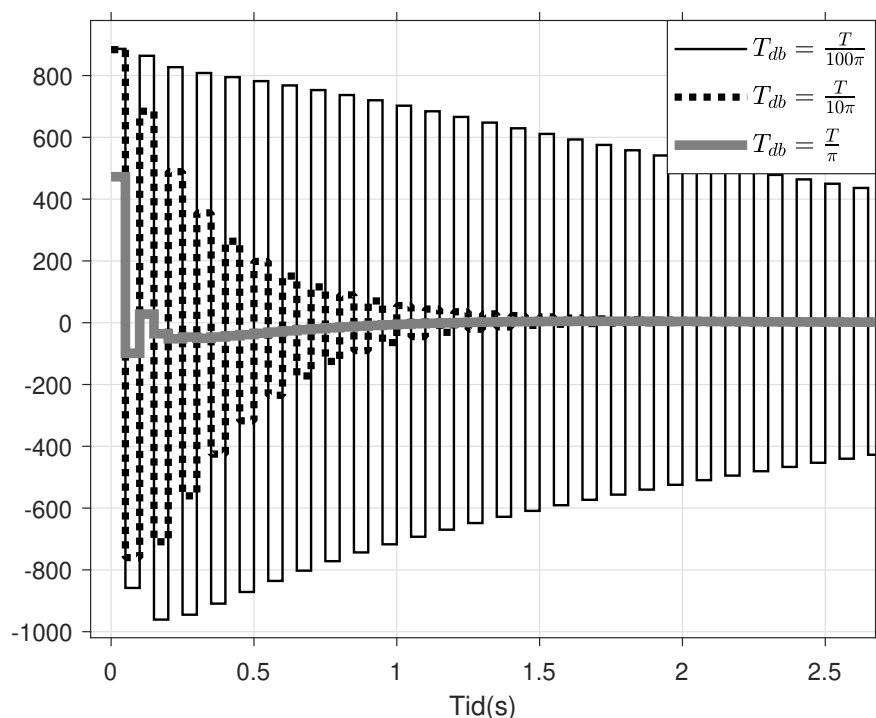
Denne transferfunksjonen er brukt sammen med regulatorne med forskjellig verdi av T_{db} , til å konstruere et Nicholsdiagram. Nicholsdiagrammet er vist i figur 67.



Figur 67: Nicholsdiagram for sprangrespons vist i figur 65.

Av figur 67 observeres det av de oppstykkede linjene at amplituden faller selv om faktoren " T_{db} " for den begrensede derivatvirkningen er lav. Dette medfører at ved naiv implementering kan det være fristende å senke den begrensende faktoren for derivatorvirkningen. Den heltrukne linjen viser at en lav nok verdi for T_{db} gjør at linjen flater ut.

At T_{db} ikke bør settes lavt kommer tydeligst frem når pådraget fra regulatorene blir analysert. Figur 68 viser at pådraget til systemet får en økende oscillerende oppførsel med lavere verdi av T_{db} .



Figur 68: Pådrag fra de diskrete regulatorene, som samsvarer med sprangrespon-
sen vist i figur 65.

Det konkluderes med at selv om det er teoretisk mulig å konstruere et fungerende reguleringsystem med lav verdi av T_{db} med w-transformasjon, er dette frarådet på det sterkeste.

7.12 Eksperimenter med transferfunksjon nummer 9

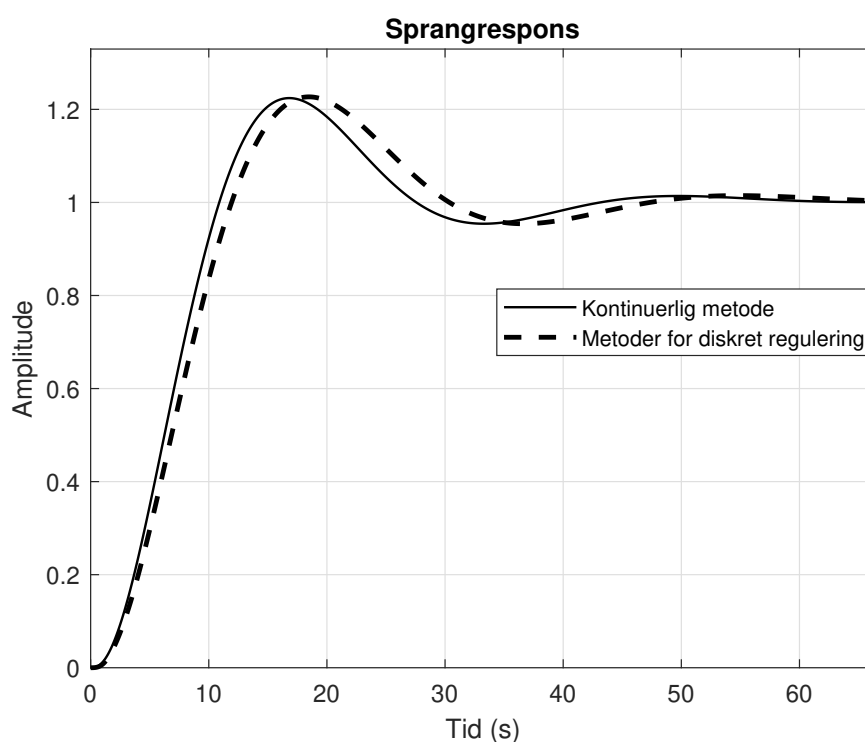
I dette eksperimentet skal det lages regulatorer til transferfunksjon $h_u(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2(1+T_1s)}$, med $T_1 = 5$.

7.12.1 Eksperiment 1, uten transportsforsinkelse

Først settes transportsforsinkelsen lik null, for å analyse systemet uten tidsforsinkelse. Tastetiden blir satt til 1 sekund. Det konstrueres en PD-regulator for å løfte fasen. Integralvirkning er innbygd i det kontinuerlige systemet. Det er derfor ikke nødvendig med integralvirkning i regulatoren. Mange av tilnæringsmetodene for konstruksjon av diskret regulator er brukt i eksperimentet. I tillegg er w-transformasjon iverksatt. Resultatet fra implementeringen er gitt i tabell 25, med tilhørende sprangrespons i figur 69.

Tabell 25: To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for konstruksjon av diskret regulator.

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{0.67752(s + 0.000717)}{(s + 3)}$
Diskrete metoder ²⁵	$\frac{0.56237(s + 0.000717)}{(s + 3)}$



Figur 69: Sprangrespons for systemet $h_u(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2(1+T_1s)}$, med regulatorer gitt i tabell 25.

Fra figur 69 og tabell 25 kan det observeres at metodene for diskret regulering fungerer fint og det er irrelevant hvilken metode som blir brukt.

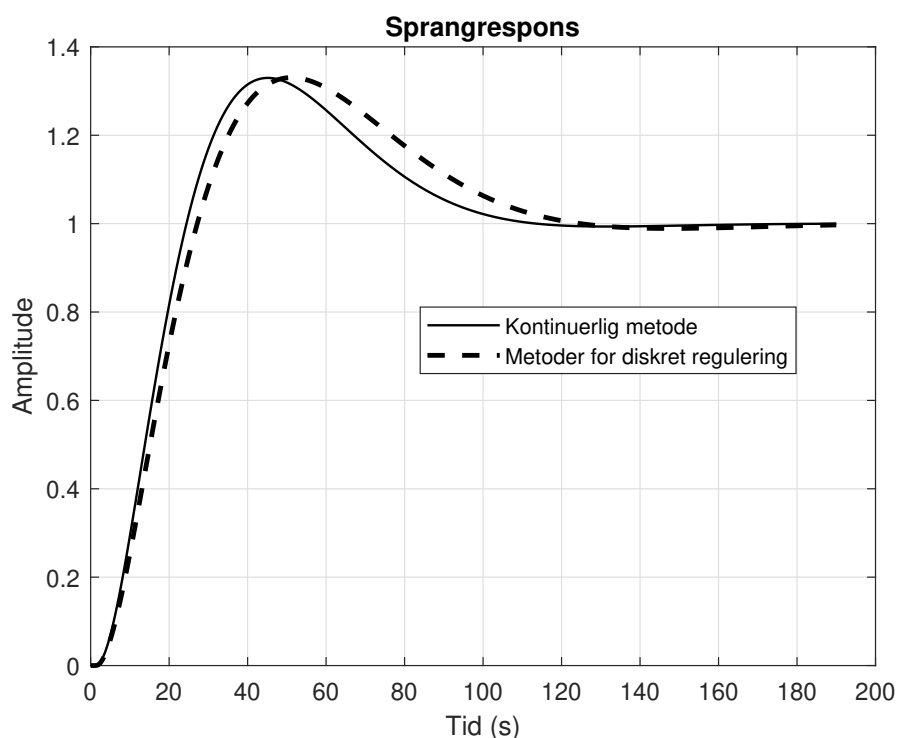
7.12.2 Eksperiment 2, med transportforsinkelse

En transportforsinkelse blir innført og samme eksperiment som i eksperiment 1 blir gjentatt. Resultatet fra eksperimentet er gitt i tabell 26, med tilhørende sprangrespons vist i figur 70.

