Innhold

Sammendrag

Denne studien har undersøkt brøkoppgaver i lærebøker, som bygger på den nye læreplanen LK20. Hensikten med studien er å få innsikt i hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis det legges til rette for i lærebøkene. I den nye læreplanen handler seks av ti kompetansemål på femte trinn om brøk. Forskningsspørsmålet jeg stiller i denne studien er: *Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn*?

Dette er en kvalitativ studie hvor brøkoppgavene i fire lærebøker er blitt undersøkt. Datamaterialet har blitt undersøkt ved bruk av innholdsanalyse. Studiens rammeverk baserer seg på rammeverkene til A. Stylianides (2016) og G. Stylianides (2009). Studiens rammeverk støtter seg til A. Stylianides` (2007b) definisjon av bevis i skolen.

Studien viser hvordan rammeverkene, med noen modifikasjoner, kan identifisere hvilke muligheter for resonnering og bevis i ligger i oppgaver i lærebøker. Resultatene fra studien viser at det er få brøkoppgaver i lærebøkene, som gir muligheter for arbeid med resonnering og bevis. Samtidig så viser studien at blant de få oppgavene som har de kvalitetene, er det gode muligheter for å arbeide med resonnering og bevis.

Nøkkelord: resonnering og bevis, argumentasjon, lærebøker og læreplan

1 Innledning

Det er internasjonal enighet om at resonnering og bevis er en viktig del av elevers læring og forståelse av matematikk på alle trinn og utdanningsnivåer (D.L. Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; A. J. Stylianides, 2007b; A. J. Stylianides & Harel, 2018). Bevis blir gjerne omtalt som selve kjernen i matematikken (A. H. Schoenfeld, 2009), men dette samsvarer lite med hvordan bevis håndteres i skolen. Forskningsfeltet bemerker at resonnering og bevis strever med å finne sin form og sin plass i undervisningen (Harel, 2007). Tradisjonelt har arbeidet med bevis i hovedsak vært knyttet til matematikkundervisning på ungdomstrinnet og i den videregående skole, introdusert og knyttet til emnene algebra og geometri. A. Stylianides (2007a) antyder at den sene innføringen av matematiske bevis i skolen kan føre til at elevene tilbys et begrenset erfaringsgrunnlag når de skal tilegne seg kompetanse om matematiske bevis. Det begrensete erfaringsgrunnlaget vil igjen kunne generere vansker hos elever i arbeidet med resonnering og bevis. Yackel og Hanna (2003) hevder at slik bevis blir behandlet i skolen, gis elevene hverken muligheter til å utvikle en robust begrepsforståelse av bevis eller til å erfare spekteret av ulike formål et bevis kan inneha. Det tegnes et bilde av resonnering og bevis som et viktig matematisk emne, men som er vanskelig å lære for elevene og vanskelig å undervise for lærerne.

I de siste tiårene har et voksende matematikkdidaktisk forskningsfelt gitt viktig innsikt om resonnering og bevis (A. J. Stylianides & Harel, 2018). Skott et al. (2018, s. 279-280) peker på fire grunner for at forskningen fremhever betydningen av resonnering og bevis i matematikkundervisningen. Den første grunnen handler om en økende bevissthet om at bevis er kjernen i matematikken. Med dette synet på bevis kan det diskuteres om det i det hele tatt undervises i matematikk dersom resonnering og bevis ikke spiller en viktig rolle i undervisningen. Den andre grunnen løfter frem elevenes utfordringer med å resonnere matematisk, og at det å resonnere matematisk ikke er noe elevene lærer av seg selv. Skott et. al. (2018) presiserer at det krever en dedikert innsats av matematikklærere for at elever skal forstå det spesielle ved å resonnere matematisk. Den tredje grunnen ligger i kraften arbeidet med resonnering og bevis kan ha i å utvikle elevenes forståelse av matematikk. Det er altså ikke kun elevers forståelse av resonnering og bevis som undervisningen må ta høyde for, men også hvordan resonnering og bevis kan styrke elevers forståelse av andre innholdsområder i matematikk, som for eksempel arbeid med tall, variabler, målinger osv. Den siste grunnen Skott et. al. (2018) beskriver er å bryte med det tradisjonelle synet hvor resonnering og bevis kun knyttes til geometri, hvor elever i stor grad skal huske ferdigutviklete bevis. Resonnering og bevis skal heller inngå i alle matematiske emner, og elever skal være i stand til å følge de matematiske resonneringene som beviset er et uttrykk for.

Forskningens blikk mot resonnering og bevis har trolig vært en påvirkende faktor til at flere land i den senere tid har tatt inn arbeidet med bevis i sine læreplaner og i sine anbefalinger for undervisning i matematikk (Valenta & Enge, 2020). Et eksempel er USA hvor National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) understreker at resonnering og bevis skal være en integrert del av all matematikkundervisning:

Reasoning and proof are not special activities reserved for special times or special topics in the curriculum but should be a natural, ongoing part of classroom discussions, no matter what topic is being studied. (NCTM, 2000, s. 342)

Trenden med å løfte frem resonnering og bevis kan også spores i den nye norske læreplanen (LK20), som ble gjeldende fra august 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2019). I LK20 er resonnering og argumentasjon løftet frem til å være et av seks kjerneelementer i matematikkfaget. Kjerneelementer definerer aspekter ved faget som bør gå igjen i arbeid med ulike matematiske temaer, og som elevene må lære for å kunne mestre faget (Valenta & Enge, 2020). I kjerneelementet resonnering og argumentasjon beskrives argumentasjon til å handle om at elever «grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Videre understreker det nevnte kjerneelement at «… elever skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser». Det at resonnering og bevis løftes opp i et kjerneelement gjør at arbeidet med resonnering og bevis i praksis skal integreres i all matematikkundervisning på alle skoletrinn. Innføringen, som gjelder fra første skoleår, er i tråd med matematikkdidaktisk forskning rettet mot barnetrinnet. Flere studier viser at elever på lavere skoletrinn, og også i barnehagen, kan resonnere omkring matematiske sammenhenger, og kan argumentere for sine resonneringer når de oppfordres og støttes i slikt arbeid (Ball & Bass, 2003; Cooper & Warren, 2011).

Til tross for studiene som nevnes over mener A. Stylianides (2007b) at resonnering og bevis har hatt størst utfordring med å finne sin plass og form på barnetrinnet. Reid & Knipping (2010, s. 220) hevder at dette kan ha sammenheng med et utbredt rigid og formelt syn på resonnering og bevis, hvor bevisets viktige semiformelle natur har blitt ignorert. Reid & Knipping (2010, s. 220) mener at det preformelle og semiformelle arbeidet med resonnering og bevis er viktige byggesteiner i det å sette elever i stand til å formulere matematiske bevis. Etter hvert som elever danner matematiske strukturer innen resonnering og bevis, vil også bevisene bli mer formelle. Dette støttes av G. Stylianides (2008) som også hevder at bevis i skolen ofte kun handler om å lære formelle bevis, og at dette er problematisk da elever ikke danner gode nok strukturer til å kunne formulere bevis.

Alseth (Alseth et. al, 2017) hevder at den store utfordringen i arbeidet med bevis ligger i å vurdere når eller om en argumentasjon og et resonnement er holdbart. Tendensen er at både lærer og elever tar med seg måten de argumenterer og resonnerer på i dagliglivet, inn i matematikkundervisningen (Harel & Sowder, 2007; Stylianou et. al, 2009). Enkelte eksempler er grunnlag nok til å generalisere og trekke konklusjoner (Martin & Harel, 1989; Cramer, 2011). Reid & Knipping (2010, s.57) redegjør for hva som er den allmenne forståelsen i forskningsfeltet om posisjonen som bevis har i undervisningen. Mange studenter godtar hverken deduktive bevis som bekreftelse, eller moteksempler som motbeviser en påstand. Elevene tilbyr empiriske argumenter for å bekrefte påstander og de færreste er i stand til å formulere korrekte bevis. Forskningsfeltet er enige om å betrakte bevis som essensielt i matematikk, men feltet er ikke nødvendigvis like samstemte om hva som kan karakteriseres som et matematisk gyldig bevis på barnetrinnet. Det tradisjonelle synet på matematisk bevis, som både Reid & Knipping og G. Stylianides poengterer, har lenge vært preget av et ensidig og formelt syn på matematiske bevis, hvor bevisets funksjon nesten utelukkende har vært koblet til det å verifisere en matematisk påstand (De Villiers, 1990).

I den senere tid har bevis blitt sterkere koblet til begrepene resonnering og argumentasjon. Både det å argumentere og det å bevise handler om å validere om en matematisk påstand er sann eller usann. I motsetning til bevis, behøver ikke en argumentasjon å være matematisk gyldig. En argumentasjon kan teste en påstand med ulike eksempler og gjennom de ulike eksemplene bli mer overbevist om at påstanden er sann eller ikke. Det å bevise en påstand innebærer en større grad av deduktiv struktur og stringens enn hva en argumentasjon trenger å inneha (Valenta & Enge, 2020).

G. Stylianides (2005, 2008, 2009) beskriver resonnering og bevis som en dynamisk prosess bestående av ulike aktiviteter. Aktivitetene han omtaler er å identifisere mønster, formulere hypoteser og å formulere bevis. Aktivitetene fremmer matematisk resonnering og argumentasjon i arbeidet mot å kunne formulere et bevis. I kapittel 2.2.1 vil aktivitetene bli nærmere redegjort for. NCTM (2008) omtaler relasjonen mellom begrepene resonnering, argumentasjon og bevis som en resonnering- og bevis-syklus. En resonnering- og bevis-syklus består av (1) en undersøkelse av en faglig situasjon (utforskning), (2) en formulering av antagelser eller hypoteser om generelle sammenhenger (hypoteser) og (3) en begrunnelse eller argumentasjon for at antagelsen er riktig eller feil (argumentasjon). Skott et. al. (2018) problematiserer relasjonene mellom begrepene i resonnering- og bevis-syklusen, ved å bemerke at bevis i denne sammenheng kan tolkes til å høre hjemme i resonneringsdelen av syklusen. Da bevis ligger inkludert i ideen om resonnering, kan det argumenteres for at det er nødvendig å snakke om resonnering og bevis. Likevel påpeker Skott et. al. (2018, s. 282) at en vesentlig del av forskningslitteraturen understreker at bevis ikke skal skilles fra resonnering eller argumentasjon. Yackel & Hanna (2003) løfter frem en annen utfordring når det gjelder bruken av begrepene resonnering, argumentasjon og bevis. Begrepene bli ofte brukt med en implisitt antakelse om at alle vet hva som ligger i de ulike begrepene. Ved for eksempel innføring av nye læreplaner kan implisitte begrepsforståelser skape uklarheter når innholdet i læreplanene skal tolkes og videreformidles inn i klasserommene.

Det matematiske forskningsfeltet har satt søkelyset på resonnering og bevis i skolen de siste tiårene. Dog har søkelyset i liten grad vært rettet mot innholdet i lærebøker i matematikk. Til tross for lærebokas sterke posisjon i undervisningen, finnes det lite forskning innenfor lærebokfeltet i Norge (Kongelf, 2019, s.13). Lærebokens sentrale rolle i matematikk er både et nasjonalt (Schmidt, McKnight, Valverde, Houang og Wiley, 2001) og verdensomspennende fenomen (Li, Chen & An, 2009), men den er særlig fremtredende i Norge (Gilje et. al., 2016; Alseth, Breiteig og Brekke, 2003; Utdanningsdirektoratet, 2005). Lærebokens sentrale rolle i matematikkundervisning er både et internasjonalt (ref) og nasjonalt fenomen (ref). Dette til tross for opphevingen av godkjenningsordningen for læremidler i Norge, som frem til år 2000 skulle sikre at lærebøkene blant annet var i tråd med læreplanens mål. En viktig årsak til opphevingen var at lærere skulle fokusere mer på innholdet i læreplanene, og ikke la seg styre blindt av læreverkene. Under realfagsstrategien for 2015-2019 (kunnskapsdepartementet, 2015), utviklet Utdanningsdirektoratet et sett med kvalitetskriterier for læremidler i matematikk for å fokusere i større grad på kvaliteten i læremidler i matematikk.

Forskning viser at elever i grunnskolebruker mye av tiden i klasserommet til å arbeide i lærebøker, med oppgaveark og med informasjons- og kommunikasjonsteknologi (A. J. Stylianides & Harel, 2018). Gilje et. al. (2016, s. 68) beskriver matematikkundervisningen i Norge slik: «Det er rimelig å anta at vanlig praksis er at læreren først forklarer på tavla i plenum, før elevene går over til å bruke lærebok, oppgavehefte og kladdebok når de skal jobbe med oppgaver». Forskning viser også at norske elever arbeider mye alene med oppgaver i lærebøkene og de har få muligheter til å forklare eller begrunne svarene sine (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turnmo, 2004; Danielsen, Skaar & Skaalevik, 2007; Grønmo & Onstad, 2009). Det er rimelig å anslå at dette har sammenheng med at lærere i stor grad bruker lærebøker som støtte i deres daglige undervisning, og lærebøkene definerer i stor grad hva det skal undervises om og hvilke oppgaver elevene skal jobbe med (Valvedre et. al., 2002; Askew, Hodgen, Hossain & Bretscher, 2010; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Pepin & Haggerty, 2001; Schmidt et.al., 2001). Den nasjonale forskningen på ulike praksiser i klasserommet de siste 15 årene viser at matematikk fortsatt er et fag preget av helklasseundervisning (gjennomgang av fagstoff) og individuelt arbeid (Gilje et. al., 2016).

I kjølvannet av den nye læreplanen (LK20) kommer nå lærebokforlagene ut med nye lærebøker. Lærebøkene er det viktigste bindeleddet mellom læreplanens grunnleggende ferdigheter, kjerneelementer og kompetansemål (LK20), og de pedagogiske praksisene i undervisningen (Pepin, Gueudet & Trouche, 2013). Enkelte mener at lærebøkene på mange måter har erstattet læreplanen og fungerer som den implementerte læreplanen (Jablonka & Johansson, 2010; Goodlad et. al., 1979; Schmidt et. al., 2001). Det finnes også studier som viser at lærere følger progresjonen og innholdet i læreboken i den tro at det vil sikre dem i å følge læreplanen, nå alle kompetansemålene og gi en effektiv og gjennomtenkt undervisning (Thomson & Fleming, 2004; Vincent & Stacey, 2008). Dette understreker hvor viktig innholdet i lærebøkene er for elevenes utbytte i matematikkundervisningen. Det betyr at hva som presenteres, hvordan det presenteres og hvor mye som presenteres i lærebøkene kan antas å påvirke lærerens undervisning og elevens læring. I Norge har lærebøkene i lang tid hatt en betydelig posisjon i matematikkundervisningen, kanskje sterkere enn i noen andre land (Rezat, 2011; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang og Wiley, 1996; Grevholm, 2017). Lærebøkenes posisjon står sterkt både som til faglig kompetanse hos lærerne, og som tilbyder av arbeidsoppgaver til elevene. Det rapporteres også at norske elever jobber mye med individuelle oppgaver i lærebøkene (Grønmo, Bergrem, Kjærnsli, Lie & Turnmo, 2004). Dette står i kontrast til forskningsfeltet som over lengre tid har beskrevet matematikkfaget som et muntlig fag, hvor elevers resonnerings- og argumentasjonsevner skal utvikles i et sosialt samspill i klasserommet (Carpenter, Fennema, & Franke, 2014). Det er grunn til å tro at lærebøkene i matematikk som baserer seg på LK20, kan ha stor innflytelse på hvordan arbeidet med resonnering og bevis blir behandlet i klasserommet. LK20 løfter frem resonnering og bevis, uten at læreplanen eksplisitt definerer begrepene resonnering, argumentasjon og bevis (Valenta & Enge, 2020).

Som ansatt ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen og med over 20 år som matematikklærer på samtlige trinn i grunnskolen, har jeg erfart utfordringene elever og lærere har i arbeidet med bevis i skolen. Dette gjelder både hos meg selv og hos lærerspesialiser i begynneropplæring som jeg underviser. I samtaler med lærerspesialistene og tidligere lærerkollegaer opprettholdes forskningens konstatering av lærebøkenes sterke posisjon i matematikkundervisningen. Formålet med denne studien er å studere hvilke muligheter de nye lærebøkene i matematikk gir for å arbeide med resonnering og bevis. Dette er nyttig kunnskap med tanke lærebøkenes potensielle påvirkning og behandling av matematikkens kjerne i undervisningen. Innsikt om mulighetene som ligger i lærebøkene kan ha betydning for i hvilken grad lærere kan lykkes med implementeringen av kjerneelementet resonnering og argumentasjon i sin undervisning. Forskningsspørsmålet jeg stiller i denne studien er: *Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn*?

For å svare på forskningsspørsmålet har jeg gjennomført en analyse av alle brøkoppgaver i fire lærebøker på 5. trinn. Lærebøkene kommer fra de største lærebokforlagene i Norge. I denne studien knytter jeg begrepet lærebok til de lærebøkene som forlagene kaller grunnbok eller elevbok. Det refereres ikke til tilleggsmaterialer, som for eksempel oppgavebøker, når det refereres til ordet lærebok. Jeg har avgrenset analysen til å gjelde oppgaver innen emnet brøk, som er det mest sentrale emnet på dette trinnet. Brøk har blitt tildelt seks av de ti kompetansemålene som er på femte trinn i LK20. Jeg har identifisert hvilke oppgaver som kan sies å gi muligheter for resonnering og bevis. Videre har jeg gjennomført en nærmere kvalitativ analyse av resonnering og bevisoppgavenes karakteristikker.

Studiens rammeverk bygger på studiene til A. Stylianides (2007b, 2016) og G. Stylianides (2005, 2008 og 2009). Rammeverket er utviklet for å analysere matematikkoppgaver i lærebøker og å kunne dokumentere hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis lærebøkene tilbyr. Ved å kombinere deler av G. Stylianides' (2009) analytiske rammeverket for analyse av muligheter for resonnering og bevis i oppgaver i lærebøker, med deler av A. Stylianides' (2016) rammeverket om bevisaktiviteter og bevisoppgaver, får studiens rammeverk et teoretisk grunnlag som er tilpasset den norske lærebokkonteksten. Rammeverkene til A. Stylianides (2016) og G. Stylianides (2008, 2009) bygger begge på A. Stylianides sin definisjon på bevis i skolen (2007b).

Jeg vil i kapittel 2 redegjøre for begreper som er relatert til resonnering og bevis. Deretter vil jeg gjøre rede for rammeverkene til G. Stylianides (2009) og A. Stylianides (2016), og for definisjonen av bevis i skolen (Stylianides, 2007b). Kapittelet vil også trekke frem forskning på resonnering og bevis i skolen og på lærebøker i matematikk, som er relevante for studien.

Kapittel 3 beskriver metode for datainnsamling og analyse som er med å danne grunnlaget for studien. I kapittel 4 vil jeg presentere min analyse av brøkoppgavene fra lærebøkene. I kapittel 5 vil jeg drøfte studiens funn opp mot relevant forskning og teori. Studien avsluttes med en diskusjon i kapittel 5, hvor studiens funn drøftes opp mot relevant forskning og teori, før en avsluttende oppsummering i kapittel 6 beskriver mulige implikasjoner for forskning og undervisning.

2 Teori

I denne studien undersøker jeg hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis som finnes blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn. Sentrale begreper i studien vil være resonnering, argumentasjon og bevis. Jeg vil i dette kapittelet redegjøre for disse begrepene og knytte de til forskningsfeltet og til arbeid med matematikk i lærebøker for grunnskolen. Deretter vil jeg presentere rammeverkene til G. Stylianides (2009) og A. Stylianides (2016), som danner grunnlaget for denne studiens rammeverk. Til slutt presenterer jeg relevant forskning på lærebøker for å danne et bakteppe til den videre diskusjonen rundt resonnering og bevis.

