Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Kristin Valla Dønnem

Representasjon og argumentasjon

En kvalitativ undersøkelse av seks elevers bruk av representasjoner i utvikling av gyldige argument.

Masteroppgave i Masteroppgave i matematikkdidaktikk (1-7)
Veileder: Anita Valenta
Mai 2020

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

I studien undersøkes elevers bruk av representasjoner i deres argumentasjon for en hypotese. Formålet med studien er å bidra til mer kunnskap rundt elevers bruk av ulike typer representasjoner når de skal utvikle gyldige argument for en generell matematisk hypotese. Studiens forskningsspørsmål er: *Hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elever i arbeid med èn generell matematisk hypotese kan fremme eller hemme utvikling av gyldige argument?*

Studien er kvalitativ og består av intervju og observasjon av seks sjettetrinnselever. Elevene skulle argumentere for følgende hypotese, formulert av elevene selv: «Når man legger sammen tre påfølgende tall så vil summen alltid være i tregangen». Elevene argumenterte for hypotesen i grupper på tre og tre elever. Datamaterialet består av transkripsjoner, elevenes arbeidsark og observasjonsnotat.

For å analysere om elevenes argumentasjon var gyldig, ble det tatt utgangspunkt i A. Stylianides (2007b; 2016) sin definisjon av et bevis som et matematisk argument. Type argumentasjon ble kategorisert ut i fra G. Stylianides (2008) sin inndeling i empirisk argument, redegjørelse, generisk eksempler og generell logisk slutning. Duval (2006) sin inndeling i ulike representasjonssystemer ble brukt for å kategorisere elevenes ulike typer representasjoner brukt i studien, hvilket inkluderte muntlige forklaringer, tallsymboler og ikoniske representasjoner i form av tegninger. Elevenes tegninger ble kategorisert i strukturelle og ikke-strukturell tegninger, basert på potensialet tegningene hadde for å kunne utforske strukturer tilknyttet hypotesen. Jeg analyserte også hvordan tegning ble brukt ut i fra Stylianou (2011; 2013) sin beskrivelse av representasjoner brukt som utforskningsverktøy.

Resultatene mine viser at når elevene kun tar i bruk tallsymboler og muntlige forklaringer så kan det hemme deres utvikling av gyldige argument. Ikke-strukturelle tegninger hjalp heller ikke elevene til å utvikle gyldige argument, mens strukturelle tegninger derimot førte til gyldige argument. De strukturelle tegningene ble brukt som utforskningsverktøy hvor tegningene stadig ble endret og manipulert for å utforske strukturer og sammenhenger tilknyttet hypotesen. Ved å utforske på strukturen i tegningene, og bruke tegningene som et felles språkverktøy for å kommunisere med fellesskapet, fikk elevene mer innsikt i generaliteter tilknyttet hypotesen hvilket hjalp elevene til å utvikle gyldige argument for hypotesen.

Abstract

This study investigates students' use of representations in their argumentation for a hypothesis. The purpose of this study is to contribute to more knowledge regarding students' use of different representations when they are developing valid arguments for a hypothesis with infinitely many cases. The research question guiding this study is: Which types of representations used by students when working with *one* hypothesis with infinitely many cases can promote or limit development of valid arguments?

This study has used qualitative methods such as interview and observation of two groups, each consisting of three students. The students are sixth graders between the age of 11 and 12 year olds. Following hypothesis was formulated by the students: "When three consecutive numbers are added the sum will be a multiple of three". Their assignment was to produce valid arguments for their hypothesis. The data consists of transcriptions, the students' worksheets and notes taken during the observation.

To analyze whether the arguments produced by the students were valid, the definition of proof as a mathematical argument (A. Stylianides, 2007b; 2016) was used. To categorize the students' modes of argumentation, I used G. Stylianides (2008) description of empirical arguments, rationale, generic example and demonstration. Duval (2006) and different representation systems was used to identify students different modes of representations, which in this study consisted of oral explanations, number symbols and drawings. Students drawings was categorized as either structural or non-structural drawings, based on the drawings potential to explore structures in the hypothesis. I also used Stylianou's (2011; 2013) categorization; "representations used as a exploration tool" to describe how the student used their drawings in their argumentation.

The results show that students use of only number symbols and oral explanations limited their development of valid arguments. Non-structural drawings didn't help the students develop valid arguments either. Students' use of structural drawings on the other hand promoted the development of valid arguments. The structural drawings were used as an exploration tool. Students used the structural drawings to make changes and manipulate them to investigate structures and contexts connected to the hypothesis further. By exploring on the drawings, and using the drawings as a common language tool to communicate with their peers, the student gained insight to the problem which helped them develop valid arguments.

Forord

De tre årene med etterutdanning fullføres nå med en masteroppgave. Årene har vært både krevende og slitsomme, men også interessante og lærerike. Jeg har fått muligheten til å fordype meg ekstra i elevers bruk av representasjoner og argumentasjon, noe jeg selv mener er både interessant og viktig å ha kunnskap om som matematikklærer. Prosessen med å skrive oppgaven har hatt både oppturer og nedturer, men når jeg sitter her med sluttproduktet er jeg fornøyd med egen innsats, og oppgaven min.

Jeg ønsker å takke personer som, på ulike måter, har bidratt til at masteroppgaven ble en realitet. En stor takk til veilederen min, Anita Valenta, for meget grundige, konstruktive og nyttige tilbakemeldinger. Ditt engasjement har nok smittet litt over på meg, og gjort at en ekstra innsats har blitt lagt ned i skrivingen av denne oppgaven. Takk også til arbeidsgiveren min for at jeg fikk muligheten til å ta videreutdanning. En takk må også rettes til elevene som deltok. Uten dere ville det ikke blitt noen studie. Jeg ønsker videre å takke min samboer for høyst nødvendig tech-support, korrekturlesing og oppmuntrende ord underveis. Til slutt vil jeg takke mine to gutter på fem og sju år for nødvendige avbrekk fra skrivingen, med pokemonkamper, legobygging og trampolinehopping.

Trondheim, mai 2020

Kristin Valla Dønnem

Innhold

Figurer

1. Innledning

Tema for studien er elevers bruk av ulike typer representasjoner i deres utvikling av gyldige argument. Kjernen i matematikk er å utvikle argument som holder som bevis (Schoenfeld, 2009). Bevis har ofte blitt sett på som et sluttprodukt, og ikke i sammenheng med andre aktiviteter som å lete etter mønster, resonnere og argumentere (G. Stylianides, 2010). Andreas Stylianides (2016) fremhever at argumentasjon er en viktig prosess relatert til å utvikle bevis, og at det er en styrke å se argumentasjon og bevis i sammenheng. I studien vil bevis omtales som et gyldig argument. Et argument kan uttrykkes på mange måter, og for å formidle matematiske ideer er vi nødt til å ta i bruk representasjoner. Representasjoner i matematikk brukes for å uttrykke matematiske begrep, sammenhenger og problem. Det matematiske språket, og elevers argumentasjon, kan formidles gjennom ulike typer representasjoner som blant annet naturlig språk, symboler, mønster, skisser, fysiske objekter, diagrammer og grafer, konkretiseringsmateriell og tegning (Duval, 2006; Bobis & Way, 2018). Det er lite tidligere forskning som refererer til om bruk av representasjoner kan ha noen innvirkning på hvilken type argumentasjon som utvikles av elevene (Stylianou, 2013). Stylianou (2013) argumenterer for at det å representere og argumentere påvirker utviklingen av hverandre, og at det derfor vil være viktig å forstå samspillet mellom de to.

Argumentasjon og representasjoner er spesielt relevant nå med tanke på fagfornyelsen og den nye læreplanen, LK20. De nye kjerneelementene i matematikk som er fastsatt i LK20 beskriver arbeidsmåter, metoder og tenkemåter som skal inkluderes i matematikkundervisningen. Ett av de seks kjerneelementene som vil bli implementert i matematikkfaget er: *«Resonnering og argumentasjon»*. Resonnering beskrives som: «å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker» (Utdanningsdirektoratet, 2018). Videre står følgende om argumentasjon: «Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnement og løsninger og beviser at disse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2018). Et annet kjerneelement i LK20 er: *«Representasjon og kommunikasjon»*. I elementet inngår det at elever skal kunne forklare den fremgangsmåten de har valgt, og kunne begrunne sine valg av representasjoner. Det innebærer også at elevene skal kunne oversette mellom det matematiske symbolspråket og dagligspråket, og kunne veksle mellom ulike representasjonsformer. Generalisering er viktig for å kunne utvikle gyldige argument, og begrepet generalisering inngår i kjerneelementet: *«Abstraksjon og generalisering»*. I kjerneelementet legges det vekt på at elevene skal utforske tall og figurer for å finne sammenhenger som kan formaliseres ved å ta i bruk hensiktsmessige representasjoner. Utdrag fra kjerneelementene viser at arbeid med argumentasjon og representasjoner vil få en fremtredende rolle i matematikkundervisningen.

Representasjoner brukes i argumentasjonen for å fjerne all tvil og overbevise de andre i fellesskapet om at en hypotese er gyldig eller ugyldig. En hypotese (G. Stylianides 2009b) er en påstand hvor det er usikkert om påstanden stemmer eller ikke, og en generell matematisk hypotese er en matematisk påstand som omhandler uendelig antall eksempler. For å sjekke om hypotesen stemmer eller ikke må man foreta seg noen handlinger, og ta i bruk representasjoner. Bobis og Way (2018) mener det er en forventning om at elever etterhvert skal bevege seg fra å begrunne med et dagligdags språk over til å ta i bruk mer standardiserte representasjoner, som for eksempel matematiske symboler og uttrykksformer. I matematikkundervisningen har representasjoner innen symbolsystemet hatt høy prioritet, og lite oppmerksomhet er rettet mot representasjoner i det ikoniske systemet hvor tegninger inngår (Stylianou, 2013). Gabriel Stylianides (2008) assosierer ikke gyldige typer argument til en spesiell type representasjon. Et argument presentert med blant annet naturlig språk, symbolspråk eller bruk av tegning kan alle føre til et gyldig argument.

Formålet med studien er å bidra til mer kunnskap rundt elevers bruk av ulike typer representasjoner når de skal utvikle gyldige argument for en hypotese. Gjennom å analysere hvordan seks elever i arbeid med én oppgave bruker ulike representasjoner, og betrakte representasjonene i sammenheng med typen argument de utvikler, kan jeg diskutere eventuelle begrensninger eller muligheter ved representasjonene elevene har tatt i bruk. Håpet er også at studien kan foreslå hvordan bruk av ulike representasjoner og utvikling av gyldige argument kan legges til rette for i undervisningen.

Det er kjent at å representere og argumentere er utfordrende aspekter innen matematikk (Stylianou, 2013). I den norske skolen, med innføring av den nye læreplanen som trer i kraft fra høsten 2020, vil argumentasjon og representasjoner få en enda større rolle i matematikkundervisningen. Det stiller noen krav til lærerens kunnskap (A. Stylianides & Ball, 2008). Mange lærere opplever det å skulle fremme et bevis eller et gyldig argument som vanskelig (G. Stylianides, 2008). For at elever skal kunne få erfaringer med å utvikle gyldige argument er det er en forutsetning at læreren har gjort seg egne erfaringer med argumentasjon, og vet hva kriteriene for et gyldig argument er. Selv om det innen nyere forskning har vært økt fokus på argumentasjon er det fortsatt relativt lite forskning på argumentasjon på små og mellomtrinnet. Det er også gjort lite forskning på om bruk av representasjoner kan ha noen innvirkning på hvilken type argumentasjon som utvikles av elevene (Stylianou, 2013). Hvordan elever representerer sine ideer vil påvirke i hvilken grad representasjonene kan brukes som verktøy for å argumentere for ideene. På bakgrunn av mangler i tidligere forskning, innføringen av LK20 og viktigheten av å kunne representere det generelle for å fremme gyldige argument er forskningsspørsmålet som jeg ønsker å svare på i studien: *Hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elever i arbeid med én generell matematisk hypotese kan fremme eller hemme utvikling av gyldige argument?*

Datamaterialet i studien er samlet inn fra seks elever på sjettetrinn. Jeg ønsket å undersøke elevenes utvikling av gyldige argument valgte å gi elevene en oppgave hvor de skulle argumentere for en generell matematisk hypotese. Jeg ble inspirert av G. Stylianides (2008) til å bruke en oppgave som ga elevene mulighet til å identifisere mønster og finne sammenhenger selv, fordi det kunne være med å gi de eierskap til hypotesen. Elevene fikk i oppgave å formulere en hypotese for hva som var gjentakende for summen når tre påfølgende tall adderes. En av årsakene til at jeg valgte oppgaven var at den omhandlet tallteori, et annet emne enn geometri som ofte er brukt i arbeid med argumentasjon i skolen (A.Stylianides, Bieda & Morselli,2016). I forskningsspørsmålet står det at jeg skal undersøke elevenes bruk av ulike representasjoner. Jeg mener oppgaven har potensial for at ulike representasjoner kan brukes for å verifisere gyldigheten til hypotesen. Hypotesen elevene formulerte var: «Når tre påfølgende tall legges sammen så vil summen alltid være i tregangen». Studien undersøker hvordan elevene brukte ulike representasjoner for å utvikle gyldige argument for hypotesens de hadde formulert selv.

Først vil tidligere forskning som ligger til grunn for mine undersøkelser presenteres. A. Stylianides (2007b; 2016) sin definisjon av bevis som et matematisk argument inneholder tre krav. To av kravene i definisjonen sier at et matematisk argument må ha gyldig type argument og bruke passende typer representasjoner. Som en følge av definisjonen anser jeg den som et hensiktsmessig utgangspunkt for de videre teoriene som tas i bruk i studien. For å kunne vurdere hvilke typer argument elevene produserer vil jeg kategorisere argumentene ut i fra G. Stylianides (2008) sine kategorier innenfor «argumentasjon», som er en del av hans rammeverk for bevis og resonnering. Det vil være relevant å kategorisere ulike typer representasjoner når jeg skal svare på mitt forskningsspørsmål, og vurderer da Duval (2006) sine ulike representasjonssystem som rimelige å bruke. Jeg vil også presentere tidligere forskning jeg vurderer som relevant for å kunne undersøke hvordan representasjoner ble brukt og ulike funksjoner representasjonene innehar.

For å kunne gå i dybden på elevers bruk av representasjoner og deres utvikling av argument valgte jeg å bruke kvalitative forskningsmetoder som semi-strukturert intervju og deltakende observasjon, hvilket vil presenteres i metodekapitlet. I analysen av datamaterialet oppstod det et behov for å kategorisere elevenes tegninger ut i fra tegningenes potensial til å utforske generaliteter og strukturer. Kategoriene strukturelle og ikke-strukturelle tegninger vil referees til i studien, og vil bli introdusert og forklart i «analyseprosessen» i metodekapittelet. Gjennom å analysere datamaterialet kom jeg fram til funn som svar på mitt forskningsspørsmål. Funnene er i analysekapittelet oppsummert i tre hovedkategorier. I hver hovedkategori vil det vises til utdrag fra elevenes arbeid som omhandler deres bruk av representasjoner og hvilken type argumentasjon de utviklet. Ut fra analysen av utdragene vil datamaterialet diskuteres. Jeg vil drøfte eventuelle årsaker til mine funn ut i fra tidligere forskning. I avslutningen presenteres funnene kort og sees i sammenheng med praksis i skolen før jeg avslutter med å foreslå videre forskning.

2. Teori

I studien skal jeg undersøke hvordan elever på sjettetrinn bruker ulike typer representasjoner når de skal utvikle gyldige argument for en generell matematisk hypotese. Tidligere forskning, som jeg har vurdert relevant for å kunne svare på mitt forskningsspørsmål, vil presenteres i teorikapittelet. Først sier jeg noe om argumentasjon og bevis, og argumenterer videre for at A. Stylianides (2016) sin definisjon av bevis som et matematisk argument vil være aktuelt å ta med i studien. Videre går jeg inn på ulike typer argument i G. Stylianides (2008) sitt rammeverk. Tidligere forskning på ulike representasjonssystem og funksjoner til representasjoner vil bli presentert til slutt.

2.1 Argumentasjon og bevis

Argumentasjon er en viktig prosess som er relatert til å utvikle bevis, og det kan være en styrke å se de to i sammenheng istedenfor som to separate prosesser (A. Stylianides et al., 2016). Et matematisk bevis er en kjede av sammenhengende matematiske argument som entydig fører til en konklusjon om en matematisk hypotese er riktig eller ikke. I min studie vil elevenes bruk av representasjoner sees i sammenheng med argumentasjonen, og jeg vil vurdere om elevenes argumenter er gyldige eller ugyldige. Ettersom argumentasjon ofte sees i sammenheng med bevis presentert med formelt språk, kan bevis forbindes med noe avansert tilknyttet høyere klassetrinn (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Krummenheuer, 1995). Hypotesen i min studie ville kreve en spesiell type argumentasjon. Forskning antyder at det er utfordrende for barneskoleelever å begrunne en generell matematisk hypotese siden hypotesen omhandler uendelig antall eksempler (Evens og Houssart, 2004). For at argumentasjonen til elevene skulle betegnes som et gyldig argument, et bevis, så måtte elevene begrunne hvorfor hypotesen vil være gyldig for tre vilkårlige påfølgende tall. Selv om argumentasjon for en slik hypotese ofte forbindes med høyere klassetrinn er det å presentere bevis for en generell hypotese mulig for elever helt ned på småskolen (Stylianides og Stylianides, 2008b).

Argumentasjon er et vidt begrep som kan forstås på flere måter, og det finnes derfor ulike definisjoner for hva argumentasjon er. Stylianides et al. (2016) hevder at forskere stort sett er enige om at begrepet argumentasjon i matematikk brukes for å beskrive kommunikasjonen hvor et individ eller en gruppe ønsker å overbevise noen om at en påstand er sann eller usann. Det å overbevise er sentralt i beskrivelsen av argumentasjon, noe Krummenheuer (1995) også konkluderer med gjennom å argumentere for at målet med argumentasjon er å overbevise seg selv eller andre. Krummenheuer (1995) påpeker at argumentasjon ikke bare oppstår etter å ha løst et problem, men at argumentasjon kan oppstå underveis i løsningsprosessen. Johnson (2000) sin beskrivelse av argumentasjon spesifiserer ulike handlinger som inngår i argumentasjon som å; konstruere, tolke, presenterer, kritisere og endre argumentet. I likhet med Johnson viser også Krummenheuer (1995) til hva argumentasjon kan inneholde som; forklaringer, endringer, tolkninger og sammenhenger. Johnson og Krummenheuer har begge med handlingene å *tolke* og *endre* i sine beskrivelser.

Krummenheuer har i tillegg tatt med *sammenhenger* i sin beskrivelse av argumentasjon, noe jeg anser som viktig i prosessen for å utvikle gyldig argumentasjon.

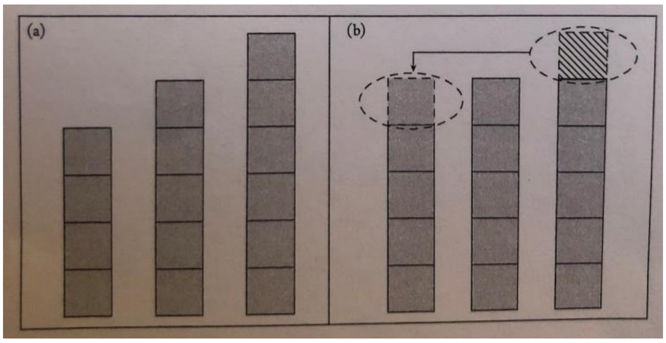
Argumentasjon blir av flere forskere ansett som noe som skjer i et sosialt fellesskap. Johnson (2000) beskriver argumentasjon som en sosiokulturell aktivitet. Beskrivelsen samsvarer med hvordan Krummenheuer (1995) hevder at argumentasjon er et sosialt fenomen som blir påvirket av deltakerne og konteksten. Deltakerne kan komme med korrigeringer på, og motargument for, et argument som legges fram. Krummenheuer (1995) betrakter argumentasjon som en prosess knyttet til samspill i klasserommet hvor elevene skal forklare og begrunne hvorfor løsningen stemmer for andre. I argumentasjonen prøver elevene å tilpasse og begrunne deres handlinger for fellesskapet slik at de skal bli overbevist. Resultatene i en slik prosess kan rekonstrueres, steg for steg og kalles et argument (Krummenheuer, 1995).

Jeg vil bruke Krummenheuer (1995) sin beskrivelse av argumentasjon for å klargjøre hva jeg mener med argumentasjon tilknyttet min studie. Elevene i studien arbeidet sammen i grupper på tre og tre elever, og argumentasjonen vil da oppstå i et sosialt fellesskap hvor elevene samhandler med hverandre. I studien vil det sosiale samspillet inkludere både muntlige forklaringer og elevenes skriftlige arbeid, fordi begge brukes for å kommunisere med en mottaker. Målet med elevenes argumentasjon vil være å fjerne all tvil og overbevise de andre på gruppa om at den matematiske hypotesen er gyldig. Argumentasjonen kan da inneholde forklaringer, begrunnelser, endringer, tolkninger og sammenhenger. Det er to aspekter ved et argument; Argument som en del av en argumentasjon og argument som et resultat (Krummenheuer, 1995). Argumentasjonen som undersøkes i studien vil inkludere begge aspektene av et argument.