²⁵Mer presist menes det bruk av ren tidsforsinkelse, Padé-approksimasjon, TF for ZOH og modifikasjon av Padé-approksimasjon med k verdi på $K = 0.32$ og $K = 0.15$.

Tabell 26: To regulatorer; den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{0.18504(s + 0.02607)}{(s + 3)}$
Diskrete metoder	$\frac{0.15877(s + 0.0241)}{(s + 3)}$



Figur 70: Sprangrespons for systemet $h_u(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2(1+T_1s)}$, med regulatorer gitt i tabell 26.

Fra figur 70 og tabell 26 kan det observeres at metodene for diskret regulering fungerte fint og det er irrelevant hvilken metode som blir brukt. Dette på lik linje med eksperiment 1, når det eksisterer en transportforsinkelse i systemet.

7.12.3 Oppsummering av eksperiment med transferfunksjon nummer 9

Det er gjort flere eksperimenter enn de to eksperimentene gitt i rapporten. Felles for alle eksperimentene er at tastetiden ikke har vært større enn transportforsinkelsen i systemet. Det har blitt utført tester med forskjellige tastetider og transportforsinkelser. Ved alle eksperimentene som er utført, har det vist seg at

metodene for konstruksjon av diskret regulering gir tilnærmet samme resultat. Dette er på lik linje med hva som observeres i eksperiment 1 og eksperiment 2.

7.13 eksperimenter med transferfunksjon nummer 10

I dette eksperimentet skal det lages regulatorer til transferfunksjon

$$h_u(s) = \frac{(1-T_1s)e^{-\tau s}}{s^2}, \text{ med } T_1 = 5.$$

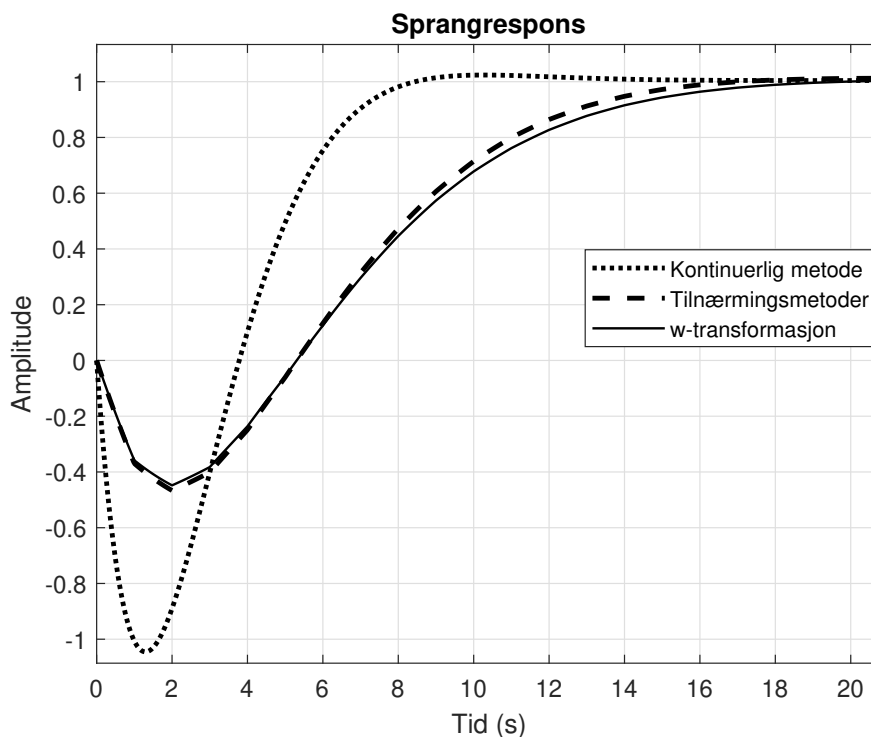
7.13.1 Eksperiment 1 med mye fase løft og uten transportsforsinkelse

Først settes transportsforsinkelsen lik null, for å utforske prosessen uten tidsforsinkelse. Tastetiden blir satt til 1 sekund. Det doble integralledet og første ordensleddet i telleren medfører fase fall. Derfor velges det å konstruere en PD-regulator. Det kontinuerlige systemet har i sin natur innebygd integralvirkning. Det er derfor ikke nødvendig med integralvirkning i regulatoren. Det velges å bruke ekstra mye derivatorvirkning for å lage en så kjapp regulator som mulig. Resultatet fra eksperiment 1 vises i tabell 27 med tilhørende sprangrespons i figur 71.

Tabell 27: Regulatorer funnet med helt kontinuerlig analyse, tilnæringsmetoder og bruk av w-transformasjon.

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{0.39259(s + 0.0005683)}{(s + 3)}$
Tilnæringsmetoder ²⁶	$\frac{0.14751(s + 0.0005683)}{(s + 1.592)}$
Bruk av w-transformasjon	$\frac{0.14294(w + 0.0005683)}{(w + 1.592)}$

²⁶Tilnæringsmetodene som er blitt brukt er; ren tidsforsinkelse, Padé-approksimasjon, TF for ZOH og modifisert Padé-approksimasjon med $k = 0.32$.



Figur 71: Sprangrespons for prosessen $h_u(s) = \frac{e^{-T_1 s}}{s^2(1+T_1 s)}$, med regulatorer gitt i tabell 27.

Figur 71 viser at sprangresponsene har en litt annen dynamikk enn tidligere sprangrespons som er vist i rapporten. Det kan bemerkes at w-transformasjonen gir et litt mindre dristig resultat enn tilnæringsmetodene. Årsakene skal drøftes i delkapittel 7.13.3. Først skal det konstrueres en regulator der derivatorvirkningen kun løfter fasen til det tilstrekkelige²⁷.

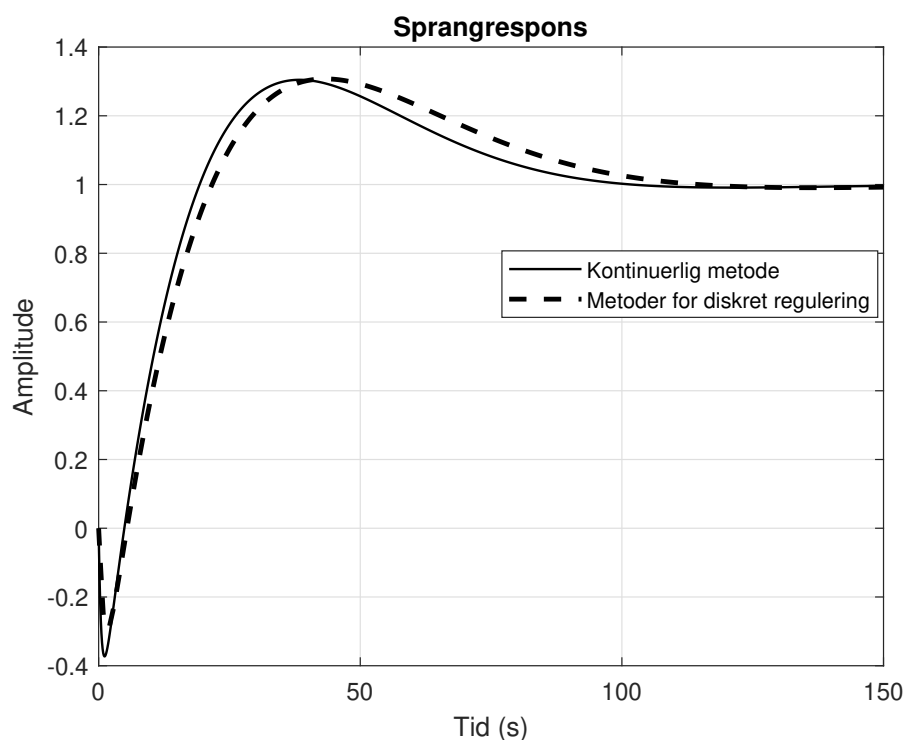
7.13.2 Eksperiment 2 med tilstrekkelig fase løft og uten transportforsinkelse

Eksperiment 2 blir gjort på samme måte som eksperiment 1, men forskjellen er at fasen kun blir løftet tilstrekkelig. Resultatet fra eksperiment 2 er vist i tabell 28, med tilhørende sprangrespons i figur 72.

²⁷Med tilstrekkelig løft menes det i dette tilfellet å løfte fasen til en fasemargin på 45° .

Tabell 28: To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.