2.1 Resonnering og bevis i skolematematikken

Som diskutert innledningsvis er det blant forskere i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet ulike oppfatninger av hva resonnering og bevis er. Bevis i matematikk kommer til uttrykk på ulike måter i skolematematikken. Reid og Knipping (2010, s. 33) identifiserer åtte ulike måter: Bevis som *begrep* (engelsk: proof as a concept) er å kjenne til hvilket begrep ordet bevis refererer til. Matematikkdidaktiske forskere har en rekke ulike perspektiver på ordet bevis og det kan være utfordrende å vite hvilke perspektiver det refereres til. *Bevistekster* (engelsk: proof-text) referer til det å presentere matematiske argumenter i skriftlige former. *Overbevisende argumenter* (engelsk: convincing arguments) handler som det dagligdagse og sosiale aspektet om å overbevise andre. Manin (1977, s. 48) uttrykker det slik: «A proof becomes a proof after the social act of" accepting it as a proof"». *Deduktiv resonnering* (engelsk: deductive reasoning) referer til det å trekke en slutning ut fra noe allment til et enkelttilfelle (Hana, 2013, s. 85). *Personlig bekreftelse* (engelsk: personal verification) henviser til den mentale prosessen med å fjerne tvil, eller vekke tvil for å kunne bekrefte noe for seg selv eller for å overbevise andre (Harel, 2007, s. 65). Når beviset gir individet en forståelse for hvorfor en påstand er sann eller usann handler det om en *personlig forståelse* (engelsk: personal understanding). En *sosial diskurs for å verifisere* (engelsk: a social discourse to verify) er en kollektiv bevisprosess hvor for eksempel elever og lærer sammen fremmer begrunnelser for sannheten til en påstand (Knipping, 2004, s. 73). I en *deduktiv sosial diskurs* (engelsk: a deductive social discourse) vil det kollektive, for eksempel blant matematikere, forvente en deduktiv basis i kollektivets argumenter. Å kjenne til de ulike måtene hevder Reid og Knipping (2010, s.33) er et viktig steg for forskning på matematikkundervisning. Flere forskere påpeker også ulike sider ved bevis. Bevis kan tjene ulike formål i matematikkundervisningen

(Stylianides, 2014; Yackel & Hanna, 2003). Et viktig formål er å bevise eller motbevise at en matematisk påstand er sann eller usann. Yackel og Hanna (2003) hevder at elever vanligvis kun møter bevis som en måte å vise at påstander er sanne, men at bevis har mest å tjene som formål i matematikkundervisningen ved å forklare og kommunisere. Et bevis må altså ikke bare vise at noe er sant, men også kunne forklare *hvorfor* en påstand er sann eller usann. Slik kan bevis gi elever en dypere innsikt i det som bevises. Det kan i tillegg legge til rette for at elever oppdager matematiske sammenhenger og utvikler ny kunnskap (Reid & Vargas, 2017; Yackel & Hanna, 2003; Ball & Bass, 2003; Hanna & Jahnke, 1996), noe som kan fremme matematikk som en meningsskapende aktivitet (Stylianides, 2014).

Bevis er altså et mangfoldig begrep, hvor det er viktig å kjenne til begrepets ulike sider for å kunne utvikle en dypere forståelse av bevis i matematikken. Det tar tid å utvikle en grundig forståelse av bevis, og forskning er tydelig på at arbeidet skal starte allerede på barnetrinnet (Stylianides, 2007b, 2016)). Utfordringen kan være å finne ut hvordan elever på barnetrinnet kan jobbe med resonnering og bevis. Flere forskere knytter bevis i skolen til det å overbevise noen. Noen kan i denne sammenhengen være en selv. Harel & Sowder (1998, s. 237) beskriver bevis først og fremst som overbevisende argumenter. Skal matematikk oppleves som meningsfullt er det ikke nok å være sikker på at et bevis er matematisk gyldig (Harel & Sowder 2007, s. 800-809), man skal også være i stand til å overbevise andre gjennom forklaring og begrunnelse av egne konkluderinger, eller gjennom å motbevise andre elevers konklusjoner. Flere forskere refererer til begrepet "bevis" som et overbevisende argument. Ifølge Mason, Burton og Stacey (1985) er et bevis et argument som overbeviser en fiende, for Davis og Herch (1981) er det et argument som overbeviser en matematiker som kjenner faget godt, og for Volmink (1990) er det et argument som overbeviser en rimelig skeptiker. I alle tilfeller er det ikke selve argumentet som gjør det til et bevis, men snarere det at elever overbeviser andre elever. Det å overbevise noen peker også i retning av en sosial handling av å akseptere en argumentasjon som et bevis (Manin, 1977, s. 49; Stylianides, 2008, 2009). Dette samsvarer med den sosiale diskursen som Knipping (2004, s.73) beskriver hvor klasserommet kan være den sosiale diskursen hvor den sosiale handlingen av å akseptere en argumentasjon som bevis kan forekomme.

Argumentasjon er, som vist over, tett knyttet til bevis. I matematikken er det likevel nyttig å kjenne til likhetene og ulikhetene mellom begrepene. Både det å argumentere og det å bevise handler om å validere en matematisk påstand, finne ut om den er sann eller ikke. Men i motsetningen til et bevis, som skal være matematisk gyldig, trenger ikke en argumentasjon å være gyldig. Bevis kan dermed sies å være matematiske argumenter med visse egenskaper (Stylianides, 2007b; Douek, 1999, s. 129). Det å bevise innebærer større grad av deduktiv struktur og stringens enn det å argumentere. Valenta og Enge (2020, s. 3) beskriver relasjonen med at et bevis kan være en argumentasjon som oppfyller noen ekstra krav. Det at argumentasjonen hverken behøver å være deduktiv eller matematisk gyldig gjør at den i skolesammenheng kan spille en viktig rolle i elevers utvikling av beviskompetanse (Hanna & Barbeau, 2010; Hemmi et.al., 2013). Argumentasjon innehar den viktige funksjonen ved å søke etter en forklaring og en forståelse.

2.1.1 Resonnering-og-bevis

I sin forskning på resonnering og bevis knytter G. Stylianides (2008) begrepene resonnering og bevis enda tettere sammen. Det å utvikle bevis handler om ulike aktiviteter som elever må få hjelp til å utvikle ferdigheter i og forstå sammenhengen mellom. Aktivitetene som G. Stylianides (2008) nevner er identifisering av mønster, formulere hypoteser, formulere ikke-gyldige bevis og formulere bevis. Disse aktivitetene er ofte med i prosessen når matematikere jobber med å etablere matematisk kunnskap, og skal være det når elever jobber med det samme. G. Stylianides mener derfor at resonnering og bevis må sees på som en integrert helhet og markerer dette med å benytte bindestreker mellom begrepene. Når G. Stylianides ser på resonnering-og-bevis som en helhetlig prosess markerer han et steg bort fra den tradisjonelle formelle prosessen (Stylianides, 2008, s.9) som arbeidet med bevis i skolen har vært preget av, til også å legge til rette for uformelle tilnærminger i arbeidet med resonnering og bevis. Steget åpner muligheter for å arbeide med bevis også på barnetrinnet. Når jeg omtaler tema for studien som resonnering og bevis er det en slik helhetlig forståelse av den integrerte prosessen som G. Stylianides (2008) argumenterer for. Altså, prosessen som inkluderer både utforsking fram mot det å formulere hypoteser, vurdere hypotesens sannhetsverdi og formulering av bevis. I studien vil jeg omtale prosessen med forkortelsen RB (resonnering-og-bevis). Prosessen med resonnering-og-bevis og aktivitetene som prosessen inneholder vil jeg utdype i avsnittet 2.2.1.

Innledningsvis ble det nevnt at den nye læreplanen nettopp har tredd i kraft her til lands. I denne læreplanen presenteres kjerneelementer, blant disse er det ene kjerneelementet *Resonnering og argumentasjon*. I beskrivelsen av argumentasjon i kjerneelementet nevnes de tre begrepene resonnering, argumentering og bevis. «Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner sine fremgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Dette kjerneelementet kan betraktes som både et produkt av og en prosess i matematikk-undervisningen. Som et produkt skal elevene lære seg de spesifikke egenskapene som matematisk resonnering og argumentasjon innehar. Matematikkundervisningen skal sette elevene i stand til å skille mellom ulike typer matematiske argumenter og hva slags typer argumentasjoner som ansees som matematisk gyldige bevis. Forstår elevene egenskapene til ulike typer resonnering og argumentasjon vil de erverve kompetanse i å følge og å være kritisk til både læreres og medelevers argumentasjon, og de lærer å utvikle egne argumenter (Skott et.al., 2018). Resonnering og argumentasjon kan også sees på som en prosess, lik resonnering-og-bevis (Stylianides, 2008), for å lære og forstå det matematiske innholdet i faget. Da må resonnering og argumentasjon i undervisningen være prosesser som handler om å forklare og skape forståelse, og ikke være noe som bare skal overbevise noen om at en matematisk påstand er sann eller usann. Argumentasjonen skal også gi elevene en dypere forståelse om hvorfor den matematiske påstanden er sann eller usann.

2.1.2 Bevis i skolen

Hva kan så regnes som bevis i skolen, og ikke minst hvordan kan et bevis se ut på barnetrinnet? På starten av 2000-tallet oppsummerte Mariotti (2006) sine funn av hva forskningsfeltet samlet hadde kommet fram til, med tanke på matematiske bevis i skolen. Forskningsfeltet ytret et behov for at et matematisk bevis i skolen måtte være akseptabelt fra et matematisk synspunkt, men også gi mening for elever på lavere trinn. A. Stylianides (2007b) følger opp denne observasjonen og hevder at bevis ikke kun er en deduktiv kjede av argumenter, men at de også har sosiale aspekter ved å skulle overbevise medelever. Ifølge Stylianides, Stylianides og Weber (2017) prøver matematikere sine bevis på fagfeller slik at de kan forklare, argumentere og utbedre sine begrunnelser av matematiske påstander, og det er fagfellene som avgjør om argumentet holder som bevis. Matematisk aktivitet foregår altså i en sosial sammenheng, og hva som kjennetegner et bevis er tett koblet til den sosiale konteksten. Et av kravene som Mariotti (2006) fremmet for bevis i skolen, om at beviset både skal være akseptabelt fra et matematisk synspunkt samtidig som det skal gi mening for elevene, ble dekket av Stylianides sin definisjon av bevis i skolen. A. Stylianides (2007b, s. 291-292, min oversetting) definerer bevis som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av utsagn for eller imot en matematisk påstand, hvor følgende krav er oppfylte:

1. Den bruker utsagn som er aksepterte og kjente i en gitt elevgruppe (sett med aksepterte sannheter).
2. Den benytter former for resonnering og argumentasjon som er gyldige og kjente, eller innen begrepsmessig rekkevidde, for en gitt elevgruppe.
3. Den er uttrykt ved bruk av representasjoner som er hensiktsmessige og kjente, eller innen begrepsmessig rekkevidde, for en gitt elevgruppe.

Sett med aksepterte sannheter er definisjoner, aksiomer, matematiske resultater som er bevist tidligere, etablerte prosedyrer og regler. Gyldige former for resonnering og argumentasjon kan innebære bruk av logiske slutninger, korrekt bruk av definisjoner eller en konstruksjon av et moteksempel for å vise at den gitte påstanden er usann. Representasjonsformen for argumentet kan være bruk av vanlig språk, illustrasjoner, tabeller og symboler (for eksempel algebraisk). A. Stylianides (2007b) har utformet en definisjon som tar hensyn til matematikken både som disiplinfag og som skolefag. Hans definisjon åpner for både mer uformelle og formelle tilnærmingsmåter til bevis. Definisjonen åpner for å uttrykke beviset på andre måter enn formelle matematiske bevis (Valenta & Enge, 2020, s. 5), og at det bygger på definisjoner og resultater som er kjente for elevgruppen hvor beviset blir utviklet. Det er en forutsetning at resonnementet er deduktivt og dermed matematisk gyldig. Definisjonen sier med andre ord at dersom et deduktivt bevis bruker argumentasjonsmåter eller representasjonsformer som hverken er kjente for en gitt elevgruppe eller innen rekkevidde for elevene, vil det ikke kunne betegnes som et bevis i skolen. I tillegg sier definisjonen at et resonnement som bygger på aksepterte sannheter for en gitt elevgruppe, men ikke er deduktivt, ikke kan regnes som bevis i skolen.

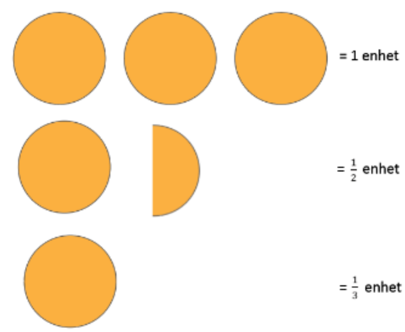
Definisjonen er dermed tilstrekkelig «elastisk» og innehar egenskaper som gjør at den passer på tvers av ulike utdanningsnivåer, noe som passer inn i den positive trenden med å gjøre bevis til en mer betydelig del av læreplaner i matematikk for grunnskolen (Stylianides et.al., 2016).

Stylianides sin definisjon innlemmer flere perspektiver på bevis som er diskutert i litteraturen, som for eksempel synet på bevis som en logisk deduktiv kjede av resonnement (Healy & Hoyles, 2001; Knuth, 2002; Mariotti, 2000). Definisjonen fremhever også de kognitive og sosiale aspektene av bevis. Definisjonen tar høyde for at bevis kan sees på som et argument som enten bekrefter eller avkrefter sannheten i en matematisk påstand (Harel & Sowder, 2007), og ses på som et argument akseptert av et fellesskap på en gitt tid (Balacheff, 1988).

Definisjonen utfordrer derfor lærere og lærebokforfattere til å etablere rike sett av aksepterte forklaringer, resonnement- og argumentasjonsmåter og et mangfoldig men hensiktsmessig utvalg av representasjonsmåter, slik at elever i undervisningen opplever støtte i arbeidet med å formulere bevis.

2.1.3 Resonnering og bevis i brøk på 5.trinn

Brøk er et komplekst matematisk begrep og forskning viser at elever har vanskeligheter med å lære seg brøk på bakgrunn av dette (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Lamon (2020) betegner overgangen fra arbeid med heltall til arbeid med brøk som et kvalitativt sprang i matematikken hos elever. De går fra å arbeide med heltall og deres egenskaper, sammenhenger og store ideer, til å arbeide med en helt ny type tall med en annen symbolikk og andre egenskaper og andre store ideer (Lamon, 2020). Et av de kvalitative hoppene elevene må gjennom er behandlingen av hva som er *enheten* (unitizing). I en brøk kan enheten være flere enn ett objekt (figur 1), eller det kan være en sammensatt enhet. Den nye enheten kan være delt opp i like deler, og et nytt tall kan bli brukt til å betegne deler av denne enheten.



Figur 1: Del av hel

Den nye læreplanen har lagt seks kompetansemål om brøk til femte trinn. Det fører til at brøk tilegnes et større undervisningsfokus dette skoleåret. Inntoget av kjerneelementene leder frem til at resonnering og bevis skal være et bærende matematikkdidaktisk grep for innlæring av blant annet brøk. Hvordan kan så resonnering og bevis i brøk på femte trinn ta form? Et illustrerende eksempel gis ved å knytte kompetansemålet *representere brøkar på ulike måtar og omsetje mellom dei ulike representasjonane (*Utdanningsdirektoratet, 2019) til A. Stylianides` definisjon av bevis i skolen (2007b, s. 291-292) for å svare på følgende brøkoppgave:

Argumenter for at $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$

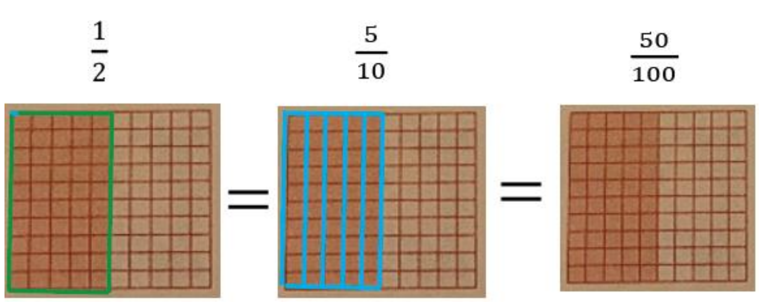
Eksempel 1: Resonnering og bevis i brøk, hentet fra Matematikk 5A Grunnbok, s. 139

Stylianides` (2007b) definerer bevis, se avsnitt 2.1.2, som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av utsagn for eller imot en matematisk påstand. Definisjonen skal fylle kravene om bruk av aksepterte utsagn, bruk av kjente og gyldige argumentasjonsformer og at beviset uttrykkes av kjente og gyldige representasjonsformer. Kravene tilpasses elevgruppen, som i eksempelet er femtetrinns elever.

Innenfor de aksepterte utsagnene til elever på femtetrinn er det rimelig å anta at forståelse av likeverdige brøker og forståelse for hvordan ulike brøker kan sammenliknes være etablerte i en elevgruppe.

Former for gyldige argumenter på femte trinn kan antas å være å argumentere for at brøken $\frac{1}{2}$ tilsvarer halvparten av noe, for eksempel et kvadrat. Hvis kvadratet deles i to like deler, så tilsvarer brøken $\frac{1}{2}$ en av delene. Dersom det samme kvadratet deles i ti like store deler, vil dette tilsvare brøken $\frac{5}{10}$. Halvparten av kvadratet vil nå være fem av de ti delene. Deles kvadratet i hundre like store deler, vil dette tilsvare brøken $\frac{50}{100}$. Halvparten av kvadratet vil nå være femti av de hundre delene. De tre halvpartene er like store, de er bare delt opp ulikt.

På femte trinn er det rimelig å anta at elevene er kjente med å bruke arealmodellen eller rutenettmodellen som en form for representasjon. Argumentasjonen som oppgaven utfordrer elevene med, kan uttrykkes ved å bruke arealmodellen (figur 2), som både er kjent og en hensiktsmessig form representasjon blant femtetrinns elever.



Figur 2: Representasjon av bevis

Argumentasjonen tilfredsstiller både kravene til bevis i skolen (Stylianides, 2007b), og til det nevnte kompetansemålet. Eksempelet viser at det er gode muligheter for å jobbe med resonnering og bevis i undervisningen av brøk på femte trinn.

2.2 Rammeverk for analyse av muligheter for resonnering og bevis

Det er flere rammeverk som er utviklet for å analysere elevers oppfatninger av bevis (f.eks. Balacheff, 1988), arbeid med bevis i skolen (f.eks. Ball & Bass, 2003) eller måten bevis behandles på i lærebøker (f.eks. G. Stylianides, 2009) som er aktuelle for denne studien. I denne studien danner rammeverkene til G. Stylianides (2009) og A. Stylianides (2016) bakgrunn for studiens analytiske rammeverk. Begge rammeverkene (Stylianides, 2009; Stylianides, 2016) bygger på definisjonen til A. Stylianides (2007b) for bevis i skolen. Jeg vil videre redegjøre for de to ulike rammeverkene som nettopp er nevnt, før jeg beskriver rammeverket for denne studien.

2.2.1 Et analytisk rammeverk for resonnering-og-bevis i matematiske lærebøker

G. Stylianides' forskning rettet seg, i likhet med A. Stylianides, mot resonnering og bevis i skolen. G. Stylianides har blant annet studert hvilke muligheter for resonnering og bevis som finnes i utvalgte amerikanske lærebøker brukt i skolen. Jeg vil gjøre rede for det analytiske rammeverket anvendt i Stylianides' (2009) studie, da det danner deler av denne studiens rammeverk. Jeg vil vektlegge de komponenter av rammeverket som er mest hensiktsmessig for denne studien, som er dimensjon 1 og 2 til aktivitetene *formulere hypoteser* og *formulering av bevis* (tabell 1). Selv om aktiviteten med å identifisere mønster er viktige byggesteiner i RB-prosessen resonnering-og-bevis, velger jeg å rette søkelyset på arbeidet med formuleringer av hypoteser og bevis. Valget begrunnes med at det er i stor grad denne delen av resonnering og bevis som omtales i forskningen, og er trolig aktivitetene som byr på den største utfordringen på barnetrinnet. Riktig nok omtaler en betydelig del av forskningen også området som omhandler formulering av ikke-gyldige bevis (f.eks. Knuth et al., 2009; Stylianides, 2005, 2008, 2009; Stylianides 2007b, 2016; Reid & Knipping, 2010). Da denne studien konsentrerer seg om oppgaver i lærebøker, vil det ikke være grunnlag til å kunne vurdere om oppgaver kan knyttes til å formulere ikke-gyldige bevis.