Mitt valg av teori i studien bygger hovedsakelig på teoretikeren A. Stylianides (2007b, 2016) sin definisjon av bevis som et matematisk argument. A. Stylianides har på bakgrunn av litteratur som omhandler bevis, og analyse av datamateriale fra et klasserom på barnetrinnet, kommet fram til en definisjon for hva et matematisk argument bør inneholde for at det skal kunne være et bevis. I følge Stylianides er definisjonen tilpasset for bruk i matematikkundervisningen gjennom hele skoleløpet. For at argumentasjonen skal kunne kalles et bevis må tre krav oppfylles: Beviset må bruke *aksepterte sannheter* (set of accepted statements), ha *gyldig type argument* (modes of argument) og bruke *passende typer representasjoner* (modes of argument representation). Definisjonen vil være relevant å bruke som rammeverk for min studie da de to sistnevnte kravene har en direkte sammenheng med min problemstilling. Definisjonen gir mulighet til å drøfte elevenes bruk av ulike representasjoner og vurdere om typer argument elevene legger fram er gyldige eller ugyldige.

De tre kravene til A. Stylianides vil presenteres, og et eksempel på et generisk argument vil brukes gjennomgående for å illustrere kravene i definisjonen. Et generisk argument er et gyldig argument som bruker et spesifikt eksempel for å begrunne generaliteter tilknyttet hypotesen (G. Stylianides, 2008). Jeg velger å bruke et generisk eksempel beskrevet i boka til A. Stylianides (2016, s.135) som er tett knyttet opp mot hypotesen mine elever argumenterte for. Det generiske eksempelet hentet fra A. Stylianides var et gyldig argument for følgende hypotese: «Hvis tre påfølgende tall legges sammen så vil summen alltid bli tallet i midten multiplisert med tre». Elevene hadde multilinks som konkretiseringsmateriell. Multilinks er kvadratiske kuber som kan bygges sammen. Essensen i det generiske argumentet, presentert av eleven Jack, var som følgende:

Vi starter med tallene 4, 5 og 6 (Jack modellerte med kubene som illustrert i figur 1a). *Hvis en kube fra det største tallet, i dette eksempelet 6, flyttes til det laveste tallet, 4, så får vi tre tall som er like som tallet i midten, tallet 5.* (Modelleringen er illustrert i figur 1b). *Da vil summen av de tre påfølgende tallene være tre multiplisert med tallet i midten,* $3 \cdot 5$ *. Men det har ingen betydning hvilke tre påfølgende tall som legges sammen fordi du alltid kan flytte én kube fra det største tallet over til det minste tallet slik at det ender opp med å bli de samme tre tallene. Alle like store som det midterste tallet. Så summen vil alltid være det midterste tallet multiplisert med tre.*



Figur 1: En illustasjon av Jack sin modellering i tilknytning til det generiske eksempelet. Hentet fra: "Proving in the elementary mathematics classroom" av A. Stylianides, 2016, s. 131.

Aksepterte sannheter er, i A. Stylianides (2016) sin definisjon på et bevis, noe deltakerne i fellesskapet kan bruke og ta utgangspunkt i når de skal argumentere for hypotesens gyldighet. Eksempler på aksepterte sannheter er definisjoner, aksiomer, antagelser og tidligere etablerte prosedyrer og regler som for eksempel metoder for utregning. De aksepterte sannhetene skal kunne brukes av fellesskapet uten videre begrunnelser. At de aksepterte sannhetene ikke trenger videre begrunnelser vil ikke bety at alle deltakerne i fellesskapet forstår og oppfatter innholdet i sannhetene som tas i bruk likt. Imidlertid betyr det at sannhetene kan antas å bli brukt uten videre begrunnelser (G. Stylianides, 2008). Det må med andre ord være noe som er kjent for fellesskapet. Jack brukte i sitt generiske eksempel noe klassen allerede hadde kjennskap til. Hvis tre like store tall adderes så vil summen være i tregangen. Det var også en akseptert sannhet at når tre påfølgende tall adderes så kan en kube flyttes fra det største tallet til det minste tallet slik at alle tre tallene ble like store som tallet i midten. Jeg tolker aksepterte sannheter som kunnskap elevene tidligere har tilegnet seg, og ulike løsningsstrategier elevene er kjent med, som de kan ha bruk for når de skal argumentere. Hvilke aksepterte sannheter elevene tok i bruk i sin argumentasjon vil ikke bli spesifisert i studien min. Det vil ikke bety at aksepterte sannheter ikke vil være en del av studien. For å kunne argumentere for hypotesen må elevene i studien ta utgangspunkt i noen antagelser, regler eller fremgangsmåter som er kjent for dem.

Det andre kravet omhandler *typer argument*. For at et argument skal være et bevis må typen argumentasjon som tas i bruk være tilgjengelig for fellesskapet og matematisk gyldig gjennom å ta i bruk og vise til aksepterte sannheter (G. Stylianides, 2008). Jack sitt generiske eksempel tok utgangspunkt i noe som kan antas å være kjent for fellesskapet og som kunne relateres til aksepterte sannheter, som beskrevet i avsnittet over. De aksepterte sannhetene brukte Jack videre for å utvikle et argument for hypotesen basert på generaliteter med utgangspunkt i eksempelet 4+5+6. Jack sitt generiske eksempel viser hvordan aksepterte sannheter brukes i utviklingen av hans argument. I min studie ønsker jeg å se på hvilke typer argument elevene utviklet da de arbeidet med en hypotese med uendelig antall løsninger, noe som krever en argumentasjon som begrunner generaliteter. For å vurdere gyldigheten til ulike typer argument utviklet av elevene vil jeg ta i bruk rammeverket til G. Stylianides (2008) som skiller mellom fire typer argument delt inn i bevis og ikke-bevis. Egenskapene de fire ulike typene argument innehar kan også hjelpe meg til å vurdere om elevenes bruk av representasjoner kan ha noen sammenheng med typen argument de utvikler. En beskrivelse av de fire ulike typene argument vil jeg gå nærmere inn på i delkapittel 2.2: Typer argumentasjon.

Det tredje og siste kravet som må oppfylles for at en argumentasjon skal være et bevis er at *representasjonene som brukes er passende*. Ulike representasjoner er blant annet muntlig og skriftlig språk, symboler, diagrammer og grafer, konkretiseringsmateriell og tegning. Jeg tolker at en representasjon skal være passende som at representasjonen blir presentert slik at de andre i fellesskapet kjenner igjen de aksepterte sannhetene det vises til, og kan følge argumentasjonen. Videre tenker jeg at det også innebærer at elevene velger de representasjonene som egner seg best for å få fram ideene de ønsker å formidle. Jack presenterte sitt argument ved å bruke en kombinasjon av representasjoner. Han modellerte med multilinks og hadde muntlige forklaringer, og begge representasjonene var forståelige for medelevene. I studien skal jeg se på hvilke typer representasjoner elevene tar i bruk og hvordan representasjonene blir brukt i argumentasjonen for deres hypotese. Elevenes typer representasjoner vil bli kategorisert ut i fra Duval (2006) sine fem ulike representasjonssystem, som jeg vil presentere i delkapittel 2.3: Representasjoner. Ved å se nærmere på elevenes bruk av ulike representasjonene vil jeg undersøke hvilke typer representasjoner som kan fremme eller hemme utviklingen av gyldige argument.

2.2 Typer argumentasjon

I min studie har jeg undersøkt om argumentene til elevene var gyldig eller ugyldig. G. Stylianides presenterte i 2008 et rammeverk for resonnering og bevis hvor den matematiske, psykologiske og pedagogiske komponenten inngår. Jeg vurderte det hensiktsmessig å ta i bruk delen av den matematiske komponenten i rammeverket til G. Stylianides som heter «argumentasjon». Her inngår fire typer argument som jeg i min analyse vil bruke som et rammeverk for å kunne avgjøre om argumentasjonen til elevene var gyldig eller ugyldig.

Argumentasjonen i den matematiske komponenten er delt i to hvor det skilles mellom argument som regnes som *ikke-bevis* og argument som *bevis*. Jeg vil videre omtale ikke-bevis som *ugyldig argumentasjon* og bevis som *gyldig argumentasjon* da det er mer knyttet opp mot begrepet argumentasjon som jeg har brukt i problemstillingen min. Ugyldig argumentasjon kan være et *empirisk argument* (empirical argument) eller en *redegjørelse* (rationale). Kategorien gyldig argumentasjon inneholder *generiske eksempel* (generic example) og *generell logisk slutning* (demonstration). Hypotesen elevene i min studie formulerte og skulle argumentere for var: «Når man legger sammen tre påfølgende tall så vil summen alltid være i tregangen». Fiktive argument for hypotesen presenteres for å gi eksempler på hvordan elevers ulike typer argument kunne sett ut.

En beskrivelse av de fire ulike typene argument vil videre bli presentert i rekkefølgen for grad av sofistikasjon for et argument (G. Stylianides, 2009b).

2.2.1 Empirisk argument

A. Stylianides (2016, s.18) definerer empirisk argument som et argument hvor gyldigheten til en hypotese er basert på bekreftede resultater funnet i noen eksempler. Resultatene er kommet fram til gjennom utprøvinger på noen eksempler knyttet til hypotesen. Med andre ord så brukes eksempler for å lete etter sammenhenger, og når noen resultater blir oppdaget brukes eksemplene som begrunnelse for at hypotesen stemmer. A. Stylianides (2016) påpeker at resultater basert på noen eksempler betraktes som «mangelfulle». Det som mangler i et empirisk argument er en begrunnelse for hvorfor resultatene er gyldige for alle andre eksempler tilknyttet hypotesen. Et eksempel på empirisk argumentasjon for hypotesen, hvor symbolspråket og muntlige forklaringer er brukt, kunne sett slik ut:

> *1+2+3=6. 2+3+4=9. 3+4+5=12. 4+5+6=15. 5+6+7=18. Alle summene, 6-9-12-15 og 18 er i tregangen så derfor stemmer hypotesen.*

I argumentet trekkes det slutninger om at hypotesen er gyldig ut i fra resultatene funnet i noen få eksempler. Det mangler en begrunnelse for hvorfor summen når tre vilkårlige påfølgende tall adderes vil være i tregangen, og argumentet er derfor ugyldig.

Forskere (Balacheff, 1988; Lannin, 2005; G. Stylianides, 2008) peker på at mange elever har en oppfattelse av at empiriske argument er gyldige som begrunnelse, og derfor ikke ser behov for videre resonnering. Evens og Houssart (2004) trekker også frem at elever på barneskolen synes det er vanskelig å gi matematiske forklaringer, og at det kan være en grunn til at elevene ofte generaliserer ut i fra noen eksempel uten å gi videre forklaringer. Evens og Houssart (2004) påpeker at å bruke eksempler som argumentasjon kan være et viktig førstesteg til å finne ut om en hypotese stemmer eller ikke. For å kunne argumentere generelt for hypotesen må elevene gi noen videre forklaringer basert på de matematiske strukturene i eksemplene, noe som mangler i et empirisk argument. Et annet argument som også anses som ugyldig er redegjørelse.

2.2.2 Redegjørelse

Redegjørelse er matematisk ugyldig og ble tatt med i rammeverket til G. Stylianides (2008) for å fange opp argument for en matematisk hypotese som verken er empiriske argument eller gyldig argumentasjon. En redegjørelse kan mangle eksplisitte referanser til aksepterte sannheter som er tatt i bruk, noe som kan gjøre argumentasjonen lite tilgjengelig for fellesskapet. Redegjørelse ligner på empiriske argument ved at flere eksempler brukes for å finne en sammenheng. I motsetning til empiriske argument inneholder redegjørelser en logisk resonnering. Det kan handle om oppdagede strukturer og relasjoner mellom elementene tilknyttet hypotesen. I en redegjørelse vises det til noen oppdagede sammenhenger, men det mangler likevel noe i argumentasjonen som forklarer hvorfor sammenhengene også vil gjelde for alle andre eksempler tilknyttet hypotesen (G. Stylianides, 2008).
En mulig redegjørelse for elevenes hypotese kunne vært:

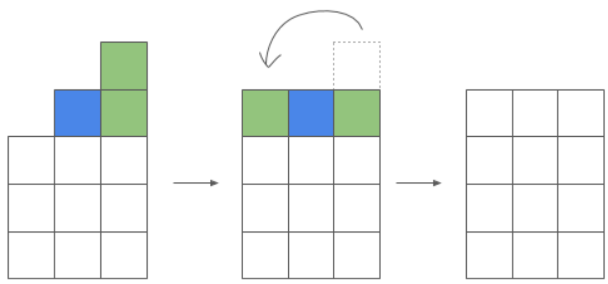
> *Alle summene blir i tregangen fordi differansen mellom det første og andre tallet som legges sammen er én, mens differansen mellom det andre og tredje tallet er to. 1+2=3, så du legger alltid til tre ekstra og summene blir derfor i tregangen.*

I argumentet beskrives det noe gjentakende for strukturen til tallene som legges sammen som er oppdaget gjennom utprøving på flere talleksempler. Det mangler en forklaring for hvorfor summen vil være i tregangen når det alltid legges til tre. Jeg anser derfor argumentasjonen til å være en redegjørelse og derfor som et ugyldig argument. Jeg skal videre se på et generisk eksempel som regnes som et gyldig argument.

2.2.3 Generisk eksempel

I et generisk eksempel brukes et spesifikt eksempel som er sett på som representativt for de generaliseringer som er tilknyttet hypotesen (G. Stylianides, 2008). Et generisk eksempel er med andre ord et argument hvor gyldigheten til en hypotese begrunnes ved å vise til et spesifikt eksempel. Det spesifikke eksempelet brukes for å forklare hvilke generelle egenskaper eksempelet innehar som fører til at resonneringen kan brukes på alle andre eksempler som inngår i hypotesen. Et generisk eksempel er ikke knyttet til noen bestemt type representasjon og kan bestå av kun muntlige eller skriftlige forklaringer, men argumentasjonen kan også bruke andre representasjoner som blant annet tegning. Et generisk eksempel med tegning av det spesifikke talleksempelet $3+4+5$ og naturlig språk, kunne vært slik:

> *Når de tre påfølgende tallene $3+4+5$ skal legges sammen så vil det bety at tallet 4 vil være én større enn tallet 3, mens tallet 5 som legges til vil være to større enn tallet 3. Du har lagt til tre ekstra tall, som vist med blå (+1) og grønne (+2) klosser. Den øverste klossen i tredje kolonne kan flyttes slik at kolonnene blir like lange, $4+4+4$. Summen er nå organisert i tre like lange kolonner, $4 \cdot 3$ som er i tregangen. Det har ingen betydning hvilke tre påfølgende tall som legges sammen fordi du alltid kan flytte den ene klossen fra den tredje kolonnen til den første kolonnen slik at de tre kolonnene blir like lange, og summen vil derfor være i tregangen.*



Figur 2: Generisk eksempel

I argumentasjonen tar eleven utgangspunkt i eksempelet $3+4+5$ for å vise strukturen i tallene som legges sammen. Forklaringene er til å begynne med knyttet til eksempelet $3+4+5$ hvor det forklares hvordan en kloss kan flyttes fra den tredje kolonnen over til den første slik at kolonnene blir like lange. Forklaringen med naturlig språk støttes av visuelle figurer. For at argumentet skal være et generisk eksempel må det spesifikke eksempelet brukes for å forklare eksplisitt generelle egenskaper tilknyttet hypotesen. Det gjør eleven med den siste setningen, hvor tilknytningen til at summen alltid vil være i tregangen begrunnes slik: «Det har ingen betydning hvilke tre påfølgende tall som legges sammen fordi du alltid kan flytte den ene klossen fra den tredje kolonnen til den første kolonnen slik at de tre kolonnene blir like lange og summen vil derfor være i tregangen». Jeg anser argumentasjonen som et generisk eksempel og derfor som et gyldig argument. En annen type argumentasjon som anses som gyldig er en generell logisk slutning.

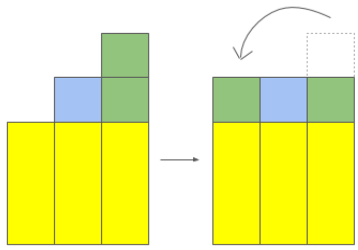
2.2.4 Generell logisk slutning

Generell logisk slutning er et gyldig argument som ikke er avhengig av et spesifikt eksempel for å representere de generaliseringer som er tilknyttet hypotesen (G. Stylianides, 2008). En generell logisk slutning er et argument som kan si noe generelt om hypotesen. Gjennom å vise til matematiske aksepterte sannheter blir man overbevist om at hypotesen er gyldig eller ugyldig for alle eksempler som er tilknyttet hypotesen. Bevis som matematikere jobber med er vanligvis generelle logiske slutninger hvor det ofte brukes algebraiske symboler i argumentet. En generell logisk slutning for hypotesen med bruk av algebraiske symboler kunne sett slik ut:

> Et tall som er i tregangen kan skrives på formen $3 \cdot$ et positivt heltall. Hvis vi sier at det første tallet er n så vil det påfølgende tallet være $n+1$ og det tredje tallet være $n+2$. Vi får da $n+(n+1)+(n+2)$ som videre er $3n+3$. Dette viser at summen alltid vil være i tregangen.

Bruk av algebraiske symboler kan brukes i en generell logisk slutning, men for elever på sjettetrinn er det andre representasjoner som kan være mer naturlig for dem å bruke siden algebraiske symboler ikke trenger være kjent for dem. G. Stylianides (2008) assosierer ikke en generell logisk slutning til en spesiell type representasjon, og viser til et eksempel hvor en tredjetrinnselev har gitt en muntlig forklaring som kvalifiserer som en generell logisk slutning. En generell logisk slutning kan produseres av elever gjennom hele skoleløpet, men det kommer an på hvilke representasjoner og aksepterte sannheter elevene tar i bruk. Eksempel på en generell logisk slutning for hypotesen ved bruk av representasjonene tegning og naturlig språk kan ha vært som denne:

> *Når hvilke som helst tre påfølgende tall skal legges sammen så betyr det at man har noe jeg kaller et «utgangstall» som er det første tallet som skal legges til. Hvis man ser på summen til tre påfølgende tall så kan summen struktureres ut i fra utgangstallet som en «base», vist til i figuren som den gule ruten. Lengden på kolonnene i basen vil variere ut i fra hvilke tre påfølgende tall som legges sammen, men basen vil alltid bestå av tre like høye kolonner. Noe som betyr at summen av tallene i basen vil være i tregangen. Det andre tallet som legges sammen med utgangstallet vil være én større enn utgangstallet (den blå ruten på figuren), mens det tredje tallet som legges til vil være to større (de to grønne rutene på figuren). Du har lagt til tre ekstra. Disse tre ekstra rutene kan flyttes slik at det blir én ekstra rute på hver kolonne som gjør at kolonnene blir like lange igjen. Summen er nå organisert i tre like lange kolonner, noe som betyr at vi legger sammen et helt antall treere og summen vil derfor alltid være i tregangen.*



Figur 3: Generell logisk slutning

Argumentet viser ikke til et spesifikt talleksempel, men ser på generelle egenskaper ved tallene som legges sammen. Tegningen og naturlig språk forklarer hvordan strukturen til hvilke som helst tre påfølgende tall som legges sammen vil kunne organiseres i treere, noe som videre fører til at summen vil være i tregangen. Argumentasjonen vil jeg derfor vurdere som en generell logisk slutning for hypotesen.

Psykologisk forskning gjort på barns kognitive utvikling av logisk tenkning antyder at typer argumentasjon som er gyldig er innen rekkevidde for barn helt ned i småskolen (Stylianides & Stylianides, 2008b). For at elever skal kunne utvikle gyldige argument er det viktig at skolen gi elevene erfaringer og veiledning i arbeidet med å fremme gyldig argumentasjon. For å få tilgang til det matematiske innholdet i argumentasjonen må man ta i bruk ulike representasjoner.

2.3 Representasjoner

Representasjoner er sett på som nyttige verktøy både for å kommunisere ideer og skape forståelse (Stylianou, 2010). I LK20 er «representasjon og kommunikasjon» et av kjerneelementene i matematikkfaget, noe som tyder på at representasjoner skal få en sentral rolle i matematikkundervisningen. I studien har jeg undersøkt elevers bruk av representasjoner og om argumentene elevene utvikler er gyldig eller ugyldige. For å kunne svare på forskningsspørsmålet vil jeg videre gå inn på ulike typer representasjoner, og hvordan representasjoner kan brukes og være et verktøy for å formidle og utvikle argumentasjon.

