Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Olav Dalsegg Tokle

Er elever, i misoppfatning, selv klar over at de er i misoppfatning?

En kvanitativ studie av elever på ungdomstrinnet

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Janne Fauskanger
Mai 2020

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Olav Dalsegg Tokle

Er elever, i misoppfatning, selv klar over at de er i misoppfatning?

En kvanitativ studie av elever på ungdomstrinnet

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 5.-10. trinn
Veileder: Janne Fauskanger
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Sammendrag

Studien fokuserer på seks misoppfatninger knyttet til algebra gjennom å belyse to forskningsspørsmål:

1. Er elever, som er i misoppfatning, selv klar over at de er i en misoppfatning?
2. Hvor utberedt er misoppfatninger knyttet til algebra?

Elever i misoppfatninger er i denne studien definert som elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i alle oppgavene som tester samme misoppfatning.

Studien er gjennomført på et utvalg av 368 elever på 8.–10. trinn. Metoden som er valgt er en diagnostisk test som består av flerlagsoppgaver der elevenes matematiske svar blir undersøkt gjennom to spørsmål per oppgave. I tillegg inneholder hver oppgave et spørsmål om hvor sikre elevene er på at det matematiske svaret de avgir er riktig. En litteraturgjennomgang tyder på at denne metoden ikke er mye benyttet i tidligere forskning om misoppfatninger. Erfaringene fra denne studien tyder imidlertid på at metoden er vellykket, og at den gir et godt innblikk i elevenes tenkning og eventuelle misoppfatninger.

Forskningsspørsmålene er forsøkt besvart gjennom en kvantitativ analytisk tilnærming, der hypoteser er testet gjennom variasjonsanalyse og khikvadrattester. Et eksempel på en slik hypotese; *det er ingen statistisk signifikant forskjell mellom hvordan elever i misoppfatning uttrykker grad av sikkerhet til eget svar, sammenlignet med elever som ikke er i misoppfatning*.

Resultatene fra studien viser at elever i misoppfatning uttrykker høy grad av sikkerhet til eget svar. For fire av seks misoppfatninger studien undersøker, uttrykker elever i misoppfatning i gjennomsnitt lik eller høyere grad av sikkerhet, sammenlignet med elever som ikke er i misoppfatning. For to av disse misoppfatningene er forskjellene statistisk signifikante. Resultatene viser også at misoppfatninger er vanlige blant utvalget som deltok i studien, ved at over 40 % av elevene er i én eller flere misoppfatninger. Funnene i studien viser også at noen av misoppfatningene har høyere utbredelse på 10. trinn enn på 8. trinn.

Abstract

This study focusses on six misconceptions related to algebra through two research questions:

1. Are students in misconceptions[*], aware that they are in misconceptions?
2. How common are misconceptions related to algebra?

In this study, *students in misconceptions* are defined as students who provide answers that indicate misconception in all the items that test the same misconception.

The study was conducted on 368 students from grade 8 through grade 10. The method for data collection is a multi-tier diagnostic test, where the students' mathematical answers are examined through two open ended questions per item. In addition, each item contains a certainty of response index (CRI), through the question *how confident are you that the given answer is correct?* A literature review indicates that this method has not been widely used in previous research on misconceptions. However, the experience from this study indicates that the method is successful and that it provides a good insight into the students' mathematical thinking and misconceptions.

The research questions have been approached trough a quantitative analytical method, where hypotheses have been tested through variance analysis and chi-square tests. An example of such a hypothesis is; there is no statistically significant difference between the CRI of students in misconception, and the CRI of students who are not in misconception.

The results of the study show that students in misconceptions express a high CRI. For four out of six misconceptions the study examines, students in misconceptions express, on average, equal or higher CRI compared to students who are not in misconception. For two of these misconceptions, the differences are statistically significant. The results also show that misconceptions are common among the students, with at least 40% of students found to be in at least one misconception. The findings of the study also show that some of the misconceptions are more common in grade 10 than in grade 8.

[*] The phrase ‘being *in* a misconception’ has recently taken hold in the Norwegian context, in favour of ‘having a misconception’

Forord

Masterstudien har vært en lærerik prosess, som jeg ofte har betegnet som en mental berg- og dalbane. Egentlig har jeg aldri vært glad i berg- og dalbaner, og denne har vært spesielt krevende. Nå når jeg nærmer meg endestasjonen, er det med en utrolig god følelse. Å studere i voksen alder med en kombinasjon av jobb og en aktiv familie, har gjort at hverdagen til tider har vært hektisk og krevende. De fleste helgene de siste to årene har blitt viet studier, som har gjort at mange mer lukrative alternativer er blitt valgt bort. Dette, samt at studien har utfordret meg faglig og strukturelt, har gjort at dalene har føltes lange og frustrerende, og til tider vanskelig å komme seg videre fra. Både dalene og toppene har imidlertid vært lærerike, og jeg lært mye både, matematikk og matematikkdidaktikk gjennom studiet. Spesielt har arbeidet med masteroppgaven vært lærerikt, der jeg har fått mulighet til å fordype meg i et tema jeg selv er spesielt interessert i.

Det er mange som fortjener en takk for at denne studien har blitt en realitet. Først vil jeg takke alle lærere og elever som har gitt meg mulighet til å kunne samle inn datamaterialet til studien. Uten en slik velvilje til å stille klasser til rådighet, som det jeg har blitt møtt når jeg har kontaktet skoler, har jeg ikke kunne gjennomført studien.

Min veileder Janne Fauskanger fortjener også en stor takk. Hun har vært ambisiøs på mine vegne, og stadig gitt meg nye utfordringer for å heve kvaliteten på masterstudien gjennom hyppige og konstruktive samtaler og tilbakemeldinger. Som et resultat av dette er jeg helt sikker på at hun har løftet nivået til denne masteroppgaven betydelig. I tillegg må jeg nevne Knut Ole Lysø, som har vært en meget nyttig sparringspartner i analysearbeidet.

Jeg vil også takke min arbeidsgiver, med leder Kjersti Wæge i spissen, som har lagt til rette for at jeg har kunnet gjennomføre studiet. Uten en positiv innstilling og tilpasninger av ansvarsoppgaver på jobb, ville studiet aldri blitt gjennomført.

Til slutt vil jeg takke min egen familie. Min mor, Marit Dalsegg Tokle har bidratt med nødvendig korrekturlesning av masteroppgaven. Den som fortjener den største takken er min samboer Lise Øklend. Uten hennes støtte, forståelse og alle de hensynene hun har tatt i de to årene studiet har pågått, har ikke hverdagen gått opp. Lise har løst de aller fleste hverdagslige oppgavene i hjemmet på egenhånd, mens jeg har sittet på kontoret og studert. Jeg vet at masterstudien har beslaglagt mye dyrebar familietid, og jeg ser virkelig fram til å kunne tilbringe mer tid med familie og venner framover.

Orkanger, april 2020

Olav Dalsegg Tokle

Innhold

Figurer

Tabeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

Jeg fattet tidlig i min lærerkarriere interesse for feil elevene gjorde i matematikk. Det som gjorde meg spesielt nysgjerrig var feil som gikk igjen blant flere elever, og ikke minst samme type feil som ble gjentatt av samme elev i ulike oppgaver. Etter hvert oppdaget jeg prosjektet Kvalitet i matematikkundervisningen (KIM-prosjektet), ledet av Gard Brekke ved Telemarksforskning-Notodden (TFN), der jeg ble gjort kjent med begrepet *misoppfatning i matematikk*. Brekke (2002) definerer misoppfatninger, og skiller misoppfatninger fra tilfeldige feil, på følgende måte:

> Det et er viktig å forstå forskjellen på de feil elevene gjør, og de misoppfatninger de har. En feil kan komme mer eller mindre tilfeldig, fordi en ikke er oppmerksom nok eller ikke leser oppgaven godt nok osv. Misoppfatninger er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning – en idé – som en bruker nokså konsekvent. (Brekke, 2002, s. 10)

Ay (2017) støtter denne definisjonen ved å hevde at alle misoppfatninger kan kategoriseres som feil, men at ikke alle feil kan kategoriseres som misoppfatninger. For elever som er i misoppfatninger (se kapittel 3.4 og 4.3.3), er det ifølge Fujii (2014), ikke feil fra deres perspektiv. Elevenes tenkning er basert på en levedyktig oppfatning av det matematiske begrepet, basert på erfaringer elevene har fra andre kontekster. Den systematiske tankefeilen kan ofte komme av at elevene overgeneraliserer tidligere kunnskap fra et begrep til et annet begrep, der det ikke er gyldig (Brekke, 2002). Et eksempel er elever som oppdager systemet med at verdien til heltall øker i takt med antall siffer, og så overgeneraliserer dette til også å gjelde for desimaltall (Matematikksenteret, 2019c). Idéen misoppfatningen bygger på er gyldig når vi behandler heltall, men er ikke nødvendigvis gyldig når vi behandler desimaltall. For eksempel har 4,2 større verdi enn 4,1549.

På midten av 2000-tallet ble jeg ansatt ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (Matematikksenteret) på prosjektet Nasjonale prøver. En av mine kolleger ved Matematikksenteret på den tiden var Gard Brekke. Gjennom diskusjoner med Brekke ble min interesse for misoppfatninger ytterligere styrket, og jeg gjorde stadige grep for å tilpasse undervisninga mi for å løfte fram elevenes tekning med mål om å avdekke eventuelle misoppfatninger i matematikk. Det at elevenes misoppfatninger var basert på kunnskap som var gyldig i noen, men ikke i andre sammenhenger, fasinerte meg, samtidig som det gjorde det utfordrende å hjelpe elevene ut av misoppfatningene.

Jeg har valgt misoppfatninger knyttet til algebra som fokus i min studie (se kapittel 3). I amerikanske studier omtales ofte algebra som inngangsbilletten (engelsk: gate-way eller gate-keeper) til høyere utdanning (J. L. Booth, Barbieri, Eyer & Paré-Blagoev, 2014; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Stephens, 2006; Welder, 2006). Også norske studier viser viktigheten av algebra, der blant annet elevenes manglende ferdigheter i algebra er hovedårsaken til frafallet i mange studier (Grønmo, 2013).

På midten av 1990-tallet dukket slagordet *algebra for alle* opp (Welder, 2012), som en presisering av at algebra ikke gjelder bare elever som skal ta høyere utdanning. Dette blir også støttet av Grønmo (2013, s. 17), som skriver at «algebra er generalisering av regning med tall, og et kraftfullt verktøy for all videre læring i matematikk». Usiskin

(1995, s. 31) presenterer en liste med fire punkter som vil være problematisk uten tilstrekkelige algebrakunnskaper:

- det vil begrense dine jobbmuligheter, eller til og med utdanningsløp som vil gi deg en jobb
- du vil miste kontroll over deler av ditt eget liv og må støtte deg til andre for å gjøre ting for deg
- det er mer sannsynlig at du gjør ukloke avgjørelser knyttet til økonomi
- du vil ikke kunne forstå mange idéer som blir diskutert i kjemi, fysikk, astrologi, økonomi, psykologi og mange andre felt.

Selv om viktigheten av å mestre algebra er godt dokumentert, er algebra et emne som gjennom min erfaring har vist seg å være utfordrende for elevene. Resultater fra internasjonale undersøkelser som Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), har vist at norske elever har prestert lavt i emneområdet algebra i en årrekke (Grønmo et al., 2012). Dette er nærmere beskrevet i kapittel 3.3.

Flere studier viser at elever som er i misoppfatninger knyttet til et begrep, får lavere læringsutbytte også senere i utdanningsløpet der begrepet inngår (f. eks. J. L. Booth, McGinn, Barbieri & Young, 2017; Lucariello, Tine & Ganley, 2014). I tillegg får elever som viser tegn på misoppfatninger når de studerer algebra, betydelig lavere resultater når de er ferdige med studiet (J. L. Booth et al., 2014). Det er derfor nærliggende å anta at misoppfatninger knyttet til algebra kan være én årsak til de norske elevers lave prestasjoner i algebra i TIMSS-undersøkelsene, noe som også blir støttet av Eliassen og Mathisen (2018).

Å løfte fram elevers feil og misoppfatninger i klasserommet, er av mange forskere sett på som en viktig kilde til læring (Boaler, 2015; J. L. Booth et al., 2014; Drews, Dudgeon, Hansen, Lawton & Surtees, 2017; Leonard, Kalinowski & Andrews, 2014; Shulman, 1986), og som et kjennetegn på god matematikkundervisning (Swan, 2005). For å kunne løfte fram misoppfatninger i klasseromsdiskusjoner, må læreren ha det Seifried og Wuttke (2010, s. 150) kaller «professional error competence». Det innebærer at læreren 1) har kunnskap om sannsynlige feil elevene kommer til å gjøre, 2) har tilgjengelige strategier til å hjelpe eleven videre i læringa og 3) et konstruktivt syn på feil som en kilde til læring, og hvordan legge til rette for det i klasserommet. Studier viser imidlertid at lærere ikke går i dybden i elevenes feil og heller ikke gir tilstrekkelig tilbakemelding som kan hjelpe elevene videre (Seifried & Wuttke, 2010), samt at noen lærere selv er i misoppfatninger (Zuya, 2014).

1.2 Problemstilling

Med dette som bakgrunn vil min problemstilling ta utgangspunkt i norske elevers misoppfatning knyttet til algebra. Spesielt interessant finner jeg at elever som er i misoppfatninger ikke selv ser på det de gjør som feil (Fujii, 2014). Dette er noe jeg ønsker å se nærmere på i denne studien.

Dersom påstanden til Fujii (2014) viser seg å stemme, stilles det store krav til lærerens kompetanse både i å identifisere og å utfordre elevenes misoppfatninger, siden elevene selv ikke oppfatter at de har gjort feil. Dette kan være en sentral årsak til at elever forblir i misoppfatninger over tid (J. L. Booth et al., 2014; Confrey, 1990; Fumador & Agyei, 2018), eller at de samme misoppfatningene går igjen i flere studier på ulike alderstrinn (kapittel 3).

Selv om norske elever har prestert lavt i området algebra i TIMSS-undersøkelsene i snart 25 år, har det vært forsket relativt lite på misoppfatninger knyttet til i algebra. Spesielt elevers egen bevisstgjøring om de er i en misoppfatning eller ikke, er lite undersøkt. Dette blir nærmere beskrevet i kapittel 2.

Hensikten med studien er å undersøke misoppfatninger knyttet til algebra, og i hvor stor grad et utvalg norske ungdomsskoleelever som er i misoppfatninger, selv er klar over at de er det. Samtidig vil jeg undersøke hvor utbredt misoppfatningene i studien er. Studien har tatt utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1. Er elever, som er i misoppfatning, selv klar over at de er i en misoppfatning?
2. Hvor utberedt er misoppfatninger knyttet til algebra?
    a. Hvordan endrer utbredelsen seg fra 8.–10. trinn?

For å finne svar på forskningsspørsmålene har jeg tatt utgangspunkt i eksisterende forskningslitteratur for å definere hva algebra er (kapittel 3.2.1), hva algebra i den norske skolen er (kapittel 3.2.2), hva misoppfatninger er (kapittel 3.4) og hvilke misoppfatninger som kan knyttes til algebra (kapittel 3.5). På bakgrunn av dette har jeg satt sammen et oppgavesett med diagnostiske oppgaver, der elevene skal vise sin tenkning, som er prøvd ut på et utvalg elever på ungdomsskolen (vedlegg 4). Hver oppgave er i utgangspunktet relatert til én bestemt misoppfatning. At elevene skal vise tenkningen sin og ikke bare avgi et svar, er viktig for å kunne analysere hvorvidt elevenes svar kan relateres til den bestemte misoppfatningen (Peşman & Eryılmaz, 2010). Når jeg har sjekket utbredelse, har jeg med utgangspunkt i at det skal være en systematisk feiltenkning som brukes nokså konsekvent (Brekke, 2002; Statped, 2019), definert hva det vil si *å være i en misoppfatning* for denne studien i kapittel 4.3.3. For å undersøke om elevene selv er klar over at de er i en misoppfatning eller ikke, har jeg inkludert et spørsmål der elevene uttrykker grad av sikkerhet til eget svar for hver oppgave. Oppgavesettet består av 19 oppgaver og er besvart av 368 elever, fordelt på 8.–10. trinn. Datamaterialet er analysert med en feilanalyse, som er beskrevet i kapittel 4.3. Dette innebærer at det er elevens misoppfatninger knyttet til algebra, og ikke elevens måloppnåelse i algebra, som er i fokus.

1.3 Oppgavens oppbygning

Denne oppgaven består av sju kapitler. Etter innledningen beskrives gjennomgang av tidligere forskningslitteratur knyttet til misoppfatninger i algebra (kapittel 2). Hensikten med kapitlet er å undersøke om misoppfatningene som studien undersøker også har fotfeste i tidligere forskningslitteratur, og om tidligere studier retter fokus på elevers uttrykte grad av sikkerhet til eget svar. Kapittel 3, retter fokus på to av hovedområdene i studien; algebra og misoppfatninger. Algebra blir definert etter et rammeverk av Kaput (2007) og satt inn i den norske konteksten ved å knytte definisjonen til læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2006) i matematikk. Delen om misoppfatninger omhandler misoppfatninger generelt og spesifikke misoppfatninger knyttet til algebra. I metodekapitlet, kapittel 4, beskrives utviklingen av studien fra start til slutt, der jeg begrunner valg av forskningsmetode, datainnsamlingsprosessen, behandling av datamaterialet og analysemetoder. Etiske betraktninger rundt studien er også beskrevet i metodekapitlet. Analysekapitlet tar for seg kvantitative og kvalitative resultater som er nødvendige for å besvare mine forskningsspørsmål. I drøftingskapitlet løftes de viktigste resultatene fra analysen fram, og drøftes i lys av annen relevant forskning. Til slutt oppsummerer jeg funnene fra studien og kommer med forslag til videre forskning om misoppfatninger og elevers uttrykte grad av sikkerhet til eget svar.

2 Studiens plass i forskningslitteraturen

For å plassere studien i en større sammenheng, har jeg studert tidligere forskningslitteratur knyttet til misoppfatninger i algebra. Jeg har tatt utgangspunkt i fem review-artikler som på ulike måter har undersøkt misoppfatninger knyttet til algebra (Ay, 2017; Bush & Karp, 2013; Confrey, 1990; Wang, 2015; Welder, 2012), og sett etter kunnskapshull jeg mener min studie kan bidra med å fylle. I tillegg har jeg foretatt et eget strukturert søk i litteraturen.

Tre av review-artiklene retter søkelyset mot hva som gjør algebra utfordrende for elevene. Wang (2015) har analysert tidligere forskning knyttet til elevers utfordringer i algebra og systematisert disse i fem kategorier (algebra som fag, kognitive utfordringer med algebra sammenlignet med aritmetikk, utfordringer knyttet til undervisning, utfordringer knyttet til læring og overføring av kunnskap fra aritmetikk til algebra). Ingen av de fem kategoriene kan knyttes direkte til misoppfatninger, men mange av de sentrale begrepene som blir løftet fram i artikkelen, kan knyttes til misoppfatninger. Wang retter et kritisk lys mot mye av den eksisterende forskningen på elevers vansker med algebra, og kaller den statisk. Han anbefaler derfor en mer prosessorientert forskning, som følger elever i overgangen fra aritmetikk til algebra. En slik tilnærming vil være for omfattende for en masterstudie, og jeg kan ikke implementere dette i studien.

Welder (2012) sammenfatter tidligere forskning om misoppfatninger knyttet til algebra, og hvordan forskningen viser at lærere kan jobbe med å forhindre at elevene forblir i misoppfatninger over tid, ved at elevene utvikler solide matematiske begrep. Samtidig trekker hun fram viktigheten av lærerens kjennskap til misoppfatninger, som hun oppsummerer med «Ultimately, awareness of widespread algebra misconceptions can help elementary and middle school teachers grow "algebra eyes and ears"» (Welder, 2012, s. 262). Bush og Karp (2013) fokuserer i sin review på hvilke ferdigheter algebraundervisningen forutsetter elevene allerede besitter, og beskriver misoppfatninger knyttet til disse ferdighetene. De fokuserer på viktigheten av at lærere har kjennskap til, og kunnskap om hvordan de skal sette fokus på, vanlige misoppfatninger og hvordan dette kan hjelpe elevene mot matematisk forståelse. Min studie vil, gjennom å undersøke utbredelsen av godt dokumenterte misoppfatninger knyttet til algebra, bidra til å gi lærere kunnskap om typiske misoppfatninger i den norske konteksten.

Felles for review-artiklene (Bush & Karp, 2013; Wang, 2015; Welder, 2012) er at de i hovedsak beskriver misoppfatningene som er belyst i tidligere forskning, og i liten grad fokuserer på utbredelse av misoppfatningene. Her håper jeg at min studie kan bidra med interessante funn ved at utbredelsen undersøkes gjennom å se på elever som viser en systematisk feiltenkning som brukes nokså konsekvent (Brekke, 2002; Statped, 2019) i flere oppgaver. Misoppfatningene beskrevet i review-artiklene til Bush og Karp (2013), Wang (2015) og Welder (2012), er tre av flere kilder som danner grunnlaget for misoppfatningene jeg fokuserer på i studien. Disse er nærmere beskrevet i kapittel 3.5.

En noe eldre review-artikkel tar for seg artikler som studerer «student conception» (Confrey, 1990, s. 4) og hvordan dette er blitt analysert i tidligere forskningslitteratur. I artikkelen strukturerer Confrey (1990, s. 4) forskningen etter tre rammeverk; «Piagetian approaches to student conceptions», «Philosophical approaches to students' alternative conceptions» og «Approaches to student misconceptions or systematic errors» (Confrey, 1990, s. 5). Disse rammeverkene er brukt som utgangspunkt til å beskrive læringssynet som ligger til grunn for denne studien, og er nærmere beskrevet i kapittel 3.1.

Den siste review-artikkelen, Ay (2017), undersøker tidligere publikasjoner knyttet til misoppfatninger i matematikk som bygger på empiriske undersøkelser. Litteraturen som danner grunnlaget for studien (N=21) ble gjennomgått i desember 2015. Felles for de fleste av publikasjonene er at de bruker «traditional one-tier achievement tests» (Ay, 2017, s. 28), der elevene kun skal avgi sitt endelige svar, uten å vise tenkningen fram til svaret. Ay (2017) kritiserer forskningen for dette, og skriver at slike tester ofte gir feilaktig informasjon om elevers misoppfatninger. Artikkelen til Ay (2017) har hatt stor påvirkning for valg av metode i denne studien, og er en viktig faktor for at jeg har valgt en metode som samler inn informasjon om elevenes tenkning ved hjelp av en *flerlagstest*. I min *flerlagstest* skal elevene, i tillegg til å avgi et svar, også skal vise hvordan de har tenkt for å komme fram til svaret. Dette gjør at min studie undersøker om elevene er i en misoppfatning med mer informasjon enn mange andre studier. I tillegg skal elevene uttrykke hvor sikre de er på at svaret deres er riktig. *Flerlagstest* som metode er beskrevet i kapittel 4.2.1.

Av de 21 publikasjonene gjennomgått av Ay (2017), retter kun fire fokus på algebra. Av disse undersøker kun én elevgruppen jeg skal studere, og den er publisert på tyrkisk. Dermed kan ingen av artiklene i Ay (2017) brukes som et sammenligningsgrunnlag i min studie. En av årsakene kan være at Ay har strukturert søket sitt med vekt på at «mathematics» er brukt i abstraktet eller i tittelen, og at han da ikke har fanget opp mer emnespesifikke publikasjoner, som for eksempel studerer algebra.

For å få oversikt over tidligere studier om misoppfatninger knyttet til algebra, har jeg foretatt et eget strukturert søk, der jeg var spesielt interessert i hvor stor grad elevers uttrykte grad av sikkerhet til eget svar er belyst i tidligere forskning. Til søket har jeg brukt søketjenesten Oria, som ved en gjennomgang i oktober 2019, hadde til sammen ti søkbare databaser innen matematikk (ArXiv, JSTOR, American Mathematical Society, SIAM og The Society/FIZ Karsruhe) og pedagogikk og utdanning (Education source, ERIC, Idunn, Scopus og Web of science).

I Oria søkte jeg i Norsk fagbibliotek, utover de publikasjonene NTNU har tilgang til. I søkeordene har jeg brukt trunkeringstegnet *. I eksemplet *misoppfatning** dekker søkerordet alle ord som begynner på misoppfatning, for eksempel misoppfatninger. I det første søket valgte jeg å søke i alle felt, uavhengig av publiseringsår, med søkeordene *algebra* og* ett av ordene *error** eller *misconception** på engelsk og *misoppfatning** eller *feil* på norsk. Med disse søkeordene har jeg utelukket studier som bruker begrepet *conception,* og som omtaler misoppfatninger som *student's conception*. Dette er gjort for å begrense omfanget av publikasjoner. Confrey (1990) viser at studier som studerer systematiske feil omtaler de som misconceptions, og Leonard et al. (2014) viser at begrepet misconception fortsatt brukes i nyere forskning. I tillegg vil bruk av søkeordet *algebra** utelukke publikasjoner som undersøker spesifikke misoppfatninger, som for eksempel Akhtar og Steinle (2017) som undersøker misoppfatningen *eleven tolker bokstav som en forkortelse for et objekt* (se kapittel 3.5.3). Å strukturere søk som fanger opp de spesifikke misoppfatningene som kan knyttes til algebra, vurderer jeg å være for krevende, ut fra rammene i masterstudien og jeg har derfor valgt å ikke spesifisere søket i større grad.

De engelske søkeordene (*error** eller *misconception** og *algebra**) gav 359 577 treff på «alle felt», mens de norske (*misoppfatning** eller *feil* og algebra*) gav 556. For å begrense omfanget endret jeg søkeområdet til å gjelde «emne». Dette er emner som er registrerte metadata til publikasjonen. Her gav de engelske søkeordene 3 580 treff, mens de norske gav kun to treff. I søket med de norske søkeordene oppdaget jeg at emne var et dårlig egnet søkefelt for norske databaser, og noe jeg ikke ønsket å gå videre med.

For å forsøke å redusere omfanget på nytt begrenset jeg søket til å kun gjelde tittel. Her gav de engelske søkeordene 704 treff, mens de norske gav 8 treff. Felles for mange av treffene var at de var veldig gamle, noen helt fra 1600-tallet. Jeg valgte derfor å begrense utgivelsesår til 1970, siden det var da forskning på misoppfatninger startet (Fujii, 2014). Resultatet gav imidlertid 642 treff med engelske søkeord og de samme 8 med norske søkeord. Ut fra de rammene jeg har til rådighet i masterstudien vurderte jeg antallet som for høyt og valgte å ta bort søkeordet *error** og heller fokusere på publikasjoner fra 1970 og fram til i dag med søkeordene *misconception** og *algebra** på engelsk og *misoppfatning** og *algebra** på norsk i tittelen. Dette gav 66 treff med de engelske søkeordene, noe som gjorde at jeg hadde 74 publikasjoner totalt, publisert fra 1982 til og med august 2019.

Etter at duplikater, og publikasjoner som er skrevet på andre språk enn norsk, svensk, dansk og engelsk var fjernet, stod jeg igjen med 49 publikasjoner. Av disse var det fire som ikke kunne skaffes av NTNU Universitetsbiblioteket, som gjorde at jeg satt igjen med 45 publikasjoner. Disse publikasjonene ble gjennomgått, og kategorisert etter *forskningsmetode*, *type empiri*, *hvilke misoppfatninger som er indentifisert* og om studiene undersøker *utbredelse utover enkeltoppgaver* og *sammenheng mellom misoppfatninger* og *elevers opplevelse av misoppfatninger* (vedlegg 1). Til å kategorisere litteraturen har jeg, på grunn av naturlige tidsbegrensninger som ligger i en masterstudie, valgt å lese abstraktet og/eller innledningen og konklusjonene grundig. Resten av publikasjonen er skumlest. Litteratur som inngår i studien er nøye studert.

Resultatet av min litteraturgjennomgang, viser at misoppfatningene jeg fokuserer på i studien har god dekning i tidligere forskningslitteratur. Imidlertid viser det seg at det er veldig få studier som fokuserer på utbredelse av misoppfatninger utover enkeltoppgaver (N=5). Dette er også i samsvar med review-artiklene som er tidligere omtalt i dette kapitlet (Bush & Karp, 2013; Wang, 2015; Welder, 2012) og J. L. Booth et al. (2014).

Når det gjelder elevenes egen oppfattelse av misoppfatningene, er det ingen studier i litteraturgjennomgangen som direkte fokuserte på det, eller vektla det i abstraktet eller avslutningen, eller synliggjorde det i innholdsfortegnelsen. Nå kan det være at enkelte av de studiene som bygger på kvalitative forskningsmetoder som for eksempel intervju, indirekte berører dette enkelte steder uten at det er rettet et bevist fokus mot temaet. For å undersøke det nærmere krever det en grundigere gjennomgang av publikasjonene enn det som ligger innenfor tidsrammen til et masterstudium.

På bakgrunn av min egen litteraturgjennomgang, og review-artikkelen til Ay (2017), virker det som forskning på misoppfatninger i liten grad retter fokus på elevenes uttrykte grad av sikkerhet til eget svar. Min studie kan dermed tilføre forskningen ny kunnskap, som kan påvirke hvordan vi bør tilnærme oss elever i misoppfatning. Viser resultatene av studien at elever i misoppfatning uttrykker stor grad av sikkerhet til eget svar, bør vi kanskje tilnærme oss disse elevene på en annen måte, enn om de selv uttrykker liten grad av sikkerhet til eget svar.

3 Algebra og misoppfatninger

I dette kapitlet presenteres først ulike læringssyn som ligger bak å undersøke misoppfatninger, og dermed min studie. Videre ser jeg på begrepet algebra og hvordan dette plasseres i læreplanen i matematikk, før jeg ser på norske elevers prestasjoner i algebra i internasjonale undersøkelser. Deretter beskrives misoppfatninger og hvilke misoppfatninger som er aktuelle for min studie.

I litteraturen som danner grunnlaget for dette kapitelet, har jeg bevisst brukt en blanding av eldre og nyere forskning. Grunnen til det er å vise at misoppfatninger i matematikk, og også algebra, er et fenomen som fortsatt er like aktuelt i dag som for 40 år siden.

3.1 Misoppfatninger og læringssyn

Confrey (1990) kategoriserer tidligere forskning knyttet til misoppfatninger i matematikk, naturfag (science) og programmering i tre kategorier: Piagetiansk tilnærming til «students conceptions», vitenskapsfilosofisk tilnærming til «alternative conceptions» og forskning på «misconceptions» eller systematiske feil (Confrey, 1990, s. 5).

I en *vitenskapsfilosofisk tilnærming til alternative conceptions* knyttes studiene i Confrey (1990) i hovedsak til naturfag, og blir ikke nærmere beskrevet her. De to andre rammeverkene er sentrale for min studie og vil bli kort gjort rede for før jeg plasserer min egen studie i rammeverket til Confrey.

I en *Piagetiansk tilnærming til students conceptions* bygger forskningen på Jean Piaget sine tanker om genetisk epistemologi (Confrey, 1990). I genetisk epistemologi ligger en bredere betydning av begrepet genetikk enn det som innebærer gener, og kan ses på som studier om hvordan kunnskap oppstår og utvikles (Sjøberg, 1998). I *Piagetiansk arbeid med students conceptions* undersøkes utviklingen av elevenes forståelse av bestemte matematiske og vitenskapelige begreper over tid, med en grunnleggende antagelse om at kunnskap er en prosess, og ikke en tilstand (Confrey, 1990). På bakgrunn av dette studerte Piaget selv begreper, og ikke misoppfatninger (Confrey, 1990).

Av studier om misoppfatninger i algebra vil jeg si at deler av KIM-materialet (Brekke, Grønmo & Rosén, 2000) har preg av en Piagetiansk tilnærming. Elevene følges ikke over tid i KIM-materialet, men analysen av oppgavene som tester generalisering av mønster, viser at disse oppgavene ikke fanger opp systematisk feiltenkning blant elevene (Brekke et al., 2000, s. 17–21). Oppgavene gir ikke særlig informasjon utover om elevene har utviklet et godt nok generaliseringsbegrep til å løse oppgavene eller ikke.

Systematisk feiltenkning kjennetegner *forskningen på misconceptions* (Confrey, 1990). Ifølge Confrey (1990), bygger forskning på systematisk feiltenkning ikke på noe bestemt læringssyn, annet enn at de systematiske feilene kommer av overgeneralisering av tidligere kunnskap. Overgeneralisering av tidligere kunnskap er beskrevet nærmere senere i dette kapitlet.

En studie jeg vil kategorisere som *forskning på misconceptions,* er Akhtar og Steinle (2013). De undersøker elevenes systematiske feiltekning i oppgaver om variabler, og identifiserer to misoppfatninger på bakgrunn av elevenes svarmønster; «Different Letter means Different Number» og «Empty Box» (Akhtar & Steinle, 2013, s. 36). Misoppfatningene er med i min studie og er nærmere beskrevet i kapittel 3.5.4 og 3.5.5.

Jeg vil definere min egen studie som en blanding av *forskning på misconceptions* og *Piagetiansk tilnærming til students conceptions*, ut fra et konstruktivistisk læringssyn. Studien undersøker elevenes systematiske feiltenkning (*forskning på misconceptions*) i oppgaver som er utviklet for å teste misoppfatninger knyttet til sentrale algebraiske begreper (*Piagetiansk tilnærming til students conceptions*). Dette gjør at studien ikke fokuserer på systematisk feiltenkning knyttet til for eksempel prosedyrer eller algoritmer.

Ut fra et konstruktivistisk læringssyn, organiserer barn det de lærer fra sine erfaringer og konstruerer selv, og ikke absorberer, kunnskap om verden gjennom kognitive *skjema* og *strukturer* (Ormrod, 2016). Etter hvert som barna erfarer like handlinger eller tanker som de gjentatt kan bruke i omgivelsene, samles disse i et skjema som er lagret i barnets indre. Disse *skjemaene* kan hentes fram og anvendes i både situasjoner som er like og forskjellige fra der de har blitt brukt tidligere (Ormrod, 2016). Enkelte *skjema* kan grupperes på grunn av likheter og indre sammenhenger, og det er nettverket av slike grupper som blir kalt kognitive *strukturer* (Ormrod, 2016).

Ifølge Piaget samhandler barnet med omverden ved hjelp av to prosesser, *assimilasjon* og *akkomodasjon* (Ormrod, 2016), og dermed kan vi si at disse to prosessene beskriver læringsprosessen til barn. *Assimilasjon* er når vi tolker en ny situasjon i et allerede eksisterende skjema (Ormrod, 2016). Et eksempel fra min studie på *assimilasjon* er når elevene bruker gammel kunnskap ukritisk i nye sammenhenger. For eksempel kan elevene tolke konjunksjoner for algebra i sitt skjema for posisjonssystemet og i en oppgave som 3x = 30, vil det riktige svaret for disse elevene være at x er lik 0 (figur 1). Misoppfatningen er nærmere beskrevet i kapittel 3.5.7.

Oppgave 2

Hvilken verdi har x i utsagnet nedenfor?

$3x = 30$

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 1: Oppgave 2, tester misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*

Når barn kan bruke sine eksisterende skjema komfortabelt i nye sammenhenger kaller Piaget tilstanden for indre likevekt (engelsk: equilibration) (Ormrod, 2016). Dersom elevene opplever at de gamle skjemaene ikke er tilstrekkelige for å forstå den nye situasjonen, oppstår en indre ubalanse hos barnet (engelsk: disequilibrium) (Ormrod, 2016). Da trer den andre delprosessen, *akkomodasjon*, i gang for å prøve å gjenskape den indre likevekten. Dette kan enten skje ved at et eksisterende skjema blir modifisert slik at det passer med den nye situasjonen, eller at det opprettes et helt nytt skjema (Ormrod, 2016).

Et viktig poeng for min studie i denne sammenhengen, er at *akkomodasjon* skjer når barnet selv erfarer at de eksisterende skjemaene ikke gir en indre balanse, som kan knyttes til elevenes uttrykte grad av sikkerhet til eget svar. Dersom elever avgir svar som tyder på misoppfatning, samtidig som de uttrykker høy grad av sikkerhet til eget svar, kan det tyde på at elevene vil fortsette å bruke de samme skjemaene i lignende situasjoner i framtiden. Dette kan føre til at elevenes kognitive skjema og strukturer ikke blir videreutviklet. I arbeidet med misoppfatninger vil spesielt lærerens evne til å utfordre elevenes tankesett slik at den indre ubalansen skapes, være viktig. I undervisningssammenheng kaller vi ofte en slik ubalanse for en kognitiv konflikt (Brekke, 2002).

Flere studier på misoppfatninger bygger på et konstruktivistisk læringssyn, der Brekke (2002) og Fumador og Agyei (2018) er to av de som uttrykker dette eksplisitt.

3.2 Algebra

> De var nylig begyndt paa Ligninger af første Grad med en Ubekjendt, og lille Marius havde taalmodig fulgt med gjennem mangfoldige Exempler, forat finde dette x. Han havde hørt dem sige, at nu var det fundet og seet dem stryge ud av Tavlen, – ja hvad mer var, han havde endogsaa selv alle Exemplerne opskrevne i sin Bog, og dog forblev denne ene Ubekjendte ham lige fjern og fremmed. Han hold Øie med dette x; han skrev trofast op, hvorledes det blev jaget som en Ræv fra Linie til Linie med Multiplikasjoner, Forkortninger, Brøker og al Verdens Djævelskab efter sig, indtil det arme udmattede Dyr endelig blev drevet alene over til venstre Side, og saa viste det sig, at dette fryktelige x var ikke andet end et ganske fredeligt Tal – for Exempel 28.
>
> Marius kunde omsider tilnød forstaa, at x kunde have forskjellig Værdi i de forskjellige Exempler. Men hvad man saa skulde med dette x? – hvortil alle disse Omsvøb – hvorfor jage Tavlen ned over Stok og Sten efter denne ene Ubekjente, naar det ikke var andet end for Exempel 28 – kanske bare 15? – nei det kunde lille Marius virkelig ikke begribe. Kielland (1997, s. 188)

Sitatet ovenfor er fra Alexander Kielland sin roman Gift fra 1883, der han beskriver eleven Marius sitt møte med algebra på den tiden. Sitatet er omtrent 150 år gammelt, men er for mange elever like aktuelt i dag (Naalsunds, 2012).