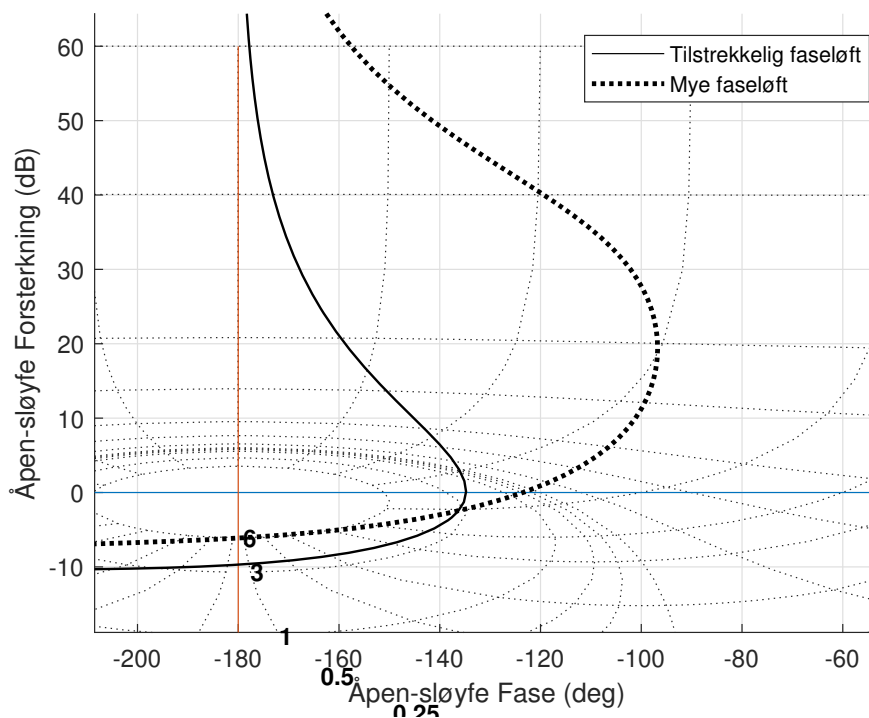
Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{0.199(s + 0.03162)}{(s + 3)}$
Diskrete metoder	$\frac{0.12647(s + 0.02786)}{(s + 2.162)}$



Figur 72: Sprangrespons for systemet $h_u(s) = \frac{(1-T_1s)e^{-\tau s}}{s^2}$, med regulatorer gitt i tabell 28.

Det er ikke noe klart skille mellom resultatene fra analysemetodene for konstruksjon av diskret regulator. Dette vises av tabell 28. Fra figur 72 er det nå gitt en sprangrespons som ligner mer på de tidligere sprangresponsene, gitt i denne rapporten. For videre å undersøke bakgrunnen for hvorfor det er forskjeller mellom eksperiment 1 og eksperiment 2, blir det vist en stabilitetsundersøkelse ved bruk av w-transformasjon i figur 73.

7.13.3 Sammenligning mellom eksperiment 1 og 2



Figur 73: Stabilitetsundersøkelse med w -transformasjon vist for eksperiment 1 og 2.

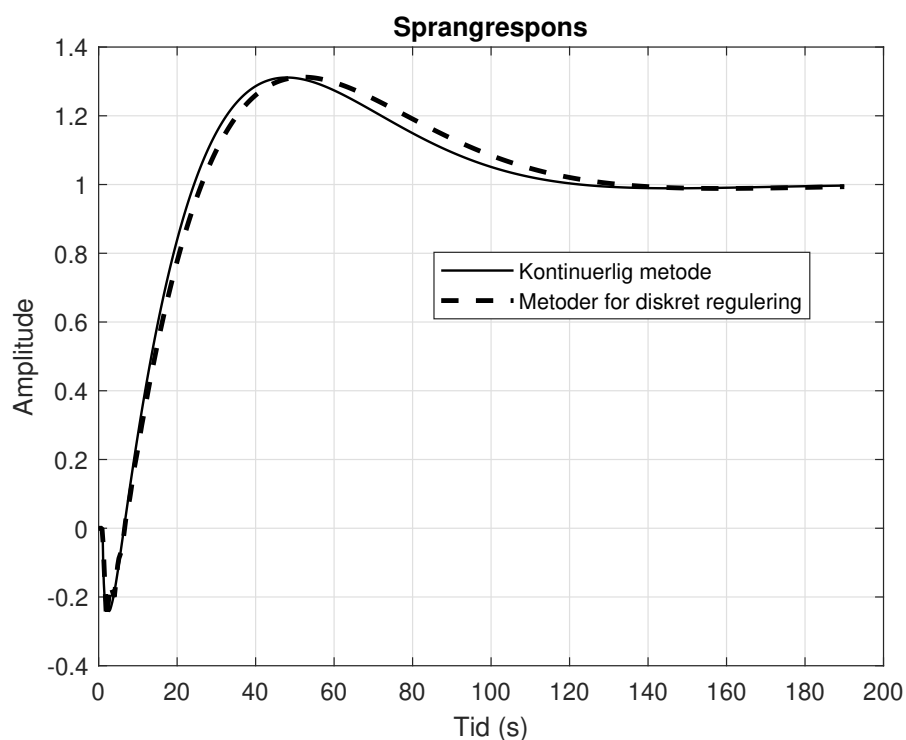
Figur 73 viser stabilitetsundersøkelse ved bruk av w -transformasjon, fra eksperiment 1 og 2. Grafen som består av punkter representerer regulatoren der fasen er løftet mer enn nødvendig, for å kunne øke forsterkningen. Til slutt viser det seg at forsterkningsmarginen blir begrensende, og at den ble noe mer begrensende ved bruk av w -transformasjon. Dette ble ikke tilfelle når det kun var ønskelig å løfte fasen tilstrekkelig.

7.13.4 Eksperiment 3 med tilstrekkelig fase løft og med transportforsinkelse

Det innføres nå en transportforsinkelse til systemet med en verdi på " $\tau = 1$ ". Transportforsinkelsen har denne verdien i eksperiment 3 og 4. Det viser seg at resultatene fra eksperiment 3 og 4, blir veldig like eksperiment 1 og 2. Det konstrueres først en regulator med samme metode som i eksperiment 2. Resultatet vises i tabell 29, med tilhørende sprangrespons vist i figur 74.

Tabell 29: To regulatorer, den første er funnet med helt kontinuerlig analyse, den andre med forskjellige metoder for diskret regulering.

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{0.16074(s + 0.02615)}{(s + 3)}$
Diskrete metoder	$\frac{0.14705(s + 0.02403)}{(s + 3)}$



Figur 74: Sprangrespons for prosessen $h_u(s) = \frac{(1-T_1s)e^{-\tau s}}{s^2}$.

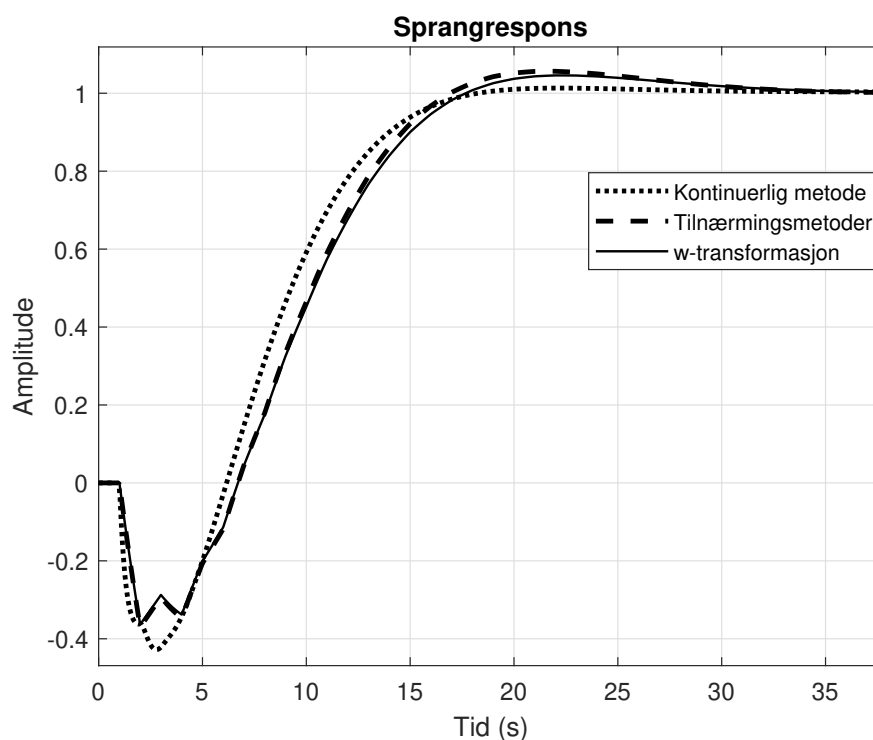
Fra tabell 29 og figur 74 vises det at resultatet ligner mye på resultatet fra eksperiment 2. Sprangresponsen har noe tregere dynamikk. Det bør forventes når et reguleringssystem med transportforsinkelse skal reguleres.