Analytisk rammeverk

	Resonnering-og-bevis			
	Formulere en matematisk generalisering		Gi støtte til matematiske påstander	
	Identifisering av mønster	Formulere hypoteser	Formulering av bevis	Formulere ikke-gyldige bevis
<u>Dimensjon1</u> Komponenter og underkomponenter av resonnering-og-bevis	Plausible mønster Bestemte mønster	Hypotese	Generisk eksempel Demonstrasjon	Empiriske argumenter Redegjørelser
<u>Dimensjon</u> 2 Formål med mønster, hypoteser og bevis	Forløper til hypotese Ikke forløper til hypotese	Forløper til bevis	Forklare Verifisere Motbevise Generere ny kunnskap	

Tabell 1: Analytisk rammeverk (Stylianides, 2009, s. 262, min oversetting)

Jeg vil videre beskrive de fire hovedkomponentene i RB (Tabell 1), slik de defineres i dette rammeverket (Stylianides, 2009).

G. Stylianides (2009) definerer identifisering av mønster, som å identifisere en generell matematisk relasjon som passer et gitt sett av data. Dette kan være billedlige mønstre og algebraiske mønstre, men definisjonen rommer også utsagn som beskriver samvariasjon mellom matematiske strukturer, egenskaper eller variabler. Her skiller Stylianides mellom to typer mønster, plausible og bestemte (engelsk: definite). I et bestemt mønster er vil det være matematisk mulig for en ekspert å formulere et gyldig bevis. I et plausibelt mønster er det derimot ikke matematisk mulig å formulere et bevis på bakgrunn av det gitte datasettet.

x	1	2	3	4
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$		

Eksempel 2: Eksempel på plausibelt mønster

Eksempel 2 viser et eksempel på et plausibelt mønster. Mønsteret i eksempelet viser et gitt sett med data hvor det ikke er mulig å formulere et gyldig matematisk bevis som entydig avgjør hvordan mønsteret fortsetter. Grunnen til dette er at det plausible mønsteret svarer både til uttrykket y = $\frac{1}{2}$ x, og uttrykket y = $(\frac{1}{2})^x$hvor x er naturlige tall, men y er brøker med 2 i nevneren. Dette gir en mønsterutvikling for y-verdien som både kan være $\frac{3}{2}$ og $\frac{4}{2}$, og være $\frac{4}{2}$ og $\frac{8}{2}$. Mønsterutviklingen i figur 2 viser ikke eksplisitt hva y er uttrykt som y = $(\frac{1}{2})^x$. I motsetning til plausible mønstre gir bestemte mønstre muligheter til å bevise en entydig mønsterutvikling. Eksempel 3 viser stambrøker som er sortert fra størst til minst, hvor tallet i nevneren dobles i mønsterutviklingen.

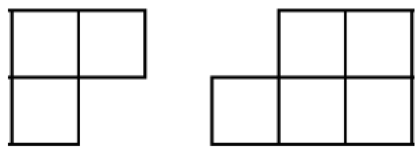
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \quad , \quad .$$

Eksempel 3: Eksempel på et bestemt mønster

Dette mønsteret er entydig, og de to neste stambrøkene i rekkefølgen må være $\frac{1}{32}$ og $\frac{1}{64}$. Selv om det kun er bestemte mønster som kan lede elevene frem mot å formulere et bevis, kan både bestemte- og plausible mønster gi elever gode diskusjoner og erfaringer når det gjelder begrunnelser for bevis.

Stylianides (2009) definerer hypoteser (engelsk: conjectures) som en begrunnet hypotese om en generell matematisk sammenheng basert på en ufullstendig bevisføring. I overgangen mellom det å jobbe med identifisering av mønster og det å jobbe med hypoteser skjer det en endring i resonneringen hos elevene. I arbeidet med identifisering av mønster resonnerer elevene med sikkerhet. Når mønsterutviklingen er identifisert, er elevene sikker i sine oppdagelser, uten at de har bevis for sine observasjoner. Når elevene jobber med å formulere hypoteser går elevene fra å resonnere med sikkerhet til å begynne å resonnere med en usikkerhet (Stylianides, 2009; Reid & Knipping, 2010). Det å jobbe med hypotesesetting vil for elever medføre en viss form for usikkerhet knyttet til sannheten i hypotesen (Harel og Sowder, 2007). Hos elevene kan det oppstå et behov for en videre utforsking, for å kunne avgjøre om hypotesen stemmer eller ikke (Reid, 2002).

Videre skiller rammeverket mellom to typer gyldige matematiske bevis: generiske eksempler og demonstrasjoner. Et generisk eksempel er et konkret eksempel, som er presentert slik at det fungerer som bærer av noe generelt (Mason & Pimm, 1984, s. 287). Selv om det er et eksempel som viser ett bestemt tilfelle, så har det generiske eksemplet ingen spesielle egenskaper som er spesielle for dette tilfellet. Det argumentet som benyttes for at påstanden er sann for dette eksemplet, kan derfor generaliseres til ethvert eksempel.



Eksempel 4: Generisk eksempel for summen av to oddetall, representert ved 3+5

Eksempel 4 eksemplifiserer dette ved å vise at summen av to oddetall er et partall, ved å ta utgangspunkt i eksempelet 3 + 5. Partall kan defineres som tall hvor rutene grupperes to og to, og oddetall som tall som kan grupperes to og to, hvor det blir en rute til overs. Det ikke noe i dette eksemplet som er spesielt, og eksemplet kan utvides med flere par med ruter. Slik kan dette eksemplet generaliseres til å være summen av vilkårlige oddetall, og figuren er derfor et generisk eksempel for summen av to oddetall. Figuren viser to oddetall hvor det er gruppering to og to, og hvor en rute blir til overs. Det vil alltid være to enkeltruter til overs i to oddetall og disse enkeltrutene grupperes til et par bestående av to ruter, og summen blir derfor et partall. Dette viser et generisk bevis for at summen av to oddetall alltid vil være et partall.

Stylianides et al. (2016) hevder at generiske argumenter er viktige da de kan fungere som en overgang mellom elevers empiriske argumenter basert på eksempler og deduktive argumenter som er uavhengige av eksempler, og fordi de ved å være mer konkrete er mer tilgjengelige for elever enn mer abstrakte bevis. Demonstrasjon er et bevis som ikke støtter seg på et slikt spesifikt eksempel, og formuleres dermed deduktivt. Den kommutative lov er et eksempel på et deduktivt bevis, som i LK20 dukker opp i et kompetansemål på 2. trinn. Den kommutative lov for addisjon defineres som $a + b = b + a$, mens for multiplikasjon defineres den som $a \cdot b = b \cdot a$. Her er a og b vilkårlige reelle tall, og gjelder også for rasjonale tall representert som: $\frac{m}{n} + \frac{o}{p} = \frac{o}{p} + \frac{m}{n}$ og $\frac{m}{n} \cdot \frac{o}{p} = \frac{o}{p} \cdot \frac{m}{n}$, hvor m, n, o og p er hele tall og n og p er forskjellig fra 0.

Demonstrasjoner kan være valide argumenter som for eksempel et moteksempel, motsetninger eller matematisk induksjon. Et moteksempel for en elev på 5. trinn kan lyde som i følgende eksempel:

Motbevis følgende påstand: Det finnes ingen brøker mellom $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$.

En mulig argumentasjon fra en elev for å motbevise påstanden kan se slik ut

Ved å utvide brøkene $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$ med 2, altså multiplisere telleren og nevneren i begge brøkene med 2, får vi brøkene $\frac{4}{14}$ og $\frac{6}{14}$. Brøken $\frac{2}{7}$ er likeverdig med brøken $\frac{4}{14}$, mens brøken $\frac{3}{7}$ er likeverdig med brøken $\frac{6}{14}$. Mellom brøkene $\frac{4}{14}$ og $\frac{6}{14}$ ligger brøken $\frac{5}{14}$.

Siden $\frac{4}{14} < \frac{5}{14} < \frac{6}{14}$ må også $\frac{2}{7} < \frac{5}{14} < \frac{3}{7}$, og dermed er påstanden motbevist. Det finnes brøker, for eksempel $\frac{5}{14}$, mellom $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$

Eksempel 5: Et mulig motbevis på 5. trinn

Ikke-gyldige bevis rommer argumenter for eller mot en matematisk påstand, men som ikke kvalifiserer som gyldige bevis. Rammeverket har to underkomponenter for formulering av ikke-gyldige bevis. Den første underkomponenten er *empiriske argumenter*. Denne komponenten har likhetstrekk med hva Balacheff (1988) betegner som naiv empiriske og med Harel og Sowdes (1998) empiriske begrunnelse. Empiriske argumenter er et argument som hevder å være matematisk gyldig ved å validere argumentet ved å sjekke en delmengde av alle mulige tilfeller som dekkes av argumentet. I et klasserom kan et fiktivt, dog reellt, forsøk på bevisføring når det gjelder oddetall + oddetall = partall lyde slik: «3 + 5 = 8, 5 + 7 = 12 og 7 + 9 = 16. Ja, det stemmer. Som nevnt innledningsvis er elevers og lærere oppfatning av empiriske argumenter som gyldige bevis, en utfordring i skolematematikken.

Den andre underkomponenten er *redegjørelser* (engelsk: rationale). Redgjørelser er matematiske argumenter, som ikke tilfredsstiller en eller flere av komponentene i definisjonen av bevis i skolen (Stylianides, 2007b). Dersom en elev sammenligner brøkene $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{10}$ og argumenterer for at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{4}{10}$ fordi brøken $\frac{3}{5}$ er litt over en halv, mens brøken $\frac{4}{10}$ er litt under en halv, så er elevens argument valid, men argumentet kvalifiserer ikke som et bevis. Schoenfeld (1992) hevder at slike redegjørelser gir et viktig bidrag i utviklingen mot å formulere et bevis, særlig om vi snakker om elever på barnetrinnet. Redegjørelser kan derfor fungere som viktige brobyggere i arbeidet mot å tilnærme seg bevis. I eksempelet ovenfor kan det å vise eleven hvordan brøker kan utvides og få felles nevnere ($\frac{6}{10}$ og $\frac{4}{10}$), samtidig som brøkene ivaretar sin verdi, være en måte å nærme seg å formulere et bevis. Empiriske argumenter derimot, kan forsterke den vanlige misoppfatningen om at eksempler kan bevise generelle matematiske påstander (Knuth et al., 2009). I arbeidet med RB i klasserommet vil arbeidet med redegjørelser kunne spille en viktig rolle på veien mot å lære og formulere bevis. Rammeverket for denne studien vil analysere brøkoppgaver i lærebøker på 5. trinn. Oppgavene alene kan ikke gi informasjon om elevene vil formulere ikke-gyldige bevis, da vil det være nødvendig å observere elevene i arbeidet med oppgavene.

De fire hovedkomponentene og tilhørende underkomponenter utgjør dimensjon 1 i G. Stylianides' rammeverk (2009). Stegene i prosessen med RB kan skisseres slik: identifisere mønster → lage hypoteser → formulere bevis. I praksis vil ikke arbeidet med RB være en lineær prosess. I praksis vil elevene bevege seg fremover og bakover i en dynamisk prosess hvor elevene prøver ut matematiske påstander som enten forkastes, forbedres eller godkjennes. Dersom elever argumenterer for at det ikke finnes brøker mellom $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$ da det ikke finnes heltall mellom 2 og 3 som kan stå i telleren, vil argumentet kunne utfordres med kunnskap om likeverdige brøker og dermed betegnes som et ikke-gyldig bevis. Elevene vil da gå tilbake for å studere mønstrene ved likeverdige brøker. Ved å utvide brøkene $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$ til $\frac{4}{14}$ og $\frac{6}{14}$ vil de oppdage hvorfor hypotesen deres ikke holdt ved å oppdage brøken $\frac{5}{14}$. Elevene kan i etterkant bruke den nye kunnskapen til å prøve å formulere et nytt bevis hvor de argumenterer for at det finnes brøker mellom $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$.

Dersom en hypotese ikke leder frem til et godkjent bevis, vil elevene altså kunne gå tilbake for å endre på hypotesene sine, før de på ny kan prøve å formulere et bevis. Prosessen trenger ikke alltid starte med å identifisere mønster. Den kan, avhengig av oppgaven, starte med å formulere hypoteser, eller prøve å formulere bevis av hypoteser som medelever har formulert. Reid (2002) beskriver prosessen mot å kunne formulere et matematisk gyldig bevis, som en «fram og tilbake» prosess hvor elevers forsøk med å formulere bevis ikke lykkes og fører de tilbake til å oppdage nye mønstre for deretter å lage nye hypoteser. Prosessen RB kan da illustreres slik:

Figur 2: Prosessen resonnering-og-bevis

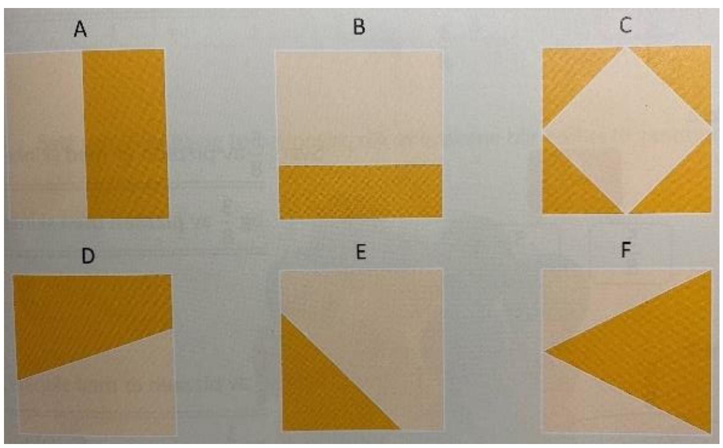
Rammeverkets dimensjon 2 har som formål å støtte opp om og utdype dimensjon 1, da den synliggjøre hvilke formål som kan ligge i ulike oppgaver innenfor aktivitetene i RB. Har for eksempel en oppgave som handler om å lage hypoteser i tillegg den hensikt å kunne lede elevene videre i prosessen til å formulere bevis på bakgrunn av sine hypoteser? Eller fokuserer oppgaven kun på aktiviteten å lage hypoteser? Dersom oppgaven innehar kvaliteter til å være en brobygger mot å formulere et bevis, vil oppgaven i dimensjon 2 kunne betegnes som å være en forløper (engelsk: precursor) til bevis.

a Skriv opp minst tre brøker som er likeverdige med $\frac{1}{2}$.

b Hvordan vet du at brøkene er likeverdige med $\frac{1}{2}$.

Figur 3: Oppgavene er hentet fra Matemagisk 5A, oppgave 2a og 2b, s. 87

Oppgave b i eksempelet utfordrer elevene til å begrunne å argumenter for viktig aspekter ved brøk. Elevene må grunngi hvordan verdien av en brøk opprettholdes når den utvides eller forkortes. Ved å argumentere rundt hvorfor forholdet mellom tallene (teller og nevner) må være det samme for å beholde ekvivalensen i en brøk (Lamon, 2020), løftes elevene i retning av å kunne formulere et bevis. Oppgaven utfordrer ikke elevene til å formulere et bevis, men den setter elevene i stand til å kunne gjøre det. For eksempel ved å i etterkant bli utfordret med å bevise at $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{50}{100}$. Argumentene fra forrige oppgave om opprettholdelse av ekvivalensen mellom teller og nevner vil hjelpe elevene med å formulere beviset på denne oppgaven. Oppgaven handler om aktiviteten med hypoteser og den fungerer som en forløper til aktiviteten med å formulere bevis. Dette gjelder også for oppgaver innenfor aktiviteten å identifisere mønster. Slike oppgaver kan inneha kvaliteter til å være forløpere for å formulere



Eksempel 7: Utdrag av oppgave fra Matematikk 5 s. 105

hypoteser. Dersom oppgaver ikke innehar slike kvaliteter, betegnes de i dimensjon 2, som ikke-forløpere (engelsk: non-precursor) til å formulere hypoteser eller som ikke-forløpere til å formulere bevis. Eksempel 7 viser et eksempel hvor elevene utfordres til å argumentere for hvilke av kakene som vil gi to personer like mye kake (figurene illustrerer hvordan kakene er delt opp). Oppgaven utfordrer elevene til å argumentere for hvordan figur A, C, F og D kan være ulike måter å dele opp halvparten av kaken på. Oppgaven setter likevel ikke elevene i stand til å kunne bevise dette videre slik oppgaven presenteres.

Når det gjelder hovedkomponenten formulere et bevis, så beskriver dimensjon 2 i rammeverket (Stylianides, 2009) ulike formål arbeidet med et bevis kan inneha. Arbeidet med å formulere et bevis kan ha et eller flere av følgende formål:

Forklaring (engelsk: explanation) – Når et bevis tjener å gi elevene en dypere innsikt i hvorfor en matematisk påstand er sann eller usann. Å jobbe med bevis rundt for eksempel synkende rekkefølger av stambrøker ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$) eller med stigende rekkefølger av brøker som har en nevner som er et tall høyere enn telleren ($\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots$), og hvilken tall verdien av brøkmønstrene vil nærme seg, vil tidlig i brøkopplæringen kunne gi elevene en dypere begrepsmessig innsikt i brøk.

Verifisering (engelsk: verification) – Når et bevis bekrefter sannheten i en gitt matematisk påstand. Dette formålet rommer også bevis ved motsigelser (engelsk: contradiction). Bevis med dette formålet kan være påstander som «Argumenter for at $\frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{25}{100}$».

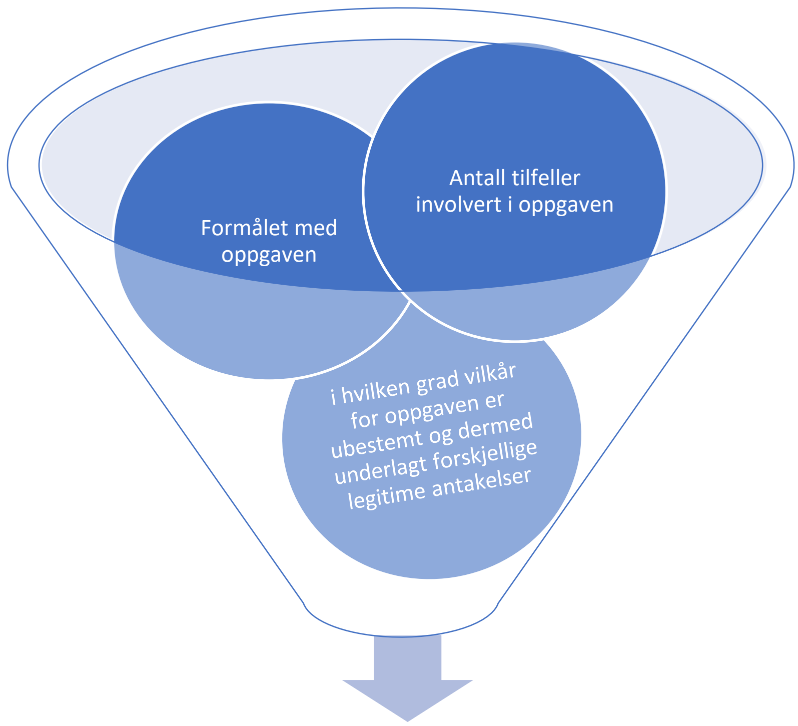
Motbevise (engelsk: falsification) – Når et bevis bekrefter usannheten i en gitt matematisk påstand. Dette formålet rommer også «reductio ad absurdum» og bevis ved moteksempel. Påstander som «Det finnes ingen brøker mellom $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$» eller «Alle brøker kan utvides slik at de får 100 i nevneren» innehar formålet med å motbevise. I visse tilfeller, avhengig av alder og hvor mye de har jobbet med brøk, kan påstandene også være dekkende for det siste formålet.

Generere ny kunnskap (engelsk: generating new knowledge) – Når et bevis bidrar til å utvikle ny kunnskap hos elevene.

G. Stylianides` (2009) rammeverk gir muligheter for å analysere oppgaver i matematiske lærebøker ut ifra hvilke aktiviteter av RB de tilbyr.

2.2.2 Et analytisk rammeverk for bevisoppgaver

A. Stylianides har som tidligere nevnt også rette sitt forskerblikk mot resonnering og bevis i grunnskolen (Stylianides & Stylianides, 2008 ; Stylianides 2007b). Bevisoppgaver har en stor innflytelse for hva som skjer i matematikkundervisningen med tanke på resonnering og bevis. Hvilke kvaliteter en bevisoppgave innehar kan være avgjørende for bevisaktiviteten den kan fremkalle i undervisningen (Stylianides, 2016). Den potensielle bevisaktiviteten kan være avhengig av flere faktorer, som for eksempel lærerens kompetanse og faglig grunnsyn (feks. Collopy, 2003; Remiliard, 2005; Stylianides & Stylianides, 2008) eller undervisningspraksiser for å orkestrere kvalitative matematiske samtaler (Stein et. al. 2008; Stylianides & Stylianides, 2008). A. Stylianides (2016) trekker frem tre hovedegenskaper ved bevisoppgaver, som har betydning for den påfølgende bevisaktiviteten (illustrert i figur 4,).