Historisk sett ble algebra sett på som et synonym for ligningsteori helt fram til begynnelsen av 1800-tallet (Aubert, 2018), men i dag hersker det en enighet i at algebra er mye mer enn det (L. R. Booth, 1986; Grønmo, 2013; Welder, 2006).

Vygotsky beskriver algebra som «written language is to oral language what algebra is to arithmetics» (sitert fra Brekke et al., 2000, s. 7), og definerer dermed algebra som aritmetikkens skriftspråk. Ved å anerkjenne sitatet til Vygotsky, anerkjenner vi også at kompetanse innen algebra er essensiell for mennesker i all type utdanning eller yrkesliv, der dette språket brukes. Men hva er egentlig algebra?

3.2.1 To hovedområder og tre grener av algebra

Kaput (2007, s. 11) deler algebra inn i to hovedområder, som begge inngår i tre grener. Hovedområde A omfatter utviklingen av det symbolske språket, som gjør at vi kan kommunisere om matematiske mønstre, sammenhenger, likheter og ulikheter. At svar også kan inneholde en regneoperasjon, for eksempel at $4 \cdot 4 = 12 + 4$, er et eksempel på en viktig egenskap til det symbolske språket. Misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* er beskrevet i kapittel 3.5.2. Hovedområde A vil jeg oppsummere til å omhandle å generalisere og symbolisere matematiske sammenhenger.

Hovedområde B omfatter det algebraiske språkets egen logikk og en indre struktur. Ved å følge logikken og strukturen i dette språket, kan vi manipulere algebraiske uttrykk og utvikle kompetanse vi ikke umiddelbart kan se ut fra aritmetikken. Hovedområde B vil jeg oppsummere til å omhandle det formelle algebraiske skriftspråket og regler.

Gren 1 omfatter generalisering av aritmetikk. I tillegg omfatter grenen generaliseringsstrategier knyttet til utregninger, både standardiserte og egenutviklede (Kaput, 2007). Et eksempel på regnestrategier er å se på subtraksjon som konstant differanse (Svingen, 2016), der vi utnytter at differansen mellom to tall ikke endres dersom vi adderer eller subtraherer tallene med samme tall. For eksempel så er $52 - 16 = (52 + 4) - (16 + 4) = 56 - 20$. En forutsetning for å kunne benytte en slik regnestrategi, er at elevene har en forståelse av likhetstegnet at symboliserer likeverdighet (Kaput, 2007). Elevenes misoppfatninger knyttet til likhetstegnet er beskrevet i kapittel 3.5.1.

Gren 2 omfatter funksjoner, relasjoner og samvarians, altså studier av størrelser som er avhengige av hverandre (Kaput, 2007). Elever som ikke ser på funksjoner som en samvariasjon mellom en avhengig og en uavhengig variabel, kan heller tolke funksjoner som en beskrivelse av et bilde og ikke sammenhenger. Denne misoppfatningen er beskrevet i kapittel 3.5.8.

Gren 3 omfatter tre former for modellering (Kaput, 2007). Den første formen for modellering omhandler tall og mengder som krever at man bruker algebraisk syntaks. Et eksempel på dette er likninger, der bokstaver ses på som ukjente og ikke som variabler. En annen type modellering innebærer å modellere en situasjon ved å bruke algebraisk syntaks til å generalisere og uttrykke matematiske mønstre i situasjonen (både i og utenfor matematikkfaget), der bokstaver ses på som variabler. Den siste typen modellering omfatter generaliseringer fra løsninger av enkle modelleringssituasjoner enten av den første typen modellering som nevnt ovenfor, eller fra rene aritmetiske oppgaver i kontekst som ikke krever algebraisk syntaks for å løse. Kaput (2007) omtaler dette som "algebraifisering" av et aritmetisk problem, og at i denne typen modellering uttrykker bokstaver generaliseringer. Elevens forståelse for bruk av bokstaver er sentralt i alle tre formene for modellering i gren 3. I min studie er flere av misoppfatningene knyttet til bruk av bokstaver i algebra (se kapittel 3.5.3–3.5.7).

Studien min undersøker elevenes misoppfatninger knyttet til algebraisk syntaks på flere måter, spesielt knyttet til bruk av bokstaver i matematiske uttrykk. I neste delkapittel skal vi se på hvordan Kaputs definisjon av algebra samsvarer med den norske læreplanen.

3.2.2 Algebra i skolen

> Matematikk er eit sentralt fag for å kunne forstå mønster og samanhengar i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendingar. Matematikk skal bidra til at elevane utviklar

> eit presist språk for resonnering, kritisk tenking og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering. Matematikk skal førebu elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi dei kompetanse i utforsking og problemløysing. (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 2)

Slik definerer læreplanen (LK20) i matematikk hva matematikk i skolen er. Leser vi sitatet i lys av de to hovedområdene og grenene for algebra til Kaput (2007), vil vi lett finne koblinger mellom «forstå mønster og samanhengar», «modellering og anvendingar», «utvikler et presist språk for resonnering» og «abstraksjon og generalisering» (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 2) og hovedområdene og grenene vi så på i kapittel 3.2.1. «Modellering og anvendingar» og «abstraksjon og generalisering» er også to av i alt seks kjerneelementer i faget matematikk. I tillegg er det ett kjerneelement som heter «representasjon og kommunikasjon» som også kan knyttes til sitatet ovenfor i (Utdanningsdirektoratet, 2019). Kjerneelementene er definert som «det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget, det mest betydningsfulle faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Kunnskapsdepartementet, 2016, s. 34). Ut fra dette kan vi slå fast at algebra, slik det er definert av Kaput (2007), er en sentral del av matematikkfaget i de nye læreplanene.

Elevene som deltar i studien har fått sin opplæring etter læreplanverket kunnskapsløftet, LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006). I siste revidering av LK06 i 2013, ble algebra i større grad synliggjort på barnetrinnene (Utdanningsdirektoratet, 2013), ved at kompetansemål om å utrykke matematiske sammenhenger med matematiske symbol ble inkludert etter 4. trinn, og kompetansemål om likninger ble inkludert etter 7. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2006). Tabell 1 viser kompetansemål i LK06 fra 2. til og med 7. trinn, som jeg vurderer å være innenfor definisjonen av algebra til Kaput (2007).

Trinn	Mål for opplæringa er at eleven skal kunne
2	• kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster
4	• kjenne att, eksperimentere med, beskrive og vidareføre strukturar i talmønster • bruke matematiske symbol og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing
7	• beskrive referansesystemet og notasjonen som blir nytta for formlar i eit rekneark, og bruke rekneark til å utføre og presentere berekningar • stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal • bruke forhold i praktiske samanhengar, rekne med fart og rekne om mellom valutaer

Tabell 1: Kompetansemål fra LK06 i tråd med Kaput (2007) sin definisjonen av algebra

I kapittel 3.5.1–3.5.8 som beskriver misoppfatningene studien undersøker, har jeg relatert ett kompetansemål fra tabell 1 til hver misoppfatning. Kompetansemålene fungerer som en validering av oppgavene som inngår i studien, og viser at elevene på ungdomsskolen skal ha tilstrekkelig erfaring med den algebraen som blir testet i oppgavene i studien. Dette er grunnen til at jeg i tabell 1 har fokusert på kompetansemål opp til 7. trinn.

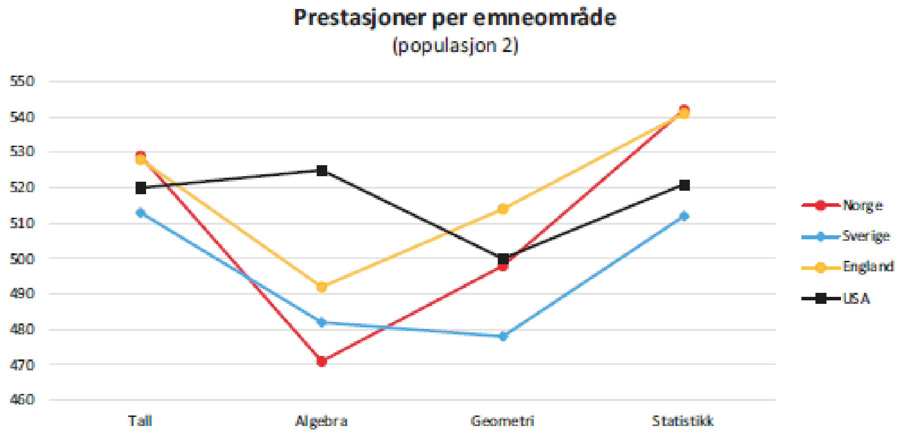
I vedlegg 2 sammenlignes tabell 1 med en tilsvarende tabell basert på kompetansemål fra LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019).

3.3 Norske elevers prestasjoner i algebra

Store internasjonale undersøkelser, som Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), har i de siste årene blitt viktige måleredskaper for utdanningspolitikken i Norge (Sjøberg, 2007, 2014). TIMSS studerer elevenes ferdigheter i faget matematikk, med oppgaver som av deltagerlandene er validert til å være i samsvar med læreplanen for deltagerlandet (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016, s. 182). Ifølge rammeverket til TIMSS for elever på 9. trinn, skal 30 % av oppgavene være knyttet til området algebra (Bergem et al., 2016). Når jeg skal undersøke norske ungdomsskoleelevers misoppfatninger knyttet til algebra, er det derfor naturlig å se hvordan en gruppe norske elever presterer på dette området i TIMSS. Siste rapport fra gjennomføring av TIMSS er i skrivende stund fra 2015, der norske elevers prestasjoner blir oppsummert på følgende måte:

> På 9. trinn kan norske elevers prestasjoner i matematikk karakteriseres som middels gode i et europeisk perspektiv. Det er særlig svake prestasjoner i emneområdet Algebra, som her trekker gjennomsnittsskåren ned. (Bergem et al., 2016, s. 22)

Selv om norske elevers resultater i matematikk har hatt en positiv utvikling i de ulike TIMSS-undersøkelsene, skiller algebra seg ut som området elevene presterer lavest i. Figur 2 viser norske 9. trinnselever sine resultater innen de fire områdene i matematikk TIMSS tester. Resultatene er sammenlignet med Sverige, England og USA som er valgt som referanseland til Norge (Bergem et al., 2016, s. 16).



Figur 2: Prestasjoner i emneområdene i matematikk TIMSS 2015 for Norge og referanselandene (Bergem et al., 2016, s. 36)

Norske elevers lave prestasjoner i algebra er ikke et nytt fenomen, men er blitt løftet fram som et av hovedfunnene i alle TIMSS-undersøkelser Norge har deltatt i de siste 25 årene (Grønmo et al., 2012, s. 24). Ser vi på norske elevers prestasjoner i de ulike emneområdene de tre siste TIMSS-undersøkelsene, er det en positiv utvikling i tre av områdene fra 2007–2015, mens resultatet i algebra er det samme i 2015 som i 2007 (Bergem et al., 2016). Ingen land har et større avvik mellom skår i et emneområde sammenlignet med totalskår enn det Norge har mellom algebra og totalskår (Grønmo, Hole & Borge, 2017). Også resultater for TIMSS Advanced 2015, som undersøker elever som har tatt full fordypning i matematikk på videregående (Matematikk R2), viser at norske elever presterer lavest i området algebra (Onstad, Hole & Grønmo, 2016, s. 39).

Grønmo et al. (2012) sier at én av forklaringene til at norske elever presterer såpass lavt i algebra sammenlignet med de andre områdene, er at algebra blir introdusert relativt seint i den norske grunnskolen. Etter min vurdering er algebra styrket i LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019) sammenlignet med LK06 (se vedlegg 2). Det blir spennende å se om styrkningen av algebra i læreplanene i Norge kan ha innvirkning på norske elevers prestasjoner i algebra i TIMSS i framtiden.

De neste delkapitlene fokuserer på misoppfatninger, først på misoppfatninger som et generelt begrep, deretter misoppfatninger knyttet til algebra.

3.4 Misoppfatninger

Etter hvert som Piaget sine studier viste at barn har med seg erfaringer og tanker om begreper allerede før undervisningen starter, ble det også fattet en større interesse for hvordan barn utvikler sine begrep (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982). Dette førte igjen til en større interesse for elevenes feil, feiltenkinger og misoppfatninger (Posner et al., 1982). I begynnelsen var forskningen stort sett knyttet til naturvitenskapen, men pionere som Erlwanger, Davis og Ginsbury relaterte på 1970-tallet misoppfatninger også til matematikk (Fujii, 2014).

I tiden fram til i dag har begrepet misoppfatninger fått en sentral rolle i den matematikkdidaktiske forskningslitteraturen. Noe av årsaken til at misoppfatninger er blitt såpass sterkt knyttet til matematikkfaget, er at læring i matematikk i stor grad bygger på læring av tidligere begreper (Ay, 2017).

Selv om begrepet misoppfatninger er mye brukt i litteraturen, er det flere ulike syn på, og definisjoner av begrepet. Vi kan på mange måter skille mellom to hovedsyn på misoppfatninger (Leonard et al., 2014; Maskiewicz & Lineback, 2013). Det ene bygger på at misoppfatninger er en feil som det må rettes opp i for at videre læring skal skje (Strike og Posner (1985), referert fra Maskiewicz & Lineback, 2013). Bakgrunnen for dette synet er at læring skjer lagvis i hjernen, og at hvert lag må være komplett for at videre læring kan skje, og at elevenes delvis utviklede begrep må bli eliminert eller rettet for at ny læring skal skje (Leonard et al., 2014). Ut fra dette synet angår misoppfatninger elever som ikke følger forventet progresjon, og læreren sin oppgave er å unngå at elever havner i misoppfatninger, eller avlære misoppfatninger om "skaden" allerede har skjedd.

På den andre siden, kan misoppfatninger ses på som en naturlig del av elevenes utvikling, som vi trolig ikke kan unngå oppstår (Brekke, 2002; Ojose, 2015). Misoppfatninger blir dermed ikke en feil som ødelegger for videre læring, men et steg på veien av utviklingen av de fullstendige matematiske begrepene. Flere forskere poengterer at misoppfatninger er et resultat av at elevene prøver å skape mening og sammenheng i verden rundt seg (bl.a. Brekke, 2002; McIntosh, 2007; Mestre, 1987; Ojose, 2015). Med et slik syn, angår misoppfatninger alle elever, og blir en produktiv komponent som lærere må ta hensyn til og ta med seg i planlegging og gjennomføring av undervisning. Elevenes misoppfatninger gir mye informasjon om elevenes tenkning og sier mye om elevenes forståelse av matematiske begreper (Cockburn & Littler, 2008; Ryan & Williams, 2007), noe som er viktig for å kunne utvikle fullstendige begrep på et senere tidspunkt (Drews et al., 2017). I Norge støttes et syn på misoppfatninger som en produktiv komponent for videre læring, av både Matematikksenteret (2019b) og Statped (2019), og det er dette synet på misoppfatninger jeg legger til grunn i studien.

Matematikksenteret (2019a) omtaler også at elever er *i* en misoppfatning, og ikke at elever *har* en misoppfatning. Begrunnelsen kan være at elever er *i* en midlertidig tilstand som de, dersom de blir utfordret, kan bevege seg ut av, mens *har* i større grad henviser til en varig tilstand eller diagnose. Jeg tolker dette til å støtte mitt syn på misoppfatninger som en produktiv komponent for læring, og har valgt å benytte terminologen at elever er *i misoppfatninger* i studien.

Vi kan finne støtte for å se på misoppfatninger som en produktiv komponent for videre læring ut fra et konstruktivistisk læringssyn, se kapittel 3.1, ved *assimilasjon* og *akkomodasjon*. Barn entrer ikke klasserommet med blanke ark eller som tomme flasker som venter på å bli fylt ut eller på av læreren, men de entrer klasserommet med ulike erfaringer og forståelse knyttet til matematiske begrep. I mange tilfeller vil ikke elevenes erfaringer og forståelse av begrepene være i samsvar med den vitenskapelige definisjonen (Maskiewicz & Lineback, 2013). Det er slike ufullstendige begrep som vi kaller misoppfatninger.

Ryan og Williams (2007) har analysert og klassifisert feil elevene gjør på standardiserte og nasjonale tester i Storbritannia og nevner fire typer misoppfatninger som kommer av at elevene har foretatt en «intelligent construction» (Ryan & Williams, 2007, s. 13). Disse fire typene er kalt *modelling*, *prototyping*, *overgeneralizing* og *process-object*-problematikk. Med *modelling* mener de feil som følge av at elevene tolker en oppgave med kontekst fra reell situasjon på en annen måte enn det som er intensjonen. Dette kan komme av at eleven har annen oppfatning av situasjonen og at eleven legger til, eller tar bort, opplysninger for at situasjonen skal stemme overens med elevens oppfatning av situasjonen.

Med *prototyping* problematiserer (Ryan & Williams, 2007) det matematiske begrepet opp mot prototyperepresentasjonen av begrepet. Siden matematiske begrep er abstrakte i seg selv, må vi benytte en representasjon for å visualisere dem (Duval, 2006). I mange tilfeller går disse representasjonene på bekostning av de matematiske begrepene, noe som gjør at elevene kjenner igjen og beskriver det matematiske begrepet ved hjelp av disse prototypene og ikke begrepet i seg selv. Et eksempel på dette er rektangler, der en prototype av rektanglet er et rektangel som står vinkelrett på kortsiden av arket med den lengste siden ned. Elever med en protypetenkning om rektangler vil ha problemer med å gjenkjenne et rektangel som er rotert 45 grader i forhold til prototypen, eller parallellogrammer eller kvadrater som rektangler.

Overgeneralizing eller *intelligent overgenealization,* som Ryan og Williams (2007) omtaler det som, har mye til felles med prototypetenkningen. Overgeneralisering handler om at elevene oppdager et mønster i en kontekst, som i mange tilfeller er gyldig på ett tidspunkt, og bruker dette mønsteret i en annen kontekst der mønsteret ikke er gyldig. Eksempler på dette kan være elever som møter mange oppgaver der det står et regnestykke til venstre for et likhetstegn, og at elevene skal fylle inn ett tall som svar på regnestykke til høyre for likhetstegnet. Dette kan føre til to misoppfatninger, at elevene *tolker likhetstegnet som en kommando* for at her skal svaret stå (kapittel 3.5.1) og at *svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon* (kapittel 3.5.2). Overgeneralisering som grunn for misoppfatning er også nevnt i en rekke annen forskningslitteratur (bl.a. Barbieri, Miller-Cotto & Booth, 2019; J. L. Booth et al., 2017; Brekke, 2002; Don, 2011; Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Eccius-Wellmann, 2012; Fumador & Agyei, 2018; Hansen, Drews, Dudgeon, Lawton & Surtees, 2017; Maskiewicz & Lineback, 2013; Nygaard & Zernichow, 2006; Zielinski, 2017).

Process-objekt-problematikk går på at elever har problemer med å skille matematikk som prosess fra matematikk som objekt. Bruker vi eksemplet ovenfor med likhetstegnet, vil elevene tolke likhetstegnet som en *prosess* som at her skal noe gjøres, og ikke som et *objekt* eller representasjon for likeverdighet. Problemer knyttet til *prosess* og *objekt* er også nevnt i annen litteratur (bl.a. Brekke, 2002; Lim, 2010; Sfard, 1991).

I min studie tar jeg utgangspunkt i misoppfatninger knyttet til *overgeneralisering* (inkl. prototypetenkning) og problemer knyttet til *prosess* og *objekt.* Årsaken til at jeg velger å se bort fra *modelling* er at det er knyttet til feil elever gjør i å tolke kontekster, og ikke feil knyttet til matematiske begrep. Selv om noen av oppgavene i min studie er gitt i en kontekst, er ikke elevers problemer med å tolke selve konteksten interessante for å besvare mine forskningsspørsmål. I disse oppgavene blir elevenes feiltenkning relatert til de andre to kategoriene.

3.5 Misoppfatninger i algebra

Med utgangspunkt i misoppfatninger som *overgeneralisering*, eller problemer knyttet til *prosess-objekt*, har jeg undersøkt eksisterende forskningslitteratur for å identifisere misoppfatninger knyttet til algebra, som går inn under disse to kategoriene. Jeg har studert nasjonal (Brekke et al., 2000; Naalsund, 2012) og internasjonal forskningslitteratur (bl.a. Akhtar & Steinle, 2013, 2017; J. L. Booth et al., 2017; L. R. Booth, 1984, 1988; Fujii, 2003; Küchemann, 1978; Russell, O'Dwyer & Miranda, 2009; Ryan & Williams, 2007; Stephens, 2006), i tillegg til litteraturgjennomgangen beskrevet i kapittel 2.

Tabell 2 viser de misoppfatningene jeg fokuserer på i min studie, der de fleste er beskrevet i J. L. Booth et al. (2017). På grunn av naturlige begrensninger som ligger i en masterstudie, har jeg utelukket de misoppfatningene som ikke er direkte knyttet til algebra. Jeg har likevel inkludert én misoppfatning som elevene utvikler i arbeidet med aritmetikken, *eleven tolker likhetstegnet som en kommando*, i studien. Bakgrunnen for dette er at begrepet likeverdighet framheves av flere forskere (f. eks. Stephens, 2006, s. 251) som et av kjernebegrepene for å forstå algebra, og er trukket fram som spesielt viktig i arbeidet med likninger (J. L. Booth & Koedinger, 2008; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Stephens, 2006).

Misoppfatninger beskrevet i forskningslitteraturen	**Direkte knyttet til algebra**	**Fokus i min studie**
tolker likhetstegnet som en kommando	-	x
skiller ikke fortegn fra regnetegn i arbeid med negative tall	-	-
svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon	x	x
tolker bokstaver som forkortelser for objekt	x	x
en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	x	x
ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	x	x
tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	x	x
verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet	x	x
ulike misoppfatninger knyttet til brøk	-	-

Tabell 2: Misoppfatninger knyttet til algebra beskrevet i eksisterende forskningslitteratur, de som kan knyttes direkte til algebra og de som inngår i min studie

Ut fra Kaput (2007) sin definisjonen av algebra, (se kapittel 3.2.1), vil misoppfatningene i studien i all hovedsak være knyttet til algebraisk syntaks, som utvikles i hovedområde A og benyttes fullt ut i hovedområde B. De fleste av misoppfatningene ovenfor relateres til *overgeneralisering* av tidligere kunnskap eller prototypetenkning, mens misoppfatninger om at *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* og at *likhetstegn tolkes som en kommando,* er i tillegg relatert til *prosess-objekt* (Ryan & Williams, 2007).

I de påfølgende underkapitlene vil jeg beskrive de misoppfatningene jeg ser nærmere på i studien. I beskrivelsen vil jeg også vise et eksempel på en oppgave som er utviklet for å teste misoppfatningen, samt relatere misoppfatningene til kompetansemål i læreplanen i matematikk i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006).

3.5.1 Tolker likhetstegn som en kommando

Misoppfatningen, *tolker likhetstegn som en kommando*, går på at elevene ikke ser på likhetstegnet som et tegn for likeverdighet, men som en kommando for å regne ut et svar. For elever i denne misoppfatningen blir likhetstegnet et symbol for en prosess om at noe skal utføres, og ikke som en representasjon for likeverdighet (*objekt*). Brekke et al. (2000) poengterer at denne misoppfatningen har mye til felles med hvordan likhetstegnet på en kalkulator fungerer ved at elevene skriver inn et regnestykke, trykker på likhetstegnet og så vises svaret på kalkulatoren. Måten vi benytter kalkulatoren kan også være noe av årsaken til at elevene misbruker likhetstegnet når de skriver hvordan de tenker i oppgaver som krever flere operasjoner (f. eks. $4 \cdot 3 = 12 : 2 = 6$).

Misoppfatningen kan også knyttes til *overgeneralisering*, eller *prototypetenkning,* ved at elevene fra starten av møter mange like oppgavetyper der en *prosess-objekt*-tenking av likhetstegnet gir riktig svar (Bush & Karp, 2013). Kieran (1981) poengterer viktigheten av lærerens ordvalg i arbeidet med likhetstegnet, og at det kan påvirke om elevene tolker likhetstegnet som *prosess* eller *objekt*. Det er for eksempel forskjell på om vi sier at 3 + 4 *blir* 7, eller om vi sier at 3 + 4 *har samme verdi som* 7, der det siste eksemplet i større grad fremmer en forståelse for likhetstegnet som objekt.

Stephens (2006) viser til en rekke studier der denne misoppfatningen er blitt undersøkt, blant annet Falkner et al. (1999) sin studie som undersøkte første- til sjetteklassingers forsøk på å løse $8 + 4 = \_ + 5$. Svarene 12 (legger sammen de to tallene til venstre for likhetstegnet) eller 17 (legger sammen alle tallene i oppgaven) var høyfrekvente i studien. Oppgaven fra Falkner et al. (1999) vil også bli beskrevet i analysen (kapittel 5.3.1).

Oppgave 1, 13 og 16 (vedlegg 4) er utviklet for å teste misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando*. Figur 3 viser oppgave 16.

Oppgave 16

Hvilke tall skal stå i de tomme rutene?

3 + ☐ = 4 + 4 = ☐

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

◻ Veldig sikker ◻ Ganske sikker ◻ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ◻ Ganske usikker ◻ Veldig usikker

Figur 3: Oppgave 16, tester misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando*

Elever som *tolker likhetstegn som en kommando* vil trolig angripe oppgave 16 ved å undersøke hva må vi addere 3 med for at det skal bli 4 og fylle inn 1 i ruta lengst til venstre, for så å fylle ut 8 i ruta lengst til høyre, fordi det står 4 + 4 til venstre for likhetstegnet. Elever som har en forståelse for likhetstegnet som en representasjon for likeverdighet vil trolig angripe oppgaven ved å undersøke hva må stå i ruta lengst til høyre for at venstre og høyre side skal være likeverdige, og fylle inn 5 i den første ruta og 8 i den neste ruta.

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor er denne misoppfatningen beskrevet av blant annet Hornburg, McNeil, Chesney og Matthews (2015), Sfard og Linchevski (1994) og L. R. Booth (1988).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- bruke matematiske symbol og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing (4. trinn)

3.5.2 Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon

Gjennom elevenes erfaringer med aritmetikken er det naturlig at elever tenker på et svar som et produkt, en sum, en differanse eller en kvotient. I aritmetikken vil symboler som + og = ofte bli tolket kun som en *prosess* der symbolene stimulerer til å utføre en handling (L. R. Booth, 1988). Elever vil i aritmetikken løse oppgaver som 8 + 3 = __ riktig, selv om de kun ser på 8 + 3 som en *prosess* (addisjon) og ikke ser på 8 + 3 som også et *objekt* i seg selv (to delmengder addert). Misoppfatningen kan også komme som et resultat av *overgeneralisering*, ved at mange elever møter oppgaver der svar ikke inneholder en regneoperasjon gjennom et oppgaveparadigme (Skovsmose, 1998).

Elever i misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* vil få utfordringer i møtet med algebra, og spesielt i oppgaver av typen *Forenkle uttrykket* *3a + 2b + a + 4b =*. Det at uttrykket forenklet blir 4a + 6b er noe som bryter med elevenes tidligere erfaringer, ved at svaret må ses på som både en prosess (addisjon) og et objekt (to delmengder addert). Elever i denne misoppfatningen vil trolig anse 10ab som en korrekt forenkling av uttrykket.

Collis (1975), referert i L. R. Booth (1988, s. 301) omtaler at arbeid med algebra krever at elevene utvikler «accepting lack of closure», altså svar kan avgis på andre måter enn ett endelig tall, og at uttrykk som 4a + 6b må tolkes som både *prosess* og *objekt*.

Oppgave 4, 6 og 11 er utviklet for å teste misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*. Figur 4 viser oppgave 4, der elever i misoppfatningen trolig vil få problemer med hvordan Janne har løst oppgaven og prøve å bearbeide uttrykket videre for å få et svar som ikke inneholder en regneoperasjon. Et forventa elevsvar i oppgave 4 er 17ab.

En utfordring med oppgave 4 er at en del andre faktorer spiller inn i hvordan eleven angriper den. For eksempel vil elever som av ulike grunner vet at a + b ikke er det same som ab, angripe oppgaven på en annen måte enn elever som ikke har kunnskap om dette.

Oppgave 4

Janne har løst oppgaven nedenfor på følgende måte:

Forenkle uttrykket hvis mulig:
3a + 2b + 7a + 2 + 3b

$3a + 2b + 7a + 2 + 3b = \underline{10a + 5b + 2}$

Vurder om Janne sin løsning er riktig eller ikke, og forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 4: Oppgave 4, tester misoppfatningen *tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon*

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor, er denne misoppfatningen beskrevet av blant annet Chow (2011), Lim (2010) og Küchemann (1978).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- kjenne att, eksperimentere med, beskrive og vidareføre strukturar i talmønster (4. trinn)

3.5.3 Tolker bokstaver som forkortelser for objekt

Å bruke appelsiner og bananer for å prøve å konkretisere algebraiske uttrykk som 3a + 2b + a + 4b og forsøke å tvinge fram forståelsen for at et svar også kan inneholde en regneoperasjon, er mye brukt av lærere (Kongelf, 2019, s. 92). Problemet med forsøket på konkretiseringen er at den presenterer bokstaver i matematikken som objekter, og ikke variabler eller ukjente. I tillegg vil den virke mot sin hensikt i når elevene møter andre algebraiske uttrykk med de samme bokstavene, for eksempel 3a · 2b.

L. R. Booth (1984, 1988) påpeker at bokstaver også er brukt i aritmetikken, men med en ulik betydning sammenlignet med i algebra, og at dette kan bygge opp under misoppfatningen om at bokstaver er forkortelser for objekter. For eksempel leses *100 m* i aritmetikken som *hundre meter*, mens i *100m* i algebra betyr 100 multiplisert med variabelen m. Også bruk av formler, for eksempel formelen for areal for et rektangel, A = l · b, kan bidra til å styrke misoppfatningen om at bokstaver er en forkortelse for et objekt ved at A blir tolket som å stå for areal (Chick, 2009), og ikke for størrelsen til arealet til rektangelet.

Oppgave 3, 8, 12 og 19 er utviklet for å teste misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelser for objekt*. Figur 5 viser oppgave 3.

Oppgave 3

Skriv en matematikkfortelling som passer til utsagnet:

3a + 2a = 5a

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 5: Oppgave 3, tester misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelser for objekt*

Mange elever som er i denne misoppfatningen vil kunne løse en god del algebraoppgaver riktig (Küchemann, 1978), for eksempel oppgave 4 (figur 4), som vist på forrige side. I oppgave 3 skal elevene sette et regnestykke inn i en kontekst, og dermed identifiseres elevenes tolkning av bokstavene gjennom utsagnet i oppgaven. Svar som tre appelsiner pluss to appelsiner er fem appelsiner, er forventa elevsvar fra elever som *tolker bokstaver som forkortelser for objekt.*

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor, er denne misoppfatningen beskrevet av blant annet J. L. Booth et al. (2017), Akhtar og Steinle (2017) og L. R. Booth (1983).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- beskrive referansesystemet og notasjonen som blir nytta for formlar i eit rekneark, og bruke rekneark til å utføre og presentere berekningar (7. trinn)

3.5.4 En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall

Akhtar og Steinle (2013, s. 36) omtaler misoppfatningen om at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall som «empty box misconception». Misoppfatningen går ut på at elever tolker bokstaver som forkortelse for et vilkårlige tall, også innad i samme oppgave, eller at bokstaven skjuler et tall. For elever i denne misoppfatningen vil 2 og 3 være en av flere riktige løsninger i oppgaven $x + x = 5$.

Oppgave 5, 7 og 17 er utviklet for å teste misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall.* Figur 6 viser oppgave 7.

Oppgave 7

Noen elever skal finne verdien til x i utsagnet x + x + x = 12

Marit svarte: x = 2, x = 5 og x = 5
Therese svarte: x = 9, x = 2 og x = 1
Astrid svarte x = 4

Vurder om svaret til hver enkelt er riktig eller galt.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 6: Oppgave 7, tester misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*

Elever som tenker at x kan ha ulike betydninger i oppgave 7, vil trolig tenke at *Marit*, *Therese* og *Astrid* sine svar er riktige, siden alle tre får 12 til sum. I tillegg kan noen elever vurdere at Astrid sitt svar ikke er riktig, siden hun bare har oppgitt én verdi for x.

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor, er denne misoppfatningen beskrevet i blant annet J. L. Booth et al. (2017), Ryan og Williams (2007) og L. R. Booth (1983).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal (7. trinn)

3.5.5 Ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi

En annen misoppfatning knyttet til variabler er misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi*. Også denne misoppfatningen er omtalt i Akhtar og Steinle (2013), der elevene som ble klassifisert i denne misoppfatningen løste oppgave 7 (figur 6) riktig. Dette tyder på at elevene har en forståelse for at en bokstav i samme oppgave står for samme tall, men ikke en forståelse for at bokstav er en variabel som står for et vilkårlig tall. Dette støttes av L. R. Booth (1983, s. 131), blant annet med intervju av eleven "Trevor", som sier «you put a different letter for every different value».

Gjennom et annet intervju knyttes misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi,* til *overgeneralisering* ved eleven "Mandy"; «I've always found they're different. I've never come across one where they're the same» (L. R. Booth, 1983, s. 133).

Oppgave 10, 15 og 18 er utviklet for å teste misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi.* Figur 7 viser oppgave 10, der elever som tenker at *ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi,* trolig vil vurdere at svaret til Jacob ikke er riktig.

Oppgave 10

Noen elever skal finne verdien til x for utsagnet x + y = 16.

Henrik skrev x = 6 og y = 10
Jacob skrev: x = 8 og y = 8
Fillip skrev x = 9 og y = 7

Vurder om svaret til hver enkelt elev er riktig eller feil.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 7: Oppgave 10, tester misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi*

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor, er denne misoppfatningen beskrevet av blant annet J. L. Booth et al. (2017), Stephens (2005) og (Küchemann, 1978).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal (7. trinn)

3.5.6 Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet

En misoppfatning som ikke er så mye beskrevet i eksisterende forskningslitteratur, er elever som overgeneraliserer bokstaver til å være en plassholder i posisjonssystemet. I algebra møter elevene en del andre konvensjoner enn i aritmetikken. I aritmetikken bygges tall opp ved å sette sammen siffer, og sifrenes plassering er avgjørende for verdien til tallet. Selv om også dette er konvensjoner som brukes for å beskrive tall i algebra, finnes det også andre konvensjoner som bryter med dette. For eksempel tilsvarer 24 to tiere og fire enere, for eksempel $20 + 4$, mens 2a betyr to multiplisert med variabelen a, altså $2 \cdot a$.

I L. R. Booth (1984, s. 31) kommer denne misoppfatningen fram i et intervju med "Wayne", der han skal forklare meningen til y i oppgaven *adder 3 til 5y*. "Wayne" identifiserer y som en variabel og bruker 4 som eksempel, og at med y lik 4 kan 5y enten være 54 (*tolker bokstaver som en plassolder i posisjonssystemet)* eller 5 multiplisert med 4.

Oppgave 2, 9 og 14 er utviklet for å teste misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet.* Figur 1, i kapittel 3.1 viser oppgave 2, mens figur 8 viser oppgave 14.

Oppgave 14

Regn ut verdien til uttrykket nedenfor, når x er 3 og y er 4:

3x + 2y =

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 8: Oppgave 14, tester misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*

Elever som *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet,* vil trolig tolke at x og y står på enerplassen, og at når de erstatter x med 3 og y med 4 vil de få uttrykket 33 + 24, og ikke 3 · 3 og 2 · 4.

Misoppfatningen er beskrevet av Brekke et al. (2000) og Grossman (1996).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal (7. trinn)

3.5.7 Verdien til bokstaven bestemmes ut fra plassering i alfabetet

I elevers forsøk på å skape mening med bruk av bokstaver i matematikk tolker noen elever *verdien til bokstaver ut fra plassering i alfabetet,* ved at bokstaven *a* har verdien 1, *b* har verdien 2 og så videre (Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007).

MacGregor og Stacey (1997) knytter misoppfatningen til hvordan bokstaver brukes i lærebøker til å nummerere oppgaver, som for eksempel oppgave *1a*, *1b* og *1c*. I læreverket Multi (Alseth, Nordberg & Rørsseland, 2014), benyttes denne nummereringa fra og med femte klasse, før elevene møter bokstaver som variabler.

L. R. Booth (1983) poengterer at slike svar kan komme av at elever forsøker å knytte mening til bokstavene, heller enn at de har er en sterk oppfatning av at det er slik. Siden min studie undersøker uttrykt grad av sikkerhet til eget svar, kan jeg undersøke påstanden til L. R. Booth ved å se om uttrykt grad av sikkerhet for svar som tyder på misoppfatning skiller seg vesentlig fra andre misoppfatninger.

I studien er det bare én oppgave som er spesifikt utviklet for å teste misoppfatningen *verdien til bokstaven bestemmes ut fra plassering i alfabetet*, oppgave 11. Misoppfatningen kan imidlertid komme til syne i andre oppgaver, men hovedfokus på misoppfatningen rettes gjennom oppgave 11 (figur 9). Det at det er bare én oppgave som er utviklet for å teste misoppfatningen gjør at jeg ikke kan snakke om noen utbredelse av denne misoppfatningen i analysekapitlet, men dette er mer beskrevet i metodekapitlet.


Oppgave 11

Hvis c + d = 7, hva er da c + d + e?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 9: Oppgave 11, tester misoppfatningen *verdien til bokstaven bestemmes ut fra plassering i alfabetet*

Elever som bruker bokstavens plassering i alfabetet til å avgjøre verdien til bokstavene, vil trolig tenke at c er tredje bokstav i alfabetet, d er fjerde bokstav og e er femte bokstav i alfabetet, og at dermed $c + d + e$ vil være lik 12. At $c + d = 7$, kan for disse elevene være en bekreftelse på at de har løst oppgaven riktig.