Matematikk formidles gjennom tegn og eneste måten å få tilgang til de matematiske objektene, og kunne bruke dem, er ved å bruke tegn og representasjoner. Matematiske objekter skiller seg fra andre vitenskapelige domener og fag fordi de aldri er tilgjengelig gjennom oppfatning eller instrumenter, som for eksempel mikroskop og teleskop. For å få tilgang til matematiske objekter, og for å kunne formidle matematiske ideer til andre, er vi nødt til å benytte oss av representasjoner. Ulike representasjoner er blant annet naturlig språk, symboler, mønster, skisser, fysiske objekter, diagrammer og grafer, konkretiseringsmateriell og tegning (Duval, 2006; Bobis & Way, 2018). De matematiske representasjonene brukes for å beskrive et matematisk objekt. Duval (2017) påpeker at representasjonen av et objekt ikke er objektet, og at det dermed er viktig og ikke blande hvilke egenskaper som hører til representasjonen og egenskapene tilhørende objektet. Et matematisk objekt kan for eksempel være en mengde, en funksjon, en tallfølge eller et symbolsk uttrykk. Ulike representasjoner av tallet ti kan være tallsymbolet 10, ti skrevet med bokstaver, ti vist på tallinjen, en tikroning, ti tellestreker eller ei klokke som er ti. Presmeg (2006) skriver at muligheten for å lære matematikk avhenger av å kunne fremstille matematikken og tolke tegn og representasjoner. Da er det viktig både at elevene blir introdusert for ulike representasjoner, og også hvordan representasjonene kan brukes. Duval (2006) har delt ulike typer representasjoner, som han omtaler som semiotiske representasjoner, inn i semiotiske representasjonssystem.

2.3.1 Ulike typer representasjoner

Duval (2006) har satt representasjoner inn i fem ulike systemer etter hvilke egenskaper representasjonen innehar. De fem representasjonssystemene er *det naturlige språket* som innehar både muntlige forklaringer og skriftlige beskrivelser av aksepterte sannheter. I *symbolsystemet* inngår skriftlige matematiske symboler, som blant annet tallsymboler og algebraiske symboler. Videre omhandler *det ikoniske systemet* mønster, skisser og tegninger mens det *ikke-ikoniske systemet* omfatter geometriske figurer. Tilslutt er det systemet som omhandler *diagrammer og grafer*. Inndelingen i systemer viser at det i matematikkfaget er et bredt spekter av representasjoner som kan brukes, og som gir ulike muligheter for å få tilgang til matematiske objekter. I studien er det tre av disse systemene, og elevenes bruk av dem i deres argumentasjon, som det vil være relevant å se på. *Det naturlige språket* med muntlige forklaringer, *symbolsystemet* med skriftlige tallsymboler og *det ikoniske systemet* hvor tegninger og figurer inngår. I studien vil jeg se på hvilke representasjoner elevene tar i bruk, og se om det kan være noen sammenheng mellom typer representasjoner og argumentene elevene utvikler. Samtidig vil jeg også drøfte hvilke funksjoner elevene sine representasjoner har og hvordan representasjonene brukes underveis i deres argumentasjon.

2.3.2 Funksjoner til representasjoner

De ulike representasjonssystemene har forskjellige funksjoner i den matematiske prosessen, og Duval (2006) skiller mellom *monofunksjonelle*, og *multifunksjonelle semiotiske system*. I det monofunksjonelle systemet inngår symbolsystemet og diagrammer og grafer. At systemet er monofunksjonelt kan med andre ord forklares som at systemet har en ensidig funksjon. Gjennom å bruke representasjoner innenfor det monofunksjonelle systemet kan det utledes formler og algoritmer som kan brukes for å løse ulike matematiske problemer. En graf kan for eksempel føre til et algebraisk uttrykk. Begrepet «multifunksjonelle» gir en indikasjon på at systemet innehar flere funksjoner. I det Duval (2006) omtaler som multifunksjonelle systemer inngår det naturlige språket, det ikoniske og ikke-ikoniske systemet. Prosesser innen for de tre representasjonssystemene som inngår i det multifunksjonelle systemet kan ikke gjøres om til algoritmer. Det de derimot åpner for er et større spekter av utforskende prosesser. Representasjonssystemene kan hjelpe elevene til å kommunisere sine ideer, resonnere, de åpner for å bruke fantasi og tilegne seg informasjon. Representasjoner innenfor det monofunksjonelle systemet kan sees i sammenheng med Stylianou (2011;2113) sin beskrivelse av representasjoner som en prosess hvor representasjonene brukes dynamisk for å utforske og evaluere problemet. Tegning inngår i det ikoniske systemet og er en representasjon som innehar flere funksjoner.

Tegning er et verktøy som hjelper barn med å kommunisere tankene sine, og er en av barns tidligste representasjoner i matematikk. De mentale ideene blir representert fysisk gjennom en tegning hvilket kan gjøre problemet mer konkret for elevene (Essen & Hamaker, 1990). Tegning er en aktivitet som er kjent for barna allerede fra barnehagealder og det er en tendens at tegning brukes i de første skoleårene, men at tegning deretter blir erstattet mer og mer av symboler. Duval (2006) presenterer tegning som en multifunksjonell representasjon som kan brukes for å resonnere og kommunisere matematiske ideer, noe som samsvarer med en undersøkelse gjort av Saundry & Nicol (2006). Undersøkelsen viste hvordan tegninger ble brukt av elever for å finne løsninger i arbeid med problemløsningsoppgaver. Saundry & Nicol (2006) og Woleck (2001) argumenterer for at tegning er barns viktigste redskap for å kunne kommunisere og resonnere på i matematikk.

Vi vet at tegning kan brukes som et redskap for å løse oppgaver og kommunisere ideer med andre. I min studie var tegning en av representasjonene som kunne være relevant for elevene å ta i bruk i deres utvikling av gyldige argument for hypotesen. Imidlertid er ikke overgangen til at tegning kan brukes som en matematisk representasjon noe som nødvendigvis skjer naturlig hos barn. Det krever at læreren har en bevisst pedagogisk tilnærming til bruk av tegning slik at elever blir introdusert for en variasjon av eksempler hvor tegning er brukt. Elevene må også få erfaringer med hvordan tegninger kan brukes i deres egen argumentasjon (Bakar, Way & Bobis, 2016). I hvilken grad elevene som deltok i min studie var vant til å representere matematikk gjennom tegning hadde jeg ingen kjennskap til. En tegning kan hjelpe elever til å oppdage matematiske konsepter og sammenhenger (Arcavi, 2003), men tegning gir ikke automatisk tilgang til sammenhengene. Hvis aktiviteten å tegne ses på som utfordrende for elevene fungerer det ikke som et anvendbart verktøy (Rellensmann, Schukajilow og Leopold, 2017). Hvordan representasjoner kan brukes som verktøy har Stylianou (2011; 2013) undersøkt.

Representasjoner kan fungere som et verktøy for å forstå, utforske og løse et problem (Stylianou, 2010; 2011; 2013). Man kan ikke konkludere med at en spesiell representasjon egner seg bedre enn en annen til å løse et problem, men det er en fordel å være klar over hvorfor og hvordan representasjonen blir brukt (Stylianou, 2011). Jeg ønsker i studien å undersøke hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elevene som kan fremme eller hemme gyldige typer argument. Ser det da også hensiktsmessig å undersøke hvordan elevene brukte representasjonene. For å undersøke elevenes bruk av representasjoner velger jeg å ta i bruk deler av Stylianou (2013) sitt rammeverk som beskriver hvordan representasjoner kan brukes som verktøy av elever når de løser en problemløsningsoppgave. En problemløsningsoppgave beskrives av Mason og Davis (1991) som en oppgave som man ikke umiddelbart vet hvordan skal løses. På bakgrunn av beskrivelsen til Mason og Davis kan min oppgave til elevene betraktes som en problemløsningsoppgave fordi jeg anser det som lite sannsynlig at en umiddelbar løsningsstrategi vil dukke opp hos elevene.

Stylianou (2013) har, med utgangspunkt i sin artikkel fra 2011, delt funksjonen til en representasjon inn i seks kategorier hvor representasjoner fungerer som:

- *Verktøy for å behandle informasjon* (tool to process information). Representasjoner brukes for å forstå betingelsene til oppgaven og sette sammen ulike aspekter av problemet. Representasjonen fungerer som et verktøy for å se hvordan samhandlingen mellom aspektene kan bidra til å løse problemet.
- *Verktøy for å samle informasjon* (tool for recording information). Representasjonen brukes for å samle informasjonen fortløpende i stede for å ha alt inni hodet.
- *Utforskningsverktøy* (tool that allow exploration). Representasjonen brukes dynamisk ved at den tilpasses, manipuleres og endres til nye representasjoner hvilket kan gi mer informasjon og videre innsikt i problemet (Stylianou, 2011).
- *Vurderingsverktøy* (monitoring and assessment tool). Representasjonen brukes for å vurdere fremdriften i løsningsprosessen, og representasjonen kan være et redskap for å vurdere om løsningen er riktig.
- *Kommunikasjonsverktøy* (conscription tool). Representasjonen fungerer som et felles utgangspunkt for argumentasjon og muntlige forklaringer. Representasjonen hjelper elevene å skape mening og legge en plan sammen med medelever gjennom at representasjonen fungerer som et felles språkverktøy.
- *Presentasjonsverktøy* (presentation tool). Representasjonen brukes for å dele informasjon, både i prosessen og som et sluttprodukt.

Gjennom å analysere hvordan elevene bruker sine representasjoner som verktøy og se det i sammenheng med hvilken type argumentasjon de utviklet, kan jeg diskutere eventuelle begrensninger eller muligheter ved typen representasjon elevene har tatt i bruk.

Elever bruker ofte representasjoner fleksibelt ved at de legger til eller fjerner informasjon, forklarer detaljer og bruker representasjonene som et manipulativ. En representasjon elevene i min studie kunne tenkes å bruke for å argumentere for hypotesen var tegning. Saundry og Nicol (2006) har undersøkt hvordan elever bruker representasjonen tegning i arbeid med å løse problemløsningsoppgaver. Saundry og Nicol (2006) skiller mellom tegning *av* problemløsing og tegning *for* problemløsing. Tegning *av* problemløsing er når tegningen blir produsert etter oppgaven er løst, og den fungerer da som et verktøy for å kommunisere løsningen sin med andre eller vise hvordan man har tenkt. I tegning *for* problemløsing blir tegningen blir brukt for å løse et problem (Saundry & Nicol, 2006). Når tegninger brukes for problemløsing kan tegningene bli brukt som et *manipulativ*. Hvilket kan sees i sammenheng med representasjoner brukt som utforskningsverktøy (Stylianou, 2011; 2013) hvor representasjonene manipuleres, utvikles og endres. Tegninger brukt som manipulativ krever "bevegelse" hvilket kan representeres ved å flytte eller gruppere objekter ved å tegne piler eller sirkler og deretter telle det som ble representert. Gjennom å gjøre handlinger på tegningen fremstilles hvordan elementer flyttes på, akkurat som fysiske konkreter ville blitt flyttet. Tegning brukt for problemløsning innebærer også tegninger brukt som *støtte for system*. Det er tegninger som på en systematisk måte hjelper elevene med å holde orden på alle elementene i problemet. Tegningene kan brukes for å telle, telle på nytt og sjekke deres løsninger. Ved å bruke tegninger som konkretiseringsmateriell og støtte kan elevene stadig tilpasse og eksperimentere på tegningen, og tegningen kan brukes som et kommunikasjonsverktøy for å dele informasjon med fellesskapet både i prosessen og som et sluttprodukt.

3. Metode

Mitt forskningsspørsmål er: Hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elever i arbeid med én generell matematisk hypotese kan fremme eller hemme utvikling av gyldige argument? For å svare på spørsmålet har jeg observert og intervjuet seks elever i grupper på tre og tre. Elevene jobbet individuelt for å komme fram til hypotesen for deretter å argumentere for hypotesens gyldighet i gruppa. Mitt datamateriale består av lydopptak, elevenes arbeidsark og observasjonsnotater. Datamaterialet er kodet og analysert med henblikk på elevenes bruk av ulike typer representasjoner i sammenheng med typer argumentasjon elevene legger fram. Jeg starter med å presentere mitt valg av metode og gjennomføring av datainnsamlingen. Deretter følger en presentasjon av oppgaven som ble gitt elevene før en beskrivelse av analyseprosessen følger. Avslutningsvis vil jeg gjøre rede for etiske og metodologiske betraktninger samt reflektere rundt studiens troverdighet.

3.1 Metode for datainnsamling

Det er i hovedsak to strategiske tilnærminger til forskning: Kvantitativ og kvalitativ forskning (Thagaard, 2018). Valg av forskningsmetode avhenger av forskningsspørsmålet og fokuset for forskningen. Ordet «metode» stammer fra gresk og den opprinnelige betydningen er «veien til målet» (Kvale & Brinkmann, 2009). Metode er et redskap som forskere bruker for å samle inn empiri om virkeligheten. Kvantitativ forskning brukes ofte for å analysere et stort antall enheter hvor man arbeider med tallmateriale og statistikk. Kvalitativ forskning er en form for sosial undersøkelse med en fleksibel struktur hvor forskningen drives av dataen (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Subjektivitet spiller en essensiell rolle i forskningsprosessen hvor man studerer et færre antall observasjoner i detalj. Det finnes flere kvalitative metoder som blant annet intervju, observasjon, analyse av dokumenter eller tekster og bruk av visuelle medier (Ryen, 2002). Hensikten med studien er å kunne si noe om hvordan elever bruker ulike typer representasjoner i argumentasjonen for en hypotese og hvilke type argument et utvalg elever på sjettetrinn legger fram. Målet er ikke å kunne beskrive hva de fleste eller alle elever på sjettetrinn gjør, men å gå i detalj på en spesifikk situasjon kan gi noen implikasjoner som videre kan danne et grunnlag for videre forskning og refleksjon. Jeg har derfor valgt å benytte meg av en kvalitativ forskningsmetode hvor jeg brukte semi-strukturert intervju og deltakende observasjon for å gå i dybden på noen få elevers arbeid.

3.1.1 Semi-strukturert intervju

Den mest utbredte formen for datainnsamling innenfor kvalitativ forskning er intervju i ulike former (Dalen, 2011; Tjora, 2012; Thagaard, 2018). I min studie har jeg valgt det Postholm og Jakobsen (2018) omtaler som semi-strukturert intervju, som betraktes som den mest benyttede formen for intervju innen kvalitativ forskning. Det som kjennetegner semi-strukturert intervju er at forskeren på forhånd har bestemt temaene som styrer fokuset i intervjuet, samtidig som intervjuet har en fleksibel struktur (Dalen, 2011). Fleksibiliteten gjør at spørsmålene som stilles til intervjuobjektet kan tilpasses underveis, og det kan inkluderes spørsmål om temaer som ikke var planlagt i forkant. Det var et klart fokus for intervjuet med elevene hvor jeg ønsket å se på elevenes argumentasjon. Likevel var oppgaven såpass åpen at jeg på forhånd ikke kunne vite hvilke funn som kom til å dukke opp blant elevene, og det ville derfor være vanskelig for meg å lage noen faste spørsmål på forhånd. Løsningen ble da at jeg lagde meg en intervjuguide med spørsmål som kunne stilles underveis i elevenes løsningsprosess. Disse spørsmålene kommer jeg tilbake til i delkapittel 3.2.4: Spørsmål til elevene.

En innvending mot intervjuforskning er at studiene ofte inneholder få intervjupersoner og at resultatene dermed ikke kan generaliseres (Kvale & Brinkmann, 2009). Min studie består av et relativt lite utvalg elever, to grupper med tre elever på hver gruppe. Kvale og Brinkmann (2009) påpeker at dersom en ønsker å oppnå en overføringsverdi av forskningen så bør en flytte fokuset fra spørsmålet hvorvidt resultatene fra intervjuene kan generaliseres, og heller fokusere på om kunnskapen som produseres kan overføres til andre lignende situasjoner. Ved å bruke intervju som forskningsmetode kan jeg gjennom samtale med elevene få bedre tilgang til den muntlige argumentasjonen deres, og ved å analysere datamaterialet kan jeg diskutere noen betraktninger som kan overføres til elevers senere arbeid med bruk av representasjoner som kan fremme gyldige argument.

I kvalitative undersøkelser bør det også legges vekt på elevenes nonverbale kommunikasjon. Gjennom oppgaveløsningen kan elevene lage regnestykker, tegninger, ha bevegelser og et kroppsspråk som kan være interessante å se i samsvar med deres muntlige utsagn. For å fange opp nonverbal kommunikasjon anså jeg deltakende observasjon som en relevant metode for datainnsamling som kunne bidra til å svare på problemstillingen min.

3.1.2 Deltakende observasjon

Observasjon innebærer i følge Cohen et al. (2018) at man studerer sosiale situasjoner, hendelser, atferd og rutiner. Styrken til observasjon er at forskeren har muligheten til å få mer valide og autentiske data fra sosiale situasjoner som er naturlige, i motsetning til rapporterte data (Cohen et al., 2018). Det skilles i hovedsak mellom to typer observasjon; deltakende og ikke-deltakende observasjon. Jeg konkluderte med at deltakende observasjon var hensiktsmessig å bruke i min studie. Deltakende observasjon som forskningsmetode innebærer at man er i samhandling med deltakerne samtidig som man iakttar det de gjør og er en del av den sosiale settingen (Thagaard, 2018; Fangen, 2010). Deltakende observasjon kan sees på som en blanding mellom samtale og observasjon. Kroppsspråk og gester er kommunikasjonsverktøy som kan fanges opp gjennom observasjon, og som ved tolkning kan gi informasjon. Cohen et al. (2018) beskriver deltakende observasjon som at man deltar i aktiviteten sammen med elevene gjennom observasjon, samtale og spørsmål. Jeg ønsket å være en del av samtalen med elevene og ha mulighet til å stille spørsmål underveis, og valgte på bakgrunn av det å gjennomføre deltakende observasjon.

I min studie kombinerer jeg to metoder for datainnsamling, deltakende observasjon og semi-strukturert intervju. Ved å observere både det elevene sa og gjorde i løsningsprosessen kan jeg se på elevenes ulike representasjoner og argumentasjon fra to ulike perspektiv. Observasjon gir mulighet til å få handlingsdata, mens samtaler gir diskursive data (Fangen, 2010). Mens elevene i begynnelsen satt og løste oppgavene individuelt var det mange handlinger jeg ikke hadde fått med meg uten observasjon. For å skape et mer helhetlig bilde rundt studien min var det viktig for meg å kombinere disse to metodene. Datamateriale fra observasjonen og intervjuene var lydopptak, elevenes arbeidsark og observasjonsnotat. Slik skaffet jeg meg ulike typer datamateriale som jeg kunne bruke for å skape et helhetlig bilde over typer representasjoner og argumentene til elevene, noe som kan bidra til å øke validiteten på min studie.

3.2 Gjennomføring av datainnsamling

Her vil jeg presentere utvalg av elever, bruk av lydopptak, observasjonsnotat og type spørsmål jeg kunne stille elevene underveis i løsningsprosessen.

3.2.1 Utvalg av elever og omgivelser

Datainnsamlingen ble gjort med seks elever fra sjettetrinn hvor lærerne delte elevene inn i grupper på tre og tre elever. I følge Cohen et al. (2018) er det en fordel at elevene som skal delta i studien har sett den personen som skal gjennomføre undersøkelsen på skolen før. Jeg jobber på skolen elevene går på så jeg var kjent for elevene, men jeg hadde ikke hatt noen undervisning med dem tidligere så jeg visste ikke noe om elevenes ferdighetsnivå. Den eneste føringen jeg ga var at det burde være elever som var muntlige aktive. Gruppe en bestod av elevene Hanne, Emma og Nina, mens Geir, Anders og Sigurd var på gruppe to. Det at elevene ble inndelt i «jentegrupper» og «guttegrupper» var helt tilfeldig. Gjennom å gjennomføre gruppeintervju hadde jeg en tanke om at det ville åpne for at elevene kunne utfordre og hjelpe hverandre når de skulle argumentere for hypotesens gyldighet. Jeg ønsket tre elever sammen da jeg vurderte fire til å være litt mange. Har tidligere erfart at det er enklere for elever å innta en passiv rolle hvis gruppene blir for store. Samtidig anså jeg kun to elever som sårbart. Hvis en elev kom med et argument så reflekterte jeg rundt mulighet av at den andre eleven sa seg enig, selv om den kanskje ikke skjønte eller var enig med resonnementet. Det ville kanskje være enklere å være kritisk hvis de var flere. I tillegg er det flere som kan komme med innspill når gruppen består av tre elever.

Intervjuene ble gjennomført på et grupperom som tilhørte klasserommet til elevene. Det var en kjent lokasjon hvor vi ikke kom til å bli avbrutt, og det er en forutsetning for en god atmosfære (Cohen et al., 2018). Elevene ble plassert rundt et bord slik at jeg hele tiden kunne observere dem. Jeg hadde selv ark hvor jeg noterte gester, rekkefølgen på elevenes skriftlige argumentasjon og andre notater som ikke kom til å bli fanget opp av lydopptakeren. Elevene fikk utdelt ark og gråblyant. Alle elevarkene ble samlet inn og er med som en del av datagrunnlaget i studien.

