Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Eirin Gåre Aase

# "Det er litt vanskelig å forklare"

## En kvalitativ studie av to elevgrupper på 7.trinn sitt arbeid med matematisk resonnering

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1.-7.
Veileder: Kirsti Rø
Mai 2020

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Eirin Gåre Aase

# "Det er litt vanskelig å forklare"

## En kvalitativ studie av to elevgrupper på 7.trinn sitt arbeid med matematisk resonnering

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1.-7.
Veileder: Kirsti Rø
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

# Sammendrag

Denne studien har undersøkt matematisk resonnering i barneskolen, der formålet har vært å bidra med kunnskap om hvordan elever på 7.trinn arbeider med og samarbeider om resonneringsaktiviteter i matematikk. Denne kunnskapen har lagt grunnlag for refleksjoner rundt hva matematisk resonnering kan bety og være i barneskolen, og hvilke utfordringer elevene møter. Studiens forskningsspørsmål er: *Hva kjennetegner to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering?*

Studien har gjennom en kvalitativ tilnærming brukt deltakende observasjon som metode for datainnsamling. To elevgrupper på henholdsvis tre og fire elever har blitt observert i samarbeid om oppgaver knyttet til generalisert aritmetikk i hundrerkartet. Datainnsamlingen ble gjennomført som gruppediskusjoner, der deltakende observatør kun stilte spørsmål og fulgte opp elevutsagn. Datamaterialet ble analysert ved hjelp av tematisk analyse med induktiv tilnærming, og åpen koding. Analyseverktøyet består av tre ulike teoretiske rammeverk: en modell for matematisk resonnering i skolen, et analytisk rammeverk for argumenters struktur og et rammeverk for elevers deltakelse i en matematisk diskurs. Modellen som ble benyttet har grunnlag i en bred betydning av matematisk resonnering, og inkluderer både et prosessaspekt og et strukturaspekt. Resonneringsprosessene er eksemplifisering, generalisering, formulering av hypoteser, identifisering av mønster, sammenligning, klassifisering, begrunnelse, bevis og formelle bevis. Strukturaspektet inkluderer deduksjon, induksjon og abduksjon. Det analytiske rammeverket for argumenter strukturerer en sammenfatning av elevenes utsagn i resonneringsprosessen etter data, konklusjon, hjemmel og ryggdekning. Den overordnede rammen for studien tar utgangspunkt i et sosiokulturelt syn på læring som deltakelse, og det er elevenes deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering som er analysert.

Resultatene fra studien viser ulike kjennetegn på elevenes deltakelse i den diskursive aktiviteten med matematisk resonnering. Først og fremst framsatte elevene mange hypoteser, hvorav kun noen få ble begrunnet. Elevene hadde en utstrakt bruk av eksempler, der eksemplene støttet resonneringsprosessene sammenligning, generalisering, formulering av hypoteser og begrunnelser. I begge elevgruppene ble det gitt begrunnelser, i form av empiriske argument og forklaringer som kunne vært videre utarbeidet til generisk argument. Elevene deltok dessuten i det sosiale samspillet gjennom å inkludere hverandre, bekrefte og uttrykke uenighet. Resultatene fra studien indikerer at elevene ikke opplevde behov for å begrunne hypotesene sine og at de møtte på utfordringer i forsøket på å begrunne. De hadde en eksempelbruk som delvis var produktiv, og deres sosiale samspill bidro tilsynelatende til progresjon i deres matematiske diskusjoner. Resultatene viser at elevene kan delta i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering, og legger grunnlag for refleksjoner rundt didaktiske implikasjoner.

# Abstract

This study has investigated mathematical reasoning in primary school, with the purpose of contributing to knowledge about how pupils in 7th grade work with and collaborate on reasoning activities in mathematics. This knowledge has provided a basis for reflections on what mathematical reasoning can be, as well as the meaning of it in primary school, and the challenges pupils experience in their work. The research question for this study is: *What characterizes the participation of two groups of pupils in a discursive activity of mathematical reasoning?*

Through a qualitative approach, the study has used participant observation as a method for data collection. Two groups of pupils of three and four pupils, respectively, have been observed in collaboration on tasks related to generalized arithmetic in the hundreds chart. The data collection was conducted as group discussions, where the participating observer was restricted to ask questions and follow up pupils utterances. Data was analyzed using thematic analysis with an inductive approach and through open coding. The analysis tool consists of three theoretical frameworks: a model of mathematical reasoning for school mathematics, an analytic framework for the structure of arguments and a framework for pupils participation in a mathematical discourse. The model is built on a broad meaning of mathematical reasoning, including both a process aspect and a structural aspect. The reasoning processes are exemplifying, generalizing, conjecturing, identifying a pattern, comparing, classifying, justifying, proving and formal proving. The structural aspect includes deduction, induction and abduction. The analytic framework for the arguments structures a set of pupils statements from the reasoning processes by data, claim, warrant and backing. The main theoretical framework is based on a sociocultural perspective on learning as participation, and it is the pupils' participation in a discursive activity with mathematical reasoning that has been analyzed.

The results of the study show different characteristics of the pupils participation in the discursive activity of mathematical reasoning. First, the pupils formulated a lot of hypotheses, of which only a few were justified. The pupils had an extensive use of examples, where the examples supported the reasoning processes of comparing, generalizing, conjecturing and justifying. Both groups produced arguments, some empirical arguments and some explanations that had potential for being further developed into generic arguments. The pupils also participated in the social interaction by including each other, confirming and expressing disagreement. Results indicate that pupils saw no need to justify their hypotheses and that they encountered challenges in their attempts to justify. They had an example use that were partially productive, and their social interaction apparently contributed to progression in their mathematical discussions. The results show that pupils can participate in a discursive activity with mathematical reasoning, and provide a basis for reflections on didactical implications.

# Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem lærerike år som student på lærerutdanninga. Masterprogrammet i matematikkdidaktikk ved NTNU har gitt meg verdifull kompetanse og kunnskap om et mangfold av aspekter ved læring og undervisning i matematikk som jeg ser frem til å ta med inn i læreryrket. Jeg vil her benytte muligheten til å takke alle som har vært til hjelp og støtte i arbeidet med denne masteroppgaven.

Først og fremst ønsker jeg å takke min dyktige veileder, Kirsti Rø, som har bidratt med grundige og konstruktive tilbakemeldinger, støtte og oppmuntring i arbeidet med masteroppgaven. Det engasjementet du har vist for oppgavens tema og for matematikkfaget i skolen har vært til stor inspirasjon som student og som kommende matematikklærer.

Jeg vil også rette en stor takk til læreren, elevene og skolen som åpenhjertig ønsket meg velkommen og lot meg gjennomføre datainnsamling hos dem. En særlig takk rettes til elevene som deltok i studien.

Takk til familien som alltid har hatt tro på meg og vært verdifull støtte gjennom et utfordrende studieløp. Takk til venner for gode samtaler, latter og tårer i skjønn forening, samt faglige diskusjoner. Det har gjort uendelig mange timer på lesesalen til minner jeg ikke ville vært foruten.

Eirin Gåre Aase

Trondheim, mai 2020

# Innhold

# Figurer



# Tabeller

# Forkortelser/symboler

| | |
|---|---|
| NESH | Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora |
| NTNU | Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet |
| NSD | Norsk senter for forskningsdata |

# 1 Innledning

Matematisk resonnering er utvilsomt en viktig del av vitenskapsfaget matematikk. Matematikere jobber stadig med å utvikle ny kunnskap gjennom ulike resonneringsprosesser, som å formulere og teste hypoteser, generalisere, sammenligne, argumentere for og bevise påstander. Aktivitetene fungerer som et verktøy i arbeidet med å forstå fagfeltet og utvikle ny matematisk kunnskap (Stylianides, 2008). På samme måte kan matematisk resonnering fungere som et verktøy for elevers arbeid med matematikk i grunnskolen. Mange studier anbefaler at resonnering og bevis burde være en sentral del av de matematiske erfaringene elever får gjennom hele utdanningsløpet (eks. Ball & Bass, 2003; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Yackel & Hanna, 2003), da engasjement i disse aktiviteten er viktig for både dybdelæring og meningsskaping i matematikk (Stylianides, 2010).

Til tross for at resonnering og bevis er anbefalt som en del av matematikkutdanningen, er det ofte lite vektlagt både i læreplaner og undervisning (Jeannotte & Kieran, 2017). Beskrivelsene er ofte vage og det er antatt at det eksisterer en felles forståelse for begrepene. I tillegg viser studier at elever og lærere opplever utfordringer i møte med temaet (se f.eks. Balacheff, 1988; Healy & Hoyles, 2000; Simon & Blume, 1996). Nå når det skal innføres ny læreplan, Fagfornyelsen, der resonnering og argumentasjon kommer inn som et kjerneelement, er det derfor særlig relevant å undersøke matematisk resonnering i barneskolen. Kjerneelementene representerer det viktigste innholdet i faget og formidler hva elevene må kunne for å lykkes (Utdanningsdirektoratet, 2019). Resonnering og argumentasjon som kjerneelement involverer at elever både skal kunne utforme egne resonnementer og forstå og følge andres resonnementer. I tillegg vektlegges det at elever skal forstå at matematiske regler og resultater har klare begrunnelser, og dermed ikke er tilfeldige (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Videre knyttes matematisk resonnering opp til kjerneelementet representasjon og kommunikasjon i den nye læreplanen, der det fremmes at kommunikasjon i matematikk involverer at elevene bruker matematisk språk i blant annet argumentasjon og resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2019). Altså legges det opp til at matematisk resonnering har en sosial natur. I likhet anser flere forskere matematisk resonnering som en kollektiv aktivitet, der elever deltar i interaksjoner med andre for å løse matematiske problemer (Yackel & Hanna, 2003). Videre vektlegger studier at deltakelse i matematiske diskusjoner er viktig for elevers læring av matematikk (se f.eks. Krummheuer, 2000; Stein, Engle, Smoth & Hughes, 2008). Likevel fører ikke all sosial interaksjon til læring. Cobb (1995) hevder blant annet at ulike typer interaksjoner elever engasjerer seg i, kan påvirke den læringen de oppnår. Mercer og Sams (2006) knytter lite læring i sosiale interaksjoner til manglende kjennskap til hva som kjennetegner effektiv diskusjon, samt manglende kunnskap om hvordan å konstruere og forstå argumenter. Selv om både forskning og læreplanen relaterer matematiske diskusjoner med matematisk resonnering til læring og meningsskaping, er det altså ikke dermed sagt at elevene vet hva som skal til for at diskusjonene er produktive. Analyser av diskusjoner i klasserom kan dermed være nyttig for å øke bevisstheten om hva som kjennetegner effektiv diskusjon og hvordan matematisk kommunikasjon og læring kan gjøres mer effektiv (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2013; Sfard, 2001).

Selv om både forskning og læreplanen hevder matematisk resonnering er viktig, er begrepet likevel ikke tydelig definert i forskningslitteraturen (Jeannotte & Kieran, 2017; Reid, 2005; Yackel & Hanna, 2003). Jeannotte og Kieran (2017) har gjennom en litteraturstudie forsøkt å definere hva matematisk resonnering er, basert på sentrale trekk som er gjennomgående i forskningslitteraturen. Med kommognisjon (Sfard, 2008) som rammeverk for studien, definerer de matematisk resonnering som en kommunikasjonsprosess med seg selv eller andre, som tillater en å avlede matematiske utsagn fra andre matematiske utsagn. De har utarbeidet en modell av matematisk resonnering for matematikk i skolen, der de inkluderer både strukturaspektet og prosessaspektet i resonnering. I likhet med matematikeres resonneringsaktiviteter, inkluderer resonneringsprosessene eksempelvis generalisering, formulering av hypoteser og bevis. I skolen har bevis ofte kun vært representert ved formelle bevis (Stylianides, 2008), noe som er problematisk da en slik undervisning utelukker alle de aktivitetene som fører frem mot det formelle beviset. Modellen til Jeannotte og Kieran (2017) tar for seg den helhetlige resonneringsprosessen, fra søk etter likheter og ulikheter til validering av matematiske påstander. På den måten er det en hensiktsmessig modell å bruke i undersøkelsen av elevers arbeid med matematisk resonnering, da den omfavner et helhetlig syn på matematisk resonnering, og omtaler bevis og formelle bevis som relatert til de andre resonneringsprosessene.

Videre har bevis vært særlig fraværende, eller behandlet isolert fra andre resonneringsprosesser, på mellomtrinnet (Stylianides, 2010). Stylianides (2010) hevder en slik behandling av bevis er problematisk, da det fratar elevene mulighet til å anse bevis som et verktøy i matematisk meningsskaping. I tillegg kan det delvis være årsaken til at elever opplever ulike vansker i møte med bevis, som for eksempel at de oppfatter empiriske argument som påstander og lar seg ofte ikke overbevise av deduktive bevis (se f.eks. Healy & Hoyles, 2000; Schoenfeld, 1991). I tråd med økt oppmerksomhet om resonnering og bevis i barneskolen i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet, har resonnering og bevis også fått mer plass i læreplaner rundt om i verden. Likevel er det fortsatt stort behov for forskning på matematisk resonnering i barneskolen, særlig innenfor andre matematiske temaer enn geometri (Stylianides, Bieda & Morselli, 2016). I denne studien har jeg derfor valgt å rette fokuset mot matematisk resonnering på mellomtrinnet innen temaet generalisert aritmetikk, og gjennom elevenes deltakelse i gruppediskusjoner.

Formålet med studien er å bidra med kunnskap om hvordan elever på mellomtrinnet arbeider med og samarbeider om matematisk resonnering. Mer kunnskap på området kan øke bevisstheten om hvilke utfordringer elever møter i arbeid med resonnering, og hvilke læringsmuligheter som kan oppstå når elever samarbeider om resonnering. Det kan igjen skape refleksjoner om hvordan lærere kan støtte elever i meningsfull deltakelse i matematisk resonnering, og på den måten bidra til den forskningen som Stylianides et al. (2016) etterspør. Fagfornyelsen knytter som nevnt matematisk resonnering til elevenes muntlige ferdigheter og kommunikasjon av matematiske idéer. Jeg har derfor valgt å bruke kommognisjon (Sfard, 2008) som et overordnet rammeverk for denne studien, da kommognisjon omtaler matematikk som en diskurs, altså en særegen måte å kommunisere på. Læring blir i rammeverket ansett som en endring i måten personer kommuniserer matematikk på. I tråd med Jeannotte og Kieran (2017) anser jeg matematisk resonnering som en diskursiv aktivitet, og med kommognisjon som overordnet ramme for studien, får jeg da mulighet til å undersøke hva elevene sier og gjør. Nakim (2019) påpeker i sin studie at det finnes lite forskning som har undersøkt elevers arbeid med resonnering og bevis med kommognisjon som rammeverk. I tråd med hans forskning, ønsker jeg å bidra med mer kunnskap om hva rammeverket kan synliggjøre i elevers arbeid med matematisk resonnering. For å kunne bidra til dette, har jeg stilt følgende forskningsspørsmål:

*Hva kjennetegner to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering?*

For å kunne svare på dette forskningsspørsmålet har jeg observert to grupper på henholdsvis tre og fire elever fra 7.trinn, i arbeid med oppgaver knyttet til aritmetikk i hundrerkartet. Det ble tatt lydopptak og videoopptak av datainnsamlingen, og selv deltok jeg som deltakende observatør i observasjonen. Datamaterialet har blitt analysert ved hjelp av tematisk analyse (Braun & Clarke, 2006), der jeg gjennom bruk av åpen koding har utarbeidet temaer som jeg anser som kjennetegn på elevenes deltakelse i matematisk resonnering. Analysen er støttet av Jeannotte & Kieran (2017) sitt rammeverk for matematisk resonnering, Toulmin (2003) sitt analytiske rammeverk for argumentasjon, og Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk.

I kapittel 2 om teori, vil jeg gi en kort oversikt over tidligere forskning på feltet og avklare begreper brukt i studien, før jeg utdyper om den teoretiske rammen for studien. Videre vil jeg i kapittel 3 gjøre rede for metodevalg, gjennomføring av datainnsamling og analyseredskapet som er benyttet. I kapittel 4 presenterer jeg funn fra analysen, med støtte i utdrag fra datamaterialet. Funnene er strukturert etter kjennetegn på elevenes deltakelse i matematisk resonnering, og vil deretter bli diskutert i kapittel 5 i lys av relevant litteratur og praksis i skolen. I tillegg diskuteres studiens begrensninger og bidrag. Avslutningsvis vil jeg i kapittel 6 peke på muligheter for videre forskning innenfor temaet.

# 2 Teori

Formålet med studien er å undersøke hvordan to elevgrupper deltar i matematisk resonnering. For å kunne svare på forskningsspørsmålet vil jeg ha behov for noen teoretiske verktøy. Først og fremst ønsker jeg å se på læring som deltakelse i en diskurs, og jeg vil derfor ta utgangspunkt i Sfard (2008) sitt kommognitive rammeverk. Kommognisjon vil i min studie fungere som en overordnet teoretisk ramme, og for å videre kunne undersøke elevenes deltakelse i matematisk resonnering vil jeg benytte meg av Jeannotte og Kieran (2017) sin modell, som er utarbeidet med utgangspunkt i kommognisjon og som beskriver struktur- og prosessaspekter i elevers matematiske resonnering. For å få økt innsikt i strukturen i elevers valideringsprosesser har jeg valgt å støtte meg til Toulmins (2003) analytiske rammeverk for argumentasjon. Før jeg utdyper om disse tre rammeverkene ser jeg det som nødvendig å kort redegjøre for tidligere forskning om matematisk resonnering, og gi noen begrepsavklaringer.

## 2.1 Tidligere forskning

Det er godt dokumentert at resonnering, argumentasjon og bevis er en viktig del av grunnskoleutdanningen i matematikk og at undervisningen burde oppfordre elevene til å utvikle meningsfylte argumenter, evaluere argumenter og stille spørsmål for å tydeliggjøre argumentene (se f.eks. Krummheuer, 2007; Whitenack & Yackel, 2002). Til tross for dette, er det mange forskningsartikler som fremmer store utfordringer blant elever og studenter på alle utdanningsnivå når det kommer til både argumentasjon, resonnering og bevis. I dette kapittelet skal jeg derfor presentere et utvalg relevant forskning som påpeker ulike utfordringer elever møter i arbeid med denne delen av matematikken.

Mange studier har funnet at elever og lærere både formulerer og aksepterer empiriske argument som bevis for matematiske generaliseringer (Stylianides, Stylianides & Weber, 2017). Healy og Hoyles (2000) fant blant annet at elevene selv foretrakk å gi empiriske argument, til tross for viten om at empiriske argument ikke innfrir kravene til bevis. De oppfattet det likevel som det mest overbevisende argumentet for seg selv. Stylianides og Stylianides (2009) påpeker at elevers empiriske utforskning likevel ikke må undervurderes, da det hjelper elevene i å organisere matematiske observasjoner til meningsfulle generaliseringer og gir elevene innsikt i hvordan de kan gå frem for å bevise disse generaliseringene. Dette støttes av Ozgur, Ellis, Vinsonhaler, Dogan og Knuth (2019) som i sin studie av produktiv eksempelbruk i matematisk resonnering, fant at elever som ga gyldige bevis var kjennetegnet ved at de evnet å se og kommunisere en generell egenskap på tvers av eksempler de undersøkte. Forskning viser altså at empirisk utforskning er viktig for bevisprosessen, samtidig som det ikke må aksepteres som bevis i matematikklasserommet (Stylianides & Stylianides, 2009).

Stylianides et al. (2017) har gjennomgått forskning på læring og undervisning av bevis, og trekker frem noen utfordringer forskning har knyttet til elevers arbeid med temaet. I tillegg til utfordringer med empiriske argument, er det et godt dokumentert funn at elever ofte ikke lar seg overbevise av deduktive bevis. Det er også en utfordring at elever ikke godtar ett moteksempel som tilstrekkelig for å avkrefte en matematisk påstand. Balacheff (1991) fant i tillegg at elever ofte behandler moteksempel som unntak for påstanden.

Forskning har også vist at utfordringer i elevers arbeid med bevis kan skyldes manglende behov for å gi bevis (Yackel & Hanna, 2003). Det vil si at elevers manglende engasjement i bevisprosessen ikke nødvendigvis skyldes at de ikke evner å gi bevis, men at ikke ser en grunn til det (Balacheff, 1991). Yackel og Hanna (2003) knytter blant annet utfordringer elever møter i arbeid med bevis til at den matematiske resonneringen er svært ulik resonneringen i hverdagslivet, fordi den krever strenge deduktive slutningsregler. Eksempelvis kan intuisjon medføre at elever ikke ser behovet for å begrunne matematiske påstander. Det kan relateres til Knuth (2002) som påpeker at dersom bevisoppgavene fører til påstander som intuitivt oppleves som åpenbart sann, vil elevene kun anse beviset som en prosedyre for å bekrefte noe som allerede er sant, og ikke som et verktøy for meningsskaping.

## 2.2 Begrepsavklaringer

I dette kapittelet redegjør jeg for flere sentrale begreper i studien. Her blir det forklart hva jeg legger i begrepene matematisk resonnering, argumentasjon og bevis, samt empirisk og generisk argument. Videre gjør jeg rede for bakgrunnen for valg av begreper.

### 2.2.1 Resonnering, argumentasjon og bevis

Resonnering, argumentasjon og bevis er tre begreper som er nært relatert til hverandre, men som likevel må skilles fra hverandre. Jeannotte og Kieran (2017) definerer *resonnering* som en kommunikasjonsprosess som involverer det å slutte matematiske utsagn fra andre matematiske utsagn. Med denne definisjonen omfatter de en bred betydning av begrepet, der de både inkluderer resonneringens struktur og resonneringsprosesser, deriblant formulering av hypotese, generalisering og ulike former for validering av hypoteser. Denne betydningen av matematisk resonnering går også igjen hos blant andre Mason (1982) og Stylianides (2008), og i min studie er det en slik bred og omfattende betydning jeg vil tillegge begrepet når jeg omtaler matematisk resonnering.

Begrepet *argumentasjon* beskrives som den retoriske måten et individ eller en gruppe bruker for å overbevise andre om at en ytring er sann eller usann, og knyttes på den måten til påstandens epistemiske verdi (Krummheuer, 1995, Stylianides et al., 2016). Jeg anser argumentasjon som å være nært knyttet til det Jeannotte og Kieran (2017) omtaler som validering, da de definerer validering som en matematisk resonneringsprosess med hensikt om å endre den epistemiske verdien til en matematisk narrativ (s. 11). Altså har både argumentasjon og validering som formål å rettferdiggjøre eller forkaste en matematisk påstand. Jeannotte og Kieran (2017) påpeker dessuten at validering av matematiske påstander nødvendigvis må involvere søk etter data, hjemmel (eng: warrant) og ryggdekning (eng: backing), begreper de har hentet fra Toulmin (2003). Toulmin (2003) omtaler selv disse som ulike roller utsagn kan ha i en argumentasjon. Når jeg i min studie omtaler argumentasjon, brukes det derfor om de prosessene Jeannotte og Kieran (2017) inkluderer i søk etter validering, altså begrunnelse, bevis (eng: proving) og formelle bevis (eng: formal proving).

*Bevis* er et begrep det ikke er knyttet en felles forståelse eller definisjon til i forskningslitteraturen (Balacheff, 2002), og kan i tillegg ha mange ulike funksjoner i matematikken (Knuth, 2002; Yackel & Hanna, 2003). En viktig funksjon er at bevis skal bidra til å verifisere sannheten til matematiske påstander og på den måten konstruere ny matematisk kunnskap. En annen viktig funksjon er kommunikasjon og forklaring, som skal bidra til forståelse gjennom å vise hvorfor en påstand er sann. Altså må et bevis i tillegg til å vise at noe er sant, også kunne bidra til å forstå hvorfor det er sant og på den måten gi mening til matematikken. Ifølge Yackel og Hanna (2003) har den verifiserende funksjonen ofte blitt vektlagt i skolen, selv om den forklarende funksjonen har mest å bidra med i matematikkundervisning. Matematikere verdsetter også denne funksjonen, og knytter bevis til tolkning, forståelse, resonnering og meningsskaping.

Bevis i skolen må ifølge Mariotti (2006) både være akseptert fra et matematisk perspektiv, samtidig som det må gi mening for elevene. Dermed blir begge de ovennevnte funksjonene til bevis en viktig del av arbeidet med bevis i skolen. Stylianides et al. (2016) har utarbeidet følgende definisjon for bevis i skolen:

> I skolen er bevis et matematisk argument for at en påstand er sann eller usann, som oppfyller følgende kriterier:
>
> (i) Det anvender sanne påstander, gyldige resonneringsformer og hensiktsmessige representasjonsformer, der 'sann', 'gyldig' og 'hensiktsmessig' skal forstås som en referanse til det som typisk er anerkjent av matematikere i nåtiden
>
> (ii) Det anvender påstander, resonneringsformer og representasjonsformer som er akseptert av, kjent for, eller innenfor rekkevidde for elever i et gitt klasserom
>
> (Stylianides et al., 2016, s. 317)

Denne definisjonen inkluderer i kriteria (i) et matematiske aspekt, der beviset må bygge på påstander, resonneringsformer og representasjoner som er anerkjent av matematikere. Det betyr at bevis må ha en deduktiv struktur (se f.eks. Reid & Knipping, 2010), det vil si at det bygger på noe som er antatt sant, eller som tidligere er bevist sant, og går gjennom ett eller flere steg for å komme fram til en konklusjon. Også i Jeannotte og Kieran (2017) krever resonneringsprosessene bevis og formelle bevis en slik deduktiv restrukturering. Man følger altså aksepterte slutningsregler i deduktiv resonnering, som medfører at konklusjonen nødvendigvis må aksepteres som sann. I kommognisjon kan disse slutningsreglene omtales som metaregler for underbygging av narrativer, noe jeg skal komme tilbake til i 2.3. Kriteria (i) i definisjonen til Stylianides et al. (2016) er på den måten nært knyttet til bevisets funksjon som verifiserende. I kriteria (ii) inkluderer definisjonen til Stylianides et al. (2016) et forståelsesaspekt, der det fremhever at påstander, resonneringsformer og representasjonsformer må være kjent og gi mening for elevene. På den måten kan det sies å være nært knyttet til bevisets forklaringsfunksjon.