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor, er denne misoppfatningen beskrevet av blant annet J. L. Booth et al. (2017), Bush og Karp (2013) og Welder (2012).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal (7. trinn)

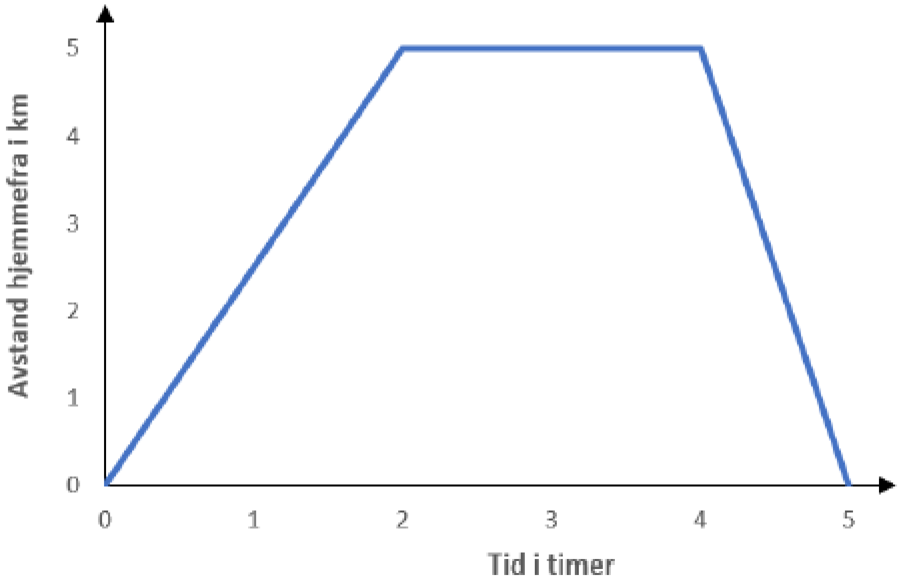
3.5.8 Tolker grafer som beskrivelse av et bilde og ikke en sammenheng

Grafer blir i ungdomsskolen gjerne beskrevet som en representasjon av et funksjonsuttrykk, som viser en sammenheng mellom en eller flere avhengige og uavhengige variable, eller et resultat av en måling (f. eks. Hjardar, 2014). Noen elever tolker imidlertid at grafer beskriver hvordan et objekt beveger seg langs en rute (Fujii, 2014). Dette kan for eksempel være at objektet går oppover, eller til venstre, når grafen stiger, og at objektet beveger seg rett fram når grafen har null stigning. Brekke (2002, s. 11) omtaler dette som «forestillingen om at en graf er et bilde av en situasjon».

I piloten til studien var det tre oppgaver som var utviklet for å teste om elevene *tolker grafer som beskrivelse av et bilde og ikke en sammenheng*. På bakgrunn av analysen av piloten, ble disse oppgavene tatt ut av hovedstudien (se kapittel 4.4.3). Figur 10 viser oppgave 3 fra piloten (vedlegg 3).

Oppgave 3

Grafen framstiller en fottur.



Beskriv med egne ord hva grafen forteller om turen:

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 10: Oppgave 3 fra piloten, tester misoppfatningen *tolker grafer som beskrivelse av et bilde og ikke en sammenheng*

Elever som er tror at *funksjoner beskriver bilder av situasjonen,* vil trolig tolke oppgaven i figur 10 som en beskrivelse av en fjelltur der personen går oppover, så flatt og til slutt nedover. I Brekke (2002, s. 12) avga 18 % av 192 elever på 8. trinn svar som tyder på en billedmessig tolkning.

I tillegg til litteraturen det er henvist til ovenfor, er denne misoppfatningen beskrevet av blant annet J. L. Booth et al. (2017), Russell et al. (2009) og Clement (1985).

Eksempel på kompetansemål i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) som elever i misoppfatningen, etter min vurdering, vil ha utfordringer med å nå:

- bruke forhold i praktiske samanhengar, rekne med fart og rekne om mellom valutaer (7. trinn)

3.6 Uttrykk sikkerhet til eget svar

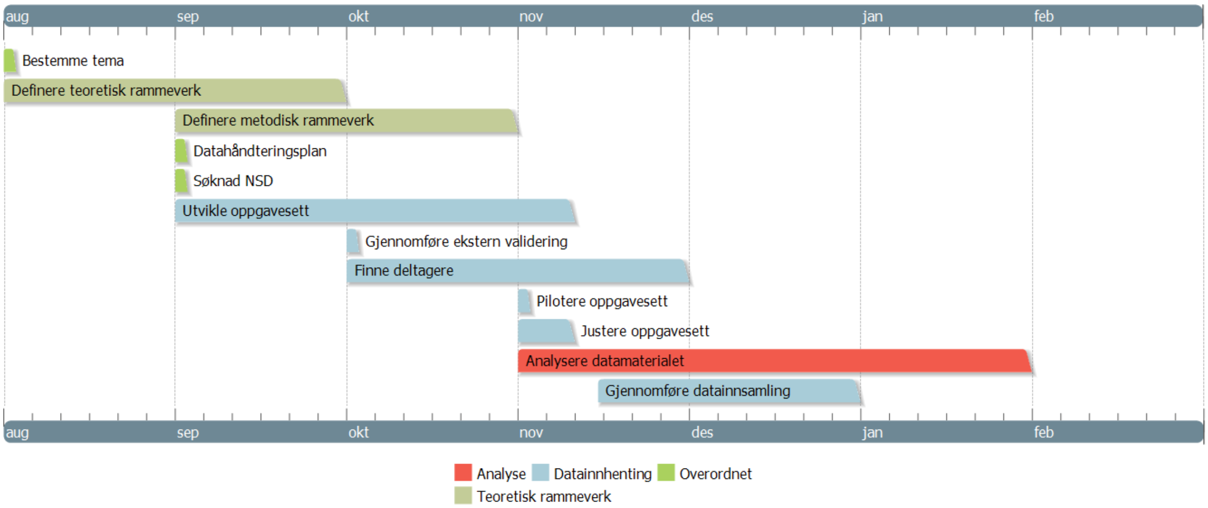
Gjennom dette kapitlet har vi sett på flere oppgaver som inngår i studien (figur 1 og figur 3–figur 10). Felles for oppgavene er at de samler informasjon om elevens tenkning i flere lag, ved en *flerlagstest,* der elevene i tillegg til å avgi et endelig svar skal vise hvordan de har tenkt for å komme fram til svaret. I tillegg skal elevene vurdere hvor sikre de er på at svaret er riktig på en femdelt skala fra *veldig usikker* til *veldig sikker*. Tester som består av mer enn to lag er betegnet som mer presise og bedre verktøy til å identifisere misoppfatninger (Ay, 2017).

Som nevnt i kapittel 2, retter Ay (2017) kritikk mot mye av forskningen som er gjort på misoppfatninger i matematikk de siste årene, ved at de benytter seg av en forskningsmetode som kun vurderer elevens tenkning ut fra endelige svar på oppgaven. Kritikken går på at det er vanskelig å skille misoppfatninger fra tilfeldige feil i slike tester, og at de dermed kan gi et feil bilde (Ay, 2017).

Mer om hvordan testen som ligger til grunn for denne studien er utviklet, og hvordan oppgavene er vurdert, er beskrevet i kapittel 4.2.1 og 4.3.2.

4 Metode

I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for forskningsdesignet til studien og metodiske og etiske valg og vurderinger som er gjort underveis i studien. Som vist i oppgaveeksemplene i kapittel 3.5, samler jeg inn informasjon gjennom flere spørsmål per oppgave (se kapittel 4.2.1). Spørsmålene *vis hvordan du tenker her,* blir betegnet som kvalitativ, og spørsmålene *i hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig,* blir betegnet som kvantitativ (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Den kvalitative delen av datamaterialet blir tolket og deretter kvantifisert. På bakgrunn av dette, samt at forskningsspørsmålene mine besvares med en kvantitativ tilnærming, karakteriser jeg også studien som kvantitativ. Figur 11 viser en grov skisse, utviklet i Timeline Maker (Progeny Software Inc., 2018), av studiens utvikling fra start til slutt.



Figur 11: Utviklingen av studien

4.1 Kvantitativ forskningsmetode

Som det ligger i navnet, bygger en kvantitativ forskningsmetode på at det er viktig for å besvare forskningsspørsmålet at det er en viss størrelse på datagrunnlaget. Aliaga og Gunderson (2002), referert i Apuke (2017, s. 41) definerer en kvantitativ forskningsmetode som «forklaringen på en utfordring eller et fenomen gjennom å samle numeriske data og analysere de ved hjelp av matematiske modeller, først og fremst statistisk modeller». Jeg velger å benytte definisjonen videre i studien.

Den første delen av definisjonen, *forklaringen på en utfordring eller et fenomen*, vil være felles for både kvantitativ og kvalitativ forskning (Apuke, 2017). Problemet eller fenomenet som danner grunnlag for min studie, er misoppfatninger knyttet til algebra. Den andre delen av definisjonen, *gjennom å samle numeriske data*, er spisset mot en kvantitativ forskningsmetode, ved at den påpeker at det er snakk om numeriske data eller data som kan kvantifiseres (Apuke, 2017). Som mine forskningsspørsmål viser, ønsker jeg å undersøke misoppfatninger knyttet til algebra gjennom to vinklinger. Den første undersøker uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatninger og den andre hvor utbredt misoppfatningene er. Å besvare forskningsspørsmålene med en kvantitativ forskningsmetode krever et numerisk datagrunnlag. Hvordan jeg har registrert elevenes svar er beskrevet i kapittel 4.6.

Siste del av definisjonen til Aliaga og Gunderson er at datamaterialet analyseres ved hjelp av statistiske modeller som kan bidra til å gi svar på forskningsspørsmålene. Mine to forskningsspørsmål krever forskjellige statistiske modeller for å besvare. Begrunnelse for valg av modeller er beskrevet i kapittel 4.6.

En fordel med å bruke en kvantitativ forskningsmetode er at den gir mulighet til å samle inn store mengder data over relativt kort tid, og dermed et datamateriale som representerer et vidt omfang av populasjonen, som igjen gir mulighet til å generalisere funnene (Cohen et al., 2018). Typisk for kvantitative studier er også at de prøver å bekrefte eller avkrefte en hypotese som danner grunnlaget for problemstillingen (Apuke, 2017; Cohen et al., 2018).

Kvantitative studier defineres ofte som enten deskriptive eller analytiske studier. Deskriptive studier prøver å beskrive variablene i datamaterialet uten å teste hypoteser eller beskrive årsak til eller sammenheng i funnene (Cohen et al., 2018), og gir svar på spørsmål som *hvem, hvor mange, hva, hvor mye* og *hvordan* (Apuke, 2017). Sentralt i en analytisk studie er at den prøver å finne årsakssammenhenger eller tester hypoteser (Cohen et al., 2018). I min studie vil noen av analysene være deskriptive, som for eksempel utbredelsen av de ulike misoppfatningene. De fleste analysene vil imidlertid være analytiske, der jeg undersøker sammenhenger mellom de ulike variablene i datamaterialet og tester hypoteser knyttet til disse. For eksempel vil mitt første forskningsspørsmål, *er elever, som er i misoppfatning, selv klar over at de er i en misoppfatning?*, kreve en analytisk tilnærming. På bakgrunn av det kategoriserer jeg studien som analytisk.

Det finnes mange forskjellige instrument for å foreta en kvantitativ forskningsstudie, der tester er en av de (Apuke, 2017). Vi skal nå se nærmere på diagnostiske tester.

4.2 Diagnostisk test som forskningsmetode

Diagnostiske instrument er designet for å kunne identifisere elevens eller grupper av elevers behov, styrker, vansker, svakheter og problemer og hvor disse oppstår (Cohen et al., 2018). Misoppfatninger i matematikk er eksempler på en vanske eller synliggjøring av hvor problemer oppstår. Cohen et al. (2018, s. 565) trekker paralleller mellom diagnostiske tester og en lege som diagnostiserer en sykdom, men trekker fram en vesentlig forskjell; diagnostiske tester skriver ikke ut noen resept som behandler vansken, det er læreren som må vurdere hvilken "behandling" som skal iverksettes.

Brekke (2002) poengterer at diagnostiske tester har som formål å identifisere og løfte fram misoppfatninger elevene er i og gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene har brukt, slik at læreren kan legge opp til en undervisning som utfordrer elevenes delvis utviklede begreper og løsningsstrategier. Diagnostiske oppgaver er dermed mer rettet mot å kartlegge begrepsforståelse enn å måle elevenes ferdigheter til å utføre beregninger (Utdanningsdirektoratet, 2015). Dette gjør at vi må analysere diagnostiske tester på andre måter, og med andre verktøy, enn det vi gjør med summative tester (Brekke, 2002). En elevs poengsum på en diagnostisk test, for eksempel 15 av totalt 19 oppgaver løst riktig, kan skjule mye informasjon som er viktig for læreren for å kunne utfordre og hjelpe eleven videre i opplæringen. Det kan for eksempel være at alle de fire oppgavene eleven ikke har løst riktig er knyttet til samme misoppfatning, og at denne kan være til hinder for videre læring.

Gurel, Eryilmaz og McDermott (2015) trekker fram ulike typer diagnostiske instrument som er brukt til å identifisere elevenes misoppfatninger. Selv om studien undersøker diagnostiske instrumenter innen naturfag (engelsk: science) vurderer jeg den som relevant, fordi metodene som er beskrevet i studien også er brukt av Ay (2017) som ser på studier knyttet til misoppfatninger i matematikk. Av 273 ulike studier fra 1980 til 2014 (Gurel et al., 2015, s. 992), er intervju (53 %) den mest brukte forskningsmetoden, mens av de kvantitative forskningsmetodene er tre kategorier tester høyfrekvente; tester med *åpne spørsmål* (34 %), *tester med flervalgspørsmål* (32 %) og *tester som består av flere lag* (9 %). Studien til Ay (2017) viser også at andelen av tester som består av flere lag er lav (3 av 21).

Med *åpne spørsmål* menes oppgaver der elevene står fritt til å formulere sine svar, og dermed vise sine løsningsstrategier. Gurel et al. (2015) påpeker at åpne spørsmålsformuleringer gir eleven mer tid til å tenke fritt og skrive sine egne tanker, men at en utfordring med denne oppgavetypen er at svarene er vanskelig å vurdere. Siden hvert enkelt svar må tolkes, kan det medføre at reliabiliteten (kapittel 4.4.2), blir svekket (Cohen et al., 2018). Faktorer som inkonsekvens hos den som tolker svarene, dens relasjon til testtakeren, eller at den som tolker svarene legger til egne tolkninger, er eksempler på faktorer som kan redusere reliabiliteten til testen (Cohen et al., 2018).

Bruk av *flervalgsoppgaver* blir ofte sett på som løsningen for å øke utfordringene som er pekt på ved bruk av åpne spørsmål. Gurel et al. (2015, s. 993) trekker fram en rekke fordeler med bruk av flervalgsoppgaver i diagnostiske tester, der at de er tidseffektive, lettere å vurdere objektivt og bra for elever som har god forståelse, men utfordringer med å skrive eller ordlegge seg, er noen av fordelene. Samtidig løfter også Gurel et al. (2015) fram utfordringer med bruk av flervalgsoppgaver, ved at de øker utbredelsen for gjetting og låser elevenes tankegang til de alternativene som er gitt i oppgavene, og at flervalgsoppgaver dermed ikke avdekker elevenes egne tanker. At elevene ikke får vist fram sine egne idéer og løsningsstrategier, men velger blant fastsatte alternativer (Rollnick & Mahooana, 1999), er noe som kan føre til at elevenes resultater i flervalgsoppgaver gir et mer positivt bilde av elevenes ferdigheter enn hva som faktisk er tilfelle (Peşman & Eryılmaz, 2010).

Vi skal nå se på *flerlagstester* som samler informasjon om elevens tenkning i flere lag, for å svare på kritikken mot bruk av flervalgsoppgaver i diagnostiske tester (Gurel et al., 2015).

4.2.1 Flerlagstester

I en *tolags flervalgtest* inneholder det første laget et ordinært flervalgspørsmål, mens det andre laget består av et nytt flervalgspørsmål som spør etter begrunnelsen for valget eleven gjorde i det første laget (Gurel et al., 2015). Med denne måten å utvikle flervalgspørsmål på, må elevene vise sin begrunnelse eller tenkning som ligger bak svaret de har valgt, noe som gjør det lettere å identifisere gjetting (Gurel et al., 2015).

Kritikken mot bruk av *tolags flervalgsoppgaver* går blant annet ut på at det andre laget vil gi eleven hint om hva som er riktig svar i det første laget, som kan føre til at elever får enten for høy andel riktige svar eller svar som tyder på misoppfatninger, og at ikke alle elever vil kjenne seg igjen i argumentasjonen som er brukt i lag to (Gurel et al., 2015). Jeg har betenkeligheter med å bruke *tolags flervalgsoppgaver* i diagnostiske studier, siden jeg tenker det vil være vanskelig å skille elever som gjør feil som skyldes manglende kunnskap eller tilfeldige feil, og feil som skyldes misoppfatninger. En relativt ny forskningsmetode som tar høyde for dette er *trelags flervalgsoppgaver* (Gurel et al., 2015), der de to første lagene er utviklet på samme måte som i en *tolags flervalgsoppgave,* og at det siste laget er et flervalgspørsmål som undersøker hvor sikre elevene er på at svaret de har valgt er riktig eller ikke. En skala for å uttrykke grad av sikkerhet blir ofte betegnet som en «certainty of response index» (Hasan, Bagayoko & Kelley, 1999, s. 294). Med utgangspunkt i forskningsspørsmålet *er elever, som viser tegn på misoppfatninger, selv klar over at de er i en misoppfatning?,* er dette en interessant vinkling for min studie.

På bakgrunn av dette har jeg valgt å bruke *flerlagstest* som diagnostisk verktøy. Oppgavene i oppgavesettet (vedlegg 3) består stort sett av *åpne spørsmål* i tillegg til noen *flervalgsoppgaver*, der de to første lagene spør etter elevens matematiske svar og hvordan eleven har tenkt. Det siste laget spør etter uttrykt grad av sikkerhet til eget svar med skalaen *veldig sikker*, *sikker*, *hverken sikker eller usikker*, *usikker* og *veldig usikker*. En slik skala blir regnet som standardformen av en femdelt Likert-skala (Albaum, 1997). Figur 12 viser eksempel på en *trelagsoppgave* med bruk av *åpent spørsmål*.

Oppgave 12

Appelsiner koster a kr per stykk og bananer koster b kr per stykk.

Hvis jeg kjøper 4 appelsiner og 3 bananer, hva betyr da uttrykket 4a + 3b?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Figur 12: Oppgave 12, eksempel på *trelagsoppgave* med åpent spørsmål

De aller fleste oppgavene i min studie består av tre lag. Det er én oppgave, oppgave 8 (vedlegg 4), som består av to lag, og to oppgaver med to delspørsmål, som består av tre lag hver. Vi skal nå se nærmere på hvordan datamaterialet er bearbeidet og analysert.

4.3 Bearbeiding og analyse av diagnostiske tester

Ketterlin-Geller og Yovanoff (2009) presenterer tre forskjellige tilnærminger i diagnostiske studier; *ferdighetsanalyse*, *feilanalyse* og *kognitiv diagnostisk vurdering*. Felles for alle tre er at de behandler elevenes svar på en annen måte enn som riktig eller feil (Ketterlin-Geller & Yovanoff, 2009). Jeg har benyttet metoden *feilanalyse* i studien, og vil gjøre rede for den her.

Feilanalyse har en del til felles med en ferdighetsanalyse, ved at begge undersøker elevens svarmønster i en delkategori av det prøven har som hensikt å måle. I en *feilanalyse* vil fokuset være å belyse mønster av feil eleven gjør på oppgaver som måler en delkategori (Ketterlin-Geller & Yovanoff, 2009). I min studie vil hver enkelt misoppfatning være en delkategori. Ved å benytte *feilanalyse,* undersøker jeg svarmønster til elevene innen oppgaver som måler samme misoppfatning, for å skille elever som gjør tilfeldige feil fra de som er i misoppfatning.

Jeg vil straks gjøre rede for mer konkret hvordan datamaterialet i studien vil bli behandlet, men vil først se litt nærmere på hvilke typer numeriske data som finnes, og hvilke analysemetoder som kan benyttes for de ulike typene data, siden det er avgjørende for hvordan jeg kan analysere mitt datamateriale.

4.3.1 Ulike typer numeriske data

Uavhengig av tilnærming til diagnostiske studier, finnes det felles retningslinjer for hvordan dataene vi samler inn kan behandles. I min studie samler jeg inn uidentifiserbar data om eleven som klassetrinn, kjønn og navn på skole. I tillegg samler jeg inn elevens matematiske svar og uttrykte grad av sikkerhet til eget svar per oppgave. Denne dataen som blir registrert om hver enkelt elev er variabler, som varierer fra elev til elev og ut fra hvordan hver enkelt elev har besvart de ulike oppgavene.

Stevens (1946) klassifiserer fire målenivåer for variabler: *nominal*, *ordinal*, *intervall* og *forholdstall*. *Nominal* blir betegnet som det laveste nivået, og kan ofte ses på som en kategorisering. Felles for nominale variabler er at de utelukker hverandre, og at du ikke kan angi samme variabel til forskjellige kategorier, eller forskjellige variabler til samme kategori (Stevens, 1946). Nominale variabler i min studie er klassetrinn, kjønn og skole, samt elevens matematiske svar per oppgave. For klassetrinn er kategoriene 8., 9. og 10. trinn, og elevens matematematiske svar er kategorisert som riktig, tyder på misoppfatning, eller som andre feilsvar (se nærmere beskrivelse i kapittel 4.3.2). Variablene skole og kjønn er ikke benyttet i analysene og blir ikke nærmere beskrevet.

I tillegg til de nominale variablene har jeg samlet inn uttrykt grad av sikkerhet til eget svar. Som vist i figur 13 uttrykker elevene sikkerhet til eget svar ved hjelp av en Likert-skala (Cohen et al., 2018).

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

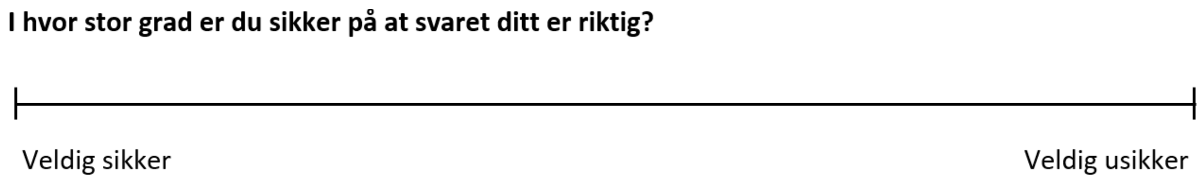
□ Veldig sikker   □ Ganske sikker   □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker   □ Ganske usikker   □ Veldig usikker

Figur 13: Uttrykt grad av sikkerhet

Om måten jeg har samlet inn data om uttrykt grad av sikkerhet defineres som *ordinal* eller *intervall* er viktig, siden de to målenivåene tillater ulike statistiske analysemetoder (Stevens, 1946). Ordinale variabler kan rangeres, men Stevens (1946) problematiserer å bruke vanlige statistiske metoder som gjennomsnitt og standardavvik på ordinale variabler, siden disse metodene antyder en kunnskap om noe mer enn den relative rangorden av data. For å kunne bruke slike statistiske metoder må avstanden mellom de ulike stegene i variabelen, eller skalaen, være like store (Befring, 2007). For *intervall*, er nettopp dette kravet om lik avstand mellom stegene i skalaen oppfylt (Stevens, 1946).

For å besvare forskningsspørsmålet om *elever, i misoppfatning, selv er klar over at de er i en misoppfatning*, vil det være avgjørende at jeg kan gjøre statistiske beregninger, som å beregne gjennomsnitt for å se hvordan elever i misoppfatning uttrykker grad av sikkerhet til eget svar. I tillegg vil det være interessant å sammenligne gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til elever i misoppfatning med andre grupperinger i datamaterialet, og om eventuelle forskjeller er statistisk signifikante eller ikke. For at jeg skal kunne gjøre dette må jeg behandle skalaen for uttrykt grad av sikkerhet som en intervallskala (Cohen et al., 2018).

Lik avstand mellom stegene i Likert-skalaen er anbefalt uavhengig av analysemetode (Cohen et al., 2018), noe jeg har vært bevisst når det gjelder valg av alternativ. En måte å sikre lik avstand mellom stegene kunne vært å presentere spørsmålet på en trinnløs skala som vist i figur 14.



Figur 14: Alternativ skala for uttrykt grad av sikkerhet

Champagne (2014), referert i Cohen et al. (2018) fraråder bruk av en slik skala siden ulike personer vil tolke den forskjellig, og anbefaler sterkt at hvert steg i skalaen er beskrevet. Problemet med å tolke skalaen, både for elevene og jeg som skal registrere elevenes svar, har gjort at jeg har valgt skalaen med alternativ (figur 13). Jeg mener selv at avstanden mellom stegene er lik, og Norman (2010, s. 629) sier «det finnes ingen uavhengig observasjon som kan bekrefte eller avkrefte» om det er tilfelle eller ikke.

Likert selv utviklet skalaen med hensikt at den kunne betraktes som en intervallskala, men den betraktes i dag som ordinalskala (Albaum, 1997). Det er imidlertid presentert flere studier som kritiserer Stevens for hans rigide framstilling. En av disse er Velleman og Wilkinson (1993), som også viser til tidligere kritikk mot Stevens, med at målenivået til variablene setter begrensninger for mulighetene for ulike analysemetoder. Det mest sentrale motargumentet i Velleman og Wilkinson (1993) mot Stevens sin inndeling er, etter min mening, at begrensningene for analysemetoder presenteres uavhengig av hvilket forskningsspørsmål datamaterialet er ment å svare på.

En annen kritisk røst mot inndelingen til Stevens (1946) er Norman (2010), som kritiserer anmeldere av forskningslitteratur for å ta beslutninger basert på inndelingen til Stevens på feil grunnlag. Interessant for min studie er at Norman (2010) kritiserer påstanden om at det ikke er mulig å utføre parametriske statistiske analyser knyttet til en Likert-skala. En parametrisk analyse prøver å si noe om visse parametere i en populasjon, ut fra på antagelser om andre parametere (Cohen et al., 2018). Å undersøke om det er statistisk signifikante forskjeller mellom uttrykt grad av sikkerhet til eget svar for elever som svarer riktig, sammenlignet med elever som avgir svar som tyder på misoppfatning, er et eksempel på en slik parametrisk analyse. Norman (2010) utførte selv et forsøk, basert på en Likert-skala, som viste at det er mulig å utføre parametriske analyser basert på ordinale data.

Både Velleman og Wilkinson (1993) og Norman (2010) åpner opp for å gjøre andre typer analyser enn det som Stevens (1946) fastsatte. Også Cohen et al. (2018) diskuterer dette og poengterer viktigheten av å begrunne hvorfor man behandler dataene som man gjør, men at målenivået til variablene setter premissene for hvilke statistiske analyser som kan utføres på ulike typer data. De skriver også at man ikke bør utføre signifikantstester (se kapittel 4.6.2) på ordinal data (Cohen et al., 2018, s. 726).

Forskerne er uenige i hvordan data fra en Likert-skala kan analyseres. Både Norman (2010) og Velleman og Wilkinson (1993) poengterer at hvilket spørsmål dataene er ment å gi svar på, er viktig for hvilken analysemetode som er hensiktsmessig å bruke. For å kunne besvare forskningsspørsmålet om *elever, i misoppfatning, selv er klar over at de er i en misoppfatning*, er jeg avhengig av å kunne utføre statistiske beregninger utover det Stevens (1946) tillater for ordinale verdier.

Andre studier som har brukt flerlagstester, har brukt Likert-skalaen til å skille misoppfatninger fra andre feil, ved å se på misoppfatninger som feil svar med høy grad av sikkerhet, og andre feilsvar som feil svar med lav grad av uttrykt av sikkerhet (Cheung & Yang, 2018; Djam'an & Arsyad, 2019; Hasan et al., 1999; Irwansyah, Sukarmin & Harjana, 2018). Til dette formålet blir dataene behandlet som ordinale, og de er derfor ikke interessante for valg av analysemetode i min studie.

Avslutningsvis i dette delkapitlet vil jeg henvise til Stevens (1946, s. 679), som omtaler bruk av parametriske analyser på ordinale variabler med «at selv om det for denne "ulovlige" statistikken kan det påberopes en slags pragmatisk sanksjon: I mange tilfeller fører det til fruktbare resultater». På bakgrunn av dette, og at forskningsspørsmålet som dataene er ment å gi svar på, velger jeg å utføre parametriske analyser som signifikantstester (se kapittel 4.6.2) i min studie. Dette er også er drøftet og støttet av Knut Ole Lysø, førsteamanuensis ved NTNU.

4.3.2 Kodebok for registrering av elevbesvarelser

Siden studien har et sammensatt datamateriale med både elevers matematiske svar og uttrykte grad av sikkerhet, er det viktig med gode rutiner for å registrere datamaterialet. Jeg utviklet derfor et kodesystem som kategoriserer elevenes svar per oppgave, der det matematiske svaret blir kategorisert ut fra om svaret er riktig, tyder på misoppfatning, eller andre typer feilsvar. Elevens matematiske svar i denne sammenhengen er en helhetlig vurdering av de to lagene som måler elevens svar på det matematiske spørsmålet, altså for eksempel både tallet eleven svarer og elevens forklaring. I tillegg registrerer jeg uttrykt grad av sikkerhet til eget svar per oppgave.

Tabell 3 viser generelle koder som er brukt i registrering av elevenes matematiske svar og tabell 4 viser hvordan elevenes uttrykt grad av sikkerhet blir registrert per oppgave. En detaljert oversikt over hvordan kodene er brukt i hver enkelt oppgave, er vist i vedlegg 7.

Kode	Forklaring
1	Riktig svar
2	Svar som tyder på misoppfatningen oppgaven er ment å avdekke
3–4	Eventuelt svar som tyder på andre misoppfatninger enn det oppgaven er ment å avdekke
5	Andre typer feilsvar
9	Ubesvart

Tabell 3: Koder for registrering av elevenes matematiske svar

Kode	Forklaring
1	Veldig usikker
2	Usikker
3	Hverken sikker eller usikker
4	Sikker
5	Veldig sikker
9	Enten at eleven ikke har besvart spørsmålet, eller at det matematiske svaret er ubesvart

Tabell 4: Koder for registrering av elevenes uttrykt grad av sikkerhet over eget svar

Et utsnitt av hvordan dataene er registrert er vist i kapittel 4.6. Vi skal nå se nærmere på hvordan elever i misoppfatninger er definert i denne studien.

4.3.3 Å *vise tegn på* eller *være i* misoppfanting

Begge forskningsspørsmålene i studien forutsetter at elever i misoppfatning er tydelig definert. Brekke (2002, s. 10) omtaler at bak misoppfatninger ligger en bestemt tenkning elevene bruker «nokså konsekvent». Tolkningen av nokså konsekvent vil ha stor betydning for resultatet til studien. Brekke selv går ikke i dybden på dette, og KIM-materialet presenterer utbredelse bare knyttet til enkeltoppgaver, eller i noen tilfeller to oppgaver (Brekke et al., 2000).

Utbredelse utover enkeltoppgaver er en av elementene jeg undersøkte i gjennomgangen av eksisterende forskningslitteratur (vedlegg 1). Det er imidlertid bare to av studiene som jeg har gjennomgått som presenterer resultater utover enkeltoppgaver, Russell et al. (2009) og Lucariello et al. (2014). Begge presenterer resultater som sier noe om andelen elever i misoppfatning, der Russell et al. (2009) betegner elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i 35 % av tilfellene som å være i misoppfatning, mens i Lucariello et al. (2014, s. 37) blir elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i mer enn en tredel av oppgavene kategorisert som «misconceivers». For å forstå denne kategoriseringen trenger vi å vite mer om de diagnostiske instrumentene som er brukt i studiene.

Begge studiene bruker en feilanalyse som studerer elevsvar som tyder på misoppfatning. I Russell et al. (2009) er det brukt en diagnostisk test bestående av 34 flervalgsoppgaver som tester misoppfatninger knyttet til variabler, likhetstegn og grafer, der hver misoppfatning blir testet med 10–12 oppgaver. Elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i mer enn 35 % av oppgavene som testet samme misoppfatning ble flagget til læreren (Russell et al., 2009). I praksis betyr dette at elever som avga svar som tyder på misoppfatninger i 4 av 10 eller 5 av 12 oppgaver ble kategorisert til å være i misoppfatning. Jeg vil påpeke at misoppfatninger knyttet til variabler er et relativt vidt felt, der misoppfatningene *tolker bokstaver som forkortelser for objekt*, *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*, *ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi*, *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet* og *verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet* i min studie alle omhandler misoppfatninger knyttet til variabler.

Lucariello et al. (2014) bruker i sin studie en test som består av ni oppgaver som også studerer misoppfatninger knyttet til variabler, fordelt på tre misoppfatninger; *tolker bokstaver som forkortelser for objekt* og *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*, som inngår i min studie, og *overser bokstaven*. Det var tre oppgaver per misoppfatning, men andelen «misconceivers» er basert på resultatet av hele prøven, der elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning i tre av ni oppgaver er «misconceivers». Det kan bety elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning i én oppgave per misoppfatning. Ut fra min vurdering er det ikke «nokså konsekvent» og ikke tråd med min definisjon på misoppfatninger.

Jeg har ikke klart å finne noen god definisjon for hva det vil si å være i en misoppfatning, og velger derfor å definere dette selv for denne studien. Som pekt på i kapittel 3.5.1–3.5.8 består min studie av tre til fire oppgaver som tester samme misoppfatning i seks av sju misoppfatninger. For disse har jeg definert følgende begrep med tilhørende grenser for hvordan jeg vurderer utbredelse:

- *Elever i misoppfatninger*: elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning i alle oppgavene som tester samme misoppfatning
- *Elever som viser tegn på misoppfatning:* elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning i over halvparten av oppgavene som tester samme misoppfatning

Det er verdt å presisere at svar som tyder på misoppfatning gjelder kun det eller de svarene som kan knyttes til misoppfatningen oppgavene er ment å måle, og dermed ikke det samme som elever som har løst oppgaven feil.

For misoppfatningen *verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet,* er det bare én oppgave som tester misoppfatningen. Jeg vil derfor ikke referere til noen utbredelse når det kommer til denne misoppfatningen.

4.4 Sammensetning av oppgavesett

Etter å ha definert forskningsspørsmål (kapittel 1.2) for studien, det teoretiske rammeverket for hva algebra (kapittel 3.2.1), algebra i norsk grunnskole (kapittel 3.2.2) og misoppfatninger er (kapittel 3.4), samt hvilke misoppfatninger som er knyttet til algebra (3.5) og metoder jeg ønsker å bruke for besvare mine forskningsspørsmål (kapittel 4.1 og 4.2), satte jeg sammen et oppgavesett bestående av 25 diagnostiske oppgaver (vedlegg 1).

Oppgavene som inngår i studien er stort sett basert på oppgaver fra andre forskningsstudier. Noen av oppgavene er hentet eller oversatt fra andre studier og bearbeidet til en flerlagsoppgave, mens andre er inspirert fra andre studier. Studien inneholder også noen egenproduserte oppgaver. Vedlegg 5 viser hvilke studier de ulike oppgavene er hentet fra.

Jeg vil i dette delkapitlet gjør rede for to sentrale begreper i en kvantitativ analyse, validitet og reliabilitet, før jeg beskriver piloteringen av studien.

4.4.1 Oppgavesettets validitet

Validitet i kvantitative studier er et mål på om studien måler det den utgir seg for å gjøre (Heale & Twycross, 2015). For at min studie om elevenes misoppfatninger knyttet til algebra skal være valid, må oppgavesettet som danner grunnlag for datamaterialet være godt egnet for å identifisere elevenes misoppfatninger knyttet til algebra. For eksempel vil studien min ikke være valid hvis oppgavene tester elevenes misoppfatninger i andre områder av matematikkfaget, leseforståelse og/eller utholdenhet.

Det fins ulike definisjoner av validitet Cohen et al. (2018). Shadish, Cook og Campbell (2002) definerer validitet som hvor gyldige slutninger som blir tatt er, og presenterer fire hovedtyper for validitet (Shadish et al., 2002, s. 37–38):

1. Konstruktvaliditet
2. Statistisk validitet

3. Intern validitet
4. Ekstern validitet

De fire hovedtypene for validitet gjelder forskning generelt og kan deles inn i flere underkategorier avhengig av forskningsdesign. Cohen et al. (2018) trekker fram *konstruktvaliditet* og *innholdsvaliditet* som viktige for tester. Disse to typene validitet, og hvilke grep jeg har gjort for å sikre validitet i min studie, er belyst nedenfor.

Konstruktvaliditet er i hvor stor grad testen måler det den utgir seg for å måle (Cohen et al., 2018). Ifølge Cohen et al. (2018) er dette en av de vanskeligste formene for validitet å innfri, blant annet fordi det ofte hersker tvil om hva konstruktet en test måler er for noe. For min studie, der konstruktet er misoppfatninger knyttet til algebra, er det en forutsetning for høy konstruktvaliditet at algebra, misoppfatninger og misoppfatninger knyttet til algebra, er definert på en troverdig måte. *Konstruktvaliditet* innebærer også at oppgaver som er ment å teste samme delferdigheten eller kompetansen faktisk gjør det (Cohen et al., 2018). For min studie betyr det at oppgavene faktisk tester de misoppfatningene de er utviklet til å teste.