3.2.2 Bruk av lydopptak

I min studie valgte jeg lydopptak som et av verktøyene for å samle inn data. Jeg vurderte også videoopptak hvor fordelene blant annet er at jeg ikke hadde trengt å notere like mye underveis i samtalen med elevene, og jeg kunne fått et lettere arbeid med transkriberingen i etterkant. Jeg så likevel på videoopptak som mer komplekst å håndtere i forhold til etiske og praktiske elementer. Det er strengere krav fra NSD, Norsk senter for forskningsdata, knyttet til bruk av videoopptak enn av lydopptak. I tillegg anså jeg det som vanskeligere å få godkjenning fra foresatte og elever hvis de skulle bli filmet. Jeg reflekterte også rundt hvordan det å bli filmet kom til å påvirke elevene. Ved å bruke film som observasjon kan den som blir filmet endre oppførsel (Tjora, 2012). Noen elever kunne også oppleve det å bli filmet som ubehagelig, samt at det kunne være et forstyrrende moment. Min vurdering etter å ha sett på positive og negative sider ved å bruke videoopptak ble at jeg heller valgte å bruke lydopptak, som jeg anså tilstrekkelig i min studie. Ved å bruke en lydopptaker gjør det at man som forsker kan konsentrere seg om elevene og få god flyt og kommunikasjon i samtalen fordi man vet at det som blir sagt blir tatt opp (Tjora, 2012). For å kunne bruke lydopptak må man på forhånd ha fått godkjenning fra NSD. Foreldre og elever fikk informasjon hvordan lydopptakene skulle brukes, oppbevares og når de ville bli slettet.

3.2.3 Observasjonsnotat

Cohen et al. (2018) nevner at lydopptak ikke dekker visuelle og nonverbale aspekter ved samtalen. Ved å bruke lydopptaker i stedet for video så mistet jeg muligheten til å kunne gå tilbake i etterkant og se på hvordan elevene brukte svarene og de figurene de tegnet mens de forklarte dem muntlig. For å gjøre opp for mangler ved å bruke lydopptak ville jeg være avhengig av å ta gode observasjonsnotat underveis i samtalen. Notatene kunne være med og komplementere den verbale kommunikasjonen i transkripsjonen. Siden jeg hadde tre elever om gangen var det enklere for meg å kunne følge med på hver enkelt elev enn om de hadde vært flere. I begynnelsen av oppgaveløsningen skulle elevene først arbeide individuelt og prøve å finne noe gjentakende i summen når tre påfølgende tall adderes. Senere skulle elevene diskutere funnene sine i gruppen. I fasen hvor elevene arbeidet individuelt var det viktig at jeg gjorde meg gode notater av hva elevene gjorde slik at jeg kunne stille spørsmål til ulike mønstre de fant, fordi det kun ble uttrykt skriftlig. For å holde orden på hvilken tegnet figur elevene refererte til i deres muntlige utsagn valgte jeg å skrive på figurtall og noen små kommentarer på elevenes ark underveis i samtalen.

3.2.4 Spørsmål til elevene

Postholm og Jacobsen (2018) beskriver ulike typer spørsmål som hjelper forskeren med å forstå i løpet av et intervju. Det er typer spørsmål som selve spørsmålene i intervjuguiden, oppfølgingsspørsmål og inngående spørsmål. *Inngående spørsmål* hjelper forskeren å holde samtalen i gang samtidig som det bidrar til å forklare det som blir sagt mens *oppfølgingsspørsmål* er spørsmål som brukes for å oppnå dybde i deltakernes svar. Jeg hadde ingen intervjuguide med stram struktur, men lagde meg en liste med spørsmål som jeg kalte «spørsmål som kan stilles underveis». Listen besto av spørsmål som kunne være relevante å stille i samtalen med elevene. Spørsmålene var laget på en slik måte at de kunne være en hjelp for å få elevene til å gi ytterligere forklaringer til egne og andre elever sine argument, eller for å få elevene til å utdype hva de ulike representasjonene betydde for gyldigheten til hypotesen. Spørsmålene på lista var en blanding av inngående og oppfølgingsspørsmål. Det er 11 og 12-åringer som er mine intervjupersoner, og det var viktig at ordlyden i spørsmålene jeg stilte var forståelig for dem. Jo klarere og enklere spørsmålene som stilles er, jo større sjanse er det for å unngå misforståelser og få detaljerte svar fra elevene tilbake (Leset & Tellmann, 2014). Listen med spørsmål var som følgende:

Spørsmål som kan stilles underveis:

- *Kan du fortelle mer om det?*
- *Vil dette alltid være riktig?*
- *Jeg er litt med på tankegangen. Kan du overbevise meg mer?*

- *Hvordan tenkte du for å komme fram til den løsningen?*
- *Hva legger dere merke til? Hvis elevene sier "denne" eller "det", spør hva er det?*
- *Er det noe annet som trenger å oppklares i argumentet?*
- *Kan dere bruke noe annet enn tallene for å vise hva som skjer i denne situasjonen?*

Da elevene i studien var flinke til å forklare muntlig hva de gjorde oppstod det ikke behov for å stille så mange spørsmål rundt hvordan de tenkte fordi det ble forklart underveis av elevene selv. Jeg har gjort meg noen refleksjoner rundt enkelte av spørsmålene jeg stilte som jeg vil drøfte i 3.6: Studiens troverdighet og metodesvakhet. Videre skal jeg presentere den muntlige oppgaven som ble gitt elevene hvilket sammen med «spørsmål som kan stilles underveis» vil utgjøre min intervjuguide, se vedlegg 2.

3.3 Oppgaven til elevene

Oppgaven til elevene var å produsere gyldige argument for en hypotese tilknyttet emnet tallteori. Oppgaven er en omformulering av en oppgave som ble gitt meg som student på masterstudiet i faget «perspektiver på tallbegrepet». Jeg skulle gi et bevis for hvorfor summen når man adderer tre påfølgende tall alltid vil være i tregangen. Jeg ønsket at elevene selv skulle utforske hva som skjer med summen når tre påfølgende tall adderes i stede for å gi dem svaret på det i oppgaveteksten. Hvis elevene selv kom fram til en hypotese så ville de kanskje få mer eierskap til den. Derfor ble innholdet i oppgaven forandret til at elevene skulle finne ut hva som er gjentakende for summen når hvilke som helst tre påfølgende tall legges sammen og videre argumentere for hvorfor det alltid vil bli slik. Tidligere har argumentasjon og bevis vært tett knyttet opp det matematiske emnet geometri. Stylianides et al. (2016) påpeker viktigheten av å utvide forskningen på argumentasjon i emner utenfor geometri siden argumentasjon er en nøkkelaktivitet for å kunne utvikle et grunnlag for matematisk kunnskap. Oppgaven ble valgt på bakgrunn av at jeg ønsket å gi elevene en oppgave som omhandlet argumentasjon tilknyttet noe annet enn emnet geometri. Jeg vurderte det også slik at oppgaven ga elevene mulighet til å bruke ulike typer representasjoner for å utvikle gyldige argument. Oppgaven omhandler tallteori som kan være en overgang til tidlig algebra ved å argumentere gjennom å bruke algebraiske symboler. Argumentasjonen for oppgaven kan også representeres med tegninger eller naturlig språk som kan føre til et argument som kan kategoriseres som gyldig.

Oppgaven ble forklart muntlig for elevene. Jeg hadde på forhånd skrevet ned hvordan jeg ønsket å legge den fram for elevene. Slik sikret jeg meg at oppgaven ble lagt frem likt i begge gruppene:

> *"Oppgaven dere får er som følgende: Dere skal se på hva som skjer når dere legger sammen, eller plusser sammen, hvilke som helst tre påfølgende tall. Tre påfølgende tall er for eksempel 26, 27, 28. Tre tall rett etter hverandre på tallinja. Så skal dere lete etter mønster. Hva er det som skjer når vi plusser, legger sammen, tre påfølgende tall. Finner dere noe som er felles, noe som gjentar seg eller er likt?"*

I prosessen hvor oppgavens ordlyd ble formulert gjorde jeg flere valg. Det var viktig at oppgaven ble lagt fram slik at innholdet var tydelig og fortalt med et språk og begreper som elevene ville forstå. Jeg valgte bevisst å ikke bruke begrepet «addere» selv om det er et begrep elevene skal være kjent med fordi jeg tenkte at det muligens kunne være en forstyrrende faktor. Jeg valgte å omtale addisjon som «å legge sammen» da jeg vurderte det til å være mer kjent for elevene. Videre introduserte jeg et begrep som kunne være nytt for elevene, nemlig «tre påfølgende tall». Jeg valgte å bruke de tre påfølgende tallene 26, 27 og 28 for å vise til et talleksempel. Jeg ønsket ikke å starte med 1+2+3 da det kunne påvirke elevene til å begynne og utforske på de samme tallene. Jeg valgte derfor noen «tilfeldige» tall litt ut i tallrekka som eksempel. For å knytte begrepet «tre påfølgende tall» til noe konkret så refererte jeg til at det er tre tall rett etter hverandre på tallinja. Videre ønsket jeg å få elevene til å se etter noe gjentakende i summene når tre påfølgende tall blir lagt sammen. Det ble forklart med mange ulike begrep som «mønster», «noe felles», «noe som gjentar seg eller er likt». Jeg vurderte at ved å introdusere elevene for flere begreper som omhandler det samme så ville hver enkelt elev finne hvert fall en formulering som ville gi mening.

Etter at oppgaven ble gitt arbeidet elevene individuelt i noen minutter før de samlet seg i gruppa for å diskutere sine funn. Elevene kom i fellesskap frem til en generell matematisk hypotese. Hypotesen var: «Når tre påfølgende tall legges sammen så vil summen alltid være i tregangen». Studien min undersøker hvordan elevene i samhandling med hverandre brukte representasjoner for å argumentere for hypotesen formulert av elevene selv.

3.4 Metode for analyse av datamaterialet

Analyse av kvalitative data innebærer å forklare, organisere og gjøre rede for datamaterialet (Cohen et al., 2018). Første del i prosessen med å analysere mitt datamateriale var å transkribere og anonymisere lydopptakene. Her ble deler av mine observasjonsnotater også skrevet inn i transkripsjonen. Med utgangspunkt i transkripsjonene og de innsamlede elevarkene forsøkte jeg å kategorisere elevenes representasjoner og argumentasjon med bakgrunn i rammeverkene jeg har vist til i teorikapittelet.

3.4.1 Transkripsjon

Transkripsjon er en konseptualisering og en tilknytning til en samtale mellom to eller flere personer. Når man transkriberer så transformeres noe fra en form til en annen. En transkripsjon vil ikke være en nøyaktig gjengivelse av samtalen, men det skjer en form for abstraksjon av samtalen. Nilssen (2012) skriver at ideelt sett bør transkripsjonen gjøres så raskt som mulig etter opptaket er gjort, og helst før nye opptak. Jeg har tidligere erfart at det å transkribere er ferskvare og at det er absolutt enklest å huske detaljer så kort tid som mulig etter gjennomføringen. Lærerne til elevene ga meg muligheten til å velge tidspunkt for undersøkelsen, og jeg valgte derfor å gjennomføre undersøkelsen med de to elevgruppene på begynnelsen av skoledagen. Jeg hadde ingen undervisning etterpå, og det ga meg muligheten til å kunne transkribere samme dag noe jeg så på som en fordel. I prosessen med å transkribere lydopptakene valgte jeg å gjengi det elevene sa på en mest mulig korrekt måte og tok heller med for mye enn for lite. Alle elevene ble anonymisert ved å gi de fiktive navn. Jeg fulgte anbefalinger fra Nilssen (2012) av hva som kunne være nyttig å ta med i transkripsjonen med tanke på analysen som skulle gjøres senere. Jeg noterte ned pauser, og uttrykk som eeeh, mmm o.s.v. da det kunne være indikasjoner på at elevene var usikre eller enige. Markerte også hvis noen avbrøt hverandre i gruppesamtalen med /. Var det kroppsspråk eller handlinger som kunne være hensiktsmessige å ta med så ble det notert ned i en parentes: «Fordi det blir sånn!» *(*banker hånda i bordet*).* Hvordan transkripsjonene og elevenes representasjoner og argument ble analysert vil bli videre forklart.

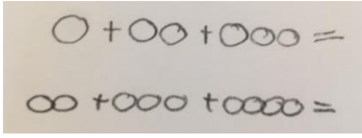
3.4.2 Analyseprosessen

Koding og kategorisering av datamateriale anses som kjerneaktiviteter i den kvalitative analyseprosessen. Med utgangspunkt i forskningsspørsmålet startet jeg med å undersøke hvilke representasjoner elevene hadde brukt og kategoriserte typer argument elevene hadde utviklet.

Elevenes ulike typer representasjoner som ble identifisert i datamaterialet ble kodet i tre ulike kategorier ut i fra Duval (2006) sine semiotiske representasjonssystem. Det naturlige språket ble i analysedelen beskrevet som muntlige forklaringer fordi ingen elever skrev noen skriftlige forklaringer med bokstaver. Representasjoner innenfor det symbolske systemet inneholdt elevers argumentasjon gjennom bruk av tallsymboler og tegn. I det ikoniske systemet inngikk datamateriale hvor elever brukte tegninger og lagde figurer.

Elevenes bruk av tegninger, muntlige forklaringer og symboler ble vurdert som en helhet og elevenes typer argument ble kodet ut i fra kategorien «argumentasjon» fra rammeverket til G. Stylianides (2008). Argument ble kodet som empiriske argument når elevene baserte sin argumentasjon på funn i noen talleksempler. Argument hvor det ble forklart sammenhenger ut over å kun vise til summen, men hvor det manglet videre begrunnelse for hvorfor det gjelder for tre vilkårlige påfølgende tall ble kodet som redegjørelser. Argument ble kodet som generiske eksempel når gyldigheten til hypotesen ble begrunnet av elevene ved å vise til et spesifikt eksempel hvor elevene samtidig forklarte hvilke generelle egenskaper eksempelet innehar slik at det gjelder for tre vilkårlige påfølgende tall. Argument som, uavhengig av et spesifikt eksempel, viste at når tre vilkårlige påfølgende tall legges sammen så vil hypotesen stemme, ble kodet som en generell logisk slutning.

I studien undersøker jeg hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elevene som kan fremme eller hemme gyldige argument. Elevene i studien produserte tegninger som de brukte i arbeid med oppgaven. Jeg gjorde en åpen koding av datamateriale som innebærer å identifisere, klassifisere, kode og sette navn på det som gjentar seg i materialet (Nilssen, 2010). Ut i fra mitt datamateriale så jeg hvordan noen tegninger så ut til å hjelpe elever til å fremme gyldige argument, mens andre tegninger ikke førte til noen videre argumentasjon. Det oppstod derfor et behov for å se nærmere på hva som gjentok seg i tegninger som så ut til å fremme eller hemme utviklingen av gyldige argument. Noe som gjentok seg i datamaterialet var at tegninger som var fremstilt slik at de ga elevene muligheten til og utforske strukturen til de tre påfølgende tallene og sammenhengen til summen, så ut til å føre til gyldige argument. Tegninger som gjorde det vanskelig å se strukturer og sammenhenger så ut til å hemme videre argumentasjon. Jeg har på bakgrunn av det som gjentok seg i datamaterialet valgt å kategorisere elevenes tegninger i *strukturelle tegninger* og *ikke-strukturelle tegninger*. Jeg velger å bruke to eksempler av tegninger laget av elevene for å argumentere for hva som inngår i de to kategoriene.



Figur 4: Ikke-strukturell tegning

En ikke-strukturell tegning gir liten mulighet for å utforske sammenhenger og strukturer. I figur 4 er tallsymbolene 1+2+3 og 2+3+4 erstattet med en tegning av rundinger som viser mengden til tallene som adderes. Noen likheter eller forskjeller i strukturen til tallene som adderes kommer ikke frem gjennom tegningen. Plusstegnet og likhetstegnet er fortsatt i symbolform. De to eksemplene står hver for seg, og det er tilsynelatende ingen kobling mellom de to eksemplene. Summen er fraværende i tegningen noe som gjør det vanskelig å argumenter for hvilken innvirkning strukturen til tallene som adderes har på at summen er i tregangen. En ikke-strukturell tegning gir ikke noen videre innsikt i generaliteter, og bruk av en slik tegning legger derfor opp til empiriske argument. En strukturell tegning fremhever strukturen til tallene.

Figur 5: Strukturell tegning

I tegningen i figur 5 er mengden til tallene som adderes erstattet med ruter. I tegningen er mengden fremstilt slik at strukturen i de tre tallene som adderes blir fremhevet. Det andre tallet som adderes er én mer enn det første tallet og det tredje tallet er to mer enn det første tallet. Tegningen er også en fremstilling av strukturen til summen. Tegningen viser hvordan tallene som adderes utgjør summen. Selv om det er et spesifikt eksempel som tegnes så vil strukturen til summen når tre vilkårlige påfølgende tall adderes være lik som på tegningen. Strukturelle tegninger gir mulighet til å oppdage generaliteter gjennom å se på strukturen til elementene som inngår i oppgaven, og en slik tegning kan derfor brukes til å utvikle gyldige argument.

Det var fremtredende i dataen hvordan strukturelle tegninger ble brukt for å utforske matematiske strukturelle sammenhenger tilknyttet hypotesen. Stylianou (2011, 2013) klassifiserer representasjoner brukt som utforskningsverktøy som at representasjonen brukes dynamisk ved at den tilpasses, manipuleres og endres til nye representasjoner noe som kan gi videre innsikt i problemet. Betegnelsen «tegning brukt som utforskningsverktøy» inngår i min analyse og vil bli brukt for å betegne tegninger hvor elevene tilpasset, endret og brukte tegningene som manipulativer. Tegninger brukt som manipulativ inkluderte tegningen som hadde «bevegelse i seg» vist til med for eksempel piler. Tegninger hvor klosser eller streker ble flyttet og tegnet på andre steder ble også kategorisert som manipulativer fordi tegningen fungerte som om det var fysiske konkreter som ble flyttet rundt.

Jeg brukte det kategoriserte datamaterialet for å se om jeg kunne gi noen svar på forskningsspørsmålet mitt. Jeg analyserte om det var noen sammenheng mellom hvilke typer representasjoner som ble brukt av elevene, og om bruken av disse fremmet eller hemmet utviklingen av gyldige typer argument. Analysekapittelet vil struktureres ut fra tre hovedkategorier som oppsummerer mine funn. Den første hovedkategorien som presenteres i analysekapittelet er: *«Bruk av tallsymboler kan hemme utvikling av gyldige argument»*. Kategorien oppstod da datamaterialet viste hvordan elevenes bruk av tallsymboler og muntlige forklaringer førte til utvikling av empiriske argument eller redegjørelser for å bekrefte gyldigheten til hypotesen. Kategorien er delt i to underkategorier som vi presenteres nærmere i analysekapittelet. Et annet funn var at ikke-strukturelle tegninger hemmet elevene i å utforske hvilken innvirkning strukturen til tallene som adderes har på at summen er i tregangen. Funnet førte til den andre hovedkategorien; *«Ikke-strukturelle tegninger kan hemme utvikling av gyldige argument»*. Den tredje og siste hovedkategorien er basert på eksempler fra datamaterialet hvor bruk av strukturelle tegninger så ut til å fremme elevers utvikling av gyldig argumentasjon. Kategorien: «Strukturelle tegninger kan fremme utvikling av gyldige argument» struktureres i tre underkategorier, og inndelingen i de ulike underkategoriene vil det argumenteres for i analysekapittelet.

3.5. Etiske og metodekritiske betraktninger

Etikk og moral i forskningssammenheng forteller noe om hva som er riktig og feil, og hva som er akseptabel og uakseptabel oppførsel. Som forsker har man et etisk ansvar på grunn av at man arbeider med mennesker, og i mitt tilfelle med barn som ikke alltid forstår hva det innebærer å være deltaker i forskning (Befring, 2007). Som forsker må man ha evnen til å tilpasse metode og innhold til aldersgruppa til deltakerne (Kvale & Brinkmann, 2009). I min studie har jeg forsket på elevers bruk av representasjoner og deres argumentasjon i løsningen av en matematikkoppgave, noe som ikke kan anses som verken sensitiv informasjon eller noe som kan oppfattes som ubehagelig for elevene. Likevel kan en setting med en forsker og en lydopptaker oppfattes som litt skummel, og det var viktig for meg å ufarliggjøre situasjonen for elevene. I introduksjonen til elevene forklarte jeg derfor at det viktige for meg ikke var om de klarte å løse oppgaven, men å få et innblikk i hvordan de tenkte. Jeg informerte videre om at jeg kom til å bruke en lydopptaker, og det var bare fint om de «tenkte høyt» ved å si det de tenkte.