Bevisaktivitet som en bevisoppgave kan generere i klasserommet.

Figur 4: A. Stylianides, 2016, min oversetting.

De tre egenskapene figur 8 illustrerer er:

1. Antall tilfeller som er involvert i oppgaven (enkelttilfeller, endelig antall tilfeller eller uendelig antall tilfeller).
2. Formålet med oppgaven (å argumentere for eller mot en matematisk påstand).
3. Om vilkårene i oppgaven er tvetydig, og kan få elevene til å trekke ulike gyldige slutninger.

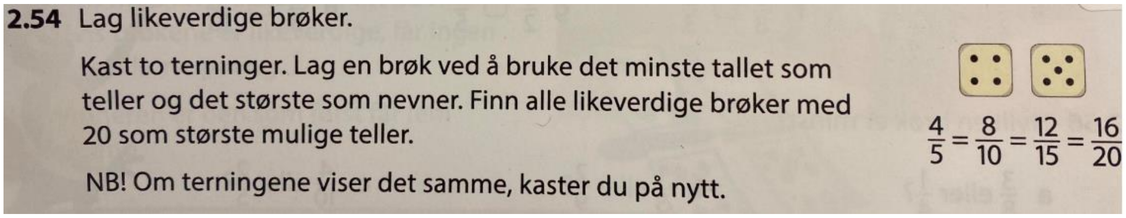
Antall tilfeller det handler om i en oppgave er avgjørende for hvilke argumentasjonsformer elevene får jobbe med i aktiviteten (se figur 2, min oversetting). En viktig faktor for min studie er at A. Stylianides (2016) åpner opp for at også oppgaver med enkelttilfeller kan kvalifisere til å være en bevisoppgave. Hos G. Stylianides (2005, 2008, 2009) har dette vært utelukket. For at en oppgave med enkelttilfeller skal kunne kvalifisere som bevisoppgave, må den inneha elementer som gjør at elever får jobbe med resonnering og bevis. For å evne det mener A. Stylianides (2016, s. 73) at oppgaven må være kognitivt utfordrende, og at den legger til rette for at elever kan argumentere for eller mot en matematisk påstand. Forskjellen på oppgaver med enkelttilfeller som kvalifiserer som bevisoppgave, kan illustreres ved følgende to eksempler.

a $\quad \frac{}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{} = 3\,\frac{1}{10}$ $\qquad\qquad$ b $\quad \frac{}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{} = \frac{4}{5}$

Eksempel 8 og 9: Brøkoppgave

Eksempeloppgave a er den av oppgavene som tilfredsstiller A. Stylianides (2016) sine krav til bevisoppgaver med enkelttilfeller. Oppgave a utfordrer elevene på flere områder. Elevene må blant annet resonnere og argumentere med brøker bestående av ulike nevnere og de må forholde seg til en sum som består av blandete tall. Her må elevene i tillegg finne ut at det siste leddet må være en uekte brøk, og at summen er en forkortelse av 3 $\frac{2}{20}$. Oppgaven inneholder kognitivt utfordrende elementer, som gir elevene gode argumenteringsmuligheter i arbeidet med resonnering og bevis. Eksempeloppgave b innehar ikke de samme kvalitetene som eksempeloppgave a har. I oppgave b er det sannsynlig å anta at elever vil se på tellerne som en enkel addisjon, og sette inn et femtall som den manglende nevneren i siste ledd av brøkaddisjonen da både førsteledd, andreledd og sum har like tall i nevneren. Eksempeloppgave b vil ikke kvalifisere som en bevisoppgave med enkelttilfeller.

Når det gjelder oppgaver som involverer et endelig antall tilfeller, vil det i hovedsak handle om å identifisere alle tilfeller i en gitt mengde. Oppgaver innen kombinatorikk, oppgaver om permutasjoner eller om Kartesianske problemer. Oppgaveeksempelet i eksempel 10 viser en oppgave hvor elevene må argumentere for at de har funnet alle mulige tilfellene innen et endelig antall tilfeller som terningkastene gir dem.



2.54 Lag likeverdige brøker.

Kast to terninger. Lag en brøk ved å bruke det minste tallet som teller og det største som nevner. Finn alle likeverdige brøker med 20 som største mulige teller.

NB! Om terningene viser det samme, kaster du på nytt.

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20}$

Eksempel 10: Oppgave 2.54 hentet fra Multi 5a, s. 61

I det neste eksempelet er det ikke lengre snakk om en endelig mengde av tilfeller. Her krever oppgaven (oppgaven er hentet fra Matemagisk 5a, s 139) at elevene må vise at påstanden stemmer for hvilket som helst heltall. Oppgaven involverer derfor et uendelig antall tilfeller.

> Begrunn at uansett hvilket heltall du deler på 5, vil svaret enten bli et helt tall eller ha èn desimal der sifferet er 2, 4, 6 eller 8

Her møter elever utfordringer med å generalisere et matematisk uttrykk som gjelder for alle heltall, som da utgjør et uendelig antall tilfeller. Eksempelet på summen av to oddetall i avsnitt 2.2.1 om generiske eksempler, er også eksempel hvor elever får jobbe med et uendelig antall tilfeller.

I tillegg til å skille bevisoppgavene etter antall tilfeller de involverer, skiller A. Stylianides (2016) i likhet med G. Stylianides (2009) bevisoppgavene etter hvilke formål de tjener. A. Stylianides skiller mellom to formål en bevisoppgave kan ha. Den kan enten få elevene til å argumentere for en matematisk påstand (engelsk: justification), eller å få elevene til å argumentere mot en matematisk påstand (engelsk: refutation). Valget begrunner A. Stylianides (2016, s. 12) med at de nevnte formålene, i tillegg til forklaring (engelsk: explanation), er formålene som har fått særlig oppmerksomhet i den matematikkdidaktiske forskningen den senere tid da de fremmer matematikk som en meningsskapende aktivitet.

En klassifisering etter A. Stylianides (2016) betraktninger av bevisoppgaver illustreres i tabell 2.

En klassifisering av bevisoppgaver med illustrerte eksempler

Antall tilfeller som er involvert i en oppgave	Formålet til en bevisoppgave: Å argumentere for en påstand	Å argumentere mot en påstand
Enkelttilfeller	$\frac{\square}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{\square} = 3\frac{1}{10}$	Motbevis påstanden om at det ikke finnes brøker mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$
Endelig antall tilfeller	Bevis at det til brøken $\frac{2}{3}$ finnes seks likeverdige brøker mellom 0 og $\frac{16}{24}$	Motbevis påstanden om at det finnes like mange likeverdige brøker til brøken $\frac{2}{3}$ med tall mellom 1-10 i nevnerne (i beregnet brøken $\frac{2}{3}$) som mellom 11-20 og mellom 21-30.
Uendelig antall tilfeller	Bevis at jo høyere tall stambrøker har i nevneren, des nærmere verdien 0 vil brøkene ha.	Motbevis påstanden om at alle brøker kan utvides slik at de får 100 i nevneren

Tabell 2: Klassifisering av bevisoppgaver i brøk (Stylianides, 2016)

Den tredje egenskapen som A. Stylianides (2016) skisserer i figur 8, er om vilkårene i oppgaven er tvetydig, og kan få elevene til å trekke ulike gyldige slutninger. A. Stylianides hevder at flere bevisoppgaver kan tendere til å være tvetydige, og dermed gi rom for at elever trekker ulike, men likevel gyldige slutninger. Dette kan være bevisst eller ubevisst fra oppgavedesigneren. Om en oppgave inneholder flere riktige hypoteser kan dette gi rom for å synliggjøre hypotesenes viktige rolle som byggesteiner for argumenter og bevis (Jahnke & Wambach, 2013; Stylianides, 2007a).

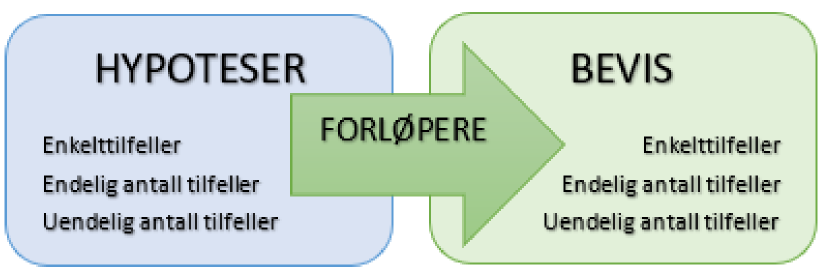
2.3 En oversikt over studiens rammeverk

Forskningsspørsmålet som stilles for denne studien er: ***Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn***? For å svare på dette spørsmålet har jeg analysert alle tilgjengelige brøkoppgaver i fire lærebøker i matematikk for 5 trinn, som er basert på LK20. I dette avsnittet gir jeg en oversikt over det analytiske rammeverket for denne studien.

I likhet med arbeidene til G. og A. Stylianides, bygger mitt rammeverk på definisjonen for bevis i skolen (Stylianides, 2007b) som er beskrevet i avsnitt 2.1.2.

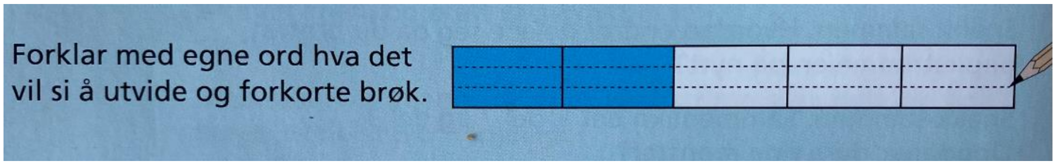
Jeg vil i analysen ta utgangspunkt i de kvaliteter for bevisoppgaver som A. Stylianides (2016) skisserer i sitt rammeverk (se figur 4, avsnitt 2.2.2), for å identifisere brøkoppgavene som gir elever muligheter for resonnering og bevis. Brøkoppgaver som kvalifiseres til å inneha kvaliteter av resonnering og bevis, blir referert til som RB-oppgaver. Rammeverk i denne studien vil derfor kunne fange opp alle brøkoppgavene som inneholder kvaliteter av RB, både brøkoppgaver med enkelttilfeller, brøkoppgaver som involverer et endelig antall tilfeller og brøkoppgaver som handler om et uendelig antall tilfeller. Dette er i tråd med Andreas Stylianides sine bevisoppgaver. Studiens rammeverk vil også inneholde to av hovedkomponentene, *formulere hypoteser* og *formulering av bevis*, og de tilhørende underkomponentene i samsvar med G. Stylianides (2009) sitt analytiske rammeverk.

For å kvalitativt kunne analysere og vurdere RB-oppgavene trekker rammeverket inn dimensjon 2 fra G. Stylianides (2009). Dette gir muligheter for å identifisere om RB-oppgavene som handler om å formulere hypoteser har kvaliteter til å fungere som forløpere til bevis. Å fungere som en forløper er en viktig faktor i resonnering-og-bevisprosessen (figur 5). Derfor ønsker jeg å tilføre



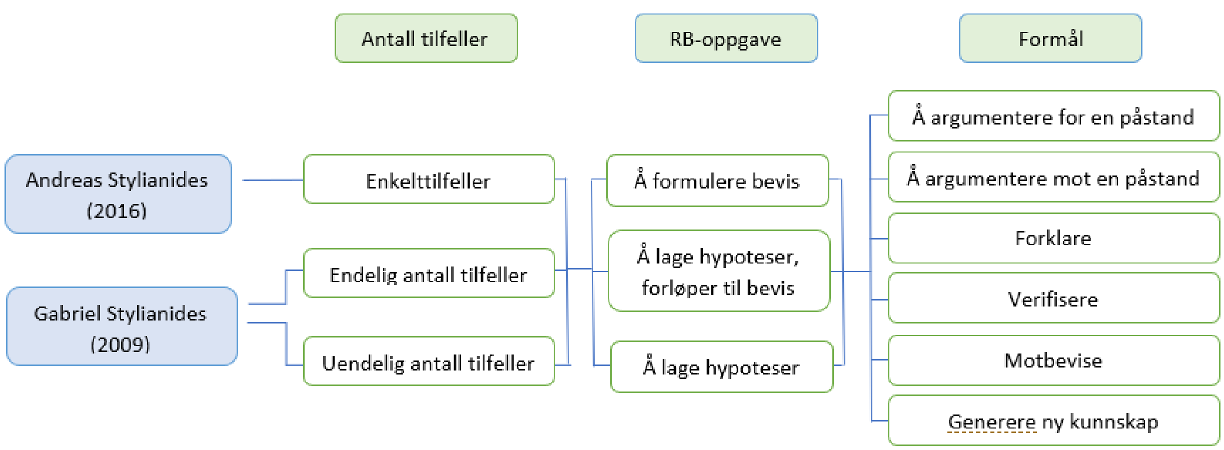
Figur 5: Forløpere til bevis

rammeverket muligheten til å undersøke hvordan lærebøkene benytter seg av forløpere. Dimensjon 2 (Stylianides, 2009) inneholder også beskrivelse av ulike formål bevis kan ha. Formålene vil kunne hjelpe meg med å identifisere kvalitative trekk ved RB-oppgavene. I studiens rammeverk tar jeg derfor inn både bevishensiktene *forklaring*, *verifisere*, *motbevise* og *generere ny kunnskap* til G. Stylianides (2009). Jeg velger i tillegg å trekke formålene som A. Stylianides (2016) skisserer, *å argumentere for en påstand* og *å argumentere mot en påstand*. Flere av formålene til G. Stylianides og A. Stylianides kan virke overlappende, for eksempel kan det å verifisere knyttes til det å argumentere for en matematisk påstand. Det samme gjelder for å motbevise og det å argumentere mot en matematisk påstand. Likevel er det nyanser mellom formålene. Som eksempel vil følgende oppgave knyttes til det å argumentere for en påstand av A. Stylianides (2016) uten at den vil knyttes til det å verifisere (Stylianides, 2009).



Eksempel 11: Oppgaven er hentet fra Matemagisk 5a, s. 96

Formålene er både hos A. Stylianides (2016) og G. Stylianides (2008) kun relatert til RB-oppgaver som handler om å formulere bevis. I studiens rammeverk ønsker jeg i tillegg å knytte formålene til RB-oppgaver som handler om å formulere hypoteser. Verifisering handler om å argumentere for en matematisk påstand, men siden jeg også knytter formålene til RB-oppgaver som handler om å formulere hypoteser, så trenger ikke nødvendigvis det å argumentere for en påstand trekkes til å verifisere påstanden. Jeg mener at RB-oppgavene som gir elever muligheter til å arbeide med hypoteser, også innehar underliggende hensikter som formålene beskriver. Tilføringen gir rammeverket muligheter til å identifisere kvalitative trekk ved RB-oppgavene som handler om å formulere hypoteser utover det å identifisere om de kvalifiserer som forløpere. En illustrert oversikt over studiens rammeverk kan illustreres som vist under i figur 6.



Figur 6: Studiens rammeverk

I neste kapittel vil jeg se nærmere på de muligheter og begrensninger som følger av mine metodiske valg og utvalg for studiens rammeverk. Jeg vil gå grundigere inn på analyseprosessen og utdype analysen med å gi relevante eksempler.

3. Metode

Jeg har i denne studien undersøkt hvilke muligheter for resonnering og bevis det ligger i brøkoppgaver på 5. trinn. For å kunne besvare dette har jeg til denne studien valgt en multippel kasusstudie som forskningsdesign. Den underliggende metoden for å kunne besvare forskningsspørsmålet vil være en innholdsanalyse. Jeg vil videre redegjøre for dette.

3.1. Forskningsdesign: Multippel kasusstudie

I denne studien studere jeg mulighetene for resonnering og bevis i brøkoppgavene som presenteres i lærebøker på femte trinn. som er basert på den nye læreplanen LK20. For å finne svar på det jeg undersøker, har jeg valgt å analysere fire lærebøker fra de antatt største lærebokforlagene i Norge. Til dette tilegnes studien en multippel kasusstudie (Creswell og Poth, 2018, s. 99; Yin, 2013) som forskningsdesign, hvor hver av lærebøkene er de tilfeller eller kasus som jeg analyser med blikk på fenomenet resonnering og bevis. Postholm (2020, s. 50) definerer en kasusstudie som en utforskning av et «bundet system», et system som både er tids- og stedbundet. En multippel kasusstudie er å studere flere «bundet system» for å studere det samme bestemte fenomenet (Denscombe, 2014), som i min studie er resonnering og bevis. Målet med kasusstudier er å belyse det generelle ved å studere den spesielle situasjonen (Denscombe, 2014). For å klare dette beskriver Creswell og Poth (2018) noen karakteristiske egenskaper ved kasusstudier. For det første retter de søkelyset mot ett eller noen få tilfeller. Forskeren studerer da enkelttilfeller som kan illustrere eller representere det mer generelle fenomenet som undersøkelsen søker å få innsikt i. Med en studie av lærebøker i matematikk, kunne jeg valgt å se på lærebøker fra alle lærebokforlag som tilbyr lærebøker på 5. trinn. Når jeg ønsker å studere mulighetene for arbeid med resonnering og bevis kan det likevel være hensiktsmessig å fokusere på noen få utvalgte lærebøker, for slik å studere fenomenet resonnering og bevis i dybden. Et kjennetegn på kasusstudien er nettopp at det er en dybdestudie (Stake, 1995; Denscombe, 2014, 2014; Creswell og Poth, 2018), hvor ønsket er å få verdifull og unik innsikt i et fenomen.

I kvalitative studier, som kasusstudier er, kan bildet være komplekst og prosesser og sammenhenger være sammenvevd. For å forstå et fenomen, som resonnering og bevis i brøkoppgaver, kan det studeres fra flere perspektiver for å danne et rikere bilde av fenomenet. Dette kan for eksempel være å studere de matematiske kvalitetene i oppgavene, hvilke forventninger oppgaveformuleringene setter til elevene, eller om oppgavene er designet til å lede elevene videre i resonnering-og-bevisprosessen (Stylianides, 2009). Kasusstudier gir muligheter til å gå i detalj og dermed har studien en større sjanse for å oppdage sammenhenger, som kan forbli usynlige i en bredere studie. En av de store styrkene til kasusstudier er at man kan forklare hvorfor noe skjer heller enn å forklare hva som skjer. For min analyse gir det å studere oppgavekontesken en mulighet til å identifisere hvorfor muligheter for resonnering og bevis oppstår eller uteblir for en gitt brøkoppgave. Dette gjør at kasusstudier ofte kan trekke konklusjoner formet av forskeren basert på de overordnede funnene fra de ulike tilfellene om den overordnede betydningen (Creswell & Poth, 2018, p. 98).

3.2 Utvalg

Hensikten med denne studien er å beskrive karakteristikker på resonnering og bevis i brøkoppgaver i lærebøker på 5. trinn. Målet er å studere og beskrive i detalj hvilke muligheter det ligger for resonnering og bevis innenfor det matematiske emnet brøk, målet er ikke å studere resonnering og bevis i lærebøkene som helhet. Studien kan danne grunnlag for videre refleksjoner om og forskning på muligheter og utfordringer med resonnering og bevis i skolen også innen andre matematiske tema.

Utvalget av lærebøker til denne studien har i noe grad vært styrt av tilgjengelighet. Da LK20 nettopp har tredd i kraft, har tilgangen til lærebøker og lærerveiledninger bydd på enkelte utfordringer. Prioriteringene fra forlagene ser ut til å være og ferdigstille grunnbøker kun på enkelte trinn til skolestart høsten 2020. De fleste lærerveiledningene ser ut til å bli publisert i løpet av høsten 2020. Grunnbøkene i matematikk på 5. trinn var blant de første lærebøkene som alle de tre største forlagene publiserte før skolestart. Dermed ble de tidsnok tilgjengelige til å bli en del av denne studiens datamateriale.