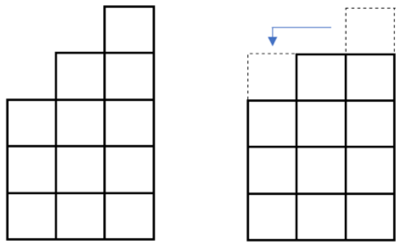
I min studie vil jeg først og fremst forholde meg til Jeannotte og Kierans (2017) definisjoner av resonnering og bevis, som vil bli utdypet i kapittel 2.4. Deres definisjoner av bevis og formelle bevis er nært knyttet til Stylianides et al. (2016) sin definisjon gjengitt over.

### 2.2.2 Empirisk og generisk argument

I forskningslitteraturen blir det omtalt ulike typer argumenter, deriblant empirisk og generisk argument. Stylianides (2008) har blant annet beskrevet disse i sitt rammeverk for resonnering og bevis, der han definerer bevis som et gyldig argument basert på aksepterte sannheter for eller imot en matematisk påstand (s. 11). Jeg vil kort redegjøre for disse to typene argumenter, da det er begreper som anvendes i denne studien. For å redegjøre for og eksemplifisere begrepene, tar jeg utgangspunkt i påstanden «summen av tre påfølgende tall er alltid delelig med tre».

Et *empirisk argument* er et argument der en matematisk påstand blir antatt sann etter å ha sjekket noen tilfeller av påstanden (Stylianides, 2008). En slik type argumentasjon kunne for påstanden over være å vise at $1 + 2 + 3 = 6$ og $10 + 11 + 12 = 33$, og argumentere for at både $6$ og $33$ er delelig med tre, og dermed vil påstanden alltid stemme. Empirisk argument blir regnet som et ikke-bevis, men kan likevel kategoriseres som et bevis dersom det er mulig å sjekke alle tilfeller som inkluderes i påstanden (Stylianides, 2008).

Et *generisk argument* er ifølge Stylianides (2008) et argument som benytter et spesifikt tilfelle som gjelder for påstanden for å si noe generelt om alle tilfeller inkludert i påstanden, det vil si karakteristiske egenskaper og strukturer. På den måten blir det ene tilfellet en karakteristisk representant for alle tilfeller inkludert i påstanden (Balacheff, 1988). Et generisk argument innehar dermed ingen egenskaper som er særegne for det spesifikke tilfellet, og argumentet som blir gitt på bakgrunn av tilfellet kan derfor generaliseres til hvilket som helst tilfelle inkludert i påstanden. For å vise at summen av tre påfølgende heltall alltid er delelig med tre, kan det gjøres ved å ta utgangspunkt i $3 + 4 + 5$, som vist i figur 2.1 under. Alle tall kan representeres ved hjelp av ruter plassert i én kolonne med $n$ antall rekker, der $n$ er det gjeldende tallet. Dermed kan tre påfølgende tall representeres ved hjelp av tre kolonner i stigende rekkefølge, slik figur 2.1 viser. Ved å utvide med likt antall ruter i alle tre kolonnene, kan dette eksempelet generaliseres til summen av tre vilkårlige påfølgende tall. Man kan da tenke seg at radene med ruter fortsetter nedover. Da de to største tallene i rekken er henholdsvis $1$ og $2$ ruter lengre enn det første tallet, vil den representerte tallfølgen alltid ta form lik «trappa» som kan ses til venstre i figur 2.1. Dersom den øverste ruta i det siste tallet blir forflyttet, og plassert på toppen av det første tallet, står man igjen med tre kolonner med likt antall ruter i hver. En slik omorganisering av de tre tallene kan man alltid gjøre, da tre påfølgende tall alltid kan representeres som tre kolonner i stigende rekkefølge med henholdsvis $n$, $n + 1$ og $n + 2$ ruter. Når én rute forflyttes fra det største tallet til det minste, får man en firkant på $3 \cdot antall\ ruter\ i\ det\ midterste\ tallet$. Ettersom tall som er delelig med tre kan representeres som $3 \cdot et\ positivt\ heltall$, vil summen av tre vilkårlige påfølgende tall alltid være delelig med tre.



**Figur 2.1: Generisk eksempel for at summen av tre påfølgende tall alltid er delelig med tre, representert ved 3+4+5**

## 2.3 Kommognisjon

Som overordnet ramme for min studie har jeg valgt Sfard (2008) sitt rammeverk kommognisjon (eng: commognition). Begrepet *kommognisjon* er satt sammen av de to ordene kommunikasjon og kognisjon, og knytter dermed sammen to prosesser: de kognitive prosessene, altså tankeprosessene, og prosessene med mellommenneskelig kommunikasjon. Disse prosessene blir ansett som ulike manifestasjoner av fenomenet kommunikasjon. Med utgangspunkt i dette hevder Sfard (2007) at kommognisjon sitt fundament ligger i en antakelse om at tenkning også er en form for kommunikasjon, altså kommunikasjon med seg selv. Det tar utgangspunkt i et sosiokulturelt perspektiv på læring, der læring blir ansett som en prosess hvor mennesker i økende grad blir fullverdige deltakere i ulike kulturelle praksiser (Cobb, 2007; Sfard, 2001). I kommognisjon omtales de kulturelle praksisene som diskurser, som personer gradvis blir kompetente deltakere i. *Diskurs* er kort definert et fagfellesskap som preges av særegne måter å kommunisere på (Sfard, 2007).

I tråd med Sfard (2008) anser jeg matematisk resonnering som en kollektiv aktivitet. Derfor er det hensiktsmessig for meg å ta utgangspunkt i et rammeverk som anser matematikk som en form for kommunikasjon. Kommunikasjon med seg selv er vanskelig å observere, men kommognisjon kan brukes til å observere kommunikasjon med andre. Rammeverket gir meg derfor mulighet til å analysere det elevene gjør og sier i interaksjon med hverandre, imens de arbeider med en oppgave som involverer matematisk resonnering. Kommognisjon kan dermed hjelpe meg i arbeidet med å identifisere kjennetegn ved elevenes deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering. I tråd med Jeannotte og Kieran (2017) forstår jeg *diskursiv aktivitet* som å bestå av hva deltakerne i diskursen sier, måten de sier det på, det de gjør, representasjonene de lager og måten de brukes på, samt deres intonasjoner og gester. I dette delkapittelet vil jeg redegjøre for hva en matematisk diskurs er og hva læring innebærer innenfor den kommognitive rammen.

### 2.3.1 Matematisk diskurs

Matematikk blir innenfor kommognisjon ansett som en egen diskurs, den matematiske diskursen (Sfard, 2017), og defineres som en spesiell type kommunikasjon som inkluderer særegne måter å snakke og handle på (Tabach & Nachieli, 2016). Den kjennetegnes av fire karakteristiske egenskaper: bruken av ord, visuelle mediatorer, rutiner og aksepterte (eng: endorsed) narrativer (Sfard, 2012). *Bruken av ord* i matematikk involverer bruken av ord som anvendes i andre diskurser, men som i matematikk har en særegen betydning, som firkant og trekant. Det involverer også bruken av særegne matematiske ord, som brøk og multiplikasjon. Deltakelse i matematisk diskurs innebærer også bruken av *visuelle mediatorer,* for å kunne lette kommunikasjonen om objekter i matematikk. Visuelle mediatorer kan være matematiske symboler som siffer og likhetstegnet, men det kan også være konkreter som brøkstaver og centikuber, tegninger, figurer og diagrammer. I en diskurs kan så alle muntlige og skriftlige ytringer som beskriver objekter og deres egenskaper, relasjoner mellom objektene, eller prosesser utført med eller på objektene betegnes som *narrativer,* det vil si påstander som enten er sanne eller usanne. Eksempler på matematiske narrativer kan være «multiplikasjon og divisjon er inverse regneoperasjoner» eller «$4 + 6$ er like mye som $5 + 5$». Narrativer kan enten bli akseptert eller avvist ut i fra regler definert av deltakerne i diskursen. I denne studien vil narrativer både være de hypotesene elevene formulerer i søk etter likheter og ulikheter, og de ytringene som blir anvendt i begrunnelsesprosessen. Elevene arbeider blant annet med en oppgave hvor de skal utforske summen langs diagonalene i tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet. Med utgangspunkt i det generaliserte kvadratet i figur 2.2 kan en narrativ i denne oppgaven for eksempel være hypotesen om at «tallene langs diagonalene får lik sum i alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet».

| | | |
|---|---|---|
| $n-11$ | $n-10$ | $n-9$ |
| $n-1$ | $n$ | $n+1$ |
| $n+9$ | $n+10$ | $n+11$ |

**Figur 2.2: Generalisert kvadrat i hundrerkartet**

I en diskurs blir det også tatt i bruk *rutiner*, det vil si repeterende handlingsmønstre som er karakteristiske for den enkelte diskurs. Ifølge Sfard (2008) kan rutiner beskrives som mønster som følger to typer regler: regler for *hvordan* deltakerne skal handle, og regler for *når* de skal utføre handlingen. Disse reglene kan omtales som *regler på metanivå*. Sfard (2008) skiller mellom *regler på objektnivå* og *regler på metanivå*, der førstnevnte er narrativer om regelmessigheter i hvordan objekter oppfører seg, og sistnevnte er regler som definerer mønster i deltakernes aktivitet når de konstruerer og underbygger (eng: substantiate) narrativer på objektnivå. En regel på objektnivå kan for eksempel være «summen av tallene langs diagonalene i kvadrater i hundrerkartet der $n$ er tallet i midten av kvadratet er lik $(n - 11) + n + (n + 11) = (n - 9) + n + (n + 9)$». Metareglene definerer da aktiviteten med å konstruere og underbygge påstanden, hva som skal til for å gi et gyldig matematisk bevis. Som nevnt i 2.2 er de aksepterte slutningsreglene i deduktiv resonnering metaregler for underbygging av narrativer. I min studie vil regler på objektnivå og metanivå bidra i betraktningen av den diskursive aktiviteten.

Videre kan rutiner ifølge Sfard (2008) deles inn i tre typer: utforskning (eng: explorations), gjerninger (eng: deeds) og ritualer (eng: rituals). *Utforskning* er rutiner som skal produsere en narrativ som kan godkjennes, eller underbygge en narrativ, og på den måten bidra til utvikling av matematisk teori. Utforskende rutiner deles videre inn i tre typer: *konstruksjon*, en diskursiv prosess som resulterer i nye narrativer som kan godkjennes, *underbygging* (eng: substantiation), handlinger som bidrar til å avgjøre om tidligere konstruerte narrativer skal godkjennes eller ikke, og *gjenkalling* (eng: recall), prosessen med å huske og gjenskape en tidligere godkjent narrativ. Videre er rutinen *gjerning* regler for et handlingsmønster som, til forskjell fra utforskning, produserer eller endrer objekter, både fysiske og matematiske, i stedet for narrativer. *Ritual* er en rutine med diskursive handlinger der hovedmålet er å skape og opprettholde et sosialt bånd med andre mennesker. Det skiller seg derfor fra utforskning og gjerning, ved at målet ikke er verken produksjoner av godkjente narrativer eller en endring i objekter.

I min studie undersøker jeg kjennetegn på elevers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering. For meg vil utforskningsrutinene være i fokus, da disse ifølge Sfard (2008) er knyttet til formulering av hypoteser og bevis for disse. Jeg relaterer konstruksjonsrutinene til det Jeannotte og Kieran (2017) omtaler som resonneringsprosesser knyttet til søk etter likheter og ulikheter, og underbyggingsrutiner som resonneringsprosesser knyttet til søk etter validering. Dermed har jeg i denne studien undersøkt utforskende rutiner, med sine metaregler for konstruksjon og underbygging av narrativer.

### 2.3.2 Læring i matematikk

Læring i matematikk blir ansett som en endring i diskurs, altså i måten personer kommuniserer på (Remillard, 2014). Det beskrives som en prosess hvor man går fra å delvis delta i gjennomføring av ulike handlinger, som for eksempel løse matematiske problemer, sammen med andre, til å etter hvert kunne utføre disse handlingene på egen hånd (Sfard, 2008). Denne gradvise overgangen fra å observere andres praksis til å aktivt og selvstyrt kunne delta i diskursen, kaller hun *individualisering* (Sfard, 2006). Sfard (2007) hevder at den matematiske diskursen som læres i skolen er en modifisering av elevenes hverdagsdiskurser, og at læring derfor kan ses på som transformering av disse diskursene, heller enn en oppbygning av en ny diskurs. På den måten blir en vurdering av hva elevene enda har igjen å lære det samme som å undersøke hvilke endringer i kommunikasjon som kreves. Dermed kan en diskursiv utvikling hos elever bli undersøkt gjennom å identifisere transformasjoner i bruken av karakteristiske ord i den matematiske diskursen, bruken av visuelle mediatorer, aksepterte narrativer og rutiner.

Videre skiller Sfard (2012) mellom to typer læring, eller endringer i diskurs: læring på objektnivå og læring på metanivå. *Læring på objektnivå* refererer til en utvidelse av en allerede eksisterende diskurs, gjennom å produsere nye aksepterte narrativer, utvide vokabularet og konstruere nye rutiner. *Læring på metanivå* refererer til en endring i metaregler for diskursen, det vil si at kjente handlinger, slik som for eksempel å identifisere geometriske figurer, gjøres på en annerledes og ukjent måte (Sfard, 2007). Ifølge Sfard (2008) er det lite sannsynlig at elever vil initiere til en endring i diskurs på metanivå. Læring på metanivå krever dermed at eleven møter en ny type diskurs. I tilknytning til matematisk resonnering, kan et slikt møte med en ny diskurs være når elever tidligere har arbeidet ut fra en oppfatning av at empirisk argument er nok for å validere hypoteser, men så møter en lærer som krever bevis for hypotesen. Ettersom den nye diskursen har andre og ukjente metaregler enn de eleven kjenner fra før, vil dette møtet kunne føre til en *kommognitiv konflikt*. En slik konflikt er en situasjon der kommunikasjonen blir hindret fordi deltakerne i diskursen handler ut ifra ulike metaregler, som for eksempel at de aksepterer motsigende narrativer.

I min studie undersøker jeg noen elevers deltakelse i den diskursive aktiviteten med matematisk resonnering. Jeg beskriver kun et øyeblikksbilde av den diskursive aktiviteten som foregår i det tidsrommet som er rammen for studien. Dermed kan jeg ikke beskrive den læringen som finner sted, altså jeg kan ikke undersøke den diskursive utviklingen hos elevene. Studien gir heller et innblikk i hvordan disse elevene arbeider med den diskursive aktiviteten med matematisk resonnering.

## 2.4 Modell for matematisk resonnering

For å kunne undersøke kjennetegn ved elevers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering, ser jeg det som hensiktsmessig å identifisere ulike aktiviteter og prosesser som inngår i konstruering og godkjenning av narrativer. Jeannotte og Kieran (2017) har, som nevnt innledningsvis, utarbeidet en modell for matematisk resonnering i skolen, der de definerer matematisk resonnering som en kommunikasjonsprosess med andre eller seg selv, som tillater å avlede matematiske narrativer fra andre matematiske narrativer (s. 7). I rammeverket defineres matematisk resonnering både ut fra et strukturelt aspekt og et prosessaspekt, to aspekter som er nært relatert. I min studie undersøker jeg begge disse aspektene, fordi begge kan gi informasjon om kjennetegn ved elevers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering. Jeg har valgt å støtte meg til Toulmin (2003) i undersøkelsen av resonneringens struktur, og vil derfor ikke gå i dybden av strukturaspektet i Jeannotte og Kierans (2017) rammeverk.

### 2.4.1 Prosessaspekter

For å beskrive den midlertidige naturen til matematisk resonnering, har Jeannotte og Kieran (2017) utarbeidet prosessaspektet som en sentral del av modellen. Prosessaspektet defineres som kommognitive prosesser som er metadiskursive, det vil si at prosessene avleder narrativer om objekter og relasjoner gjennom å utforske relasjoner mellom objektene. De narrativene som konstrueres er altså på objektnivå, og kan for eksempel være en narrativ om at summen av tre påfølgende tall er delelig med tre. Til forskjell er prosessene styrt av regler på metanivå, og kan eksempelvis være metaregler for underbygging av narrativer. Jeannotte og Kieran (2017) har ut ifra forskningslitteraturen identifisert ni ulike prosesser knyttet til matematisk resonnering. Fem av prosessene er relatert til *søk etter likheter og ulikheter*, og utgjør én av to kategorier knyttet til dette aspektet. Prosessene i denne kategorien avleder narrativer om matematiske objekter eller relasjoner, og er på den måten relatert til Sfards (2008) konstruksjonsrutiner. Tre av prosessene er relatert til kategorien *validering* og disse prosessene har til hensikt å endre den epistemiske verdien til en gitt narrativ. På den måten er de relatert til Sfards (2008) underbyggingsrutiner. Den siste prosessen, *eksemplifisering*, kan klassifiseres som en del av begge kategoriene, da den støtter de gitte prosessene. I min studie vil disse ni prosessene være en del av analyseverktøyet jeg bruker for å identifisere kjennetegn ved to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering. I tabell 2.1 vil jeg utdype om prosesser knyttet til søk etter likheter og ulikheter, før jeg så utdyper om prosesser relatert til søk et validering i tabell 2.2. Videre vil jeg i tabell 2.3 utdype om resonneringsprosessen eksemplifisering.

Prosessene som er relatert til søk etter likheter og forskjeller avleder altså narrativer om objekter eller relasjoner mellom objekter. I tillegg tilordnes én av prosessene, *formulering av hypoteser*, en epistemisk verdi. En slik narrativ kan eksempelvis være at «summen av tre påfølgende tall alltid er delelig med tre». Denne narrativen har en epistemisk verdi fordi den er sannsynlig, og kan enten aksepteres eller ikke aksepteres. Prosessene som er relatert til validering defineres som prosesser med formål om å endre den epistemiske verdien til en matematisk narrativ (Jeannotte & Kieran, 2017). Med *epistemisk verdi* mener altså Jeannotte og Kieran (2017) sannsynligheten eller sannheten til narrativen. De ni prosessene er beskrevet separat, men likevel nært relatert fordi de både stimulerer og påvirker hverandre, og skaper på den måten en mer kompleks matematisk diskurs når det avledes nye narrativer om allerede eksisterende diskursive objekter.

**Tabell 2.1: Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter**

| Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter | | |
|---|---|---|
| **Prosess** | **Definisjon** | **Utdyping av begrepene** |
| Generalisering | *Generalisering* defineres som en prosess som slutter narrativer om en mengde matematiske objekter, eller om en relasjon mellom objekter i mengden, fra en delmengde av denne mengden (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 9). | Å formulere en narrativ som sier noe om flere tilfeller enn de som generaliseringen bygger på. |
| Formulering av hypoteser (eng: conjecturing) | *Formulering av hypoteser* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter likheter og ulikheter, slutter en narrativ om noen regelmessigheter som har en sannsynlig eller mulig epistemisk verdi, og som har potensiale for matematisk teoretisering (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). | For at hypotesen skal aksepteres som sann eller usann, er det behov for en eller flere av de andre resonneringsprosessene.<br><br>Formulering av hypoteser er den eneste prosessen relatert til søk etter likheter og ulikheter som har en epistemisk verdi knyttet til seg. På den måten skiller den seg fra generaliseringsprosessen. |
| Identifisering av mønster | *Identifisering av mønster* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter likheter og ulikheter, slutter en narrativ om en rekursiv relasjon mellom matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 10). | Identifisering av mønster skiller seg fra formulering av hypotese og generalisering gjennom at man kan identifisere et mønster som er anvendelig på noen tilfeller, uten at den utvides til å gjelde alle tilfeller. |

| | | |
|---|---|---|
| Sammenligning | *Sammenligning* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter likheter og ulikheter, slutter en narrativ om matematiske objekter eller relasjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). | Sammenligning av ulike eksempler vil kunne være nødvendig for å formulere en hypotese. Sammenligning oppstår gjerne sammen med andre resonneringsprosesser. For eksempel fremtvinger identifisering av mønster en sammenligning av tilfeller eller eksempler for å tydeliggjøre mønsteret. |
| Klassifisering | *Klassifisering* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter likheter og ulikheter mellom matematiske objekter, slutter en narrativ om en klasse objekter basert på matematiske egenskaper og definisjoner (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11). | Klassifisering kan assosieres med sammenligning, formulering av hypoteser og generalisering. Dette fordi prosessen søker å skille mellom og beskrive egenskaper i ulike tilfeller, noe som også er en del av sammenligning og generalisering.<br><br>Prosessen tillater utvikling på objektnivå fordi det setter sammen eller adskiller ulike diskursive objekter, og strukturerer på den måten diskursen. |

**Tabell 2.2: Prosesser relatert til søk etter validering**

| Prosesser relatert til søk etter validering | | |
|---|---|---|
| **Prosess** | **Definisjon** | **Utdyping av begrepene** |
| Begrunnelser (eng: justifying) | *Begrunnelser* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter data, hjemmel og ryggdekning, tillater en å modifisere den epistemiske verdien til en narrativ (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12). | Begrunnelse som prosess er assosiert med to typer epistemiske passasjer. Den første er relatert til begrunnelse for en hypotese som tillater en endring i epistemisk verdi fra sannsynlig til mer sannsynlig. Den andre er relatert til en validering som endrer den epistemiske verdien fra sannsynlig til sann eller usann. |
| Bevis (eng: proving) | *Bevis* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter data, hjemmel og ryggdekning, modifiserer den epistemiske verdien til en narrativ fra sannsynlig til sann. Denne prosessen er begrenset av:<br><br>i) narrativene som er akseptert av klassefellesskapet (settet aksepterte narrativer), som er sanne (fra en matematikers synspunkt) og tilgjengelig uten videre begrunnelse<br>ii) en endelig restrukturering som har en deduktiv natur<br>iii) realiseringene (i Sfards, 2008, s. 301 betydning) er passende og kjent, eller tilgjengelig for klassen<br><br>(Jeannotte & Kieran, 2017, s. 12-13) | I Sfards (2008) betydning, er realisering noe som kan sanses og som brukes for å representere noe annet. Et addisjonsstykke kan realiseres gjennom for eksempel symboler eller konkreter.<br><br>Bevis er knyttet til modifisering av den epistemiske verdien fra sannsynlig til sann.<br><br>Bevis skiller seg fra begrunnelser fordi det må restruktureres deduktivt og bygge på en mengde narrativer som er akseptert i «ekspert»-diskursen. Eksperten kan for eksempel være læreren. |

| | | |
|---|---|---|
| Formelle bevis | *Formelle bevis* defineres som en prosess som, ved hjelp av søk etter data, hjemmel og ryggdekning, modifiserer den epistemiske verdien til en narrativ fra sannsynlig til sann. Denne prosessen er begrenset av:<br><br>i) narrativene som er akseptert av klassefellesskapet (settet med aksepterte narrativer), som er sanne (fra en matematikers synspunkt) og systematisert i en matematisk teori<br>ii) en endelig deduktiv restrukturering<br>iii) realiseringer som er formalisert og akseptert av klassen og matematikerfellesskapet<br><br>(Jeannotte & Kieran, 2017, s. 13) | Til forskjell fra bevis, bygger formelle bevis på allerede eksisterende matematisk teori og formaliserte realiseringer som aksiomer og teoremer. En konsekvens av dette er at generiske eksempler ikke kan aksepteres som formelle bevis. |

**Tabell 2.3: Eksemplifisering som resonneringsprosess**

| Eksemplifisering | | |
|---|---|---|
| **Prosess** | **Definisjon** | **Utdyping av begrepene** |
| Eksemplifisering | *Eksemplifisering* defineres som en prosess som støtter andre MR-prosesser gjennom å uttrykke eksempler som hjelper til med:<br><br>i) søk etter likheter og ulikheter<br>ii) søk etter validering<br><br>(Jeannotte & Kieran, 2017, s. 14) | Eksemplifisering tillater å avlede data om et problem. Disse dataene kan igjen brukes i søket etter likheter og ulikheter i mønster og relasjoner, i tillegg til i valideringsprosessen. På den måten genererer eksemplifisering elementer som er nyttig i generalisering, formulering av hypoteser og i validering. |

I min studie har jeg valgt å gi elevene to oppgaver knyttet til hundrerkartet. Oppgavene vil presenteres nærmere i kapittel 3, men jeg vil bruke én av de to oppgavene i dette kapittelet for å belyse prosessaspektet i rammeverket til Jeannotte og Kieran (2017). Figur 2.3 brukes som støtte. Elevene i denne studien har undersøkt relasjonen mellom tallene langs diagonalene i et tre-ganger-tre-kvadrat i et hundrerkart. De kan sies å undersøke uttrykket $(n-11)+n+(n+11)=(n+9)+n+(n-9)$, der $n$ er tallet i midten av kvadratet.

| | A | | | | | | | B | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Figur 2.3: To eksempelvalg av tre-ganger-tre-kvadrater**

Når elevene undersøker kvadrat A og kvadrat B, og sier at $1+12+23=3+12+21=36$ og $8+19+30=10+19+28=56$, er det *eksemplifisering.* Dette fordi de avleder data om problemet, som igjen kan brukes som støtte i prosesser knyttet til søk etter likheter og ulikheter og prosesser knyttet til validering.