7.13.5 Eksperiment 4 med tilstrekkelig fase løft og med transportforsinkelse

For eksperimentets del så blir det konstruert regulatorer på samme måte som i eksperiment 1, bare med " $\tau = 1$ ". Resultatet fremgår av tabell 30, med tilhørende sprangrespons vist i figur 75.

Tabell 30: Regulatorer funnet med helt kontinuerlig analyse, tilnæringsmetoder og bruk av w-transformasjon.

Metode(r)	Transferfunksjon
Kontinuerlig metode	$\frac{0.26654(s + 0.000305)}{(s + 3)}$
Tilnæringsmetoder ²⁸	$\frac{0.16236(s + 0.000305)}{(s + 1.949)}$
Bruk av w-transformasjon	$\frac{0.15945(w + 0.000305)}{(w + 1.949)}$



Figur 75: Sprangrespons for $h_u(s) = \frac{(1-5s)e^{-1s}}{s^2}$ med regulatorer vist i tabell 30.

Fra tabell 30 og figur 75 sees det at resultatet fra dette eksperimentet blir veldig likt resultatet fra eksperiment 1, selv med en transportforsinkelse i systemet.

7.13.6 Oppsummering fra eksperiment med transferfunksjon nr. 10

Det er observert at tilnæringsmetodene fungerer bra, dette er fordi det blir dannet "pene" sprangresponser med de diskrete regulatorene. Det var forsøkt å

²⁸Tilnæringsmetodene som er blitt brukt er; ren tidsforsinkelse, Padé-approximasjon, TF for ZOH, og modifier Padé-approximasjon med $k = 0.32$.

konstruere et så teoretisk kjapt reguleringsystem som overhodet mulig. Dette framprovoserte at w -transformasjon gir et litt mindre dristig resultat enn tilnæringsmetodene. I praksis kan dette sees bort i fra, siden forskjellen er minimal.

8 Drøfting

8.1 Enkle og vanskelige systemer

8.1.1 Vanskelige systemer

For de prosessene der det er vanskelig å konstruere en kjapp regulator, fungerte alle metodene godt. Dette er observert fra eksperimentene. På vanskeligere systemer er det naturlig at kryssfrekvensen kommer lengre unna Nyquistfrekvensen. Dette tyder på at desto vanskeligere prosessene er, desto bedre fungerer tilnæringsmetodene.

8.1.2 Enkle systemer

Fra eksperimentene observeres det at de kontinuerlige metodene fungerer godt for konstruksjon av en diskret regulator, for de litt mere vanskelige systemene. Ved eksperimenter med enklere prosesser er det observert at, de kontinuerlige analysemetodene for konstruksjon av diskret regulator ga litt forskjellige resultater. Ved enkle prosesser får naturligvis holdeelementet større effekt på amplitudeforløpet og faseforløpet. Ved flere av disse systemene er det kun holdeelementet som medfører ustabilitet. Dette gjør det mulig å legge kryssfrekvensen nærmere Nyquistfrekvensen. Figur 20 viser at avviket i amplitudeforløpet og faseforløpet mellom tilnæringsmetodene øker desto nærmere det kommer Nyquistfrekvensen. Dette gjelder spesielt for faseforløpet som starter veldig likt for tilnæringsmetodene. Senere i forløpet får de forskjellige tilnæringsmetodene et relativt stort avvik. Derfor bør det ikke være overraskende at metodene på enkle prosesser, gir forskjellige resultat når det konstrueres et så raskt reguleringsystem som mulig. Det kan for eksempel være lurt å ikke la kryssfrekvensen overstige en verdi på $1/T$ [rad/s]. Med andre ord, holde kryssfrekvensen i det område der fasefallet til tilnæringsmetodene var veldig like. Eksempler på dette kan sees i vedlegg B.2 og B.1, testet ut på transferfunksjon nummer 2 og 3.

8.2 w-transformasjon sammenlignet med tilnæringsmetodene

En observasjon er at de forskjellige kontinuerlige tilnæringsmetode ga forskjellige resultater. Det er bemerkelsesverdig at w-transformasjonen fortsatt ga et bra resultat på de enkle prosessene. Årsaken til dette er uvisst, men dette kan tyde på at w-transformasjon gir en helt presis analyse.

Den åpenbare styrken w-transformasjon har, ovenfor de kontinuerlige tilnæringsmetodene, er at den tar hensyn til at den diskrete regulatoren faktisk er diskret. Dette er spesielt relevant for regulatorene med derivatorvirkning. Dette er fordi disse regulatorene har en knekkfrekvens som er nærmere Nyquistfrekvensen, enn regulatorene uten derivatorvirkning. I majoriteten av eksperimentene er det brukt en regulator med derivatorvirkning. Resultatene i denne rapporten viser at tilnæringsmetodene ved bruk av en regulator med derivatorvirkning har gitt unøyaktigheter i resultatet. Dette medfører at tilnæringsmetodene er mer sikre å bruke til å konstruere en regulator uten derivatorvirkning, enn en

regulator med derivatorvirkning.

En av styrkene med w-transformasjon er at den gjør det lettere å forstå hvilken verdi den begrensede faktoren for derivatorvirkning bør være i en regulator. Eksperimentene viser at med w-transformasjon er det mulig å sette den begrensede faktoren veldig lavt, og få en fungerende regulator med uønsket oppførsel. For uønsket effekt se figur 68. Eksperimentene tyder på at den begrensede faktoren T_{db} bør ha en minimal verdi på rundt $T/3^{29}$.

8.3 w-transformasjon med tidsforsinkelse i et system

En ulempe med w-transformasjon, i motsetning til de andre metodene, er at den ikke er helt presis ved analyse på systemer med tidsforsinkelse (τ). Dette gjelder når τ/T ikke blir et heltall (fra ligning 11). Det er en svakhet med rapporten at uttesting kun er utført når τ/T er et heltall. Dette problemet blir ikke unngått hvis det hadde vært valgt å gå veien igjennom z-domene for å finne $H(z)$, og ikke veien gjennom tilstandsromrepresentasjon [14]. Det kan være interessant for videre arbeid å teste ut w-transformasjon, når τ/T ikke blir et heltall.

Bortsett fra detaljene med tidsforsinkelse, ser det ut til at w-transformasjonen er helt presis.

8.4 Drøfting rundt ukonsistent amplitudefall ved w-transformasjon

Et overraskende funn er at amplitudefallet mellom w-transformasjonen og TF for ZOH, ikke gir helt sammenfallende resultater. Årsaken til dette er det ikke gått nærmere inn på i denne rapporten. Se Bodediagram i figur 41 og figur 52 for eksempler på dette.

w-transformasjon har gitt flere forskjellige amplitudeforløp når det nærmes Nyquist-frekvensen. Gjennom eksperimentene i denne rapporten er det kommet fram til en tilsynelatende sammenheng, se ligning 40.

$$\emptyset = \text{orden}(\text{teller}) - \text{orden}(\text{nevner}); \quad (40)$$

“teller” og “nevner” representerer teller og nevner fra en transferfunksjon av et kontinuerlig system. Hvis $\emptyset = \text{Partall}$, dannes det en reduksjon i amplitudefallet. Hvis $\emptyset = \text{oddtall}$, dannes det en akselerasjon i amplitudefallet. Denne formelen stemmer tilsynelatende når T er mindre enn prosessens dynamikk (T_i). Dette er ikke vist eller bevist. Dette er kun en sammenheng som ser ut til å samsvare med transferfunksjonene som det er eksperimentert med i denne rapporten. Når det snakkes om reduksjon og akselerasjon i amplitudefallet er dette i forhold til prosessens amplitudefall. Til den prosessen det er utført w-transformasjon på. Det kan være interessant å undersøke videre om ligning 40 faktisk stemmer. Uansett gir ikke w-transformasjon et konsistent amplitudefall. Dette er med på å underbygge konklusjonen om at det ikke er nødvendig å benytte modifikasjonene av

²⁹Med antagelse at det jobbes med en helt presis modell av det hybride systemet

Padé-approksimasjonen.

w-transformasjon har heller ikke gitt et helt konsist fasefall³⁰. Forskjellen i fasefall er i starten vurdert som neglisjerbar. Det er ingen resultater fra eksperimentene som tyder på at w-transformasjon ikke gir et konsist nok fasefall. Eksperimentene viser at w-transformasjon har fungert best og amplitudedefallet ikke har vært tilstrekkelig konsistent hver gang.

Hvis dette er en helt presis analyse av holdelementet, er det nok bedre å fokusere på hvordan fasefallet fra holdelementet påvirker en prosess. Dette er fordi fasefallet er tilstrekkelig konsistent hver gang, så lenge det jobbes med kun en type tilnærming for holdelementet. Det kan tenkes at det er mulig å benytte flere tilnærminger for holdelementet etter hvilken transferfunksjon som analyseres. Dette virker unødvendig komplisert når w-transformasjon gir en tilsynelatende helt presis analyse. I tillegg til at den rene tidsforsinkelsen og Padé-approksimasjonen gir en fungerende og enkel tilnærming.