Alle deltakere i et forskningsprosjekt skal si seg enig i å delta, og forskeren må innhente et informert samtykke før datainnsamlingen kan skje. I samtykket skal deltakerne informeres om formålet ved studien og få informasjon om at det er frivillig å delta. Siden elevene i studien var under 15 år ble samtykket innhentet fra foresatte, se vedlegg 1: «Informasjonsskriv og samtykkeerklæring». Jeg forsikret meg likevel om at alle elevene fikk muntlig informasjon om studiet, hva dataene skulle brukes til og at det var helt frivillig å delta. Både lydopptak og samtykkeskjema regnes som personopplysninger og studien ble derfor meldt til NSD. I tillegg til forskningsetiske retningslinjer fra NSD har jeg fulgt NTNU sine retningslinjer for hvordan personopplysninger skal behandles. Jeg utarbeidet ut i fra de ulike retningslinjene en datahåndteringsplan for forsvarlig lagring av data. Alt av datamateriale er blitt anonymisert slik at elevene ikke vil kunne gjenkjennes.

Konsekvensene av å delta på en kvalitativ studie handler om eventuelle fordeler og ulemper det kan ha å delta (Kvale & Brinkmann, 2009). Som forsker har man et ansvar for å gjøre seg tanker om hva eventuelle konsekvenser kan være for elevene. Studien mener jeg ikke medfører noen stor ulempe for elevene da de bare ble borte fra «vanlig undervisning» i ca. 60 minutter, og oppgaven de løste kan ses på som god trening i argumentasjon.

Som forsker kan man påvirkes av ulike faktorer, og det er viktig at man forsøker å være så nøytral som mulig. Forskerens uavhengighet er et sentralt tema i forskning fordi blant annet forskningsdeltakerne kan påvirke forskeren (Kvale & Brinkmann, 2009). Forskeren kan føle en sterkere tilknytning til en av elevgruppene, og det kan derfor være fare for at det sees bort fra enkelte resultater. Noen funn kan vektlegges mer og det kan gå ut over å få en så nøytral undersøkelse som mulig. Cohen et al. (2018) påpeker at det er et etisk perspektiv man må ta hensyn til når man gjør en dataanalyse. Man skal ikke gi feil representasjon av materialet, og det å være selektiv med utvalg av data for å få dataen til å passe med sine ønskede resultater gir en feil presentasjon av datamaterialet. Dataene i studien er valgt på bakgrunn av funnene som dukket opp og presentert så nøyaktig som mulig.

3.6 Studiens troverdighet og metodesvakhet

Begrepet troverdighet (trustworthiness) brukes av Guba (1981) og Cohen et al. (2018) i tilknytning til kvalitativ forskning, hvor troverdighet også omtales som validitet og reliabilitet. Reliabilitet handler om stabiliteten i målingene som er gjort og hvorvidt du måler det samme hvis du gjentar undersøkelsen på en annen gruppe. Validiteten til en studie dreier seg om metoden som er valgt egner seg for å undersøker det den hevder den undersøker. Jeg skulle undersøke hvordan elever på sjettetrinn brukte ulike typer representasjoner når de skulle fremme argument for en hypotese de selv hadde kommet fram til. Da jeg presenterte oppgaven for elevene var jeg bevisst på at alle begrep og innholdet i oppgaveteksten skulle være nøye forklart, og at det ble gjort likt på alle gruppene. Validitet innebærer også at konklusjonene jeg trekker kan forsvares med teorier og datamaterialet som er brukt i analysen. Dataen i studien er presentert så nøyaktig som mulig og knyttet opp mot relevant teori.

Guba (1981) viser til fire faktorer relatert til troverdigheten til en undersøkelse. *Kredibiliteten* (truth value) til en undersøkelse er om funnene gir mening og er overbevisende for leseren. *Overførbarheten (*applicability*)*, hvor begrepet anvendbarhet også brukes, er i hvilken grad funnene fra studien kan anvendes på andre kontekster og på andre elever. Overførbarheten sier også noe om i hvilken grad funnene i studien kan generaliseres. Det å være *konsekvent* (consistency) er hvordan man kan avgjøre om funnene i studien kan gjentas hvis man kopierer studien med en lik gruppe elever og den samme konteksten. *Nøytralitet* (neutrality) er den siste faktoren som omhandler i hvilken grad men kan si at funnene i undersøkelsen er et resultat basert på deltakerne og forholdene i studien.

Overførbarhet, anvendbarhet og det å være konsekvent kan relateres til reliabilitet og validitet. En kvalitativ forskning er slik at den ikke kan gjennomføres helt likt, og svarene blir da nødvendigvis ikke akkurat de samme. En annen forsker kan, ved å gjennomføre samme undersøkelse, ha valgt et annet fokusområde enn meg og også vektlagt funnene annerledes enn det jeg har gjort. For at studien min skal være mest mulig overførbar til lignende situasjoner har jeg gitt en detaljert beskrivelse av utvalg av elever, oppgaven som ble gitt og metoder for datainnsamling og analyse. Blant annet for å sikre at undersøkelsen skal kunne kopieres på en enklest mulig måte. Nøytralitet, vanligvis omtalt som objektivitet, er den siste faktoren Guba (1981) nevner som en faktor som påvirker studiens troverdighet. Nøytralitet omhandler i hvilken grad funnene i en undersøkelse er et resultat basert på deltakerne og forholdene i studien, og ikke er påvirket av forskerens interesser, motivasjon og perspektiver. Som forsker i en kvalitativ studie er det vanskelig å skulle være helt nøytral da man gjennom intervju og observasjon blir en aktiv deltaker. Jeg har i metodekapittelet begrunnet mine vurderinger gjort rundt utvalg av elever og vist til metodiske valg jeg har tatt for å være så nøytral som mulig i studien.

Ved å forske på få elever vil datamaterialet av den grunn bli snevert, og jeg vil ikke kunne generalisere hvordan alle sjetteklassinger bruker representasjoner når de skal argumentere for en hypotese som omhandler tallteori. Troverdigheten til studien handler i hovedsak om i hvilken grad jeg er i stand til å overbevise leseren. Jeg må overbevise leseren om at å gå i dybden hos noen få elever kan gi et innblikk og noen generelle implikasjoner for elevers bruk av ulike typer representasjoner og utvikling av gyldige argument. Det vil være interessant både for videre forskning og fra et undervisningsperspektiv å se hvordan elevene i studien brukte ulike representasjoner, og hvilken type argumentasjon det kan føre til. For lærere vil det være en mulighet til å se hva elever kan tenkes å gjøre i arbeid med lignende oppgaver. Både for å være oppmerksomme på eventuelle utfordringer som kan oppstå i bruk av representasjoner og i elevers utvikling av argument, men også hvilke muligheter som kan oppstå.

Jeg ser noen svakheter ved prosjektet mitt. I etterkant ser jeg at oppgaven som ble gitt elevene kunne vært formulert på en annen måte. Elevene skulle selv formulere en hypotese for hva som var felles for summen når tre påfølgende tall ble lagt sammen. Selv om elevene fikk eierskap til hypotesen så brukte de mye energi på å komme fram til den. For å kunne gi noen svar på forskningsspørsmålet mitt tror jeg derfor følgende oppgave ville egnet seg bedre: «Argumenter for om hypotesen stemmer eller ikke: Summen av tre påfølgende tall vil alltid være i tregangen».

Mine spørsmål til elevene har en betydning for resultatene i studien. Elevene startet med å presenterte empiriske argument, og for å få elevene til å se etter mer generelle egenskaper ved hypotesen stilte jeg dem en kombinasjon av innholdet i spørsmålene: «Vil dette alltid være riktig?» og «Jeg er litt med på tankegangen. Kan du overbevise meg mer?». Et utdrag fra intervjuet med gruppe to viser en slik situasjon:

Forsker:	*Jeg er ikke overbevist om det dere har funnet ut om at alle tallene vil være i tregangen. Jeg er fortsatt litt usikker. Hvordan kan jeg vite at alle vil være i tregangen?*

Spørsmålet stilt av meg er med på å påvirke elevenes argumentasjon. Ved å stille spørsmålet insinuerer jeg at jeg ønsker en videre argumentasjon som kan overbevise meg om hvorfor alle summene vil være i tregangen. Selv om spørsmålet er med og påvirker argumentasjonen til elevene mener jeg det er greit å stille da det var med på å gjøre elevene oppmerksomme på at en videre argumentasjon kunne være nødvendig. Ved å stille spørsmålet får elevene muligheten til å argumentere videre for gyldigheten av hypotesen.

Tallsymboler og muntlige forklaringer ble tatt i bruk av elevene på eget initiativ, mens det var jeg som initierte til bruk av tegning. Da elevenes bruk av tallsymboler og muntlig språk så ut til kun å fremme ugyldige argument, tok jeg i bruk det siste spørsmålet på lista i intervjuet med gruppe en:

Forsker: *Kan det ha noe å si for at det er i tregangen? Kan dere prøve å vise det med noe annet enn tall? Kan dere tegne noe?*

Jeg hadde på forhånd bestemt meg for og ikke oppfordre til bruk av en spesiell type representasjon, men gjorde likevel det da jeg på slutten spør: «Kan dere tegne noe?». Initiativet til å bruke tegning kom fra meg som forsker. Det er vanskelig å vite om elevene likevel hadde brukt tegning hvis jeg hadde stoppet spørsmålet etter: «Kan dere prøve å vise det med noe annet enn tall?». Forskningsspørsmålet mitt skal gi svar på hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elevene som kunne være med og fremme utviklingen av gyldige argument. Rellensmann et al. (2017) mener at instruksjoner hvor elevene blir bedt om å lage en tegning kan være et nyttig verktøy for å støtte de i prosessen. Mine spørsmål åpnet opp for at elevene kunne ta i bruk en ny representasjon, tegning, og ga dem en indikasjon på at videre argumentasjon var ønsket. Det var likevel elevene selv som tok i bruk representasjonene og utviklet sin argumentasjon, så jeg anser det som greit i forhold til det jeg skulle undersøke.

Min studie er en kvalitativ undersøkelse noe som innebærer at jeg har måttet ta flere valg. Datamaterialet jeg fikk gjorde at jeg måtte ta noen valg i forhold til hva jeg ville fokusere på. Andre forskere kunne med samme datamateriale valgt å legge vekt på fasen hvor elevene prøvde å komme fram til en hypotese. Det min studie derimot viser er noen eksempler på hvordan elever har brukt ulike typer representasjoner for å prøve å utvikle et gyldig argument. Funnene rundt bruken av tegning gjorde at det også ble mer vektlagt i studien enn det jeg hadde forutsett. Det å ta elevene ut av klasserommet i grupper på tre og tre elever gjør observasjonssituasjonen litt kunstig, men samtidig ga det meg en mulighet til å observere og gå i dybden hos noen få elever. Studien er en relativt detaljert beskrivelse av hvordan elevene arbeidet med oppgaven, noe som hadde vært vanskelig å få til i en stor gruppe med elever. Jeg mener at studien bidrar til informasjon om hvordan elever på mellomtrinnet bruker ulike typer representasjoner når de skal utvikle gyldige argument for en generell matematisk hypotese, selv om resultatene ikke nødvendigvis er representative for andre elever eller for deltakerne i studien i andre situasjoner.

4. Analyse

Slik det fremgår av metodekapittelet er min forskning kvalitativ. For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt: «Hvilke typer representasjoner tatt i bruk av elever i arbeid med én generell matematisk hypotese kan fremme eller hemme utvikling av gyldige argument?» har jeg samlet data fra seks sjettetrinnselever fordelt på to grupper. Elevene på gruppe en var Hanne, Emma og Nina. Gruppe to besto av elevene Sigurd, Anders og Geir. Elevene skulle argumentere for hvorfor en generell matematisk hypotese var gyldig. Hypotesen var et resultat av oppgaven elevene ble presentert for, og ble formulert av elevene selv. Oppgaven var at elevene skulle finne noe som gjentok seg i summen når tre påfølgende tall ble lagt sammen og videre argumentere for hvorfor det alltid ville være slik. Ved utforskning med tallsymboler på ulike regnestykker kom elevene på begge gruppene fram til at summen alltid ville være i tregangen. Den generelle matematiske hypotesen elevene i studien skulle argumentere for var derfor: "Når man legger sammen tre påfølgende tall så vil summen alltid være i tregangen".

Datamaterialet mitt består av transkripsjoner av intervju, observasjonsnotat og elevenes arbeidsark. Samlet vil datamaterialet være mitt grunnlag for analysen hvor jeg ser etter funn som kan gi svar på forskningsspørsmålet. Jeg vil presentere og analysere utdrag fra datamaterialet hvor elevene prøver å overbevise seg selv og andre, ved å ta i bruk ulike typer representasjoner, om at hypotesen de har kommet fram til er gyldig. Samtidig vil jeg vurdere ut ifra datamaterialet hvilken type argumentasjon elevene presenterer, og om den vil være gyldig eller ugyldig.

Jeg har kategorisert mine funn som svar på mitt forskningsspørsmål i tre hovedkategorier. Hvordan de ulike funnene oppstod, og ble kategorisert, er beskrevet tidligere i metodekapittelet i «analyseprosessen». Analysedelen vil struktureres ut i fra de tre hovedkategoriene, og begrunnelser for de ulike underkategoriene vil presenteres i innledningen til hver hovedkategori.

4.1 Bruk av tallsymboler kan hemme utvikling av gyldige argument.

Elever i studien som brukte kun tallsymboler og muntlige forklaringer klarte ikke å utvikle gyldige argument for hypotesen. Dataen viser hvordan alle seks elevene startet med å utvikle empiriske argument for hypotesen. Ved å analysere dataen virket det som om elevene hadde en oppfatning av at empiriske argument holdt som begrunnelse for hypotesen, og at de derfor ikke så noen videre grunn til argumentasjon. Dataen viser også eksempler hvor det så ut til at utforsking på tallsymboler hemmet elevene fra å utforske strukturen til tre påfølgende tall, og se sammenhenger mellom tallene som adderes og summen. På bakgrunn av dette har jeg delt funnet inn i to underkategorier: *«Empiriske argument kan ha blitt ansett som gyldig argumentasjon»* og *«Utforskning på tallsymboler kan hemme elever fra å oppdage og begrunne sammenhenger».* Jeg vil presentere et utvalg av data som viser eksempler fra de to underkategoriene.

4.1.1 Empiriske argument kan ha blitt ansett av elevene som gyldige argument

Tallsymboler ble brukt av elevene for å lage ulike regnestykker hvor tre påfølgende tall ble lagt sammen. For å teste gyldigheten til hypotesen sjekket elevene på begge gruppene om alle summene tilknyttet regnestykkene deres var i tregangen, som utdraget fra Hanne og Nina er et eksempel på:

Hanne: *Det er nå i tregangen da. 6-9-12-15-18*
Nina: *Ja, alle tallene mine er også i tregangen.*

Fordi alle summene var i tregangen konkluderte elevene med at hypotesen var gyldig. Hanne ramser opp alle summene hun har fått; 6, 9, 12, 15, 18. Nina uttrykker: «Ja, alle tallene mine er også i tregangen», hvilket støtter Hanne sitt utsagn om at alle er i tregangen. Elevene argumenterte for hypotesens gyldighet gjennom å henvise til summene, noe Sigurd sitt muntlige utsagn også er et eksempel på:

Sigurd: *Det går fordi vi ser at alle svarene er i tregangen. Jeg er smart.*

Ved å sjekke summene av alle regnestykkene til elevene på gruppa, som Sigurd refererte til som «svarene», så oppdaget Sigurd at summene var i tregangen. Sigurd uttrykte muntlig «det går». Jeg tolker «det» som en måte å referere til hypotesen på, og «går» som at hypotesen er gyldig. Argumentasjonen til Hanne, Nina og Sigurd bygger på at hypotesen er gyldig ut ifra å vise til noen spesifikke eksempler hvor alle summene var i tregangen. På bakgrunn av dette anser jeg argumentene som empiriske argument, og derfor som ugyldige argument.

Jeg oppfordret elevene til videre argumentasjon ved å si at jeg fortsatt var usikker på at alle summene ville være i tregangen. Anders på gruppe to uttalte hva som må til for å overbevise meg:

Forsker: *Jeg er ikke overbevist om det dere har funnet ut om at alle tallene vil være i tregangen. Jeg er fortsatt litt usikker. Hvordan kan jeg vite at alle vil være i tregangen?*
Anders: *Skal vi skrive ned alle?*
Forsker: *Hvordan kan dere bevise for meg at alle vil være i tregangen?*
Anders: *Vi må skrive alle.*

Anders sitt spørsmål; «Skal vi skrive ned alle?» tyder på at han tenker det ikke holder å bare vise til noen få eksempler som viser at hypotesen er gyldig. For å være helt sikker på at alle summene når tre påfølgende tall legges sammen er i tregangen så foreslo Anders at det kunne bevises på følgende måte: «Vi må skrive alle». Jeg tolker Anders sin referanse til «alle» som summen av alle regnestykker med tre påfølgende tall. Utsagnet kan også tyde på at Anders mener at et større antall eksempler vil være med å overbevise om at hypotesen er gyldig. Fordi det er en generell matematisk hypotese elevene skal argumentere for vil være et uendelig antall regnestykker, og det vil derfor ikke være mulig å vise alle regnestykker. Imidlertid er det ikke sikkert Anders ser at det vil være et uendelig antall regnestykker. Det virker som Anders tenker at så lenge alle regnestykker med tre påfølgende tall er i tregangen så er det begrunnelse nok for hypotesen.

Begge gruppene fikk i oppgave å finne ut om en liknende hypotese stemte. Ville det være slik at hvis fire og fem påfølgende tall legges sammen så vil summene alltid være i fire og femgangen? Ved utforskning på fem påfølgende tall fortsatte Emma, Nina, Sigurd og Anders å undersøke med talleksempler hvor de startet på 1+2+3+4+5. Elevene prøvde på flere talleksempler, og Anders oppdaget at alle summene hans var i femgangen.

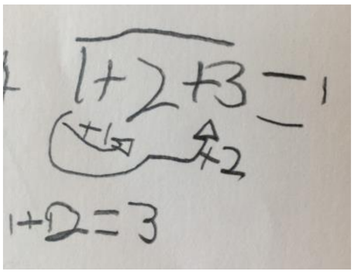
> *Anders: Det går med femgangen* (har sjekket de tre svarene sine)
> *Forsker: Er dere sikker?*
> *Sigurd: Ja, siden 15 er i femgangen.*

Utdraget viser at Anders konkluderte med at hypotesen stemmer: «Det går med femgangen». Anders brukte tre regnestykker; 1+2+3+4+5=15, 2+3+4+5+6=20 og 3+4+5+6+7= 25 som begrunnelse for at hypotesen stemmer. Det kan virke som om at når Anders ser at summene i sine tre talleksempler er i femgangen så trekker han slutningen om at hypotesen er gyldig, og stopper å prøve på flere talleksempler. Sigurd mente også hypotesen var gyldig ved å vise til ett talleksempel «Ja, siden 15 er i femgangen»*.*

Utdragene viser hvordan elevene på bakgrunn av noen få talleksempler trekker slutninger om at hypotesen stemmer, hvilket fører til empiriske argument. Det virker som om elevene tror at når summen i talleksemplene deres stemmer med hypotesen så vil det fungere for alle andre tre og fem påfølgende tall også. Siden alle summene var i tregangen og femgangen er det ikke sikkert elevene ser noe videre behov for å begrunne hvorfor det vil være slik da summene ansees som et godt nok bevis.

4.1.2 Utforskning på kun tallsymboler kan hemme elever fra å oppdage og begrunne sammenhenger

Ettersom elevene på begge gruppene så ut til å stoppe argumentasjonen med empiriske argument, ble de oppfordret til å overbevise meg om hvorfor summen av tre vilkårlige påfølgende tall er i tregangen. Elevene på begge gruppene brukte tallsymboler for å se om de kunne gi noen videre begrunnelse for hypotesen. Anders brukte regnestykket 1+2+3:



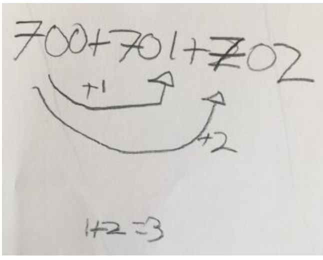
Figur 6: Anders sin symbolske representasjon av regnestykket 1+2+3

Anders:	*Det er tre tall etter hverandre. Hvis jeg tar 1+2+3, ehm ja…. det er tre tall, og fra hvert tall er det en i mellom hverandre så derfor tror jeg det blir tre pluss for hvert tall.*
Forsker:	*Skjønte dere andre hva han mente? Kan du vise de andre?*

Anders tegner på piler på sin symbolske representasjon og skriver på +1 og +2. Skriver deretter 1+2=3

Sigurd: *Så fra derfra til dit er det en i mellom og fra derfra til dit er det to i mellom.*

Ut ifra Anders sitt første muntlige utsagn er det ikke klart hvordan han har kommet fram til at: *«det blir tre pluss for hvert tall».* Det virker som det dukker opp en sammenheng til tallet tre. Da Anders ble oppfordret av meg til å vise de andre elevene hva han mente, skrev han på piler. Representasjonen brukes for å vise at det er differansen mellom tallene som legges sammen han refererte til. Mellom de første to tallene som legges sammen vil det være én mer, +1, og mellom det andre og tredje tallet vil det være to mer som legges til, +2. Ved å skrive på 1+2=3 under regnestykket klargjorde Andreas videre sammenhengen til at det ble lagt til tre. Sigurd så ut til å ha forstått den symbolske representasjonen til Anders, og oppsummerte den muntlig: «Så fra derfra til dit er det en i mellom og fra derfra til dit er det to i mellom*».* Det forklares ikke hvorfor det at det legges til tre har en sammenheng med at summen vil være i tregangen annet enn at det dukker opp en ekstra treer. Summen er ikke tatt med i den symbolske representasjonen. For å gi en videre argumentasjon for at summen vil være i tregangen viste Anders til et nytt talleksempel, 700+701+702.