Elevene kan gjøre en *sammenligning* av de to eksemplene A og B, og basert på sammenligningen konstruere en narrativ om at alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet vil ha diagonaler med lik sum. Dersom de tilordner denne narrativen en sannsynlig epistemisk verdi, har de gjort en *formulering av hypotese*. Videre kan elevene oppdage i kvadrat A at dersom de subtraherer $2$ fra $23$, og adderer de på $1$, vil de to diagonalene bli bestående av de samme addendene. Dersom de ved hjelp av en *sammenligning* mellom kvadrat A og kvadrat B ser at det samme gjelder for kvadrat B, og dermed konstruerer en narrativ om at denne relasjonen kan se ut til å gjelde alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet, gjør de en *generalisering*. Elevene kan også oppdage i kvadrat A at man i den ene diagonalen adderer $1+2+3+10+20$ og i den andre diagonalen adderer $3+2+1+10+20$, altså de samme tallene. Dersom de så påpeker at det samme skjer i eksempelvis to andre kvadrater, kan de sies å ha å gjort en *identifisering av mønster*. Dette fordi mønsteret ikke generaliseres, men er anvendelig på noen eksempler. Gjennom å sammenligne mønsteret i kvadrat A med kvadrat B, vil de oppdage at det ikke stemmer for dette kvadratet. Dermed kan de gjøre en *klassifisering* av kvadrater med denne egenskapen, og kvadrater uten denne egenskapen.

Dersom elevene har formulert en hypotese om at alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet har diagonaler med lik sum, kan de videre teste hypotesen på flere eksempler og finne at hypotesen også stemmer for disse. De kan så gi en *begrunnelse* i form av et empirisk argument, men den epistemiske verdien vil ikke kunne endres til sann eller usann. For å kunne endre den epistemiske verdien til sann, må hypotesen blant annet kunne *bevises*, slik Jeannotte og Kieran (2017) definerer bevis og formelle bevis, ved å oppfylle de tre kriteriene. Elevene kan for eksempel ta utgangspunkt i kvadrat A, og vise at de er kjent med narrativen om additive inverser, og bruke dette for å vise at tallene langs den ene diagonalene kan «jevnes ut» slik at de får like addender som tallene langs den andre diagonalen. De kan påpeke at $23$ er to mer enn $21$ og at $3$ er to mer enn $1$, og at additive inverser dermed kan brukes for å forflytte to fra $23$ til $1$, slik at de også i den diagonalen blir stående igjen med tallene $3$ og $21$. Da kan de uttrykke at $1 + 23 = 1 + 23 + (2 - 2) = (1 + 2) + (23 - 2) = 3 + 21$. Videre kan de påpeke at disse egenskapene ikke er spesielle for kvadrat A, men gjelder generelt for alle tre-ganger-tre-kvadrater. De fremhever så at de alltid kan «forflytte» to innad langs tallene i én av diagonalene slik at addendene blir like det tallene i den andre diagonalen. Fordi de har bygd argumentet på en kjent narrativ, hatt en deduktiv restrukturering og benyttet seg av realiseringer som er kjent for elevene, kan de sies å ha gitt et bevis, i dette tilfellet et generisk argument.

Et formelt bevis for hypotesen er ikke forventet i denne studien, og jeg vil derfor ikke redegjøre for det her. I kapittel 3.4 om oppgaven gitt til elevene, presenterer jeg en mulig måte å arbeide med oppgaven på som kan anses som et formelt bevis fordi det bygger på aksepterte narrativer om additive inverser og identitetselement.

### 2.4.2 Strukturaspekter

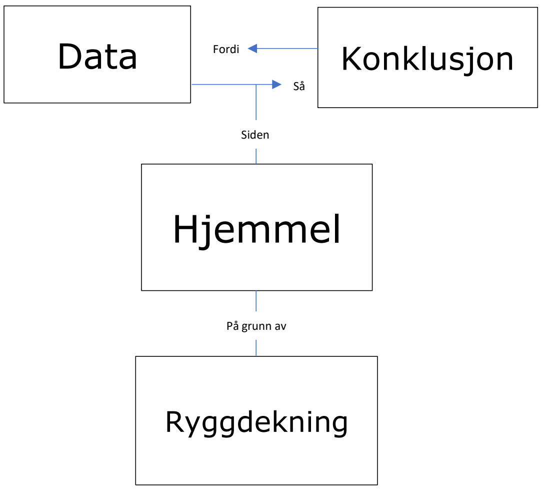
Det strukturelle aspektet i matematisk resonnering er knyttet til hvilken form en spesifikk resonnering har, altså måten den er uttrykt på. Fra et kommognitivt standpunkt markerer strukturaspektet konstruksjonsreglene i den matematiske diskursen, samt dens ulike elementer. Jeannotte og Kieran (2017) skiller mellom tre strukturelle former en resonnering kan ha: deduktiv, induktiv og abduktiv. Deduktiv resonnering er omtalt i 2.2.1, og vil ikke utdypes her. *Induktiv resonnering* involverer en utforskning av flere tilfeller, der man etter hvert observerer et mønster eller egenskaper som går igjen for tilfellene. Det blir så formulert en påstand som gjelder for alle tilfeller med samme egenskaper, som deretter forsøkes å rettferdiggjøres (Pedemonte & Reid, 2010). *Abduktiv resonnering* skiller seg fra induktiv resonnering ved at man, slik jeg tolker det, starter med en matematisk påstand med en mulig epistemisk verdi, som man deretter forsøker å finne en forklaring på (Pedemonte & Reid, 2010). I denne prosessen avledes det et eksempel. I neste kapittel skal jeg gå nærmere inn på hvordan jeg undersøker strukturaspektet i denne studien.

## 2.5 Toulmins analytiske rammeverk for argumentasjon

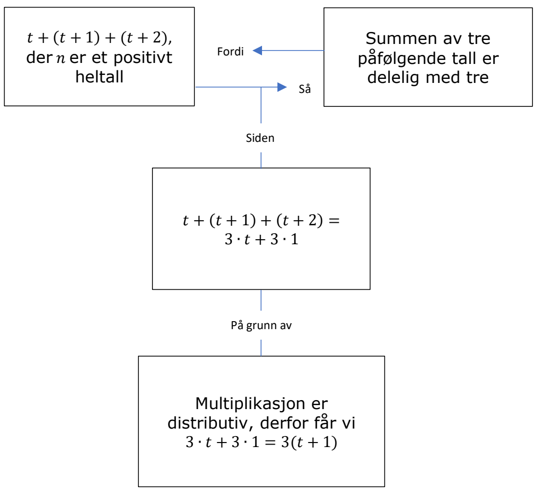
For å få oversikt over strukturen i elevenes matematiske begrunnelser har jeg valgt å benytte meg av Toulmin (2003) sin modell for argumentasjon. Modellen var opprinnelig utviklet for å analysere argumenter på tvers av fagfelt, men har i senere år blitt mye brukt innenfor det matematikkdidaktiske forskningsfeltet (Simpson, 2015) i undersøkelser av elevers matematiske argumentasjon på alle alderstrinn i skolen (se f.eks. Evens & Houssart, 2004; Knipping & Reid, 2015; Krummheuer, 1995). Toulmins (2003) opprinnelige intensjon var å utforske og strukturere ferdige argumenter, og ikke argumentasjonsprosessen. Krummheuer (1995) har senere videreutviklet modellen til å kunne anvendes i analyse av undervisningssituasjoner i matematikk, og det er hans videreutvikling av modellen jeg vil bruke i denne studien. Videre bruker Jeannotte og Kieran (2017) begreper fra Toulmins (2003) rammeverk når de beskriver prosesser relatert til søk etter validering. Derfor opplevde jeg Toulmin (2003) som et hensiktsmessig valg i arbeidet med å identifisere kjennetegn ved elevers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering. I tillegg gir det meg en oversikt over de ulike begrunnelsene elevene gir.

Før jeg skal gå inn på modellens innhold, ser jeg det som hensiktsmessig å redegjøre kort for skillet mellom begrepene argumentasjon og argument. Krummheuer (1995) skiller på disse, og omtaler *argumentasjon* som det å overbevise seg selv og andre med sitt eget resonnement. Det innebærer å bruke noen metoder eller teknikker for å etablere en påstand. Slik jeg tolker det blir argumentasjon her knyttet til resonneringsprosesser i søk etter validering. Videre omtaler Krummheuer (1995) et *argument* som den endelige sekvensen med narrativer som er akseptert av de andre deltakerne i interaksjonen. På den måten blir argumentet et resultat, eller produktet, av argumentasjonsprosessen. I min studie anser jeg argumentasjon slik Krummheuer (1995) beskriver det, som de resonneringsprosessene Jeannotte og Kieran (2017) omtaler som søk etter validering. Videre vil jeg anse et argument som sammensetningen av narrativer som er formulert for å underbygge en hypotese. Det er argumentene til elevene, slik jeg har sammenfattet prosessen deres, jeg har analysert ved hjelp av Toulmin (2003).

Modellen til Toulmin (2003) består opprinnelig av seks elementer. Ettersom jeg i denne studien undersøker elever på mellomtrinnet sin matematiske resonnering, holder jeg meg til Krummheuers (1995) tradisjon og fokuserer på det han omtaler som kjernen til et argument. Kjernen inkluderer disse fire elementene av modellen: *konklusjon* (eng: claim), K, og *data*, D, som konklusjonen baserer seg på, *hjemmel* (eng: warrant), H, som knytter data til konklusjonen, og *ryggdekning* (eng: backing), R, som er en videre begrunnelse til hjemmelen. I en argumentasjonsprosess vil det nødvendigvis bli formulert en påstand, en konklusjon som danner målet for argumentasjonen og som enten aksepteres eller avvises av deltakerne i diskursen (Krummheuer, 1995). Påstanden alene kan ikke regnes som et argument, og Toulmin (2003) hevder derfor at data må produseres for at det skal kunne kalles et argument. Fra denne dataen kan det da trekkes en intuitiv slutning til konklusjonen, og relasjonen mellom data og konklusjon kan symboliseres som «K, fordi D» eller «D, så K» (Krummheuer, 1995), se figur 2.4. Et eksempel på dette kan være «Summen av tre påfølgende tall kan alltid deles på 3 fordi $3 + 4 + 5 = 15$, og 15 kan deles på 3» eller «Fordi $3 + 4 + 5 = 15$ og 15 kan deles på 3, så kan summen av tre påfølgende tall alltid deles på 3». Når de andre deltakerne i diskursen ikke kjenner igjen eller aksepterer den intuitive slutningen, kreves det en hjemmel for å gjøre argumentet overbevisende (Van Ness & Maher, 2019). Hjemmel er en generell, hypotetisk narrativ som danner en link mellom data og konklusjonen, og på den måten fungerer som en bro for den intuitive slutningen (Toulmin, 2003). Relasjonen mellom de tre elementene kan da symboliseres som «D, siden H så K». Eksempel på dette kan ta utgangspunkt i at alle tall som er delelig med tre kan uttrykkes som $3 \cdot et\ positivt\ heltall$ og alle tre påfølgende tall kan uttrykkes som $t + (t + 1) + (t + 2) = 3 \cdot t + 3 \cdot 1$, der $t$ er et positivt heltall. Ettersom multiplikasjon er distributiv, er $3 \cdot t + 3 \cdot 1 = 3(t + 1)$, og dermed kan summen av tre påfølgende tall alltid deles på tre for alle $t$ fordi det er på formen $3 \cdot et\ positivt\ heltall$. Dataen sin oppgave i denne relasjonen er å styrke grunnlaget til argumentet, og valg av data avhenger derfor av valg av hjemmel. I noen tilfeller kan det også oppstå tvil om hjemmelen, og det kreves enda en narrativ som kan gi ryggdekning til hjemmelen. Ryggdekningen alene har ikke noen verdi for argumentet, og oppstår derfor kun sammen med en hjemmel (Krummheuer, 1995). Ofte tar ryggdekningen form som antakelser som tidligere har blitt akseptert av de andre i diskursen, og trenger derfor ikke noen videre ryggdekning (Van Ness & Maher, 2019). I eksempelet over, kan en slik ryggdekning for eksempel være at multiplikasjon er distributiv. I figur 2.4 er Krummheuers (1995) modell blitt gjengitt og viser visuelt hvordan et argument kan struktureres og relasjonen mellom de ulike elementene. Videre inkluderer jeg eksempelet vist over i et tilsvarende argument i figur 2.5. Denne modellen danner utgangspunkt for den analysen jeg presenterer i det neste kapittelet.




**Figur 2.4: Krummheuers (1995) modell for argumenters struktur**




**Figur 2.5: Eksempel på hvordan et argument kan struktureres i modellen**

Ettersom matematikkundervisning har en sosial natur, vil det i en elevgruppe kunne observeres en utvikling av argumenter som blir utført av flere elever samtidig. Dette kalles et kollektivt argument, og foregår gjerne ved at elevene forhandler, korrigerer, modifiserer og skifter ut elementer i argumentet underveis (Krummheuer, 1995). Prosessen frem mot et ferdig argument kan derfor ikke analyseres bare ved å undersøke en sekvens med utsagn, men det må også tas hensyn til utsagnenes funksjon i interaksjonen mellom elevene for at argumentasjonen skal gi mening. Med dette menes at data, hjemler og ryggdekninger ikke er forhåndsbestemte, men blir forhandlet om underveis i argumentasjonsprosessen (Yackel, 2002). Hvordan et argument blir utviklet, utdypet eller restrukturert er i en kollektiv argumentasjon sosialt motivert, fordi elevene forsøker å hjelpe andre til å se sitt synspunkt, og fordi de andre deltakerne i interaksjonen utfordrer utsagnene som dukker opp (Whitenack & Knipping, 2002). Flere studier har påpekt hvordan sosial interaksjon kan både være til hjelp og til hinder for progresjon i matematiske samtaler (se f.eks. Balacheff, 1991; Cobb, 1995; Voigt, 1995). Blant annet påpeker Balacheff (1991) at den sosiale interaksjon kan stagnere progresjon når elevene ikke klarer å koordinere ulike synspunkt eller overkomme konflikter som oppstår i den kollektive argumentasjonen.

I min studie undersøker jeg kjennetegn ved to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering, og vil derfor se på deres resonnering som en kollektiv argumentasjon i en sosial interaksjon.

# 3 Metode

I denne studien har jeg undersøkt forskningsspørsmålet «hva kjennetegner to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering?». For å kunne svare på dette, har jeg observert to elevgrupper i arbeid med generalisert aritmetikk i hundrerkartet. Datamaterialet har så blitt analysert ved hjelp av rammeverkene til Jeannotte og Kieran (2017) og Toulmin (2003). I dette kapittelet starter jeg med å redegjøre for valg av kvalitativ tilnærming til studien, før jeg beskriver metode for datainnsamling, utvalg og oppgaven gitt til elevene. Videre vil jeg utdype om erfaringer fra pilotstudien og beskrive gjennomføring av datainnsamlingen, før jeg redegjør for metode for analyse. Jeg vil avslutte med å greie ut om troverdighet i forskning og etiske betraktninger.

## 3.1 En kvalitativ tilnærming

I denne studien har målet vært å gå i dybden på elevenes matematiske resonnering. Det har derfor vært hensiktsmessig for meg å velge en kvalitativ tilnærming til studien. Ifølge Bogdan og Biklen (2007) er formålet med kvalitative studier å undersøke kontekst-spesifikke fenomener i detalj, for å kunne utvikle begreper og forståelse for fenomenet. Forskningsdeltakerne blir satt i fokus, og det er deres meninger, oppfatninger, handlinger, holdninger, intensjoner og væremåter som blir undersøkt i dybden. Som en metodologisk konsekvens av kommognisjon som overordnet ramme for studien, er det elevenes diskursive aktivitet, slik den praktiseres av elevene, som analyseres. Det vil si at det er forskningsdeltakernes handlinger og utsagn som er i fokus, altså den kommunikasjonen som kan sees og høres. For å få tilgang på denne kommunikasjonen må jeg som forsker ha en nærhet til forskningsdeltakerne som kun kan oppnås gjennom en kvalitativ tilnærming. Kommunikasjonen må bli observert i detalj og gjengitt med nøyaktighet (Sfard, 2008), og observasjon blir derfor et hensiktsmessig metodevalg.

Som jeg har redegjort for i kapittel 2.3.2 handler læring i et kommognitivt perspektiv om å kunne kommunisere med seg selv og andre. Det er knyttet til en endring i måten individet kommuniserer på (Sfard, 2012). Ettersom kommunikasjon med seg selv, altså tenkning, er vanskelig å observere, vil jeg i denne studien observere den kommunikasjonen som foregår mellom elevene og meg. På den måten vil jeg få innsikt i elevenes deltakelse i den diskursive aktiviteten med matematisk resonnering slik den foregår i det tidsrommet datainnsamlingen blir gjort. Det betyr at studien ikke kan beskrive elevenes læring, men heller gi et øyeblikksbilde av deres arbeid med matematisk resonnering.

## 3.2 Deltakende observasjon

Med kommognisjon som utgangspunkt ble observasjon et nødvendig metodevalg for datainnsamling, da en diskurs nødvendigvis må observeres for å kunne studeres. Etter erfaringer fra pilotstudien, som jeg skal utdype i kapittel 3.4.3, ønsket jeg å gjennomføre en deltakende observasjon. Dette fordi elevene i studien er relativt uerfarne med å skulle resonnere og argumentere i matematikk. Jeg så det som hensiktsmessig å ta del i diskusjonene for å sikre at samtalene gjennomgående var diskusjoner innenfor matematisk resonnering.

Deltakende observasjon er en mye brukt metode i kvalitative studier (Christoffersen & Johannessen, 2012). Observasjon er en prosess der det samles inn førstehånds informasjon gjennom å observere mennesker og steder på et bestemt forskningsfelt (Creswell, 2008) og gir blant annet mulighet til å samle data på interaksjoner som finner sted (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Som metode for datainnsamling har observasjon både styrker og utfordringer. Styrkene ligger først og fremst i muligheten til å samle inn førstehånds data i sosiale situasjoner, som potensielt kan gi mer valide og autentiske data (Cohen et al., 2018). I tillegg gir observasjon rik informasjon om kontekst, den kan avsløre hverdagslige rutiner og aktiviteter, og dokumentere aspekter ved livsverdenen som er både verbale, ikke-verbale og fysiske (Clark, Holland, Katz & Peace, 2009). Utfordringer med observasjon er knyttet til måling av observasjonene, lite utvalg, vansker med å få adgang i observasjonssettingen og vansker med å opprettholde anonymiteten til de som observeres (Bailey, 1994).

Jeg har i min studie inntatt rollen Gold (1958) omtaler som deltakende observatør. Som *deltakende observatør* er forskeren en del av miljøet som observeres og deltakerne er kjent med at de blir observert. Rollen er særlig egnet for å studere små grupper og gir mulighet til å dokumentere inntrykk, samtaler og atferd og observasjoner (Christoffersen & Johannessen, 2012). I min studie var ønsket å observere kjennetegn ved to elevgruppers deltakelse i matematisk resonnering. For å sikre framdrift og at samtalene involverte matematisk resonnering, så jeg det som hensiktsmessig å være deltakende observatør. Som deltaker i observasjonen begrenset jeg meg til å stille spørsmål som initierte til resonnering underveis. Det vil si at jeg unngikk å drive noen form for undervisning eller belæring, sett bort ifra oppklaring av matematiske begreper inkludert i oppgaveteksten. Målet var altså å tilrettelegge for matematisk resonnering hos elevene.

Videre kan en observasjon befinne seg på et kontinuum fra strukturert til ustrukturert. Ved en *strukturert observasjon* er det nøye planlagt i forkant hva forskeren ser etter, og forskeren går inn i situasjoner med et selektivt blikk. I *ustrukturert observasjon* går forskeren inn i en situasjon og observerer hva som skjer, før det i etterkant blir bestemt hva som er signifikant for studien (Cohen et al., 2018). I min studie var det viktig å få innblikk i den kommunikasjonen som foregikk i sin helhet. En strukturert observasjon ville dermed ikke gitt meg rike nok beskrivelser av interaksjonen mellom elevene og meg. Likevel gir forskningsspørsmålet mitt en retning for datainnsamlingen som gjorde det nødvendig for meg å følge opp den diskursive aktiviteten til elevene, da målet var å studere deres arbeid med resonnering, og kan dermed ikke omtales som en ustrukturert observasjon. Derfor anser jeg min studie som å befinne seg en plass på kontinuumet mellom strukturert og ustrukturert observasjon.

For å få et mest mulig grundig innblikk i elevenes deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering valgte jeg å ta i bruk video- og lydopptak. Sfard (2008) fremmer at en kommognitiv forsker burde i sin analyse se diskursen utenfra, i tillegg til å se den innenfra underveis i datainnsamlingen. Hun påpeker at video- og lydopptak kan være nyttige hjelpemidler til dette, da de åpner for muligheten til å se hendelsene på nytt, og på den måten oppnå nye perspektiver på diskursen. Resonnering kan oppnås gjennom mer enn bare muntlige og skriftlige ord. Det kan oppnås gjennom gester, mimikk, tegninger og symboler (Nordin & Boistrup, 2018), og derfor så jeg det som nødvendig å ta videoopptak av elevene i min studie. I tillegg har jeg valgt en oppgave hvor mye av datamaterialet består av peking med 'her' og 'der' som referanser. For å i ettertid kunne identifisere hvilke tall og kvadrater i hundrerkartet elevene refererte til, var det helt nødvendig for meg å ha et videoopptak å se tilbake på. For å sikre tilstrekkelig god lyd ble det i tillegg tatt lydopptak.

Bruken av videokamera kan også by på utfordringer, eksempelvis fenomenet *reactivity.* Det omhandler at mennesker kan oppleve det å bli filmet som ubehagelig, og av den grunn endre atferd i situasjonen. I verste fall kan det føre til at datamaterialet i mindre grad representerer virkeligheten (Jewitt, 2012). Jeg valgte til tross for denne risikoen å anvende videokamera fordi jeg opplevde det som nødvendig for å kunne samle inn rikt nok datamateriale til å svare på forskningsspørsmålet. Med bakgrunn i viten om at deltakerne tidligere hadde deltatt i forskning med bruk av videoopptak og da var vant med å bli filmet, vurderte jeg det dit hen at risikoen var lavere for reactivity enn dersom elevene aldri hadde vært i en lignende situasjon. Bruk av teknologiske hjelpemidler har også etiske utfordringer, noe jeg diskuterer nærmere i kapittel 3.9.

## 3.3 Utvalg

Innsamlingen av data til denne studien ble gjort på et 7.trinn ved en barneskole i en større norsk by. Ettersom jeg i utgangspunktet hadde en interesse for flerspråklige elever, ble dette en viktig faktor i søket etter en aktuell skole. Senere har det flerspråklige perspektivet blitt mindre fremtredende i studien, og vil derfor ikke vektlegges i stor grad. Jeg kom i kontakt med en lærer som jobber ved en skole med en stor andel elever med flerspråklig bakgrunn. Etter å ha vært i snakk med denne læreren, ble jeg satt i kontakt med en annen lærer ved 7.trinn på samme skole som var interessert i prosjektet mitt. Etter klarsignal fra ledelsen på skolen, ble informasjonsskriv og samtykkeskjema sendt ut til alle elevene og foreldrene i hennes klasse. Åtte av elevene i klassen ønsket å delta i prosjektet og fikk dermed mulighet til det. Læreren delte elevene tilfeldig inn i to grupper med fire elever i hver. Ettersom en av elevene som hadde takket ja var syk de dagene jeg hadde datainnsamling, ble utvalget bestående av fire informanter på gruppe 1 og tre informanter på gruppe 2. Gruppe 1 bestod av de to flerspråklige elevene Rina og Marlon og de to norskspråklige elevene Even og Adrian. Gruppe 2 bestod av de tre flerspråklige elevene Zahra, Emran og Daria. Alle navnene er pseudonymer.

I dagene før datainnsamlingen var jeg sammen med klassen i matematikkundervisningen, slik at elevene fikk mulighet til å bli kjent med meg og venne seg til at jeg var der. Slik reduserte jeg risikoen for at elevene ville forstyrres av min tilstedeværelse (Cohen et al., 2018). Læreren i denne klassen var opptatt av at elevene skulle snakke matematikk, og elevene var derfor ikke ukjent med å samtale om og i matematikk.