For å sikre god *konstruktvaliditet* har jeg gjort flere grep. Det første er å sikre at studien bygger på et solid teoretisk rammeverk. Som figur 11 viser, ble det teoretiske rammeverket utviklet tidlig i prosessen, slik at jeg hadde klare tanker om hva jeg skulle måle og hvordan jeg skulle måle dette før jeg begynte å samle data. Teoretisk rammeverk og oppgavesett ble også vurdert sammen med veileder før datainnsamlingen. Et annet grep, er at jeg gjennomførte en ekstern validering av oppgavesettet med to personer i forkant av datainnsamlingen. Personene har lang fartstid med prøveutvikling i Norge, og én av personene har selv skrevet en masteroppgave om misoppfatninger i matematikk. I den eksterne valideringen gjorde jeg kort rede for misoppfatningene studien fokuserer på, før deltagerne hver for seg vurderte hvilken eller hvilke misoppfatninger oppgavene kan knyttes til. Utover det ble det ikke gitt noen føringer til deltagerne. Den ene av de to deltagerne identifiserte de samme misoppfatningene som meg i alle 25 oppgavene, mens den andre identifiserte de samme misoppfatningene som meg i 21 av oppgavene. Jeg vurderer dette til å være en god overenstemmelse. Skjemaene de to deltagerne brukte, finner du i vedlegg 6. I forkant av analysene er det foretatt en bekreftende faktoranalyse (se kapittel 4.6.1), som undersøker om oppgavene tester de misoppfatningene de er utviklet for. I tillegg er mange av oppgavene i studien hentet fra eller inspirert av tilsvarende studier som bidrar til høy *konstruktvaliditet.*

Innholdsvaliditet handler om hvorvidt testen dekker konstruktet den er ment å dekke med en tilstrekkelig bredde og dybde på en rettferdig måte (Cohen et al., 2018). En test vil i de fleste tilfeller ikke kunne måle alle aspekter av konstruktet av den enkle grunn av at en slik test vil bli for omfattende. Det må derfor tas en del valg og avveininger av hva som ligger i hva som er tilstrekkelig. Denne delen av innholdsvaliditeten blir delvis ivaretatt gjennom ekstern valideringen og faktoranalyse som undersøker om flere oppgaver tester samme misoppfatning. I tillegg omhandler *innholdsvaliditet* at testen er relevant for de elevene som skal ta testen, eller at elevene har tilstrekkelig kompetanse i det som testen måler (Cohen et al., 2018). I det teoretiske rammeverket er hver enkelt oppgave validert ut fra kompetansemål i LK06, som viser at elevene, ifølge læreplanen, skal ha erfaring med det oppgavene tester fra tidligere trinn i utdanningen.

Andre typer validitet for tester Cohen et al. (2018, s. 572–573) presenterer som jeg kort vil nevne er «face validity» og «concurrent validity». *Face validity* vil si at en test skal utgi seg for å måle det den gjør (Cohen et al., 2018). Av etiske vurderinger valgte jeg ikke å presentere studien for elevene at jeg undersøker om elever i misoppfatninger tror de har riktig svar. For elevene ble den presentert som en undersøkelse om hvordan elever tenker i algebraoppgaver, og hvor sikre de er på at svaret er riktig. *Concurrent validity*, at testens resultat samsvarer med tilsvarende tester (Cohen et al., 2018), vil bli kommentert for enkeltoppgaver som er hentet fra andre studier i analysekapitlet, selv om det å sammenligne resultater fra andre lignende studier ikke vil være et stort fokus i studien.

4.4.2 Oppgavesettets reliabilitet

Reliabilitet er grad av sikkerhet som kan knyttes til et resultatet av en studie (Cohen et al., 2018). For mange kvantitative studier dreier det seg om at testresultat er pålitelige, konsistente og reproduserbare, eller om resultatene er troverdige (Cohen et al., 2018).

Shadish et al. (2002, s. 67) presenterer tre former for reliabilitet i kvantitative studier:

1. Relabilitet som intern konsistens
2. Relabilitet som stabilitet
3. Relabilitet som likeverdighet

Reliabilitet som intern konsistens måler om alle oppgavene i en test måler samme konstrukt (Heale & Twycross, 2015). For å forklare intern konsistens, kan vi tenke oss en prøve som skal gis til en gruppe elever, bare at prøven er delt inn i to deler, der begge delene er identiske når det gjelder innhold og vanskegrad, og at hver halvdel er vurdert separat (Cohen et al., 2018). Høy intern konsistens vil da bety at resultatet på de to delene korrelerer høyt for samme elev.

Den mest brukte måten å beregne *reliabilitet som intern konsistens* er Cronbach alpha (Heale & Twycross, 2015), der korrelasjonen beregnes ved et gjennomsnitt av alle tenkelige måter å dele en test inn i to halvdeler på (Cohen et al., 2018). I analyseprogrammet SPSS (IBM Corporation, 2017) beregnes Cronbach alpha (α) med følgende formel, der N er antall oppgaver i testen, $\bar{c}$ er den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom oppgavene og $\bar{v}$ er gjennomsnittlig varians.

$$\alpha = \frac{N\bar{c}}{\bar{v} + (N-1)\bar{c}}$$

Formel 1: Formel for Cronbach alpha i SPSS

Resultatet av formel 1, vil gi en reliabilitetskoeffisient mellom 0 og 1, der en koeffisient over 0,7 blir betegnet som akseptabel (Heale & Twycross, 2015) og en koeffisient over 0,8 blir høy (Cohen et al., 2018). Cronbach alpha for studien er beregnet i kapittel 5.1.1.

Siden *reliabilitet som intern konsistens* måler hvor stort samsvar det er mellom det enkeltoppgavene måler sammenlignet med testen som helhet, er også intern konsistens et tegn på prøvens dimensjonalitet (Utdanningsdirektoratet, 2017). Når det er snakk om testen som helhet, er det i denne sammenhengen snakk om totalskår. For min studie kan totalskår være antall riktige oppgaver, eller antall oppgaver eleven har avgitt et svar som tyder på en misoppfatning. I et tenkt tilfelle kan det være at noen misoppfatninger blir mer høyfrekvente utover i ungdomsskolen. Hvis vi tar utgangspunkt at eldre elever løser flere oppgaver riktig enn yngre elever totalt sett, vil oppgavene i den misoppfatningen som blir mer frekvent utover ungdomsskolen bidra til negativ indre konsistens. Dersom dette tenkte tilfellet stemmer, kan det tyde på at prøven er flerdimensjonal (Cohen et al., 2018). Prøvens dimensjonalitet kan sjekkes ved hjelp av en faktoranalyse (Cohen et al., 2018), se kapittel 4.6.1 og kapittel 5.1.2.

Relabilitet som stabilitet innebærer i hvor stor grad et måleinstrumentet vil gi samme resultat dersom det vil bli brukt flere ganger (Cohen et al., 2018). I testsammenheng vil dette bety at en test vil gi samme resultat dersom elevene tar testen flere ganger. På grunn av naturlige begrensninger i en masterstudie, og at hovedfokuset for studien ikke er å utvikle et testverktøy, vil dette ikke bli videre behandlet i denne oppgaven.

Reliabilitet som likeverdighet innebærer at en test vil måle det samme, selv om testen har ulik form eller er foretatt av en annen person (Cohen et al., 2018). I testens form legger jeg alt fra at den benytter ulike metoder for datainnsamling, til for eksempel fargevalg og skrifttype. Med samme argument som for reliabilitet som stabilitet, vil dette ikke bli fulgt opp videre i denne studien. For å sikre så lik gjennomføring som mulig i de ulike klassene som deltok i studien, utarbeidet jeg en introduksjon som ble brukt i alle klasser datamaterialet er blitt samlet inn. På denne måten sikret jeg at alle elever fikk samme informasjon. Et annet grep som ble gjort for å sikre lik gjennomføring, er at jeg selv var til stede når dataene ble samlet inn, og sikret dermed at hjelp og støtte ble så likt som mulig fra klasse til klasse. Som tabell 7 i kapittel 4.5.1 viser, var det én klasse jeg ikke selv var til stede i under datainnsamlingen. Læreren i denne klassen ble imidlertid godt instruert på forhånd, for å sikre at gjennomføringen i denne klassen ble så lik som mulig som i de andre klassene.

Et annet grep for å sikre *reliabilitet som likeverdighet,* var å utvikle en kodebok for hvordan oppgavene skal vurderes som er beskrevet i kapittel 4.3.2. På grunn av at studien stort sett inneholder oppgaver med bruk av åpne spørsmål er det viktig å ha slike rammer på plass, siden ulik tolkning av den typen spørsmål ble pekt på som en utfordring i kapittel 4.2. Kodeboken ble utviklet ved at jeg først registrerte koder for forventa elevsvar, men utviklet seg som et dynamisk dokument etter hvert som dataregistreringen startet. Dette gjorde at kodeboken ble endret for noen oppgaver underveis i registreringen, og at jeg derfor måtte starte registreringen forfra igjen for disse oppgavene. I tillegg ble enkelte besvarelser som jeg vurderte til å være vanskelig å registrere ut fra kodeboken, diskutert med en uavhengig person.

Reliabilitet som likeverdighet kan, i motsetning til *reliabilitet som indre konsistens*, ikke kvantifiseres, men ut fra min egen vurdering har jeg gjort fornuftige grep ut fra de rammene som er tilgjengelige i studien, for å sikre at den er høy.

Shadish et al. (2002) oppsummerer likheten og forskjellen på validitet og reliabilitet med en vekkeklokke som ringer kl. 07.00 hver morgen, selv om den er stilt inn til å ringe kl. 06.30. Den er veldig reliabel (ringer samme tidspunkt hver dag), men den er ikke valid (den ringer ikke når den utgir seg for at den skal ringe).

4.4.3 Pilotering og justering av oppgavesett

Før jeg startet selve datainnsamlingen ble oppgavesettet prøvd ut på en mindre gruppe elever. Jeg startet med et oppgavesett med 25 oppgaver som var utviklet for å kartlegge de åtte misoppfatningene beskrevet i kapitel 3.5. Siden oppgavene består av oppgaver fra andre nasjonale og internasjonale studier, og at oppgavesettet på forhånd er validert av to personer med lang erfaring med prøveutvikling, er hovedhensikten med piloteringen å se om misoppfatningene, som oppgavene er ment å teste, er til stede i den norske konteksten. I tillegg er en viktig hensikt med piloten å se om arbeidsmengden i oppgavesettet er tilpasset 45 minutter, som er den avtalen jeg har gjort med skolene.

Jeg valgte å pilotere oppgavesettet i alle tre klassetrinn som inngår i studien. Til sammen deltok 57 elever i piloten, derav 17 fra 8. trinn, 26 fra 9. trinn og 14 fra 10. trinn. Jeg var selv til stede under gjennomføringen, noe som gjorde at jeg hadde mulighet til å fange opp spørsmål som kunne tyde på uklarheter i oppgavene. Det var imidlertid ingen gjentagende spørsmål fra elevene som tydet på dette.

Resultatene av analysen av piloten, viser at de fleste oppgavene er egnet til å avdekke de misoppfatningene de er utviklet for å identifisere. Det ble imidlertid tydelig, både underveis i piloteringen, og etterhvert som jeg begynte å se nærmere på datamaterialet, at arbeidsmengden det var lagt opp til, er for stor ut fra den avsatte tiden. Dette resulterte i at jeg måtte stoppe mange elever før de ble ferdige med hele oppgavesettet, og mange har derfor en stor andel ubesvarte oppgaver mot slutten av oppgavesettet.

Ut fra hvordan jeg har definert *elever som viser tegn på misoppfatninger* og *elever som er i misoppfatninger* (se kapittel 4.3.3), er det viktig at elevene får tilstrekkelig tid til å besvare alle oppgavene for at jeg skal kunne oppdage systematisk tenkning. En følge av dette er at settet må slankes, så neste steg er å identifisere oppgavene som fungerer dårligst til å avdekke de misoppfatningene de har som hensikt å avdekke.

Oppgave 3, 7 og 25 i piloten (vedlegg 3) har som hensikt å avdekke misoppfatningen *tolker grafer som beskrivelse av et bilde og ikke en sammenheng*. Analysene av piloten viser at oppgavene ikke avdekker misoppfatningen på en god måte. I oppgave 3 og 7 er det svært få (henholdsvis 2 og 3 av 57) svar som tyder på misoppfatningen, mens det er noen flere i oppgave 25. Hovedutfordringen i oppgave 25 er å tolke elevsvarene på en reliabel måte, siden samme svar både kan være riktig og tegn på misoppfatning, avhengig av hvilken forklaring elevene gir. Selv om jeg benytter en *flerlagstest* (kapittel 4.2.1), er det vanskelig å tolke svarene. I noen tilfeller er forklaringen tydelig, mens i andre tilfeller er det vanskelig, nærmest umulig, å avgjøre om svaret er riktig eller om det tyder på misoppfatning. Å løse denne utfordringen, kan kanskje løses med en presisering eller justering av oppgaven, men siden to av de tre oppgavene knyttet til denne misoppfatningen ikke fungerer, og at jeg uansett må redusere arbeidsmengden for elevene, er valget ganske enkelt; denne misoppfatningen tas ut av studien.

I tillegg viser resultatene av analysen at det er svært få svar som tyder på misoppfatning i oppgave 11 og 18. I oppgave 24 er det noen elevsvar som tyder på misoppfatning, men her utgjør andre feilsvar og ubesvart til sammen nesten 80 prosent av svarene.

Ut fra resultatene av analysen blir oppgave 3, 11, 17, 18, 24 og 25 i piloten tatt ut av studien. Tabell 5 viser svarfordelingen, ut fra hvordan oppgavene er kodet. Røde verdier identifiserer hovedutfordringen(e) med oppgavene.

Misoppfatning	**Oppg**	**Riktig**	**Misopp-fatning**	**Andre feilsvar**	**Ubesvart**
tolker likhetstegnet som en kommando	11	75 %	0 %	4 %	21 %
svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon	18	40 %	4 %	18 %	39 %
tolker bokstaver som forkortelser for objekt	24	7 %	14 %	25 %	54 %
en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	-				
ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	-				
tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	-				

verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet	-				
tolker grafer som beskrivelse av et bilde og ikke en sammenheng	3	77 %	4 %	7 %	12 %
	17	49 %	5 %	11 %	35 %
	25	33 %	16 %	2 %	49 %

Tabell 5: Oppgaver som ble tatt ut av studien etter piloten

På bakgrunn av reduksjonen i oppgavesettet, er det færre oppgaver som tester misoppfatningene *tolker likhetstegnet som en kommando*, *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon* og *tolker bokstaver som en forkortelse for objekt*. Siden behovet for å redusere arbeidsmengden til elevene viste seg å være stort, er ikke oppgavene i tabell 5 erstattet med andre oppgaver.

4.5 Datainnsamlingprosessen

Oppgavesettet som studien bygger på består av 19 oppgaver, der hver misoppfatning blir testet med 3 eller 4 oppgaver. Unntaket er misoppfatningen *verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet,* som blir testet med en oppgave. Som beskrevet i kapittel 4.4.2 var jeg selv til stede under innsamlingen for å sørge for så lik som mulig gjennomføring fra klasse til klasse, i et ledd for å sikre høy *reliabilitet som likeverdighet*.

4.5.1 Utvalg

Cohen et al. (2018) presiserer at det ikke finnes noe klart svar på hvor stort et utvalg må være for at resultatene skal være reliable. For kvantitative studier gir imidlertid større utvalg høyere reliabilitet og større fleksibilitet i hvilke statistiske modeller som kan benyttes (Cohen et al., 2018). For eksempel vil en kjikvadrattest (kapittel 4.6.2.3) kreve at du har minst fem forventa observasjoner per variabel du ønsker å undersøke (Cohen et al., 2018). En forenklet modell av kjikvadrattest er vist i tabell 6.

	Elever i misoppfatning	**Elever ikke i misoppfatning**
8. trinn		
9. trinn		
10. trinn		

Tabell 6: Skisse kjikvadrattest for en misoppfatning

Cohen et al. (2018) anbefaler å ta utgangspunkt i minimumsmålet til den modellen du ønsker å bruke, og så doble dette. Ut fra skissen i tabell 6 må jeg ha minst seks observasjoner per celle, som til sammen tilsvarer 72 elever ($6 \cdot 6 \cdot 2$). Selv om antallet er doblet sammenlignet med minimumsmålet, bygger den på at en antagelse om at elevene fordeler seg likt i de ulike kategoriene som undersøkes. Erfaringer fra klasserommet, og fra piloten, tyder på at det ikke er tilfelle. På bakgrunn av dette ønsket jeg et betydelig høyere antall elever i studien.

Jeg tok sikte på et utvalg på rundt 600 elever, omtrent 200 elever per trinn. Siden fravær, og at kanskje noen foresatte ikke godkjenner deltagelse på vegne av sitt barn, anslo jeg at det å rekruttere skoler med til sammen omtrent 750 elever vil gi det ønskede antallet elever i utvalget. For å ivareta representativitet i utvalget innenfor de rammene jeg har, har jeg forsøkt å rekruttere store og små skoler, og skoler fra bygd og by. Utvalget blir uansett preget av at jeg selv vil være til stede under innsamlingen av data, som gjorde at skolene er lokaliserte i Trøndelag. Før innsamlingen startet gjorde jeg avtale med seks skoler med til sammen i overkant av 800 elever.

Det viste seg imidlertid at to skoler, som først hadde takket ja, trakk seg rett før gjennomføring. Den ene skolen var en liten skole som skulle delta med ett trinn, så det påvirket ikke antallet i utvalget stort. Den andre skolen var imidlertid en stor skole med omtrent 350 elever på 8.–10. trinn. I tillegg var det også en klasse på en skole som heller ikke kunne delta. Som figur 11 i innledningen til dette kapitlet viser foregikk datainnsamlingen i en periode over to måneder før jul, og mangel på tid og fagdager i ulike fag ble oppgitt som grunner til alle tre frafallene. Siden perioden for datainnsamlingen var relativ knapp, gjorde jeg en avtale med en lærer utenfor Trøndelag som ville gjennomføre datainnsamling i sin klasse for meg. Til sammen sitter jeg igjen med et utvalg bestående av 368 elever fordelt på fire skoler i studien.

Skole nr.	Størrelse	Geografi	Pilot	Studie	8. trinn	9. trinn	10. trinn
1	Middels	Bygd	x		x	x	x
2	Stor	Bygd		x	x		x
3	Stor	By		x	x	x	x
4	Liten	Bygd		x	x	x	
5	Stor	By		x	x		
			58	368	184	84	100

Tabell 7: Oversikt over utvalget i studien

Grunnet frafallet som ble beskrevet ovenfor ble utvalget betydelig mindre enn hva jeg hadde planlagt. På grunnlag av at begge hovedproblemstillingene i denne studien ser datamaterialet under ett, og ikke ser på de ulike trinnene hver for seg, vurderte jeg størrelsen til utvalget som tilfredsstillende. Dette ble også støttet gjennom å ha referert med Knut Ole Lysø.

På bakgrunn av at mange av de som deltok i piloten ikke fikk nok tid til å fullføre oppgavesettet, og måten jeg har definert elever som viser tegn på misoppfatninger og elever som er i misoppfatninger (se kapittel 4.3.5), er disse elevene ikke med i datagrunnlaget for hovedstudien.

4.6 Bearbeiding og analyse av datamaterialet

Som gjort rede for i kapittel 4.3.1, vil jeg behandle elevens matematiske svar som *nominal* variabel og elevens uttrykte grad av sikkerhet til eget svar som en *intervall* variabel. Hver elev får altså registrert to variabler per oppgave, én for det matematiske svaret og én for uttrykt grad av sikkerhet (se kapittel 4.3.2).

Til å registrere datamaterialet har jeg brukt Microsoft Excel (Microsoft Corporation, 2016), der jeg utviklet et skjema for elevens matematiske svar og uttrykte grad av sikkerhet. Skjemaet ble fylt ut fortløpende i løpet av datainnsamlingsprosessen. Figur 15 viser et utdrag som viser hvordan fem elever har besvart de fem første oppgavene.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	ID	Trinn	Kjønn	Skole	M_1	S_1	M_2	S_2	M_3	S_3	M_4	S_4	M_5a	S_5a	M_5b	S_5b
3	1	9	J	1	1	5	1	5	2	1	1	1	1	5	1	4
4	2	9	G	1	1	5	1	5	2	3	1	2	1	5	1	5
5	3	9	J	1	1	5	1	3	2	1	1	1	1	4	1	2
6	4	9	G	1	1	5	1	4	5	5	1	4	2	5	2	5
7	5	9	J	1	1	3	1	5	2	5	1	5	1	5	1	4

Figur 15: Utdrag fra skjema for registrering av datamaterialet

For å kunne identifisere hver enkelt besvarelse i datamaterialet, fikk hver elev en ID som ble skrevet på elevens besvarelse i det jeg begynte å registrere den. ID-nummeret er anonymt, men gir meg mulighet til å markere interessante elevsvar som jeg kan bruke i analysekapitlet, eller besvarelser jeg ønsker å diskutere med andre. I de to neste kolonnene registreres elevens klassetrinn og kjønn, mens i kolonnen skole er det brukt en kode, som er den samme som gjengitt i tabell 7 i kapittel 4.5.1.

Kolonnene som starter med M i figur 15 viser kode for elevenes matematiske svar, mens kolonner som starter med S viser koder for elevenes uttrykte grad av sikkerhet til eget svar. For mer om de ulike kodene se kapittel 4.3.2.

Jeg vil nå gjøre rede for de matematiske modellene jeg benytter til å behandle datamaterialet, og hvilken programvare de ulike analysene blir foretatt i.

4.6.1 Faktoranalyse

En faktoranalyse grupperer variabler som har noe til felles (Cohen et al., 2018). I min studie vil variabler i denne sammenhengen være matematiske svar på de 19 oppgavene som utgjør oppgavesettet, og en faktoranalyse vil gruppere oppgaver der svarmønstrene til elevene oppfører seg likt. Hensikten med å bruke en faktoranalyse vil være å undersøke, med bakgrunn i elevenes svarmønster, om oppgaver som er utviklet for å teste samme misoppfatning faktisk gjør det. Denne måten å utføre en faktoranalyse på blir betegnet som bekreftende faktoranalyse (Cohen et al., 2018, s. 818).

Faktoranalysen i studien er foretatt i SPSS (IBM Corporation, 2017). Siden studien har fokus på misoppfatninger knyttet til algebra, og ikke på elevenes kompetanse i algebra, er datamatrisen som danner grunnlag for analysen, kodet slik at det er svar som tyder på misoppfatning som blir undersøkt.

Cohen et al. (2018, s. 819–828) presenterer fem steg som er viktig å ta hensyn til når vi skal utføre en faktoranalyse. Det første steget er omtalt som *sikkerhetssjekk* og presenterer en rekke krav til datamaterialet for at det kan utføres en faktoranalyse:

- Størrelse til utvalget: Minimumsstørrelsen til et utvalg for at vi kan vi kan utføre en faktoranalyse varierer i litteraturen fra 30 til 300 (Cohen et al., 2018). Størrelsen til utvalget mitt er på 368 elever og blir betegnet som god størrelse for å utføre faktoranalyse (Tabachnick & Fidell, 2014).
- Antall variabler: Cohen et al. (2018) presenter ikke et egnet antall variabler, men poengterer at et høyt antall variabler kan gi et uhensiktsmessig høyt antall faktorer og motsatt. I min studie er antall variabler 19 oppgaver som er utviklet for å identifisere sju misoppfatninger. Det er anbefalt at forholdet mellom størrelsen til utvalget og antall variabler skal være fra 5 : 1 til 30 : 1 (Cohen et al., 2018). For min studie er forholdet 368 : 19 ≈ 19 : 1.
- Korrelasjon mellom variablene: Korrelasjonen mellom de ulike variablene bør være mellom 0,3 og 0,6, siden for lav korrelasjon vil gi like mange faktorer som oppgaver (Cohen et al., 2018). SPSS (IBM Corporation, 2017) sjekker dette automatisk gjennom en *Kaiser-Mayer-Olkin*-analyse (KMO), der resultater over 0,6 antyder at datamaterialet er egnet for faktoranalyse (Cohen et al., 2018).

Det neste steget er *databehandling og innledende analyser*. Ett av punktene her er å sjekke korrelasjonen mellom variablene som nevnt ovenfor. Resten av steget omhandler hvordan resultatene av faktoranalysen skal tolkes. Til å se på hvor stor del av den totale variansen i datamaterialet hver faktor kan forklare, blir det anbefalt å studere «Rotation Sums of Squared Loadings» (Cohen et al., 2018, s. 823).

Det neste steget, *finne faktorer utfra variabler*, går på å identifisere variablene som er gruppert i samme faktor (Cohen et al., 2018). Alle variabler som inngår i an faktoranalyse får en faktorladning, et mål på i hvor stor grad hver variabel korrelerer med faktoren (Tabachnick & Fidell, 2014). For å definere hvilke variabler (oppgaver) som inngår i en faktor må faktorladningene vurderes. Cohen et al. (2018) poengterer at dette ikke er en eksakt vitenskap og at det må brukes skjønn, men Tabachnick og Fidell (2014, s. 702) kategoriserer faktorladninger på følgende måte:

	Faktorladning
Utmerket	>0,71
Veldig gode	0,64–0,71
Gode	0,55–0,63
Ok	0,44–0,54
Dårlige	0,32-0,43

Tabell 8: Grenseverdier for faktorladninger i faktoranalyse (Tabachnick & Fidell, 2014)

Jeg velger å bruke grenseverdiene til Tabachnick og Fidell (2014) videre i studien.

Etter at oppgavene i de ulike faktorene er identifisert, er neste steg å *navngi faktorene* (Cohen et al., 2018), der jeg vil undersøke hva oppgavene innen samme faktor har til felles. Siden jeg benytter en bekreftende faktoranalyse, vil jeg undersøke om oppgaver som er utviklet til å teste samme misoppfatning blir identifisert i samme faktor.

Det siste steget gir tips til hvordan resultatene av faktoranalysen skal presenteres, som stort sett dreier seg om å redegjøre valg som er gjort underveis og dermed analysene baserer seg på. Resultatet av faktoranalysen er presentert i kapittel 5.1.2.

4.6.2 Forskjell mellom grupper

For å undersøke forskningsspørsmålet om *elever, i misoppfatninger, selv er klar over at de er i en misoppfatning*, vil jeg sammenligne hvordan disse elevene uttrykker grad av sikkerhet til eget svar med andre grupperinger i datamaterialet. Interessante grupper i datamaterialet er elever som ikke er i misoppfatning, eller elever som har besvart alle oppgavene som tester samme misoppfatning riktig. En metode for å gjøre dette er å beregne gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar for elever i misoppfatning og sammenligne det med elever som ikke er i misoppfatning, og elever med alt riktig.

I tillegg vil det være interessant på oppgavenivå å undersøke gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elevsvar som tyder på misoppfatning og sammenligne det med tilsvarende gjennomsnitt for riktige svar og andre feilsvar.

De to analysene knyttet til uttrykt grad av sikkerhet som er beskrevet her er gjort i Microsoft Excel (Microsoft Corporation, 2016) i en bearbeidet versjon av skjemaet som jeg registrerte elevbesvarelsene (figur 15). De hyppigste brukte funksjonene i dette analysearbeidet er GJENNOMSNITT.HVIS.SETT[2] og ANTALL.HVIS.SETT[3].

Til mitt andre forskningsspørsmål, hvor utberedt misoppfatninger knyttet til algebra er, har jeg også i stor grad benyttet de samme funksjonene som er beskrevet ovenfor.

[2] https://support.office.com/nb-no/article/GJENNOMSNITT-HVIS-SETT-funksjon-48910c45-1fc0-4389-a028-f7c5c3001690

[3] https://support.office.com/nb-no/article/ANTALL-HVIS-SETT-funksjon-dda3dc6e-f74e-4aee-88bc-aa8c2a866842

Felles for å besvare begge forskningsspørsmålene er at jeg sammenligner flere delgrupper av datamaterialet. Dette gjelder både når jeg for eksempel sammenligner uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatning med elever som ikke er i misoppfatning, og når jeg sammenligner antall elever i misoppfatning på 8., 9. og 10. trinn. Det vil være naturlig at disse analysene viser noen forskjeller mellom ulike delgrupper, for eksempel at det er forskjell i uttrykt grad av sikkerhet til to grupper, eller at det er flere elever i misoppfatning på ett trinn sammenlignet med et annet.

Siden datamaterialet mitt er et utvalg av populasjonen, og ikke alle elevene i Norge, vil det være interessant å se om forskjeller som dukker opp i datamaterialet er tilfeldige, at de skyldes utvalget, eller om de faktisk er reelle. Dette studeres gjennom å undersøke statistisk signifikans der det utvikles en nullhypotese (H_0) som påstår at det er ingen sammenheng mellom variablene som undersøkes (Cohen et al., 2018). Et eksempel på en mulig sammenheng mellom variabler i min studie er elevers matematiske svar og uttrykt grad av sikkerhet. I tillegg til en nullhypotese, utvikles også en alternativ hypotese (H_1) som påstår at det er en sammenheng mellom variablene som undersøkes (Cohen et al., 2018). Tabell 9 viser eksempler på nullhypotese (H_0) og alternativ hypotese (H_1) for de to forskningsspørsmålene til studien.

	Eksempel forskningsspørsmål 1	**Eksempel forskningsspørsmål 2**
H_0	det er *ingen statistisk signifikant* forskjell mellom hvordan elever i misoppfatning uttrykker grad av sikkerhet til eget svar, sammenlignet med elever som ikke er i misoppfatning	det er *ingen statistisk signifikant* forskjell mellom antall elever i misoppfatning og klassetrinn
H_1	det er *statistisk signifikant* forskjell mellom hvordan elever i misoppfatning uttrykker grad av sikkerhet til eget svar, sammenlignet med elever som ikke er i misoppfatning	det er *statistisk signifikant* forskjell mellom antall elever i misoppfatning og klassetrinn

Tabell 9: Eksempler på hypoteser

ANOVA beregner en p-verdi for hvor sannsynlig (engelsk: probability) det er at nullhypotesen stemmer (Cohen et al., 2018). En p-verdi lik 0,05 betyr at sannsynligheten er 5 % for at nullhypotesen stemmer, basert på det utvalget analysen er foretatt på. Dette betyr igjen at det er 95 % sannsynlighet for at den alternative hypotesen stemmer. P-verdien representerer dermed feilmarginen for at de forskjellene vi ser ikke er reelle (Karlsen, 2020).

I forbindelse med hypotesetesting er det to typer feil som forskere må prøve å unngå (Cohen et al., 2018). Feil av type 1 er at nullhypotesen forkastes når den faktisk er sann, som ofte forekommer i et stort datamateriale, og type 2 er at vi aksepterer nullhypotesen når det ikke er sann, som ofte forekommer ved at forskeren setter en for streng grenseverdi for å forkaste nullhypotesen (Cohen et al., 2018). Karlsen (2020) retter, med støtte fra amerikansk forskningslitteratur, kritikk mot at statistiske signifikantstester legger opp til et svart-hvitt bilde av forskningen, der studier som viser statistisk signifikans tolkes som bevis, mens studier som ikke viser statistisk signifikans blir forkastet. Jeg vil ta med meg disse betraktningene når resultatene fra hypotesetestingen blir analysert i kapittel 5.

Hvor stor feilmargin som aksepteres finnes det ingen fasit på, men 5 % er hyppig brukt i andre studier (Cohen et al., 2018). På bakgrunn av dette velger jeg å bruke et signifikansmål på 5 % for å forkaste nullhypotesene som blir testet i studien, og bruker betegnelsen at forskjeller er statistisk signifikante dersom p-verdien overstiger signifikansmålet.

Til å undersøke om elever i misoppfatninger selv er klar over at de er i en misoppfatning, har jeg gjennomført variasjonsanalyser i SPSS (IBM Corporation, 2017). For å undersøke om det er en forskjell i utbredelse på de ulike trinnene, har jeg foretatt en kjikvadrattest i Microsoft Excel (Microsoft Corporation, 2016). De neste delkapitlene forklarer de matematiske modellene som er brukt i analysen.

4.6.2.1 Variasjonsanalyse

Variasjonsanalyse (ANOVA) er, i likhet med t-test, en metode for å undersøke statistisk signifikans (Cohen et al., 2018). Forskjellen mellom de to er at en t-test undersøker to variabler, mens ANOVA undersøker to eller flere variabler (Cohen et al., 2018). Siden jeg blant annet ønsker å undersøke uttrykt grad av sikkerhet til svar som tyder på misoppfatning, riktig svar og andre feilsvar, benytter jeg ANOVA i analysene.

ANOVA bygger på noen antagelser om datamaterialet (Cohen et al., 2018, s. 781) som er gjort rede for her:

- variablene er uavhengige av hverandre
- en av variablene er av typen *intervall* eller *forhold*
- uttrekket er fortatt tilfeldig
- lik varians innad i alle gruppene
- normalfordeling innad i alle gruppene

For min studie er det spesielt viktig at det kompliserte datamaterialet i studien organiseres slik at variablene er uavhengige av hverandre. Oppgavesettet studien bygger på består av 19 oppgaver, der hver elev har avgitt ett matematisk svar og ett svar for uttrykt grad av sikkerhet til riktig, per oppgave. Når jeg analyserer hver enkelt oppgave vil disse to variablene være uavhengige av hverandre, på grunn av hvordan datamaterialet mitt er kodet (se kapittel 4.3.2). Tabell 10 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for de ulike matematiske svarene i oppgave 5.

Matematisk svar	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Riktig	4,3
Tyder på misoppfatning	4,0
Andre feilsvar	2,9

Tabell 10: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet per matematisk svar, oppgave 5

At variablene er uavhengige av hverandre kan forklares som at hver enkelt elev har kun bidratt med informasjon i en av de tre cellene for gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet i tabell 10. Vi kan dermed utføre en variasjonsanalyse for å se om forskjellene som tabellen viser er statistisk signifikante eller ikke. Et moteksempel til uavhengighet vil være å undersøke gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til alle riktige svar, alle svar som tyder på misoppfatning og alle andre feilsvar. Her vil de fleste elever ha bidratt med informasjon i flere celler. Det vil derfor ikke være mulig å undersøke om forskjellene er statistisk signifikante eller ikke. Sammenligningen kan likevel være nyttig, og er presentert i kapittel 5.2.

ANOVA bygger på om gjennomsnittet til to eller flere grupper er statistisk signifikant forskjellig (Tabachnick & Fidell, 2014). Dette krever at én av variablene er av typen *intervall*. I eksempler som i tabell 10, blir elevens matematiske svar behandlet som ordinal variabel og svar for uttrykt grad av sikkerhet som en intervallvariabel. Måten disse variablene er behandlet på er gjort rede for og begrunnet i kapittel 4.3.1.

ANOVA i SPSS (IBM Corporation, 2017) beregner forholdet til variasjonen mellom gruppene og innad i gruppene, og en p-verdi som sier hvor stor sannsynligheten er for at nullhypotesen stemmer (Cohen et al., 2018). ANOVA sier dermed bare om det er en forskjell mellom gruppene som undersøkes, men ikke mellom hvilke av gruppene forskjellen er. For å identifisere dette må vi foreta en «post hoc»-test, der «Games-Howell» er anbefalt å bruke om datamateriale har ulik varians innad i gruppene, eller om størrelsen til de ulike undergruppene er ulik (Cohen et al., 2018, s. 783). De innledende analysene i kapittel 5.1 vil sjekke dette, og jeg vil på bakgrunn av de avgjøre matematisk modell for den videre variasjonsanalysen.

I tillegg til å undersøke om forskjeller mellom flere grupper er statistisk signifikante, anbefales det i tillegg å kvantifisere hvor stor forskjellen er gjennom effektstørrelser (Cohen et al., 2018; Karlsen, 2020; Tabachnick & Fidell, 2014).

4.6.2.2 Effektstørrelse

Effektstørrelser kan beregnes ved mange ulike modeller, der jeg benytter *Cohen's d*, som er betegnet som den mest brukte for å undersøke forskjeller mellom grupper (Cohen et al., 2018). *Cohen's d* blir beregnet med følgende formel, der $\bar{S}$ er gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for de to gruppene jeg ønsker å undersøke, og SD er standardavviket til de ulike gruppene (Cohen et al., 2018):

$$d = \frac{\bar{S}_{g1} - \bar{S}_{g2}}{\sqrt{\frac{SD_{g1}^2 + SD_{g2}^2}{2}}}$$

Formel 2: Formel for *Cohen's d*

Med utgangspunkt i formelen ovenfor har jeg utviklet et regneark i Microsoft Excel (Microsoft Corporation, 2016) som beregner *Cohens' d* ut fra gjennomsnittet og standardavviket for uttrykt grad av sikkerhet til eget svar for elever i misoppfatning og for elever som ikke er i misoppfatning.

	A	B	C	D	E	F
1		Ikke i misoppfatning		I misoppfatning		
2		Gjennomsnitt	St.avvik	Gjennomsnitt	St.avvik	d
3	Tolker likhetstegnet som en kommando					=(B3-D3)/ROT((C3^2+E3^2)/2)
4	Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon					=(B4-D4)/ROT((C4^2+E4^2)/2)
5	Tolker bokstaver som forkortelser for objekt					=(B5-D5)/ROT((C5^2+E5^2)/2)
6	En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall					=(B6-D6)/ROT((C6^2+E6^2)/2)
7	Ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi					=(B7-D7)/ROT((C7^2+E7^2)/2)
8	Verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet					=(B8-D8)/ROT((C8^2+E8^2)/2)

Figur 16: Regneark for beregning av effektstørrelse (*Cohen's d*)

Det finnes ingen eksakt vitenskap som sier hva som er store eller små effektstørrelser, men vanlige grenseverdier for *Cohen's d* er vist i tabell 11 (Cohen et al., 2018). Jeg velger å benytte disse grenseverdiene videre i studien.