Figur 7: Anders sin symbolske representasjon av regnestykket 700+701+702

Forsker: *Så dere har sett at det legges til tre for hver gang, men hvorfor vil summen være i tregangen da?*
Anders: *Sikkert på grunn at hvis vi tar 700 da. 700+701+702, da er det fortsatt en i mellom og der er det fortsatt to imellom, og 1+2 er fortsatt 3.*

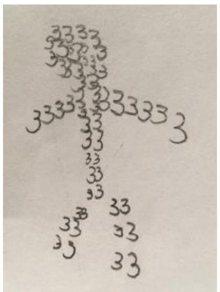
Anders tok i bruk et nytt talleksempel, 700+701+702. I den muntlige forklaringen argumenterte han for at det ville være i tregangen; «sikkert på grunn av…», hvor han viste til at det også legges til tre på et annet talleksempel. Summen er heller ikke her fremstilt i den symbolske fremstillingen. Den muntlige og symbolske argumentasjonen av figur 7 tilfører ikke noe nytt om strukturen som kan være med og fremme et gyldig argument. Anders viser til spesifikke eksempler, men har en resonnering som omhandler relasjoner mellom tallene som legges sammen. Det mangler likevel en forklaring på hvorfor summen vil være i tregangen når det alltid legges til tre. Jeg vurderer derfor Anders sin argumentasjon som en redegjørelse og derfor en type argument som er ugyldig.

Utdrag fra elevene på gruppe to er tatt med for å vise eksempler på noe som gjentok seg i begge gruppene. Elevene tok i bruk tallsymboler for finne noe som gjentok seg når tre påfølgende tall ble addert. På begge gruppene brukte elevene eksempler med symboler som viste en sammenheng til at det legges til tre ekstra ved å se på differansen mellom tallene som legges sammen. Tallsymbolene gir ikke noen innsikt i strukturen til tallene, som at det andre tallet som legges til alltid vil være en større enn det første tallet og det tredje tallet er to større enn det første tallet. Mangel på strukturelle sammenhenger gjør det vanskelig å oppdage og uttrykke noe generelt. Summen er også utelatt i de symbolske representasjonene noe som gjør det vanskelig å se etter sammenhengen mellom tallene som adderes og summen. Dataen viser at gjennom å ta i bruk tallsymboler og muntlige forklaringer i arbeid med den generelle hypotesen så var det ingen elever i studien som klarte å utvikle gyldige argument. Det ikoniske systemet og elevenes bruk av tegning sammen med muntlige forklaringer vil videre bli analysert.

4.2 Ikke-strukturelle tegninger kan hemme utvikling av gyldige argument.

På grunn av at argumentasjonen til elevene med bruk av symboler og muntlige forklaringer ikke så ut til å føre elevene noe videre mot en gyldig argumentasjon, oppfordret jeg dem til å ta i bruk representasjonen tegning. Flere elever fant det utfordrende å se hvordan det som var skrevet med tallsymboler eller forklart muntlig kunne fremstilles i en tegning. Sigurd lagde ikke noen tegning, mens Anders sin tegning er vist i utdraget som følger.

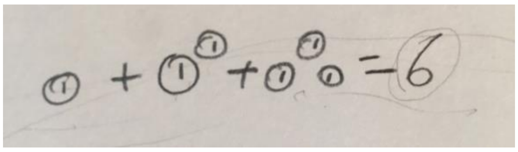
Anders:	*Hvordan skal vi tegne tallene? Det går ikke an å skrive i en tegning.*
Geir:	*Jo, det går an hvis du tar masse treere som detaljer på en tegning.*



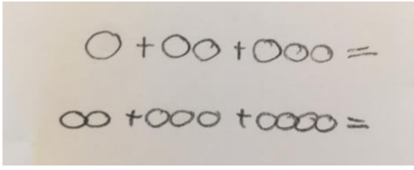
Figur 8: Anders sin tegning

Anders spør: «Hvordan skal vi tegne tallene?» noe som kan tyde på at han ikke skjønner hvordan tall kan fremstilles i en tegning. Samtidig er det vanskelig å tegne noe når Anders ikke vet hva han skal tegne. Gjennom argumentasjonen til Anders i figur 6 og 7 fant han ut at det legges til en ekstra treer, men det hjelper ikke å tegne når Anders ikke har sett noen struktur for tallene som legges sammen. Tegningen til Anders i figur 8 er mange treere satt sammen til et menneske, muligens inspirert av Geir sitt utsagn: «Jo, det går an hvis du tar masse treere som detaljer på en tegning». Tegningen er en ikke-strukturell tegning som ikke viser til noen matematiske sammenhenger eller strukturer tilknyttet hypotesen. Tegningen kan derfor ikke brukes som et verktøy, og hemmer utviklingen av et gyldig argument.

Nina og Emma lager tegninger hvor tallsymboler er erstattet med penger og rundinger.



Figur 9: Nina sin tegning med penger



Figur 10: Emma sin tegning med rundinger

I begge tegningene er tall erstattet med noe som viser mengden til tallene som adderes. Nina valgte i sin tegning i figur 9 å representere tallene 1+2+3 med enkroninger, mens Emma i figur 10 erstattet tallsymbolene 1+2+3 og 2+3+4 med rundinger. Plusstegnet og likhetstegnet er fortsatt i symbolform i begge fremstillingene. For å kunne argumentere for hypotesen må elevene utforske hvilken innvirkning strukturen til tallene som adderes har på at summen er i tregangen. Nina har tatt med summen i sin tegning som fremdeles er i symbolform, 6. Summen representert som tallet 6 bekrefter at summen er i tregangen, men gir ikke noen innsikt i strukturen til summen eller viser noen videre sammenheng med de tre tallene som adderes. I Emma sin tegning er ikke summen tatt med, men hun har tegnet to eksempler. Dette kan tyde på at Emma ville bruke tegningen for å lete etter noen strukturer i tre påfølgende tall, uten å betrakte summen. Hverken Nina eller Emma sine tegninger viser noen likheter eller forskjeller i strukturen til summen eller tallene som adderes. Nina og Emma har begge laget ikke-strukturelle tegninger. Ingen muntlige utsagn er knyttet til Emma eller Nina sine tegninger, og de klarer ikke å nyttiggjøre seg av den nye representasjonen i noen videre argumentasjon for hypotesens gyldighet. Eksempler hvor Hanne og Geir lagde strukturelle tegninger som hjalp dem til å utvikle gyldige argument vil bli analysert i den siste hovedkategorien.

4.3 Strukturelle tegninger kan fremme utvikling av gyldige argument

Strukturelle tegninger viste seg å være et redskap som hjalp elevene i studien til å få mer innsikt i problemet, og til å styrke kommunikasjonen sin med de andre deltakerne. Datamaterialet viste hvordan elever brukte strukturelle tegninger som utforskningsverktøy ved å manipulere og lage nye tegninger for å tilegne seg mer informasjon. Den første underkategorien: *«Strukturelle tegninger brukt som utforskningsverktøy kan fremme gyldige argument»,* vil vise eksempler hvor tegningene til Hanne og Geir ble brukt som utforskningsverktøy hvilket hjalp dem til å utvikle gyldige argument. Strukturelle tegninger fungerte også som et felles språkverktøy som gjorde det enklere å kommunisere med de andre deltakerne, og tegningene hjalp elevene med å gi mer presise muntlige forklaringer slik at argumentasjonen ble mer tilgjengelig for fellesskapet. Den andre underkategorien er: *«Strukturelle tegninger kan gjøre argumentasjonen mer tilgjengelig»*. Her vil jeg vise til to utdrag hvor Geir lagde en strukturell tegning som hjalp han med å gjøre noe han tidligere har argumentert for mer tilgjengelig for fellesskapet. Den tredje og siste underkategorien er; *«Strukturelle tegninger brukt som utforskningsverktøy kan fremme gyldige argument for en liknende* *matematisk hypotese»*. Her presenteres utdrag hvor elever brukte strukturelle tegninger som utforskningsverktøy for å utvikle gyldige argument for en liknende hypotese.

4.3.1. Strukturelle tegninger brukt som utforskningsverktøy kan fremme gyldige argument.

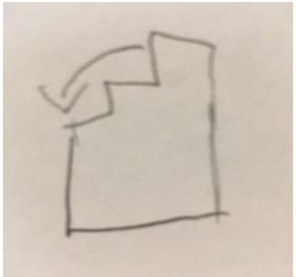
Tidligere i løsningsprosessen brukte elevene symboler og muntlige forklaringer for å vise til differansen mellom tre påfølgende tall, og at det var tre ekstra tall som ble lagt til. Da klarte ikke elevene å argumentere noe videre for hvilken betydning det hadde for at summen ville være i tregangen. Elevene ble oppfordret til å ta i bruk representasjonen tegning, og Hanne laget en tegning, figur 11, sammensatt at klosser:

Figur 11: Hanne sin første figur, med utgangspunkt i talleksempelet 3+4+5

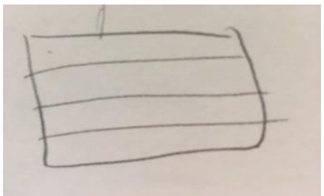
Hanne:	*Det er nå at man plusser på 3 på svaret sitt.*
Emma:	*3, og så 4 og så 5 til slutt. Da blir det tre ekstra fra de du startet med.*
Hanne:	*Ja, jeg vet det. Bortover her så er det alltid tre, tre, tre, tre (*tegner på streker bortover på figuren på arket sitt*). Å så pluss enda en treer, der (*tegner sirkel rundt, og en trekant inni, de tre resterende rutene som «stikker opp»*).*

Hanne tegnet i figur 11 en sammensatt figur hvor summen av de tre påfølgende tallene 3+4+5 ble representert som en helhet med klosser. Summen er ikke noe isolert som kommer etter likhetstegnet. Derimot viser figuren hvordan summen er et resultat av de tre påfølgende tallene som ble lagt sammen. Tegningen fremhever også noe generelt ved strukturen til tre påfølgende tall. Det andre tallet som adderes er én mer enn det første tallet og det tredje tallet er to mer enn det første tallet. Hanne sin strukturelle tegning ga henne mulighet til å oppdage nye sammenhenger tilknyttet de tre ekstra som ble lagt til.

Figuren ble brukt som et manipulativ hvor Hanne tegnet på en runding, trekanter og streker for å forklare operasjoner. Hanne brukte et spesifikt talleksempel, 3+4+5, i argumentasjonen. Hanne sa: «Bortover her så er det alltid tre, tre, tre, tre», samtidig som hun tegnet på horisontale streker på figuren for å tydeliggjøre at det ble treere bortover på figuren. Jeg anser det som at Hanne har oppdaget at «basen» til figuren består av treere, noe som er viktig for at hypotesen som tilsier at summen skal være i tregangen skal stemme. Videre uttalte Hanne: «Å så pluss enda en treer». Hun tegnet en runding rundt, og en trekant inni, de tre klossene på toppen av figuren. Tegningen fremhever strukturen for tre påfølgende tall, og viser hvorfor det blir en ekstra treer på toppen. Samtidig som Hanne tegnet forklarte elevene muntlig hva figuren viste for å underbygge argumentasjonen, hvor det som fremstilles i tegningen samsvarer med det som uttrykkes muntlig. Tegningen brukes som et felles språkverktøy som gjør argumentasjonen mer tilgjengelig for fellesskapet. Den ekstra raden med treere underst på figuren ser ut til å ha blitt tegnet på i etterkant. Det er vanskelig å analysere hvorfor den er føyd på tegningen, fordi det ikke ble forklart. Figuren tok utgangspunkt i eksempelet 3+4+5, men består nå av 4+5+6 klosser. Raden med klosser kan muligens ha blitt tegnet på for å vise at de tre klossene på toppen som er markert med en trekant kan flyttes og gjøres om til en hel rad nederst på figuren. Hanne fortsatte å argumentere for hypotesen og tegnet to nye figurer:



Figur 12: Hanne sin «skalalignende» figur av tre påfølgende tall

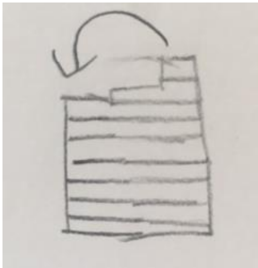


Figur 13: Hanne sin figur av summen som en hel firkant

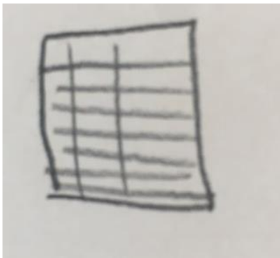
Hanne:	*Ja, før så var den her oppå der* (tegner figur 12) *så nå har jeg flyttet den ned dit. Man bare flytter den over dit så da ser det mer ut som om det er i tregangen.* (tegner figur 13).
Emma:	*Sånn at det bare blir en firkant. For først så tok hun den her og så tok hun den og la den på her. Hun tok bare og flytta den ned sånn. Hun snudde den på en måte og la den ned sånn at den ble en firkant.*
Nina:	*Det blir nesten en firkant.*
Forsker:	*Hva betyr det at det blir en firkant?*
Hanne:	*At det er helt. Det blir ikke noe til overs.*

De to nye figurene tar ikke utgangspunkt i et spesifikt talleksempel. De nye figurene anser jeg som et videre forsøk på å presentere nye data som styrker validiteten til hypotesen, og muligens som et resultat av ønsket om å utdype tydeligere, steg for steg, hva som ble forklart i figur 11. Figur 12 ble ikke delt inn i et visst antall klosser, men det er en tegning av strukturen til tre vilkårlige påfølgende tall. Tegningen bærer i seg en generalitet som er nødvendig for å kunne argumentere for en generell hypotese. Hanne omtalte på et senere tidspunkt i samtalen figur 12 som en «skalalignende ting». Bruk av begrepet «skalalignende» kan tyde på at Hanne gikk over til å betrakte mer generelt strukturen til tre påfølgende tall, uten å ha noe spesifikt talleksempel som referanse. Hanne viste til figur 12 og sa: «Ja, før så var den her oppå der så nå har jeg flyttet den ned dit». Det muntlige utsagnet ble underbygget av at tegningen brukes som et manipulativ. Hanne tegnet på en pil fra den tredje kolonnen og ned til den første. I figur 13 viste Hanne med tegningen at summen vil bli en hel firkant og sa: «Man bare flytter den over dit så da ser det mer ut som om det er i tregangen». Hvorfor Hanne mener at tegningen ser mer ut som om det er i tregangen kommer muligens ikke tydelig frem for de andre i fellesskapet. Det var Emma som uttrykte at det blir en firkant: «Hun snudde den på en måte og la den ned sånn at den ble en firkant». Hanne forklarte at det ble en hel firkant betyr: «At det er helt. Det blir ikke noe til overs». Utsagnet kan tyde på at Hanne anså at det be en hel firkant som at summen da ville være i tregangen. Figur 12 og 13 kunne vært brukt for å presentere en generell logisk slutning, fordi fremstillingen tar utgangspunkt i noe generelt som ikke er knyttet til et spesifikt eksempel. Det mangler likevel en eksplisitt begrunnelse for hvorfor en hel firkant gjør at summen alltid vil være i tregangen.

For videre overbevisning om hvorfor tre vilkårlige påfølgende tall som legges sammen vil være i tregangen ble to nye figurer tegnet av Hanne. Hun tok utgangspunkt i eksempelet 7+8+9:



Figur 14: Hanne sin strukturelle figur av tre påfølgende tall, med utgangspunkt i talleksempelet 7+8+9

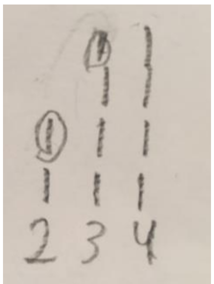


Figur 15: Hanne sin strukturelle figur av en hel firkant, med utgangspunkt i talleksempelet 7+8+9

Hanne: (Tegner figur 14) *Så er det bare å flytte den der klossen ned der sånn at det blir sånn.* (Tegner raskt figur 15) *I åtte deler, og de delene er på en måte i tre deler. På alle tall kan en flyttes over sånn at det blir en hel firkant som er delt i treere.*

I tegningen brukte Hanne et spesifikt eksempel, 7+8+9, for å argumentere for gyldigheten til hypotesen. Hun forklarte muntlig med å vise til figur 14 hvordan figuren kan brukes som et manipulativ: «Så er det bare å flytte den der klossen ned der sånn at det blir sånn». Utsagnet ble underbygget av å tegne på pilen på tegningen som viste at den ene klossen fra den tredje kolonnen flyttes ned til den første kolonnen med klosser. Hannes tegning av figur 15 er en firkant med inndeling i $3 \cdot 8$ ruter. Tegningen er et resultat av hvordan figuren vil se ut etter den ene klossen, som vist til i figur 14, er flyttet. Så langt er argumentasjonen knyttet til eksempelet 7+8+9. Med utgangspunkt i figurene forklarte Hanne muntlig hvorfor eksemplet viser noe generelt som også vil gjelde for alle andre eksempler: «På alle tall kan en flyttes over sånn at det blir en hel firkant som er delt i treere». På bakgrunn av dette vil jeg betrakte Hanne sin argumentasjon som et generisk eksempel, og derfor et gyldig argument for hypotesen.

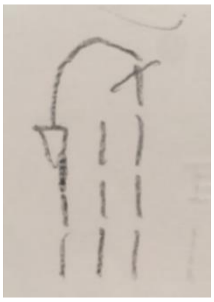
Geir brukte, som Hanne, strukturelle tegninger som utforskningsverktøy ved å endre, manipulere og lage nye tegninger. Geir tok utgangspunkt i talleksempelet 2+3+4 og laget en tegning, figur 16.



Figur 16: Geir sin første strukturelle tegning, med utgangspunkt i talleksempelet 2+3+4

> *Geir:* *Du kan flytte den dit.*
> *Forsker:* *Ja, blir det treere da?*
> *Geir:* *Nei.*
> *Sigurd:* *Nei. At vi kanskje tar den ned dit (*peker på den øverste streken i Den siste kolonnen og flytter den over til den første kolonnen*)*

I tegningen til Geir er tallene representert med tallsymbol og streker. Det er en strukturell tegning hvor mengden til tallene er fremstilt med streker. Geir bruker tegningen som et manipulativ ved å flytte en strek fra den første kolonnen på toppen av den andre kolonnen. Operasjonen gjøres tydelig ved at Geir tegner rundinger rundt strekene som flyttes. Tegningen blir ikke strukturert i treere slik Geir ønsket, men består nå av en ener og to firere. Ved å se på Geir sin tegning oppdager Sigurd hvordan tegningen kan endres slik at tallene blir strukturert i treere: «At vi kanskje tar den ned dit», hvor Sigurd pekte på tegningen til Geir og viste hvordan han kunne flytte den øverste streken i den tredje kolonnen over til den første kolonnen. Det muntlige utsagnet til Sigurd kan ha påvirket Geir som gjør en endring fra sin første strektegning, og tegnet en ny tegning, figur 17:

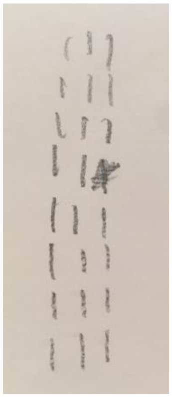


Figur 17: Geir sin andre strukturelle tegning, med utgangspunkt i talleksemplet 2+3+4

> *Geir:* *Hvis vi tar den ned dit så blir det tre på alle, og 3 gange 3 det er 9.*

Tegningen inneholder nå ingen tallsymboler og tallene 2+3+4 fremstilles med streker. Tegningen ble brukt som et manipulativ for å strukturere mengden i treere. En pil ble tegnet på for å vise at den øverste streken i den tredje kolonnen kunne flyttes til den første kolonnen. Tegningen viser nå at summen kan struktureres i treere hvilket betyr at summen er i tregangen. Det var ingen muntlige utsagn knyttet til hvorfor det vil gjelde for tre vilkårlige påfølgende tall. På bakgrunn av dette anser jeg argumentet som en redegjørelse for hypotesen, og derfor som et ugyldig argument. Ved å argumentere for at tre vilkårlige påfølgende tall kan struktureres i treere tegnet Geir figur 18 med utgangspunkt i talleksempelet 3+4+5.