## 3.4 Oppgaven gitt til elevene

Når jeg i denne studien undersøker kjennetegn ved elevers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering, var jeg avhengig av å finne oppgaver som førte til arbeid med resonneringsprosesser relatert til både søk etter likheter og ulikheter, og søk etter validering. Jeg ønsket dessuten å benytte oppgaver som er enkle nok til at elevene kunne løse dem med den kompetansen de var forventet å ha, altså grunnleggende kompetanse i de fire regneartene. Oppgaven som ble gitt til elevene ble utarbeidet etter inspirasjon fra ulike oppgavevarianter i hundrerkartet, publisert på ulike nettsider[1], og kan ses i figur 3.1 under. Matematikken i oppgaven er knyttet til grunnleggende aritmetikk, og oppgaven er formulert med hensikt om å initiere til matematisk resonnering. Formuleringen «hva legger dere merke til?» var ment å få elevene til å sette ord på sammenhenger og mønster i hundrerkartet. Videre var oppfølgingsspørsmålet «vil det alltid være slik?» ment for å oppfordre til formulering av hypoteser og begrunnelser. Ettersom jeg inntok en rolle som deltakende observatør i samtalen med elevene, ble spørsmålene stilt muntlig av meg. Da hadde jeg også mulighet til å følge opp hypotesene med å spørre «hvorfor er det alltid slik?», med formål om at elevene da ytterligere skulle begrunne hypotesene sine. Oppgaven inneholder dessuten begrepene *kvadrat*, *diagonal* og *gjennomsnitt*, som alle er begreper jeg forventet at elevene hadde kjennskap til. Likevel anså jeg det som viktig at begrepene ble redegjort for i oppstarten av arbeidet med oppgavene, slik at det ikke skulle være tvil om hva oppgaven ba elevene gjøre.

## Oppgaver i hundrerkartet

Velg dere et kvadrat i hundrerkartet med areal 3 · 3 ruter. Marker tallet i midten og de fire hjørnene i kvadratet.

a. Legg sammen de to diagonalene i kvadratet og sammenlign resultatet. Hva legger dere merke til? Vil det alltid være slik?

b. Finn gjennomsnittet til de fire tallene i hjørnene. Hva legger dere merke til? Vil det alltid være slik?

Hundrerkart:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Figur 3.1: Oppgaven gitt til elevene**

[1] Se for eksempel:
https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/product/Undersøkende%20matematikkundervisning.pdf
https://singaporemathtraining.com/media/hundreds_magic.pdf

For bedre lesbarhet vil jeg i omtalen av oppgavene skrive oppgave A og B i stedet for a. og b., altså med store bokstaver i stedet for små. I det videre vil jeg gi noen eksempler på hvordan elevene kan tenkes å arbeide med oppgavene.

Begge oppgavene legger opp til at elevene skal velge seg et tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet, for så å følge oppgaveinstruksen. I oppgave A skal de altså addere tallene langs diagonalene og sammenligne summene. I oppgave B skal de finne gjennomsnittet av tallene i hjørnene og se hva de legger merke til, med mål om å oppdage at gjennomsnittet er likt tallet i midten. Jeg forventet at elevene i arbeid med begge oppgavene ville oppdage sammenhengene de undersøkte i de valgte eksemplene. Med bakgrunn i spørsmålet 'vil det alltid være slik?' forventet jeg så at de formulerte en hypotese ut ifra oppdagelsene de hadde gjort. For oppgave A kan hypotesen være at alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet vil ha diagonaler med lik sum. For oppgave B kan hypotesen være at gjennomsnittet av tallene i hjørnene på alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet er likt tallet i midten av kvadratet. Ettersom elevene kan antas å være uerfarne med matematisk argumentasjon og bevis, forventet jeg at de ville teste hypotesen på flere eksempler og undersøke mønstre og likheter på tvers av eksempler. Eksempelvis kan de i oppgave A etter å ha undersøkt flere eksempler, oppdage at tallene i de to øverste hjørnene alltid har en differanse på to, samt at tallene i de to nederste hjørnene alltid har en differanse på to. Videre forventet jeg at elevene ville forsøke å begrunne hypotesene. Bevis og formelle bevis krever en deduktiv restrukturering jeg ikke forventet av elevene, både fordi de sannsynligvis er uerfarne med å gi bevis og fordi det var vanskelig å framprovosere et behov for en slik restrukturering. I tillegg viser forskning at elever har en tendens til å oppfatte empiriske argument som bevis for hypoteser (Stylianides et al., 2017). Et mulig empirisk argument kunne vært: «det stemmer på de fire kvadratene vi har sjekket på, og derfor stemmer det for alle».

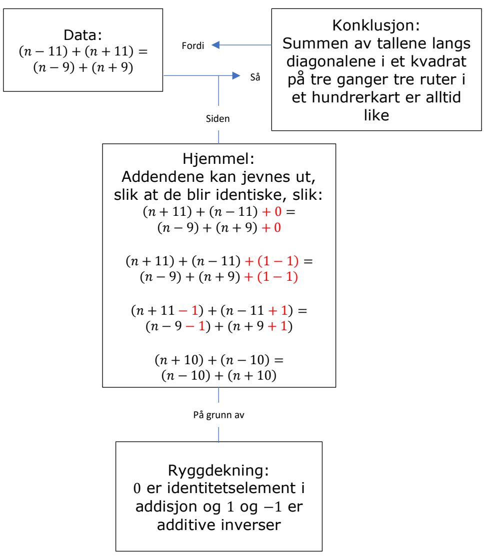
| | | |
|---|---|---|
| $n-11$ | $n-10$ | $n-9$ |
| $n-1$ | $n$ | $n+1$ |
| $n+9$ | $n+10$ | $n+11$ |

**Figur 3.2: Generalisert tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet**

Selv om bevis ikke var et forventet resultat i denne studien, vil jeg i det videre gi eksempler på hvordan eventuelle bevis kunne ha sett ut, basert på figur 3.2. Jeg vil i flere av eksemplene bruke algebraisk notasjon og begreper som additive inverser og identitetselement. Jeg forventer ikke at elever benytter disse, men jeg benytter de for å forklare hvordan en elev kunne ha tenkt. For oppgave A er det mulig å bevise hypotesen om at diagonalene har lik sum i alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet ved å trekke sammen de to uttrykkene og vise til at de blir like. Utgangspunktet for eksempelet er at summen i diagonalene kan skrives slik: $(n-11)+n+(n+11)=(n-9)+n+(n+9)$, der $n$ er tallet i midten av et hvilket som helst kvadrat. Da kan man løse opp parentesene og trekke sammen uttrykkene slik at man får $3n=3n$ på hver side. Altså står man igjen med $3n$ på hver side, og summen av tallene langs diagonalene er like. For elever på mellomtrinnet kan beviset derimot være noe problematisk, da det verifiserer hypotesen, men forutsetter at elevene behersker algebraisk notasjon. Yackel og Hanna (2003) framhever at elever tidligere har hatt en tendens til å tillegge bevis kun denne verifiserende funksjonen. Det er problematisk fordi beviset mangler det meningsskapende aspektet fra definisjonen til Stylianides et al. (2016), gjengitt i 2.2.1. Det forklarer altså ikke nødvendigvis *hvorfor* summene blir like, gitt strukturen i hundrekartet.

Et bevis som i større grad viser hvorfor hypotesen er sann, kan ta utgangspunkt i at man tenker på summene langs diagonalene som en «utjevning», slik at tallene i de to diagonalene blir identiske. Igjen er utgangspunktet for eksempelet at summen i diagonalene kan skrives slik: $(n-11)+n+(n+11)=(n-9)+n+(n+9)$. Fordi tallet i midten inngår i begge summene kan man se bort fra det. Videre kan uttrykket «jevnes ut» ved at det blir flyttet $1$ fra hver av de fargede rutene til høyre, over til hjørnet på motsatt ende av hver diagonal, slik: $\big((n+11)-1\big)+\big((n-11)+1\big)=\big((n-9)-1\big)+\big((n+9)+1\big)$. En slik «utjevning» baserer seg på at $0$ er identitetselement i addisjon og at $-1$ er additiv invers til $1$. Fordi $1-1=0$ og $n+0=n$, kan vi skrive om uttrykket $(n+11)+(n-11)=(n-9)+(n+9)$ til $(n+11)+(n-11)+0=(n-9)+(n+9)+0$. Videre er dette det samme som $(n+11)+(n-11)+(1-1)=(n-9)+(n+9)+(1-1)$, som igjen kan skrives slik: $(n+11-1)+(n-11+1)=(n-9-1)+(n+9+1)$. Når disse uttrykkene trekkes sammen, står vi igjen med $(n+10)+(n-10)=(n-10)+(n+10)$. Fordi addisjon er kommutativt, blir resultatet dermed to helt like uttrykk for summene langs diagonalene, for alle $n$, altså uansett plassering i hundrerkartet. Beviset kan, i tillegg til å verifisere hypotesen, også forklare hvorfor den stemmer. Dette fordi den benytter seg av hundrerkartets struktur ved å «jevne ut» tallene på den øverste og nederste raden i kvadratet, slik at alle tallene blir like det tallet som står i midten av hver rad. For alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrekartet kan man altså tenke seg en slik utjevning. Fordi dette argumentet bygger på aksepterte narrativer og har en deduktiv restrukturering, kan det kategoriseres som formelt bevis.

I figur 3.3 under har jeg skissert hvordan dette eksempelet på bevis kan struktureres ved hjelp av Toulmins (2003) modell for matematisk argumentasjon.



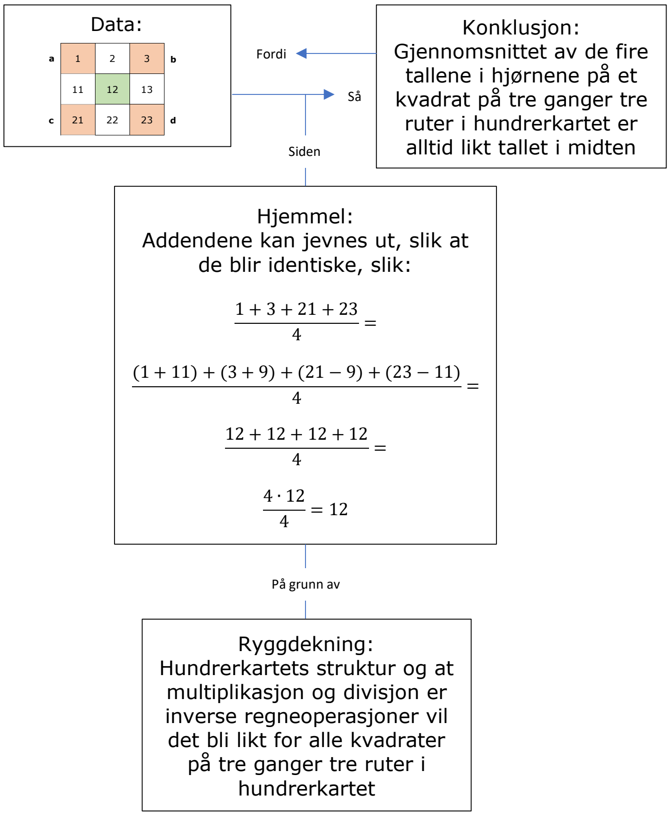

**Figur 3.3: Eksempel på analysert bevis for oppgave A**

I oppgave B skal elevene finne gjennomsnittet av de fire tallene i hjørnene, der formålet er at de skal oppdage at gjennomsnittet er likt tallet i midten av kvadratet. Også med denne oppgaven vil jeg gi to ulike eksempler, der første eksempel kun verifiserer hypotesen, mens det andre eksempelet gir ytterligere forklaring på hvorfor hypotesen stemmer. Gjennomsnittet for de fire tallene i hjørnene kan representeres slik: $\frac{(n+11)+(n-11)+(n+9)+(n-9)}{4}$, der $n$ er tallet i midten av kvadratet. Da kan et bevis for hypotesen se slik ut: $\frac{(n+11)+(n-11)+(n+9)+(n-9)}{4} = \frac{4n}{4} = n$. Gjennomsnittet av de fire tallene i hjørnene på et hvilket som helst tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet blir altså likt tallet i midten for alle $n$. Dette beviset verifiserer dermed hypotesen, men mangler i likhet med det første eksempelet for oppgave A, en mer forklarende funksjon for elever på mellomtrinnet.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 1 | 2 | 3 | **b** |
| | 11 | 12 | 13 | |
| **c** | 21 | 22 | 23 | **d** |

**Figur 3.4: Eksempel på kvadrat i hundrerkartet**

Et bevis som har en mer forklarende funksjon kan også i denne oppgaven basere seg på en form for «utjevning». Tanken er da at tallene i hjørnene «jevnes ut» slik at de blir like tallet i midten. Jeg vil her ta utgangspunkt i figur 3.4 for å forklare, der jeg har navngitt rutene i hjørnene med bokstavene (a), (b), (c) og (d), for å lette forklaringen. Hundrerkartet er strukturert slik at dersom du beveger deg én rute opp, ned, til venstre eller til høyre i kartet, vil du addere eller subtrahere henholdsvis $-10$, $+10$, $-1$ eller $+1$. På grunn av denne strukturen, vil tallet i rute (c), alltid være $+10 - 1 = 9$ større enn tallet i midten, og tallet i rute (b) vil alltid være $-10 + 1 = -9$, altså $9$ mindre. I likhet vil tallet i rute (d) alltid være $10 + 1 = 11$ større enn tallet i midten, og tallet i rute (a) vil alltid være $-10 - 1 = -11$, altså $11$ mindre. Fordi (c) er $9$ mer og (b) er $9$ mindre enn tallet i midten, kan $9$ subtraheres fra (c) og adderes på (b), slik at summene blir like tallet i midten. Det samme gjelder for (d) og (a), der $11$ kan «forflyttes». Da vil alle hjørnene være likt tallet i midten, slik: $1 + 3 + 21 + 23 = (1 + 11) + (3 + 9) + (21 - 9) + (23 - 11) = 12 + 12 + 12 + 12$. Det samme kan vi gjøre med hvilket som helst tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet på grunn av hundrerkartets struktur. Videre kan $12 + 12 + 12 + 12$ skrives som $4 \cdot 12$. Fordi multiplikasjon og divisjon er inverse regneoperasjoner, kan vi multiplisere $12$ med $4$ og få produktet $48$, som igjen vil gi kvotienten $12$ når det deles på fire, altså $\frac{4 \cdot 12}{4} = 12$. Dermed blir gjennomsnittet av de fire tallene i hjørnene av et vilkårlig tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet alltid likt tallet i midten. Dette fordi strukturen i alle tre-ganger-tre-kvadrater vil være lik strukturen i eksempelet over, og du vil alltid kunne «jevne ut» tallene i hjørnene slik at de blir like tallet i midten av kvadratet. Dette beviset kan ha en mer forklarende funksjon, da den gir innblikk i hvorfor hypotesen stemmer. På den måten vil et slik type bevis være bedre egnet i skolen, da det kan bidra til gi mening til matematikken for elevene. I figur 3.5 har jeg skissert hvordan dette eksempelet på bevis kan struktureres ved hjelp av Toulmins (2003) modell for matematisk argumentasjon.




**Figur 3.5: Eksempel på analysert bevis for oppgave B**

## 3.5 Erfaringer fra pilotstudien

I forkant av datainnsamlingen gjennomførte jeg en pilotstudie. Hensikten med studien var å teste flere typer oppgaver for å se hvordan elevene arbeidet med dem og hvordan oppgaveteksten fungerte. Jeg ønsket også å få erfaring med å observere to grupper samtidig, da det ville tatt mindre av tiden til klassen og læreren. I en vanlig matematikkundervisning har ikke læreren mulighet til å sitte med én smågruppe til enhver tid. Derfor ville det vært mer hensiktsmessig å undersøke elevgruppene i en situasjon der jeg heller ikke kunne vært sammen med de under hele samtalen. Da kunne beskrivelsene av disse gruppenes arbeid med resonnering vært mer virkelighetsnære.

Pilotstudien ga meg spesielt to erfaringer jeg tok med meg videre. For det første ønsket jeg å bruke spørsmålene som Nakim (2019) utviklet til oppgavene i sin studie. Dette fordi jeg opplevde de som hensiktsmessige og gode spørsmål, og fordi Nakim (2019) viser til gode erfaringer med bruk av dem. Samtidig var elevene i min studie noen år yngre, og de taklet ikke like godt så mange instrukser på en gang. Jeg endte dermed opp med å fjerne instruksene fra oppgavearket, og brukte de heller som inspirasjon til muntlige spørsmål underveis i arbeidet deres. For det andre erfarte jeg at det var en utfordring å få elevene til å diskutere godt sammen og at det var viktig å følge opp gruppene og samtalene tett. Elevene hadde en tendens til å spore av, fordi de opplevde det som utfordrende å resonnere og argumentere for sine observasjoner. Derfor valgte jeg å ta ut én og én gruppe i datainnsamlingen, og forsikret meg da om at jeg fikk samlet det datamaterialet jeg trengte for å svare på forskningsspørsmålet mitt

En tredje erfaring jeg gjorde meg var knyttet til en instruks som ba elevene vise på et ark hvordan de kunne overbevise resten av klassen om hvorfor det de hadde funnet ut kunne stemme. Dette opplevde elevene som både kunstig og unødvendig bruk av tid, fordi de bare skrev ned det samme som de allerede hadde sagt. Derfor valgte jeg å fjerne denne delen fra datainnsamlingen, og ba de heller overbevise hverandre underveis dersom noen ikke forsto de andres resonnementer. Dette fungerte delvis da elevene ble ivrige på å prøve å få den andre til å forstå, men det fungerte likevel ikke optimalt da elevene hadde vansker med å uttrykke resonnementet sitt, og er slik sett en begrensning ved min studie. En alternativ løsning kunne ha vært å innta rollen som en «tviler» selv, slik at elevene måtte overbevise meg. Da hadde jeg fått mer kontroll over fremdriften i resonneringen. Likevel kan denne studien slik den ble gjennomført gi et interessant innblikk i det sosiale samspillet mellom elevene.

## 3.6 Gjennomføring av datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjennomført på tidspunkter hvor klassen hadde matematikkundervisning, og hver av gruppene var ute i omtrent 40 minutter. Etter erfaring fra pilotstudien og av praktiske årsaker ble gruppene tatt ut på et grupperom én og én. Elevene ble plassert rundt et bord, hvor jeg også satt sammen med dem. De fikk utdelt ett oppgaveark per gruppe, blanke ark, blyanter i ulike farger og kalkulator. Det ble kun utdelt ett oppgaveark til gruppene for å sikre at elevene arbeidet sammen om oppgaven og for å stimulere til matematisk samtale. Dersom de opplevde behov for et blankt hundrerkart når de skulle begynne på oppgave B, fikk de dette utdelt. Jeg delte ut kalkulator fordi fokuset mitt var rettet mot elevenes resonnement, og ikke deres aritmetiske kompetanse. I pilotstudien så jeg at regnefeil noen ganger førte til brudd i resonneringen til elevene, og jeg ønsket å unngå dette. Lydopptaker ble plassert midt på bordet, og videokamera ble plassert på en slik måte at det fikk med alle elevene i bildet, enten fra siden eller forfra.

Med begge gruppene startet jeg å lese gjennom oppgave A muntlig for elevene. Jeg avklarte de viktige begrepene, og elevene fikk deretter jobbe sammen om oppgaven. Min rolle videre i diskusjonen var å stille åpne og eventuelt bekreftende spørsmål og samtidig passe på at samtalen holdt fokus på matematisk resonnering. Spørsmålene som ble stilt var inspirert av de samtaletrekkene som er utviklet av Chapin, O'Connor og Anderson (2009) og Kazemi og Hintz (2014). Eksempler på spørsmål som ble stilt er: «Så du sier at ...?» og «Er du enig eller uenig, og hvorfor?», i tillegg til spørsmål som var ment å følge opp elevutsagn. Når elevene følte seg ferdige med oppgave A gikk vi over til oppgave B. Jeg brukte igjen tid på å lese oppgaven og avklare begreper før de fikk begynne å jobbe selv. I begge oppgavene var jeg opptatt av at elevene fikk utforske, og jeg tok åpent i mot deres initieringer som var relevante for oppgaven. De kunne for eksempel ta initiativ til å undersøke et utvidet kvadrat, eksempelvis fem-ganger-fem-kvadrat.

## 3.7 Metode for analyse

Kvalitativ dataanalyse inkluderer en organisering av data med hensikt å beskrive, forstå og forklare data (Cohen et al., 2018). Organisering av data foregår ofte i form av åpen koding, kategorisering og utarbeiding av temaer relatert til studiens forskningsspørsmål (Miles, Huberman & Saldaña, 2014). Ifølge Nilssen (2012) handler åpen koding om å «identifisere, kode, klassifisere og sette navn på de viktigste mønstrene» (s. 82) i datamaterialet for å avgjøre hva som er av betydning for analysen. I min studie er ønsket å beskrive kjennetegn ved noen elevers deltakelse i matematisk resonnering. For å kunne beskrive kjennetegn ved deres deltakelse, så jeg det som hensiktsmessig å gå inn i datamaterialet med åpen koding. Jeg har valgt å gjennomføre en tematisk analyse med induktiv tilnærming. Induktiv tilnærming til analysen handler om å ta utgangspunkt i datamaterialet og kode data uten å la teori og forforståelse ha innvirkning på kodene (Braun & Clarke, 2006). Gläser og Laudel (2013) hevder det ikke er realistisk at kodingen ikke påvirkes av teorien, og ofte starter forskeren med noen koder som allerede er bestemt og som modifiseres og tilpasses datamaterialet (Cohen et al., 2018). I dette kapittelet vil jeg først redegjøre for hva tematisk analyse er, og deretter beskrive mitt arbeid med analyse av datamaterialet.

### 3.7.1 Om tematisk analyse

For å redegjøre for tematisk analyse har jeg valgt å støtte meg på Braun og Clarke (2006) sitt arbeid. De forklarer tematisk analyse som en metode for å identifisere, analysere og rapportere mønster, eller temaer, i datamaterialet. De anser ikke temaene som noe iboende i datamaterialet, men mener at forskeren har en aktiv rolle i å identifisere temaer og ta valg underveis. Hvilke temaer som identifiseres avhenger av forskerens valg av teoretiske rammeverk og metoder. På den måten vil de identifiserte temaene være avhengig av forskeren. Hvert enkelt tema skal i seg selv fange opp noe viktig om datamaterialet i relasjon til forskningsspørsmålet, og skal til en viss grad representere noen mønster i responser eller meninger innad i datamaterialet.

Braun og Clarke (2006) har utarbeidet en stegvis guide for gjennomføring av tematisk analyse. Prosessen består av seks faser som bør anvendes på en fleksibel måte. Det vil si at til tross for at fasene utgjør en nødvendig progresjon i analysearbeidet, vil prosessen likevel være rekursiv ved at forskeren underveis beveger seg frem og tilbake mellom fasene etter behov. Fase (1) handler om å *gjøre seg kjent med datamaterialet*, noe som innebærer transkripsjon og lesing av ferdige transkripsjoner. I fase (2) skjer *utarbeiding av de første kodene,* der kodene skal identifisere interessante deler av datamaterialet, og organisere datamaterialet i meningsfulle grupper. Videre vil man i fase (3) *lete etter temaer*, det vil si at kodene sorteres i potensielle temaer på grunnlag av en vurdering av hvordan de ulike kodene kan kombineres slik at de former et overordnet tema. Deretter vil man i fase (4) *evaluere temaene*. Det innebærer evaluering og bearbeiding av både de kodede datautdragene for å vurdere om de sammen former et sammenhengende mønster, og de individuelle temaene i relasjon til datamaterialet. Når temaene er klare, begynner fase (5) med *definering og navngiving av temaer*. Definering vil si at essensen i temaene skal identifiseres og det skal bestemmes hvilket aspekt av hele datamaterialet det representerer. Fase (6) er *produsering av rapporten*, der den ferdige analysen og presentasjon av analysen produseres. Utdrag fra datamaterialet presenteres som en analytisk narrativ, der narrativen skal fungere som et argument i relasjon til forskningsspørsmålet.

### 3.7.2 Analyse av datamaterialet

I mitt arbeid med analyse av datamaterialet har jeg som nevnt valgt en mer induktiv tilnærming til den tematiske analysen, og jeg har gjennomarbeidet datamaterialet med åpen koding. Likevel har analysen hatt et mål, altså å beskrive kjennetegn ved to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering. Det har medført at jeg ikke har kunnet distansert meg helt fra teorien, og noen av kodene er dermed utarbeidet med Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk for matematisk resonnering som inspirasjon. Deres rammeverk beskriver resonneringsprosesser som elever kan tenkes å delta i, og kan på den måten bidra til å beskrive kjennetegn ved deres deltakelse i matematisk resonnering. Samtidig kan jeg med åpen koding inkludere observasjoner eller detaljer i datamaterialet som en deduktiv koding ikke ville ha gitt mulighet for.