Forlaget Gyldendal publiserte Multi 5A Elevbok, hvor et kapittel er viet brøk. I samtalen med forlaget sier de at Multi Elevbok 5B trolig vil publiseres i starten av januar 2021, og at elevboken vil inneholde et nytt kapittel med brøk. Lærerveiledninger til elevbøkene er i skrivende stund, ifølge forlaget, i språkvask og snart klar for publisering. Forlaget Cappelen Damm har publisert Matematikk 5 Grunnbok. Til denne har de også publisert lærerveiledning. Grunnboken har et kapittel med brøk, og er den eneste grunnboka i matematikk for femte trinn fra forlaget. Fra Aschehoug forlag ble både Matemagisk 5A Grunnbok og Matemagisk 5B Grunnbok publisert i tide for å være del av denne studien. Aschehoug har valg en heldigital lærerveiledning. Lærerveiledningene er tilgjengelige via lisenser og kun forbeholdt lærere og elever. I dialog med (K.M. Raen, A.L. Kongsnes, H.L. Lang-Ree, & G Nyhus, 2020)Aschehoug undervisningen ble tilgang etterspurt, men det lot seg dessverre ikke løse.

De fire lærebøkene (figur 13), Multi Elevbok 5A (Alseth, Arnås, Rsseland og Nordberg, 2020), Matematikk 5 Grunnbok (ref) og Matemagisk 5A grunnbok og 5B grunnbok (Raaen, Kongsnes, Lang-Ree og Nyhus, 2020) utgjør datamaterialet til denne studien. Læreverkene tilbyr, i tillegg til grunnbøkene som er med i studien, flere matematiske ressurser for 5. trinn som for eksempel ulike digitale læremidler og oppgavebøker. Disse er ikke tatt med i datamaterialet.

Lærebok	Forlag	Kapittelnavn	Antall brøkoppgaver	Antall sider
Multi 5A Elevbok	Gyldendal	2. Brøk	330	43
Matematikk 5 Grunnbok	Cappelen Damm	4. Brøk	307	53
Matemagisk 5A Grunnbok	Aschehoug	1. Å utforske brøk 2. Likeverdige brøker 3. Addisjon og subtraksjon med brøk 4. Desimaltall og brøk på tallinja	708	127
Matemagisk 5B Grunnbok	Aschehoug	5. Multiplikasjon, brøk og prosent	219	33
Totalt			1564	256

Tabell 3: Lærebøker i utvalget

Studiens datamateriale består av totalt 1564 brøkoppgaver fordelt på fire lærebøker (tabell 3). Dette inkluderer ikke lærebøkenes introduksjoner, eksempler, forklaringsbokser, spillaktiviteter eller eventuelle andre praktiske aktiviteter som tilbys.

3.3 Innholdsanalyse

I Fan, Zhu og Miao (2013) sin gjennomgang av forskning på lærebøker i matematikk viser de at forskningsfeltet har overvekt av innholdsanalysestudier, hvor det typisk fokuseres på et bestemt matematisk emne gjennom en sammenligning av flere lærebøker. (Rezat og Strässer (2017) påpeker at forskning som er basert på innholdsanalyser er i stand til å svare på spørsmål om innholdet i lærebøker og sammenhenger mellom innholdet i lærebøkene og konteksten som de blir brukt. I denne konteksten er ikke innholdet begrenset til et matematisk innhold, men omfatter også didaktiske aspekter, som for eksempel bruk av eksempler og representasjonsformer, knyttet til det matematiske innholdet.

I dette studiet har jeg benyttet en kvalitativ innholdsanalyse, som er en systematisk undersøkelse og fortolkning av datamateriale (Berg & Lune, 2012). Kvalitativ innholdsanalyse ses både på som en fleksibel tilnærming til analyse av tekstdata (Cavanagh 1997) og som en systematisk tilnærming til å klassifisere og identifisere temaer eller mønstre i dataene (Berg & Lune 2012; Hsieh & Shannon 2005). Det finnes flere ulike tilnærminger under «paraplyen» innholdsanalyse, blant andre summativ, konvensjonell og teoridrevet innholdsanalyse. Jeg har i denne studien benyttet meg av disse tre tilnærmingsmåtene for innholdsanalyse. I en summativ innholdsanalyse vendes forskerblikket på hvordan ord eller innhold forekommer i en bestemt kontekst. I min studie ble denne tilnærmingen benyttet i den første gjennomgangen av datamaterialet og den første runden med analyse av 50 brøkoppgaver. Den summative tilnærmingen satte søkelyset på at kun de færreste av brøkoppgavene ble plukket opp av rammeverket til G. Stylianides (2009).
Den summative tilnærmingen ga informasjon om at datamaterialet nesten utelukkende inneholdt brøkoppgaver som involverer enkelttilfeller. Tilnærmingen ga videre informasjon om at bruk av ord som «bevis at», «argumenter for» eller «formuler en hypotese», som oppgaveeksempler til G. Stylianides (2005) viser til, nesten var å regne som ikke eksisterende i datamaterialet.

Konvensjonell tilnærming benyttes, ifølge Hsieh og Shannon (2005), i studier hvor målet er å beskrive et fenomen for å danne en bedre og tydeligere forståelse av fenomenet. Forskerne fordyper seg i datamaterialet på jakt etter ny innsikt (Hsieh & Shannon 2005). I mitt tilfelle viste den summative analysen antydning til at brøkoppgaver med resonnering og bevispotensialet ikke nødvendigvis ble plukket opp av rammeverket. Den påfølgende konvensjonelle tilnærmingen i analyserunde to, hvor rammeverket til A. Stylianides (2016) ble innlemmet, tilførte muligheten til å analysere brøkoppgaver som involverte enkelttilfeller. Ved å tilføre A. Stylianides` rammeverk (2016) åpnet det seg muligheter for å fange opp oppgaver med enkelttilfeller. Mayring (2014) understreker at en konvensjonell analyse baseres på deduktiv kategorisering hvor hovedmålet kan være å validere, eller eventuelt videreutvikle, et eksisterende teoretisk rammeverk (Hsieh &

Shannon 2005). I min studie ledet dette til først å finne ut at G. Stylianides` rammeverk (2009) ikke ville fungere alene til å plukke opp oppgaver med resonnering og bevis i mitt datamateriale. Tilnærmingen indikerte vider et behov for å vurdere tilpasninger angående oppgaveformuleringer, ellers kunne studiens rammeverk stå i fare for ikke å plukke opp alle brøkoppgavene med resonnering og beviskvaliteter i datamaterialet. Den dypere innsikten som den andre analyserunde ga meg, er i tråd med den konvensjonelle tilnærmingen sin hensikt.

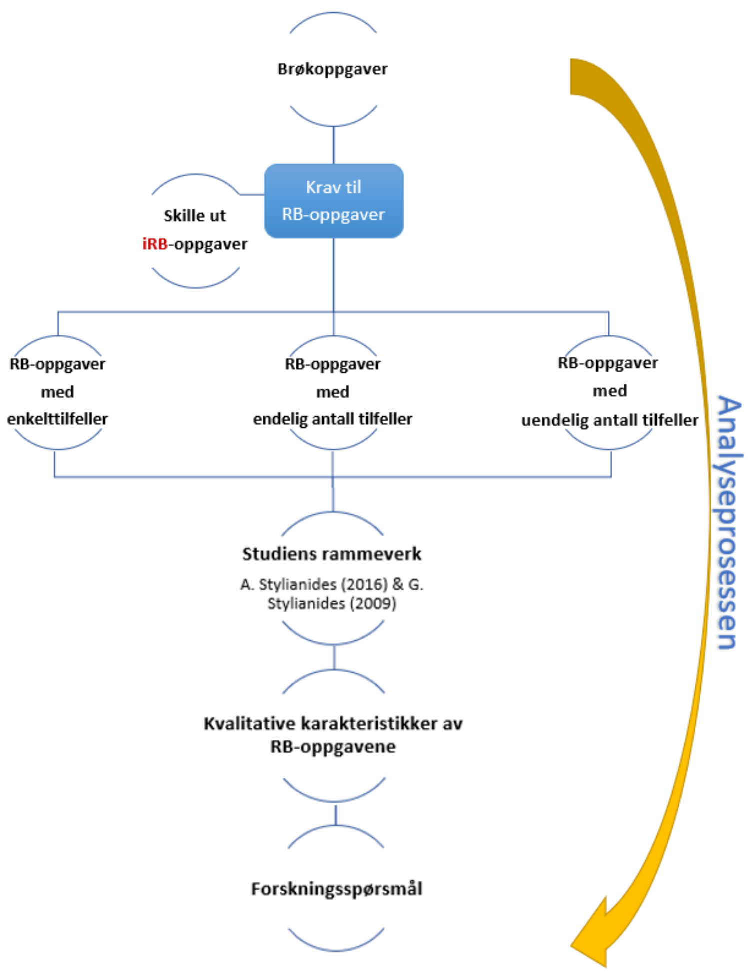
Den teoridrevne tilnærmingen for innholdsanalyse baseres på deduktiv kategorisering (Mayring 2014), og hovedmålet kan være å validere, eller eventuelt videreutvikle, et eksisterende teoretisk rammeverk (Hsieh & Shannon 2005). Tilnærmingene frem til nå hadde blant annet identifisert et behov for å justere rammeverket med tanke på oppgaveformuleringer. Ved å studere brøkoppgavene ut ifra flere perspektiver i læreboka, kunne jeg identifisere oppgaver innenfor hovedkomponentene og underkomponentene i rammeverket til G. Stylianides (2009). Perspektivene som oppgavene ble belyst fra var oppgaven sine matematiske kvaliteter, hvilke eksempler som var presentert i forkant av en oppgave, hva som var rimelig å anta at elevene har lært ved å løse foregående oppgavene, hvilke representasjonsformer elevene kunne støtte seg til i kapittelet, og i tilfeller hvor lærerveiledning var tilgjengelig ble oppgavene sett i lys av relevant oppgaveinformasjon fra lærerveiledningen. Ved å videreføre kravene som A. Stylianides (2016) satte til oppgaver om å inneha elementer av resonnering og bevis i tillegg til å utfordre elevene kognitivt til å resonnere, argumentere og eventuelt formulere matematisk bevis, gjorde at kravene til nevnte oppgaveformuleringer ble justert ned. Den tredje analyserunde ga svar på at de oppgaver jeg mente tilbød elever å jobbe med resonnering og bevis, ble plukket opp av rammeverket til studien. Tilpasningene førte til at jeg kunne validere rammeverket gjennom den teoridrevne tilnærmingen. Ved å kombinere de tre tilnærmingene, summativ, konvensjonell og teoridreven innholdsanalyse har jeg gjennom studien fått utviklet et analytisk rammeverk som fungerer på studiens datamateriale, og som videre kan lede frem til funn som besvarer studiens forskningsspørsmål.

3.4 Analyseprosessen

Innholdsanalysen startet med å lokalisere analyseenhetene, som var de respektive brøkoppgavene i de ulike lærebøkene. Jeg jobbet meg suksessivt og repeterende igjennom lærebøkene. Suksessivt i form av at jeg tok for meg et og et kapittel, bok for bok, og repeterende i form av gjentatte runder med gjennomlesninger og utregninger av brøkoppgavene og vurderinger av konteksten oppgavene ble presenterte i. Datamaterialet ble gjennomarbeidet flere ganger, og jeg gjorde stadig mindre justeringer hva gjaldt fordeling av oppgaver innenfor hovedkategoriene. Utviklingen at studiens rammeverk ble gjort gjennom de tre tilnærmingsmåtene for innholdsanalyse, som ble redegjort for i avsnitt 3.3.

I analysen av brøkoppgavene og oppgavenes kontekster legger jeg til grunn at elevene jobber seg kronologisk gjennom brøkkapitlene. Videre legger jeg også til grunn at elevene tar seg tid til å forstå eksemplene, forklaringene og representasjonene som lærebøkene tilbyr. Det legges også til grunn at elevene har forstått innholdet i tidligere oppgaver, og kan bruke denne kunnskapen i møte med de nye oppgavene.

En oversikt over analyseprosessen for studien illustreres i figur 7.



Figur 7: Analyseprosessen

Tabell 4 viser en fullstendig kodeoversikt for analysen med illustrerende eksempler.

Koder	Betydning	Eksempler
RB	Refererer til den helhetlige forståelsen av resonnering- og-bevisprosessen	
RB-oppgave	Oppgave som tilbyr som tilbyr minimum et av elementer i RB-prosessen. I denne studien vil dette dreie seg oppgaver som handler om å lage hypoteser og oppgaver som handler om å formulere bevis.	Forklar hvorfor vi kan sammenlikne to brøker med like tellere
iRB-oppgave	Oppgaver som tilbyr minimum et av elementene i RB-prosessen. I dette studiet vil dette være oppgaver som ikke utfordrer elever i å lage hypoteser eller formulere bevis.	Regn ut $\frac{3}{4}$ av 60
Formulere hypoteser	Tildeles de RB-oppgaver som handler om å argumentere og lage hypoteser.	Tenk deg at mønsteret av stambrøker går mot det uendelige, hvilken verdi tror du brøkene nærmer seg?
Formulering av bevis	Tildeles de RB-oppgaver som handler om å formulere bevis.	Argumenter for at $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$
Forløper til bevis	Tildeles de RB-oppgaver som handler om å argumentere og lage hypoteser, og som innehar kvaliteter til å lede elever videre i retning å formulere bevis.	Se eksempel i avsnitt 2.2.1 (figur 6)
Ikke forløper til bevis	Tildeles de RB-oppgaver som handler om å argumentere og lage hypoteser, men som ikke innehar kvaliteter til å lede elever videre i retning å formulere bevis.	Se eksempel i avsnitt 2.2.1 (figur 7)
Å argumentere for en påstand	Tildeles de RB-oppgaver hvor hensikten er å argumentere for en matematisk påstand.	Argumenter, uten å regne ut, for at $\frac{4}{7}$ er større enn $\frac{3}{8}$
Å argumentere mot en påstand	Tildeles de RB-oppgaver hvor hensikten er å argumentere mot en matematisk påstand.	Alle brøker kan utvides til å ha 100 i nevneren
Forklaring	Tildeles de RB-oppgaver hvor hensikten er å gi elevene en dypere innsikt om hvorfor en matematisk påstand er sann eller usann.	Redegjør for hvorfor verdien til brøkene i mønster-utviklingen nærmer seg 0 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$
Verifisere	Tildeles de RB-oppgaver hvor hensikten er å verifisere om en matematisk påstand er sann eller usann.	Forklar at $\frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Motbevise	Tildeles de RB-oppgaver hvor hensikten er å motbevise om en matematisk påstand er sann eller usann.	«Det finnes ingen brøker mellom $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{7}$»
Generering av ny kunnskap	Tildeles de RB-oppgaver hvor hensikten er å bidra til å utvikle ny kunnskap hos elever i arbeidet med en matematisk påstand.	Hvilken verdi nærmer mønster-utvikling seg? Forklar $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots$
Enkelttilfeller	Tildeles de RB-oppgaver som involverer et enkelttilfelle	Sant eller usant? forklar Det er kortere fra $\frac{3}{16}$ til 0 enn fra $\frac{3}{16}$ til $\frac{1}{2}$.
Endelig antall tilfeller	Tildeles de RB-oppgaver som involverer et endelig antall tilfeller	Se eksempel 6, i avsnitt 4.2.2 (eneste eksempel i datamaterialet)
Uendelig antall tilfeller	Tildeles de RB-oppgaver som involverer et uendelig antall tilfeller	Tenk deg at mønsteret med stambrøker fortsetter i det uendelige. Hvilken verdi vil brøkene nærme seg?

Jeg gir her en kort redegjørelse for analyseprosessen. Hver brøkoppgave ble vurdert ut ifra de tilpassede kravene som ble satt for å kvalifisere som oppgave med elementer av resonnering og bevis. Kravene er redegjort i avsnitt 3.3. Brøkoppgaver som ikke bestod kravene ble markerte som oppgaver som ikke ga mulighet til resonnering og bevis (iRB), og ble skilt ut av analyseprosessen. Oppgavene som ga muligheter for resonnering og bevis ble merket som resonnering og bevisoppgaver (RB-oppgaver). Alle RB-oppgavene ble vurderte og merket etter antall tilfeller de tilbød elevene å jobbe med (enkelttilfeller, et endelig antall tilfeller eller et uendelig antall tilfeller). RB-oppgavene ble deretter analysert i lys av de to utvalgte hovedkomponentene, formulere hypoteser og formulering av bevis, fra dimensjon 1 i G. Stylianides` rammeverk (2009). Deretter ble RB-oppgavene analysert på bakgrunn av rammeverkets (Stylianides, 2009) dimensjon 2. RB-oppgaver som handlet om å formulere hypoteser ble analyserte for å identifisere hvilke av oppgavene som hadde kvaliteter til å være forløpere til bevis, og hvilke oppgaver som ikke kvalifiserte til å være forløpere. Studiens rammeverk inneholder seks formål som bevis kan ha (se figur 6, avsnitt 2.3). Alle RB-oppgavene ble analyserte i henhold til de seks ulike formålene. Her ble i tillegg RB-oppgaver som tilhører formulering av hypoteser knyttet til formål, også de RB-oppgavene som allerede var tilknyttet forløper til. Det må presiseres at dette er mulige formål som RB-oppgavene kan vurderes å inneha. Koblingen mellom RB-oppgave og formål er gjort på bakgrunn av min vurdering basert på mine analyser.

Analyseprosessens mål er å kunne identifisere kvalitative karakteristikker ved RB-brøkoppgavene, som samlet danner et kvalitativt bakteppe for å kunne besvare studiens forskningsspørsmål: *Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn*? I analyseprosessen benyttet jeg i stor grad begreper fra rammeverkene til A. Stylianides (2016) og G. Stylianides (2009). Begrepene har jeg oversatt med den hensikt å tilby leseren et enkelt og presist språk, samtidig som oversettelsene har hatt som mål å være nært knyttet til de originale begrepene.

3.4 Etiske refleksjoner

Som forsker er det flere etiske hensyn å ta. Dette er avhengig av hvilket forskningsdesign og analysemetoder som forskeren ønsker å trekke inn i studien sin. Når det gjelder analyse av lærebøker er det færre hensyn å ta, enn ved for eksempel å observere elever eller lærere i praksis eller ved å intervjue deltakere. Min studie krever ingen godkjennelser om personvern eller for oppbevaring av data for forskningsprosjektet. Likevel er det noen etiske refleksjoner jeg som forsker må gjøre ved gjennomføringen av studien. May Britt Postholm (2020) understreker at forskerens oppgave er å samle inn data og bearbeide disse for å få en bedre forståelse av det aktuelle forskningsfeltet, og dermed kunne bevare problemstillingen. Samtidig som forskeren tar hensyn til målsettingene til prosjektet, er det viktig at forskeren opptrer på en akseptabel måte. Det innebærer blant annet å ta hensyn til deltakernes, i mitt tilfelle lærebokforlagene, verdier og interesser. På den måten kan tillitsforholdet mellom partene opprettholdes (Postholm, 2020, s. 147-148).

Lester og Lambdin (1998) peker på to etiske betraktningen en forsker må ta hensyn til. Det første de peker på er hensynet til det jeg har forsket på. Jeg har vært i kontakt med de tre forlagene som lærebøkene er utgitt på. I samtaler har jeg fortalt om studien min, og fått tilsendt bøker fra forlagene. Lærebøkene er i studien presenterte med navn og forlag. Min hensikt med studien er ikke å sammenligne, rangere eller på noen måte henge ut enkelte lærebøker. Det har for meg vært viktig å gi en generell karakteristikk av resonnering og bevis i innholdet, noe jeg i stor grad gir en samlet vurdering av. Valget av autentiske eksempler og eksempeloppgaver er gjort for å kunne utdype karakteristikkene, ikke for å fremheve eller disfavorisere enkelte lærebøker. Det andre hensynet Lester og Lambdin (1998) trekker frem er anerkjennelse. Anerkjennelse går til de som har bidratt på studien som min veileder, førsteamanuensis i matematikkdidaktikk Kirsti Rø, kollegaer ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen ved NTNU og professor of mathematics education ved Worcester college Gabriel Stylianides for lykkeønskninger og tilgang til hans doktorgradsavhandling.