	Forklaring
0,2	liten effekt
0,5	middels effekt
0,8	stor effekt

Tabell 11: Grenseverdier Cohen's d

4.6.2.3 Kjikvadrat

For å besvare forskningsspørsmålet knyttet til utbredelse, vil jeg foreta en opptelling av antall elever som viser et svarmønster i tråd med min definisjon av å *være i misoppfatning* (se kapittel 4.3.3). I tillegg vil jeg undersøke utbredelsen av misoppfatninger på de ulike trinnene, og om eventuelle forskjeller er statistisk signifikante. I motsetning til variasjonsanalysen, beskrevet i kapittel 4.6.2.1, vil ikke noen av variablene i dette tilfellet være av typen *intervall.* Jeg må derfor benytte en annen analysemetode.

For å undersøke statistisk signifikante forskjeller mellom ordinale variabler er kjikvadrattest en egnet metode, der observerte verdier blir sammenlignet med forventa verdier (Cohen et al., 2018). Som nevnt i kapittel 4.5.1, forutsetter en kjikvadrattest at forventa verdier er større enn fem (Cohen et al., 2018), men McHugh (2013) modererer dette ved å si at forventa verdier skal være over fem i 80 % av tilfellene, og at ingen skal være under tre. Formel 3 viser formelen for kjikvadrattest, der av *O* er observerte og *E* tilsvarer forventa verdier (Cohen et al., 2018).

$$x^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

Formel 3: Formel for kjikvadrattest

Formelen viser at vi skal kvadrere forskjellen mellom observerte og forventa verdier og dividere på forventa verdier. Resultatet av kjikvadrattesten er en sum av denne prosedyren, for hver variabel som inngår i det vi ønsker å undersøke. For å presisere dette nærmere viser figur 17 et regneark jeg har utviklet for å foreta kjikvadrattest i Microsoft Excel (Microsoft Corporation, 2016). Resultatet blir beregnet i celle E18.

	A	B	C	D	E
1	**H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker likhetstegnet som en kommando"**				
2			**M**	**IM**	Totalt (rad)
3	8 .trinn	O	=L5	=P5	=SUMMER(C3:D3)
4		F	=C9*$E$3/$E$9	=D9*$E$3/$E$9	
5	9. trinn	O	=M5	=Q5	=SUMMER(C5:D5)
6		F	=C9*$E$5/$E$9	=D9*$E$5/$E$9	
7	10. trinn	O	=N5	=R5	=SUMMER(C7:D7)
8		F	=C9*$E$7/$E$9	=D9*$E$7/$E$9	
9	Totalt (kolonne)		=C3+C5+C7	=D3+D5+D7	=SUMMER(C9:D9)
10					
11		**O**	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
12	8. trinn M	=C3	=C4	=B12-C12	=D12^2/C12
13	8. trinn IM	=D3	=D4	=B13-C13	=D13^2/C13
14	9. trinn M	=C5	=C6	=B14-C14	=D14^2/C14
15	9. trinn IM	=D5	=D6	=B15-C15	=D15^2/C15
16	10. trinn M	=C7	=C8	=B16-C16	=D16^2/C16
17	10. trinn IM	=D7	=D8	=B17-C17	=D17^2/C17
18				**x^2**	**=SUMMER(E12:E17)**

Figur 17: Regneark for kjikvadrattest

For å sikre uavhengige variabler vil jeg undersøke elever i misoppfatninger mot elever som ikke er i misoppfatning, eller elever som har besvart alle oppgavene per misoppfatning riktig. Nullhypotesen som blir testet i figur 17 er at det er ingen statistisk signifikant forskjell mellom antall elever i misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* i de ulike klassetrinnene, sammenlignet mellom elever som ikke er i misoppfatning. I figur 17 står *M* for elever i misoppfatning, *IM* for elever som ikke er i misoppfatning, *O* for observerte verdier og *F* for forventa verdier.

Resultatet av en kjikvadrattest tolkes utfra hvor mange variabler vi undersøker og hvilken grenseverdi vi setter for p-verdien for at nullhypotesen skal forkastes. Figur 18 viser en slik tabell (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 10), der antall frihetsgrader (engelsk: degrees of freedom, forkortet df) beregnes ved antall rader minus én, multiplisert med antall kolonner minus én (McHugh, 2013).

TABLE 4 Critical Values of Chi Square (χ^2)

df	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.828
2	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	13.816
3	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	16.266
4	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	18.467
5	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.515

Figur 18: Utdrag av tabell for tolkning av kjikvadrattest

Analyser knyttet til utbredelse på de ulike trinnene vil ha to frihetsgrader ((2 rader – 1 rad) · (3 kolonner – 1 kolonne)). Med et valgt signifikansmål på 5 %, må x^2 være større enn 5,99147 for at jeg vil forkaste en nullhypotese.

4.7 Etiske betraktninger

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har fastsatt forpliktende forskningsetiske retningslinjer for all forskning i Norge (NESH, 2016). Retningslinjene er delt inn i seks hovedområder (NESH, 2016), og jeg vil gjøre rede for de som er sentrale for min studie, og hvordan jeg har ivaretatt de.

Hovedområdet *forskning, samfunn og etikk* presiserer forskerens sitt ansvar for at forskningen skal være troverdig, og konklusjoner som trekkes fra forskningen er «foreløpige og begrensende» (NESH, 2016). For min del er det viktig å være bevisst dette når jeg skal presentere resultater av denne studien. I tillegg omfatter området at hverken forskere eller institusjoner kan tilbakeholde eller selektiv rapportere resultater (NESH, 2016). En del forskning er blitt kritisert for dette, for eksempel analytiske studier som tilbakeholder forskning som ikke viser signifikante forskjeller (Karlsen, 2020) (kapittel 4.6.2.1). Siden jeg selv har kategorisert min studie som analytisk (kapittel 4.1), vil det være viktig for min del å presentere de funnene analysene viser basert på det teoretiske og metodiske rammeverket for studien, og ikke tilpasse metodene for å finne interessante svar.

Området *Hensyn til personer* (NESH, 2016), vil i min studie omhandle hvordan elevene som inngår i studien er ivaretatt. Retningslinjene til NESH fastslår at dersom «forskningen omhandler personopplysninger må forskeren både informere og innhente samtykke fra dem som deltar i forskingen» (NESH, 2016, s. 14). I tillegg må all forskning som skal hente inn sensitive personopplysninger søke godkjenning til Norsk senter for forskningsdata[4] (NSD). Jeg har også vært i kontakt med NSD angående å bruke eksempler på elevenes tenking som støtte for analysearbeidet, og om det kan betegnes som personidentifiserbart eller ikke. Svaret jeg har fått er at dette ikke betegnes som

[4] https://nsd.no

personidentifiserbart materielle, så lenge jeg unngår elever med spesiell håndskrift (vedlegg 15), noe jeg har tatt hensyn til i valg av eksempler i analysekapitlet.

Alle foresatte til deltagere i studien har samtykket til deltagelse gjennom et samtykkeskjema, som ble sendt ut til elever på de skolene som har deltatt i prosjektet. Samtykkeskjemaet er vedlagt i vedlegg 16, og er utviklet etter en mal fra NTNU[5]. Svar på samtykkeskjemaene ble organisert av skolene som deltok i studien. Skolene hadde også ordnet med alternativt opplegg for de som ikke skulle delta i prosjektet.

Området *hensyn til personer* omhandler også lagring av identifiserbar data i et forskningsprosjekt (NESH, 2016). Jeg har ingen direkte identifiserbar data i mitt forskningsprosjekt, men deltagerne har gitt opplysninger om trinn, kjønn og skole. Kombinasjon av disse variablene, og elevenes håndskrift, kan i teorien gjøre det mulig å identifisere enkelte elever i datamaterialet. På bakgrunn av dette er variabelen skole registrert med en tallkode, og koblingen mellom skolens navn og tallkoden er oppbevart i et passordbeskyttet dokument. På bakgrunn av dette betrakter jeg mitt datamateriell som anonymisert i henhold til NSD sine retningslinjer.

Hovedområdet *forskersamfunnet* omhandler blant annet at «forskeren skal følge god publiseringspraksis, respektere andres bidrag og følge anerkjente standarder for medforfatterskap og samarbeid.» (NESH, 2016, s. 26). Jeg har i stor grad brukt primærkilder i denne studien, men i noen tilfeller der primærkilden ikke har latt seg oppdrive, har jeg brukt sekundærkilder som har henvist til disse.

På bakgrunn av de betraktningene som er gjort i dette delkapitlet føler jeg at retningslinjene til NESH for god forskningsetikk er ivaretatt gjennom denne studien.

[5] https://innsida.ntnu.no/wiki/-/wiki/Norsk/Behandle+personopplysninger+i+forskningsprosjekt

5 Analyse

I dette kapitlet presenterer jeg analysene av datamaterialet. Jeg starter med noen innledende analyser, blant annet faktoranalyse, som legger føringer for hvordan datamaterialet analyseres videre. Neste delkapittel omhandler overordnende analyser knyttet til mitt første forskningsspørsmål, *er elever, i misoppfatning, selv klar over at de er i en misoppfatning*, der jeg ser på uttrykt grad av sikkerhet til eget svar avhengig av hvilket matematisk svar elevene gir.

Etter dette kommer et delkapittel per misoppfatning. I disse delkapitlene ser jeg på hvordan elevene har uttrykt grad av sikkerhet i oppgaver innen hver misoppfatning, samt analyser knyttet til det andre forskningsspørsmålet, *hvor utberedt er misoppfatninger knyttet til algebra.* Utbredelsen tar utgangspunkt i hvordan jeg har definert elever som viser tegn på eller som er i misoppfatninger i kapittel 4.3.3. Jeg vil også presentere resultater fra den kvalitative delen av datamaterialet i disse delkapitlene, ved å vise elevbesvarelser fra elever som viser tegn på misoppfatning.

Til slutt i dette kapitelet presenteres overordnede analyser knyttet til utbredelse av misoppfatningene studien fokuserer på, både knyttet til de ulike misoppfatningene, men også hvor stor andel av elevene som viser tegn på, eller er i misoppfatninger.

På grunn av plassbegrensning, er ikke alle oppgavene det henvises til i kapitlet vist. Det kan derfor være lurt for leseren å ha oppgavesettet, vedlegg 4, tilgjengelig når kapitlet leses. Mer utfyllende analyseresultater for enkeltoppgaver enn det som presenteres i dette kapitlet, er samlet i en teknisk rapport (vedlegg 8).

5.1 Innledende analyser

Til sammen har 368 elever besvart et oppgavesett med 19 oppgaver, der to av oppgavene har to delsvar. Det gir til sammen 7728 ulike matematiske svar. Av disse er 21 % ubesvart, noe jeg betegner som en høy andel. Andelen ubesvart vil også bli kommentert for enkeltoppgaver, samtidig som jeg drøfter den videre i kapittel 6. Av de registrerte matematiske svarene er 51 % registrert som riktige, 43 % er svar som tyder på misoppfatning, og 7 % er registrert som andre feilsvar. Fordelingen, spesielt den lave andelen andre feilsvar, tyder på at oppgavene har fungert etter formålet med å identifisere elevers misoppfatninger knyttet til algebra.

Noen funn fra de innledende analysene påvirker valg av metode for det videre analysearbeidet i studien. Det at de matematiske svarene er ujevnt fordelt, gjør at jeg må bruke analysemetoden «*Games-Howell*» videre i variasjonsanalysen (se kapittel 4.6.2.1).

Videre i delkapitlet presenteres oppgavesettets reliabilitet og en bekreftende faktoranalyse, som undersøker om oppgavene tester de misoppfatningene de er tiltenkt å teste.

5.1.1 Reliabilitet

Jeg vil her presentere resultater av analyser av *reliabilitet som intern konsistens*, om alle oppgavene i en test måler samme konstrukt, ved hjelp av Cronbach alfa (se kapittel 4.4.2). Jeg har valgt å beregne alfa-verdien på to måter. Den ene metoden beregner alfa når oppgavene er kodet som riktig eller feil, og den andre beregner alfa når oppgavene er kodet som misoppfatning eller ikke. Den første metoden gir svar på i hvor stor grad oppgavene måler algebra med samme konstrukt, mens den andre metoden vil gi svar på i hvor stor grad misoppfatningene måler samme konstrukt. Cronbach alfa er beregnet i SPSS (IBM Corporation, 2017), og resultatene av analysen er presentert i figur 19.

Riktige svar

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
,811	,803	19

Svar som tyder på misoppfatning

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
,557	,555	19

Figur 19: Reliabilitet som intern konsistens

Reliabiliteten til oppgavesettet beregnes som høy, når vi studerer korrelasjonen mellom oppgavene for riktige svar (Cohen et al., 2018). Det betyr, at når vi studerer hvem som løser oppgavene riktig eller ikke, måler oppgavene i stor grad samme konstrukt (Tavakol & Dennick, 2011), altså at oppgavene måler samme ferdighet. Relabiliteten når vi studerer svar som tyder på misoppfatning, blir betegnet som uakseptabel lav (Cohen et al., 2018). En lav alfa kan forklares med for få oppgaver, dårlig korrelasjon mellom oppgavene, eller at konstruktet som måles ikke er endimensjonalt (Tavakol & Dennick, 2011). Bak denne studien ligger det ingen antagelse om at misoppfatninger i algebra er et endimensjonalt konstrukt, så jeg kommer ikke til å undersøke årsakene til den lave alfa-verdien nærmere. Studien bygger imidlertid på at flere oppgaver måler samme misoppfatning, noe jeg vil undersøke ved en faktoranalyse.

5.1.2 Faktoranalyse

Faktoranalysen er gjennomført med en bekreftende faktoranalyse (Cohen et al., 2018), som undersøker om elevenes svarmønster viser at oppgavene tester de misoppfatningene de er utviklet for å teste. Faktoranalysen er gjennomført i SPSS (IBM Corporation, 2017) med metoden *direct oblimin* for rotasjon, som tar utgangspunkt i at det kan være korrelasjon mellom de ulike faktorene (Cohen et al., 2018).

Figur 20 viser resultatet av faktoranalysen, der oppgavene er gruppert etter misoppfatningene de er utviklet å teste, i den rekkefølgen de er beskrevet i kapittel 3.5. I faktoranalysen er alle faktorladninger lavere enn 0,3 tatt bort.

En korrelasjonsanalyse av oppgavene viser at datamaterialet er egnet for faktoranalyse, ved at KMO er større enn 0,6 (0,672) (Cohen et al., 2018). Faktorene som er identifisert i faktoranalysen forklarer til sammen 63 % av den totale variansen, altså litt over 60 %, som er en «middelmådig størrelse» (Hair, 2014, s. 107), og som forskere er fornøyde med (Cohen et al., 2018).

Pattern Matrix[a]

	Component					
	1	2	3	4	5	6
O1: Tolker likhetstegnet som en kommando	,837					
O13: Tolker likhetstegnet som en kommando	,894					
O16: Tolker likhetstegnet som en kommando	,745					
O4: Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon						,760
O6: Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon						,735
O11: Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon og bstemmer verdien til bokstaver ut fra plassering i alfabetet					-,698	
O3: Tolker bokstaver som forkortelser for objekt				,580		
O8: Tolker bokstaver som forkortelser for objekt			,411	,499		
O12: Tolker bokstaver som forkortelser for objekt				,709		
O19: Tolker bokstaver som forkortelser for objekt				,545	,427	
O10: Tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	-,350		,529		-,364	
O15: Tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi			,838			
O18: Tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi			,726			
O5: Tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	,500				,349	
O7: Tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	,322				,485	
O17: Tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	,465				,321	
O2: Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet		,858				
O9: Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet		,857				
O14: Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet		,719				

Extraction Method: Principal Component Analysis.
Rotation Method: Oblimin with Kaiser Normalization.

a. Rotation converged in 12 iterations.

Figur 20: Resultat av bekreftende faktoranalyse

Faktoranalysen identifiserer seks faktorer i datamaterialet, mens jeg i kapittel 3.5 beskriver sju misoppfatninger som undersøkes i studien. Det betyr at det er noen oppgaver som er utviklet for å teste noen misoppfatninger som faktoranalysen viser at de ikke gjør. Vi skal se nærmere på faktorladningene for oppgavene i de ulike faktorene og bestemme grenseverdier for hvilke oppgaver som er inkludert i de ulike faktorene, for å se om oppgavene måler de misoppfatningene de er utviklet for.

Til å tolke resultatene av faktoranalysen har jeg brukt tabell 8 fra kapittel 4.6.1. I tillegg er liten variasjonsbredde i faktorladningene til oppgavene innen samme faktor, et viktig kriterium for å gruppere oppgaver innen samme faktor (Cohen et al., 2018).

For faktor 1 er det tre oppgaver som skiller seg ut med høy faktorladning, oppgave 1, 13, 16. Alle disse tre oppgavene er utviklet for å teste misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando*, og faktoranalysen bekrefter at disse oppgavene måler samme konstrukt. Faktor 1 omfatter dermed misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando*, med en faktorladning-grense på 0,74 som betegnes som utmerket (se tabell 8, kapittel 4.6.1).

I faktor 2 er det bare tre oppgaver, oppgave 2, 9 og 14, som har større faktorladning enn 0,3. Alle oppgavene er utviklet til å teste samme misoppfatning, *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*. Faktorladningen er også her høy, og det er liten variasjon mellom de ulike faktorladningene. Laveste faktorladning for oppgavene er 0,719, som er betegnet som utmerket.

Faktor 3 har fire oppgaver med faktorladninger over 0,3. De tre oppgavene med høyest faktorladning er utviklet for å teste samme misoppfatning. Oppgave 10 har noe lavere faktorladning enn oppgave 15 og 18, men jeg kategoriserer allikevel disse oppgavene innen samme faktor, misoppfatningen *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi*. Faktorladning-grensen for denne faktoren er 0,52 som er betegnet som ok, nær grensen for god.

Det er fire oppgaver som er identifisert innen faktor 4, og alle disse er oppgaver som er utviklet for å teste misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for objekt.* Variasjonsbredden til faktorladningene er litt høy, men betydelig lavere enn i eksempler i Cohen et al. (2018). Faktorladning-grensen for faktoren er 0,49, som tilsvarer ok.

I faktor 5 er det fire oppgaver som ikke allerede er blitt knyttet til en annen faktor. Tre av disse, oppgave 5, 7 og 17, er knyttet til oppgaver som er utviklet for å teste misoppfatningen *tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*. I tillegg er oppgave 11 kategorisert innen denne faktoren. Oppgave 11 er eneste oppgaven i studien som er utviklet for å teste to misoppfatninger, *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon* og *bestemmer verdien til bokstaven ut fra plasseringen i alfabetet*. At oppgave 11 i plasseres i samme faktor som oppgave 5, 7 og 17, tyder på at misoppfatningene *tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall* og *verdien til bokstaven ut fra plasseringen i alfabetet,* måler det sammen samme underliggende misoppfatningen. Ut fra min vurdering virker denne koblingen mellom disse to misoppfatningene logisk, siden begge misoppfatningene går på at elevene ikke ser på bokstaver som variabler, men at bokstavene står for bestemte tall. Jeg velger derfor å inkludere alle disse fire oppgavene i misoppfatningen *tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall,* i de videre analysene i denne studien. Faktorladning-grensen for faktoren er imidlertid 0,32 som blir betegnet som dårlig.

Den siste faktoren inneholder to oppgaver, begge utviklet for å teste misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*. I kapittel 3.5 er oppgave 11 inkludert i denne misoppfatningen, men på bakgrunn av faktoranalysen inneholder denne misoppfatningen i den videre analysen bare to oppgaver. Det vil dermed ikke være mulig å studere elever som viser tegn på denne misoppfatningen (se kapittel 4.3.3), i den videre analysen for denne misoppfatningen. Faktorladning-grensen for denne faktoren er 0,73, som tilsvarer utmerket.

5.2 Elevers oppfattelse av egne svar

For å kunne vurdere om *elever, i misoppfatning, selv er klar over at de er i en misoppfatning*, vil jeg undersøke hvordan elever har uttrykt grad av sikkerhet, avhengig av hvilket matematisk svar de gir. Som vist i kapitel 4.3.2, er elevens matematiske svar og uttrykt grad av sikkerhet registrert per oppgave. Uttrykt grad av sikkerhet er kodet med et tall der, 5 tilsvarer *svært sikker*, 4 *sikker*, 3 *hverken sikker eller usikker*, 2 *usikker* og 1 *veldig usikker*. Tabell 12 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar, for de ulike av matematiske svarene for alle elevene i studien.

Matematisk svar	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar
Riktig	3,8
Tyder på misoppfatning	3,7
Andre feilsvar	2,6

Tabell 12: Gjennomsnittlig grad av sikkerhet til eget svar

Som tabellen viser, uttrykker elevene i gjennomsnitt størst grad av sikkerhet til svar som er riktige, med et gjennomsnitt på 3,8. På skalaen som er brukt i registreringen, ligger dette mellom *sikker* og *hverken sikker eller usikker*, men nærmerest *sikker*. Svar som tyder på misoppfatning er i gjennomsnitt uttrykt med noe lavere grad av sikkerhet, men også dette gjennomsnittet ligger nærmere *sikker,* enn *hverken sikker eller usikker*. Svar som er registrert som andre feilsvar er i gjennomsnitt utrykt med lavere grad av sikkerhet. Gjennomsnittet er 2, 6, som er omtrent midt mellom *hverken sikker eller usikker* og *usikker*. På grunn av at datamaterialet som tabell 12 bygger på ikke tilfredsstiller kravet om uavhengighet mellom variablene (se kapittel 4.6.2.1), kan jeg ikke undersøke om forskjellene er statistisk signifikante eller ikke ved hjelp av ANOVA.

Analysene fra TIMSS 2015 viser at elevenes selvtillit har en statistisk signifikant og positiv sammenheng med elevenes prestasjoner i matematikk (Bergem et al., 2016). Det er derfor interessant at elevsvar som tyder på misoppfatning, har nesten like høy uttrykt grad av sikkerhet som riktige svar. Dette vil bli drøftet videre i kapittel 6.

Uttrykt grad av sikkerhet kan trolig knyttes til elevenes personlighet, der det er naturlig å tro at noen elever uttrykker høyere grad av sikkerhet til eget svar, uavhengig av gyldigheten til svaret. Analysene viser at 98 % av elevene avga minst ett riktig svar, 98 % avga minst ett svar som tyder på misoppfatning, og 48 % minst ett svar som er registrert som andre feilsvar. Det er også like mange elever (75 %), som avga fem eller flere riktige svar, som avga fem eller flere svar som tyder på misoppfatning. Dette tolker jeg som at elevenes eventuelle forskjeller i personlighet ikke kan knyttes til ett bestemt matematisk svar, og påvirker dermed ikke svarene på mine forskningsspørsmål.

I datamaterialet er det 355 elever som har avgitt både riktige svar og svar som tyder på misoppfatning. 176 elever har avgitt både svar som tyder på misoppfatning og svar som er registrert som andre feilsvar, mens 174 elever har både avgitt riktige svar og andre feilsvar.

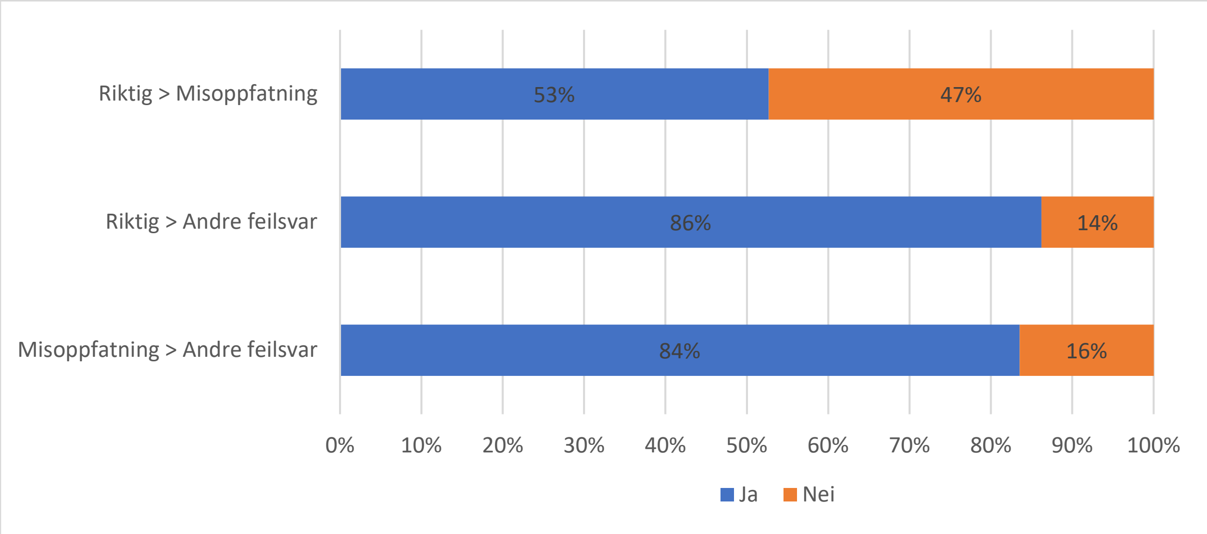
Tabell 13 viser blant annet andelen elever som uttrykker større grad av sikkerhet til riktige svar enn svar som tyder på misoppfatning, for elever som har avgitt begge typene matematiske svar.

Større grad av uttrykt sikkerhet til..	Prosent
riktige svar enn svar som tyder på misoppfatning	53 %
riktige svar enn svar som er registrert som andre feilsvar	86 %
svar som tyder på misoppfatning enn andre feilsvar	84 %

Tabell 13: Sammenligning av uttrykt grad av sikkerhet for elever som har avgitt to typer matematiske svar

Tabell 13 viser at 53 % av elevene som har avgitt både riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, uttrykker større grad av sikkerhet for de riktige svarene. Det vil si at 47 % av de samme elevene uttrykker større eller lik grad av sikkerhet for svar som tyder på misoppfatning, enn riktige svar.

For elever som har avgitt både riktige svar og andre feilsvar, uttrykker 86 % av disse større grad av sikkerhet til de riktige svarene, mens 84 % av elevene som har avgitt svar som tyder på misoppfatning og andre feilsvar, uttrykker større grad av sikkerhet til svar som tyder på misoppfatninger. Figur 21 gir en grafisk framstilling av resultatet i tabell 13.



Figur 21: Sammenligning av uttrykt grad av sikkerhet for elever som har avgitt to typer matematiske svar

Selv om tabell 12 og tabell 13 antyder at elevene uttrykker lik grad av sikkerhet for riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, vil de ikke besvare forskningsspørsmålet mitt om *elever, i misoppfatning, selv er klar over at de er i en misoppfatning* eller ikke. Årsaken til dette er at tabellene fokuserer på hvordan uttrykt grad av sikkerhet er knyttet til ulike matematiske svar, og ikke på hvordan *elever i misoppfatning* (se kapittel 4.3.3) har uttrykt grad av sikkerhet. Tabellene gir likevel informasjon om at elevene utrykker stor grad av sikkerhet til matematiske svar som tyder på misoppfatning, som er viktig å ha med seg i arbeidet med elever. Dette vil bli drøftet videre i drøftingskapitlet.

For å kunne besvare forskningsspørsmålet om *elever, i misoppfatning, selv er klar over at de er i en misoppfatning*, må jeg derfor se på hvordan elever i misoppfatning uttrykker grad av sikkerhet til eget svar. Dette vil bli belyst i de neste delkapitlene.

5.3 Analyser knyttet til de ulike misoppfatningene

De kommende delkapitlene fokuserer på analyser knyttet til de ulike misoppfatningene, der hver misoppfatning er viet et eget delkapittel. For hvert delkapittel blir en oppgave løftet fram og kommentert, der vi vil se på hvordan utvalgte elever, som viser tegn på misoppfatning, har løst oppgavene. I tillegg presenteres svarfordeling og gjennomsnittlig grad av sikkerhet for de ulike svarene.

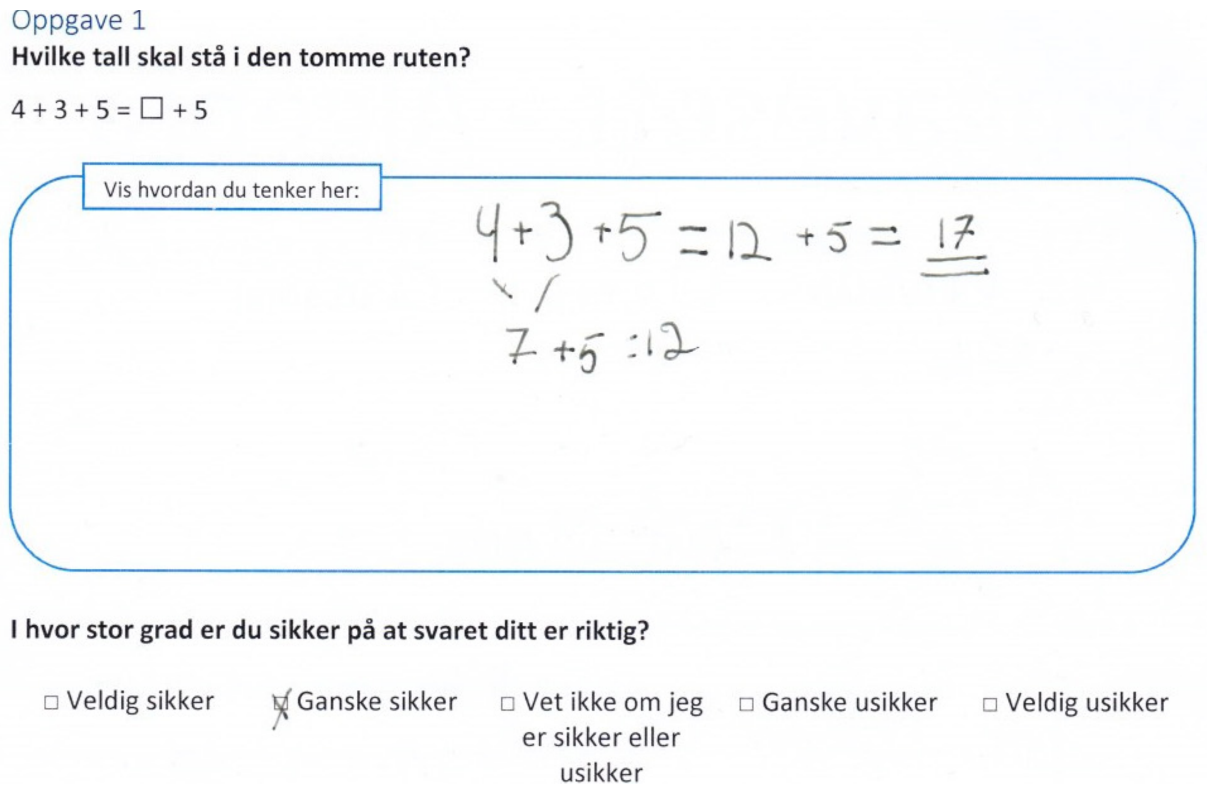
Delkapitlene retter så fokus mot uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatning, og sammenligner uttrykt grad av sikkerhet for elever som ikke er i misoppfatning og for elever med alt riktig. *Elever som ikke er i misoppfatning* består blant annet av elever som har besvart alle spørsmålene riktig, samt elever som har en blanding av riktige svar og svar som tyder på misoppfatning. *Elever med alt riktig er* elever som har besvart alle oppgavene per misoppfatning riktig. Begge disse måtene å gjøre sammenligninger på sikrer uavhengighet mellom variablene, som er en forutsetning for å kunne gjøre ANOVA (kapittel 4.6.2.1). Elever som ikke er i misoppfatning og elever med alt riktig vil ikke bli sammenlignet, siden det ikke er av interesse for å besvare forskningsspørsmålene i denne studien, og de er heller ikke uavhengige av hverandre.

Til slutt i delkapitlene studeres utbredelsen av misoppfatningen, og om den endrer seg i de ulike trinnene. Endring i utbredelse studeres ved å sammenligne elever i misoppfatning med elever som ikke er i misoppfatning og med elever med alt riktig med utgangspunkt i en nullhypotese om at er ingen statistisk signifikante forskjeller i antall elever i misoppfatning ved hjelp av kjikvadrattest (se kapittel 4.6.2.3). For statistisk signifikante forskjeller er 0,05 brukt som signifikansmål (se kapittel 4.6.2.1 og 4.6.2.3)

5.3.1 Tolker likhetstegnet som en kommando

Misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* er beskrevet i kapittel 3.5.1. Kort oppsummert går misoppfatningen ut på at elevene behandler likhetstegnet som en *prosess*. For disse elevene, vil det i mange tilfeller bety at svaret på et regnestykke til venstre for likhetstegnet skal stå til høyre for likhetstegnet.

Oppgavesettet består av tre oppgaver som tester misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando*. Figur 22 viser et elevsvar fra en av disse oppgavene, oppgave 1.



Figur 22: Elevsvar, oppgave 1, som tyder på misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando*

Elevsvaret i figur 22 tyder på eleven har tolket likhetstegnet som en *prosess,* ved at han har addert de tre tallene til venstre for likhetstegnet og fått 12. I tillegg har eleven fortsatt samme tankegang med å addere 5 og 12. Han har selv satt på et nytt likhetstegn og skrevet 17, som det virker som eleven anser som sitt endelige svar. Elevsvaret i figur 22 tyder på at eleven behandler likhetstegnet som et tegn for *her skal svaret stå*, og ikke som en representasjon for likeverdighet.

Både 12 og 17 er høyfrekvente elevsvar i oppgave 1. Tabell 14 viser svarfordeling for de matematiske svarene og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for de ulike svarene.

Elevsvar	Andel	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Riktig	64 %	4,5[6]
Tyder på misoppfatning	31 %	3,8
Andre feilsvar	2 %	2,4
Ubesvart	3 %	-

Tabell 14: Matematiske svar og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet, oppgave 1

Som tabell 14 viser løste omtrent to tredeler av elevene oppgaven riktig, og nesten en tredel avga et svar som tyder på misoppfatning. Gjennomsnittlig grad av sikkerhet til de som svarte riktig er høy, i gjennomsnitt midt mellom *sikker* og *veldig sikker* på skalaen som uttrykt grad av sikkerhet ble registrert. Tilsvarende gjennomsnitt for svar som tyder på misoppfatning er en del lavere, og forskjellen er statistisk signifikant. Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever som avga svar som tyder på misoppfatning er vesentlig høyere, men ikke statistisk signifikant høyere, enn gjennomsnittet for elever som avga andre feilsvar.

Oppgave 1 inngår i flere andre studier, blant annet Falkner et al. (1999), der oppgaven ble presentert for et utvalg amerikanske elever fra 1. til og med 6. klasse. Av 145 elever som besvarte oppgaven på 6. trinn, svarte samtlige elever enten 12 eller 17 (Falkner et al., 1999). Min studie er utført på eldre elever enn i Falkner et al. (1999), og resultatet for oppgaven i min studie er ikke så nedslående. Det er imidlertid fortsatt relativt mange elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i oppgaven.

Svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for oppgave 13 og 16 fins i teknisk rapport (vedlegg 8), mens resultatet av ANOVA på oppgavenivå er i vedlegg 9.

5.3.1.1 Uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen

Elever som er definert i misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando,* avgir svar som tyder på misoppfatning i oppgave 1, 13 og 16. Tabell 15 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen, elever som ikke er i misoppfatningen og elever med alt riktig.

	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Elever i misoppfatning	3,7
Elever som ikke er i misoppfatning	4,1[7]
Elever med alt riktig	4,4[7]

Tabell 15: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *tolker likhetstegn som en kommando*

Uttrykt grad av sikkerhet er lavest for elever i misoppfatning og høyest for elever med alt riktig. ANOVA med utgangspunkt i nullhypotesen om at det er ingen statistisk signifikant forskjell til gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen, sammenlignet med hver av de to andre gruppene, viser at forskjellene er statistisk signifikante for begge gruppene ($p<0,009$ alt riktig og $p<0,001$ ikke i misoppfatning). Resultatet av variasjonsanalyse for alle misoppfatninger finner du i vedlegg 10.

Cohen's d (se kapittel 4.6.2.2) viser at forskjellene i uttrykt grad av sikkerhet er stor ($d=0,90$) når vi sammenligner elever i misoppfatning med elever med alt riktig, og

[6] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til svar som tyder på misoppfatning.
[7] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning.

middels (d=0,45) når vi ser på elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning. Resultat av *Cohen's d*-analysen er i vedlegg 11.

Analysene av uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando*, viser altså at gjennomsnittet for elever i misoppfatning er statistisk signifikant lavere enn elever som ikke er i misoppfatning og enn elever med alt riktig. Effektstørrelsen viser at forskjellene er henholdsvis middels og store.

5.3.1.2 Utbredelse

Tabell 16 viser hvor mange elever i studien som er i misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando*, elever som ikke er i misoppfatningen og elever med alt riktig.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Elever i misoppfatning	48	29	12	7
Elever som ikke er i misoppfatning	312	150	69	93
Elever med alt riktig[8]	158	64	39	55

Tabell 16: Utbredelse misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando*

Som tabell 16 viser, avgir 48 elever i studien svar som tyder på misoppfatning i alle tre oppgavene 1, 13 og 16, som utgjør 13 % av elevene i studien. Over halvparten av elevene i misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* er på 8. trinn.

En kjikvadrattest (se kapittel 4.6.2.3) med utgangspunkt i en nullhypotese om at det er ingen forskjell i antall elever i misoppfatning på de ulike trinnene, viser at forskjellene ikke er statistisk signifikante fra elever som ikke er i misoppfatning. Det er imidlertid statistisk signifikante forskjeller i utbredelse om vi sammenligner elever i misoppfatning med elever med alt riktig.

Analysene for utbredelse for misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* viser at 13 % av alle elevene i studien er i misoppfatningen. Analysene for utbredelse for de ulike trinnene er ikke entydige. Forskjellene er ikke statistisk signifikante når vi sammenligner elever i misoppfatning med elever som ikke er i misoppfatning, mens de er det når elever i misoppfatning sammenlignes med elever med alt riktig. Resultatene av kjikvadrattestene viser at observerte verdier for elever i misoppfatning er høyere enn forventa på 8. trinn, og lavere enn forventa på 10. trinn i begge analysene (vedlegg 12), noe som også støtter at dette er en misoppfatning som er mest synlig på 8. trinn.