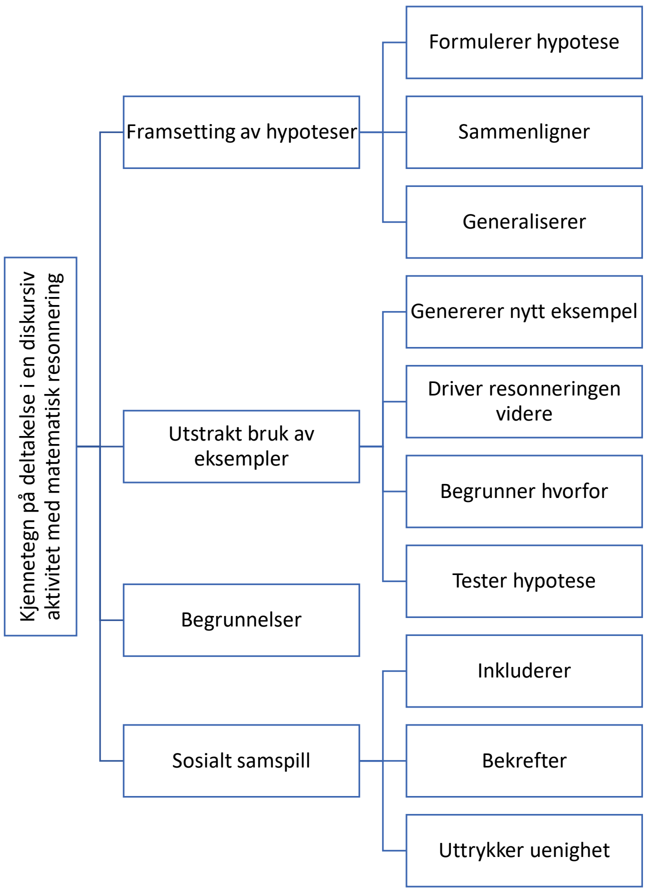
Det innledende arbeidet med analysen startet i fase (1) med transkripsjon av lydopptakene. Jeg startet med lydopptakene for å bedre fange opp det som ble sagt, ettersom lydkvaliteten på en lydopptaker er bedre enn den på et videokamera. Deretter spilte jeg gjennom videoopptakene samtidig som jeg sjekket transkripsjonene opp mot opptakene. Deler av samtalen var ikke lett å fange opp på lydopptaket fordi oppgaven er utarbeidet slik at mange av elevenes utsagn inkluderer uttrykk som «den her», «den er to mer enn den» osv. Da var det viktig for meg å kunne gå inn i videoopptakene for å oppklare hva elevene faktisk refererte til. For å sikre korrekt transkribering ble opptakene gjennomgått i flere runder. Jeg noterte dessuten underveis idéer og tanker jeg fikk om datamaterialet. Målet for transkripsjonene har vært å gjengi samtalene så nøyaktig som mulig, da Sfard (2008) påpeker at det er elevenes stemmer som skal komme frem, og ikke forskerens gjenfortelling. Derfor har jeg markert opphold i utsagn, avbrytelser av hverandre og ufullførte ord. For å unngå å legge føringer for elevenes setningsoppbygging har jeg valgt å bruke kun små bokstaver og ingen punktum. Oversikt over markeringer i transkripsjonene er gjengitt i tabell 3.1.

**Tabell 3.1: Markeringer i transkripsjon**

| Markering | Betydning |
|---|---|
| , | kort opphold |
| .. | opphold lengre enn 1 sek |
| ... | opphold lengre enn 3 sek |
| a | trykk på ord |
| abc? | spørsmål |
| abc! | utrop |
| abc?! | spørrende utrop |
| ab- | ufullført ord |
| /abc/ | overlapp |
| [abc] | snakker samtidig, men ikke om det samme |
| ab –<br>– ab | avbrytelse |
| *(abc)* | beskrivelse |

Da transkripsjonene var ferdige, leste jeg gjennom flere ganger samtidig som jeg jobbet for å få en oversikt over de ulike delene av samtalene, ved å markere når samtalen tok nye vendinger. Deretter gikk jeg inn i fase (2) av analysen med utarbeiding av koder. Da gikk jeg systematisk gjennom hele teksten, der jeg forsøkte å kode så mange som mulig av utsagnene med koder jeg opplevde som relevante for forskningsspørsmålet. I første omgang kodet jeg med utgangspunkt i hvordan elevene arbeidet med oppgavene, det vil si hva de uttrykte om kvadratene og hva de gjorde i arbeidet. Senere så jeg også interaksjonen mellom elevene og meg som interessant for forskningsspørsmålet mitt, og jeg gikk dermed over transkripsjonene enda en gang for å kode utsagn og handlinger elevene gjorde som kunne beskrive interaksjonen. Flere av kodene jeg utarbeidet hadde fellestrekk og ble derfor gruppert i kategorier, imens andre koder ble strøket fordi de viste seg å ikke være interessante for forskningsspørsmålet. Et eksempel er kodene *gir nytt eksempel* og *utvider kvadratet* som ble slått sammen til *driver resonneringen videre,* da begge kodene bidro til utvikling i resonneringen til elevene, og fordi utvidelse av kvadratet også medførte at elevene ga nytt eksempel. Gradvis gikk jeg over i fase (3) av analysen, der kodene ble sortert i potensielle temaer. I denne fasen prøvde jeg ut flere alternativer, og landet til slutt på fire temaer som jeg oppfattet som kjennetegn på disse elevenes deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering: *framsetting av hypoteser, utstrakt bruk av eksempler, begrunnelser* og *sosialt samspill.*

Underveis i arbeidet jobbet jeg meg frem og tilbake mellom fase (3), (4) og (5) av analysen. Evalueringen av temaene medførte at jeg omplasserte koden *driver resonneringen videre,* som opprinnelig var plassert under temaet *sosialt samspill* fordi det er relatert til progresjon i den matematiske samtalen. Koden viste seg etter hvert å være mer fremtredende som en del av eksempelbruken til elevene. Derfor ble den flyttet til temaet *utstrakt bruk av eksempler.* Etter hvert som temaene og kodene ble klare, begynte jeg på arbeidet med å definere de ulike temaene, altså identifisere essensen i temaene. Oversikt over temaer med sine tilhørende koder kan ses i figur 3.6.




**Figur 3.6: Temaer og koder fra åpen koding**

I tillegg til å utarbeide koder for hvordan elevene deltok i den diskursive aktiviteten med matematisk resonnering, har jeg også analysert strukturen i begrunnelsene elevgruppene ga for hypotesene sine. Evens og Houssart (2004) hevder at det å undersøke strukturen i elevenes begrunnelser kan øke forståelsen for hva elevene kan klare å uttrykke muntlig, og hva slags utfordringer de møter på. *Begrunnelser* er det eneste temaet som ikke har underliggende koder, da begrunnelsene som har blitt analysert er min sammenfatning av resonneringsprosessene til elevene. For å analysere strukturen i begrunnelsene, har jeg tatt inspirasjon fra Nordin og Boistrup (2018) sin stegvise fremgangsmåte for å identifisere matematiske argumenter. Da begynte jeg med å markere alle hypotesene jeg tidligere hadde funnet gjennom koden *formulerer hypotese,* med farge. Deretter søkte jeg etter data som ble brukt til å støtte hypotesen. Videre lette jeg etter en hjemmel som kunne gi uttrykk for hvordan dataen støttet den identifiserte hypotesen. Dersom jeg ikke fant hjemmel for hypotesen, regnet jeg den heller ikke som et argument. Dersom jeg derimot gjorde et funn av hjemmel, lette jeg så videre etter ryggdekning for hjemmelen. Da alle elementene var identifisert, kunne jeg rekonstruere argumentet slik jeg tolket det ut fra elevenes utsagn.

## 3.8 Forskningens troverdighet

Troverdighet i forskning er viktig for at leseren skal oppleve forskningen som pålitelig. Da er det to begreper som er særlig sentrale; validitet og reliabilitet. Ifølge Cohen et al. (2018) kan begge disse begrepene bli brukt og definert ulikt. Begrepene ble opprinnelig utviklet innenfor den kvantitative forskningstradisjonen (Seale, 1999), og har hatt behov for en redefinering innenfor kvalitativ forskning. Tradisjonelt er *validitet* knyttet til i hvilken grad måleinstrumentet er presist og om det måler det som faktisk skal måles (Golafshani, 2003). *Reliabilitet* har i kvantitativ forskning vært knyttet til målingenes stabilitet (Nyeng, 2012). Ettersom kvalitativ forskning ikke genererer kvantifiserbare målinger, gir ikke disse begrepenes opprinnelige betydning mening i en kvalitativ sammenheng. Derfor har flere forskere forsøkt å redefinere begrepene eller skape nye, tilsvarende begreper.

For å utdype troverdighet i min forskning har jeg valgt å rette meg mot Guba (1981) sitt arbeid. Han har utviklet et rammeverk for troverdighet i kvalitativ forskning som benytter seg av fire hovedkriterier: kredibilitet (eng: credibility), overførbarhet (eng: transferability), avhengighet (eng: dependability) og bekreftbarhet (eng: confirmability). *Kredibilitet* handler om å sikre at forskningen er gjort på en slik måte at resultatene representerer sannheten best mulig. *Overførbarhet* handler om forskningens anvendelighet. I kvalitativ forskning er det ikke mulig å utvikle påstander som har en generell anvendelighet, fordi alle fenomener er kontekstbundet. Derfor må det heller utvikles beskrivende eller tolkende påstander for en gitt kontekst, som deretter kan være overførbare til lignende kontekster. *Avhengighet* omhandler stabilitet i data, og er slik sett analogt til reliabilitet. Likevel kan ikke stabilitet måles på samme måte i kvalitativ forskning som i kvantitativ, og forskeren er avhengig av å gå frem på en annen måte for å oppnå dette kriteriet, eksempelvis gjennom overlappende metoder. Hensikten til kriteriet er å sikre at prosessen gir tilsvarende resultater dersom studien gjentas. *Bekreftbarhet* omfatter forskningens nøytralitet, og er særlig interessant i kvalitativ forskning der forskeren ofte bruker seg selv som instrument.

I denne studien har jeg samlet et rikt datamateriale med både videoopptak, lydopptak og innsamling av elevarbeid. Dette bidrar til å sikre overførbarhet, da det gir informasjon til en eventuell gjentakelse av studien. Denne informasjonen er blitt presentert ved hjelp av detaljerte beskrivelser av kontekst og gjennomføring av datainnsamling. I arbeid med analysen av datamaterialet har jeg ved flere anledninger gått tilbake til opptakene og elevarbeidet for å sjekke om tolkningene jeg har gjort på bakgrunn av transkripsjonene, stemmer overens med diskusjonene som fant sted. På den måten har det rike datamaterialet bidratt til å sikre kredibilitet i forskningen. Kredibilitet har også blitt sikret gjennom det Guba (1981) omtaler som *peer debriefing*, det å uttrykke sine tanker og idéer om analysen foran fagfeller, for så å gripe an spørsmål fagfellene stiller. I mitt tilfelle har fagfeller vært medstudenter, som har stilt meg kritiske spørsmål til mine tanker og idéer.

## 3.9 Etiske betraktninger

Ettersom kvalitative studier involverer nær kontakt mellom forsker og forskningsdeltakere, må det tas ulike etiske hensyn og forholdsregler gjennom hele forskningsprosessen (Silverman, 2013). I studien har jeg forholdt meg til forskningsetiske retningslinjer utarbeidet av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH), retningslinjer gitt av NTNU og relevante lover og forskrifter. Ifølge De nasjonale forskningsetiske komiteene (2016) skal informantene i en studie ha rett til selvbestemmelse og autonomi. Det vil si at den som deltar i en studie skal kunne bestemme over egen deltakelse, at samtykket er informert og frivillig, og at informanten når som helst skal kunne trekke seg ubegrunnet fra studien uten at det gir konsekvenser. I tillegg har forskeren plikt til å respektere informantens privatliv, det vil si at informanten selv bestemmer hvilke opplysninger den enkelte forsker får tilgang på, og at opplysningene ikke brukes på en slik måte at informantene kan identifiseres. Forskeren har også ansvar for å unngå skade, hvilket betyr at informantene i en studie skal utsettes for minst mulig belastning. I dette delkapittelet vil jeg greie ut om hvilke hensyn, tiltak og forholdsregler jeg har tatt for at prosjektet er gjennomført på en etisk god måte.

For all forskning som behandler personopplysninger må det innhentes samtykke fra deltakerne. Elevene i denne studien er under myndighetsalder og er dermed ikke samtykkekompetente. Derfor er det hentet inn informert samtykke fra foresatte, i samsvar med personopplysningsloven (NSD, u.å.). Likevel skal deltakelsen også være frivillig fra barnets side, noe jeg har tatt hensyn til ved å få barna selv til å underskrive samtykkeskjemaet i tillegg til foreldrene. For å sikre at elevenes samtykke også var informert, ble de gitt muntlig informasjon om prosjektet i forbindelse med utdeling av samtykkeskjema, og igjen i forbindelse med gjennomføring av datainnsamling. Informasjonsskriv og samtykkeskjema kan leses i vedlegg 1.

Dersom forskningen behandler ulike personopplysninger, har forskeren meldeplikt. Ifølge De nasjonale forskningsetiske komiteene (2016) regnes både video- og lydopptak og innhenting av samtykkeskjema som personopplysninger, og prosjektet er derfor meldt til NSD (Norsk senter for forskningsdata). Meldeskjemaet ble godkjent 29.10.19 (se vedlegg 2) og kontakten med den aktuelle læreren ble opprettet etter dette. Det samme gjaldt utsendelse av informasjonsskriv, innhenting av samtykke og oppstart av datainnsamling. For å sikre at elever som ikke hadde samtykket til å delta i forskningsprosjektet ikke skulle høres eller synes på video- og lydopptakene, ble informantene tatt ut på et grupperom under datainnsamlingen. Informantene ble igjen informert om behandling av personopplysninger og deres rettigheter før datainnsamlingen startet. Jeg forsøkte å redusere mulige ulemper med å ta elevene ut av undervisningen ved å la læreren avgjøre når elevene skulle tas ut til observasjon. I tillegg er oppgaven utarbeidet slik at den gir elevene øving i matematisk resonnering, noe som gjør at studien ikke medfører en stor ulempe for elevene som blir tatt ut.

I forkant av datainnsamlingen utarbeidet jeg en datahåndteringsplan, med utgangspunkt i NTNU sine retningslinjer for behandling av personopplysninger i studentprosjekter. Ettersom NTNU ikke tillater lagring av personopplysninger på private enheter, har jeg lånt opptaksutstyr som eies av NTNU til datainnsamlingen. Etter ferdig datainnsamling ble opptakene lagret på NTNUs eget fillagringsområde for skjerming av data, NICE-1, for å unngå lagring på privat enhet. NICE-1 kan brukes til lagring av personopplysninger i den aktive fasen av masterprosjektet. Når prosjektet avsluttes, vil de lagrede opplysningene bli slettet. For å forsikre informantene om at deres privatliv blir respektert, informerte jeg de om at alt datamateriale vil være anonymisert ved prosjektets slutt og at opptakene vil slettes. Jeg informerte også om at anonymiserte, skriftlige utdrag fra samtalen vil brukt i den ferdige oppgaven og at ingen av de ville kunne gjenkjennes i disse utdragene. De fikk også mulighet til å stille meg spørsmål dersom det var noe de lurte på angående deres deltakelse, oppbevaring og behandling av datamateriale.

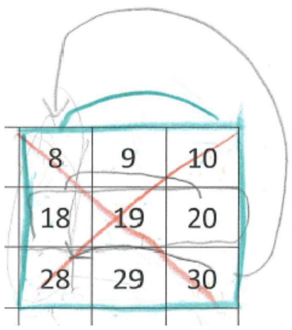
# 4 Analyse

I denne studien har jeg stilt forskningsspørsmålet «hva kjennetegner to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering?». Jeg vil i dette kapittelet presentere min analyse av datamaterialet. For å kunne svare på forskningsspørsmålet har jeg valgt å strukturere kapittelet etter kjennetegn jeg fant som karakteristiske for disse elevenes deltakelse. Jeg presenterer utdrag fra datamaterialet, som har blitt analysert og forsøkt beskrevet ved hjelp av begreper fra Jeannotte og Kieran (2017) og Toulmin (2003). Etter hvert delkapittel vil jeg oppsummere de sentrale funnene, før jeg avslutningsvis gi en oppsummering av hele analysen.

## 4.1 Framsetting av hypoteser

I elevgruppenes diskusjoner ble det framsatt mange hypoteser, både i det innledende arbeidet med oppgavene, når oppgavene ble utvidet i form av større kvadrater, eksempelvis fem-ganger-fem-kvadrater, og når de oppdaget nye sammenhenger i tilknytning til oppgaven. Jeg har dermed ansett *framsetting av hypoteser* som et kjennetegn ved disse elevgruppenes deltakelse i matematisk resonnering. For å beskrive deres framsetting av hypoteser, har jeg brukt kodene *formulerer hypotese, sammenligner* og *generaliserer*. Koden *sammenligner* er utarbeidet som en følge av oppgavebeskrivelsene, som begge legger føringer for to ulike sammenligninger. For oppgave A er det summen av de to diagonalene i kvadratet som skal sammenlignes, og for oppgave B er det gjennomsnittet av tallene i hjørnene av kvadratet som skal sammenlignes med tallet i midten. Årsaken til at jeg anser *sammenligner* som en kode i temaet framsetting av hypoteser, er fordi elevene *formulerer hypotese* med bakgrunn i at de *sammenligner* de nevnte tallene i kvadratene.

Det første utdraget er hentet fra gruppe 2 sitt arbeid med oppgave A. Jeg har akkurat lest oppgaven for dem, og Zahra har gjettet at tallene i diagonalene vil gi lik sum, allerede før de har undersøkt tallene i det første kvadratet. De undersøker kvadratet i figur 4.1.




**Figur 4.1: Eksempel brukt av gruppe 2 i oppgave A**

| | | |
|---|---|---|
| 2.063 | Zahra: | så det her *(peker på diagonalen 10-19-28)* blir tjueni, tjueni *(impliserer 10+19)* pluss tjueåtte, hva blir det, eller det kan vi i hodet |

2.064 Emran: hva da?
2.065 Zahra: [tjueni og tjueåtte]
2.066 Emran: [hvilken det]
2.067 Daria: femtisju
2.068 Zahra: det går an /femtisju/
2.069 Emran: /femtisju/
2.070 Zahra: da skriver jeg det her da
2.071 Emran: så må vi.. skal vi gjøre sånn her nå *(peker på diagonalen 8-19-30)*? sånn tvers over på andre sida, så åtte [trettiåtte]
2.072 Zahra: [tjuesju tjuesju]
2.073 Emran: det blir samme
2.074 Daria: åja!
2.075 Zahra: jeg sa det blir like mye
2.076 F: hm, vil det alltid stemme da?
2.077 Zahra: ikke at alle får like samme svar men liksom... alltid de her to *(peker på diagonalene)* kommer alltid til å være samme svar tror jeg

Karakteristisk for arbeidet til elevgruppene er at de innleder både oppgave A og oppgave B på samme måte som i utdraget over. I utdraget regner elevene ut summen av diagonalene i det gitte eksempelet, og *sammenligner* de to summene (2.073). De finner så ut at summene er like, noe som medfører at de *formulerer hypotese* om at summen av tallene i diagonalene blir like for alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet (2.077). Denne fremgangsmåten når elevene først *sammenligner* og deretter *formulerer hypotese* var som nevnt typisk for den innledende fasen av arbeidet med oppgaven for begge elevgruppene. På den måten var den innledende fasen kjennetegnet av framsetting av hypoteser.

Elevenes arbeid var også karakterisert av framsetting av hypoteser når de utvidet kvadratene. Utdraget under er hentet fra gruppe 1 sitt arbeid med oppgave B. Elevene har i forkant av utdraget funnet gjennomsnittet til de fire tallene i hjørnene av det blå kvadratet i figur 4.2, og oppdaget at gjennomsnittet er likt tallet i midten av kvadratet.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Figur 4.2: Eksempler brukt av gruppe 1 i oppgave B**

1.257 F: mhm, hvorfor det?
1.258 Marlon: for hvis du tar den den den den *(peker på henholdsvis 1, 3, 23 og 21)*, fasiten er i midten
1.259 F: hvorfor det?

| | | |
|---|---|---|
| 1.260 | Marlon: | fordi det *(utydelig)* |
| 1.261 | Rina: | skal jeg prøve å |
| 1.262 | Marlon: | fire pluss seks |
| 1.263 | Even: | men det funker ikke i et større kvadrat da.. hvis jeg tar et fem ganger fem kvadrat, så blir svaret, åja vent hæ? |
| 1.264 | Rina: | eh vent, ta fem, er det her fem, den her var fem ikke sant? |
| 1.265 | F: | ja |
| 1.266 | Rina: | ehmmm, så hvis vi tar kantene, det var kantene, okei.. eller jeg tror ikke – |
| 1.267 | Even: | – for nå har jeg tatt kantene her *(peker på kvadrat 51-55-95-91)*, også har delt jeg på fire og det blir syttitre som da er midten, av det her femmerkvadratet<br>*(elevene tenker høyt for seg selv imens de regner)* |
| 1.268 | Marlon: | det er det på alle, det er også hvis jeg tar den den den den *(peker på henholdsvis 4, 6, 26 og 24)*.. hvis jeg tar seksti delt på fire så blir det femten, fasiten er i midten!... hvis du finner gjennomsnittet på de fire kantene i hjørnet.. fire tallene i hjørnet, da er fasiten <u>alltid</u> i midten |

I dette utdraget jobber elevene med tre ulike eksempler. De starter med det blå kvadratet, hvor de *sammenligner* gjennomsnittet av de fire tallene i hjørnene med tallet i midten og finner at de er like, slik Marlon uttrykker i linje 1.258. Han uttrykker ikke eksplisitt at han må finne gjennomsnittet av «den den den den», men ut ifra andre utsagn både før og etter utdraget antar jeg at det var det han mente. Når jeg spør hvorfor, har han ikke noe svar, men går heller videre til et nytt eksempel, det oransje kvadratet. Igjen *sammenligner* han gjennomsnittet av de fire tallene i hjørnene med tallet i midten, og finner at de er like (1.268). I mellomtiden initierer Even til å undersøke et utvidet fem-ganger-fem-kvadrat, og finner at gjennomsnittet av tallene i hjørnene også i dette kvadratet er likt tallet i midten. Disse tre funnene fører så til at Marlon konkluderer med at «det er det på alle» (1.268), og impliserer da at resultatet blir likt på alle kvadrater av ulik størrelse. Basert på de tre eksemplene, *generaliserer* Marlon funnene til å gjelde alle kvadrater av vilkårlig størrelse i hundrerkartet, noe som kommer frem gjennom bruken av ordet «alltid». Han *formulerer en hypotese* på slutten av utdraget om at gjennomsnittet av de fire tallene i hjørnene på et hvilket som helst kvadrat av vilkårlig størrelse i hundrerkartet alltid er likt tallet i midten av kvadratet (1.268).

Det at elevene etter å ha undersøkt ett utvidet kvadrat, så *generaliserer* egenskapene de har oppdaget i eksemplene de har undersøkt, til å gjelde alle kvadrater av vilkårlig størrelse, og deretter *formulerer hypotese* som omfatter flere kvadrater enn de på tre ganger tre ruter, er karakteristisk ved deres framsetting av hypoteser. Det som er interessant, særlig med elevenes arbeid med oppgave B, er at den videre resonneringen etter at de *formulerer hypotese* bærer preg av svært få forsøk på å begrunne hypotesen. Forsøkene er mangelfulle og det kan se ut til at de kun er en respons på mine spørsmål om «hvorfor?». Allerede i utdraget over kommer det frem at Marlon i linje 1.260 ikke gir et svar på spørsmålet mitt, men fortsetter heller å undersøke flere eksempler. Det kan være at han opplever det som for vanskelig å gi en begrunnelse etter å ha undersøkt kun ett eksempel og trenger å undersøke flere. Men som jeg skal vise i det neste utdraget, er det gjennomgående for begge gruppene at de enten ikke responderer, eller at de svarer mangelfullt, på min initiering til å begrunne. Ved flere anledninger tar elevene heller initiativ til å fortsette å undersøke, og oppdager heller nye sammenhenger som de *formulerer hypotese* om. I utdraget under er elevene egentlig i arbeid med oppgave B og *formulerer hypotese* i forkant av utdraget om at gjennomsnittet av tallene i hjørnene vil være likt tallet i midten. Elevene har blitt bedt om å forklare hvorfor gjennomsnittet av tallene i hjørnene av kvadratet blir likt tallet i midten. De jobber med figur 4.1.

| | | |
|---|---|---|
| 2.406 | Daria: | – se hvis du dem her *(peker på 8, 10, 28 og 30)*, pluss også det blir jo- det blir syttiseks og siden d- er fire tall så har du syttiseks delt på fire og det blir jo nitten, som er svaret her *(peker på 19)* |
| 2.407 | Zahra: | åh jeg skjønte det! |
| 2.408 | Daria: | så tar du nitten |
| 2.409 | Zahra: | jeg skjønte det! |
| 2.410 | Daria: | så tar du nitten [ganger fire det blir syttiseks] |
| 2.411 | Zahra: | [hvis du tar nitten ganger tre, det blir] svaret her *(peker på diagonalen 8-19-30)*, hvis du har femtito ganger tre det blir svaret som ser her *(peker på diagonalen 41-52-63)*.. det blir sånn på alle |

Utdraget starter med at Daria, i et forsøk på å begrunne, henviser tilbake til hypotesen de jobber ut fra og utforsker videre multiplikasjon og divisjon som inverse operasjoner (2.410), kanskje i et forsøk på å finne en måte å begrunne hypotesen på. Zahra skyter så inn med det som ser ut til å være en ny oppdagelse fordi hun roper ut «jeg skjønte det!» (2.407 og 2.409). Det som da skjer er at hun tilsynelatende hopper tilbake til oppgave A, antakeligvis med inspirasjon fra Daria sine utsagn, og *formulerer hypotese* om at produktet av tallet i midten av kvadratet multiplisert med tre er lik summen av tallene i hver av diagonalene (2.411). Zahra bruker altså ikke tid på å dvele ved den hypotesen de allerede har sett på, men framsetter heller en ny hypotese om en ny oppdagelse. I arbeid med oppgave B var dette svært karakteristisk for elevenes deltakelse i den matematiske resonneringen. Jeg fant ingen begrunnelser som inkluderte en matematisk gyldig hjemmel, og kunne dermed ikke regne forsøkene på begrunnelser som bevis.