Forsker:	*Mener dere at dette er bevis nok for at det alltid vil være i tregangen? Sier dere dere fornøyd? Det gikk med den her så da går det på alle?*
Sigurd og Anders:	*Ja!*
Geir:	*Vi kan jo sjekke en da.*
Sigurd:	*Vi tar den da. Vi tar 3+4+5 da.*



Figur 18: Geir sin tegning brukt for å fremme en generell logisk slutning

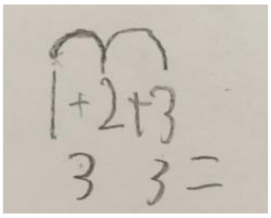
Geir:	*Så gjør vi det samme igjen, som da er den neste. Så tar vi den dit* (skroter over den femte streken i den tredje kolonnen, som viser at det er den han flytter over til den første kolonnen) *så får vi fortsatt treere.* (fortsetter å tegne på en strek i hver kolonne oppover og oppover)*. Det er i tregangen da fordi uansett hva du bygger på så bygger du bare på her, så vil du alltid kunne flytte over en dit så det alltid blir treere.*

Utgangspunktet for tegningen i figur 18 var å vise at summen til eksempelet 3+4+5 kunne struktureres i treere. Geir forklarte muntlig hvordan en strek fra den tredje kolonnen kan flyttes til den første kolonnen: «Så tar vi den dit så får vi fortsatt treere». Det muntlige utsagnet underbygges av tegningen hvor den femte streken i den tredje kolonnen skrotes ut og tegnes på i den første kolonnen. Geir manipulerte tegningen ved at nye streker ble lagt til i hver kolonne flere ganger, og figuren ble bygd på oppover. Tegningen førte videre til et gyldig argument for hvorfor det vil gjelde for alle talleksempler: «Det er i tregangen da fordi uansett hva du bygger på så bygger du bare på her, så vil du alltid kunne flytte over en dit så det alltid blir treere». Geir sitt utsagn kan muligens knyttes til en akseptert sannhet i fellesskapet om at hvis et tall kan deles opp i hele treere så vil tallet være i tregangen. Tegningen sammen med den muntlige forklaringen til Geir mener jeg er en type argumentasjon som viser at han trekker en generell slutning for summen til tre vilkårlige påfølgende tall. Jeg anser derfor Geir sin argumentasjon som en generell logisk slutning, og derfor som et gyldig argument.

Utdragene vist til i denne underkategorien viser hvordan Hanne og Geir brukte strukturelle tegninger som utforskningsverktøy, og hvordan det fremmet elevenes utvikling av gyldige argument. Utdragene viser også hvordan tegningene ga elevene et felles utgangspunkt som argumentasjonen kunne baseres på. Tegningene gjorde det enklere å kommunisere sine ideer med de andre. Eksempler fra transkripsjonen viser hvordan elever er med og utdyper og kommer med innspill på andre elevers tegninger. I neste underkategori vil jeg vise til en episode fra gruppe to hvor en strukturell tegning hjalp Geir til å utdype et tidligere argument slik at argumentasjonen ble mer tilgjengelig for meg og de andre elevene på gruppa.

4.3.2 Strukturelle tegninger kan gjøre argumentasjonen mer tilgjengelig.

Enkeltelevers muntlige og skriftlige forklaringer ble ikke alltid forstått av de andre i fellesskapet. Et eksempel er hvor Geir brukte en symbolsk representasjon av talleksempelet 1+2+3 og muntlige forklaringer.



Figur 19: Geir sin symbolske representasjon av regnestykket 1+2+3

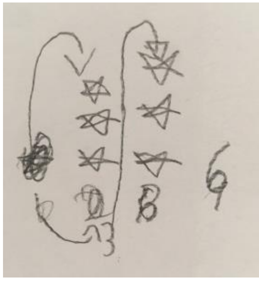
Geir:	*Jeg tror kanskje. Fordi det er alltid en i mellom sant, på de to første. Og så er det to imellom som vi har sagt. Men, hvis vi plusser på de to bakerste så får vi, da blir det 3 og det blir 3. Sånn at da vil det bli i tregangen for hvis vi tar de to bakerste så vil det alltid bli i tregangen.*
Forsker:	*De to bakerste eller alle tre?*
Geir:	*De to bakerste, og så plusser du på 2 og 3, nei, 3 med de to bakerste som du vet svaret på. Det blir 3 og det blir 3, sånn!*

Geir argumenterer med utgangspunkt i en symbolsk representasjon av regnestykket 1+2+3. Her er det vanskelig å følge argumentasjonen til Geir da det muntlige språket ikke samsvarer med det som representeres med symboler. Ved å betrakte kun den muntlige forklaringen er det uklart hvilke tall Geir viser til når han henviser til «de to bakerste». Det kan tolkes som at det er de to bakerste tallene som legges sammen, og det vil da være 2+3 som gir summen 5 og fem er ikke i tregangen. Det kan virke som om Geir også blander litt med hvilke tall det refereres til med utdraget: «De to bakerste, og så plusser du på 2 og 3, nei, 3 med de to bakerste som du vet svaret på». Ut ifra det som fremstilles symbolsk så kan det se ut som at Geir viser til at «de to bakerste som du vet svaret på» er 1+2 som blir 3 og så legges det til en til treer. Argumentasjonen fortsetter på gruppe to før Geir uttrykker at det de andre elevene diskuterer har han forklart før.

Geir:	*Den til dit så det blir 3 og 3 (*peker på figur 19*). Det var jo det jeg sa nettopp i ste, flere ganger!* (sier det med oppgitt stemme)
Forsker:	*Ja, men jeg skjønte ikke hva du mente. Hva sa du egentlig?*

Geir: *Jeg sa 1+2 som er 3, 3+3=6*

Geir peker på den symbolske representasjonen i figur 19 og sier: «Den til dit så det blir 3 og 3. Det var jo det jeg sa i ste, flere ganger»*.* Utsagnet tyder på at Geir hadde oppdaget en, kanskje tilfeldig, sammenheng ved at tallene som legges sammen i det spesifikke eksempelet kan struktureres i to treere. Sammenhengen var likevel ikke tydelig for resten av fellesskapet. Geir tegnet, etter oppfordring fra meg en tegning, figur 20, hvor tallene 1+2+3 ble erstattet med stjerner.



Figur 20: Geir sin strukturelle stjernetegning, med utgangspunkt i talleksemplet 1+2+3

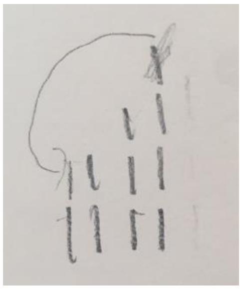
Forsker: *Okei, men får du til å vise med en tegning hvordan du hadde tenkt?*
Geir: *Tegning? Ja, greit.* (Tegner stjernetegninga og at den første stjerna flyttes opp til den andre rekka. Merknad: I tegningen på dette stadiet var det kun stjerner som ble tegnet. Piler og tall ble ført på som et resultat av forklaringer som vises til videre i utdraget) *så flyttes den.*
Forsker: *Åja, det var det du mente. At det blir fylt opp en treer der.*
Geir: *Mmm. 3+3 er 6.*
Sigurd: *Nå skjønner jeg ikke helt hva du mener.*
Forsker: *Kan du prøve å vise det på tegningen?*
Geir: *Greit.* (skriver på tallene 1,2,3) *Okei, jeg flytter denne stjerna her.*
Sigurd: *Da blir det 3 der.*
Geir: *Da blir den en her, da har vi brukt opp denne her (*skroter ut stjerna i første kolonne*) da går den hit, den her går hit (*tegner pil opp til den andre kolonnen*) da får vi en treer istedenfor en toer, og da har vi brukt opp alt dette og fått en treer* (skroter ut tallet 1 og 2 og skriver en 3 under andre kolonne) *Den treeren tar vi opp hit til denne treeren* (tegner pil opp til tredje kolonne) *derfor blir det 3+3 som er i tregangen. Og det er 6.*
Sigurd: *Det var litt smart!*

Geir produserte en tegning i figur 20 som ga en visuell representasjon av strukturen til tallene fremstilt som en, to og tre stjerner. Tallsymboler ble skrevet på. Det kan ha vært gjort for å knytte den nye tegningen til Geir sin symbolske representasjon i figur 19. Tegningen fungerte som et felles utgangspunkt for deltakerne noe som kan ha hjulpet de andre i fellesskapet til å følge argumentasjonen. Tegningen ga Geir noe konkret som fungerte som et felles språkverktøy, hvilket gjorde at Geir greide å kommunisere innholdet i de ulike stegene også med muntlige forklaringer. Tegningen hjalp også Geir til å være mer presis i den muntlige argumentasjonen. Operasjoner på tegningen ble gjort steg for steg, og da stjerner ble flyttet eller skrotet ut på tegningen ble handlingene forklart muntlig for deltakerne. «Den her går hit (tegner pil opp til den andre kolonnen) da får vi en treer istedenfor en toer, og da har vi brukt opp alt dette og fått en treer»*.*

Geir forklarte alle stegene utført på tegninger, og også hva de førte til i sammenheng med hypotesen. I argumentasjonen henviste Geir til stjernetegningen og ga en begrunnelse for hypotesens gyldighet som bygger på strukturen til tallene. Geir oppsummerer det som: «derfor blir det 3+3 som er i tregangen. Og det er 6». Argumentasjonen til Geir er nå tilsynelatende forstått av fellesskapet. Stjernetegningen var starten på en prosess hvor Geir tegnet nye tegninger hvor stjerner ble erstattet med streker. Som vist til i delkapittel 4.3.1. utforsket Geir på strektegningene noe som førte til en gyldig argumentasjon.

4.3.3 Strukturelle tegninger brukt som utforskningsverktøy kan fremme gyldige argument for en liknende matematisk hypotese.

Elevene ble presentert for hypotesen som sa at når fire påfølgende tall legges sammen så vil summen være i firegangen. Hanne og Geir som hadde brukt tegning aktivt tidligere testet ikke hypotesen med tallsymboler, men tok i brukt og manipulerte tegninger for å utforske og argumentere for den nye hypotesen. Geir lagde en strukturell tegning som fungerte som et moteksempel for hvorfor summen ikke vil være i firegangen.



Figur 21: Geir sin strukturelle tegning for fire påfølgende tall, med utgangspunkt i talleksempelet 1+2+3+4

> *Geir:* *Jeg prøver å gjøre som vi gjorde her* (peker på figur 17). *Jeg fant ut at det ikke gikk.*

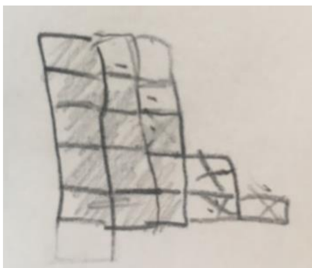
Geir produserer en strukturell tegning, figur 21, hvor tallsymbolene 1+2+3+4 er erstattet med streker. Tegningen brukes for å argumentere for at hypotesen ikke stemmer. Tegningen ble brukt som manipulativ for å utforske strukturen til fire påfølgende tall. Geir prøvde å flytte over en strek, og uttrykte selv: «Jeg fant ut at det ikke gikk». Argumentasjonen bygger på tegningen av en figur hvor det er implisitt at Geir ønsket at alle kolonnene ble like lange, noe de ikke ble. Geir har produsert et moteksempel for hypotesen. Hanne tok også utgangspunkt i figurene sine brukt for å argumentere for tre påfølgende tall. Figuren endres slik at den nye fremstillingen passer til fire påfølgende tall, figur 22.

Figur 22: Hanne sin strukturelle figur for fire påfølgende tall, med utgangspunkt i talleksempelet 1+2+3+4

Hanne: *Nei, dette tror jeg ikke går. For du kan jo ikke flytte den der øverste ned dit. Da blir det bare den her som blir forvirret. Da kommer det til å være to her fortsatt.*
Forsker: *Det mener du. Har noen andre funnet ut noe.*
Emma: *Jeg skal bare sjekke svaret…*
Hanne: *Jeg tror ikke det fungerer fordi det blir ikke en hel, det blir en eller annen som blir halv og ikke hel.*

Som Geir, brukte Hanne den nye figuren som et manipulativ hvor den øverste klossen i den første kolonnen ble flyttet over til den siste kolonnen. Hanne viste ikke kun til tegningen som argumentasjon for at hypotesen ikke stemmer. Hun overførte kunnskapen hun tilegnet seg tidligere som var at hvis summen var i tregangen så kunne summen organiseres i en hel firkant med treere. Hanne forklarer muntlig: «Jeg tror ikke det fungerer fordi det blir ikke en hel, det blir en eller annen som blir halv og ikke hel». Den nye figuren blir ikke en hel firkant og derfor konkluderte Hanne med at hypotesen var ugyldig.

Hanne argumenterte for at summen når fem påfølgende tall legges sammen vil være i femgangen ved å tegne en ny tegning, figur 23.



Figur 23: Hanne sin strukturelle figur for fem påfølgende tall, med utgangspunkt i talleksempelet 1+2+3+4+5.

Hanne: *Ja, jeg tror den fungerer. Fordi jeg tok den dit, den dit og den dit.* (tegner på tre klosser og fargelegger svakt de som er der opprinnelig før hun krysser ut de tre som hun flytter opp)*. Så blir det en hel firkant med femmere.*

Gyldigheten til hypotesen støttes av figur 23 som er en fremstilling med klosser av talleksempelet 1+2+3+4+5. Hanne tegnet på tomme klosser på toppen av figuren mens hun sa: «Ja, jeg tror den fungerer. Fordi jeg tok den dit, den dit og den dit». Hanne fargela i tillegg klossene som opprinnelig var der og krysset ut klossene som ble flyttet.

Tegningen ble brukt som et manipulativ hvor endringer som ble gjort ble forklart muntlig. Hanne konkluderte med at hypotesen stemte: «Så blir det en hel firkant med femmere». Figuren var av et spesifikt eksempel som viste noe generelt, nemlig at det ble en helt firkant med femmere. Figuren sammen med de muntlige forklaringene anser jeg derfor som et generisk eksempel og et gyldig argument.

Både Hanne og Geir brukte sine tidligere strukturelle tegninger for å sjekke gyldigheten til de nye hypotesene. Gjennom å manipulere tegningene utforsket de strukturen til fire og fem påfølgende tall, noe som hjalp dem til å utvikle gyldige argument for de liknende hypotesene. I diskusjonskapittelet som følger vil jeg se min analyse av datamaterialet i sammenheng med relevant litteratur, og diskutere mulige årsaker til hvorfor noen representasjoner egnet seg bedre enn andre til å utvikle gyldige argument for den generelle hypotesen.

5. Diskusjon

Jeg har i studien undersøkt hvilke typer representasjoner brukt av elever i arbeid med én generell matematisk hypotese som kan fremme eller hemme utvikling av gyldige argument. Elevene kom frem til en generell hypotese som sa at når man legger sammen tre påfølgende tall så vil summen alltid være i tregangen. Det at jeg kun har observert seks elever setter begrensninger ved studien slik at det ikke vil være mulig å generalisere mine funn til alle andre elever. Det studien derimot viser er eksempler på hvordan et utvalg elever brukte ulike typer representasjoner i argumentasjonen, og at det kan være en sammenheng mellom typer representasjoner brukt og om argumentene var gyldige eller ugyldige. Jeg har funnet tre hovedkategorier som kan være med på å gi en innsikt i disse sammenhengene. I diskusjonen vil jeg drøfte mulige årsaker til funn innen kategoriene opp mot relevant litteratur, og se funnene i sammenheng med praksis i skolen.

5.1 Bruk av tallsymboler kan hemme utvikling av gyldige argument.

Jeg ser ut i fra mitt datamateriale at elevene som kun brukte tallsymboler og muntlige forklaringer først kom frem til empiriske argument, som regnes som ugyldig argumentasjon. For å kunne si noe generelt om hypotesen er det nødvendig å se på strukturen til tallene som adderes i tilknytning til summen. For å få elevene til å gi videre begrunnelser ut over resultater knyttet til noen eksempler, ble elevene stilt spørsmål om hvorfor summen vil være i tregangen når tre vilkårlige påfølgende tall ble addert. Det var først da elevene begynte å utforske strukturer at noen videre begrunnelser ut over empiriske bevis ble presentert av elevene.

Empirisk argumentasjon er nokså utbredt hos elever på grunnskolen, men også blant studenter på videregående og universitet (Stylianides & Stylianides, 2009). Et empirisk argument bruker noen eksempler som begrunnelse for hypotesens gyldighet, men er mangelfulle ved at man ikke kan være sikker på at resultatene det vises til gjelder for alle andre eksempler tilknyttet hypotesen (A. Stylianides, 2016). Elevene i studien utforsket på ulike talleksempler med tre påfølgende tall, og fant ut at alle summene var i tregangen. Tre elever arbeidet sammen på gruppe, og elevene hadde derfor mange regnestykker som viste at hypotesen stemte. Talleksemplene ble brukt av alle elevene som argumentasjon for hypotesens gyldighet. Argumentasjonen baserte seg på elevenes summer, noe Sigurd viser med sitt utsagn: «Det går fordi vi ser at alle svarene er i tregangen».

Det kan være at mengden av eksempler som stemte var en medvirkende årsak til at elevene trakk konklusjonen om at hypotesen var gyldig. En annen årsak kan være at elevene oppfattet empirisk argumentasjon som gyldige og dermed ikke så noe behov for å bruke andre representasjoner eller gi noen videre begrunnelser. Forskere (Balacheff, 1988; Lannin, 2005; G. Stylianides, 2008) peker på at empiriske argument oppfattes som tilstrekkelige, og at elever derfor ikke ser noen grunn til videre argumentasjon.

Litteraturen støtter min antakelse om at elevene muligens anså empirisk argumentasjon som gyldig. Det er viktig at elevene får innsikt i hvorfor empiriske argument ikke er tilstrekkelig som gyldig argumentasjon. Gjennom å utforske på ulike eksempler får elevene en mulighet til å oppdage underliggende strukturer (A. Stylianides, 2016). Evens og Houssart (2004) påpeker at det å bruke eksempler som argumentasjon kan være et viktig førstesteg til å finne ut om en hypotese stemmer eller ikke, men for at det skal være et gyldig argument holder det ikke å vise til disse strukturene. Elevene bør da oppfordres til å videre begrunne hvorfor strukturer oppdaget i utforskning på deres eksempler vil gjelde for vilkårlige tall.

Det ble stilt spørsmål av meg om hvorfor summen til hvilke som helst tre påfølgende tall ville være i tregangen. Elevene brukte da talleksempler for å utforske tallene som skulle legges sammen. Talleksempler ble brukt for å se på differansen mellom tallene som ble addert. Mellom de to første tallene som legges sammen vil det være én mer, og mellom det andre og tredje tallet vil det være to mer som legges til. Elevene brukte talleksemplene når de argumenterte for at det alltid ble lagt til «tre ekstra». Det så ut til at bruken av tallsymboler begrenset elevenes argumentasjon ved at de kun viste til nye talleksempler som videre begrunnelse for sammenhengen, som ved elevenes empirisk argumentasjon. Redegjørelse er en type argumentasjon som er ugyldig. Den tar utgangspunkt i noen få eksempler for å vise til oppdagede sammenhenger tilknyttet hypotesen hvor forklaringene er mangelfulle (G. Stylianides, 2008). Elevene la frem en redegjørelse som viste til en sammenheng mellom tallene som legges sammen, men de klarte ikke å uttrykke hvorfor disse tre ekstra kunne være med og begrunne hvorfor summen ville være i tregangen. Grunnen til at de ikke uttrykte noe om sammenhengen til summen kan være at de ikke så det. Kanskje dukket det bare opp et mønster i tallene som tilfeldigvis var «tre ekstra», noe som passet bra siden hypotesen sa at summen skulle være i tregangen.

En annen årsak til at bruk av tallsymbol så ut til å hemme elevenes utvikling av gyldige argument kan være at elevene brukte tallsymbolene på en slik måte at tallsymbolene begrenset muligheten til å utforske strukturen til tallene. For å utvikle argument for en generell matematisk hypotese må man se etter strukturer i tallene som inngår i hypotesen. Tallsymbol inngår i symbolsystemet, som hører inn under det Duval (2006) omtaler som monofunksjonelle system. Prosesser innenfor det monofunksjonelle systemet kan brukes for å utlede algoritmer og løse problem, men det gir lite mulighet til å utforske på tallene. Hvis et matematisk begrep, som tre påfølgende tall, kun representeres med tallsymboler kan det være vanskelig å se strukturene som inngår i begrepet (Stylianou, 2013). Manglende mulighet til å oppdage og utforske strukturer ved bruk av tallsymbol så ut til å hindre elevene fra å få mer informasjon, og hemmet elevenes utvikling av gyldige argument.