8.5 Vurdering av presisjon ved metodene

I delkapittel 8.1.2 er det nevnt hvordan tilnæringsmetodene kan gjøres presise nok, på veldig enkle systemer. Da gjenstår det å undersøke om tilnæringsmetodene er presise nok for de resterende systemene. Det bemerkes at modifisert Padé-approksimasjonene med $k = 0.05$, gjentatte ganger har gitt en veldig høy oversvingning, sammenlignet med de andre metodene. Derfor er dette den minst presise metoden og det anbefales derfor ikke å bruke den. Dette observeres for eksempel i figur 58 og figur 45.

Eksperimentene viser at de resterende tilnæringsmetodene vil være relativt trygge å bruke, siden det ikke har blitt konstruert noen tilfeller der de ga ustabilitet. Det er fortsatt relevant å stille spørsmålet: Hvor bra fungerer de og hvilken fungerer best?

8.5.1 Ren Padé-approksimasjon sammenlignet med modifisert Padé-approksimasjon med $k = 0.32$.

Ren Padé-approksimasjon og modifisert Padé-approksimasjon med $k = 0.32$, har gitt relativt like resultater. Siden disse funksjonene er like komplekse, er det tilstrekkelig å kun vurdere resultatene av disse metodene. Det første som legges merke til er at den modifiserte versjonen får et mer sammenfallende resultat med TF for ZOH, enn det den rene versjonen får. Dette vises av figur 42 og figur 51. Disse observasjonene samsvarer med hva som blir observert med Nyquistdiagram i figur 27. Dette kan tyde på at den modifiserte versjonen er best egnet for tilnærming for holdelement.

Uansett er det viktigste hvilken metode som danner det mest optimale hybride systemet. Problemet med den modifiserte metoden er at den i enkelte situasjoner

³⁰Observeres med å sammenligne Bodediagram fra figur 52 og figur 39.

gir et for dristig resultat. Dette kan for eksempel observeres i figur 35 og figur 48. Det er også vurdert som bedre å ha et for konservativt system, enn et for dristig system. Dette er fordi dristige systemer kommer nærmere ustabilitet, som igjen er kritisk for et reguleringsystem. Selv om oversvingningene med den modifiserte versjonen ikke er kritiske, er det vurdert som unødvendig å bruke denne metoden når den rene Padé-approksimasjon gir et mere konservativt resultat. Av denne grunn er det heller ikke testet ut noen lavere verdier av k , på grunn av at disse ville gitt et mere hissig resultat.

8.5.2 Presisjon for TF for ZOH

TF for ZOH er ikke testet ut på lik linje med de andre metodene og har ikke det samme vurderingsgrunnlaget. Hovedutfordringen med denne metoden har fra starten av arbeidet med denne rapporten, vært at den er ansett som for komplisert. Dette er blant annet fordi at ved bruk av MATLAB blir som nevnt transferfunksjonen tvunget over på tilstandromsrepresentasjon. De gangene denne funksjonen har blitt bruk, har det vist seg at den gir et litt dristig resultat. Et eksempel er vist i figur 42. Uansett kan ikke denne metoden anbefales.

8.5.3 Presisjon for w -transformasjon

w -transformasjon har tilsynelatende fungert helt presist. Ulempen med denne metoden er at den er tidskrevende og relativt vanskelig å implementere³¹. Når programvaren først er etablert, er metoden nesten like lett å bruke som de andre verktøyene. Et problem kan være at transferfunksjonene blir tilnærmet numeriske, men de holder seg fortsatt på transferfunksjonsform i MATLAB. Dette er i motsetning til TF for ZOH. Dette medfører at transferfunksjonene blir større og dermed vanskelig å forstå visuelt. Dette er ikke et problem ved bruk av en datamaskin. Datamaskinen håndterer disse på lik linje som en enkel funksjon, hvis det for eksempel er ønskelig å konstruere et Bodediagram. En annen åpenbar ulempe er at w -transformasjon ikke er helt presis på alle systemer med tidsforsinkelser. Dette ble forklart i delkapittel 8.3.

8.5.4 Presisjon med tidsforsinkelse og første ordens Padé-approksimasjon

Begge disse metodene er vurdert til at de gir et bra resultat for konstruksjon av en diskret regulator. Disse metodene har også gitt samme resultat ved flere eksperimenter. Dette bør ikke være overraskende siden starten av fasefallet for disse metodene er veldig like. Dette ble sett i figur 18. Hvilke av disse metodene som er mest egnet kan diskuteres. Først observeres det at Padé-approksimasjon er en enklere funksjon, da den blant annet er rasjonell. Dette gjør det enklere å få denne over på tilstandromrepresentasjon. På den andre siden er den rene tidsforsinkelsen også veldig anvendelig, siden et finnes innebygde funksjoner for å håndtere en tidsforsinkelse i MATLAB. Dette medfører at det ved bruk av MATLAB ikke er særlig mer komplisert å bruke den rene tidsforsinkelsen enn Padé-approksimasjonen i praksis. På en annen side kan det være en stor fordel

³¹Hvordan dette blir implementert ble forklart i kapittel 4.

å bruke Padé-approksimasjonen dersom det brukes et annet verktøy enn MATLAB.

Når det kommer til resultat viser eksperimentene at den rene tidsforsinkelsen er mer konservativ enn Padé-approksimasjonen. Uansett så er det relevante spørsmålet: Hvilken metode er mest presis? Dette er et spørsmål som det er vanskelig å svare på, men fra forfatterens ståsted er kanskje Padé-approksimasjonen mest presis. Dette inntrykket kommer fra sprangresponsene i figur 45 og figur 36, men dette er ikke helt entydig. Ved å utforske figur 49 får vi motsatt inntrykk. Det er som nevnt ønskelig å få et mer konservativt resultat, enn et for dristig resultat. Dette taler for at det er bedre med en ren tidsforsinkelse enn Padé-approksimasjonen. For sammenligning har Padé-approksimasjon og den rene tidsforsinkelsen et avvik i fasefall på 0.6° , ved en frekvens på $1/T^{32}$. Å benytte seg av en kryssfrekvens på over $1/T$ er ansett som ikke ønskelig. Derfor bør det være trygt å bruke begge metodene.

Oppsummert fungerer begge metodene veldig bra. Padé-approksimasjonen er enklest, men dristig. Tidsforsinkelsen er litt mer komplisert, men en mer sikker metode.

Vurderingene er tatt i forhold til hva som blir det mest optimale systemet. Fordi at w -transformasjon ser ut til å fungere helt presist, er denne blitt værende som referanse i eksperimentene. Fordi den rene Padé-approksimasjonen gir et litt for dristig resultat, er det valgt ikke å eksperimentere med k verdier mellom 0.32 og 0.5.

8.6 Andre svakheter

En svakhet i denne rapporten er at den utelukkende har basert seg på helt presise modeller av LTI-systemer. Det er vanlig å tilnærme ulineære og tidsvariante systemer på en lineær tidsinvariant form. Dermed er det ikke testet ut hvordan en tilnærming på LTI-form ville fungert. Selv om det i et reelt tilfelle kunne vært aktuelt å konstruere en diskret regulator med kontinuerlig analyse, til et system tilnærmet på LTI-form.

I denne rapporten er det konsekvent konstruert regulatorer for å opprettholde “normale stabilitetsmarginer” på $\psi \geq 45^\circ$ og $\Delta K \geq 6$, [dB]. Siden det er forsøkt å konstruere et så rask reguleringsystem som mulig, bør det være trygt å bruke metodene frem til stabilitetsmarginer på $\psi \geq 45^\circ$ og $\Delta K \geq 6$, [dB]. Hvis det av en eller annen grunn er ønskelig å bruke stabilitetsmarginer under $\psi \geq 45^\circ$ og $\Delta K \geq 6$, [dB], er dette utelukket fra denne rapporten. Testene i denne rapporten kan ikke brukes til å se hvordan metodene fungerer ved lavere stabilitetsmarginer.

8.7 Høyere ordens Padé-approksimasjon

Som nevnt tidligere i rapporten, fungerer Padé-approksimasjonen godt i praksis. Det kunne for eksempel vært interessant å teste om det er hensiktsmessig å be-

³²Verdien er tolket ut i fra tabell 2.

nytte en enda bedre tilnærming, med enda høyere ordens approksimasjon. For eksempel starte med andre ordens Padé-approksimasjon for en tidsforsinkelse. Selv om denne rapporten hevder at det er unødvendig i å bruke modifikasjoner av første ordens Padé-approksimasjonen. Kan det være interessant å teste ut modifikasjoner av andre ordens Padé-approksimasjonen.

Fordi første ordens Padé-approksimasjonen fungerer godt, vil dette ikke anbefales som videre arbeid. Uansett er høyere ordens Padé-approksimasjoner et alternativ som det er verdt å legge merke til, og modifikasjoner av disse.