### 4.1.1 Oppsummering

I denne studien har elevene framsatt mange hypoteser. I den innledende fasen av arbeidet med de to oppgavene blir hypotesene framsatt som et resultat av at de *sammenligner* summen av tallene i diagonalene eller at de *sammenligner* kvotienten til tallene i de fire hjørnene med tallet i midten av kvadratet. Når elevene tar initiativ til å utvide kvadratene, som forøvrig ikke er en del av oppgavebeskrivelsen, *generaliserer* de hypotesen de hadde framsatt for tre-ganger-tre-kvadrater, til å gjelde alle kvadrater av vilkårlig størrelse, og framsetter dermed en ny hypotese. Elevenes deltakelse i matematisk resonnering er i arbeid med oppgave B særlig kjennetegnet av at de framsetter mange hypoteser i forbindelse med at de gjør nye oppdagelser, uten at de gir begrunnelser for tidligere hypoteser. De gjør noen forsøk, men disse blir gjerne ikke videre utarbeidet til å kunne regnes som en begrunnelse for hypotesen.

Når elevene i denne studien *sammenligner,* konstruerer de ved hjelp av søk etter likheter og ulikheter en narrativ om relasjoner innad i kvadrater i hundrerkartet. På den måten deltar de i resonneringsprosessen sammenligning, beskrevet av Jeannotte og Kieran (2017). Elevene deltar også i resonneringsprosessen generalisering når de i denne studien *generaliserer*, fordi de konstruerer narrativer om alle tilfeller i mengden basert på de eksemplene de har undersøkt. Mengden referer her til alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet eller alle kvadrater av vilkårlig størrelse i hundrerkartet. Når de *formulerer hypoteser* basert på sammenligning og generalisering, konstruerer de narrativer om en regelmessighet i eksemplene de har undersøk, som har en sannsynlig eller mulig epistemisk verdi. På den måten deltar elevene også i resonneringsprosessen formulering av hypoteser, slik den er definert i Jeannotte og Kieran (2017).

## 4.2 Utstrakt bruk av eksempler

Diskusjonene med de to elevgruppene i denne studien bar preg av en utstrakt bruk av eksempler. Eksemplene ble brukt som støtte i matematiske resonneringsprosesser som både var knyttet til søk etter likheter og ulikheter og søk etter validering, og de kan på den måten sies å delta i det Jeannotte og Kieran (2017) omtaler som eksemplifisering. Kodene som har blitt utarbeidet innen dette temaet er *genererer nytt eksempel, driver resonneringen videre, begrunner hvorfor* og *tester hypotese* samt at kodene *generaliserer, sammenligner* og *formulerer hypotese* også gir uttrykk for elevenes bruk av eksempler. I delkapittel 4.2.1 og 4.2.2 vil jeg gå nærmere inn på hvordan elevene brukte eksemplene i henholdsvis prosesser med søk etter likheter og ulikheter og i prosesser med validering. En slik todeling er hensiktsmessig fordi det kan tydeliggjøre forskjellen på hvordan eksemplene blir brukt som støtte i de to typene resonneringsprosesser. På den måten vil jeg kunne beskrive hva som kjennetegner deres deltakelse en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering.

### 4.2.1 Bruk av eksempler i prosesser med søk etter likheter og ulikheter

I arbeid med oppgave A formulerte den første gruppa en hypotese etter ha å sett på ett eksempel. I utdraget under blir det så tatt initiativ til å undersøke et nytt eksempel.

| | | |
|---|---|---|
| 1.044 | Even: | så uansett hvilken vei så blir det på en måte jevnt |
| 1.045 | Marlon: | for eksempel hvis, hvis vi tar dette her, tar vi de her pluss sånn *(drar blyanten opp langs den ene diagonalen i ett kvadrat)*, det blir samme svaret som pluss sånn *(drar blyanten opp langs den andre diagonalen)* |
| 1.046 | Rina: | prøv å ta en som er utenfor da, ta en som er, sitter litt sånn rart |
| 1.047 | Marlon: | oke – |
| 1.048 | Rina: | – sånn der *(viser til kvadratet med hjørner 4-6-24-26)* |

(...)

| | | |
|---|---|---|
| 1.068 | Rina: | ja men likevel, /alle blir like/ |
| 1.069 | Even: | jeg tror /alle blir like/, jeg har holdt på å regna på en |
| 1.070 | Adrian: | ja, alle er like |
| 1.071 | Even: | mhm |
| 1.072 | Adrian: | eller... ja, alle er like |
| 1.073 | Even: | men hvorfor? |

Utdraget over starter med at Even forsøker å *begrunne hvorfor* tallene i de to diagonalene får lik sum i det første eksempelet de ser på. Han gir uttrykk for at det har en sammenheng med at tallene jevnes ut: «så blir det på en måte jevnt» (1.044). I den neste linja forsøker Marlon å begrunne, men referer egentlig tilbake til hypotesen når han sier at når du plusser tallene i den ene diagonalen, så blir det samme svaret som når du plusser tallene i den motstående diagonalen. Rina tar så initiativ til å inkludere et nytt eksempel som det jeg tolker som en reaksjon på mangelfulle forklaringer, og *genererer nytt eksempel* (1.046). Når hun trekker inn et nytt eksempel, tolker jeg det som at hun *driver resonneringen videre*. Dette fordi det kan tyde på at hun søker etter en bedre forklaring, og at et nytt eksempel potensielt kan bidra til økt forståelse for relasjonene mellom tallene i kvadratene, og på den måten bidra til validering av hypotesen på et senere tidspunkt.

Mellom linje 1.048 og 1.068 regner elevene på tallene i diagonalene i det nye eksempelet, og det oppstår en diskusjon om en regnefeil som jeg velger å ikke gå i detalj på her. Fra linje 1.068 bruker elevene eksempelet til å bekrefte hypotesen, og det ser ut til at den styrkede evidensen fra det nye eksempelet gir støtte til hypotesens validitet fordi elevene uttrykker nå at «alle er like». Det betyr ikke at de anser evidensen som en matematisk gyldig begrunnelse, noe Even bekrefter når han spør «hvorfor» (1.073). Det som heller skjer er at de bruker evidensen fra de to eksemplene og *generaliserer* funnet til å gjelde alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet (1.068-1.072). Altså formulerer de en narrativ om alle tilfellene i mengden basert på de to eksemplene, og deltar dermed, ved hjelp av eksempler, i resonneringsprosessen generalisering.

Elevene i gruppe 1 jobbet utforskende med oppgave B, og begynte etter hvert å undersøke større kvadrater enn tre-ganger-tre-kvadrater. Det ble initiert til å undersøke kvadratet som utgjorde hele hundrerkartet, se figur 4.3. Elevene støtte imidlertid på et problem da et ti-ganger-ti-kvadrat ikke har ett tall som utgjør midten av kvadratet. Etter en diskusjon frem og tilbake fant de ut at gjennomsnittet på de fire tallene som utgjorde midten av kvadratet, måtte ha samme funksjon som det ene tallet som utgjorde midten av et kvadrat med odde antall ruter i hver side. I utdraget under har elevene regnet ut gjennomsnittet av de fire hjørnene i kvadratet på ti ganger ti ruter, og jobber med å undersøke om hypotesen de tidligere har formulert stemmer også for dette kvadratet.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Figur 4.3: Eksempler brukt av gruppe 1 i oppgave B**

1.333 Marlon: så hv-, vi sier gjennomsnittet, f-, de fire hjørnene blir femti komma fem *(impliserer hjørnene 1, 10, 100 og 91)*

1.334 Even: vi kan finne gjennomsnittet på de *(peker på henholdsvis 45, 46, 56 og 55)* hvis vi tar og summer sammen de og deler på

| | | |
|---|---|---|
| | | fire.. da er jeg sik- nesten sikker på at det blir.. femti komma fem<br>*(elevene regner)* |
| 1.335 | Even: | ja da ble det femti komma fem |
| 1.336 | Marlon: | ja d- det ble likt! |
| 1.337 | Even: | svaret på det her kvadratet *(peker på henholdsvis 34, 37, 67 og 64)* det er jeg meget sikker på at også blir femti komma fem, fordi her har jeg bare utvida det her lille kvadratet i midten her, også vet jeg at det store kvadratet her det blir femti komma fem og det her blir femti komma fem.. da tror jeg også at alle kvadratene utover sånn *(viser til kvadratene som utvides fra det innerste kvadratet og ut til det ytterste kvadratet i hundrerkartet)* blir femti komma fem |
| 1.338 | F: | okei hvorfor det da? |
| 1.339 | Even: | fordi vi har funnet ut at, jo både stort og lite blir det samme, det er bare midtpunktet.. som følger etter |

I dette utdraget blir det først introdusert ett eksempel: det røde kvadratet som utgjør hele hundrerkartet. Elevene *formulerer hypotese* om at gjennomsnittet av tallene i de fire hjørnene vil være likt gjennomsnittet av de fire tallene som utgjør midten av kvadratet (det blå, stiplede kvadratet) (1.334). De regner ut, *sammenligner* resultatet, og finner at kvotienten blir lik (1.335). Even *driver resonneringen videre* når han *genererer nytt eksempel* i linje 1.337, der han antar at kvadratene som utvides fra det blå stiplede kvadratet vil ha samme gjennomsnitt som det blå stiplede kvadratet og det røde kvadratet, fordi «midtpunktet [...] følger etter» (1.339). Her bruker han de to eksemplene, samt det stiplede kvadratet, til å konstruere en narrativ som gjelder alle kvadrater som utvides fra ett gitt midtpunkt, i hans tilfelle midtpunktet 45-46-55-56, altså *generaliserer* han når han gir uttrykk for at alle kvadratene vil ha likt gjennomsnitt. Også i dette utdraget har eksemplene blitt brukt som en støtte til flere prosesser knyttet til søk etter likheter og ulikheter, og elevene har dermed deltatt i resonneringsprosessen eksemplifisering som en følge av deres bruk av eksempler.

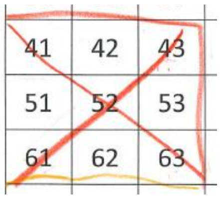
### 4.2.2 Bruk av eksempler i prosesser med søk etter validering

I diskusjonene ble eksempler også brukt i valideringsfasen i elevenes matematiske resonnering. De forholdt seg til konkrete eksempler i forsøket på å *begrunne hvorfor* hypotesene sine stemte. Ved hjelp av utdragene under vil jeg vise hvordan elevene brukte eksemplene til dette. De første to utdragene er hentet fra gruppe 2 sitt arbeid med oppgave A, og viser til to ulike måter å bruke eksemplene til validering på. Det første utdraget starter etter at elevene har testet hypotesen sin på tre ulike eksempler og fått bekreftet at hypotesen stemmer for de tre.

| | | |
|---|---|---|
| 2.186 | F: | hvorfor er det sånn? |
| 2.187 | Zahra: | det jeg har skjønt er at hvis den her *(peker tilsynelatende tilfeldig på arket)* blir samme og den el- vi har prøvd det tre ganger nå og alle har alltid hatt det samme tallet eller summen da.. og jeg tenker at alle de andre også blir det |
| 2.188 | F: | du tenker det fordi du har prøvd det på tre? |
| 2.189 | Zahra: | ja, eller hvis vi sier for eksempel dem to *(peker på hundrerkartet,* |

*uklart hva hun peker på)* og dem blir jo nittiseks, nei nittifem.. også tenker jeg at kanskje noen andre tall her også blir nittifem.. det er litt vanskelig å forklare

Det ser ut til at Zahra forsøker å finne en forklaring på hvorfor hypotesen stemmer når hun sier at «hvis den her blir samme og den el-» (2.187). Hun stopper likevel midt i setningen, noe som kan tyde på at hun finner det utfordrende å begrunne hvorfor. Så tar utsagnet en vending, der hun underbygger hypotesen ved å referere til at den stemmer på de tre eksemplene de har undersøkt, og at den dermed vil stemme på alle andre kvadrater. I dette utsagnet gir Zahra et empirisk argument: hypotesen stemmer fordi den stemmer på tre eksempler. Jeg tolker det likevel slik at eksemplene brukes i det innledende søket etter validering av hypotesen, da spørsmålet mitt ser ut til å medføre at Zahra blir i tvil på om empirisk argument er nok. Hun fortsetter så søket etter en forklaring på hypotesen (2.189), og eksemplene kan da se ut til å fungere som kun en foreløpig bekreftelse i søket etter validering, og ikke en generell begrunnelse. I utdraget under gjør Emran en oppdagelse knyttet til et av de tre eksemplene, som kan ses i figur 4.4, og forsøker å gi en begrunnelse for hypotesen med bakgrunn i denne oppdagelsen.




**Figur 4.4: Eksempel brukt av gruppe 2 i oppgave A**

| | | |
|---|---|---|
| 2.191 | Emran: | du plusser nesten det samme! derfor når vi gjør nedover det er seks fem fire uansett hva |
| 2.192 | Zahra: | ja |
| 2.193 | Emran: | også her er det fire fem seks uansett hva, vi plusser det samme bare at tallene er ikke like stor på.. |
| 2.194 | Zahra: | ja |
| 2.195 | Emran: | hver av, hva var det – |
| 2.196 | Zahra: | – det er [akkurat som] |
| 2.197 | Emran: | [kolonnene] |
| 2.198 | Zahra: | hvis femti pluss femti og sytti pluss tretti |

Her gjør elevene et forsøk på å *begrunne hvorfor* hypotesen stemmer. De tar utgangspunkt i eksempelet vist over, og sier at summen av tallene i de to diagonalene blir lik fordi man «plusser det samme» (2.193), og referer så til at de kan addere $60 + 50 + 40 = 40 + 50 + 60$ når Emran sier at det er «seks fem fire uansett hva» (2.191) og «også her er det fire fem seks uansett hva» (2.193). Her benytter de seg av den kommutative loven for addisjon i forsøket på å *begrunne hvorfor* hypotesen stemmer, fordi de påpeker at de adderer de samme tallene. Når Emran sier at «tallene ikke er like stor på hver av [...] kolonnene» (2.193-2.197), forstår jeg det slik at han mener det ikke har noen betydning hvilken rekkefølge tallene adderes i, da summen uansett blir lik. Den kommutative loven fungerer i dette tilfellet som en hjemmel i det Jeannotte og Kieran (2017) omtaler som en begrunnelse. Eksempelet i utdraget fungerer da som data i begrunnelsen fordi det blir gitt en hjemmel på bakgrunn av eksempelet. Dermed støtter eksempelet valideringsprosessen. På den måten kan det sies at elevene deltar i resonneringsprosessen eksemplifisering.

### 4.2.3 Oppsummering

Elevene i denne studien har generert mange eksempler i form av kvadrater i hundrerkartet. Noen av eksemplene har blitt generert som følge av oppgavens formulering, men elevene har selv tatt initiativ til å generere flere eksempler, som så har blitt brukt i resonneringsprosesser knyttet til både søk etter likheter og ulikheter og søk etter validering. Det som går igjen hos begge elevgruppene, i arbeidet med begge oppgavene, er at utforsking av første eksempel har ført til formulering av hypotese, som deretter har vært etterfulgt av testing av hypotesen på minst ett nytt eksempel. Eksemplene har så blitt gjenstand for både sammenligning og generalisering, og begrunnelser. Når elevene genererer eksempler som brukes til ulike resonneringsprosesser, deltar de i eksemplifisering. Deres deltakelse i matematisk resonnering kan så kjennetegnes ved en utstrakt bruk av eksempler til ulike formål i resonneringsprosessen.

## 4.3 Begrunnelser

I denne studien ga elevene begrunnelser for hypotesene sine, og jeg vil i dette delkapittelet presentere to av de. Begge begrunnelsene er gitt for oppgave A, og den første anser jeg som matematisk gyldig, imens den andre er et empirisk argument. Jeg anser begrunnelse som et kjennetegn på elevenes deltakelse i matematisk resonnering fordi de med dem forsøker å argumentere for hypotesen om at summen av tallene langs diagonalene i tre-ganger-tre-kvadrater alltid er like. Likevel forekommer det aldri en deduktiv restrukturering av begrunnelsene elevene gir, noe som gjør at deres forklaringer forblir begrunnelser, og ikke bevis for hypotesen. Jeg vil i det videre presentere de to begrunnelsene, hvorav første er framsatt i gruppe 1 og andre er framsatt i gruppe 2, ved hjelp av begreper fra Toulmin (2003) og Jeannotte og Kieran (2017). Deretter vil jeg sammenligne gruppenes begrunnelser, med formål om å beskrive strukturelle forskjeller i de to begrunnelsene.

### 4.3.1 Begrunnelser framsatt i gruppe 1

Jeg har i figur 4.6 presentert min analyse av elevgruppas begrunnelse for hypotesen de formulerte i oppgave A. For at analysen skal gi mening, ser jeg det som nødvendig å gi en kort beskrivelse av elevgruppas arbeid mot den endelige begrunnelsen. Jeg vil underveis referere til elementer i det strukturerte argumentet. Elevene i gruppe 1 startet argumentet med å gjøre det oppgaven ba de om, altså å addere tallene langs diagonalene i et tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet, for så å sammenligne resultatet. De konkluderte umiddelbart med at tallene langs diagonalene i det aktuelle kvadratet ($D_1$) fikk lik sum, og rettferdiggjorde først ved hjelp av utregning ($H_1$). På nytt spørsmål om «hvorfor», rettferdiggjorde de med at «3 er to mer enn 1,og 23 er to mer enn 21» ($H_2$). I $H_2$ kan det se ut til at de forsøker å uttrykke en generell narrativ om kvadratene når de påpeker relasjonene mellom tallene. Da jeg videre spurte «vil det alltid være slik?» formulerte elevene en hypotese om at tallene langs de to diagonalene i alle tre-ganger-tre-kvadrater alltid vil bli lik ($K_2$).

Med utgangspunkt i informasjon fra $D_1$, $H_1$, $H_2$ og $K_1$, begynte elevene å utforske et nytt eksempel ($D_2$). De fikk bekreftet at hypotesen stemte, og når de på nytt ble utfordret med spørsmålet «hvorfor», gir de begrunnelsen i utdraget under. I forkant av utdraget blir det kommentert at man kan se bort fra tallet i midten, og de snakker derfor kun om hjørnene i kvadratet.

| | | |
|---|---|---|
| 1.104 | Rina: | ehm, seks er jo to tall.. eller siffer mer enn fire, og det samme er jo det som skjer her *(peker på 24 og 26)* |
| 1.105 | Even: | ja |
| 1.106 | Rina: | så det her, tenk at det her *(peker på 4)* er lite og det *(peker på 6)* er større.. hvis du plusser det *(peker på 4)* med det *(peker på 24)* så er jo det her liksom sånn lite tall.. så det blir på en måte, liksom |
| 1.107 | Marlon: | jeg skjønner hv – |
| 1.108 | Rina: | – mindr-, fordi, mm hvis den her *(peker på 4)* får en støtte av den der *(peker på 26)*, så blir den større.. og den her *(peker på 24)*, hvis den får en støtte av den *(peker fra 6 til 24)* blir den *(impliserer tallet 6)* mindre, så det blir det samme tallet |

I utdraget formulerer Rina det jeg tolker som en begrunnelse for hypotesen de formulerte for alle tre-ganger-tre-kvadrater. Her forsøker hun å få frem at tallene langs de to diagonalene i alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet får lik sum fordi 1 kan «forflyttes» innad i hver diagonal, slik at de dermed adderer de samme addendene i begge diagonalene. Det vil si at 1 kan subtraheres fra 26 og adderes på 4, og 1 kan subtraheres fra 6 og adderes på 24. I figur 4.5 har jeg illustrert et originalt og et bearbeidet kvadratet. Da står man igjen med tallene 25 og 5 i begge diagonalene. Rina forklarer dette som at det ene tallet gir «støtte» (1.108) til det andre tallet. Hennes utsagn kan her forstås som at $4 + 26 = 6 + 24$ fordi du alltid kan forflytte 1 innad på hver side av likhetstegnet, $(4 + 1) + (26 - 1) = (6 - 1) + (24 + 1)$, slik at du adderer de samme addende, $5 + 25 = 5 + 25$, på hver side.

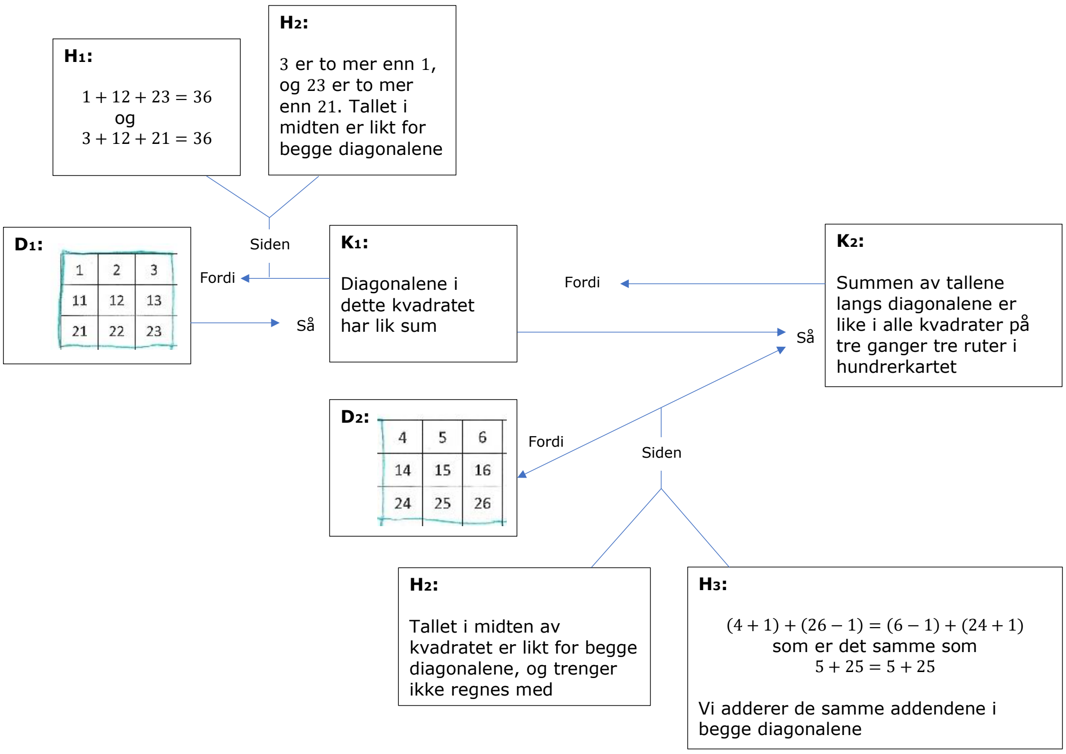
| | | |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| 14 | 15 | 16 |
| 24 | 25 | 26 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 |
| 14 | 15 | 16 |
| 25 | 25 | 25 |

**Figur 4.5: Originalt og bearbeidet kvadrat**

Går man mer i detalj på en slik begrunnelse, ut over det elevene uttrykker i sitt arbeid, baserer en slik «utjevning» seg på at $0$ er identitetselementet til addisjon og at $-1$ er additiv invers til $1$. Fordi $1 - 1 = 0$ og $n + 0 = n$, får vi at $(n + 11) + (n - 11) + 0 = (n - 9) + (n + 9) + 0$, der $n$ er tallet i midten av kvadratet, som er det samme som $(n + 11) + (n - 11) + (1 - 1) = (n - 9) + (n + 9) + (1 - 1)$. Videre er dette likt $\big((n + 11) - 1\big) + \big((n - 11) + 1\big) = \big((n - 9) - 1\big) + \big((n + 9) + 1\big)$, som da blir $(n + 10) + (n - 10) = (n - 10) + (n + 10)$. Fordi addisjon er kommutativt, står man altså igjen med to helt like uttrykk på begge sider av likhetstegnet.

Elevene gir i dette tilfellet data, hjemler og konklusjoner, som de bruker til å endre den epistemiske verdien til hypotesen fra sannsynlig til sann. På den måten kan de sies å delta i resonneringsprosessen begrunnelse. Begrunnelsen kunne vært videreutviklet til et generisk argument, da den tar utgangspunkt i et eksempel, men elevene gir ikke eksplisitt uttrykk for at det samme gjelder for alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet, altså blir ikke eksempelet brukt til å uttrykke generelle egenskaper og strukturer for alle tilfellene. Dessuten mangler begrunnelsen en deduktiv restrukturering, som medfører at det ikke kan kategoriseres som et bevis. De kunne eksempelvis ha bygd argumentet på aksepterte narrativer som for eksempel at «du kan legge til og trekke fra det samme på begge sider av likhetstegnet, og sidene vil forbli like».