3.5 Troverdighet

Cohen et al. (2017) knytter begrepet troverdighet (eng: trustworthiness) til kvalitativ forskning, og beskriver troverdigheten ut ifra to faktorer, validitet og reliabilitet. Validitet handler om at studien undersøker det den hevder å undersøke, og at tolkningene og konklusjonene kan forsvares med den teorien som er valgt og de data som er tilgjengelige. Krippendorff (2004) utdyper og skriver at validitet handler om funnenes gyldighet, og inkluderer åpenhet om hvordan en velger ut, leser og analyserer tekster og å være konsekvent i måten en anvender prosedyrene på. Det ideelle innenfor innholdsanalyse er å beskrive og følge prosedyrene så nøyaktig som mulig, hvor målet er at enhver som benytter seg av de samme prosedyrene på det samme datamaterialet vil kunne få det samme resultatet (Krippendorff, 2004). I min studie er de omtalte prosedyrene hovedkomponentene i rammeverket til G. Stylianides (2009), som danner den helhetlige forståelsen av prosessen med resonnering-og-bevis. Validitet i dette studiet innebærer blant annet at det som undersøkes (oppgaver fra lærebøker på 5. trinn innen temaet brøk) er i samsvar med det som forskningsspørsmålet hevder at studien skal undersøke, og at de konklusjoner som trekkes fram i studien kan forsvares med det datamaterialet som er tilgjengelig og de teorier som er brukt i analysen. Reliabilitet vender blikket på studiens målinger og om de er stabile. Ved å gjennomføre flere runder med analyser, hvor tvilstilfeller har blitt prøvd ut og diskutert med veileder og kollegaer, har målingene fra utprøvingene i stor grad vært sammenfallende og stabile.

Miles et al. (2014) skisserer fem retningslinjer når det gjelder kvaliteten til konklusjoner i kvalitativ forskning. Disse kaller han for bekreftbarhet, avhengighet, kredibilitet, overførbarhet og anvendbarhet. Bekreftbarhet omhandler forskerens forforståelser og i hvilken grad disse kan påvirke funnene. Med min bakgrunn med 20 år som matematikklærer i grunnskolen og snart tre år ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, har jeg vært bevisst på mine eventuelle forforståelser rettet mot lærebøker og deres stilling i skolen. I situasjoner hvor forforståelse kan ha farget min tolkning, har jeg diskutert dette med min veileder. I visse tilfeller har jeg også benyttet meg av kolleger (matematikkdidaktikere) og tidligere kolleger (matematikklærere i grunnskolen) for å styrke bekreftbarhet. Avhengighet samsvarer med reliabilitet (Cohen et.al., 2017) og stiller spørsmålet om prosessen vil kunne gi tilsvarende resultater dersom studien blir gjentatt. I studien har jeg beskrevet mine vurderinger og analyser av rammeverk og oppgaver. For å ivareta avhengigheten gir jeg konkrete eksempler der det er hensiktsmessig for å belyse analyser og vurderinger for leseren. Kredibilitet handler om leseren vil anse studien som troverdig og overbevisende. For å ivareta avhengighet og kredibilitet har jeg beskrevet metoder, beskrevet min tolkning av teori og redegjort for utvalget av datamaterialet. Slik har jeg lagt til rette for at studien kan gjentas. Jeg har begrunnet resultater fra studien ved å vise til en rekke eksempler fra datamaterialet.

Overførbarhet handler om hvorvidt studiens konklusjoner er overførbare til andre kontekster, herunder andre læreverk, andre tematikker og andre trinn i grunnskolen. For kvalitativ forskning er generalisering ofte underordnet ved at fokuset er å beskrive i dybden det fenomenet som undersøkes (Cohen et al., 2017). I dette studiet har jeg studert matematikklærebøker fra de tre største lærebokforlagene i Norge. Foreløpig er det usikkert hvilke andre forlag som kommer med lærebøker i matematikk for 5.trinn, som baserer seg på LK20. Det vil ikke være mulig, uten videre undersøkelser, å generalisere funn fra kapitlene viet temaet brøk til andre matematiske tema eller til lærebøker hos andre forlag, selv om resonnering og bevis skal være et bærende element i alle matematiske emner. Jeg våger likevel å påstå at det er rimelig å anta at studiens resultater har overførbarhet til andre kontekster.

Anvendbarhet stiller spørsmål ved nytteverdien som forskningen kan ha for mottakerne, forskerne og samfunnet. For å gjøre studiens resultater og konklusjoner tilgjengelig både for forskningsfeltet, skoleledere og matematikklærere, har jeg unngått unødvendig komplisert språk ved å bruke presise norske oversettelser av originallitteraturens ord og uttrykk. Jeg har også forsøkt å knytte funnene i studien både til muligheter for videre forskning og til muligheter for undervisning i skolen. Temaet resonnering og bevis bidrar i seg selv til anvendbarhet ved at relaterte begreper er sentrale i de fleste av de nye kjerneelementene i matematikkfaget i norsk skole. Studien kan bidra til bevissthet omkring resonnering og bevis i skolen, og til forståelse for hva det innebærer og hvordan elevers arbeid med resonnering og bevis kan se ut. De valgte rammeverkene kan også bidra til bedre kommunikasjon og bevissthet om hva resonnering og bevis innebærer, og studien kan bidra til å vise hvordan disse kan anvendes for analyse av prosessen med resonnering-og-bevis. Dette gjelder både for forskere og for matematikklærere. Miles et.al. (2014) påpeker at troverdighet handler om i hvilken grad forskeren er i stand til å overbevise leseren. Fokuset i studiet har vært å beskrive det som kan påvirke de konklusjoner jeg mener å kunne trekke fra studiet, det som Cohen et.al. (2017) betegner som fyldige beskrivelser.

4 ANALYSE

Forskningsspørsmålet i denne studien er: *Hvilke muligheter for arbeid med resonnering og bevis er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i fire ulike lærebøker for 5. trinn*? Jeg presenterer her analysen og resultater fra analysen av oppgavene i de fire lærebøkene. Studien er ikke en komparativ studie, da jeg ønsker å se hvilke muligheter for resonnering og bevis i brøk de norske lærebøker generelt gir. Jeg presenterer derfor resultatene samlet og skiller ikke resultater mellom lærebøkene.

Som gjort rede for i kapittel 3 ble oppgavene kodet i henhold til studiens rammeverk, og med utgangspunkt i kodingen, struktureres kapittelet med avsnitt for hver kode. Hvert avsnitt vil inneholde et hovedeksempel hentet fra datamaterialet til studien. I hovedeksemplene vil jeg redegjøre for analysen av det den gitte oppgaven. Jeg vil i hvert enkelte avsnitt støtte opp med flere relevante eksempler, for å synliggjøre bredden av oppgavene innenfor den spesifikke koden. Disse eksemplene vil ikke gjennomgå en like bred analyse som hovedeksemplene, da eksemplene er tenkt for å belyse spesifikke områder innen den aktuelle koden. Jeg innleder med oppgaver som ikke gir muligheter for resonnering og bevis (iRB). Deretter presenterer jeg for RB-oppgaver, som er de oppgavene som gir muligheter for resonnering og bevis. I presentasjonen skiller jeg RB-oppgavene etter antall tilfeller som brøkoppgavene involverer. De utvalgte eksemplene vil inneholde RB-oppgaver som handler om å formulere hypoteser og som handler om å formulere bevis. Eksemplene gir i tillegg innblikk i de ulike formålene RB-oppgavene kan inneha. Jeg vil avslutningsvis i kapittelet gi en oppsummering av funnene i analysen.

Jeg vil videre presentere analysen i følgende rekkefølge:

- 4.1 Oppgaver som ikke gir muligheter for resonnering og bevis (iRB)
- 4.2 Oppgaver som gir muligheter for resonnering og bevis (RB)
  - 4.2.1 RB-oppgaver som involverer enkelttilfeller
  - 4.2.2 RB-oppgaver som involverer et endelig antall tilfeller.
  - 4.2.3 RB-oppgaver som involverer et uendelig antall tilfeller.
- 4.3 Oppsummering av resultater og funn i studien.

I kapittel 5 vil jeg diskutere funnene fra analysen og hvordan disse resultatene kan gi svar på forskningsspørsmålet til studien.

4.1 Oppgaver som ikke gir muligheter for resonnering og bevis (iRB)

Som jeg tidligere har gjort rede for består datamaterialet av totalt 1564 brøkoppgaver. I studiens utvalg tilbyr i alt 1508 brøkoppgaver ingen muligheter for resonnering og bevis. Det betyr at i overkant av 96 % av brøkoppgavene i datamaterialet knyttes til denne koden. Under presenteres eksempel 12 og utdypes en brøkoppgave som ble tilegnet koden iRB. Eksempel 13 og 14 viser andre typer brøkoppgaver som har fått denne koden.

Eksempel 12 - iRB-oppgave

Matematikk 5, oppgave 4.82a, s. 136.

Oppgave	Regn ut: $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} =$
Tilegnede koder:	iRB

Kontekst:

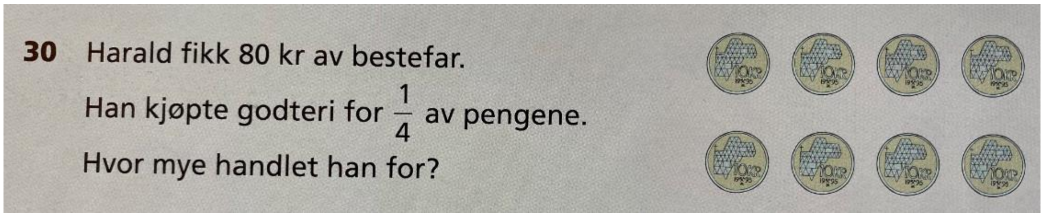
> Oppgaven presenteres i læreboka sammen med 23 liknende oppgaver. Det tilbys ingen eksplisitte representasjonsformer til selve oppgaven, men det finnes representasjonsformer tidligere i kapittelet som eleven kan støtte seg til.

Begrunnelse:

> Oppgaven er en utregningsoppgave, hvor eleven trolig vil følge en lært prosedyre for å regne seg frem til det riktige svaret i oppgaven. Oppgaven gir ingen muligheter for resonnering og bevis

A. Stylianides (2016) påpeker at oppgaver som handler om rutinepreget utregninger sjelden vil kunne inneha kvaliteter som kan gjøre oppgaven til en RB-oppgave. Da må oppgaven inneha kvaliteter utover en prosedyrebehandling for å kunne åpne muligheter for resonnering og bevis som i dette eksempelet $\frac{\quad}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{\quad} = 3\frac{1}{10}$, i avsnitt 2.2.2.

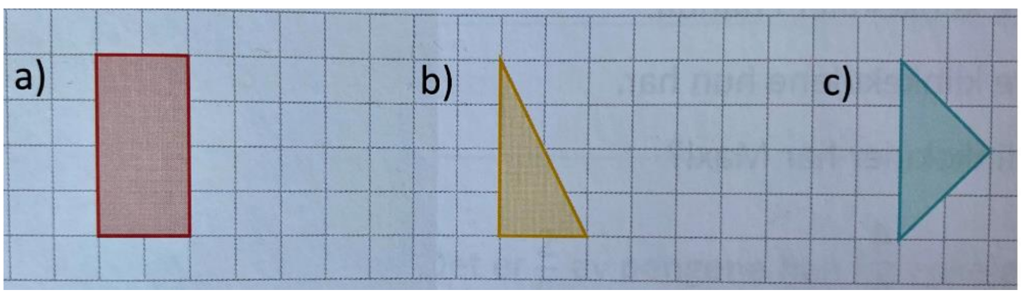
I lærebøkene finnes det en betydelig andel utregningsoppgaver, som vist i eksempel 9 (avsnitt 2.2.2). Utregningsoppgavene har også form som tekstoppgaver, vist i eksempel 13. Her legger representasjonen av 80kr med 8 tiere, til rette for at elevene skal finne ut hvor mye en fjerdedel av tierne er. Ved å trekke tre vertikale streker mellom sorteringen av tiere, finner eleven relativt



Eksempel 13, hentet fra Matemagisk 5A, oppgave 30, s. 38

enkelt at $\frac{1}{4}$ av 80kr er 20kr (to tiere). Slik oppgaven presenteres vil denne oppgaven i hovedsak dreie seg om utregning. Da det er rimelig å anta at oppgaven ikke vil gi elevene muligheter for resonnering og bevis, blir denne og liknende oppgaver kodet med iRB.

Eksempel 3 gir et innblikk i en annen type brøkoppgaver som ikke eksplisitt innehar RB-kvaliteter. Oppgaveformuleringen til oppgaven er som følger: Nedenfor ser du $\frac{1}{2}$ av hver figur. Tegn hele figuren. Det fins flere løsninger.



Eksempel 14, hentet fra Matematikk 5, oppgave 4.23 a-c, s. 115

Oppgaven presenteres i starten av delkapittelet «Brøk – fra del til hel». Oppgaven fremmer noe utforsking da den har flere løsninger. Lærerveiledningen påpeker at oppgaven derfor egner seg til elevsamarbeid. Slik oppgaven presenteres betegnes den som et plausibelt mønster, altså en oppgave hvor det ikke er mulig å gi en entydig løsning på oppgaven. Oppgavekonteksten gir ingen spesifikke rammer for gyldige løsninger. Er det for eksempel kun lov å speile om figurenes sidekanter, eller kan det speiles eller roteres om figurhjørnene? Oppgavens uklare rammer for hva som er lov, støttes ikke av A. Stylianides (2026) krav til bevisoppgaver. En utforsking uten begrensninger kan fort utfordre elever til å finne mange sammenkoblinger av halvdelene, og argumentere for at det ikke står noe om hvilke måter som er gyldige måter.

Plausible mønstre kan legge til rette for gode og spennende samtaler i klassen (Stylianides, 2009). Skal samtalene gi elever muligheter for resonnering og bevis, er det opp til læreren å åpne for argumentering om ulike løsninger da oppgaven ikke eksplisitt inviterer til dette. Dersom lærer setter begrensning til at det er kun speiling om figurenes sidekanter som er gyldig løsning her, kan vi nærme oss AS sin kategori om endelig antall tilfeller. «På hvor mange gyldige måter kan figur a formes på? Vis og begrunn for en medelev at du har funnet alle gyldige former figur a kan ha». Elevene kan på samme måte utfordres med at figurene i oppgaven viser $\frac{1}{4}$ av den opprinnelige figuren. Hvordan kan den opprinnelige figuren se ut?

Eksempel 12,13 og 14 viser eksempler på noe av bredden og utfordringene som ligger i oppgavene som ikke gir muligheter for resonnering og bevis slik de er presenterte i datamaterialet.

4.2 Oppgaver som gir muligheter for resonnering og bevis (RB)

Oppgaver som gir elever utfordringer med resonnering og bevis utgjør 3 % av datamaterialet til studien. Det er i alt 47 brøkoppgaver som gir muligheter for resonnering og bevis i utvalget til denne studien. Det er RB-oppgaver som enten handler om å formulere hypoteser eller å formulere bevis. Blant RB-oppgavene er det brøkoppgaver, som involverer enkelttilfeller, et endelig antall tilfeller og et uendelig antall tilfeller. Jeg viser her eksempler av ulike RB-oppgaver som inviterer elevene til å jobbe med ulike antall tilfeller.

4.2.1 RB-oppgaver som involverer enkelttilfeller

I underkant av 99 % av oppgavene i datamaterialet involverer enkelttilfeller, til sammen 1548 brøkoppgaver. Av RB-oppgavene er det 34 av 47 brøkoppgaver som involverer enkelttilfeller. Det utgjør i overkant av 72 % av alle RB-oppgavene.

Eksempel 14 - RB-oppgave som involverer enkelttilfeller

Multi 5a, oppgave 2.14 a-c, s. 50.

Oppgave

Tilegnede koder: Formulering av hypotese

Enkelttilfelle

Formål

- Forløper til bevis
- Å forklare
- Å generere ny kunnskap

Kontekst:

Denne oppgaven er markert med *Utforsking*: Det betyr, ifølge læreboka, at eleven får utforsket nye problemstillinger, praktiske eller mer teoretiske. Læreboka anbefaler elevene å arbeide sammen, etter å ha prøvd noen ganger på egenhånd. Dette er den første oppgaven hvor det ikke tilbys illustrerende representasjonsformer i selve oppgaven, noe oppgavene frem til denne har. I forkant av oppgaven har elevene jobbet med plassering av brøker på tallinja. Oppgave 2.14 krever som merket «utforsking» beskriver, at elever tenker nytt i møtet med den nye problemstillingen med å sammenlikne brøker. Oppgaven innleder et delkapittel om det å sammenlikne brøker. I etterkant av oppgaven kommer representasjoner av brøksirkler som viser sammenlikning av brøker.

Begrunnelse:

Elevene blir utfordret til å argumentere for hvem av barna i de ulike deloppgavene som har spist mest. I deloppgave a utfordres elevene til å sammenlikne brøker med like nevnere, i deloppgave b må de sammenlikne brøker med like tellere, mens i deloppgave c må elevene sammenlikne to brøker som har en mindre i teller enn i nevner. Dette er nytenkning for elevene og gir gode muligheter resonnering og bevis.

Alle oppgavene viser ulike og relevante måter som elever kan sammenlikne brøker på uten å dividere for å avgjøre størrelsesforholdene. Oppgavene handler i utgangspunktet om enkelttilfeller, men oppgavene har potensialet til å fungere som generiske eksempler og da gjelde for et uendelig antall tilfeller. På bakgrunn av dette er innledende oppgaven til delkapittelet og at relevante representasjonsformer kommer i etterkant av oppgaven, vurderes oppgaven som å formulere hypoteser og å være forløper til bevis. Ut ifra vurdering av kontekst antas det her at elever bruker oppgaven som enkelttilfeller.

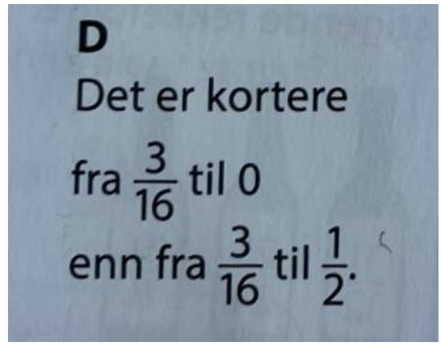
Oppgavene knyttes videre følgende formål:

- Forløper til bevis, se forklaring over.
- Forklaring, oppgaveteksten sier i oppgaveformuleringen at elevene skal vise og forklare. Men hensikten med dette formålet er at elevene oppnår en dypere innsikt i hvorfor en påstand er sann eller usann og det vurderes at denne oppgaven kan gi elevene mulighet til å forklare hvorfor brøkene kan sammenliknes på de ulike måtene.
- Å argumentere for en påstand og mot en påstand. Da intensjonen med oppgaven er å samarbeide, er det rimelig å anta at elevene gis gode muligheter til å argumentere både for og mot hverandres påstander i arbeidet med deloppgavene

---

Eksempel 4 belyser potensialet som A. Stylianides (2016) så i enkelte oppgaver med enkelttilfelle, da han argumenterte for at også enkelttilfelleoppgaver kan inneholde muligheter for resonnering og bevis. Ved å se eksempel 4 i lys av definisjonen på bevis i skolen (Stylianides, 2007b), kan det argumenteres for hvorfor oppgaven ikke kodes til å formulere bevis. På det gitte tidspunkt når oppgaven presenteres i kapittelet, er det rimelig å anta at elevgruppen ikke har dannet noen aksepterte sannheter om det å sammenlikne brøker på ulike måter. Det er videre rimelig å anta at elevene ikke har hensiktsmessige representasjonsformer å støtte seg på i formuleringen av bevis, på tidspunktet hvor oppgaven presenteres i læreboka. Elevene har jobbet med flere oppgaver som er merket *Utforsking* både tidligere i kapittelet og i tidligere kapitler. Det er derfor rimelig å anta at elevene kan inneha kjente resonnerings- og argumentasjonsformer til støtte ved et senere møte med oppgaven.

En annen type oppgave som involverer enkelttilfeller er deloppgaven i eksempel 15. Oppgaven er en av seks deloppgaver under følgende oppgaveformulering: «Sant eller usant? Diskuter med en annen elev. Skriv en begrunnelse til hver påstand». Deloppgaven handler om en påstand rettet mot akkurat dette enkelttilfelle. Eksempelet viser i tillegg en RB-oppgave som handler om å verifisere en matematisk påstand. Formålet gir elever muligheter til å utvikle argumentasjoner for å verifisere at påstanden er sann. Argumentasjonen kan for eksempel være i form av å overbevise en medelev.


D

Det er kortere fra $\frac{3}{16}$ til 0 enn fra $\frac{3}{16}$ til $\frac{1}{2}$.