9 Konklusjon

I eksperimentene i denne rapporten kommer det frem at metodene for kontinuerlig analyse for konstruksjon av diskret regulator fungerer greit. Det anbefales å bruke metodene:

- w-transformasjon.
- En ren tidsforsinkelse på en halv tastetid ($e^{-\frac{T_s}{2}}$).
- Første ordens Padé-approksimasjon av $e^{-\frac{T_s}{2}}$, som er $\frac{1-\frac{T_s}{4}}{1+\frac{T_s}{4}}$.

w-transformasjon gir det mest presise resultatet, men er noe krevende å implementere. Det dannes fort relativt kompliserte transferfunksjoner.

Den rene tidsforsinkelsen gir stort sett et litt konservativt resultat, men er enklere å implementere enn w-transformasjonen.

Padé-approksimasjon er enda enklere å implementere, men kan gi et litt dristig resultat.

Fra eksperimentene tyder det på at disse metodene vil fungere tilstrekkelig for all praktisk bruk. Hvilke av disse metodene det anbefales å benytte, avhenger av hvor kompleks analysen er, kontra hvor presis analyse som er nødvendig.

De andre metodene som er gjennomgått i rapporten fungerer greit, men ut fra eksperimentene er det ingen hensikt i å bruke disse. Dette er fordi den rene Padé-approksimasjon fungerer bedre. Det er veldig lett å anvende alle metodene når de først er implementert. Dette er fordi "Control System Designer" reguleringsverktøyet i MATLAB håndterer alle metodene. Dette gjør det mulig å konstruere en diskret regulator til et kontinuerlig system, uten å ha dyp forståelse av reguleringsteknikk. Eksperimentene viser at en for lav begrensende derivatorfaktor eller for høy kryssfrekvens, kan være en feilkilde ved naiv implementasjon, for tilnæringsmetodene. Det som er overraskende med denne rapporten er at forskjellen mellom amplitudefall for transferfunksjonen for ZOH($\frac{1}{T_s}(1 - e^{-T_s})$) og w-transformasjon er så stort som det er.

Referanser

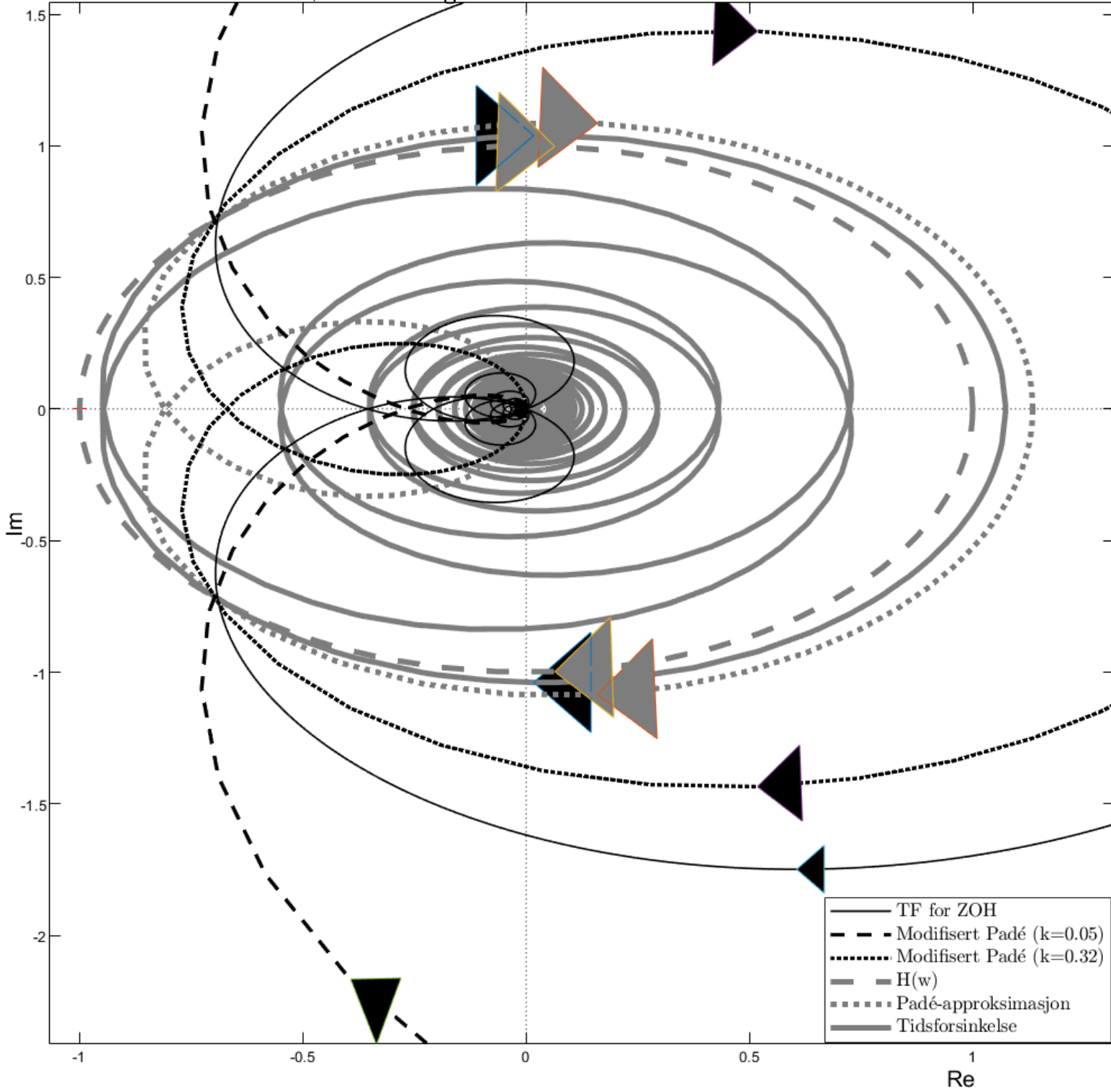
- [1] J. G. Balchen, T. Andresen og B. A. Foss, *Reguleringsteknikk*, 6. utg. 7491 Trondheim: Institutt for teknisk kybernetikk, 2016.
- [2] M. Naumovic og F. Robayo, “Developing Frequency Response Analyzer in MATLAB Simulink Environment,” jan. 2009.
- [3] F. Haugen, *Anvendt regulerings teknikk*. Tapir, 1992.
- [4] J. W. Leis, *Digital Signal Processing Using MATLAB for Students and Researchers*. WILEY, 2011.
- [5] O. Egeland og T. Gravdahl, *Modeling and Simulation for Automatic Control*. Marine Cybernetics AS, 2003.
- [6] K. Ogata, *Discrete-time control systems*. Prentice-Hall, 1995.
- [7] H. Abbas og G. Fainekos, “Linear Hybrid System Falsification through Local Search,” i *Automated Technology for Verification and Analysis*, T. Bultan og P.-A. Hsiung, red., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, s. 503–510, ISBN: 978-3-642-24372-1.
- [8] B. Douglas, *Discrete control #3: Designing for the zero-order hold*, <https://www.youtube.com/watch?v=yetLPW9sQaI&t=164s>, sep. 2017.
- [9] J. Fernández de Cañete, C. Galindo, J. Barbancho og A. Luque, “Time Domain Analysis of Continuous and Discrete Systems,” i *Automatic Control Systems in Biomedical Engineering: An Interactive Educational Approach*. Cham: Springer International Publishing, 2018, s. 89–179, ISBN: 978-3-319-75717-9. DOI: 10.1007/978-3-319-75717-9_3. adresse: https://doi.org/10.1007/978-3-319-75717-9_3.
- [10] X. Ce, “Some infinite series involving hyperbolic functions,” jul. 2017.
- [11] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Incorporated, 2014, ISBN: 9780199964543.
- [12] karl Rottmann, *Matematisk Formelsamling*, 1. utg., overs. av J. Reed. 0105 Oslo: Universitetsforlaget, 2019.
- [13] J. Stillwell, *Naive Lie Theory*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [14] MathWorks, *Control System Toolbox Users Guide*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.
- [15] W. contributors, *Zero-order hold*, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Zero-order_hold&oldid=1020538442, [Online; accessed 21-April-2021], 2021.
- [16] Wikipedia contributors, *Aliasing — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, [Online; accessed 10-May-2021], 2021. adresse: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Aliasing&oldid=1021280424>.
- [17] MathWorks, *Matlab Mathematics*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.