**Figur 4.6: Analysert begrunnelse framsatt av gruppe 1**

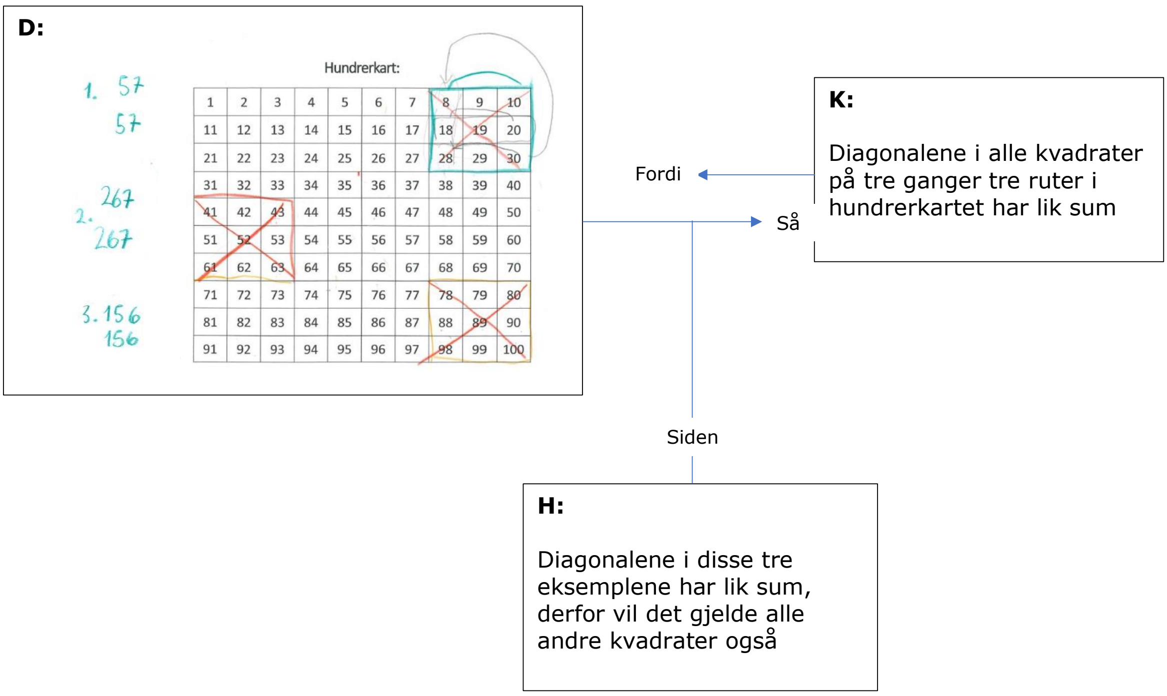
## 4.3.2 Begrunnelser framsatt i gruppe 2

Elevene i gruppe 2 framsatte først et empirisk argument, før de senere utarbeidet en lignende begrunnelse som i gruppe 1, der de «jevnet ut» med 2 i én av diagonalene, slik at den ble lik den motstående diagonalen. Jeg velger å presentere det empiriske argumentet her, for å kunne fremheve strukturelle forskjeller i en begrunnelse som er matematisk gyldig og en som ikke er det. Det analyserte argumentet kan ses i figur 4.7, der hundrerkartet de arbeidet med kan ses til høyre i figuren, i forstørret versjon for bedre lesbarhet. Gruppe 1 startet også arbeidet med å gjøre det oppgaveteksten ba de om, altså velge seg et tre-ganger-tre-kvadrat i hundrerkartet, legge sammen tallene i de to diagonalene, og sammenligne resultatet. De begynte med kvadrat 1 og konkluderte med at diagonalene ble like. Elevene uttrykte så at de trodde det samme kunne gjelde alle slike kvadrater, men én av elevene ga uttrykk for at hun trodde det var «noe lureri» og at en av kvadratene ikke ville stemme. Derfor fortsatte de å undersøke både kvadrat 2 og kvadrat 3, før de ga argumentet i utdraget under.

2.186 F: hvorfor er det sånn?

2.187 Zahra: det jeg har skjønt er at hvis den her *(peker tilsynelatende tilfeldig på arket)* blir samme og den el- vi har prøvd det tre ganger nå og alle har alltid hatt det samme tallet eller summen da.. og jeg tenker at alle de andre også blir det

Zahra konkluderer her med at summen av tallene langs diagonalene vil være like for alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet (K), basert på de tre eksemplene (D). Hun gir så en hjemmel som uttrykker at konklusjonen må stemme for alle tilfeller fordi den har stemt på de tre tilfellene de har undersøkt (H). Her blir det altså ikke påpekt noen generelle egenskaper eller strukturer, og argumentet er derfor kun et empirisk argument. Argumentet regnes likevel som en begrunnelse, da det inkluderer både data, hjemmel og konklusjon. Argumentet endrer i tillegg konklusjonens epistemiske verdi fra sannsynlig til mer sannsynlig fordi det viser at konklusjonen i hvert fall er sann for de tre tilfellene de har undersøkt.




**Figur 4.7: Analysert begrunnelse framsatt i gruppe 2**

## 4.3.3 Sammenligning og oppsummering av de framsatte begrunnelsene

Som vist har de to gruppene gitt to begrunnelser som skiller seg fra hverandre ved at det ene er matematisk gyldig, imens det andre er et empirisk argument og dermed ikke matematisk gyldig. Den første begrunnelsen har også det Yackel & Hanna (2003) omtaler som en forklarende funksjon, da den gir innsikt i hundrerkartets struktur, altså innsikt i *hvorfor* påstanden er sann i tillegg til at den verifiserer påstanden. Til forskjell gir ikke det empiriske argumentet informasjon om egenskaper eller strukturer i hundrerkartet, og gir derfor heller ingen innsikt i hvorfor påstanden eventuelt skulle være sann. Dermed verifiseres påstanden kun for de tre tilfellene som er undersøkt, da argumentet ikke kan generaliseres.

Det er to aspekter av disse to begrunnelsene jeg opplever som særlig interessante og som skiller de fra hverandre. Det første er knyttet til fremgangsmåte i valg av eksempler, og det andre til hjemlene som blir gitt. I gruppe 1 velger elevene først ett eksempel, konkluderer med at summen av tallene langs diagonalene er like, formulerer en hypotese som så testes ut på et nytt eksempel med krav om at det må «sitte litt sånn rart». Deretter blir det dratt en konklusjon for alle tre-ganger-tre-kvadrater i hundrerkartet, og gitt hjemler for denne. I gruppe 2 stilles det ingen eksplisitte krav til eksemplene, og de velger nye eksempler med utgangspunkt i oppgaveteksten, heller enn med utgangspunkt i en nysgjerrighet på hvorfor summen langs diagonalene blir like. Dette fordi de på et tidspunkt stiller spørsmålet «hvor mange skal vi gjøre det på egentlig?». Etter å ha testet på tre eksempler, ser de ut til å være overbevist selv, og de gir dermed et empirisk argument. I tilknytning til hjemlene, kan det hos gruppe 1 bli observert mer generelle narrativer i hjemlene, der de forsøker å påpeke relasjoner mellom tallene i kvadratene. De påpeker blant annet at man kan se bort fra tallet i midten fordi det er likt for begge diagonalene, og at det er relasjoner mellom tallene i hjørnene på kvadratene. Videre er det hele fire hjemler for $K_2$ knyttet til to ulike eksempler, noe som tyder på at de utforsker og undersøker i forsøk på å forklare hvorfor påstanden kan stemme. Til forskjell har det empiriske argumentet hos gruppe 2 kun én hjemmel knyttet til tre ulike eksempler, som da kun tar for seg at påstanden har stemt for disse tre eksemplene. På den måten kan det sies å være noen vesentlige forskjeller i strukturen til en gyldig matematisk begrunnelse og en begrunnelse som ikke er matematisk gyldig.

## 4.4 Sosialt samspill

Sosialt samspill er ikke en del av det teoretiske rammeverket anvendt i denne studien. Med kommognisjon som et overordnet rammeverk for studien, anser jeg likevel det sosiale samspillet som en viktig del av matematisk resonnering. Dette fordi samspillet på mange måter former arbeidet til elevene, og jeg ser det derfor som et kjennetegn ved elevenes deltakelse i matematisk resonnering. Jeg har valgt å beskrive det sosiale samspillet ved hjelp av kodene *inkluderer, bekrefter* og *uttrykker uenighet.* Inkludering av hverandre kommer til syne gjennom at elevene stiller spørsmål, forklarer og hjelper hverandre, noe jeg vil vise ved hjelp av utdraget under.

| | | |
|---|---|---|
| 1.221 | Rina: | blir det ikke tjuefem komma fem? hvis jeg ikke tar feil, Marlon har du.. |
| 1.222 | Marlon: | hva?... for hvis det, jeg fant sånn her førtiåtte også skal jeg ta delt på fire? |
| 1.223 | F: | ja |
| 1.224 | Marlon: | okei |
| 1.225 | Rina: | ja, det blir tjuefem komma fem |
| 1.226 | Marlon: | jeg fikk tolv |
| 1.227 | Rina: | hm? |
| 1.228 | Marlon: | jeg fikk tolv |
| 1.229 | Even: | ja, det er riktig |
| 1.230 | Rina: | du legger sammen.. |
| 1.231 | Even: | [du skal legge sammen alle hjørnene, også skal du dele det på..] |

| | | |
|---|---|---|
| 1.232 | Marlon: | [nei, se.. snakker du om hjørnet her?] *(utydelig hvilket han mener)* |
| 1.233 | Rina: | ja, hjørnet her pluss hjørnet der pluss hjørnet der pluss hjørnet der *(usikkert hvilket kvadrat hun viser til)* |
| 1.234 | Even: | ja, det kan du også gjøre, men – |
| 1.235 | Marlon: | du skal gjøre den den den og den *(peker på henholdsvis 1, 3, 23 og 21)* |

Rina *inkluderer* resten av gruppa når hun noe ydmykt spør «blir det ikke...?» (1.221) og åpner på den måten for at andre kan komme med innspill. Spørsmålet bærer også preg av en usikkerhet som kan tyde på en søken etter hjelp fra de andre. Dette blir forsterket når hun konkret *inkluderer* Marlon med starten på et spørsmål som ikke blir fullført. Marlon *inkluderer* igjen Rina når han spør om hun «snakker om hjørnet her?» (1.232). på den måten viser han en interesse for hennes tankegang. Når det viser seg at Rina har regnet på et annet eksempel enn den gruppa sammen ble enige om, *inkluderer* Marlon Rina ved å hjelpe henne med å oppklare hvilket kvadrat de andre snakket om (1.235). Even *bekrefter* dessuten Rina sin tankegang når han bekrefter at det hun har gjort også er riktig, det var bare at de egentlig skulle se på et annet eksempel (1.234). At elevene *bekrefter* hverandre kom også til syne gjennom at de støttet hverandres utsagn, slik utdraget under viser.

| | | |
|---|---|---|
| 2.191 | Emran: | du plusser nesten det samme! derfor når vi gjør nedover det er seks fem fire uansett hva |
| 2.192 | Zahra: | ja |
| 2.193 | Emran: | også her er det fire fem seks uansett hva, vi plusser det samme bare at tallene er ikke like stor på.. |
| 2.194 | Zahra: | ja |
| 2.195 | Emran: | hver av, hva var det – |
| 2.196 | Zahra: | – det er [akkurat som] |
| 2.197 | Emran: | [kolonnene] |
| 2.198 | Zahra: | hvis femti pluss femti og sytti pluss tretti |

Zahra *bekrefter* her Emran sine utsagn ved å si «ja» (2.192 og 2.194) og på den måten uttrykke at hun er enig i det han sier. Hun *bekrefter* også Emrans utsagn når hun sammenligner det han sier med et eksempel fra aritmetikken de kjenner fra før når hun sier «det er akkurat som..» (2.197) og «hvis femti pluss femti og sytti pluss tretti» (2.198).

I gruppe 1 sitt arbeid med oppgave A dukker det opp en diskusjon om hypotesen de har formulert, om at diagonalene i alle kvadrater i hundrerkartet får lik sum. De har testet hypotesen på et fem-ganger-fem-kvadrat, og Even har kommet med et forslag om at diagonalene også vil bli like dersom de ser på hele hundrerkartet. Jeg stilte på et tidspunkt spørsmålet i 1.157, der utdraget under starter.

| | | |
|---|---|---|
| 1.157 | F: | kommer det alltid til å være likt uansett hvilken størrelse kvadratene har? |
| 1.158 | Marlon: | ikke, jeg tror ikke alltid da men |
| 1.159 | F: | okei, hvorfor ikke? |
| 1.160 | Marlon: | fordi, hvis du går sånn.. hele rekka sånn *(peker på diagonalen som går fra 100 til 1 i hele hundrerkartet)*, det blir mer enn – |
| 1.161 | Even: | nei – |

1.162 Marlon: hele rekka sånn *(peker på diagonalen som går fra 10 til 91)*
1.163 F: hvorfor tenker du at det vil bli mer?
1.164 Even: jeg tror ikke det

(...)

1.177 Marlon: nei det må bli like mye!

Marlon *uttrykker uenighet* når han sier at han er uenig i den hypotesen som tidligere har blitt formulert (1.158). Han forsøker å gi en forklaring på hvorfor han er uenig. Even bryter inn og *uttrykker uenighet* i Marlon sin tankegang gjennom ordene «nei» og «jeg tror ikke det» (1.161 og 1.164). Etter dette blir Marlon sittende og se på hundrerkartet imens diskusjonen fortsetter videre. I linje 1.177 utbryter han at «det blir like mye». Det at Even *uttrykker uenighet* med Marlons tankegang kan se ut til å bidra til at Marlon går tilbake til hundrerkartet for å se på tallene nok en gang, og gjennom denne handlingen endre tankegangen sin. På den måten kan uenighet se ut til å være et positivt bidrag i resonneringens progresjon. Dersom de andre hadde godtatt Marlon sitt utsagn i linje 1.160 og 1.162, ville kanskje resonneringen stoppet opp fordi det da ikke lenger er noe som skal begrunnes.

### 4.4.1 Oppsummering

I samarbeid om oppgavene inkluderer elevene hverandre gjennom å stille spørsmål, forklare og hjelpe hverandre. De bekrefter hverandres utsagn og tankegang, og de er tilsynelatende ikke redd for å uttrykke uenighet når de ikke er enige i andres utsagn. Dette kan se ut til å være positivt for progresjonen i den matematiske resonneringen gruppene jobber sammen om.

## 4.5 Oppsummering av funn

Fra analysen har det blitt utarbeidet fire temaer som jeg anser som kjennetegn på elevenes deltakelse i matematisk resonnering: framsetting av hypoteser, utstrakt bruk av eksempler, begrunnelser og sosialt samspill. Temaet framsetting av hypoteser viser at elevene *formulerer en hypotese* som et resultat av at de *sammenligner* og *generaliserer*. De framsetter hypoteser i det innledende arbeidet av begge oppgavene, og i arbeid med oppgave B framsetter de mange hypoteser i forbindelse med nye oppdagelser, som ikke blir begrunnet. Analysen viser at elevene har en utstrakt bruk av eksempler, der de *genererer eksempler*, *driver resonneringen videre og begrunner hvorfor* med hjelp fra eksempler, og de *tester hypoteser* på eksempler. Eksemplene blir brukt som støtte når de *sammenligner*, *generaliserer* og *formulerer en hypotese.* Temaet begrunnelser viser hva elevene bruker som data og hjemmel for hypotesene sine. Temaet sosialt samspill gir et innblikk i hvordan elevene *inkluderer* og *bekrefter* hverandre, og hvordan de *uttrykker uenighet.*

# 5 Diskusjon

I denne studien har jeg stilt følgende forskningsspørsmål: «hva kjennetegner to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering?». Jeg har funnet at elevene framsetter mange hypoteser, hvor de i dette arbeidet deltar i resonneringsprosessene formulering av hypotese, sammenligning og generalisering. De har utstrakt bruk av eksempler, og deltar i resonneringsprosessen eksemplifisering ved å bruke eksemplene som støtte i prosesser knyttet til søk etter likheter og ulikheter og søk etter validering. I valideringsfasen har elevene møtt utfordringer knyttet til begrunnelsene de har gitt. De har deltatt i et sosialt samspill, der de har inkludert og bekreftet hverandre og uttrykt uenighet, og på den måten bidratt i den sosiale interaksjonen. I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene opp mot relevant litteratur og relatere de til praksis i skolen. Jeg starter med å diskutere elevenes mange hypoteser og få begrunnelser i avsnitt 5.1. I avsnitt 5.2 ser jeg nærmere på elevenes bruk av eksempler. Videre ser jeg på elevenes utfordringer i valideringsfasen i avsnitt 5.3, før jeg i avsnitt 5.4 går nærmere inn på betydningen av den sosiale interaksjonen. Avslutningsvis vil jeg diskutere studiens begrensninger og bidrag i avsnitt 5.5.

## 5.1 Mange hypoteser, få begrunnelser

Elevene i denne studien framsatte mange hypoteser, særlig i arbeidet med oppgave B. Mange av hypotesene ble likevel ikke begrunnet eller viet mye oppmerksomhet, da elevene heller utforsket videre i søken etter nye oppdagelser. Dette til tross for at elevene faktisk hadde søkt begrunnelse for oppgave A, og til tross for mine stadige initieringer til å begrunne hypotesene. I dette delkapittelet skal jeg diskutere dette funnet opp mot relevant litteratur.

I arbeidet med oppgave B ga elevene som nevnt svært få begrunnelser, til tross for at det ble formulert mange hypoteser. Balacheff (1991) påpeker at elevers manglende engasjement i valideringsprosesser ikke nødvendigvis skyldes at de ikke evner å gi bevis for hypotesene, men at de ikke ser noen grunn til det. I likhet fremmer Harel (1998) at elever må oppleve et intellektuelt behov for å lære det man ønsker at de skal lære, og at de derfor må gis oppgaver som korresponderer med dette behovet hos elevene. Videre påpeker Knuth (2002) at dersom elever møter bevisoppgaver der de intuitivt opplever den matematiske påstanden som åpenbart sann, kun vil anse bevis som en prosedyre for å bekrefte noe som allerede er sant. Mariotti (2006) hevder i likhet at dersom bevis ikke bidrar til kunnskapskonstruksjon, vil aktiviteten også oppleves som meningsløs for elevene. Elevene i denne studien sitt manglende engasjement kan således være et resultat av at oppgavene som ble gitt ikke traff deres intellektuelle behov. Det er mulig at hypotesene de framsatte ble opplevd som åpenbare, og at de dermed ikke så det som nødvendig å gi en begrunnelse eller et bevis for hypotesene. Denne antakelsen styrkes av deres mangelfulle respons på mine initieringer til å undersøke hvorfor.

Likevel kan elevenes manglende engasjement i begrunnelser også være et resultat av at elevene i denne studien sannsynligvis ikke har blitt gitt opplæring i matematisk resonnering. Flere studier der elevene eksplisitt har blitt undervist i rettferdiggjøring, har også vist til resultater der elevene med suksess har deltatt i bevisprosesser (se f.eks. Ball, 1991; Lampert, 1990; Yackel & Cobb, 1994). Dette kan ses i sammenheng med Sfards (2017) påstand om at elever kan ha en ritualisert deltakelse i diskursive aktiviteter fordi de ikke har lært metareglene i aktiviteten. Dersom elevene i denne studien ikke har lært metaregler for underbygging av hypoteser, vet de sannsynligvis ikke hvordan de skal bevise hypotesene eller hva som kreves for at et argument skal aksepteres som bevis. Med min deltakelse i samtalene som tilrettelegger heller enn underviser, hadde de heller ikke noen å «imitere». Dersom elevene da heller ikke har blitt undervist i resonnering tidligere, kan det ha medført at de ikke visste hvordan de skulle argumentere for hypotesene, og derfor ikke opplevde det som naturlig å prøve heller. Metaregler er ifølge Sfard (2008) historisk etablerte praksiser som man ikke kan forvente at elever finner opp selv. Disse metareglene må nødvendigvis læres i en diskurs der de blir praktisert. Elevenes få forsøk på begrunnelser kan dermed skyldes at de i liten grad har deltatt i en diskurs der begrunnelser har blitt praktisert, altså at de ikke har fått opplæring i matematisk resonnering.

## 5.2 Bruken av eksempler

Elevgruppene i denne studien hadde utstrakt bruk av eksempler i form av ulike kvadrater i hundrerkartet. Eksemplene støttet alle resonneringsprosessene elevene deltok i, og når de forsøkte å forklare sammenhenger var det alltid med referanse til ett eller flere kvadrater. Jeg anser det derfor som at deres matematiske resonneringsprosesser fant sted med stor grad av støtte i eksempler. Eksemplene hadde ulike funksjoner for elevene, og slik jeg har vist deltok elevene i resonneringsprosessen eksemplifisering da eksemplene fungerte som en støtte i andre resonneringsprosesser. I dette delkapittelet skal jeg se nærmere på og diskutere elevenes bruk av eksempler.

Som nevnt deltok elevene i resonneringsprosessen eksemplifisering, slik den er definert hos Jeannotte og Kieran (2017). For elevene i denne studien var det resonneringsprosessene sammenligning, generalisering, formulering av hypotese og begrunnelse som ble støttet av eksemplifiseringsprosessen. På den måten underbygger funnene i denne studien Jeannotte og Kieran (2017) sin påstand om at eksemplifisering støtter prosesser knyttet til både søk etter likheter og ulikheter og søk etter validering.

Ozgur et al. (2019) har gjort en studie på karakteristikker ved elever som er suksessfulle i bevisprosessen og elever som ikke er suksessfulle, i tilknytning til produktiv eksempelbruk. Resultatene viste at elever som er suksessfulle i bevisprosessen, altså de som ga gyldige rettferdiggjøringer, oppdaget generelle egenskaper i eksemplene og brukte dermed eksemplene til å kommunisere et generalisert argument. Elevene som ikke var suksessfulle i bevisprosessen, brukte eksemplene til å forstå hva hypotesen uttrykte, og de testet hypotesen på flere eksempler for å verifisere hypotesen. De viste ingen indikasjon på et behov for å fortsette fra verifisering til å forstå hvorfor hypotesen kan være sann, og deres begrunnelser ble gjerne framprovosert av intervjuerne.

I min studie brukte elevene i arbeid med oppgave A eksempler til å uttrykke en generell egenskap, ved å sammenligne og generalisere egenskaper de oppdaget på tvers av eksemplene. Det medførte at begge gruppene ga en matematisk gyldig begrunnelse for hypotesen og som dermed endret hypotesens epistemiske verdi til sann. Veien fram mot denne begrunnelsen var noe ulik, og er særlig interessant i tilknytning til produktiv eksempelbruk. Gruppe 2 undersøkte mange tilfeldige eksempler, testet hypotesen flere ganger og hadde tilsynelatende ingen strategi for eksempelbruken. De ga et empirisk argument i forkant av den senere begrunnelsen, og uttrykte ved flere anledninger at «det er bare sånn». Begrunnelsen ble framprovosert av mine initieringer til resonnering. Gruppe 1 hadde til forskjell en noe mer strategisk fremgangsmåte. De undersøkte først ett eksempel og genererte så et nytt eksempel med krav om at det skulle «sitte litt sånn rart». Det kan tyde på at de hadde en strategi for eksempelvalget, og etter å ha verifisert hypotesen på de to eksemplene konstruerte de narrativer om noen generelle egenskaper ved eksemplene, som igjen førte til en begrunnelse. Gruppe 1 viste også tegn på interesse for å forklare hypotesen, da elevene selv spurte «men hvorfor?». I arbeid med oppgave A kan disse to elevgruppene sies å støtte Ozgur et al. (2019) sine funn om karakteristikker ved elever som er suksessfulle og ikke-suksessfulle i bevis. Det kommer også frem i deres arbeid med oppgave B hvor ingen av gruppene gir en validering av de mange hypotesene som blir formulert. I dette arbeidet kan det hos begge gruppene observeres et noe tilfeldig valg av eksempler og en eksempelbruk som kun verifiserer hypotesen, og ikke bidrar til å forklare hvorfor hypotesen er sann. Karakteristikkene til Ozgur et al. (2019) kan således være av nytte for lærere i arbeidet med å hjelpe elever mot en produktiv eksempelbruk, der de ikke bare bruker eksempler til å overbevise seg selv om at hypotesen er sann, men også til å forstå hvorfor den er sann.

## 5.3 Utfordringer i valideringsfasen

Analysen av elevenes diskusjoner viser at de møter utfordringer når de kommer til valideringsfasen i resonneringsprosessen. Elevene uttrykker selv ved flere anledninger at «det er vanskelig å forklare», og har vansker med å gi forklaringer som kan endre den epistemiske verdien til hypotesene fra sannsynlig til sann. I løpet av dialogene ble det, slik jeg har vist, formulert mange hypoteser, men gitt få begrunnelser. Det ble kun gitt begrunnelser for oppgave A, men disse var i seg selv mangelfulle. De manglet også en deduktiv restrukturering som kreves for å kategorisere forklaringen som bevis. Det at elevene opplever vanskeligheter knyttet til validering av hypoteser sammenfaller med de studiene Stylianides (2008) viser til, som peker på at både elever og lærere støter på vansker i møte med aktiviteter som involverer resonnering og bevis. I dette delkapittelet skal jeg se nærmere på og diskutere utfordringene elevene møter knyttet til validering av hypoteser.

Elevene i denne studien ga som nevnt uttrykk for at de opplevde det som vanskelig å forklare hvorfor hypotesene stemte. Ozgur et al. (2019) fant i sin studie at elevene som var suksessfulle i bevisprosessen, hadde en tendens til å kunne se og kommunisere en generell egenskap i eksemplene de brukte. Elevene i denne studien ga uttrykk for at de så noen generelle egenskaper i eksemplene de brukte i oppgave A, men hadde likevel utfordringer i kommunikasjonen av disse egenskapene, noe de ga uttrykk for selv. Dette kan støttes av Gregorió og Planas (2001) sin forskning som viser at flerspråklige elever møter konflikter i matematikken som ikke bare er relatert til et språkhinder, men heller et bredere kommunikasjonshinder, da matematikk har en kommunikativ natur. Det at flertallet av elevene i denne studien er flerspråklige kan derfor ha preget funn jeg har gjort uten at det er noe jeg kan si med sikkerhet. Forskning påpeker at det uansett er mer hensiktsmessig å fremme interaksjon mellom elevene i flerspråklige klasserom, heller enn å fokusere på å utvikle kompetanse i andrespråket, og at de aktivt bruker språket til å utvikle evner innenfor resonnering og kommunikasjon i matematikk (se f.eks. Dominguez, 2011; Sjöblom, 2018; van Eerde, Hajer & Prenger, 2008). Det taler for at matematisk resonnering burde være en sentral aktivitet i flerspråklige klasserom.