5.3.2 Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon

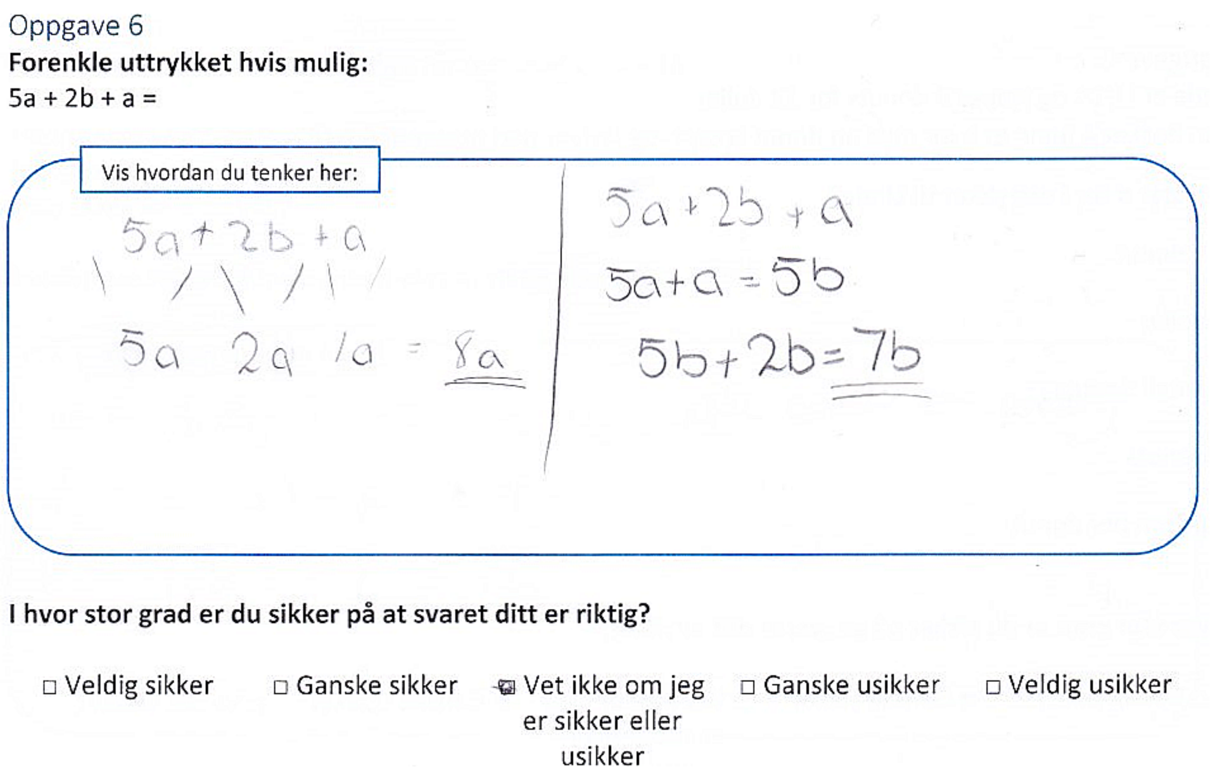
Som navnet tilsier går misoppfatningen ut på at elever tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon. For elever i misoppfatningen vil ikke a + b anses som et mulig svar, men bare som et regneuttrykk som de ønsker å bearbeide ytterligere (se kapittel 3.5.2).

I utgangspunktet var tre oppgaver utviklet for å teste misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*, men faktoranalysen identifiserte kun to av disse innen samme faktor. I den videre analysen er det derfor bare to oppgaver som er kategorisert innen denne misoppfatningen, oppgave 4 og 6.

Figur 23 viser et elevsvar fra oppgave 6, og eleven viser med sitt resonnement at han har flere utfordringer i algebra. Blant annet er det interessant å se at *a* blir tilegnet to forskjellige egenskaper av eleven innad i oppgaven.

---

[8] Utbredelsen er statistisk signifikant forskjellig fra elever i misoppfatning.



Figur 23: Elevsvar, oppgave 6, som tyder på misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*

Det som gjør oppgaven interessant i dette delkapitlet, er at eleven har delt svarruta si i to, og behandler variabelen a til venstre og variabelen b til høyre. At eleven deler svarruta i to separate deler, og har satt to streker under både 8a og 7b, tolker jeg som at eleven ikke ser på for eksempel 8a + 7b som et matematisk svar, og at han er i misoppfatningen *svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon*. At eleven også avgir et svar som tyder på misoppfatning i oppgave 4, som tester samme misoppfatning, støtter denne tolkningen.

Svar som vist i figur 23, i tillegg til 6ab og 7ab, er svar som er kodet som misoppfatning i oppgave 6. Tabell 17 viser svarfordeling for de matematiske svarene og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for de ulike svarene i oppgave 6.

Elevsvar	Andel	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Riktig	54 %	4,0[5]
Tyder på misoppfatning	10 %	3,0
Andre feilsvar	10 %	2,2[6]
Ubesvart	27 %	-

Tabell 17: Matematiske svar og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet, oppgave 6

Tabell 17 viser at 10 % av elevene avga svar som tyder på misoppfatning i oppgave 6, mens litt over halvparten av elevene løste oppgaven riktig. Oppgaven er en av oppgavene med høyest andel svar som er registrert som andre feilsvar (se teknisk rapport, vedlegg 8). I tillegg var det en god del av elevene som ikke besvarte oppgaven. Dette er et gjennomgående resultat i studien og vil bli drøftet i kapittel 6.

[5] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til svar som tyder på misoppfatning.

Tabellen viser også at elevene som svarte riktig har høyest gjennomsnittlig grad av sikkerhet til eget svar, mens elever som har avgitt andre feilsvar har i gjennomsnitt lavest uttrykt grad av sikkerhet til eget svar. Sammenlignet med elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning, er forskjellene til gjennomsnittet for både de som har svart riktig og de som har avgitt andre feilsvar statistisk signifikante (se vedlegg 10).

I utgangspunktet skulle oppgavelyden i oppgave 6 være identisk med en oppgave fra Brekke et al. (2000), men jeg må ha gjort feil da jeg utviklet oppgavesettet. Ordlyden i Brekke et al. (2000) er $2a + 5b + a$, mens i min studie er den $5a + 2b + a$. Jeg tror imidlertid ikke endringen påvirker oppgaven i særlig grad og velger derfor allikevel å sammenligne resultatet. I Brekke et al. (2000) løste 86 % av elevene på 10. trinn oppgaven riktig og 11 % avga et svar som tyder på misoppfatning. Av elevene på 10. trinn i min studie var andelen som avga svar som tyder på misoppfatning 3 %.

For svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar på oppgave 4 som også tester denne misoppfatning, henvises det til teknisk rapport (vedlegg 8).

5.3.2.1 Uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen

Elever som er definert i misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*, har avgitt svar som tyder på misoppfatning i både oppgave 4 og 6. Tabell 18 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen, elever som ikke er i misoppfatningen og elever med alt riktig.

	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Elever i misoppfatning	3,5
Elever som ikke er i misoppfatning	3,7
Elever med alt riktig	4,0

Tabell 18: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*

Gjennomsnittlig grad av sikkerhet er lavest for elever i misoppfatning, og høyest for elever med alt riktig, men forskjellene er ikke statistisk signifikante (se vedlegg 10). *Cohen's d* viser imidlertid at forskjellen mellom elever i misoppfatning og elever med alt riktig er middels (d=0,7), mens forskjellene mellom elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning er liten (d=0,22) (se vedlegg 11).

Selv om gjennomsnittlig grad av sikkerhet til eget svar er lavest for elever i misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* er forskjellene ikke statistisk signifikant sammenlignet med andre elever. Forskjellene mellom elever i misoppfatning og elever med alt riktig, er derimot over middels ifølge effektanalysen.

5.3.2.2 Utbredelse

Antall elever i misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* antall elever som ikke er i misoppfatningen og elever med alt riktig er vist i tabell 19.

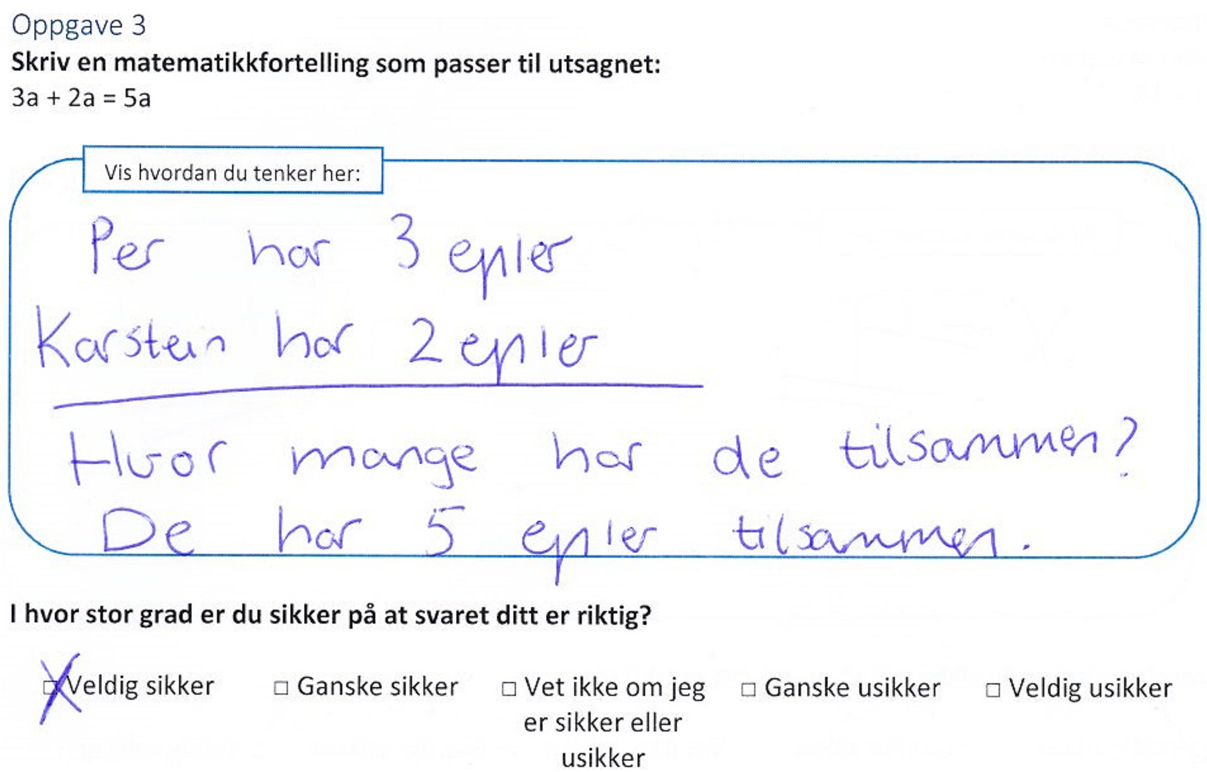
	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Elever i misoppfatning	6	6	0	0
Elever som ikke er i misoppfatning	296	129	72	95
Elever med alt riktig	174	54	49	71

Tabell 19: Utbredelse misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando*

Tabell 19 viser at alle elevene i studien som er i misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* er på 8. trinn. Til sammen utgjør disse elevene 2 % av elevene i studien. Om den lave andelen er riktig, eller om den skyldes svakheter med oppgavene i studien, blir drøftet i kapittel 6. Det lave antallet elever i misoppfatning gjør at det ikke er mulig å gjennomføre en kjikvadrattest for å teste om utbredelsen endrer seg utfra hvilket klassetrinn elevene går på, siden alle forventa verdier for elever i misoppfatning er under tre (se forutsetninger for kjikvadrattest i kapittel 4.6.2.3). Siden alle elevene i misoppfatningen er på 8. trinn, er det uansett en indikator på at misoppfatningen er mer frekvent for elever på det laveste trinnet i studien. Jeg vil imidlertid presisere at antall elever som deltok i studien var høyest på 8. trinn.

5.3.3 Tolker bokstaver som en forkortelse for et objekt

Elever i misoppfatningen *tolker bokstaver som en forkortelse for et objekt,* ser ikke bokstaver i algebra som variabler, men som at de står for et objekt (se kapittel 3.5.3). Oppgavesettet består av fire oppgaver som tester misoppfatningen, og figur 24 viser elevsvar fra en av disse oppgavene, oppgave 3.


Oppgave 3

Skriv en matematikkfortelling som passer til utsagnet:

3a + 2a = 5a

Vis hvordan du tenker her:

Per har 3 epler
Karstein har 2 epler
Hvor mange har de tilsammen?
De har 5 epler tilsammen.

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☒ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Figur 24: Elevsvar, oppgave 3, som tyder på misoppfatningen *tolker bokstaver som en forkortelse for et objekt*

Elevsvaret i figur 24 representerer et typisk elevsvar, der *a* blir tolket som en forkortelse eller en representasjon for et objekt. Andre objekter som er brukt for a i oppgave 3 er appelsiner og epler. I tillegg har noen elever en forklaring der *a* blir tolket som et selvstendig objekt, som for eksempel *3 a'er møtte 2 a'er, så ble de 5 a'er*. Svar som er registrert som andre feilsvar er stort sett de som beskriver regneprosedyrer.

Tabell 20 viser svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet i oppgave 3.

Elevsvar	Andel	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Riktig	5 %	3,3
Tyder på misoppfatning	48 %	3,7
Andre feilsvar	4 %	1,7[5]
Ubesvart	44 %	-

Tabell 20: Matematiske svar og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet, oppgave 3

Som tabell 20 viser, svarer halvparten av elevene i studien svar som tyder på misoppfatning i oppgave 3, mens 5 % besvarte oppgaven riktig og 4 % av elevsvarene er registrert som andre feilsvar. Elevene som avgir svar som tyder på misoppfatning uttrykker også i høyest grad av sikkerhet til eget svar, med et gjennomsnitt på 3,7. Det tilsvarer nesten *sikker,* på skalaen elevene uttrykte grad av sikkerhet på. Gjennomsnittlig grad av sikkerhet for elever som avgir svar som tyder på misoppfatning, er statistisk signifikant høyere enn elever som avgir andre feilsvar (vedlegg 9).

Oppgave 3 er den som har høyest ubesvartandel i studien. En av årsakene til dette kan være at begrepet *matematikkfortelling* er ukjent for noen elever. Som beskrevet i kapittel 4.5, var jeg til stede under datainnsamlingen og dermed tilgjengelig for spørsmål. Noen elever spurte om konkret begrepet matematikkfortelling, men det kan tenkes at flere elever var usikker på dette uten å spørre. Høy ubesvartandel som et generelt fenomen i studien, er drøftet i kapittel 6.

En oppgave med lik ordlyd inngår også i Brekke et al. (2000), også der med høy andel ubesvart med blant annet 31 % på 10. trinn. Andel svar som tyder på misoppfatning og elever som svarer riktig, samsvarer godt med resultatene fra Brekke et al. (2000), der 41 % av elevene på 8. og 47 % av elevene på 10. trinn avga svar som tyder på misoppfatning. Tilsvarende tall for riktig svar er 5 % og 7 % (Brekke et al., 2000).

For svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar på oppgave 8, 12 og 19 som tester samme misoppfatning, henvises det til teknisk rapport (vedlegg 8). Oppgave 12 og 19 har også høy andel ubesvart, med henholdsvis 27 % og 34 %, mens i oppgave 8 avgir 86 % av elevene svar som tyder på misoppfatning.

5.3.3.1 Uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen

Elever som er definert i misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelser for objekt,* har avgitt svar som tyder på misoppfatning i alle fire oppgavene 3, 8, 12 og 19. Tabell 21 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen, elever som ikke er i misoppfatning og elever med alt riktig.

	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Elever i misoppfatning	4,0
Elever som ikke er i misoppfatning	3,6[6]
Elever med alt riktig	3,5

Tabell 21: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelser for objekt*

Elever i misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for objekt,* uttrykker høyest grad av sikkerhet til eget svar, og er statistisk signifikant forskjellig fra elever som ikke

[5] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til svar som tyder på misoppfatning.
[6] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning.

er i misoppfatning (p<0,02, se vedlegg 10). Tabell 21 viser også at gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever som ikke er i misoppfatning, er høyere enn for elever som har besvart alle oppgavene riktig. Dette kan trolig forklares med at det er bare én av 368 elever som har besvart oppgave 3, 8, 12 og 19 riktig. Gjennomsnittet er imidlertid ikke statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning (p>0,513).

For elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning, viser effektsanalysen *Cohen's d* at forskjellene tilsvarer liten effekt (d=0,22). På grunn av at det bare er én elev med alt riktig, og dermed ikke er mulig å beregne et standardavvik for elever med alt riktig, er det heller ikke mulig å beregne effektstørrelse.

Analysene av uttrykt grad av sikkerhet til misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for et objekt,* viser at elevene i misoppfatning uttrykker høyest grad av sikkerhet til eget svar. At forskjellene også er statistisk signifikante sammenlignet med elever som ikke er i misoppfatning er oppsiktsvekkende, og vil bli drøftet i kapittel 6.

5.3.3.2 Utbredelse

Tabell 22 viser antall elever i studien som er i misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for et objekt,* hvor mange som ikke er i misoppfatningen og med alt riktig.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Elever i misoppfatning	35	20	8	7
Elever som ikke er i misoppfatning	321	160	72	89
Elever med alt riktig	1	0	0	1

Tabell 22: Utbredelse misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for et objekt*

Av 368 elever svarer 35 av disse svar som tyder på misoppfatning i alle fire oppgavene 3, 8, 12 og 19. Dette tilsvarer 10 % av elevene i studien, og en stor del av elevene i misoppfatning tilhører 8. trinn. Den ene eleven med alt riktig er på 10. trinn.

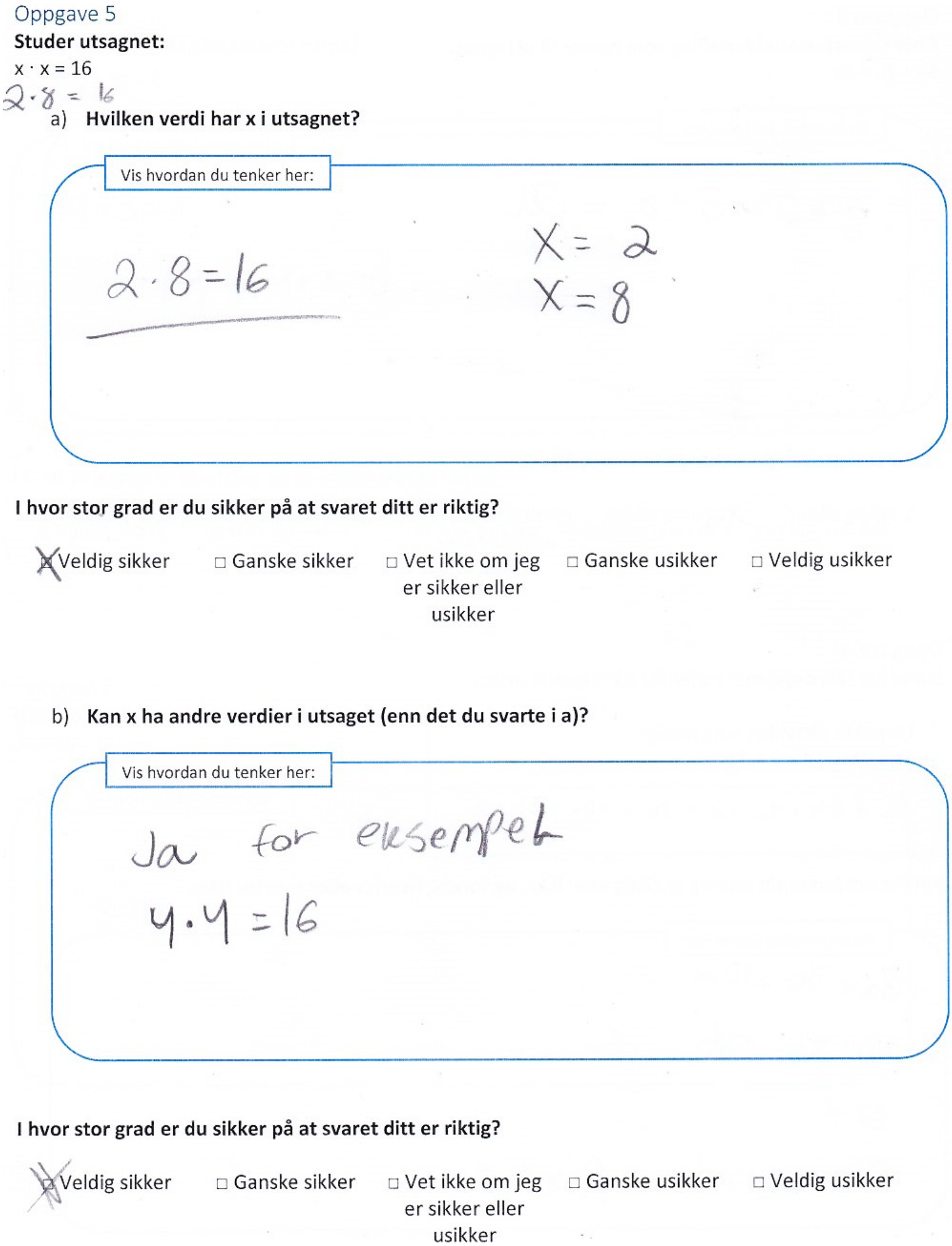
Kjikvadrattesten viser at det ikke er statistisk signifikante forskjeller mellom elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning på de ulike trinnene (vedlegg 12). Det er ikke være mulig å undersøke om utbredelsen av elever og elever med alt riktig er signifikant forskjellige på de ulike trinnene, på grunn av få elever med alt riktig.

Analysene viser at 10 % av elevene i studien er i misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for et objekt*. Det er større prosentandel på 8. trinn som er i misoppfatningen enn på 10. trinn, men det er ingen statistisk signifikant forskjellige mellom elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning på de ulike trinnene.

5.3.4 En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall

Elever i misoppfatningen tenker at bokstaver skjuler tall, noe som gjør at samme bokstav kan ha flere verdier i samme oppgave (se kapittel 3.5.4). I utgangspunktet var det utviklet tre oppgaver for å teste misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*, men på bakgrunn av faktoranalysen (5.1.2), ble i tillegg oppgave 11 kategorisert innen misoppfatningen, sammen med oppgave 5, 7 og 17.

Figur 25 viser et elevsvar fra oppgave 5, der resonnementet til eleven tyder på at han tolker oppgaven til at den spør etter to faktorer som gir produkt 16, og svarer at x kan være 2 og 8. Eleven viser at også 4 er riktig verdi for x i delspørsmål b. At eleven skriver $4 \cdot 4$ og ikke $x = 4$, er interessant, og dette kan tyde på at han også her leter etter to tall som har produkt 16, men kan også skyldes at eleven er mer ukjent med den type notasjon.



Oppgave 5

Studer utsagnet:

$x \cdot x = 16$

$2 \cdot 8 = 16$

a) **Hvilken verdi har x i utsagnet?**

Vis hvordan du tenker her:

$2 \cdot 8 = 16$

$x = 2$

$x = 8$

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☒ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

b) **Kan x ha andre verdier i utsaget (enn det du svarte i a)?**

Vis hvordan du tenker her:

Ja for eksempel

$4 \cdot 4 = 16$

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☒ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Figur 25: Elevsvar, oppgave 5, som tyder på misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*

Andre elevsvar som tyder på misoppfatning i oppgave 5 er at *x* kan være *1* og *16*. Alle elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning, i enten deloppgave 5a eller 5b, er kodet som tegn på misoppfatning. Det vil si at elever som for eksempel har svart *4* i

5a, og *8* og *2* i 5b, er kodet som tegn på misoppfatning. Uttrykt grad av sikkerhet for oppgave 5, er et gjennomsnitt av uttrykt grad av sikkerhet i 5a og 5b.

Tabell 23 viser svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet i oppgave 5.

Elevsvar	**Andel**	**Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet**
Riktig	45 %	4,3[5]
Tyder på misoppfatning	48 %	4,0
Andre feilsvar	1 %	2,9
Ubesvart	6 %	-

Tabell 23: Matematiske svar og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet, oppgave 5

Omtrent halvparten av elevene i studien avgir svar som tyder på misoppfatning i oppgave 5, mens resten av elevene stort sett løser oppgaven riktig. Elever som løser oppgaven riktig har i gjennomsnitt høyest uttrykt grad av sikkerhet til eget svar, mens elevene som avgir svar som tyder på misoppfatning, har i gjennomsnitt har noe lavere uttrykt grad av sikkerhet. Begge disse gjennomsnittene tilsvarer over *sikker* på at svaret stemmer ut fra skalaen som er brukt til å registrere uttrykt grad av sikkerhet. Forskjellene mellom gjennomsnittet for elever som svarer riktig og elever som avga svar som tyder på misoppfatning er statistisk signifikante (vedlegg 9).

Oppgave 5 er egenutviklet til denne studien, og resultatet kan ikke sammenlignes med andre studier. For svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar på oppgave 7, 11 og 17 som tester samme misoppfatning, henvises det til teknisk rapport (vedlegg 8). Alle oppgavene har over 30 % svar som tyder på misoppfatning.

5.3.4.1 Uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen

Tabell 24 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall,* elever som ikke er i misoppfatning og elever med alt riktig.

	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Elever i misoppfatning	4,0
Elever som ikke er i misoppfatning	3,9
Elever med alt riktig	4,5[6]

Tabell 24: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*

Elever med alt riktig, har et gjennomsnitt for uttrykt grad av sikkerhet til eget svar på 4,5 som er et av det høyest registrerte gjennomsnittet for noen gruppe som blir undersøkt i studien. Gjennomsnittet for elever i misoppfatning er også høyt, men statistisk signifikant lavere enn for elever med alt riktig. Forskjellene mellom elever i misoppfatning og de som ikke er i misoppfatning er ikke statistisk signifikante (vedlegg 10).

Effektanalysen støtter at forskjellene er store (d=1,01) for elever med alt riktig og elever i misoppfatning. For elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning er forskjellene liten, men tett opp mot grensen til middels (d=0,47) (se vedlegg 11).

[5] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til svar som tyder på misoppfatning.

[6] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning.

I faktoranalysen ble også oppgave 11 (se kapittel 3.5.7) inkludert i denne misoppfatningen. L. R. Booth (1983) antyder at elever som erstatter bokstaver med tallenes plassering i alfabetet, ikke har er en sterk oppfatning av at det er riktig, men at det heller er et forsøk på å knytte mening til bokstavene. I oppgave 11, uttrykker elever som avgir svar som tyder på misoppfatning høyere grad av sikkerhet, enn elever som svarer riktig, og elever som avgir andre feilsvar (se teknisk rapport, vedlegg 8). Variasjonsanalysen (vedlegg 9), viser at forskjellen til gjennomsnittet for elever som avgir svar som tyder på misoppfatning, og elever som avgir andre feilsvar, er statistisk signifikant. Mine funn støtter dermed ikke antydningen til L. R. Booth (1983).

Ser vi på misoppfatningen der oppgave 11 inngår, uttrykker elever i misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall,* høy grad av sikkerhet til eget svar. Riktig nok viser analysene at forskjellene mellom gjennomsnittet for elever i misoppfatning og elever med alt riktig er stort, men gjennomsnittet for elever i misoppfatning og er høyere enn for elever som ikke er i misoppfatning. Analysene tyder dermed på at elever i misoppfatningen ikke uttrykker lavere grad av sikkerhet til eget svar enn de fleste andre elever i studien.

5.3.4.2 Utbredelse

Tabell 25 viser antall elever i studien som er i misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall,* hvor mange som ikke er i misoppfatningen og hvor mange elever med alt riktig.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Elever i misoppfatning	38	21	8	9
Elever som ikke er i misoppfatning	250	115	60	75
Elever med alt riktig[7]	17	2	8	7

Tabell 25: Utbredelse misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*

Til sammen svarer 38, 10 %, av elevene svar som tyder på misoppfatning på oppgave 5, 7, 11 og 17, mens 17 elever løste alle disse oppgavene riktig. Også for denne misoppfatningen er over halvparten av elevene i misoppfatningen på 8. trinn.

Kjikvadrattesten viser at forskjellene i tabell 25 mellom elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning, ikke er statistisk signifikante. Forskjellene mellom elever i misoppfatning og elever med alt riktig, er imidlertid statistisk signifikante (vedlegg 12). Det er imidlertid viktig å påpeke at to av de forventa verdiene for riktig svar er under fem i analysen, som utgjør over 20 % av de totale forventa verdiene (se kapittel 4.6.2.3). Begge verdiene er 4,95, så jeg velger å inkludere testen i analysen.

Analysene viser at 10 % av elevene er i misoppfatningen *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*. Når det gjelder utbredelse på de ulike trinnene, er ikke analysene entydige. Forskjellene mellom elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning er ikke statistisk signifikante. Sammenlignet med elever med alt riktig er forskjellene for elever i misoppfatning statistisk signifikante, men her er datagrunnlaget noe tynt. Sammenligner vi prosentandelen elever i misoppfatning på de ulike trinnene, er de lik (11 % på 8. trinn, 10 % på 9. trinn og 9 % på 10. trinn). Prosentandelen er også relativt lik for elever som ikke er i misoppfatning (62 %, 72 % og 74 %), mens resultatet varierer noe mer for elever med riktig (1%, 10 % og 7 %).

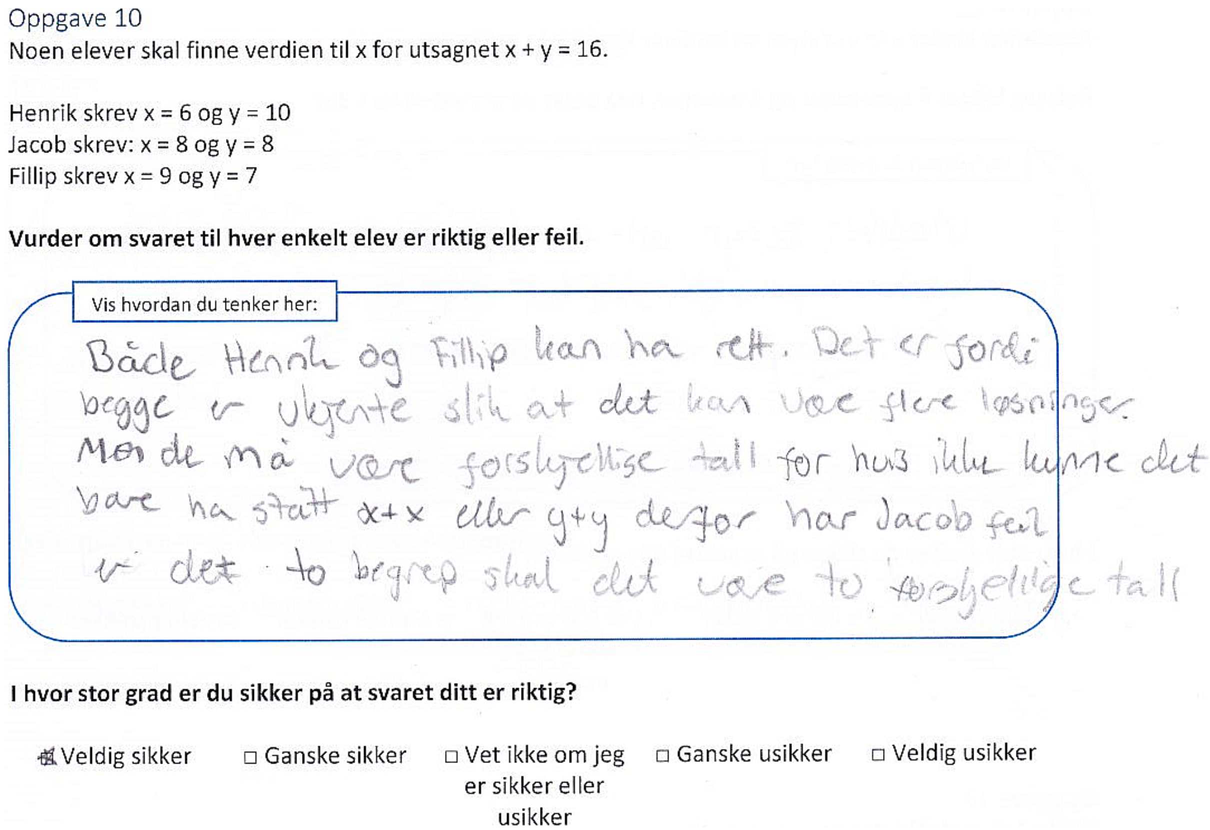
[7] Utbredelsen er statistisk signifikant forskjellig fra elever i misoppfatning.

5.3.5 Ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi

Oppgavesettet består av tre oppgaver som testet misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi*.

Figur 26 viser et elevsvar fra en av disse oppgavene, oppgave 10, der elevsvaret tyder på at eleven har en forståelse for at bokstaver representerer variabler, eller i alle fall konkrete ukjente, men eleven skriver tydelig at så lenge det er snakk om to ulike bokstaver (*begrep*), *skal det være to forskjellige tall*. For denne eleven blir dermed Jacob sitt svar ikke betegnet som riktig.

Svar der elever viser en regnefeil som gjør at de finner ut at Henrik eller Fillip har svart feil, i tillegg til at de begrunner at svaret til Jacob er feil på lignende måte som i figur 26, er også kodet som tegn på misoppfatning. I tillegg til svar som tyder på misoppfatningen, er det en del elever som svarer at bare Jacob har riktig svar i oppgave 10. Disse elevene kan tenke at bokstaver ikke kan ha ulike verdier i samme regnestykke, men på grunn av plassbegrensning i studien har jeg ikke undersøkt dette nærmere.



Oppgave 10

Noen elever skal finne verdien til x for utsagnet x + y = 16.

Henrik skrev x = 6 og y = 10
Jacob skrev: x = 8 og y = 8
Fillip skrev x = 9 og y = 7

Vurder om svaret til hver enkelt elev er riktig eller feil.

Vis hvordan du tenker her:

Både Henrik og Fillip kan ha rett. Det er fordi begge er ukjente slik at det kan være flere løsninger Men de må være forskjellige tall for hvis ikke kunne det bare ha stått x+x eller y+y derfor har Jacob feil er det to begrep skal det være to forskjellige tall

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☒ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Figur 26: Elevsvar, oppgave 10, som tyder på misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi*

Svar som er kodet som andre feilsvar, er stort sett de som bare sjekker om svaret til Henrik stemmer, og dermed konkluderer med at Henrik har løst oppgaven riktig uten å sjekke svarene til Jacob og Fillip. Tabell 26 viser svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet i oppgave 10

Elevsvar	Andel	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Riktig	40 %	3,7
Tyder på misoppfatning	24 %	3,8
Andre feilsvar	12 %	2,8[5]
Ubesvart	25 %	-

Tabell 26: Matematiske svar og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet, oppgave 10

Som tabell 26 viser, svarer nesten en firedel av elevene at Henrik og Fillip har riktig svar, mens Jacob har svart feil. Disse elevene har i gjennomsnitt høyere uttrykt grad av sikkerhet til eget svar sammenlignet med elever som svarer riktig, og elever som har andre feilsvar. Sammenlignet med elever som avgir andre feilsvar, er gjennomsnittet for elever som avgir svar som tyder på misoppfatning, statistisk signifikant høyere.

Lignende oppgave inngår i flere studier, blant annet i Fujii (2003) og Steinle, Gvozdenko, Price, Stacey og Pierce (2009). Fujii (2003) har en kvalitativ tilnærming til oppgaven og utfører intervju med elever på bakgrunn av oppgaven. Steinle et al. (2009) tester oppgaven sammen med en oppgave som ligner oppgave 7 i denne studien på 367 australske 7. og 8. trinnselever, der 87 av elevene avgir tilsvarende svar som at Jacob har feil svar. Dette utgjør 24 % av elevene, altså lik andel som i min studie.

For svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar på oppgave 15 og 18 som tester samme misoppfatning, henvises det til teknisk rapport (vedlegg 8). Felles for alle oppgavene innen denne misoppfatningen er at gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar er høyest for svar som tyder på misoppfatning.

5.3.5.1 Uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen

Tabell 27 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen, elever som ikke er i misoppfatning og elever med alt riktig.

	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Elever i misoppfatning	4,1
Elever som ikke er i misoppfatning	3,1[6]
Elever med alt riktig	3,2[7]

Tabell 27: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi har avgitt*

Tabellen viser at elever som er i misoppfatning uttrykker høyest grad av sikkerhet til eget svar, sammenlignet med både elever med alt riktig og elever som ikke er i misoppfatning. ANOVA (vedlegg 10), viser at forskjellene til gjennomsnittene er statistisk signifikante ($p<0,001$). Effektanalysen viser at forskjellene mellom gjennomsnittet for elever i misoppfatning og de andre elevene er stor ($d=0,88$ sammenlignet med riktig svar, og $d=1,11$ sammenlignet med andre feilsvar).

Når vi ser på uttrykt grad av sikkerhet til eget svar for oppgaver i misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi,* viser resultatet av analysene at gjennomsnittet for elever i misoppfatning er statistisk signifikant høyere enn for andre elever. Dette tyder på at elevene som er i misoppfatningen har en sterk tro på at svaret er riktig.

[5] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til svar som tyder på misoppfatning.
[6] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning.