-
- [18] —, *Signal Processing Toolbox Reference*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.
- [19] —, *Symbolic Math Toolbox User's Guide*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.
- [20] J. Ma, X. Wang, F. Blaabjerg, L. Harnefors og W. Song, "Accuracy Analysis of the Zero-Order Hold Model for Digital Pulse Width Modulation," des. 2018.
- [21] I. J. Halvorsen, "Sampling Requirements for Feedback control," mar. 2021.
- [22] D. E. Seborg, T. F. Edgar, D. A. Mellichamp og F. J. D. III, *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- [23] MathWorks, *Control System Toolbox Reference*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.
- [24] —, *Simulink User's Guide*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.
- [25] —, *Simulink Reference*, 1 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098: The MathWorks, Inc., 2021.
- [26] G. P. Starr, "Introduction to Applied Digital Control," masteroppg., The University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 2006.
- [27] L. D. Landau og G. Zito, *Digital control systems Design, Identification and Implementation*. Springer, 2006.
- [28] M. S. Fadali og A. Visioli, *Digital control engineering Analysis and Design*, 2. utg. Prentice-Hall, 2013.

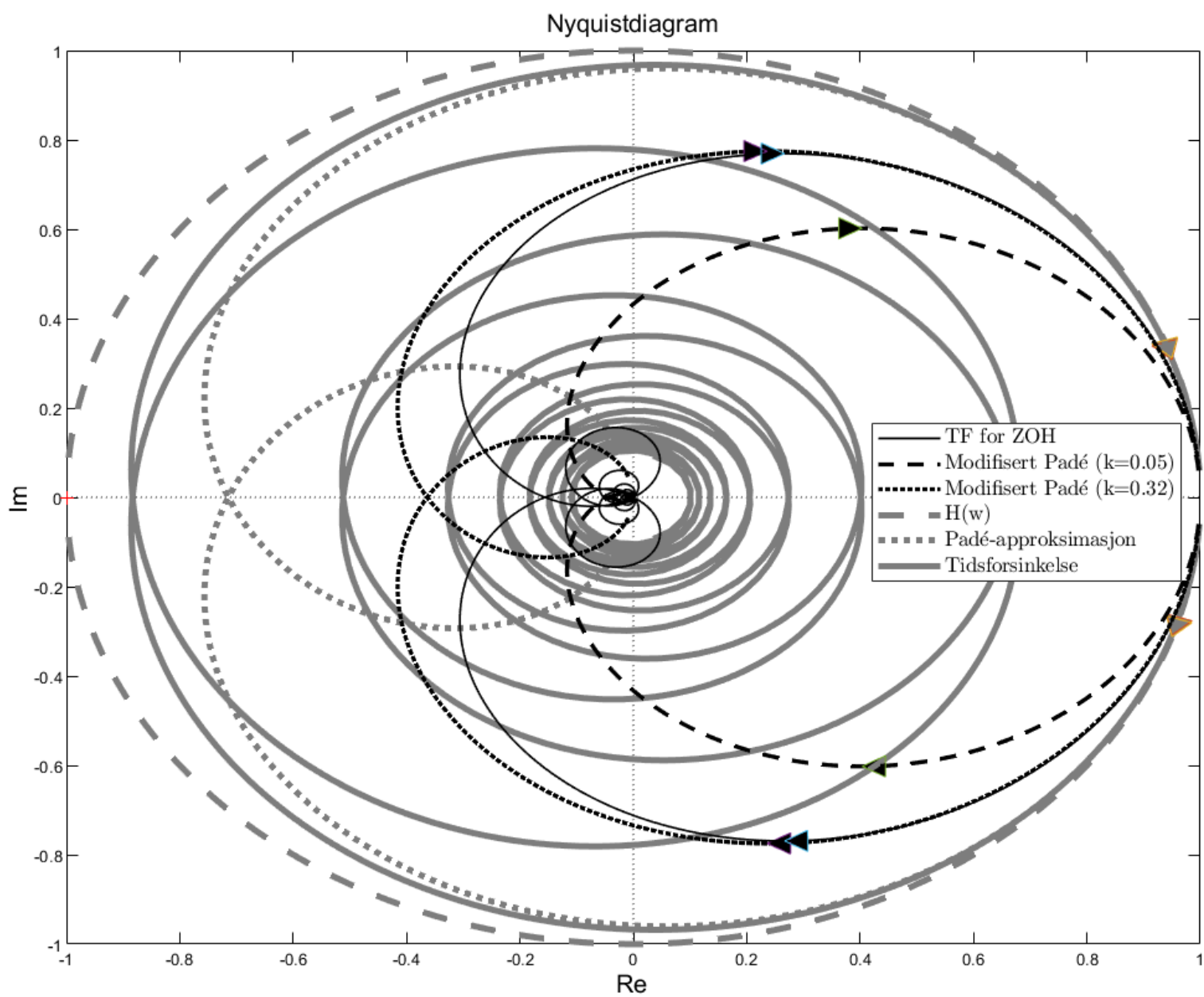
A Diagrammer

A.1 Forstørrelse av figur 29

Nyquistdiagram



A.2 Nyquistdiagram med prosesser fra tabell 5 med forsterkning lik 1



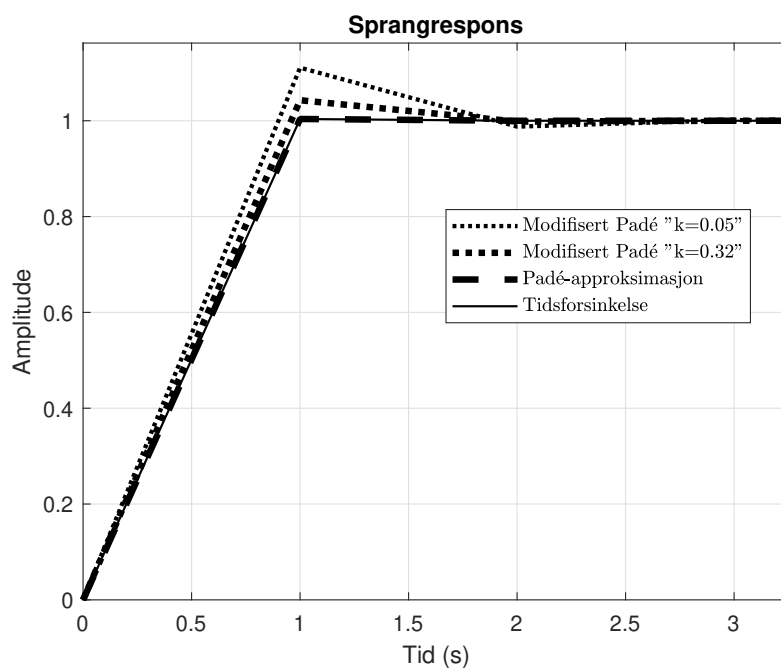
B Ekstra resultater

B.1 Ekstra resultat med transferfunksjon nummer 2

Lik test som første test med transferfunksjon nummer 2, bare at kryssfrekvensen er maks $1/T$. T er lik 1 sekunder.

Tabell 31: Forsterkinger til prosessen $\frac{1}{s}$

Metode	Transferfunksjon
Tidsforsinkelse	1.0037
Padé	1.0037
Mod "k = 0.32"	1.0428
Mod "k = 0.05"	1.1107



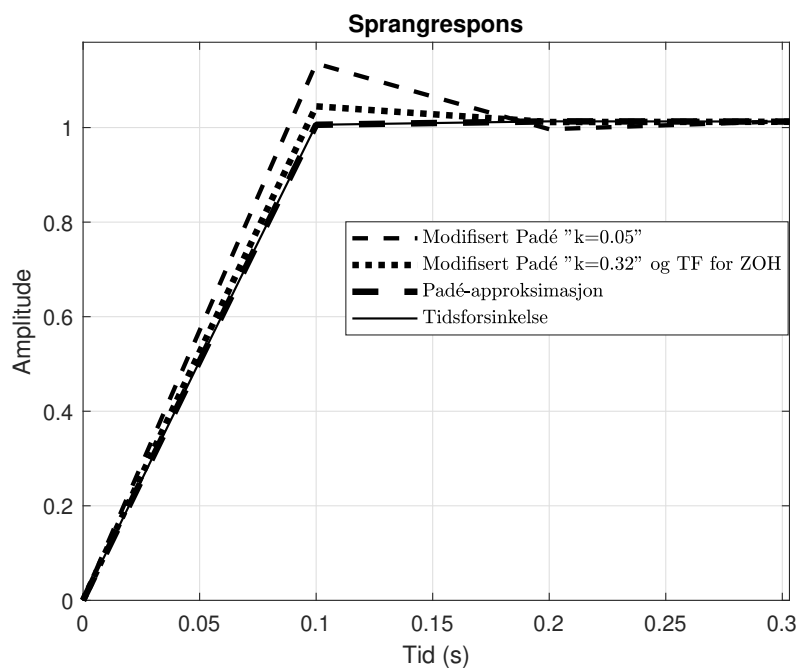
Figur 76

B.2 Ekstra resultat med transferfunksjon nummer 3

Lik test som første test med transferfunksjon nummer 3, bare at kryssfrekvensen er maks $1/T$. T er lik 0.1 sekunder.