Eksempel 15 er et utdrag av oppgave 262, hentet fra Multi 5A

4.2.2 RB-oppgaver med et endelig antall tilfeller

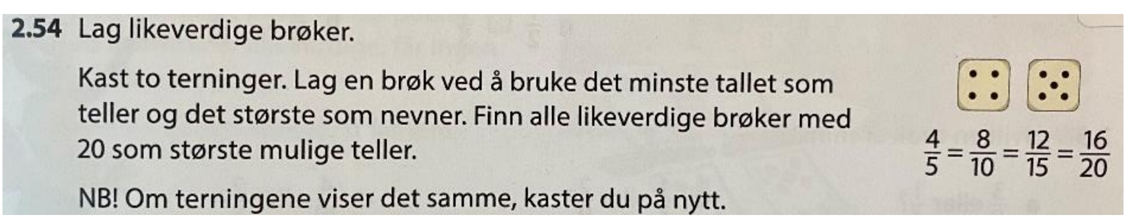
Koden samler oppgavene som handler om å finne alle løsningene av et utvalg av endelig antall tilfeller. Dette kan for eksempel være kombinatorikkoppgaver eller permutasjonsoppgaver. Målet er å finne alle mulige løsninger av et endelig antall tilfeller. Prosesser av RB vil for slike oppgaver være å finne måter å systematisk liste opp alle mulige tilfeller og argumentere for at de utgjør alle mulige løsninger.

Eksempelet viser den eneste brøkoppgaven som involverer et endelig antall tilfeller i datamaterialet.

Eksempel 16 - RB-oppgave endelig antall tilfeller

Multi 5a, oppgave 2.54, s. 61.

Oppgave


2.54 Lag likeverdige brøker.

Kast to terninger. Lag en brøk ved å bruke det minste tallet som teller og det største som nevner. Finn alle likeverdige brøker med 20 som største mulige teller.

NB! Om terningene viser det samme, kaster du på nytt.

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20}$

Tilegnede koder: Formulering av hypoteser

Endelig antall tilfeller

Formål

- Forløper til bevis
- Å forklare
- Å argumentere for en påstand

Kontekst:

RB-oppgaven 2.54 presenteres i et delkapittel, som handler om likeverdige brøker. Delkapittelet utfordrer også elevene på å utvide og forkorte brøker. Når elevene møter denne oppgaven har læreverket gitt de mange oppgaver om likeverdighet, utviding og forkorting av brøker. Elevene har i tillegg hatt tilgang til eksempler og ulike former for representasjoner før møtet med 2.54. Lærerveiledning er pr dags dato ikke blitt publisert.

Begrunnelse:

Oppgaven utfordrer elevene til å finne alle likeverdige bøker til en brøk (gitt ved terningkast) opp til og med teller lik, eller mindre enn 20. Elevene må argumentere for at de har funnet alle løsningene av et endelig antall tilfeller, med utgangpunkt i en gitt brøk. Dette legger til rette for at eleven både må forklare sine løsninger og verifisere hvorfor eleven mener at alle løsningene er funnet. Formålet til oppgaven kodes deretter. I forklaringen og verifiseringen av egne løsninger, kan oppgaven vekke behovet for å formulere et bevis. Oppgaven kodes derfor som en forløper til bevis.

En mulig løsning av oppgaven vil være å argumenter for utviding og forkorting kun som dobling og halvering av brøkene (multiplisere eller dividere med 2), men det vil ikke gi alle mulige løsninger. Eksemplet gitt i oppgaveteksten krever at brøken $\frac{4}{5}$ utvides med både tallet 2 og tallet 3 for å oppnå alle likeverdige brøker. Dersom terningkastet gir brøken $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ eller brøken $\frac{4}{6}$ må elevene i tillegg tenke forkorting av brøkene for å finne alle likeverdige brøker i utvalget. Oppgaven tilbyr elevene muligheter for resonnering og bevis.

4.2.3 RB-oppgaver med et uendelig antall tilfeller

Det er i datamaterialet identifisert tolv RB- oppgaver som involverer et uendelig antall tilfeller. Det utgjør under 1 % av alle brøkoppgavene, og i overkant av 25 % av RB-oppgavene. Eksempel 7 og 8 er ulike eksempler på RB-oppgaver som et tilknyttet denne koden.

Eksempel 17 - RB-oppgaver som involverer et uendelig antall tilfeller

Matematikk 5, Utforske sammen, s. 139.

Oppgave

Argumenter for hvorfor $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$

Tilegnede koder: RB-oppgave

Enkelttilfelle

Formål

- Å forklare
- Å argumentere for en påstand
- Verifisere
- Generere ny kunnskap

Kontekst:

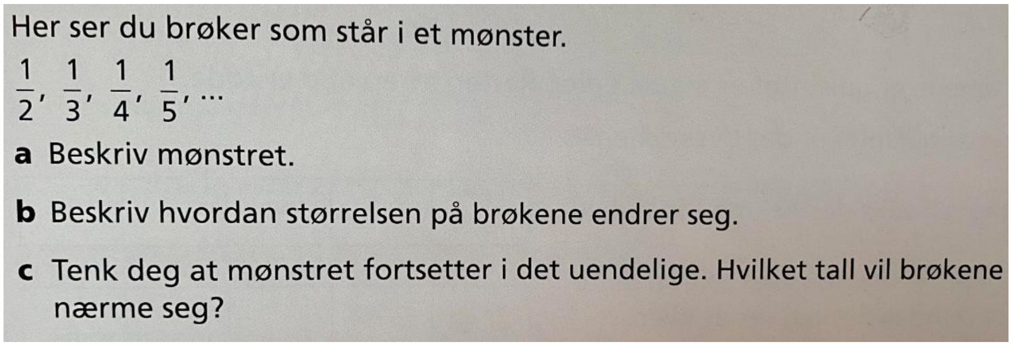
Denne oppgaven er markert som *Utforsk sammen*, som ifølge læreboka er samarbeidsoppgaver hvor elevene skal reflektere, samtale og diskutere framgangsmåter og løsningsstrategier. Oppgaven presenteres i delkapittelet «Brøk, prosent og desimal». I forkant av denne oppgaven har elevene tilgang til en eksempelside hvor sammenhengen mellom brøk, prosent og desimal gjennomgås. Støtten elevene får fra eksempelsiden og oppgavene de jobber med i forkant, gir elevene gode rammer for å løse oppgaven. Her har de tilgang til egnede representasjonsformer, som for eksempel arealmodell, til å støtte den matematiske tenkningen. Den tilgjengelige lærerveiledningen anbefaler at elevenes argumenter etter hvert blir løftet frem i klassen. Slik kan konteksten gi mulighet til å knytte forståelse til elevenes argumentasjoner. Lærerveiledningen trekker sammenlikninger med dagligdagse situasjoner hvor elever måter «en halv» som bl.a. litermål.

Begrunnelse:

Oppgaven ber elevene eksplisitt om å argumentere for hvorfor denne påstanden er sann. Formuleringen «Argumenter for hvorfor» skiller seg fra det å forklare, som er formuleringen brukt i de fleste av RB-oppgavene i datamaterialet. Å argumentere setter en forventning til eleven om å argumentere hvorfor den gitte påstanden er sann. Formulering av argumentet tar utgangspunkt i et konkret eksempel, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$. Her utfordres elevene til å gi et argument som ikke bare verifiserer påstanden, men som får påstanden til å gjelde for alle mulige likeverdige brøker av $\frac{1}{2}$. RB-oppgaven involverer derfor et uendelig antall tilfeller. Argumentet tjener flere formål. Elevene argumentere for en påstand, som skal verifiseres at er sann. I argumenteringen ligger forklaring som kan lede til en dypere forståelse av hvorfor påstanden er sann. I oppgavens kontekst tilbys elevene enkelte muligheter til argumentering. En samlet vurdering av kontekst gjør at det er rimelig å anta at RB-oppgaven vil generere ny kunnskap om begrepet likeverdige brøker.

Dette er en av få RB-oppgaver i datamaterialet som eksplisitt uttrykker og utfordrer elevene til å argumentere for at en matematisk påstand er sann. Oppgaven kan studeres i lys av definisjonen av bevis i skolen (2007b). Oppgaven presenteres mot slutten av kapittelet med brøk i læreboka. Elevene har jobbet med flere delemner, blant annet et som handler om likeverdige brøker. Det er derfor rimelig å anta at elevene har et sett med aksepterte sannheter både om likeverdige brøker og om brøk generelt. Læreboka har i forkant av oppgaven gitt elevene en mangfoldig tilgang til representasjonsformer for å bygge sin argumentasjon på. Når det gjelder elevenes potensielle argumentasjonsformer, er jeg noe mer usikker på hva konteksten har bidratt med til elevene. Kapittelet har i forkant blant annet gitt elevene åtte oppgaver merket *Uforsk sammen*, men av disse er kun tre kodet som RB-oppgaver og disse er de eneste RB-oppgavene i kapittelet. A. Stylianides (2007b) definerer bevis som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av utsagn for eller imot en matematisk påstand, med de gjeldende kravene om aksepterte sannheter, gyldige og kjente argumentasjonsformer og bruk av hensiktsmessige representasjonsformer. Jeg mener at oppgavens eksplisitte forventninger i oppgaveformuleringen, kapittelets muligheter for å etablere et sett med aksepterte sannheter, samt at kapittelet har gitt elevene tilgang til flere hensiktsmessige representasjonsformer, veier opp for tvilen rundt elevenes argumentasjonsformer. I vurderingen har også det at oppgaven presenteres mot slutten av brøkkapittelet, ledet til at RB-oppgaven kodes som formulering av bevis.

En brøkoppgave hvor det er mer eksplisitt at oppgaven involverer et uendelig antall tilfeller er oppgave 38 (eksempel 18). Allerede i mønsterutviklingen av stambrøkene indikerer de av


Her ser du brøker som står i et mønster.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

a Beskriv mønstret.

b Beskriv hvordan størrelsen på brøkene endrer seg.

c Tenk deg at mønstret fortsetter i det uendelige. Hvilket tall vil brøkene nærme seg?

Eksempel 18: Oppgave med et uendelig antall tilfeller

sluttende tre prikkene at mønsteret vil fortsette i det uendelige. Deloppgave c viser i klartekst at elevene utfordres til å tenke seg at mønsterutviklingen fortsetter i det uendelige, at RB-oppgaven involverer et uendelig antall tilfeller.

4.4 Oppsummering og funn fra analysen

For å kunne besvare forskningsspørsmålet til studien kan resultatene fra analysen studeres fra to perspektiver, et kvantitativt og et kvalitativt, hvor hovedvekten ligger i det kvalitative. Begrunnelsen er at det kvantitative perspektivet gir et overblikk over omfanget av RB-oppgaver elevene tilbys i lærebøkene, mens det kvalitative perspektivet gir et dypere innblikk i hvilke muligheter for resonnering og bevis det ligger i RB-oppgavene. Det kvalitative viser hvilke muligheter som tilbys, mens det kvantitative viser omfanget av mulighetene som tilbys.

Rammeverket som ble utviklet for studien ser ut til å evne og skille ut de oppgavene i datamaterialet som kvalifiseres til å være RB-oppgaver. Samtidig gir rammeverket en hensiktsmessig måte å analysere mulighetene for resonnering og bevis i de ulike oppgavene. Tilpasningsgrepene, med å vurdere konteksten som oppgavene presenteres i, gjør at rammeverket gir valide resultater som kan brukes til å svare på studiens forskningsspørsmål.

Analysen av brøkoppgavene i de fire lærebøkene, viser at elevene tilbys et svært begrenset antall oppgaver som gir muligheter for å arbeide med resonnering og bevis. Som tabell 5 illustrerer er det kun 47 brøkoppgaver som tilbyr muligheter for resonnering og bevis.

Fordeling av brøkoppgaver i datamaterialet	
Antall RB-brøkoppgaver	47
Antall iRB-brøkoppgaver	1498
Totalt antall brøkoppgaver	1545

Tabell 5: Brøkoppgaver i datamaterialet

Det betyr at det er 3% av det totale antallet med brøkoppgaver, hvor femte trinnselevene tilbys å arbeide med resonnering og bevis. Den lave prosentandelen med RB-oppgaver gir elevene få muligheter til å arbeide med slike oppgaver. Dette kan bety at det ikke er fokus på å utvikle RB-oppgaver.

Jeg ønsker også å se på fordelingen av ulike typer RB-oppgaver i brøk, for å gi en oversikt over mulighetene som ligger i RB-oppgavene.

I datamaterialet er det 33 oppgaver som handler om å formulere hypoteser (se tabell 6). Det et i overkant av 2% av alle brøkoppgavene. Det er identifisert 14 oppgaver i datamaterialet som handler om å formulere et bevis, som er i underkant av 1% av alle brøkoppgavene i datamaterialet. Blant RB-oppgavene utgjør formulering av hypoteser 70% av oppgavene, mens formulering av bevis utgjør 30% av RB-oppgavene.

Fordeling av RB-brøkoppgaver	
Formulering av hypoteser	33
Formulere et bevis	14
Totale antall RB-brøkoppgaver	47

Tabell 6: Fordeling av hypotese- og bevisoppgaver

En viktig rolle som oppgavene med å formulere hypoteser kan ha, er å være forløpere til å formulere bevis. Av de 33 RB-oppgavene som handler om å formulere hypoteser i datamatematerialet, innehar 28 av oppgavene (85%) kvaliteter til å fungere som forløpere til bevis.

Analysen avdekker, i tillegg til et begrenset antall RB-oppgaver, at brøkoppgavene som lærebøkene tilbyr elever på femte trinn å jobbe med nesten uten unntak involverer enkelttilfeller. Enkelttilfeller utgjør over 99% av brøkoppgavene i datamaterialet. Tabell 7 viser at oppgaver som involverer et endelig antall tilfeller og et uendelig antall tilfeller er nesten fraværende, med henholdsvis 0.07% og 0,78% av brøkoppgavene i datamaterialet.

En annen utfordring, som meldte seg allerede i etableringen av studiens rammeverk, er rettet mot antall tilfeller som brøkoppgavene involverer. Tabellen viser den dominerende andelen av brøkoppgaver som involverer enkelttilfeller i datamaterialet.

Antall tilfeller som er involvert i RB-oppgavene

	Antall	Prosentandel av RB-oppgaver	Prosentandel av datamaterialet
Enkelttilfeller	34	72	99
Endelig antall tilfeller	1	2	0
Uendelig antall tilfeller	25	26	1
Totalt	47	100%	100%

Tabell 7: Antall tilfeller i oppgaver

Tabellen viser at selv blant RB-oppgavene handler 72% av brøkoppgavene om å jobbe med enkelttilfeller. Blant RB-oppgavene utgjør oppgaver som involverer et uendelig antall tilfeller 25% av brøkoppgavene, mens oppgaver som involverer et endelig antall tilfeller innehar en beskjeden prosentandel.

Resultatene av oppgavenes formål må sees i lys av at en RB-oppgave kan inneha flere mulige hensikter, og av den grunn kan en oppgave knyttes til flere koder.

Formålene til RB-oppgavene

	Antall	Prosentandel av RB-oppgaver
Å argumentere mot en påstand	41	87
Å argumentere mot en påstand	8	17
Forklare	45	96
Verifisere	21	45
Motbevise	7	15
Generere ny kunnskap	18	38

Tabell 8: Formål til RB-oppgavene

Tabell 8 gir en oversikt over fordelingen av de ulike formålene til RB-oppgavene. Oversikten viser at de mest anvendte formålene til RB-oppgavene i studien er knyttet til det *å forklare* og til det *å argumentere for en påstand*, med henholdsvis 96% og 87% av RB-oppgavene. Elevene møter færrest RB-oppgaver som handler om det å *motbevise* eller det *å argumentere mot en påstand,* som er kun tilknyttet 7% og 8% av RB-oppgavene. Tabellen viser i tillegg at nær 20% av RB-oppgavene har som formål *å generere ny kunnskap* hos elevene, mens 45% av RB-oppgavene handler om å *verifisere* påstander.

Studiens resultater avdekker følgende overordnede funn:

Lærebøkene tilbyr et meget begrenset antall brøkoppgaver som gir elever muligheter for resonnering og bevis

Lærebøkene inneholder brøkoppgaver som nesten utelukkende involverer enkelttilfeller

RB-oppgavene handler i stor grad *å forklare* og om *å argumentere for en matematisk påstand*.

Studiens rammeverk fungerer til både å identifisere RB-oppgaver i lærebøker, og til å identifisere karakteristikker ved RB-oppgavene.

5 Diskusjon

I studien har jeg analysert brøkoppgaver i lærebøker på 5. trinn, som baserer seg på den nye læreplanen. *Resonnering og argumentasjon* er et av læreplanens seks kjerneelementer, og kjerneelementet løfter frem viktigheten av resonnering og bevis i matematikkundervisningen. Utdanningsdirektoratet definerer selv kjerneelementer slik:

Med kjerneelementer mener vi både det viktigste innholdet, og det elevene må lære for å kunne mestre og bruke faget. Det kan altså være kunnskapsområder, metoder, begreper, tenkemåter og uttrykksformer. (Utdanningsdirektoratet, 2019)

Som det viktigste innholdet i matematikk skal altså resonnering og argumentasjon både læres som en matematisk kunnskap og være bærende tankemåter i matematikkundervisningen på alle trinn. Vil da resonnering og bevis være bærende tankemåter i lærebøker i matematikk som bygger på den nye læreplanen? Målet for studien har vært å gi innsikt i hvilke muligheter for resonnering og bevis det er å finne i brøkoppgavene til lærebøker på 5. trinn.

Funnene i studien indikerer at resonnering og bevis ikke nødvendigvis oppnår en slik mulighet i brøkkapitlene til lærebøkene, som intensjonen til Utdanningsdirektoratet (2019) formidler. Jeg vil i dette kapittelet diskutere funnene fra studien opp mot relevant litteratur og se de i sammenheng med praksis i skolen. I avsnitt 5.1 ser jeg på de utfordringer som den lave andelen av RB-brøkoppgaver i lærebøkene gir og hva det kan ha å si for matematikkundervisningen. Videre vil jeg i avsnitt 5.2 se på karakteristikker ved RB-oppgavene i studien. I 5.3 vil jeg sette søkelyset på studiens rammeverk, før jeg avslutningsvis i avsnitt 5.4 diskuterer kvaliteten på studien.

5.1 Andelen av RB-brøkoppgaver i lærebøkene

Studiens mest markante funn handler om andelen av brøkoppgaver som gir muligheter for resonnering og bevis i lærebøkene. At kun 47 brøkoppgaver av i alt 1548 brøkoppgaver inviterer elevene til resonnering og bevis er urovekkende. I snitt betyr det at elevene tilbys muligheten for resonnering og bevis i hver 33. brøkoppgave. Det er ikke mye som kan tyde på at resonnering og bevis er selve kjernen i matematikken (A. H. Schoenfeld, 2009) ved dette funnet. Om funnet er standarden for de resterende kapitlene i lærebøkene, kan ikke studien si noe sikkert om. Likevel gir funnet sterke signaler om at resonnering og bevis ikke har funnet sin plass i lærebøkene.

Mangelen på muligheter for resonnering og bevis i lærebøkenes brøkoppgaver kan trolig tolkes i mange retninger. Det mest nærliggende å anta er at det å arbeide med resonnering og bevis ikke er den fortrukne veien til læring hos lærebokforfatterne, eller de er ikke bevisst på hvilke typer oppgaver som blir laget. Utfordringen kan også ligge i det Yackel og Hanas beskriver om at resonnering og bevis er noe elever finner vanskelig å lære, lærere finner vanskelig å undervise (Yackel & Hana, 2003) og kanskje lærebokforfattere finner utfordrende å formidle i sine lærebøker.

Den muntlige formen som matematisk argumentasjon har i undervisningen på barnetrinnet kan oppleves som utfordrende av lærere (Carpenter et. al., 2015). Wæge (2014) beskriver lærernes utfordringer som kan relateres til denne utfordringen. «Det er enkelt å spørre elevene om hvordan de tenker. Men hva så?». Det å starte en resonnering eller argumentasjon hos elever kan oppleves som enklere enn å lede argumentasjonsutviklingen videre mot å formulere bevis. Det kan tenkes at utfordringen med å lede elever gjennom resonnering og bevisprosessen også kan speiles inn mot lærebokforfatterne i forlagene. Studier viser at barn helt nede i barnehagealder kan resonnere omkring matematiske sammenhenger, og kan argumentere for sine resonneringer (Ball & Bass, 2003; Cooper & Warren, 2011). Utfordringene ligger derfor trolig ikke hos elevene, men heller i undervisningstilbudet som elevene mottar. Og der spiller nettopp lærebøkene en sentral rolle med deres sterke posisjon både som tilgang til oppgaver for elevene, og som kilde til faglig kompetanse hos lærerne (Grønmo, Bergrem, Kjærnsli, Lie & Turnmo, 2004).