5.3.5.2 Utbredelse

Hvor mange elever som er i misoppfatningen, samt hvor mange som ikke er i misoppfatningen og hvor mange med alt riktig er vist i tabell 28.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Elever i misoppfatning	40	13	11	13
Elever som ikke er i misoppfatning	276	135	65	76
Elever med alt riktig	44	15	15	14

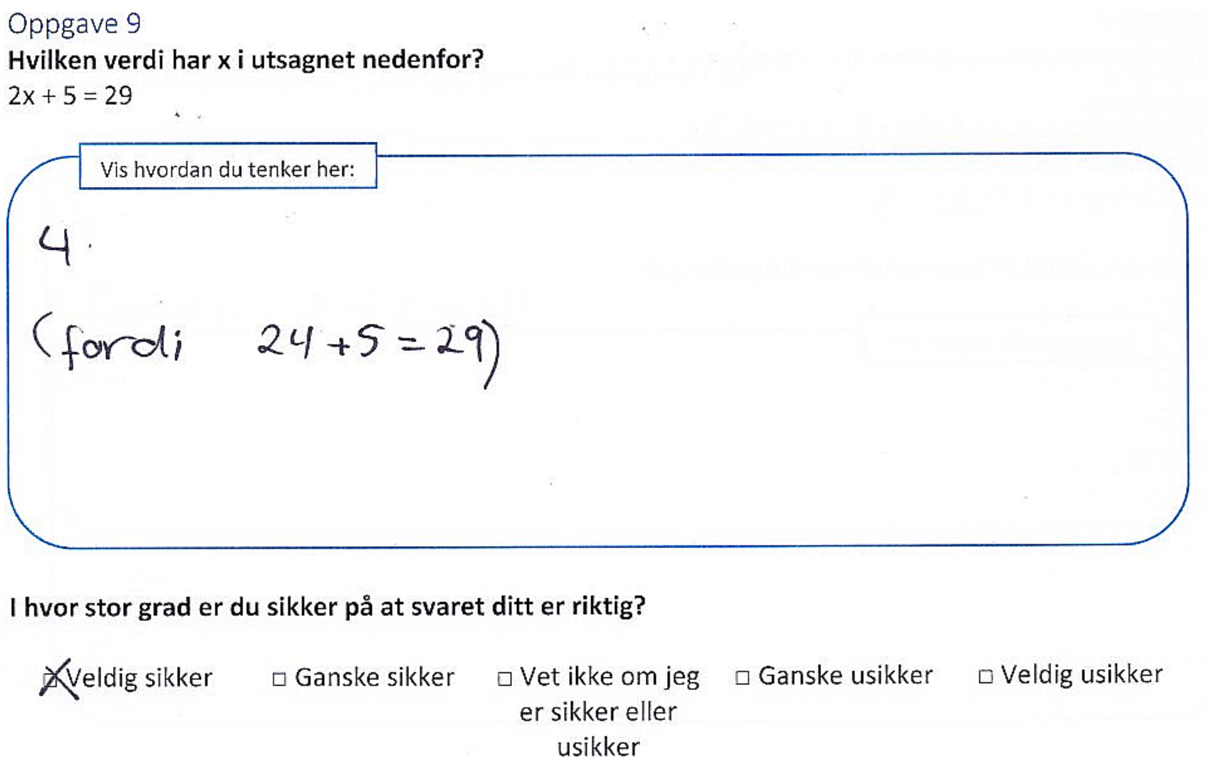
Tabell 28: Utbredelse misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi har avgitt*

Som tabell 28 viser er 40 av totalt 368 elever i misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi.* Dette tilsvarer 11 % av elevene i studien. Elevene i misoppfatning er jevnt fordelt på de ulike trinnene. Det samme er elever med alt riktig. Kjikvadrattesten viser at det er ingen statistisk signifikante forskjeller mellom elever i misoppfatning på de ulike trinnene, sammenlignet med andre grupper i datamaterialet (vedlegg 12).

Analysene av utbredelse for misoppfatningen *ulike bokstaver kan ikke ha samme verdi* viser at prosentandelen elever i misoppfatning på 10. trinn er større enn på 8. trinn (13 % mot 9 %), men at forskjellene er ikke statistisk signifikante.

5.3.6 Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet

Oppgavesettet inneholder fire oppgaver, 3, 9 og 14, som er utviklet til å teste misoppfatningen. Figur 22 viser elevsvar fra oppgave 9.



Figur 27: Elevsvar, oppgave 9, som tyder på misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*

Eleven bruker ikke så mange ord i resonnementet sitt i figur 27, men elevens matematiske tenkning kommer tydelig fram. Eleven svarer at x må være 4 og erstatter x med 4 i *2x* og får 24. I praksis betyr det at eleven tolker *2x* som *2 på tierplass og x på enerplass,* og ikke som *2* multiplisert med x, en tankegang som gir 4 til svar.

Tabell 29 viser svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet i oppgave 10. Elevsvar der eleven viser at han ser på *x* som en plassholder for posisjonssystemet, er kodet som tegn på misoppfatning, selv om elevsvaret inneholder en regnefeil. På samme måte har elevsvar der eleven viser at han tolker notasjonen *2x* som 2 multiplisert med variabelen x, fått svaret sitt kodet som riktig, uavhengig av resten av elevens svar.

Elevsvar	Andel	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Riktig	44 %	4,5[5]
Tyder på misoppfatning	29 %	4,0
Andre feilsvar	9 %	2,8[6]
Ubesvart	18 %	-

Tabell 29: Matematiske svar og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet, oppgave 9

Av 368 elever som deltok i studien, svarer 29 % av elevene *4* i oppgave 9, mens 44 % løste oppgaven riktig. Elever som svarte riktig har i gjennomsnitt høy uttrykt grad av sikkerhet til eget svar, og tilsvarer nesten midt imellom *sikker* og *veldig sikker* på skalaen eleven brukte til å uttrykke grad av sikkerhet. Gjennomsnittet for elever i misoppfatning tilsvarer *sikker* på samme skala. Elever som svarer riktig har statistisk signifikant høyere gjennomsnitt enn elever som avgir svar som tyder på misoppfatning, mens gjennomsnittet for de med andre feilsvar er statistisk signifikant lavere enn for elever som avgir svar som tyder på misoppfatning.

På grunn av at misoppfatningen ikke er godt dokumentert i tidligere forskning (se kapittel 3.5.6), er oppgavene som tester denne misoppfatningen egenutviklet. Resultatet på oppgavene kan derfor ikke sammenlignes med andre studier. For svarfordeling og gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar på oppgave 2 og 14, se vedlegg 8.

5.3.6.1 Uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen

Tabell 30 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatningen, elever som ikke er i misoppfatning og elever med alt riktig.

	Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet
Elever i misoppfatning	3,9
Elever som ikke er i misoppfatning	3,9
Elever med alt riktig	4,6[6]

Tabell 30: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*

Elever som besvarer alle tre oppgavene riktig har i gjennomsnitt høyest uttrykt grad av sikkerhet for alle elevgruppene som er belyst gjennom analysene knyttet til de ulike misoppfatningene. Gjennomsnittet er også statistisk signifikant høyere enn for elever i misoppfatning. Elever som ikke er i misoppfatning har likt gjennomsnitt som elever i misoppfatning, og forskjellen er ikke statistisk signifikant (se vedlegg 10).

[5] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til svar som tyder på misoppfatning.
[6] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning.

Forskjellen i gjennomsnittet for elever med alt riktig og elever i misoppfatning, blir betegnet som stor i effektanalysen (d=1,18). Dette er den største forskjellen mellom elever med alt riktig og elever i misoppfatningen, som er registrert i analysene (se vedlegg 11). Dette tyder på at det er store forskjeller mellom uttrykt grad av sikkerhet for elever med alt riktig og elever som er i misoppfatningen. Det er imidlertid ingen forskjeller mellom elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning, når det gjelder uttrykt grad av sikkerhet.

5.3.6.2 Utbredelse

Tabell 31 viser hvor mange elever i studien som er i misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*, elever som ikke er i misoppfatningen og elever med alt riktig.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Elever i misoppfatning	25	24	1	0
Elever som ikke er i misoppfatning[8]	326	152	78	96
Elever med alt riktig[7]	121	29	35	57

Tabell 31: Utbredelse misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*

Til sammen er 25 elever i misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*, mens 121 elever løste alle tre oppgavene knyttet til misoppfatningen riktig. Elever i misoppfatningen utgjør 7 %, mens elever med alt riktig utgjør en tredel.

Som tabell 31 viser tilhører alle elevene i misoppfatningen, bortsett fra en elev på 8. trinn. Kjikvadrattesten viser at utbredelsen av elever i misoppfatning er statistisk signifikant forskjellig fra utbredelsen av elever som ikke er i misoppfatning, og elever med alt riktig (vedlegg 12). Testen viser at det er langt færre observerte elever på 9. og 10. trinn enn forventa som er i misoppfatningen, mens det er langt flere observerte elever enn forventa som har alt riktig, eller som ikke er i misoppfatning på de samme trinnene.

Analysene for utbredelse av misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet,* tyder på, selv om grunnlaget bare er 368 elever, at misoppfatningen ikke angår elevene på de høyeste trinnene i studien. Misoppfatningen bygger på en overgeneralisering fra aritmetikken, og resultatene i denne studien tyder på at elevene ikke holder fast i misoppfatningen etter hvert som de blir eldre. Dette kan komme av at elevene på disse trinnene har mer erfaring med notasjoner i algebra enn elevene på 8. trinn har, selv om elevene på 8. trinn ifølge læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2006) skal ha god erfaring med slik type notasjon som brukes i oppgavene som tester misoppfatningen.

5.4 Oppsummering

Jeg vil her kort oppsummere resultatene fra analysene som er gjort i de ulike delkapitlene i 5.3. I tillegg vil jeg rette fokus på elevene i studien, og se hvor stor andel av de som er i misoppfatninger. Resultatene som presenteres her vil bli nærmere drøftet i kapittel 6.

[7] Utbredelsen er statistisk signifikant forskjellig fra elever i misoppfatning.

5.4.1 Uttrykt grad av sikkerhet

Tabell 32 viser gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet til eget svar per misoppfatning, for elever i misoppfatning, elever som ikke er i misoppfatning og elever med alt riktig. Uthevete verdier er de som har høyest gjennomsnitt per misoppfatning.

	Elever i misoppfatning	**Elever ikke i misoppfatning**	**Elever med alt riktig**
tolker likhetstegnet som en kommando	3,7	4,1[6]	**4,2**[7]
tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon	3,5	3,7	**4,4**[7]
tolker bokstaver som forkortelser for objekt	**4,0**	3,6[7]	3,5[7]
tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	4,0	3,9	**4,5**[7]
tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	**4,1**	3,1[7]	3,2[7]
tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	3,9	3,9	**4,6**[7]

Tabell 32: Gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet per misoppfatning

Elever i misoppfatningene, *tolker bokstaver som forkortelse for objekt,* og *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi,* uttrykker i gjennomsnitt høyere grad av sikkerhet enn elever med alt riktig på de samme oppgavene. Forskjellene til gjennomsnittene er også statistisk signifikant forskjellig for begge disse misoppfatningene (vedlegg 10).

Sammenligner vi elever i misoppfatning med elever som ikke er i misoppfatning, er gjennomsnittet for elever i misoppfatning høyere for tre misoppfatninger. For to av disse er forskjellene statistisk signifikante. For misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet,* er gjennomsnittet for elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning likt.

5.4.2 Utbredelse

Jeg vil i dette delkapitlet belyse utbredelse gjennom to ulike vinklinger. Den ene vinklingen retter fokus på elever i misoppfatning, og oppsummerer funnene i kapittel 5.3. I tillegg vil jeg her se på hvor mange av elevene, på tvers av misoppfatningene, som er i misoppfatninger. Den andre vinklingen ser på *elever som viser tegn på misoppfatning*, som i kapittel 4.3.3 ble definert som elever som avgir svar i minst halvparten av oppgavene som tester samme misoppfatning.

5.4.2.1 Elever i misoppfatning

Andelen elever i de ulike misoppfatningene studien beskriver er oppsummert i tabell 33.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
tolker likhetstegnet som en kommando	13 %	16 %	14 %	7 %
tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon	2 %	3 %	0 %	0 %

[6] Gjennomsnittet er statistisk signifikant forskjellig fra gjennomsnittet til elever i misoppfatning.

tolker bokstaver som forkortelser for objekt	10 %	11 %	10 %	7 %
tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	10 %	11 %	10 %	9 %
tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	11 %	9 %	13 %	13 %
tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	7 %	13 %	1 %	0 %

Tabell 33: Utbredelse per misoppfatning, elever i misoppfatning

Misoppfatningen som flest elever i studien er i, er *tolker likhetstegnet som en kommando* med 13 % av elevene. For i alt fire av seks misoppfatninger er andelen i misoppfatning 10 % eller høyere.

De fleste misoppfatningene har en synkende andel elever i misoppfatning på de høyere trinnene i studien. Misoppfatningen *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi,* skiller seg ut ved at det er en større andel elever i misoppfatningen på 10. trinn enn på 8. trinn. Som vi så på i kapittel 5.3.5.2, er forskjellene imidlertid ikke statistisk signifikante.

Misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet,* er også verdt å nevne ved at den er den misoppfatningen med nest størst andel elever i misoppfatningen på 8. trinn, men er nærmest fraværende på 9. trinn og helt fraværende på 10. trinn.

Retter vi fokuset på andelen elever som er i misoppfatning generelt og ikke knyttet til ulike misoppfatninger hver for seg, viser analysene at noen elever er i opptil tre misoppfatninger. Tabell 34 viser hvor mange misoppfatninger elevene i studien er i.

	Totalt	**8. trinn**	**9. trinn**	**10. trinn**
Én eller flere misoppfatninger	43 %	49 %	42 %	32 %
To eller flere misoppfatninger	8 %	13 %	5 %	4 %
Tre misoppfatninger	1 %	2 %	1 %	0 %

Tabell 34: Andelen elever som er i misoppfatning

Som tabell 34 viser, er 43 % av elevene i studien i minst én av de seks misoppfatningene som studien retter fokus på. Andelen som er i én eller flere misoppfatninger er noe lavere på 10. trinn enn på 8. trinn, men det er fortsatt nærmere en tredel av elevene på 10. trinn som er i minst én misoppfatning knyttet til algebra.

Ved å studere tabell 33 og tabell 34 sammen, er det ingen misoppfatninger alene (tabell 33) som kan forklare den høye andelen elever som er i minst én eller flere misoppfatninger (tabell 34). Det betyr at elevene er i ulike misoppfatninger.

5.4.2.2 Elever som viser tegn på misoppfatning

Tabell 35 viser hvor stor andel av *elevene som viser tegn på de ulike misoppfatningene* i studien. På grunn av resultatene av faktoranalysen (se kapittel 5.1.2), tester bare to oppgaver misoppfatningen *tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon*. Dermed blir elever i misoppfatninger og elever som viser tegn på misoppfatning, det samme for denne misoppfatningen, og misoppfatningen er tatt ut av tabell 35.

	Totalt	8. trinn	9. trinn	10. trinn
tolker likhetstegnet som en kommando	25 %	33 %	21 %	13 %
tolker bokstaver som forkortelser for objekt	30 %	28 %	33 %	31 %
tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	30 %	34 %	26 %	24 %
tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	25 %	19 %	31 %	31 %
tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	19 %	32 %	11 %	2 %

Tabell 35: Utbredelse per misoppfatning, elever som viser tegn på misoppfatning

Sammenligner vi elever i misoppfatning (tabell 33) med elever som viser tegn på misoppfatning (tabell 35), er det omtrent to til tre ganger så mange elever som viser tegn på misoppfatning.

Som for elever i misoppfatninger, avtar også andelen elever som viser tegn på misoppfatning for eldre elever. Dette gjelder ikke for misoppfatningene *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi* og *tolker bokstaver som forkortelse for objekt,* der det er flere elever som viser tegn på misoppfatningen på 10. trinn enn 8. trinn. Spesielt for misoppfatningen *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi,* er prosentvis forskjell ganske stor, med 63 % flere elever på 10. trinn enn på 8. trinn.

I tabell 36 er en oversikt over andelen som viser tegn på én eller flere misoppfatninger. I likhet med for tabell 35, er misoppfatningen *tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon,* ikke lagt til grunn for datamaterialet i tabell 36. Elever som viser tegn på fem misoppfatninger, viser dermed tegn på alle mulige misoppfatninger.

	Totalt	8. trinn	9. trinn	10. trinn
Én eller flere misoppfatninger	77 %	81 %	70 %	74 %
To eller flere misoppfatninger	36 %	43 %	38 %	21 %
Tre eller flere misoppfatninger	14 %	18 %	13 %	5 %
Fire eller flere misoppfatninger	2 %	3 %	1 %	1 %
Fem misoppfatninger	0 %	1 %	0 %	0 %

Tabell 36: Andelen elever som viser tegn på misoppfatning

Som tabell 36 viser er det en stor andel elever, 77 %, som viser tegn på minst én av de fem mulige misoppfatningene. Andelen er høyest på 8. trinn, men det er nesten tre av fire elever på 10. trinn som viser tegn på minst én misoppfatning.

Andelen elever reduseres betraktelig fra minst én misoppfatning til to eller flere misoppfatninger. Det er imidlertid fortsatt en god del elever som viser tegn på flere enn en misoppfatning, to av fem elever på 8. trinn og en av fem elever på 10. trinn.

Det er én elev i datamaterielt som viser tegn på fem misoppfatninger, altså maksimalt antall misoppfatninger det er mulig å vise tegn på i denne studien. Eleven er i tre misoppfatninger, og viser samtidig tegn på to til.

6 Drøfting

Denne studien undersøker misoppfatninger knyttet til algebra på et utvalg ungdomsskoleelever med to forskningsspørsmål:

1. Er elever, som er i misoppfatning, selv klar over at de er i en misoppfatning?
2. Hvor utberedt er misoppfatninger knyttet til algebra?

Metoden som er brukt er en flerlagstest (kapittel 4.2.1), som samler informasjon om elevenes tenkning i to lag og elevens uttrykt grad av sikkerhet for eget svar i ett lag, der elevene kunne velge mellom alternativene *veldig sikker, sikker, hverken sikker eller usikker, usikker* eller *veldig usikker* (se kapittel 4.3.2). Elever i misoppfatning er i studien definert som elever som konsekvent avgir svar som tyder på misoppfatning i oppgaver som tester samme misoppfatning (se kapittel 4.3.3). Definisjonen av elever i misoppfatninger er spesielt viktig å ha med seg når utbredelsen drøftes, siden de fleste andre studier (bl.a. Brekke et al., 2000; Don, 2011; Falkner et al., 1999; Hornburg et al., 2015; Küchemann, 1978; Ojose, 2015; Ryan & Williams, 2007; Stephens, 2005, 2006) fokuserer på utbredelse i enkeltoppgaver.

Analyser viser at uttrykt grad av sikkerhet varierer fra misoppfatning til misoppfatning, men at utbredelsen av misoppfatningene er noe mer stabil. Studiens hovedfunn er:

- Elever i misoppfatning uttrykker stor grad av sikkerhet til eget svar
- Misoppfatninger knyttet til algebra er vanlig hos elever på ungdomsskolen
- Enkelte misoppfatninger er like utbredt på 10. trinn som på 8. trinn

I dette kapitlet vil jeg drøfte hovedfunnene opp mot andre relevante studier. I tillegg vil jeg drøfte forskningsmetoden som studien bygger på, og hva min studie kan bidra med til forskningsfeltet.

6.1 Er elever i misoppfatning klar over det selv?

Studien viser at elever i misoppfatning uttrykker høy grad av sikkerhet til eget svar. For fem misoppfatninger studien undersøker, tilsvarer gjennomsnittet for elever i misoppfatning nær *sikker* på spørsmålet *i hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig* (se kapittel 5.4.1). Dette funnet støtter studier som hevder at elever i misoppfatning har en sterk oppfattelse av de selv har riktig svar (bl.a. J. L. Booth et al., 2017; Brekke, 2002; Chow, 2011; Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Smith III, Disessa & Roschelle, 1994; Stephens, 2006). Det er imidlertid viktig å påpeke at de fleste andre kvantitative studier om misoppfatninger bygger på tradisjonelle testmetoder, som kun samler informasjon om elevenes matematiske svar (Ay, 2017). Det vil si at de ikke bygger på egne undersøkelser om elevene faktisk er sikre på at svaret sitt er riktig eller ikke. Dette innebærer at jeg ikke har så mange studier å sammenligne mine funn med. Det finnes imidlertid noen, som jeg vil drøfte mine funn i lys av.

Studier som undersøker grad av sikkerhet til eget svar (Cheung & Yang, 2018; Djam'an & Arsyad, 2019; Hasan et al., 1999; Irwansyah et al., 2018) bruker informasjonen til å skille misoppfatninger fra tilfeldige feil. For eksempel gjør Hasan et al. (1999) dette ved å kategorisere feil svar med over middels grad av sikkerhet som misoppfatninger, og feil svar med under middels grad av sikkerhet som tilfeldige feil. Hasan et al. (1999)

benytter en test som består av tolags flervalgsoppgaver, der elevenes uttrykte grad av sikkerhet blir registrert på en Likert-skala (se kapittel 4.2.1) med seks alternativ fra 0–5. Hasan et al. (1999) definerer feil svar med uttrykt grad av sikkerhet over 2,5 som misoppfatning, og feil svar med uttrykt grad av sikkerhet under 2,5 som andre feilsvar. Likert-skalaen som er brukt i min studie inneholder fem steg, noe som gjør at middels grad av sikkerhet, i motsetning til hos Hasan et al. (1999), tilsvarer et alternativ på skalaen (*hverken sikker eller usikker,* se kapittel 4.3.2). Dette gjør det utfordrende å sammenligne mine funn med Hasan et al. (1999). Jeg har imidlertid foretatt en tilleggsanalyse, som sammenligner hvor stor andel av elevene som uttrykker at de er *veldig usikker* eller *usikker* (under middels), og *sikker* eller *veldig sikker* (over middels), for at svaret sitt er riktig. Tilleggsanalysen viser at 64 % av elevene som avgir svar som tyder på misoppfatning, er *veldig sikker* eller *sikker* på at svaret sitt er riktig, mens tilsvarende tall for andre feilsvar er 22 %. For svar som er uttrykt med under middels grad av sikkerhet, uttrykker 12 % av elevene som avgir svar som tyder på misoppfatning, at de er *veldig usikker* eller *usikker* på at svaret sitt er riktig, mens dette gjelder 52 % av elevsvarene som er registrert som andre feilsvar. Denne sammenligningen viser at det er stor forskjell i hvordan elevene uttrykker grad av sikkerhet for svar som tyder på misoppfatning, og andre feilsvar, slik svartypene er definert i min studie (se kapittel 4.3.2).

En utfordring med tilnærmingen til Hasan et al. (1999), er at samme matematiske svar kan bli definert som å tyde på misoppfatning hos en elev, som for eksempel uttrykker høy grad av sikkerhet i alle oppgavene, og som en tilfeldig feil hos en annen elev, som uttrykker lav grad av sikkerhet i alle oppgavene. På denne måten kan tilnærmingen til Hasan et al. (1999) definere misoppfatninger ut fra elevenes personlighet, og ikke ut fra tidligere forskning om misoppfatninger. Jeg erkjenner at tilnærmingen kan være interessant på elevnivå, men vurderer den ikke til å være hensiktsmessig på en større gruppe elever, og heller ikke for å besvare forskningsspørsmålet *er elever, i misoppfatning, selv klar over at de er i en misoppfatning*. Jeg velger derfor å stå fast på min teoretiske tilnærming til misoppfatninger (se kapittel 3.4 og 3.5), og drøfte mine funn i lys av andre studier som definerer misoppfatninger ut fra tidligere forskning.

Yang og Sianturi (2020) bruker en test som består av trelags flervalgsoppgaver, i en helt ny studie, om elevenes tallforståelse. Eleven velger et matematisk svar i det første laget og en begrunnelse for dette valget i lag to, der ett alternativ i hvert lag er knyttet til misoppfatningen som oppgaven tester (Yang & Sianturi, 2020). I det tredje laget uttrykker eleven hvor sikker han er på at svaret er riktig på en Likert-skala med samme inndeling som er benyttet i min studie (Yang & Sianturi, 2020). Det som gjør studien til Yang og Sianturi (2020) ekstra interessant, er at de, i likhet med meg, benytter parametriske analyser (se kapittel 4.3.1) på data fra Likert-skalaen. Mitt valg av analysemetode er gjort rede for i kapittel 4.3.1, og jeg tolker at Yang og Sianturi (2020) har benyttet samme analysemetode som meg, som en støtte for det valget. Yang og Sianturi (2020) betegner i tillegg det jeg omtaler som *uttrykt grad av sikkerhet* som *selvtillit*, og kategoriserer et gjennomsnitt lik eller over 3,3 som høy, mellom 3,3 og 2,9 som middels og under 2,9 som lav. Dessverre rapporterer Yang og Sianturi (2020) gjennomsnittlig uttrykt selvtillit bare på utvalgte oppgaver, og ikke for grupper av elever, som elever i misoppfatning. Dette gjør at jeg ikke kan sammenligne uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatning med deres studie, men jeg velger å drøfte funnene fra min studie i lys av grenseverdiene til Yang og Sianturi (2020).

I min studie er gjennomsnittlig grad av uttrykt sikkerhet til eget svar for elever i misoppfatning over 3,3 for alle misoppfatningene studien fokuserer på. Lavest gjennomsnitt uttrykker elever i misoppfatningen *tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon,* med 3,5. For de andre fem misoppfatningene ligger gjennomsnittet for elever i misoppfatning fra 3,7–4,1, altså betydelig høyere enn grenseverdien til Yang og Sianturi (2020). Løsriver vi oss fra elever i misoppfatning, og ser på de alle enkeltsvarene i studien som tyder på misoppfatning, er gjennomsnittlig grad av sikkerhet 3,7, som tilsvarer høy grad av sikkerhet ifølge Yang og Sianturi (2020). For riktige svar og andre feilsvar, er tilsvarende gjennomsnitt 3,8 og 2,6 (se kapittel 5.2), som tilsvarer henholdsvis høy og lav grad av sikkerhet. At elevene i gjennomsnitt uttrykker høy grad av sikkerhet til både riktige svar, og svar som tyder på misoppfatning, samtidig som de uttrykker lav grad av sikkerhet til andre feilsvar, tyder på at elevene ikke ser på svar som tyder på misoppfatning som feil. Dette blir ytterligere støttet om vi dykker videre ned i datamaterialet og ser på uttrykt grad av sikkerhet på oppgavenivå. Gjennomsnittet blir, ut fra grenseverdiene til Yang og Sianturi (2020), betegnet som høyt i 17 av 19 oppgaver for riktig svar, og i 18 av 19 oppgaver for svar som tyder på misoppfatning. For andre feilsvar blir ikke gjennomsnittet betegnet som høyt i noen oppgaver, og som lavt i 16 av 19 oppgaver (se teknisk rapport vedlegg 8).

Av andre studier som undersøker mer enn elevens matematiske svar, kan TIMSS nevnes. TIMMS, som viser at norske elever presterer lavt i algebra, studerer i tillegg sammenhengen mellom elevers prestasjoner og motivasjon, der motivasjon deles i tre; indre motivasjon, ytre motivasjon og selvtillit (Bergem et al., 2016). Elevers selvtillit i TIMMS er målt gjennom at elevene skal ta stilling til påstander som «jeg gjør det vanligvis bra i matematikk», «læreren sier at jeg er flink i matematikk» og «jeg er flink til å løse vanskelige oppgaver i matematikk» (Bergem et al., 2016, s. 69). Resultatene fra TIMMS viser at selvtillit er den av de tre målene for motivasjon som har sterkest sammenheng med eleveres prestasjoner i matematikk for både 4. og 9. trinn i TIMSS 2015 (Bergem et al., 2016).

Motivasjonsfunnene fra TIMSS kan ikke overføres til min studie, siden konstruktet for TIMSS er vidt forskjellig fra mitt. Min studie er utviklet for å identifisere elevers misoppfatninger med en flerlagstest (se kapittel 4.2.1), der ett av lagene undersøker uttrykt grad av sikkerhet, mens TIMSS undersøker elevers prestasjoner i matematikk med ettlags flervalgsoppgaver eller kortsvarsoppgaver, og undersøker elevers motivasjon i et separat spørreskjema (Mullis & Martin, 2013). Det at selvtillit, slik det undersøkes i TIMMS, er noe annet enn det jeg undersøker i uttrykt grad av sikkerhet til eget svar, gjør at jeg velger, i motsetning til Yang og Sianturi (2020), å ikke bruke begrepet selvtillit om uttrykt grad av sikkerhet til eget svar videre i studien.

Et annet poeng med studien til Yang og Sianturi (2020) er at den er foretatt på elever fra Indonesia. I TIMSS 2015 deltok Indonesia med elever kun fra 4. trinn, og resultatene viser at de presterte lavere enn norske elever i matematikk, samt at de uttrykker lavere selvtillit (Mullis, Martin, Foy & Arora, 2016). Dette gjør at det blir vanskelig å vite i hvor stor grad grenseverdiene til Yang og Sianturi (2020) er gyldige i den norske konteksten, samtidig som Yang og Sianturi (2020) ikke fokuserer elever i misoppfatning. Jeg velger derfor å drøfte resultatene videre ved å sammenligne elever i misoppfatning med andre elever i min egen studie, for å nærme meg et svar på om *elever, i misoppfatning, selv er klar over at de er en i en misoppfatning*.

Sammenligner vi gjennomsnittlig grad av sikkerhet til eget svar for elever i misoppfatning med elever som ikke er i misoppfatning, er gjennomsnittet for de i misoppfatning statistisk signifikant lavere for én av seks misoppfatninger (se kapittel 5.4.1). For tre av misoppfatningene er det ingen statistisk signifikante forskjeller til gjennomsnittet for disse to gruppene, mens for to misoppfatninger er gjennomsnittet for elever i misoppfatning statistisk signifikant høyere enn for elever om ikke er i misoppfatning.

For misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* er gjennomsnittlig grad av sikkerhet for elever i misoppfatning statistisk signifikant lavere for elever i misoppfatning enn for elever som ikke er i misoppfatning. Forståelse for likhetstegnet blir sett på som en forutsetning for å lykkes i algebra (J. L. Booth et al., 2014; Falkner et al., 1999; Stephens, 2006), og derfor ble misoppfatningen inkludert i studien min, selv om den ikke er direkte knyttet til algebra (Tabell 2, kapittel 3.4). Læreplanen som elevene i studien har fulgt, LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006), nevner ikke likhetstegnet spesifikt i kompetansemål, men det er naturlig at temaet likeverdighet inngår i arbeidet med flere kompetansemål etter 2. trinn. I tillegg møter elevene likhetstegnet i flere læreverk for første klasse (Alseth, Arnås & Røsseland, 2020; Kaufmann, Olafsen & Rikheim, 2010). Elever i misoppfatningen tolker likhetstegnet som et tegn som setter i gang en *prosess,* og ikke som et selvstendig *objekt*, eller representasjon for likeverdighet (kapittel 3.4 og 3.5.1). Sfard (1991) forklarer sammenhengen mellom å tolke begrep som prosess og objekt som en naturlig del av begrepsutviklingen, der vi starter med å bruke begreper som en prosess på konkrete eksempler, og gjennom stadige generaliseringer og systematiseringer utvikler en forståelse for begrepet som et selvstendig objekt.

Elever i misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* vil på bakgrunn av det som er belyst ovenfor ha mindre forutsetninger for å lykkes i algebra, og de er fortsatt i startfasen av begrepsutviklingen av et begrep som de skal være godt kjente med. Dette kan være en av årsakene til at elever i misoppfatning i gjennomsnitt uttrykker signifikant lavere grad av sikkerhet til eget svar enn elever som ikke er i misoppfatning. Det skal imidlertid sies at elevene i misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* i gjennomsnitt uttrykker høy (3,7) grad av sikkerhet til eget svar, men altså statistisk signifikant lavere enn elever som ikke er i misoppfatning.

For de øvrige fem misoppfatningene er gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatning ikke statistisk signifikant lavere enn for elever som ikke er i misoppfatning. For to av disse misoppfatningene er i tillegg gjennomsnittet for elever i misoppfatninger statistisk signifikant høyere for elever i misoppfatning enn elever som ikke er i misoppfatning (se kapittel 5.4.1).

Funnene fra denne studien viser at elever i misoppfatning uttrykker høy grad av sikkerhet til eget svar. Ut fra grenseverdiene til Yang og Sianturi (2020), er gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet høy for både elever i misoppfatning og for alle elevsvar som kan knyttes til misoppfatning, mens elever i misoppfatning uttrykker høy grad av sikkerhet til eget svar sammenlignet med elever som ikke er i misoppfatning. Et interessant poeng i disse funnene er at riktige svar og svar som tyder på misoppfatning blir uttrykt med høy grad av sikkerhet, mens andre feilsvar blir uttrykt med lav grad av sikkerhet. Både svar som tyder på misoppfatning og andre feilsvar er matematiske ukorrekte svar, men blir altså uttrykt med vidt forskjellig grad av sikkerhet i studien. Dette viser at funnene i studien er knyttet til hvorvidt elever i misoppfatning selv er klar over at de er i misoppfatning, og ikke ut fra om elever uttrykker jevnt over høy eller lav grad av sikkerhet i oppgavene, som kunne vært en feilkilde om jeg hadde valgt tilnærmingen til (Hasan et al., 1999).

Funnene i min studie støtter påstanden til Fujii (2014, s. 453) om at det for elever i misoppfatning «never implies errors from a child's perspective», og jeg vil oppsummere funnene i studien med at de tyder på at elever i misoppfatning ikke er klar over at de selv er i misoppfatning.

Fujii (2014) sier videre at misoppfatninger er basert på en levedyktig oppfatning av det matematiske begrepet, ut fra erfaringer elevene har fra andre kontekster. Han knytter dermed misoppfatninger sterkt til *overgeneralisering* av tidligere kunnskap (Ryan & Williams, 2007), og alle de fem misoppfatningene som ikke viser statistisk signifikant lavere gjennomsnitt for elever i misoppfatning, er i kapittel 3.5 er knyttet til *overgeneralisering*. Jeg tror imidlertid ikke det, at for misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* blir knyttet til *prosess* og *objekt*-problematikk (Bush & Karp, 2013; McNeil & Alibali, 2005; Sfard & Linchevski, 1994) og de andre misoppfatningene blir knyttet til *overgeneralisering* (kapittel 3.5) forklarer forskjellene i uttrykt grad av sikkerhet.

6.2 Hva sier utbredelsen av misoppfatninger om elevenes utfordringer?

Resultatene viser at misoppfatninger knyttet til algebra er vanlige blant elevene i studien. Jeg vil drøfte resultatene om utbredelse i tre deler, som alle kan knyttes til elevenes utfordringer i algebra. Den første delen retter fokus mot antall elever som er definert til å være i en misoppfatning. Den andre delen retter fokus på hvordan utbredelsen til de ulike misoppfatningene er, og hvordan den er på de ulike trinnene på ungdomsskolen, mens den siste delen retter fokus på andelen ubesvart som studien viser.

6.2.1 Utbredelse av elever i misoppfatning

Studien viser at over 40 % av elevene er i én eller flere av misoppfatningene som studien undersøker. Det vil si at nesten halvparten av elevene konsekvent avgir svar som tyder på misoppfatning i alle oppgavene som tester samme misoppfatning. Tar vi bort misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* som bare blir testet med to oppgaver, faller andelen noe, men fortsatt er over 40 % av elevene i en eller flere misoppfatninger. Dette er da elever som har vist samme type feiltenkning i tre av tre, eller fire av fire oppgaver som tester samme misoppfatning.

Av 368 elever i studien er 49 % av elevene på 8. trinn og 32 % av elevene på 10. trinn i misoppfatninger knyttet til algebra. Selv om disse resultatene er basert på et lite utvalg elever, er det nærliggende å tro at misoppfatninger er vanlige blant norske ungdomsskoleelever, og at misoppfatningene i studien angår elever på alle trinn på ungdomsskolen.

Definisjonen av *elever i misoppfatninger* som er brukt i studien, er den strengeste mulige formen for systematisk feiltenking. For misoppfatninger som blir testet med fire oppgaver i studien, gjør dette at elever med tre svar som tyder på misoppfatning og én ubesvart oppgave, ikke blir kategorisert som *i misoppfatning*. På bakgrunn av dette blir også betegnelsen *elever som viser tegn på misoppfatninger* (se kapittel 4.3.3) brukt enkelte steder i studien om elever som avgir svar som tyder på misoppfatninger i over halvparten av oppgavene som tester samme misoppfatning. Siden misoppfatningene blir testet med tre eller fire oppgaver[9], betyr det at elever som ikke avgir svar som tyder på misoppfatning i én oppgave per misoppfatning, fortsatt blir kategorisert som å *vise tegn på misoppfatning.* Svaret på den siste oppgaven kan være ubesvart eller kategorisert som andre feilsvar, men det kan også være riktig. Med definisjonen *viser tegn på misoppfatning* øker andelen elever til 77 % (se kapittel 5.4.2.2). Resultatene viser videre at andelen elever som viser tegn på misoppfatning på de ulike trinnene er alle over 70 %. For å oppsummere disse resultatene kan vi si at omtrent 80 % av elevene i studien viser tegn på misoppfatning i algebra, og omtrent halvparten av disse igjen er i misoppfatning.

I kapittel 4.3.3 er to andre studier som studerer utbredelse av misoppfatninger utover enkeltoppgaver beskrevet. Den ene er Russell et al. (2009), som kategoriserer elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i mer enn 35 % av oppgavene per misoppfatning, som elever i misoppfatning. En viktig forskjell mellom Russell et al. (2009) og min studie, er at de undersøker samme misoppfatning med 10–12 oppgaver, mens jeg bruker 2-4. På bakgrunn av dette blir det ikke meningsfullt å sammenligne resultater mellom studiene med utgangspunkt i 35 % som grense for elever i misoppfatning. Russell et al. (2009) opererer imidlertid med fem av misoppfatningene i min studie (*bokstaver som forkortelser for objekt*, *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall*, *ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi*, *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet* og *verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet)* én samlekategori med *misoppfatninger om variabler*. Til sammen er det 14 oppgaver som tester disse misoppfatningene i min studie, og ved å bruke 35 % som grense vil det si at elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i fem eller flere oppgaver er i *misoppfatning knyttet til variabler* i min studie.