Elevene i denne studien utarbeidet ingen argumenter som oppfylte kravene til bevis eller formelle bevis. Mange studier viser til at elever opplever det som vanskelig å gi bevis (Balacheff, 1988; Healy & Hoyles, 2000). Healy & Hoyles (2000) fant blant annet i sin studie at mange elever ikke klarte å gi matematisk gyldige bevis, og at elevene foretrakk å bruke empiriske argumenter fordi de opplevde at dette argumentet var overbevisende for seg selv, til tross for at de visste at empiriske argumenter ikke var matematisk gyldige. I denne studien opplever elevene i gruppe 2 tilsynelatende empiriske argumenter som overbevisende nok for seg selv. Det er min initiering til resonnering som kan se ut til å medføre tvil hos elevene, noe som igjen medfører at de fortsetter søket etter forklaring på hypotesen. På den måten støtter funnet i denne studien de mange forskningsartiklene som har påpekt elevers tendens til å oppfatte empiriske argument som bevis (se f.eks. Buchbinder & Zaslavsky, 2007; Healy & Hoyles, 2000; Sowder & Harel, 2003).

Elevenes fraværende deltakelse i prosesser med bevis og formelle bevis, kan også ha en sammenheng med oppgavebeskrivelsen og de spørsmålene som ble stilt. Oppgavene spør «Hva legger dere merke til? Vil det alltid være slik?». Det første spørsmålet så ut til å medføre at elevene formulerte hypoteser, etter å ha fulgt oppgaveinstruksen og videre bemerket seg sammenhengene oppgavene la opp til. Det andre spørsmålet medførte at elevene testet hypotesen sin på ett eller flere eksempler. Først når elevene hadde fått bekreftet hypotesen på minst to eksempler og jeg stilte spørsmålet «hvorfor?», forsøkte de å gi en begrunnelse for hypotesen. Nakim (2019) fant i sin studie at det var først når elevene ble bedt om å «overbevise om hvorfor» at de ga bevis. I min studie ba jeg elevene overbevise hverandre, noe som ikke medførte bevis. Det å heller skulle overbevise noen utenforstående kunne ha framprovosert den deduktive restrukturering som kreves i bevis, da det forutsetter at elevene reflekterer over hvordan de skal legge frem argumentet for at en utenforstående skal forstå hvorfor hypotesen er sann. Likevel er elevene i denne studien yngre enn de i Nakims (2019) studie, og sannsynligvis uerfarne med bevis. Derfor er det ikke sikkert at jeg ville fått samme resultater i denne studien dersom jeg hadde gått frem på samme måte, men det kunne likevel vært interessant å sett på hvordan elevene hadde respondert på å skulle overbevise noen utenforstående.

## 5.4 Betydningen av det sosiale samspillet

Som nevnt i kapittel 4.4 oppfatter jeg sosialt samspill som en viktig del av matematisk resonnering fordi det rammer inn arbeidet til elevene, og har derfor valgt å ha det med som et kjennetegn på elevenes deltakelse i matematisk resonnering. I dette delkapittelet skal jeg gå nærmere inn på, og diskutere, betydningen det sosiale samspillet har hatt på arbeidet til elevene.

At det sosiale samspillet former arbeidet til elevene er ikke et ukjent fenomen, da flere studier har undersøkt hvordan sosial interaksjon både kan være til hjelp og til hinder for progresjon i matematiske samtaler (eks. Balacheff, 1991; Cobb, 1995; Voigt, 1995). Cobb (1995) skiller blant annet mellom to typer interaksjoner: de som involverer en univokal (eng: univocal) forklaring og de som involverer en multivokal (eng: multivocal) forklaring. Kort sammenfattet omhandler førstnevnte at perspektivet til én elev dominerer og de andre må akseptere og forstå forklaringen, og anses som lite produktiv da den ikke fører til ny læring. Sistenente omhandler at det oppstår en konflikt der partene insisterer på at egen resonnering er riktig. Dette medfører at de stiller spørsmål til hverandre og forhandler i resonneringen, og anses som mer produktiv. I min studie har elevene inkludert hverandre, uttrykt uenighet og bekreftet hverandres utsagn. Elevene nølte ikke med å si fra dersom de var uenige eller ikke forsto de andres resonnementer. Når det oppsto uenigheter forhandlet de med hverandre, og som regel ble det løst ved at den ene parten forsto at resonneringen sin ikke stemte og dermed forandret mening. Dette førte til at elevene hadde progresjon i samtalene sine. På den måten kan det sies at interaksjonen til elevene i denne studien var preget av multivokale forklaringer.

Nakim (2019) har gjort en studie på resonnering og bevis i skolen hvor han undersøkte elevers deltakelse i en matematisk diskurs, med kommognisjon som overordnet rammeverk. Hans funn knyttet til elevenes ulike måter å delta i diskursen på gjennom sosial interaksjon har mange paralleller til elevene i denne studien sin deltakelse i det sosiale samspillet. I likhet med elevene i denne studien, inkluderte elevene i hans studie hverandre gjennom å stille hverandre spørsmål. I tillegg uttrykte de enighet og bygde på hverandres utsagn, noe som kan ses i sammenheng med at elevene i denne studien bekreftet hverandre gjennom å støtte hverandres utsagn. Nakim (2019) påpekte at elevenes deltakelse i den sosiale interaksjonen så ut til å være positive bidrag i arbeidet, men at fokus på inkludering og framdrift mulig medførte ritualisert deltakelse i diskursen. Til forskjell fra Nakims (2019) studie, fant jeg at elevene i denne studien også uttrykte uenighet, som medførte at elevene måtte forhandle i resonneringen. Dette så også ut til å være et positivt bidrag, da det førte til progresjon i samtalen.

## 5.5 Studiens begrensninger og bidrag

Denne studien følger en kvalitativ forskningstradisjon, noe som medfører noen begrensninger. Først og fremst fanger studien arbeidet til kun syv elever, og kan dermed ikke beskrive hvordan alle elever ville jobbet med samme oppgave. Studien har samtidig som formål å beskrive i dybden og forstå hvordan to elevgrupper på 7.trinn kan delta i matematisk resonnering gjennom de kjennetegnene som er uttrykt her. På den måten bidrar studien til en beskrivelse av samspillet mellom disse elevene, meg som deltakende observatør og den valgte oppgaven. Oppgaven som inngår i studien er krevende i den forstand at elevene må utforske og utvikle forståelse for matematiske relasjoner, og selv finne en fremgangsmåte for å «løse» oppgaven. Samtidig er den gjenkjennelig i en kontekst som er mye brukt, altså hundrerkartet. Derfor kan resultatene i denne studien skape et grunnlag for refleksjon rundt hva matematisk resonnering kan bety og være i barneskolen, og hvordan det å arbeide med matematisk resonnering i barneskolen kan foregå nå når den nye læreplanen trer i kraft.

Den kvalitative tilnærmingen til studien medfører også en begrensning i form av den påvirkningen jeg som forsker har på resultatene. Dette er særlig gjeldende når jeg har valgt å være deltakende observatør. Studien kan derfor ikke si noe om hvordan elevene kunne løst oppgaven på egen hånd. Likevel er det slik at arbeid med matematisk resonnering i det «vanlige» klasserommet vil være preget av lærerens støtte, i form av spørsmål, kommentarer og veiledning. På den måten kan studien også bidra til refleksjon rundt lærerens rolle og påvirkning på elevenes resonneringsprosesser, og hvilke muligheter og begrensninger som finnes.

Videokamera som verktøy i observasjon har gitt studien begrensning i form av at studien måtte gjennomføres isolert fra resten av klassen. På den måten ble observasjonssituasjonen mer kunstig enn ønsket. Dersom elevene hadde blitt observert i grupper inne i klasserommet sammen med resten av klassen, ville observasjonen sannsynligvis vært preget av både påvirkning og forstyrrelser fra medelever og eventuelt lærer, slik det ofte er i en «vanlig» undervisningssituasjon. Likevel ga det meg fordeler i form av at jeg kunne fokusere på én og én gruppe om gangen, og at elevene arbeidet mer konsentrert om oppgaven slik at jeg fikk observert mest mulig av deres arbeid med resonnering. Bruken av videokamera har i tillegg ført til at jeg har kunnet beskrive elevgruppenes arbeid i detalj, noe som kan være positivt for videre refleksjon over elevers arbeid med matematisk resonnering.

# 6 Avslutning og perspektivering

I denne studien har jeg beskrevet kjennetegn ved to elevgruppers deltakelse i en diskursiv aktivitet med matematisk resonnering, der elevene har arbeidet med oppgaver innen generalisert aritmetikk i hundrerkartet. Studien har vist at elevenes deltakelse kan kjennetegnes ved formulering av mange hypoteser, der elevene tilsynelatende ikke opplever et behov for å begrunne hypotesene. I tillegg møter de utfordringer når de forsøker å validere hypotesene sine, noe som både blir uttrykt av elevene selv og som kommer til syne gjennom deres arbeid. Dersom resonnering og argumentasjon som kjerneelement i Fagfornyelsen skal bidra til at elevene utvikler forståelse av sammenhenger og innhold i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019), vil det være nødvendig at lærere målrettet arbeider mot å skape et læringsmiljø der elever tilegner seg erfaringer med matematisk resonnering. De bør erfare bevis i sin forklarende og kommuniserende funksjon (Yackel & Hanna, 2003), slik at de kan oppleve matematisk resonnering som en meningsskapende aktivitet som bidrar til økt forståelse og dybdelæring i matematikk. Gode erfaringer med matematisk resonnering vil kanskje i større grad øke elevenes intellektuelle behov for å begrunne og søke forståelse.

Elevene i studien hadde også en utstrakt bruk av eksempler, der eksemplene ble brukt som støtte i ulike resonneringsprosesser. I matematikkundervisning burde et mål være at eksemplene skal fungere som representasjoner for å uttrykke matematiske sammenhenger og bidra til kommunikasjon av disse gjennom matematisk resonnering (Utdanningsdirektoratet, 2019). Det impliserer at lærere bør ha kunnskap om produktiv eksempelbruk, altså hvordan å bruke eksempler på en hensiktsmessig måte. Elever vil trolig ha nytte av å bli eksplisitt undervist i produktiv eksempelbruk, da denne studien har bekreftet tidligere forskning om at produktiv eksempelbruk er nært relatert til suksess i arbeid med begrunnelser og bevis. I tillegg er det viktig at lærere praktiserer en diskurs der empiriske argument ikke blir akseptert som begrunnelser på hypoteser, men heller vektlegger undersøkelse av sammenhenger og relasjoner i eksempler. Da vil undervisningen kunne rettes mot generiske argument, som i større grad vil kunne lære elever at matematikk har klare begrunnelser og at regler og resultater ikke er tilfeldige (Utdanningsdirektoratet, 2019).

For at lærere skal kunne praktisere diskurser der matematisk resonnering og produktiv eksempelbruk er vektlagt, forutsetter det at de selv har kunnskap og kompetanse på området. Jeg mener rammeverkene som er brukt i denne studien kan bidra til å gi lærere denne kompetansen, da de er utarbeidet som modeller for matematisk resonnering i skolen. Jeannotte og Kieran (2017) påpeker at modellen kan på grunn av sitt grunnlag i kommognisjon, hjelpe lærere til å fokusere på den resonneringen som kan sees og høres i klasserommet og bidra til bedre kommunikasjon om denne resonneringen. I min studie bidro rammeverkene til å beskrive kjennetegn ved elevenes deltakelse i matematisk resonnering, noe som igjen førte til refleksjoner om hva matematisk resonnering kan være i barneskolen og videre didaktiske implikasjoner.

I denne studien har det blitt undersøkt to elevgruppers arbeid med én oppgave innenfor tidsrammen som er gitt. Analysen som er gjort har derfor kun tatt for seg et øyeblikksbilde av elevenes arbeid med matematisk resonnering og oppgaven har dermed en avgjørende rolle for funn gjort i denne studien. Det har gitt meg mulighet til å beskrive samspillet mellom oppgaven og elevene, men undersøkelsen av et slik øyeblikksbilde har likevel begrensninger. Av den grunn ville det vært interessant å studere noen elevgrupper over et lengre tidsspenn hvor de arbeider med et mangfold av oppgaver som involverer matematisk resonnering. Da ville det vært mulig å avdekke i større grad hva som kjennetegner deres deltakelse i matematisk resonnering, da én oppgaves påvirkning på resultatene ville blitt redusert. Det kunne eksempelvis vært interessant å undersøkt hvilke typer oppgaver som i størst grad framprovoserer matematisk resonnering hos elevene, og hva som kjennetegner disse oppgavene. Det ville også vært interessant å gjøre en intervensjonsstudie der elevene gis eksplisitt undervisning i matematisk resonnering for å undersøke hvilken betydning det har for deres valideringsprosesser.

Med blikk på elevenes flerspråklige bakgrunn i denne studien, kunne det også vært interessant å gjøre en form for komparativ studie, der noen grupper flerspråklige elever sammenlignes med noen grupper majoritetsspråklige elever, i arbeid med matematisk resonnering. Da ville det vært mulig å undersøke om, og eventuelt i hvilken grad, kommunikasjonshinderet flerspråklige elever kan oppleve, påvirker deres valideringsprosesser. En slik studie kunne lagt grunnlag for refleksjoner om didaktiske implikasjoner for arbeid med matematisk resonnering i flerspråklige klasserom.

# Referanser


Bailey, K. D. (1994). *Methods of Social Research* (4. Utg.). New York, NY: Thompson.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (Red.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (s. 173-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. I *2002 International conference on mathematics – understanding proving and proving to understand* (s. 23-44). Hentet fra http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.522.2255&rep=rep1&type=pdf.

Ball, D. L. (1991). What's all this talk about «discourse»?. *Arithmetic Teacher, 39*(3), 44-48. Hentet fra https://search.proquest.com/docview/208769877?pq-origsite=gscholar.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. I J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative Research for Education – An Introduction to Theories and Methods* (5. utg.). London: Pearson Education.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa.

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2007). How to decide? Students ways of determining the validity of mathematical statements. I D. Pita-Fantasy & G. Philippot (Red.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 561-571). Larnaca: University of Cyprus.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions – Using math talk to help students learn.* Sausalito: Math Solutions.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Clark, A., Holland, C., Katz, J. & Peace, S. (2009). Learning to see: lessons from a participatory observation research project in public spaces. *International Journal of Social Research in Methodology, 12*(4), 345-360.

Cobb, P. (1995). Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interactions in Classroom Cultures*, s. 25-129. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (s. 3-38). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8.utg.). New York, NY: Routledge.

Creswell, J. W. (2008). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research* (3.utg.). New Jersey, NJ: Pearson International Edition.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf.

Dominguez, H. (2011). Using what matters to students in bilingual mathematics problems. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 305-328. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9284-z.

Eerde, D. van, Hajer, M. & Prenger, J. (2008). Promoting mathematics and language learning in interaction. I J. Deen, M. Hajer & T. Koole (Red.), *Interaction in two multicultural mathematics classrooms* (s. 31-68). Amsterdam: Aksant.

Evens, H. & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain'. *Educational Research, 46*(3), 269-282. https://doi.org/10.1080/0013188042000277331.

Gläser, J. & Laudel, G. (2013). Life with and without coding: two methods for early-stage data analysis in qualitative research aiming at causal explanations. *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research, 14*(2), 1-24. https://dx.doi.org/10.17169/fqs-14.2.1886.

Golafshani, N. (2003). Understanding reliability and validity in qualitative research. *The qualitative report, 8*(4), 597-606.

Gold, R. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223. https://doi.org/10.2307/2573808.

Gregorió, N. & Planas, N. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 7-33. https://doi.org/10.1023/A:1017980828943.

Guba, E. G. (1981). Criteria for Assessing the Trustworthiness of Naturalistic Inquiries. *ECTJ, 29*(2), 75-91. https://doi.org/10.1007/BF02766777.

Harel, G. (1998). Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly, 105*(6), 497-507. https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004918.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428. https://doi.org/10.2307/749651.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 91*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8.

Jewitt, C. (2012). *An Introduction to Using Video for Research* (Working Paper 03/12). National Center for Research Methods. Hentet fra http://eprints.ncrm.ac.uk/2259/4/NCRM_workingpaper_0312.pdf.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk – how to structure and lead productive mathematical discussions.* Portland, ME: Stenhouse Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: The National Acadamies Press.

Knipping, C. & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (s. 75-101). Dortrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 61-88. https://doi.org/10.1023/A:1013838713648.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (s. 236-276). Hillsdale, NJ: Routledge.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics Learning in Narrative Classroom Cultures: Studies of Argumentation in Primary Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 22-32. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/40248315.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27,* 29-63. https://doi.org/10.3102/00028312027001029.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. I A. Gutiérrez & P. Boero (Red.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (s. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J. (1982). *Thinking mathematically.* London: Addison-Wesley.

Mercer, N. & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education, 20*(6), 507-528. https://doi.org/10.2167/le678.0.

Miles, M. B., Huberman, A. M. & Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis – A Methods Sourcebook* (3. Utg.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Nakim, R. (2019). *Resonnering og bevis i skolen – En kvalitativ studie av 10.trinnselevers arbeid med matematisk resonnering og bevis i små grupper* (Mastergradsavhandling, NTNU). Hentet fra https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2610295/no.ntnu%3ainspera%3a2312805.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier – Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nordin, A. K. & Boistrup, L. B. (2018). A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions. *The Journal of Mathematical Behavior, 51*, 15-27. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018. 06.005.

NSD – Norsk senter for forskningsdata. (u.å.). Må jeg melde prosjektet mitt? Hentet fra https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/index.html.

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Bergen: Fagbokforlaget.

Ozgur, Z., Ellis, A. B., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F. & Knuth, E. (2019). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 284-303. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.004.

Pedemonte, B. & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 381-303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0.

Reid, D. A. (2005). The meaning of proof in mathematics education. I *Proceeding of the fourth Congress of the European society for research in mathematics education* (s. 458-468). Hentet fra https://www.researchgate.net/profile/Maria_C_Canadas/publication/28144054_A_Proposal_of_Categorisation_for_Analysing_Inductive_Reasoning/links/02bfe50ded9f497cae000000/A-Proposal-of-Categorisation-for-Analysing-Inductive-Reasoning.pdf#page=76.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.

Remillard, K. S. (2014). Identifying discursive entry points in paired-novice discourse as a first step in penetrating the paradox of learning mathematical proof. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 99-113. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.02.002.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. I J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Red.), *Informal reasoning and education* (s. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Seale, C. (1999). Quality in qualitative research. *Qualitative inquiry, 5*(4), 465-478. https://doi.org/10.1177/107780049900500402.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57. https://doi.org/10.1023/a:1014097416157.

Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. I J. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New Mathematics Education Research and Practice* (s. 153-170). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse – Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52,* 1-9. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013.

Sfard, A. (2017). Ritual for ritual, exploration for exploration: Or, what learners are offered is what you get from them in return. I J. Adler & A. Sfard (Red.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (s. 41-63). New York, NY: Routledge.

Silverman, D. (2013). *Doing Qualitative Research* (4. Utg.). London: SAGE.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X.

Simpson, A. (2015). The anatomy of a mathematical proof: Implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1), 1-17. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9616-0.

Sjöblom, M. (2018). Developing mathematical reasoning by using questions in a multilingual mathematics classroom. *Nordic Studies in Mathematics Education, 23*(3-4), 61-80.

Sowder, L. & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, construction, and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 3,* 251-267. https://doi.org/10.1080/14926150309556563.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. I Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Red.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* 315-351. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning: The case of proof. I A. J. Stylianides & G. Harel (Red.), *Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective* (s. 99-113). Cham: Springer International Publishing.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/40248592.

Stylianides, G. J. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics Teaching, 219,* 39-44. Hentet fra https://search.proquest.com/docview/1031154838?accountid=12870.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/40539339.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 237-266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 299-306. https://doi.org/10.1007/s19649-015-9638-7.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Hva er kjerneelementer?*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagovergripende-stotte/hva-er-kjerneelementer/.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn.* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf.

Van Ness, C. K. & Maher, C. A. (2019). Analysis of the argumentation of nine-year-olds engaged in discourse about comparing fraction models. The *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 13-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.004.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Red.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interactions in Classroom Cultures*, s. 25-129. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Whitenack, J. W. & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: A case for coordinating interpretive lenses. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 441-457. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00144-X.

Whitenack, J. W. & Yackel, E. (2002). Making mathematical arguments in the primary grades: The importance of explaining and justifying ideas. *Teaching Children Mathematics, 8*(9), 524-528. Hentet fra https://search.proquest.com/docview/214138720?accountid=12870.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423-440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8.

Yackel, E. & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding of mathematical argumentation.* Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. I J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

# Vedlegg

**Vedlegg 1:** Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

**Vedlegg 2:** Godkjenning fra NSD

**Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring**

# Vil du delta i forskningsprosjektet

# ”Matematisk argumentasjon, og flerspråklige elevers deltakelse i den matematiske diskursen”?

## Til foresatte for elever på 7. trinn ved ___________ skole

Dette er et spørsmål til dere om deres barn kan delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke flerspråklige elever (elever med et annet morsmål enn norsk) sin deltakelse i den matematiske diskursen i klasserommet. Den diskursen som er ønskelig å undersøke er knyttet til matematisk argumentasjon. I dette skrivet gir vi dere informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for dere.

**Formål**
Dette prosjektet er en del av et mastergradsstudium i matematikkdidaktikk ved NTNU. Prosjektet er en del av et forskningsarbeid som skal presenteres i en masteroppgave.

Formålet med prosjektet er å undersøke hva som kjennetegner flerspråklige elever sin deltakelse i den matematiske diskursen. Kort forklart omfatter den matematiske diskursen hvordan vi kommuniserer innenfor matematikkfaget. Ettersom matematikkundervisning foregår på norsk i de fleste klasserom i Norge, ønsker vi å lære mer om hvordan barn som ikke har norsk som morsmål deltar i denne kommunikasjonen. Diskursbegrepet har et stort omfang, og det er derfor valgt å rette fokuset mot matematisk argumentasjon. Matematisk argumentasjon blir en viktig del av den nye læreplanen som trer i kraft neste år, og formålet med å undersøke dette er å få mer kjennskap til hvordan elever argumenterer i matematikk.

**Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?**
Institutt for lærerutdanning ved NTNU er ansvarlig for prosjektet.

**Hvorfor får du spørsmål om å delta?**
For å kunne besvare forskningsspørsmålet er det nødvendig å hente inn datamateriale fra matematikkundervisning i skolen. Klassen er valgt på bakgrunn av en henvendelse fra oss om skolen har mulighet til å stille en klasse med en andel flerspråklige elever til rådighet for dette prosjektet.

**Hva innebærer det for deg å delta?**
Hvis ditt barn velger å delta innebærer det at vi i 1-2 matematikktimer tar ut grupper på 2-3 elever for å jobbe med oppgaver knyttet til matematisk argumentasjon. Hver gruppe vil være ute av ordinær undervisning i ca. 20-30 minutter. Gruppearbeidet vil bli videofilmet og det vil bli tatt lydopptak for å sikre at lyden kommer med. Disse vil senere bli transkribert og barnets navn vil bli erstattet med et pseudonym.

Dersom ditt barn velger å delta vil det også hentes inn informasjon om ditt barns morsmål.

**Det er frivillig å delta**
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen/lærer om du velger å delta eller ikke.

**Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger**
Vi vil bare bruke opplysningene om barnet ditt til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun undertegnede student og veileder ved NTNU som vil ha tilgang til personopplysninger. Vi vil oppbevare personopplysninger innelåst, kryptert og beskyttet med passord.

Anonymiserte skriftlige utdrag fra undervisningen vil bli brukt i masteroppgaven. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i den publiserte oppgaven, da skolens og elevenes navn endres.

**Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?**
Prosjektet skal etter planen avsluttes 31.juli 2020. Når prosjektet er avsluttet vil alt datamateriale være anonymisert og video- og lydopptak vil bli slettet.

**Dine rettigheter**
Så lenge barnet ditt kan identifiseres i datamaterialet, har dere rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om barnet,
- å få rettet personopplysninger om barnet,
- få slettet personopplysninger om barnet,
- få utlevert en kopi av barnets personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger.

**Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?**
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

**Hvor kan jeg finne ut mer?**
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Eirin Gåre Aase, på epost (eiringa@stud.ntnu.no) eller telefon: nnn nn nnn.
- NTNU, Institutt for lærerutdanning ved Kirsti Rø, på epost (kirsti.ro@ntnu.no).
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen (thomas.helgesen@ntnu.no).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

| | |
|---|---|
| Prosjektansvarlig (veileder) | Student |
| Kirsti Rø | Eirin Gåre Aase |

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

# Samtykkeerklæring

Vi har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Flerspråklige elevers deltakelse i den matematiske diskursen» og har fått anledning til å stille spørsmål. Vi samtykker til:

- ☐ At vårt barn deltar i matematikkundervisning der det blir foretatt video- og lydopptak
- ☐ At det hentes inn informasjon om vårt barns morsmål

Vi samtykker til at opplysningene behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31.juli 2020

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Elevens navn)

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Signert av elev, dato)

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

(Signert av foresatt, dato)

**Vedlegg 2: Godkjenning fra NSD**

**NSD Personvern**
29.10.2019 10:32

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 443579 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 29.10.19 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle særlige kategorier av personopplysninger om etnisitet samt alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.07.20.

LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og art. 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes uttrykkelige samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a, jf. art. 9 nr. 2 bokstav a, jf. personopplysningsloven § 10, jf. § 9 (2).

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

NTNU
Kunnskap for en bedre verden