Brøk er et komplekst matematisk begrep som elever har vanskeligheter med å lære (Lamon, 2020; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det kan derfor argumenteres for at nettopp av den grunn burde resonnering og bevis være veien til læring av brøk. A. Stylianides` ord støtter argumentet når han poengterer at bevisets potensiale til å fremme forståelse og overbevisning er en av hovedårsakene til at bevis er så viktig for studentenes læring av matematikk (Stylianides, 2009, s. 10). Argumentet er også i tråd med kjerneelementenes intensjoner i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019). LK20 har gode intensjoner når de skriver at elever skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Dessverre kan argumentet se ut til ikke å være i tråd med lærebøkene. Om funnet av den lave andelen RB-brøkoppgaver er standarden for lærebøkene, kan fort resonnering og bevis bli en spesiell aktivitet for spesielle tilfeller og ikke en «natural, ongoing part of classroom discussions, no matter what topic is being studied» (NCTM, 2000, s. 342).

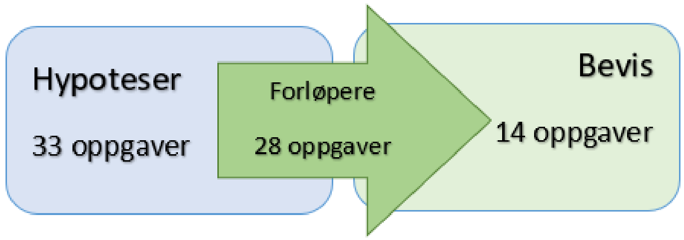
5.2 Karakteristikker ved RB-oppgavene i lærebøkene

De kvantitative dataene i studien viser en svært begrenset andel av RB-oppgaver. Følgen av dette er at utvalget for å studere de kvalitative karakteristikkene hos RB-oppgavene er beskjedent. Det er likevel interessant å studere oppgavene for å kunne si noe om hvilke muligheter for resonnering og bevis det ligger i RB-oppgavene i lærebøkene på 5. trinn.

Det andre markante funnet til studien er andelen oppgaver som involverer enkelttilfeller. Andelen er også betydelig blant RB-oppgavene hvor over 70% av brøkoppgavene handler om enkelttilfeller. Ifølge brødrene Stylianides (Stylianides, 2009; Stylianides, 2016) gir oppgaver som involverer enkelttilfeller et mer utfordrende utgangspunkt for resonnering og bevis. G. Stylianides (2009) så heller ikke muligheter for å arbeide med resonnering og bevis med denne gruppen av oppgaver, og utelot disse fra rammeverket sitt.

Analysetabellen av RB-oppgavene (vedlegg nr. 1) viser at 11 av 14 oppgaver som handler om å formulere bevis, er RB-oppgaver som involverer enkelttilfeller. Som eksemplene 14 og 15 (avsnitt 4.2.1) i analysekapittelet viser gir oppgavene gode muligheter for å arbeide med resonnering og bevis. Tolv RB-oppgaver involverer det å jobbe med et uendelig antall tilfeller, hvorav tre av disse kodes med å formulere bevis. Som nevnt i analysen finnes det kun en brøkoppgave i datamaterialet som involverer et endelig antall tilfeller. For å kunne identifisere kvalitative karakteristikker ved RB-oppgavene, ble kodene som handlet om formålene til RB-oppgavene tatt med i rammeverket. Det å kunne si noe om mulige hensikter oppgavene kan inneha, er nyttig for å gi et videre og grundigere bilde av hva som ligger i mulighetene for resonnering og bevis i RB-oppgavene.

G. Stylianides (2009) påpeker den viktige rollen som forløpere har i hans resonnering-og-bevisprosess. Forløperne er brobyggerne mellom hovedkomponentene i prosessen. Blant RB-oppgavene som handler om å formulere hypoteser innehar de aller fleste (28 av 33 RB-oppgaver) kvaliteter til å være forløpere til bevis. Ved å studere hovedkomponentene i studiens rammeverk bundet sammen med forløperne til bevis kan resonnering-og-bevisprosessen skisseres tydeligere. Til tross for den beskjedne andelen med RB-oppgaver, illustrerer figur 8 en fornuftig fordeling av RB-oppgaver, fra hypoteser, via forløpere til bevis.



Figur 8: Resonnering-og-bevisprosessen blant RB-oppgavene

Når det gjelder de andre formålene viser analysen av RB-oppgavene at de i stor grad handler om å argumentere for en matematisk påstand. Dette er i tråd med hva forskningen bemerker (Reid & Knipping, 2010). De Villiers (1990) trekker frem at bevis tradisjonelt sett har handlet om å verifisere i form av å overbevise eller å argumentere for en matematisk påstand. I denne studien valgte jeg både å ha en kode for formålet å argumentere for en matematisk funksjon og en annen kode for formålet verifisere. Dette valget ble tatt på bakgrunn av at verifisering handler om å argumentere for en matematisk påstand, men siden jeg også knytter formålene til RB-oppgaver som handler om hypotesesetting, så trenger ikke nødvendigvis det å argumentere for en påstand trekkes til å verifisere påstanden. Dette kommer også frem i analysetabellen (vedlegg 1) hvor 11 av 14 RB-oppgavene som handler om formulering av bevis er kodet med å verifisere.

Formålene som handler å argumentere for eller mot en matematisk påstand og om det å forklare hvorfor en påstand er sann eller usann, har fått en sterkere oppmerksomhet i den matematikkdidaktiske forskningen. Årsaken er ifølge A. Stylianides (2016, s. 12), de handler om selve kjernen av matematikken som en meningsskapende aktivitet. Elevene i denne studien blir i liten grad utfordret til å argumentere mot en matematisk påstand, eller å motbevise en påstand. Det at omtrent alle av RB-oppgavene har som formål å gi elever en dypere innsikt i hvorfor en matematisk påstand er sann eller usann, er en klar styrke ved RB-oppgavene. Det at nær 40% av RB-oppgavene kan inneha den hensikt å generere ny kunnskap hos elevene understreker dette.

De kvalitative karakteristikkene av RB-oppgavene kan oppsummeres slik:

RB-oppgavene består i stor grad av oppgaver som involvere enkelttilfeller

> RB-oppgavene handler i stor grad om å argumentere for en matematisk påstand, og nær alle har til hensikt å gi elevene en dypere matematisk innsikt
>
> Samlet er RB-oppgavene fordelt fornuftig i forhold til resonnering-og-bevisprosessen, med høy andel forløpere

Ved å studere hele utvalget av brøkoppgaver, viser den lave andelen av RB-oppgaver tegn på at resonnering og bevis ikke har funnet sin plass, eller fått sin fortjente plass i lærebøkene i matematikk på 5. trinn. Dersom vi zoomer inn på RB-oppgavene kan vi se tegn på at resonnering og bevis kan begynne å finne sin form i lærebøkene. Kort oppsummert kan man si at det er for få oppgaver knyttet til RB, men de oppgavene som finnes, har potensiale til å fungere godt som RB-oppgaver.

5.3 Studiens rammeverk

Studien viser at rammeverkene til G. Stylianides (2009) og A. Stylianides (2016) fint lar seg kombinere, og at kombinasjonen av rammeverkene kan danne et funksjonelt og mangfoldige rammeverk for å analysere resonnering og bevis i lærebøker. Kombinasjonen gir et rammeverk som dekker samtlige antall tilfeller en oppgave kan involvere og åpner muligheter for å analysere oppgavene i lys av de to dimensjonene i resonnering-og-bevisprosessen i G. Stylianides` analytiske rammeverk (2009).

Det var likevel en avgjørende faktor å gjøre modifikasjonene for å kunne ta i bruk rammeverkene på de norske lærebøkene. De viktige grepene med å vurdere hver oppgave i lys av konteksten de ble presentert i, samt å vurdere oppgavene ut ifra kravene i A. Stylianides` definisjonen av bevis i skolen (2007b), ga nyttig informasjon. Informasjonen ble analysert ut ifra hvilke muligheter for resonnering og bevis det er rimelig å anta elevene fikk jobbe med i arbeidet med oppgaven. Studiens rammeverk viser seg å være hensiktsmessig og funksjonell for å studere resonnering og bevis i norske lærebøker.

5.4 Kvaliteten på studien

De metodiske tilnærmingene og valgene som ligger til grunn for undersøkelsen har hjulpet meg til å finne ut hvilke muligheter det er for resonnering og bevis det er å finne blant oppgaver innen temaet brøk i de fire lærebøkene på 5. trinn. Ved å avdekke både kvantitative og kvalitative funn gjør at studien har et bredere grunnlag for å besvare sitt forskningsspørsmål.

Et kvalitativt grunnlag ble lagt igjennom et grundig arbeid med datamaterialet i studien. Brøkoppgaver ble nøye gjennomarbeidet i flere runder hvor de ble vurderte opp mot muligheter for resonnering og bevis. Hvert tvilstilfelle har blitt utprøvd og diskutert med veileder og matematikkdidaktiske medarbeidere. Dette har vært nyttig, både for kvaliteten av studien og troverdigheten til funnene i denne kvalitative studien. Diskusjonene har også hatt betydning for modifiseringen av rammeverket som måtte til for å fungere på de norske lærebøkene.

Utvalget til studien er lærebøker fra de største og mest anerkjente lærebokforlagene i Norge. Dette var noe styrt at tiden som studien pågår i, hvor den nye læreplanen nettopp har tredd i kraft. Trolig hadde utvalget vært fra de samme lærebokforlagene om tiden har vært annerledes. Det er likevel et vesentlig forbehold med utvalget til studien, at ikke alle lærebøkene og lærerveiledningene til de ulike forlagene ble publiserte i tide til å bli en del av studiens utvalg.
Jeg har i denne etter beste evne analysert samtlige brøkoppgaver i fire lærebøker, med et modifisert rammeverk for å kunne gi et så riktig blide av mulighetene for resonnering og bevis som finnes i brøkoppgavene som mulig. Jeg mener at studien gir verdifull informasjon om disse mulighetene og samtidig gir eksempler på hvordan muligheter som resonnering og bevis kan se ut i en femteklasse. Studien gir en pekepinn på hvordan lærebokforfattere har tolket kjerneelementer og kompetansemål i den nye læreplanen. Det er nyttig kunnskap for skoleledere og matematikklærere i Norge.

6 Avslutting og perspektivering

Denne studien gir et relevant innblikk i det som anses som selve kjernen i matematikken.

Resonnering og bevis i skolen har hatt forskningens oppmerksomhet i flere tiår. Det kan tyde på at forskningen begynner å sette spor i læreplaner både internasjonalt og nasjonalt. Her til lands har den nye læreplanen LK20 nylig tredd i kraft. Med nye kjerneelementer som definere hva matematikk i grunnskolen skal være, og hva som inngår i å ha matematikkompetanse. Resonnering og bevis løftes frem i kjerneelementet resonnering og argumentasjon. Elever skal lære å resonnering og argumentere matematisk og de skal benytte resonnering og argumentasjon som tenkemåter og uttrykksformer for å lære andre matematiske emner.

I kjølvannet kommer nå lærebokforlagene ut med nye lærebøker tilpasset den nye læreplanen. Lærebøkene er lærebokforfatterens tolkninger av den nye læreplanen. Valenta og Enge (2020) har studert hvordan læreplanen legger til rette for resonnering og bevis. De påpeker at viktige begreper innenfor resonnering og bevis ikke blir eksplisitt definerte i læreplanen. Dette løfter spørsmålet. Hvilke muligheter for resonnering og bevis vil lærebøkene legge til rette for?

Min studie viser tegn på at disse mulighetene ikke nødvendigvis være sterkt representert i de nye lærebøkene i matematikk. Studiens funn er viktig kunnskap for skoleledere og matematikklærer som, sammen men elevene, er tettest tilknyttet lærebøkene.

Min studie åpner for videre forskning om resonnering og bevis. Det å bruke rammeverket for å studere resonnering og bevis i andre matematisk emner er en spennende tanke. Det vil også være interessant å studere hvordan kjerneelementet resonnering og argumentasjon implementeres i undervisningen på barnetrinnet. Både gjennom bruk av lærebøker og bruk av andre læremidler. En spennende studie vært og fulgt en klasse på småtrinnet, som tar i bruk definisjonen av bevis i skolen (Stylianides, 2007b) i sin matematikkundervisning.

Referanser

Aberdeen, T. (2013). Yin, RK (2009). Case study research: Design and methods . Thousand Oaks, CA: Sage. *The Canadian Journal of Action Research, 14*(1), 69-71.

Alseth, B., Arnås, A., M, R., & Nordberg, G. (2020). *Multi 5A Elevbok*. Oslo: Gyldendal Noesk Forlag AS.

Alseth, B., Solem, I. H., Eriksen, E., & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2 Matematikkundervisning på 5. til 7. trinn*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S., & Bretscher, N. (2010). Values and variables: Mathematics education in high-performing countries. Retrieved from https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/Values_and_Variables_Nuffield_Foundation_v__web_FINAL.pdf

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children, 216*, 235.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44): NCTM.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. lll, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Berg, B. L., & Lune, H. (2012). *Qualitative research methodes for the social science*. New Jersey: Pearson Education Inc.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (2014). *Children`s Mathematics: Cognitively Guided Instruction* (Second ed.): Heinemann Educational Books.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. H. (2015). *Children's Mathematics, Second Edition: Cognitively Guided Instruction* (second ed.): HEINEMANN EDUCATIONAL BOOKS.

Cavanagh, S. (1997). Content analysis: concepts, methods and applications. *Nurse researcher, 4*(3), 5-16.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research methods in education*: routledge.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In *Early algebraization* (pp. 187-214): Springer.

Cramer, J. (2011). *Everyday argumentation and knowlegde construction in mathematical tasks.* Paper presented at the Proceedings of Seventh Congress of European Research in Mathematics Education.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (Fourth edition ed.). Glasgow: Sage publications.

Danielsen, I.-J., Skaar, K., & Skaalvik, E. M. (2007). *De viktige få: Analyse av elevundersøkelsen*. Retrieved from Kristiansand:

Davis, P., & Herch, R. (1981). The Mathematical Experience. In. Boston, USA: Birkhauser.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Denscombe, M. (2014). *The good research guide: for small-scale social research projects*: McGraw-Hill Education (UK).

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students' performances. *Proceedings of PME, 23*, 273-280.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., . . . Granum, K. (2016). Med ARK&APP. *Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer. Oslo:*

Universitetet i Oslo. Retrieved from http://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf
Goodlad, J. I. A. (1979). Curriculum inquiry: The study of curriculum practice. *Educational Research*, 43-76.
Grevholm, B. (2017). *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Research in Nordic and Baltic countries*: Cappelen Damm akademisk.
Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S., & Turmo, A. (2004). Hva i all verden har skjedd i realfagene. *Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003, 5*.
Grønmo, L. S., & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS*. Retrieved from Oslo:
Guldbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K., & Olsen, V. S. (2020a). *Matematikk 5 Grunnbok*. Oslo: Cappelen Damm AS.
Guldbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K., & Olsen, V. S. (2020b). *Matematikk 5 Lærerveiledning*. Oslo: Cappelen Damm AS.
Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908): Springer.
Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 66-78). Rotterdam: Sense Pulishers.
Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.
Healy, L., Hoyles, C., & Laborde, J. (2001). Teaching and learning dynamic geometry. *Editorial in the special issue on the subject in the IJCML, 6*(3).
Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula—towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies, 45*(3), 354-378.
Hsieh, H.-F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277-1288.
Jablonka, E., & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks. *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education*, 363-372.
Jahnke, H. N., & Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM, 45*(3), 469-482.
John, M., Burton, L., & Stacey, K. (1985). Thinking Mathematically. In. New York: Addison-Wesley Publishers Limited.
Knipping, C. (2004). *Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms*. Paper presented at the Developments in mathematics education in German-speaking countries. Selected papers from the annual conference on Didactics of Mathematics, Ludwigsburg.
Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in Mathematics Education*, 379-405.
Kongelf, T. R. (2019). Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra? *Doctoral dissertations at University of Agder*.
Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology.* (Second edition ed.). Thousand Oaks, CA:: Sage Publications.
Kunnskapsdepartementet. (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05). Retrieved from https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf
Lamon, S. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding* (Fourth ed.). New York: Routledge.
Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom–the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 129-156.

Lester, F. K., & Lambdin, D. V. (1998). The ship of Theseus and other metaphors for thinking about what we value in mathematics education research. In *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 415-425): Springer.
Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM, 41*(6), 809-826.
Manin, Y. (1977). *A course in Mathematical logic*. New York: Springer Verlag.
Manin, Y. I. (1977). *A course in mathematical logic. Translated from the Russian by Neal Koblitz* (Vol. 53). New York: Springer Verlag.
Mariotti, M. A. (2000). Introduction tp proof: The mediation of a dynamic software enviroment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.
Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the PME: Past, present and future.* (pp. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, 41-51.
Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289.
Mayring, P. (2014). Qualitative content analysis: theoretical foundation, basic procedures and software solution. Retrieved from https://www.ssoar.info/ssoar/bitstream/handle/document/39517/ssoar-2014-mayring-Qualitative_content_analysis_theoretical_foundation.pdf?sequence=1

Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldana, J. (2014). Qualitative data analysis: A methods sourcebook.
NCTM, N. C. o. T. o. M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
NCTM, N. C. o. T. o. M. (2008). *Navigating through reasoning and proof in grades 9-12.* Reston VA: NCTM.
Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM, 45*(5), 685-698.
Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(5), 158-175.
Postholm, M. B. (2020). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget.
Raen, K. M., Kongsnes, A. L., Lang-Ree, H. L., & Nyhus, G. (2020). *Matemagisk 5A Grunnbok*. Oslo: Aschehoug undervisning.
Raen, K. M., Kongsnes, A. L., Lang-Ree, H. L., & Nyhus, G. (2020). *Matemagisk 5B Grunnbok*. Oslo: Aschehoug undervisning.
Reid, D., & Vargas, E. (2017). *Proof-based teaching as a basis for understanding why*.
Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 5-29.
Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education*. Rotterdam: SensePublishers.
Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of educational research, 75*(2), 211-246.
Rezat, S. (2011). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. In *From Text to'Lived'Resources* (pp. 231-245): Springer.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. In B. Grevholm (Ed.), *Mathematics*

textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic

and Baltic countries. Oslo, Norge: Cappelen Damm Akademisk.
Schmidt, W., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. (1996). Many Visions. *Many Aims: A Cross-National Investigation of*.
Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R. G. (2001). *Why Schools Matter: A Cross-National Comparison of Curriculum and Learning. The Jossey-Bass Education Series*: ERIC.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition,

and sense making in mathematics. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on*

mathematics teaching and learning (pp. 334-370). Reston, VA:: National Council of

Teachers of Mathematics / Information Age Publishing.
Schoenfeld, A. H. (2009). The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades A K-16 Perspective* (pp. xii-xvi). New York/London: Routledge.
Skott, J., Skott, C. K., Jess, K., & Hansen, H. C. (2018). Delta 2.0: Matematik for lærerstuderende. In: Samfundslitteratur.
Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670.
Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*: sage.
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313-340.
Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20.
Stylianides, A. J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289-321.
Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*: Oxford University Press.
Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351): Brill Sense.
Stylianides, A. J., & Harel, G. (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective*: Springer.
Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2006). *Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving.* Paper presented at the Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education.
Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). Studying the classroom implementation of tasks: High-level mathematical tasks embedded in 'real-life'contexts. *Teaching and Teacher Education, 24*(4), 859-875.
Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward.
Stylianides, G. J. (2005). *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: A curricular perspective*: University of Michigan.

Stylianides, G. J. (2008). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(1), 191-215.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11*(4), 258-288.

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. In: Elsevier.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades*. New York: Routledge.

Thomson, S., & Fleming, N. (2004). Summing it up: Mathematics achievement in Australian schools in TIMSS 2002. *TIMSS Australia Monograph Series*, 3.

Utdanningsdirektoratet. (2019). Kjernelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. . Retrieved from https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/

Valenta, A., & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden, 14*(3), 18 sider-18 sider.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*: Springer Science & Business Media.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 82-107.

Volmink, J. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagoras, 23*, 7-10.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 227-236.