Tabell 32: Regulatorer

Metode	Transferfunksjon
Tidsforsinkelse	$\frac{44.766(s + 0.3582)}{s}$
Padé	$\frac{44.766(s + 0.3582)}{s}$
Mod "k = 0.32"	$\frac{46.504(s + 0.3582)}{s}$
Mod "k = 0.05"	$\frac{50.538(s + 0.3582)}{s}$
TF for zoh	$\frac{50.538(s + 0.3582)}{s}$



Figur 77

C Tilsendte kilder fra Veileder

C.1 Approksimasjon til sample and hold

Ivar Halvorsen, memo 11.2.2021

Approksimasjon til sample&hold, "zero order hold" (ZOH)

Utleddning for ZOH er for eksempel vist her: https://en.wikipedia.org/wiki/Zero_order_hold

Det er gjort via impulsresponsen som er en enkel firkantpuls

Transferfunksjonen til ZOH er utledet til fra at impulsresponsen

$$g_{zoh}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

0

Gjør følgende "triks" for å vise at denne kan tilnærmes med $e^{-sT/2}$:

$$g_{zoh}(s) = e^{(\frac{Ts}{2})} e^{(\frac{Ts}{2})} \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right) = e^{(\frac{Ts}{2})} \left(\frac{e^{(\frac{Ts}{2})} - e^{(-\frac{Ts}{2})}}{s} \right) = e^{(\frac{Ts}{2})} \left(\frac{2 \sinh(\frac{Ts}{2})}{s} \right)$$

Setter inn $s = j\omega$:

$$e^{(\frac{-j\omega T}{2})} \left(\frac{e^{(\frac{j\omega T}{2})} - e^{(-\frac{j\omega T}{2})}}{j\omega T} \right) = e^{(\frac{-j\omega T}{2})} \left(\frac{\cos(\frac{\omega T}{2}) + j \sin(\frac{\omega T}{2}) - \left(\cos(-\frac{\omega T}{2}) + j \sin(-\frac{\omega T}{2}) \right)}{j\omega T} \right)$$

Samler real og imaginær del i sinh-faktoren:

$$g_{zoh}(j\omega) = e^{(\frac{-j\omega T}{2})} \left(\frac{\cos(\frac{\omega T}{2}) - \cos(-\frac{\omega T}{2}) + j \left(\sin(\frac{\omega T}{2}) - \sin(-\frac{\omega T}{2}) \right)}{j\omega T} \right)$$

Bruker $\cos(-x) = \cos(x)$, samt $\sin(-x) = -\sin(x)$. Da faller cos-ledd bort, og uttrykket forenkles til:

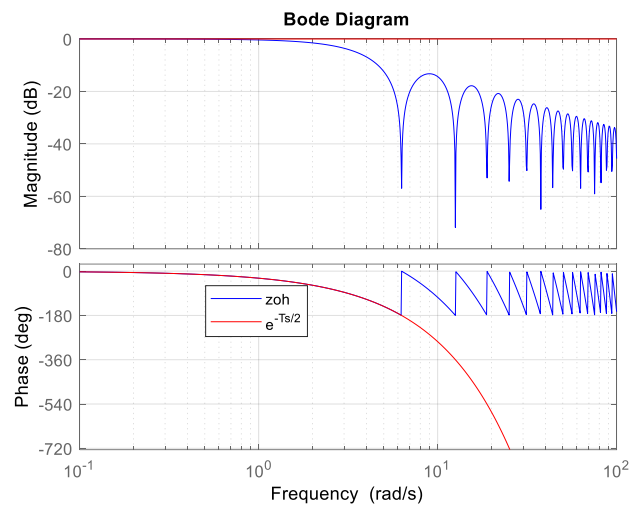
$$g_{zoh}(j\omega) = e^{(\frac{-j\omega T}{2})} \left(\frac{j2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{j\omega T} \right) = e^{(\frac{-j\omega T}{2})} \left(\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right)$$

Merk at fasen bestemmes av faktoren: $e^{(\frac{-j\omega T}{2})}$. Tallverdi og fase er dermed gitt ved

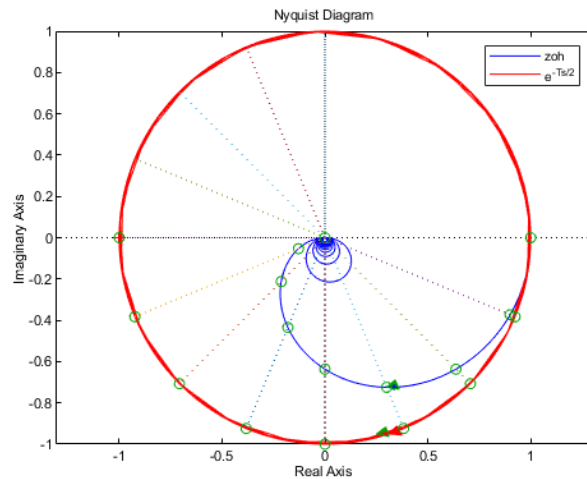
$$\angle g_{zoh}(j\omega) = \angle e^{(\frac{-j\omega T}{2})} = -\frac{\omega T}{2}$$

$$|g_{zoh}(j\omega)| = \frac{\left| \sin(\frac{\omega T}{2}) \right|}{\frac{\omega T}{2}}$$

Merk at tallverdien er null for hver $\omega T / 2 = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$



Matlabs bode-plot roter til fasen, og starter på null for hver gang tallverdien går igjennom null, men amplituden er korrekt lik $\left| \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|$.



Viser også Nyquist-diagrammet for disse to (kun positive frekvenser). De grønne små o-sirklene er ved sammenfallende frekvenser som gir faseendring 22.5 grader for hver sektor det illustrerer at fasegangen er den samme for samme frekvenser. (Matlabs Bode-diagrammet viser ikke dette korrekt)

For praktiske formål er tilnærmelsen med å benytte $e^{-\frac{Ts}{2}}$ som approksimasjon på ZOH rimelig god i første sektor (< 22,5 grader) der kurvene er godt sammenfallende. Normalt velges samplingstiden sånn at det negative fasebidraget ved prosessens kryssfrekvens ikke gir mer en 3-5 graders redusert fasemargin. Dvs at det interessante om rådet er godt inne i første sektor.

I det veldig spesielle tilfellet med en prosess uten dynamikk, der bare samplingen i seg selv er det som gir negativt fasebidrag kan det være aktuelt å se litt nærmere på detaljene, men heller ikke da over 180 grader negativ fase.

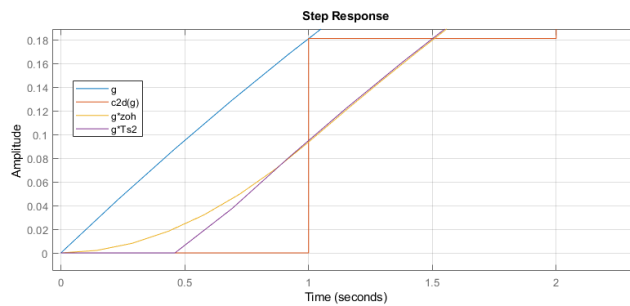
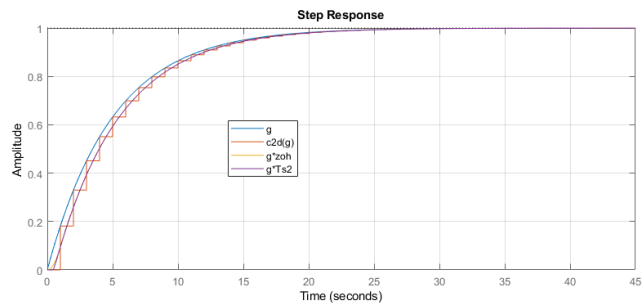
Det anbefales et lavpassfilter før sampling, og det kan være naturlig å se litt på sample&hold sammen med et slikt lavpassfilter.

Men, det kan fortsatt stiles spørsmål om hva som korrekt analyse for det hybride samplede systemet med en kontinuerlig prosess og en diskret regulator når den skal analyseres med en kontinuerlig regulator pluss approksimasjon av samplingsmekanismene.

Det korrekte er vel fortsatt å diskretisere selve prosessen, og analysere både regulator og prosess på diskret form.

Men, da er man låst til andre metoder for stabilitetsanalyse, og begrepene fasemargin og forsterkningsmargin er ikke så enkle å presentere.

Så det er besnærende å gjøre all analyse på kontinuerlig form.



Figuren viser åpne sløyfe sprangrespons (blå) til en enkel første ordens respons med tidskontant på 5 sekunder, sammen med diskretisert måling som samles hvert sekund (rød), et sample&hold-element (gul) samt en respons med tidsforsinkelse (0.5 sek) lik halve samplingstiden (1.0 sek). Det er kun et lite initielt avvik mellom sample& hold og approksimasjonen med tidsforsinkelsen $T_s/2$ som kan observeres når man zoomer inn til de første 2 samplene (=sekundene her).