5.2 Ikke-strukturelle tegninger kan hemme utvikling av gyldige argument.

En tegning kan hjelpe elever til å se matematiske sammenhenger, men som Arcavi (2003) påpeker så gir ikke tegningene automatisk tilgang til sammenhengene. Duval (2006) mener at det er utfordrende å skifte mellom representasjoner. Det var derfor ikke et overraskende funn at flere elever fant det utfordrende å skulle argumentere for hypotesen ved å gå fra tallsymboler og muntlige forklaringer til å bruke tegning. For at tegning skal oppleves som nyttig er det en fordel om behovet eller ønsket om å tegne kommer fra elevene selv. I studien oppstod ikke behovet hos elevene, noe som førte til at jeg valgte å initiere bruken av tegning. Da er det kanskje ikke så uventet at en tegning som kunne vært brukt for å få mer innsikt i problemet ikke forekom hos fire av elevene. Elevene hadde tidligere i prosessen heller ikke funnet noen strukturer ved å se på eksempler med tallsymboler, og det var derfor vanskelig å vite hva de skulle tegne. En annen årsak kan være hva ordet «tegning» innebærer. Kanskje forstår ikke elevene hva som menes med en tegning knyttet til matematisk innhold. Det er ikke sikkert elevene er vant til å representere tall i en tegning med noe annet enn tallsymboler. Istedenfor å spørre om elevene kunne tegne noe, kunne jeg med fordel heller stilt spørsmålet: «Kan du erstatte tallsymbolene med noe annet enn tall?». Da hadde tegningen av et menneske satt sammen av mange tretall i figur 8 kanskje ikke blitt tegnet. Samtidig kunne det å erstatte tall med noe annet ført til ikke-strukturelle tegninger som Nina og Emma lagde i figur 9 og 10, som heller ikke hjalp dem til å utvikle gyldige argument.

Ikke-strukturelle tegninger manglet potensial for å oppdage strukturer. Funksjonen til tegning i den matematiske prosessen inngår i det multifunksjonelle systemet til Duval (2006). At en representasjon er multifunksjonell gir mulighet for flere utforskende prosesser enn representasjoner som inngår i det monofunksjonelle systemet. Tegning kan brukes for å kommunisere ideer og tilegne seg informasjon. Nina og Emma erstattet tallsymboler med å tegne penger, i figur 9, og rundinger, i figur 10. Tegningene var en visuell fremstilling av mengden til tallene som ble lagt sammen. Summen er i tegningene enten ikke tatt med eller bare skrevet med tallsymboler, og ble tilsynelatende ikke brukt av elevene til å se etter noen sammenhenger. For å kunne argumentere for hypotesen må elevene utforske hvilken innvirkning strukturen til tallene som adderes har på at summen er i tregangen. De ikke-strukturelle tegningene kunne ikke brukes til å utforske strukturen i hverken tre påfølgende tall eller summen, og elevene klarte ikke å nyttiggjøre seg av tegningene for noen videre argumentasjon for hypotesen. Ikke-strukturelle tegningene ga ikke elevene noen videre informasjon om strukturen til tallene som legges sammen, noe som kan ha hemmet deres utvikling av gyldige argument.

5.3 Strukturelle tegninger kan fremme utvikling av gyldige argument

For at en argumentasjon skal betegnes som gyldig må den oppfylle tre krav, som definert av A. Stylianides (2016). Argumentasjonen må bruke *aksepterte sannheter*, ha *gyldig type argumentasjon* og bruke *passende typer representasjoner*, hvorav de to siste kategoriene vil være gjenstand for analyse og diskusjon i studien. I en strukturell tegning er elementene som inngår i oppgaven fremstilt på en slik måte at strukturen til elementene er fremhevet. Selv om et spesifikt eksempel er brukt i tegningen vil strukturen til elementene som inngår være lik for et annet eksempel. En strukturell tegning gir derfor mulighet til å oppdage generaliteter, noe som ville være avgjørende for at elevene skal kunne utvikle gyldige argument for hypotesen. Representasjonen tegning gir også mulighet for flere utforskende prosesser hvor elever kan kommunisere sine ideer med andre, resonnere og tilegne seg mer informasjon om problemet (Duval, 2006).

Et funn i studien er at strukturelle tegninger brukt som utforskningsverktøy fremmet utviklingen av gyldige argument. Mitt funn samsvarer med ett av funnene i Stylianou

(2013) sin undersøkelse som var at representasjoner brukt som utforskningsverktøy hjalp elevene i deres studie til å få mer innsikt i generaliteter tilknyttet problemet, noe som videre førte til gyldige argument. Representasjoner brukt som utforskningsverktøy (Stylianou, 2011; 2013) innebærer å tilegne seg videre innsikt i sammenhenger knyttet til oppgaven gjennom å utforske på representasjoner ved å endre, manipulere og legge til eller fjerne elementer. Gjennom utforskning på tegninger og figurer bearbeidet elevene Hanne og Geir stadig figurene sine, noe som så ut til å hjelpe dem til å oppdage strukturelle sammenhenger tilknyttet hypotesen. Ved at tegningene ble brukt som manipulativer hvor elementer ble flyttet og lagt til, og å tegne hvordan figuren ville se ut etter elementene var flyttet, hjalp det elevene til å oppdage og uttrykke generalitetet tilknyttet hypotesen. Når et argument tar utgangspunkt i en representasjon av et spesifikt eksempel må det en muntlig forklaring til for å knytte eksempelet til generaliteter som vil gjelde for alle andre eksempler. En slik type argumentasjon vil da føre til et generisk eksempel (G. Stylianides, 2008). Noe Hanne sitt generiske eksempel med muntlige forklaringer og tegninger av figur 14 og 15, er et eksempel på. Geir brukte en strukturell tegning, figur 18, som ikke tok utgangspunkt i noen konkrete tall for å utforske og begrunne generaliteter, og han kunne dermed utvikle en generell logisk slutning for hypotesen. I analysen kommer det frem at elevene som hadde tatt i bruk strukturelle tegninger i argumentasjonen for den opprinnelige hypotesen også utviklet gyldige argument for en liknende matematisk hypotese. Ved at de opprinnelige tegningene viste strukturen til tre påfølgende tall var det enkelt for elevene å endre tegningene til å være en fremstilling av fire og fem påfølgende tall. De nye tegningene ble brukt som manipulativer, og ble utforsket på for å se hva som skjedde med summen når fire og fem påfølgende tall ble lagt sammen. Gjennom å utforske strukturen i tegningene fremmet Hanne og Geir gyldige argument for de nye hypotesene. Flere utdrag fra mitt datamateriale viser at å bruke strukturelle tegninger som utforskningsverktøy hjalp elevene til å utvikle gyldige argument.

Et annet funn var at strukturelle tegninger gjorde det enklere for elevene å kommunisere sine ideer med fellesskapet. I følge Saundry & Nicol (2006) og Woleck (2001) er tegning barns viktigste redskap for å kunne resonnere og kommunisere på i matematikkfaget. Kommunikasjon kan sees i sammenheng med Stylianou (2013) sin kategorisering av representasjoner brukt som kommunikasjonsverktøy hvor representasjoner brukes som et felles språkverktøy for å skape mening og forklare for medelever. De strukturelle tegningene ga elevene i studien noe visuelt og konkret som så ut til hjelpe elevene til å dele og presisere sin argumentasjon for hypotesen med fellesskapet. Jeg har i analysen vist til en episode hvor argumentasjonen til Geir ved bruk av tallsymboler ikke ble forstått av medelevene og meg. En strukturell tegning med stjerner, figur 20, hjalp han med å utdype det han prøvde å forklare i den symbolske representasjonen. Stjernetegningen ble brukt som utgangspunkt for de muntlige forklaringene, noe som så ut til å gjøre argumentasjonen mer tilgjengelig for fellesskapet. Samtidig kommuniserte elever sine handlinger utført på egne tegninger med de andre elevene. Det så ut til å hjelpe dem i prosessen med å fremme et gyldig argument fordi kommunikasjonen ga dem mer innsikt i problemet selv. Undersøkelser gjort av Stylianou (2011; 2013) viser også at elevers bruk av representasjoner som et kommunikasjonsverktøy så ut til å være nyttig i argumentasjonsprosessen, hvor representasjoner ble brukt for å underbygge og diskutere funn med sine medelever. Stylianou (2013) omtaler bruk av representasjoner som et kommunikasjonsverktøy som et naturlig steg mot å kunne produsere en gyldig argumentasjon.

6. Avslutning

I min studie har jeg undersøkt hvordan seks sjettetrinnselever bruker ulike typer representasjoner når de forsøker å utvikle gyldige argument for én generell matematisk hypotese. Med innføring av kjerneelementene; «resonnering og argumentasjon» og «representasjon og kommunikasjon» i LK20 øker kravet til lærernes kunnskap om argumentasjon og representasjoner. Ved å se nærmere på ulike typer representasjoner, og hvordan de ble brukt, kunne jeg se noen sammenhenger til om argumentene elevene produserte var gyldige eller ugyldige. Det er viktig å påpeke at funnene er basert på en liten kvalitativ undersøkelse av kun seks elever på sjettetrinn sitt arbeid med én generell matematisk hypotese. Funnene mine lar seg derfor ikke generalisere ut over studien, men gir samtidig noen implikasjoner rundt elevers bruk av representasjoner og utvikling av gyldige argument som kan overføres til andre elever og undervisningssituasjoner.

Da elevene i min studie brukte kun tallsymboler og muntlige forklaringer produserte elevene empiriske argument basert på sammenhenger oppdaget i noen eksempler. Tallsymbolene slik de ble brukt av elevene ga dem ikke mulighet til å utforske strukturer tilknyttet hypotesen utover å se på differansen mellom tallene som ble lagt sammen. Studien illustrerer en kjent utfordring som er at elever anser empiriske argument som gyldig bevis (Balacheff, 1988; Lannin, 2005; G. Stylianides, 2008). Evens og Houssart (2004) fremhever at å bruke eksempler som argumentasjon kan være et viktig førstesteg i å finne ut om noe er rett eller galt. Det vil være viktig at elevene får en forståelse av hvorfor empiriske argument ikke holder som gyldig argumentasjon. En av utfordringene for læreren blir da å veilede elevene ved å ta utgangspunkt i svarene deres, og få dem til å utdype og se etter generelle sammenhenger og strukturer. Læreren kan da stille spørsmål som oppfordrer elevene til å gi mer utfyllende svar og videre begrunnelser, eller oppfordre elevene til å ta i bruk en annen type representasjon.

Bruk av strukturelle tegninger i studien fremmet utviklingen av gyldige argument. For at elever skal kunne ta i bruk tegning er det en forutsetning at elevene har møtt eksempler på hvordan tegning kan brukes og har fått erfaringer med å lage matematiske tegninger selv. Som studien viser er det ikke nok å lage tegninger. Tegningene må inneholde noen strukturelle egenskaper for at de skal fremme utviklingen av gyldige argument. Strukturelle tegninger ble brukt som utforskningsverktøy hvor tegningene ble brukt som manipulativer for å utforske generelle strukturer tilknyttet hypotesen. Ved å utforske på de strukturelle teningene ga det elevene mer innsikt i problemet hvilket videre førte til gyldige argument. Bakar et. al (2016) påpeker at læreren må ha en pedagogisk tilnærming til bruk av representasjonen tegning hvor elevene blir introdusert for en variasjon av eksempler hvor det er hensiktsmessig å ta i bruk tegning som representasjon. Elevene kan reflektere over ulike tegninger og styrker og svakheter ved disse, og hvordan tegninger kan brukes i deres egen argumentasjon. Ved å gjøre slike tilnærminger i undervisningen kan elevene få veiledning i hvordan de kan utvikle sine egne representasjoner og strategier for bruk av ulike representasjoner. Hvis elevene opplever at tegning blir verdsatt av fellesskapet som et verktøy for formidling, utforskning og kommunikasjon, så er det større sannsynlighet for at elevene tar i bruk tegning som et verktøy for å lære. Resultatene i studien gir en indikasjon på at bruk av strukturelle tegninger kan være nyttig, og at tegning må betraktes som en viktig matematisk aktivitet. Noe som støttes av Bobis & Way (2018), som mener at det å kunne gjenkjenne det pedagogiske potensialet som finnes i barn sine tegninger er en ferdighet som vil være verdifull for alle lærere.

Argumentasjon handler om å overbevise seg selv eller andre om at en påstand er sann eller usann. Studien viser hvordan kommunikasjon og muntlige forklaringer var en viktig del av elevenes utvikling av argument. Strukturelle tegninger ga elevene noe konkret som de kunne bruke som utgangspunkt for å kommunisere med hverandre. Hvis noen elever uttrykte at de ikke forstod resonnementet så ble de muntlige forklaringene mer utdypende og presise. Elever kom også med innspill til hverandre som førte argumentasjonen videre. Ut i fra utdrag vist til fra studien vil jeg hevde at det er en fordel når elever skal utvikle gyldige argument at det skjer i et sosialt fellesskap. Enten det er i små grupper eller i en klasseromssituasjon. Ved å legge frem argumentasjonen sin for andre kan elevene lettere se hva som må presiseres og begrunnes mer, og argumentasjonen kan utvikles videre.

Studien min viser hvordan argumentasjonen og representasjonene i min studie påvirket hverandre i prosessen, som også var et av funnene i Stylianou (2013) sin studie. Tegningene påvirket elevenes argumentasjon hvor de begrunnet deres strategier for de andre medelevene, samtidig som argumentasjonen fikk elevene til å gjøre endringer på deres representasjoner. Det er ofte fokus på representasjoner som et verktøy for å fremme et sluttprodukt (Stylianou, 2013), men det er viktig at elevene forstår at representasjoner også brukes som et verktøy i løsningsprosessen. Det er viktig å se på hvilken innflytelse argumentasjon og representasjoner har på utviklingen av hverandre.

Erfaringer fra matematikk i skolen tyder på at tegning brukes endel på småtrinnene, men etterhvert som eleven blir eldre er det en oppfatning av at tegning blir mindre og mindre brukt. Funnene i min studie gir en indikasjon på at bruk av tegning i arbeid med en generell matematisk hypotese er en representasjon som kan fremme utvikling av gyldige argument. Det hadde vært interessant og undersøkt hvordan bruk av tegning er utbredt i matematikkundervisningen både på mellomtrinn og ungdomsskole. Det hadde også vært spennende og gjort en intervensjonsstudie for å se om bruk av strukturelle tegninger kan være med og fremme utviklingen av gyldige argument.

7. Referanser:

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Bakar, K. A., Way, J. & Bobis, J. (2016). Young Children's Drawings in Problem Solving. Innlegg presentert ved *Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (MERGA) Adelaide, South Australia.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Befring, E. (2007). *Forskningsmetode med etikk og statistikk*. Oslo: Det Norske Samlaget

Bobis, J. & Way, J. (2018). Building Connections Between Children's Representations and Their Conceptual Development in Mathematics. I V. Kinnear, M. Y. Lai & T. Muir (Red.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (s. 55-72). Singapore: Springer Singapore.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). NY: Routledge.

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode. En kvalitativ tilnærming.* 2 utgave. Oslo. Universitetsforlaget.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1-2), 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking- The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing.

Essen, G.V., Hamaker, C. (1990). Using Self-Generated Drawings to Solve Arithmetic Word Problems: *The Journal of Educational Research*, Vol. 83, No. 6, 301-312. Taylor & Francis, Ltd.

Evens, H. & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain', *Educational Research*, 46(3), 269-282.

Fangen, K. (2010). *Deltagende observasjon* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlag.

Guba, E. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries. *Educational Communication and Technology*, Vol. 29, No. 2 (Summer, 1981), pp. 75-91 Published by: Springer

Johnson, R. H. (2000). *Manifest rationality: A pragmatic theory of argument*. Mahwah, New Jersey London: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington D.C.: National Academic Press.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The Emergence of Mathematical Meaning Making: Interaction in Classroom Cultures* (s. 229–270). Hillsdale, N.J: L. Erlbaum.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* (2.utg). Gyldendal Norsk Forlag.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Leseth, A. B. & Tellmann, S. M. (2014). *Hvordan lese kvalitativ forskning?* 1. utgave. Oslo: Cappelen Damm AS

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Victoria, England.: Deakin University Press.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 163-182.

Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a Drawing. Effects of Strategic Knowledge, Drawing Accuracy, and Type of Drawing on Students' Mathematical Modelling Performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53-78.

Ryen, A. (2002). *Det kvalitative intervju: Fra vitenskapsteori til feltarbeid*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Saundry, C. and Nicol, C. (2006) Drawing as Problem-Solving: Young Children's Mathematical Reasoning Through Pictures, *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of Mathematics education, vol 5,* pp. 57-63

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword:The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). Mahwah, NJ: Taylor & Francis Group.

Stylianides, A. J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 38(3), 289-321.

Stylianides, A.J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Stylianides, G.J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics,* 28(1), 9-16.

Stylianides, G. J. (2009b). Reasoning- and- proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 258-288.

Stylianides, G. J. (2010). Engaging Secondary Students in Reasoning and Proving. Mathematics Teaching, 219, 39-44.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2008b) Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning* (2), 103-133.

Stylianides, A. J. & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of mathematics teacher education*, 11(4), 307-332.

Stylianides, A.J, Bieda, K.N. & Morselli, F.(2016): Proof and argumentation in mathematics education research. Fra: A. Gutièrez, G.C. Leder & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* 315-351. Rotterdam, The Netherlands. Sense Publishers.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in the context of middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 13(4), 325-343.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*,76, 265-280.

Stylianou, D. A (2013): An Examination of Connections in Mathematical Processes in Students' Problem Solving: Connections between Representing and Justifying. *Journal of Education and Learning* , v2 n2 p23-35

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode.* 5. Utg. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Tjora, A.H. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Utdanningsdirektoratet. (2018). Kjerneelement. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures: An Investigation of Children's Mathematical Drawings. I A. C. Albert & F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (s. 215-227).

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vedlegg 2: Intervjuguide: Oppgaven til elevene og «spørsmål som kan stilles underveis»

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Vil dere delta i forskningsprosjektet:
***"Elevers argumentasjon og generalisering i arbeid med matematikkoppgaver som omhandler tallteori"*?**

Dette er et spørsmål til dere foresatte om la barnet deres delta i et forskningsprosjekt. Formålet til prosjektet er å få en innsikt i hvordan elever på 6. trinn argumenterer for generaliseringer de har kommet fram til gjennom arbeid med matematikkoppgaver som omhandler tallteori. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Jeg skal skrive en masteroppgave som omhandler hvordan elever kan argumentere for de løsningene de kommer fram til på ulike matematikkoppgaver som omhandler tallteori. Prosjektet er en del av min masterutdanning gjennom NTNU; Master i matematikkdidaktikk 1.-7. trinn.

Hva innebærer det for dere å delta?

Elevene blir tatt ut i grupper på 3 elever i to undervisningsøkter, hver på ca. 45 min, hvor de får to oppgaver de skal løse. Det vil bli tatt lydopptak av elevene som senere vil bli transkribert og anonymisert. Sammen med elevbesvarelsene vil transkripsjonene bli brukt til å analysere elevenes fremgangsmåter og løsninger. Hvis dere ønsker å se oppgavene på forhånd er det bare å ta kontakt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om barnet ditt vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dere hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Ditt personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker dine opplysninger

Jeg vil bare bruke opplysningene om barnet til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Opplysningene behandles konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Veileder på masteroppgaven vil ha tilgang til dataene. Navnet på elevene vil erstattes med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. I prosjektet vil elevene få fiktive navn slik at de ikke kan kjennes igjen i publikasjonen. Lydopptakene vil lagres på en kryptert minnepinne.

Hva skjer med opplysningene dine når jeg avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes i mai 2020. Lydopptakene vil bli slettet etter endt prosjekt.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet og slettet personopplysninger om deg
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og

- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU ved Anita Valenta: anita.valenta@ntnu.no
- Kristin Valla Dønnem: kristin-valla.donnem@ou.trondheim.kommune.no
- NTNU sitt personvernombud: Thomas Helgesen: thomas.helgesen@ntnu.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig Student
Anita Valenta Kristin Valla Dønnem

Samtykkeerklæring

- Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet: *"Elevers argumentasjon og generalisering i arbeid med matematikkoppgaver som omhandler tallteori"*

Jeg samtykker til:

- å la barnet mitt delta i prosjektet
- at opplysningene behandles frem til prosjektet er avsluttet i mai 2020.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2: Intervjuguide: Oppgaven til elevene og «spørsmål som kan stilles underveis»

Oppgaven til elevene:

«Oppgaven dere får er som følgende: Dere skal se på hva som skjer når dere legger sammen, eller plusser sammen, hvilke som helst tre påfølgende tall. Tre påfølgende tall er for eksempel 26, 27, 28. Tre tall rett etter hverandre på tallinja. Så skal dere lete etter mønster. Hva er det som skjer når vi plusser, legger sammen, tre påfølgende tall. Finner dere noe som er felles, noe som gjentar seg eller er likt?»

Spørsmål som kan stilles underveis:

- *Kan du fortelle mer om det?*
- *Vil dette alltid være riktig?*
- *Jeg er litt med på tankegangen. Kan du overbevise meg mer?*
- *Hvordan tenkte du for å komme fram til den løsningen?*
- *Hva legger dere merke til? Hvis elevene sier "denne" eller "det", spør hva er det?*
- *Er det noe annet som trenger å oppklares i argumentet?*
- *Kan dere bruke noe annet enn tallene for å vise hva som skjer i denne situasjonen?*

NTNU

Kunnskap for en bedre verden