Den andre studien som er nevnt i kapittel 4.3.3 er Lucariello et al. (2014) undersøker *tolker bokstaver som forkortelser for objekt* og *en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall* av misoppfatningene som inngår i min studie. Lucariello et al. (2014) kategoriserer elever som avgir tre eller flere svar som tyder på misoppfatning som «misconceivers». Selv om jeg tester flere misoppfatninger knyttet til variabelbegrepet enn Lucariello et al. (2014), velger jeg for enkelhets skyld å bruke kategorien *misoppfatninger om variabler,* der tre av ni oppgaver i praksis tilsvarer fem eller flere svar som tyder på misoppfatning, altså samme grense som i eksemplet med Russell et al. (2009).

En analyse av kategorien *misoppfatninger om variabler,* med definisjonene fra Russell et al. (2009) og Lucariello et al. (2014), viser at 60 % av elevene i min studie er i misoppfatning. Dette er høyere enn i begge de amerikanske studiene, der 14 % av 905 elever fra 6.–12. trinn er klassifisert i misoppfatning i Russell et al. (2009) og 28 % av 437 elever fra 6.–12. trinn klassifisert som «misconceivers» i Lucariello et al. (2014). Hva disse forskjellene kommer av er vanskelig å antyde, siden det er mange faktorer som spiller inn. Det at studiene er foretatt i forskjellige land med ulike læreplaner påvirker trolig resultatet, selv om flere studier viser at misoppfatninger opptrer på tvers av landegrenser (bl.a. Akhtar & Steinle, 2017; L. R. Booth, 1984; Brekke et al., 2000; Fujii, 2003; Küchemann, 1978). Studiene benytter også forskjellig metode, der de amerikanske studiene benytter tradisjonelle ettlags flervalgstester (se kapittel 4.2) med fire alternativ, der ett alternativ er riktig, ett tyder på misoppfatning og de to andre er andre feilsvar (Lucariello et al., 2014; Russell et al., 2009), mens jeg benytter

[9] Misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon* er testet med to oppgaver, og er derfor ikke med i statikken om *elever som viser tegn på misoppfatning*

flerlagstest stort sett bestående av åpne oppgaver. I tillegg bygger studiene, selv om de amerikanske studiene ikke frigir oppgavene sine, etter all sannsynlighet på ulike oppgaver. På bakgrunn av dette, ligger det å lete etter årsaker til forskjellene i resultater utenfor rammene i et masterstudium. Uansett tyder sammenligningen på at misoppfatninger knyttet til variabler er utbredt blant elevene i min studie.

6.2.2 Utbredelse av de ulike misoppfatningene

Resultatene i studien viser at enkelte misoppfatninger er mer utbredt på enkelte trinn, mens andre er like utbredt uavhengig av klassetrinn. Resultatene fra studien viser også at misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet,* som er lite beskrevet i tidligere forskning, er vanlig.

Yang og Sianturi (2020, s. 9) beskriver misoppfatninger som er valgt av over 10 % av elevene som en *betydelig misoppfatning* (engelsk: significant misconception). Som beskrevet tidligere, ser Yang og Sianturi (2020) på elevsvar som tyder på misoppfatninger, og ikke på elever som er i misoppfatning. Siden Yang og Sianturi (2020) benytter flervalgsoppgaver, opererer de med en grense som ligger 10 prosentpoeng høyere enn gjettefaktoren, for å velge et svar som tyder på misoppfatning for at svaret skal bli betegnet som en *betydelig misoppfatning.* Siden jeg bruker oppgaver med åpne spørsmål (se kapittel 4.2), er antall mulige svar uendelig stort, og jeg velger derfor å benytte 10 % som grense.

Studerer vi elevsvar per oppgave som tyder på misoppfatning, (se teknisk rapport, vedlegg 8) er andelen større enn 10 % for 18 av 19 oppgaver. Overfører vi betegnelsen *betydelig misoppfatning,* til også å gjelde andelen elever som er i misoppfatning, blir fire av seks misoppfatninger i studien betegnet som betydelige. Dette er; *tolker likhetstegnet som en kommando, tolker bokstaver som forkortelse for objekt, tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall* og *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi,* som 10–13 % av elevene er i (se kapittel 5.4.2.1).

En av misoppfatningene som har større utbredelse på 8. trinn enn på de høyre klassetrinnene er misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*. Analysene viser at 13 % av elevene på 8. trinn er i misoppfatningen, mens det er én elev på 9. og ingen på 10. trinn som er i misoppfatningen. Sammenligner vi elever i misoppfatningen med elever som ikke er i misoppfatning eller med elever med alt riktig, viser begge analysene at forskjellene er signifikant forskjellige (kapittel 5.3.6.2). Dette tyder på at misoppfatningen er sterkt knyttet til elevene på 8. trinn. Som beskrevet i kapittel 3.5.7 er misoppfatningen lite beskrevet i andre studier, noe som gjør det vanskelig å sammenligne resultatene fra min studie med andre, men jeg ønsker allikevel å gjøre noen betraktninger for hvorfor resultatet er slik.

Går vi nærmere inn på oppgavene i studien som identifiserer misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet*, omhandler to av oppgavene ligninger (2 og 9, se vedlegg 4) mens en oppgave (14) handler om å sette inn verdier for variabler og regne ut et svar til et uttrykk. Ifølge læreplanen skal elevene i studien ha erfaring med denne typen oppgaver fra tidligere, siden oppgavene er validert etter kompetansemål for 7. trinn i LK06 (kapittel 3.5.6). Kongelf (2019, s. 75) viser imidlertid i sin gjennomgang av fem læreverk i matematikk for 8. klasse, at algebra på dette trinnet «dreier seg i hovedsak om å regne med algebraiske uttrykk og sette inn verdi(er) for variable(r) i algebraiske uttrykk». En årsak til at misoppfatningen er lite utbredt på de høyere trinn kan derfor være at elevene på disse trinnene har fått mer undervisning som kan ha utfordret misoppfatningen, samt trening med å løse slike oppgaver (2, 9 og 14 vedlegg 4).

Resultatene for misoppfatningen *tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet,* tyder på at dette er en misoppfatning som også fortjener sin plass i forskningslitteraturen. Blant 8. trinnselevene i studien er en utbredelse på 13 % i misoppfatning den nest høyeste, og betegnet som en *betydelig misoppfatning* (Yang & Sianturi, 2020). Bare misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando,* har større utbredelse blant elevene på 8. trinn. Ser vi på elever som viser tegn på misoppfatningen, altså elever som har avgitt svar som tyder på misoppfatning i to av tre oppgaver, øker andelen til 32 % av elevene på 8. trinn, 11 % på 9. trinn og 2 % på 10. trinn.

En misoppfatning som er mer utbredt i på 10. trinn enn på 8. trinn i studien er *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi*. Forskjellene er imidlertid ikke statistisk signifikante (se kapittel 5.3.5.2), men likevel interessante å se nærmere på. Flere studier viser at misoppfatningen er utbredt blant elever (Akhtar & Steinle, 2013; L. R. Booth, 1984; Küchemann, 1978), men endring i utbredelse ut fra alder er lite studert. Brekke et al. (2000) undersøker misoppfatningen på 8. og 10. trinn med tre felles oppgaver. Én av disse (oppgave 15, vedlegg 4) er med i min studie, i tillegg til en som bare er med på 10. trinn i Brekke et al. (2000). Resultatene viser at i Brekke et al. (2000) avgir 34 % av elevene på 8. trinn, og 54 % av elevene på 10. trinn, svar som tyder på misoppfatning. Tilsvarende tall i min studie er 23 % og 35 %. Brekke et al. (2000) kommenterer imidlertid ikke forskjellene mellom trinnene videre, men det er interessant at begge studiene, foretatt på norske elever, viser økende andel svar som viser tegn på misoppfatningen blant eldre elever.

En mulig årsak til at misoppfatningen ikke avtar blant eldre elever, kan være det Kongelf (2019, s. 92) kaller «fruktsalatalgebra», som blir brukt av lærere i et ledd i å konkretisere hvordan algebraiske uttrykk behandles. I tillegg til at denne konkretiseringsformen legger opp til misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for objekter,* ved «å antyde at a kan stå for et objekt, som appelsin» (Kongelf, 2019, s. 92), kan det også antyde at a og b aldri er like. En annen årsak kan også være at misoppfatningen kan knyttes til *prototyperepresentasjon* og *overgeneralisering* (Ryan & Williams, 2007) ved at to ukjente blir introdusert og stort sett behandlet som variabler med forskjellig verdi. Dette er imidlertid mine egne tanker og må undersøkes nærmere før en eventuelt kan konkludere med noe.

De fleste misoppfatningene i studien viser ingen signifikante forskjeller i utbredelse på de ulike trinnene når vi sammenligner elever i misoppfatning og elever som ikke er i misoppfatning. Med et produktivt syn på misoppfatninger (se kapittel 3.4), der misoppfatninger er et resultat av at elevene prøver å skape mening og sammenheng i verden rundt seg (bl.a. Brekke, 2002; McIntosh, 2007; Mestre, 1987; Ojose, 2015), kan det tyde på at undervisningen til elevene ikke utfordrer elevenes misoppfatninger, og at lærerne ikke er flinke nok til å fange opp og følge opp misoppfatningene til elevene. Det er viktig å påpeke at jeg ikke har fulgt elevene over tid, og at utbredelse i studien ikke kan ses på som at de samme elevene forblir i de samme misoppfatningene over tid. Resultatene gir uansett en indikasjon på at misoppfatningene som studien undersøker, er vanlig blant elever på ulike trinn på ungdomsskolen.

Et annet interessant funn når det gjelder utbredelsen av de ulike misoppfatningene, er at høyeste utbredelse av en misoppfatning er 13 %, mens altså 43 % av elevene er i en eller flere misoppfatninger. Dette viser at det ikke er én misoppfatning i studien som forklarer den store utbredelsen av elever i misoppfatninger, men at elevene i studien er i ulike misoppfatninger. Som nevnt i kapittel 6.2.1, studerer Russell et al. (2009), i likhet med meg, både elever som er i misoppfatninger, samtidig som de undersøker flere misoppfatninger. Russell et al. (2009) studerer tre misoppfatninger knyttet til variabler, grafer og likeverdighet. Resultatene viser at 19 % av elevene er i én misoppfatning, 6 % er i to misoppfatninger og 1 % av elevene er i tre misoppfatninger, og at 14 % av elevene er i misoppfatning om variabler, 12 % av elevene i misoppfatninger om grafer og 11 % av elevene i misoppfatning om likeverdighet (Russell et al., 2009). Siden jeg oppgir resultatene for elever i misoppfatninger, som for eksempel elever i minst én misoppfatning (se kapittel 5.4.2.1), blir tilsvarende tall for studien til Russell et al. (2009); elever som er i minst én misoppfatning 26 %, elever som er i to eller tre misoppfatninger 7 % og elever som er i tre misoppfatninger 1 %. Selv om antall misoppfatninger som er undersøkt, og kriterier for å definere elever i misoppfatning er ulikt i de to studiene, viser også resultatene til Russell et al. (2009) at det ikke er en misoppfatning som skiller seg kraftig ut, og som alene forklarer andelen av elever i misoppfatning.

For å undersøke om det er en kombinasjon av ulike misoppfatninger som kan forklare den høye andelen elever i misoppfatning, har jeg foretatt en tilleggsanalyse over hvor stor del av elevene i de ulike misoppfatningene som er i hver av de andre misoppfatningene. Den største sammenhengen analysen viser er at 20 % av elevene i misoppfatningen *tolker bokstaver som forkortelse for et objekt,* også er i misoppfatningen *tolker likhetstegnet som en kommando.* De andre sammenhengene mellom misoppfatningene er 0–18 % og viser at det ikke er tydelige sammenhenger mellom misoppfatningene.

At det er liten sammenheng mellom misoppfatningene, kan tyde på at konstruktet misoppfatninger knyttet til algebra er et flerdimensjonalt konstrukt (Tavakol & Dennick, 2011), og dermed forklarer den lave Cronbach's alfaverdien til studien utfra svar som tyder på misoppfatning (kapittel 5.1.1). De fleste andre studiene ser på Cronbach's alfa kun ved å studere elevenes riktige svar (Chow, 2011; Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Irwansyah et al., 2018; Li, Ding, Capraro & Capraro, 2008; Lin, Ko & Kuo, 2014; Yang & Sianturi, 2020). I kapittel 5.1.1 så vi at min studie viser høy alfa med denne tilnærmingen. Av studier som også oppgir Cronbach's alfa for svar som tyder på misoppfatning, har Lucariello et al. (2014) lignende resultater som meg med alfaverdi 0,46. Russell et al. (2009) presenterer også Cronbach's alfa for svar som tyder på misoppfatning, men bare for hver misoppfatning og ikke som en samla verdi. Resultatet for de ulike misoppfatningene er 0,70–0,86, og ligger mellom akseptabel og høy (Cohen et al., 2018; Heale & Twycross, 2015), men indikerer bare at oppgavene innenfor hver misoppfatning i stor grad måler samme konstrukt. Siden det er pekt på en del likheter mellom min og Russell et al. (2009) sin studie, der begge viser at det ikke er én misoppfatning som forklarer andelen elever i misoppfatning, hadde det vært interessant å ha undersøkt flerdimensjonalitet i konstruktet misoppfatninger i algebra videre. En samlet alfaverdi fra Russell et al. (2009) kunne gitt noen indikasjoner, men dette er en større studie som har vært interessant om andre har sett nærmere på. Funnene i denne studien viser i alle fall at misoppfatninger på gruppenivå er et sammensatt fenomen, og at elevene er i ulike misoppfatninger, eller ulike kombinasjoner av misoppfatninger.

6.2.3 Ubesvart

Det siste jeg ønsker å drøfte i delkapitlet om utbredelse er den høye andelen ubesvarte oppgaver i studien. Totalt sett er 21 % av de matematiske svarene i studien ubesvart, der høyest andel ubesvart for en oppgave er 44 % (se teknisk rapport, vedlegg 8). De ubesvarte elevsvarene er behandlet som manglende svar i min studie. Dette gjør som pekt på tidligere at en elev som har én oppgave per misoppfatning ubesvart mens resten av svarene er tegn på misoppfatning, ikke blir kategorisert som å være i en misoppfatning. Zielinski (2017, s. 68) behandler i sin doktorgradsavhandling ubesvarte spørsmål som tegn på misoppfatning, med begrunnelse av at det «indikerer at elevene ikke vet hva de skal gjøre». Et lite eksperiment med å behandle ubesvarte oppgaver som tegn på misoppfatning i min studie, øker andelen elever i misoppfatning til fra 43 % til 74 %, og andelen som viser tegn på misoppfatning fra 77 % til 95 %.

Siden definisjonen på misoppfatninger som ligger til grunn for min studie er at elevene skal vise en systematisk feiltenkning, har jeg valgt å ikke behandle ubesvarte svar som tegn på misoppfatning. Den høye ubesvartandelen er imidlertid noe som kunne vært interessant å se nærmere på, gjennom for eksempel intervjuer. En hypotese, basert på erfaring fra egen praksis, er at årsaken til at elever ikke besvarer oppgavene, er at elevene ikke har nok erfaringer med algebra til at de har organisert kunnskapen i kognitive *skjema* og *strukturer* (se kapittel 3.1), og at de derfor heller ikke har oppdaget noen systemer og mønstre som de kan *overgeneralisere* (se kapittel 3.4). Ut fra denne hypotesen kan ubesvarte oppgaver ses på, som at elevene ikke kommet langt nok i utviklingen av det matematiske begrepet til at de kan utvikle misoppfatninger. Dette er som sagt en hypotese som eventuelt må undersøkes videre, men det er tydelig at den høye andelen ubesvarte oppgaver, viser at elevene har utfordringer med algebra. Jeg vil igjen presisere at oppgavene i studien er validert ut fra kompetansemål etter 4. og 7. trinn i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006), og at elevene i studien går på ungdomstrinnet.

6.3 Studiens bidrag til forskningsfeltet

Funnene i denne studien viser at mange elever er i misoppfatninger, som de trolig selv ikke er klar over, at noen misoppfatninger er like høyfrekvente, eller til og med mer høyfrekvente for eldre elever og at mange av elevene som ikke er i misoppfatning ikke svarer på oppgavene.

Selv om utvalget i studien er 368 elever, kan vi tenke oss at funnene i alle fall delvis er generaliserbare, og at de kan bidra med å tette kunnskapshull som er pekt på i andre studier. Lærerens kunnskap om misoppfatninger blir løftet fram av Bush og Karp (2013), som et viktig bidrag i å hjelpe elevene mot matematisk forståelse. Welder (2012) støtter dette, og sier at lærerens kunnskap om misoppfatninger bidrar til at elevene ikke forblir i misoppfatninger over tid. Gjennom å ha dokumentert at misoppfatninger i algebra er vanlig i et utvalg norske ungdomsskoleelever, bidrar min studie med kunnskap om mulige misoppfatninger som elevene kan være i. Dersom lærere ønsker å undersøke om misoppfatningene faktisk er til stede i egen klasse, er oppgavesettet som er brukt i studien vedlagt, og er til fri disposisjon (se vedlegg 3 og 4).

Det at studien fokuserer på utbredelsen av både elever i misoppfatninger, og utbredelsen til de ulike misoppfatningene utover enkeltoppgaver, bidrar studien til å tette kunnskapshull min egen litteraturgjennomgang (se kapittel 2) belyser. Dette gjelder både misoppfatninger som virker å være like utbredt uavhengig av trinn, og misoppfatninger som har større utbredelse på ett trinn enn de andre, for eksempel misoppfatningen *tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi,* som i denne studien er mer utbredt på 10. trinn enn 8. trinn. Studien har også undersøkt en misoppfatning som ikke er så godt beskrevet i tidligere forskningslitteratur, *tolker bokstaver som en* *plassholder i posisjonssystemet* (se kapittel 3.5.6 og 5.3.6). Resultatene fra studien viser at dette også er en misoppfatning som fortjener sin plass i forskningslitteraturen ved at 13 % av elevene på 8. trinn er i misoppfatningen, og at dette er en misoppfatning som bør bli utforsket videre.

I tillegg tyder funnene i studien på at elevene selv ikke er klar over at de er i en misoppfatning. Ut fra et konstruktivistisk læringssyn (se kapittel 3.1), er det en forutsetning at eleven selv opplever en indre ubalanse for at det skal skje *akkomodasjon* og at gamle skjema enten blir endret eller at nye skjema skapes (Ormrod, 2016). I denne studien vil det bety at elevene selv må tvile på at det matematiske svaret de avgir er riktig, for at læring skal skje. Funnene i studien viser at elevene som avgir svar som tyder på misoppfatning, ikke tviler på at svarene sine er riktig. I undervisningssammenheng er dette et viktig poeng, siden det gjør at det stilles store krav til læreren for å utfordre elevene som er i misoppfatning, slik at denne indre ubalansen skapes, og dermed at læring kan skje. Dette funnet er et viktig bidrag for å hindre at elever forblir i misoppfatninger over tid, som flere andre studier antyder (Aygor & Ozdag, 2012; J. L. Booth et al., 2014; Confrey, 1990).

Lærerens kunnskap om misoppfatninger er også én av i alt tre deler Seifried og Wuttke (2010, s. 150), kaller «professional error competence», som er hva som kreves av lærere, for at de skal kunne løfte fram misoppfatninger i klasserommet som en kilde til læring. Den andre delen, innebærer at læreren har et «constructive view on errors and their use in classroom processes» (Seifried & Wuttke, 2010, s. 150). I studien ligger et syn på misoppfatninger som en produktiv komponent for videre læring (Matematikksenteret, 2019b; Statped, 2019), og misoppfatningene kan knyttes til *overgeneralisering* (Ryan & Williams, 2007) av sentrale begrep i algebra (se kapittel 3.5). På denne måten vil jeg hevde at studien bidrar med informasjon i to av tre deler av hvordan lærere kan bruke misoppfatninger som et bidrag til videre læring i klasserommet.

Den høye andelen elever i misoppfatning, og den høye andelen elever som ikke besvarer oppgavene, identifiserer to sider av elevenes utfordringer i algebra. Begge disse funnene kan være med å forklare resultatet på TIMMS, som viser at norske elever presterer lavt innen algebra i TIMSS (Bergem et al., 2016; Grønmo et al., 2012; Onstad et al., 2016).

Det siste jeg ønsker å trekke fram er metoden som studien bygger på. Ay (2017) etterspør mer forskning som i større grad identifiserer misoppfatninger enn det tradisjonelle ettlagstester gjør. Ved å bruke en flerlagstest for å undersøke elevers matematiske tenkning, og hvordan de uttrykker grad av sikkerhet til eget svar (se kapittel 4.2.1), svarer studien på det Ay (2017) etterspør. Studien har vist at metoden for datainnsamlingen gir både kvantitativ og kvalitativ informasjon om elevenes tenkning. Den gir et rikt datamateriale, som etter min vurdering identifiserer misoppfatninger på en mye mer valid og reliabel (se kapittel 4.4.1og 4.4.2) måte, enn mer tradisjonelle ettlagstester. Jeg vil også trekke fram analysemetodene som er valgt i studien (se kapittel 4.6), som retter fokus på elever i misoppfatning og utbredelse av misoppfatninger utover enkeltelever. Jeg er helt sikkert ikke den første som benytter metoden som studien bygger på, men litteraturgjennomgangen som er gjort i forbindelse med studien tyder i alle fall på at det er en metode som er lite brukt i et stort hav av forskning på elevenes misoppfatninger. På bakgrunn av det anbefaler jeg andre som skal gjennomføre tilsvarende studier å benytte lignende metode.

6.4 Begrensninger i studien

I dette delkapitlet vil jeg se med et kritisk blikk på studien og samtidig presentere noen forbedringspotensialer. Det første jeg vil rette søkelys på er valg av søkeord som dannet grunnlaget for litteraturgjennomgangen, som er beskrevet i kapittel 2. Jeg valgte å utelukke søkeordet *conception** for å redusere omfanget til en håndterbar mengde, ut fra rammene til masterstudien. Et raskt tilleggssøk i april 2020, viser at ved å ha inkludert *conception** ville omfanget blitt over doblet, noe som ville ha ført til at kvaliteten på andre deler av studien hadde blitt dårligere. Det er imidlertid viktig å påpeke at på bakgrunn av dette valget, kan det være flere studier som undersøker for eksempel utbredelse av misoppfatninger utover enkeltoppgaver enn det litteraturgjennomgangen (se vedlegg 1) viser. Siden litteraturgjennomgangen i hovedsak er brukt for å plassere studien i en større sammenheng, og at selve studien bygger en rekke andre ustrukturerte søk samt forfølgelse av referanser, er jeg trygg på at litteraturen studien bygger på er solid forankret i forskningen som finnes om misoppfatninger i algebra.

Det andre jeg vil rette søkelyset på er oppgavesettet, og spesielt oppgavene som er brukt for å identifisere misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon*. Begrensninger med denne misoppfatningen er kommentert flere ganger i studien, blant annet fordi den, på bakgrunn av faktoranalysen, ble redusert fra tre til to oppgaver. Det er større spørsmålstegn knyttet til resultatene av analysene for denne misoppfatningen enn de andre, siden analysen er basert på bare to oppgaver.

Det er flere ting jeg gjerne skulle gjort annerledes for å kunne knytte større sikkerhet til misoppfatningen. Det første er at jeg burde satt av bedre tid mellom piloten og innsamling av data, som hadde muliggjort å gå dypere inn i analysen fra piloten. Jeg hadde i underkant av ei uke til rådighet til å analysere data fra piloten. Hovedfokuset da var å identifisere oppgaver som åpenbart ikke fungerte, for å redusere arbeidsmengden. Jeg måtte være sikker på at elevene fikk tilstrekkelig med tid til å besvare oppgavene, og dermed gjøre det mulig å identifisere elever i misoppfatning. I tillegg burde jeg ha gjennomført en faktoranalyse på datamaterialet fra piloten, for få en antydning på om oppgavene identifiserte de misoppfatningene de er utviklet på. Datagrunnlaget fra piloten er bare 58 oppgaver, som er i nedre del av hva som er anbefalt for å foreta en faktoranalyse (Cohen et al., 2018), men om den hadde vist at få oppgaver tester *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* hadde det gitt meg mulighet til å ha satt inn flere oppgaver.

Oppgavene som tester misoppfatningen *svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon,* er i tillegg de to oppgavene i oppgavesettet med lavest andel svar som tyder på misoppfatning. Om resultatet er reelt, eller om det er noe med oppgavene som er årsaken til disse resultatene, vites ikke. Jeg har med erfaring fra egen praksis en mistanke om at oppgavene kan spille en rolle her, og at misoppfatningen muligens kunne vært testet med oppgaver som er mer egnet, enn det som er gjort i min studie. For eksempel kunne det vært interessant å utfordre elevene mer direkte i en oppgave der de skulle tatt stilling til en påstand som har hevdet at et svar ikke kan inneholde en regneoperasjon. Dette er noe som kunne ha vært interessant å gjøre for flere misoppfatninger.

En annen ting jeg i ettertid ser at jeg kunne gjort annerledes med oppgavesettet, er at ordlyden i oppgave 3 (se kapittel 5.3.3), og bruk av begrepet *matematikkfortelling,* kunne vært endret til et begrep som flere elever har et forhold til, som for eksempel *fortelling.* En annen løsning kunne vært å ha vist et eksempel på et regneuttrykk og matematikkfortelling fra aritmetikken, men utfordringen med det har vært at det kan legge uønskede føringer for elevenes tenkning.

Jeg ser altså flere ting som kunne ha forbedret oppgavesettet, men alt i alt synes jeg at settet fungerte godt, og at valg av metode som er brukt i studien gjør at jeg sitter med et rikt datamateriale med mye informasjon om elevenes tenkning. Dette er kommentert videre i kapittel 6.3.

Et annet forbedringspotensial i studien er at utvalget ble betydelig mindre enn hva som var ønskelig. Dette gjør at resultatene er mindre generaliserbare og at analyser for å undersøke statistisk signifikans ikke lar seg gjøre for noen misoppfatninger. Antallet er imidlertid større enn en del andre kvantitative studier om misoppfatninger (se vedlegg 1).

7 Konklusjon og videre forskning

Hensikten med denne studien har vært å undersøke om elever i misoppfatning selv er klar over at de er i misoppfatning og samtidig undersøke utbredelsen av misoppfatninger knyttet til algebra på et utvalg norske ungdomsskoleelever. Bakgrunnen for studien er min egen erfaring med misoppfatninger fra egen undervisning og de norske resultatene fra TIMSS, som viser at norske elever presterer lavt i algebra. Misoppfatninger kommer ofte av overgeneralisering av tidligere kunnskap, ved at elevene oppdager mønster og strukturer i noen sammenhenger og overfører disse ukritisk i andre sammenhenger der de ikke er gyldige. I studien ligger det et produktivt syn på misoppfatninger, ved at misoppfatninger er en naturlig del av begrepsutviklingen i matematikk, og at det er en kilde til videre læring. Studiens resultater baserer seg på en flerlagstest som samler inn informasjon om elevenes matematiske svar i to lag og elevens uttrykte grad av sikkerhet til eget svar i ett lag. Oppgavesettet består av diagnostiske oppgaver, utviklet for å identifisere spesifikke misoppfatninger, der hver misoppfatning er testet med flere oppgaver som ble besvart av 368 elever.

I studien er det brukt to ulike terminologier om elever og misoppfatninger. Elever i misoppfatning er i denne studien definert som elever som avgir et svar som tyder på misoppfatning i alle oppgaver per misoppfatning. Dette er en strengere form for å kategorisere elever i misoppfatning enn i andre studier. I tillegg brukes betegnelsen elever som viser tegn på misoppfatning i studien, som er elever som avgir svar som tyder på misoppfatning i minst halvparten av oppgavene som tester samme misoppfatning.

Resultatene fra studien viser at misoppfatninger knyttet til algebra er vanlig blant et utvalg elever på ungdomsskolen. Selv om utvalget i studien er begrenset, og at jeg skal være forsiktig med å generalisere funnene, gir det en indikasjon til lærere i grunnskolen om at det trolig sitter elever med misoppfatninger i deres klasserom. Studien indikerer i tillegg to viktige faktorer; elevene i deres klasserom er sannsynligvis i ulike misoppfatninger, og de er trolig ikke klar over at de selv er i en misoppfatning.

For to av misoppfatningene studien undersøker, uttrykker elever i misoppfatning i gjennomsnitt statistisk signifikant høyere grad av sikkerhet til eget svar enn elever som ikke er i misoppfatning. For tre av misoppfatningene er det ingen statistisk signifikante forskjeller, mens i én misoppfatning uttrykker elever som ikke er i misoppfatning statistisk signifikant høyere grad av sikkerhet enn elever som er i misoppfatning. Studien undersøker også uttrykt grad av sikkerhet for alle avgitte matematiske svar. Her viser resultatene at elevene har uttrykt tilnærmet lik grad av sikkerhet til svar som er matematisk riktige og svar som tyder på misoppfatning, der gjennomsnittet for riktige svar er 3,8 og gjennomsnittet for svar som tyder på misoppfatning er 3,7. På skalaen datamaterialet ble samlet inn på, tilsvarer dette nær *sikker,* på spørsmålet i hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig. Svar som er registrert som andre feilsvar, eller tilfeldige feil, har i gjennomsnitt en uttrykt grad av sikkerhet på 2,6. Resultatene viser at elevene i studien som er i misoppfatning knyttet til algebra, ikke uttrykker lavere grad av sikkerhet til eget svar, enn elever som ikke er i misoppfatning.

Studien viser også at misoppfatninger er vanlig blant elevene i studien. Over 40 % av elevene er i én eller flere misoppfatninger knyttet algebra. Ser vi på elever som viser tegn på misoppfatning, øker andelen til nærmere 80 %. For fire av seks misoppfatninger er andelen elever i misoppfatning over 10 %, der den høyeste er på 13 %. Det viser at det ikke er én bestemt misoppfatning som alene forklarer den høye andelen elever i misoppfatning, men heller at elevene er i ulike misoppfatninger.

7.1 Videre forskning

Studien etterlater seg noen spørsmål som gjerne må utforskes av andre. Studien er begrenset til et utvalg på litt i overkant av 300 elever, som gjør at den gir en indikasjon på at elever i misoppfatning selv ikke er klar over at de er i en misoppfatning. Det hadde imidlertid vært svært interessant å ha foretatt studien på andre, gjerne større utvalg, elever for å kunne generalisere funnene i større grad.

I tillegg har det vært interessant å se på om resultatene for uttrykt grad av sikkerhet som studien viser er knyttet til misoppfatninger i algebra, eller om studier som undersøker andre misoppfatninger viser det samme. For eksempel hadde det vært interessant å ha benyttet metoden studien bygger på for Læringsstøttende prøver i matematikk[10], som ser på misoppfatninger knyttet til tall, tallregning og brøk og prosent, utviklet av Matematikksenteret, på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet.

Resultatene fra studien viser også at det er en stor del av elevene som ikke svarer på oppgavene. I drøftingen av dette funnet setter jeg fram en hypotese om at dette skyldes at elevene ikke har kommet langt nok i sin algebrautvikling til at de har oppdaget mønstre og sammenhenger og foretatt generaliseringer som mange misoppfatninger forutsetter. Dette er imidlertid en hypotese som må undersøkes nøye før den eventuelt kan bekreftes eller avkreftes, men om den viser seg å stemme tilfører det viktig informasjon til forskningsfeltet om misoppfatninger og måten vi bør behandle ubesvarte oppgaver i framtidige studier om misoppfatninger.

Studien gir en indikasjon av at enkelte misoppfatninger er like utbredt uavhengig av trinn, mens noen er mer trinnavhengige. Det hadde vært interessant å ha foretatt en longitudinell studie der elever har blitt fulgt over flere år. På den måten kunne vi ha identifisert når i utdanningsløpet ulike misoppfatninger oppstår og for eksempel hvor stor andel av elevene som forblir i misoppfatninger over tid. Samtidig hadde dette gitt muligheter til å se nærmere på sammenhengen mellom ulike misoppfatninger. Er det noen misoppfatninger som i større grad er avhengige av hverandre, og som kanskje utvikles på bakgrunn av en annen misoppfatning?

Som pekt på i kapittel 6.3, bidrar studien med å tette noen kunnskapshull som er påpekt i andre studier. Selv om de fleste misoppfatningene som er beskrevet i kapittel 3.5, knyttes til undervisning, sier studien i liten grad noe om hvordan elevenes misoppfatninger skal utfordres, slik at elevene beveger seg ut av misoppfatningene. Dette er for øvrig den siste av de i alt tre delene av «professional error competence» (Seifried & Wuttke, 2010, s. 150), som det er referert til flere steder i studien. Litteraturgjennomgangen i forbindelse med denne studien (se vedlegg 1), viser at det er flere studier som retter søkelys på hvordan undervisningen kan adressere misoppfatninger, men dette er et felt det trolig aldri blir nok forskning på.

[10] www.matematikksenteret.no/LSMAT

Referanser

Akhtar, Z. & Steinle, V. (2013). Probing students' numerical misconceptions in school algebra. I V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Red.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 36–43). Melbourne: MERGA.

Akhtar, Z. & Steinle, V. (2017). The prevalence of the letter as object misconception in junior secondary students. I A. Downton, S. Livy & J. Hall (Red.), *40 years on: We are still learning! Proceedings of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 77–84). Melbourne: MERGA.

Albaum, G. (1997). The Likert scale revisited: An alternate version. *Journal of the Market Research Society, 39*(2), 331-348. https://doi.org/10.1177/147078539703900202

Aliaga, M. & Gunderson, B. (2002). *Interactive Statistics* Prentice Hall, New York.

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. *Developmental psychology, 35*(1), 127-145. https://doi.org/10.1037//0012-1649.35.1.127

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2020). *Multi 1A, 3. utg.: Matematikk for barnetrinnet: Elevbok* (3. utg.). Oslo: Gyldendal.

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2014). *Multi 5, 2. utg.: Matematikk for barnetrinnet: Oppgavebok* (2. utg.). Oslo: Gyldendal.

Apuke, O. D. (2017). Quantitative research methods a synopsis approach. *Kuwait Chapter of the Arabian Journal of Business Management Review, 6*(11), 40-47. https://doi.org/10.12816/0040336

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272. https://doi.org/10.1080/10986060701360910

Aubert, K. E. (2018, 16.08.). Algebra. Hentet 20.02.20 fra https://snl.no/algebra

Audestad, T. (2016). *Misoppfatningar i algebra hjå elevar på første trinn i vidaregåande skule* (Masteroppgave). Universitetet i Bergen, Bergen. Hentet fra http://bora.uib.no/handle/1956/12652

Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. I D. M. Shelley & D. M. Pehlivan (Red.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017* (s. 21-31). USA: ISRES.

Aygor, N. & Ozdag, H. (2012). Misconceptions in linear algebra: the case of undergraduate students. *4th World Conference on Educational Sciences (Wces-2012), 46*, 2989-2994. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.602

Balasundaram, A. B. R. (2017). *Algebravansker* (Masteroppgave). Universitet i Bergen, Bergen. Hentet fra http://bora.uib.no/handle/1956/17506

Barbieri, C. A., Miller-Cotto, D. & Booth, J. L. (2019). Lessening the load of misconceptions: Design-based principles for algebra learning. *The Journal of the Learning Sciences, 28*(3), 381-417. https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1573428

Befring, E. (2007). *Forskingsmetode med etikk og statistikk* (2. utg.). Oslo: Samlaget.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Oslo: Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. San Francisco: Jossey-Bass.

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F. & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *The Journal of Problem Solving, 7*(1), 10–24. https://doi.org/10.7771/1932-6246.1161

Booth, J. L. & Koedinger, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic poblem solving. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society, 30*, 571–576. Hentet fra https://escholarship.org/uc/item/5n28t12n

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. & Young, L. K. (2017). Misconceptions and learning algebra. I S. Stewart (Red.), *And the rest is just algebra* (s. 63-78). Springer.

Booth, L. R. (1983). *Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalised arithmetic)* (Doktoravhandling). King's College London (University of London), London. Hentet fra https://kclpure.kcl.ac.uk/portal/files/2931960/518676.pdf

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors : A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1986). Difficulties in algebra. *Australian Mathematics Teacher, 42*(3), 2-4.

Booth, L. R. (1988). Children‘s difficulties in beginning algebra. I A. F. Coxford (Red.), *The Ideas of Algebra, K-12 (1988 Yearbook)* (s. 20–32). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bozeman, K. D. (1990). Intelligent tutoring systems for teaching algebra: The handling of student misconceptions. I A. J. Turner (Red.), *Proceedings of the 28th annual Southeast regional conference* (s. 208). New York: Association for Computing Machinery.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra : F, H og J*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Bush, S. B. & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 613-632. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L. & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences, 38*, 61-67. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001

Champagne, M. V. (2014). *How to create the perfect survey* (bd. 1). North Charleston, SC: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Cheung, K. L. & Yang, D.-C. (2018). Examining the differences of Hong Kong and Taiwan students’ performance on the number sense three-tier test. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(7), 3329-3345. https://doi.org/10.29333/ejmste/91682

Chick, H. (2009). Teaching the distributive law: Is fruit salad still on the menu. I R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Red.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (bd. 1, s. 121-128). Palmerston North: MERGA.

Chow, T.-C. F. (2011). *Students' difficulties, conceptions and attitudes towards learning algebra: an intervention study to improve teaching and learning* (Doktoravhandling). Curtin University, Curtin. Hentet fra http://hdl.handle.net/20.500.11937/1385

Clement, J. (1982). Algebra word poblem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16–30. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/748434

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. I L. Streefland (Red.), *Proceedings of the Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (bd. 1, s. 369-375). Noordwijkerhout: Utrecht University Utrecht.

Cockburn, A. D. & Littler, G. (2008). *Mathematical misconceptions: A guide for primary teachers*. London: SAGE.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). New York: Routledge.

Collis, K. F. (1975). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A piagetian viewpoint*. Hawthorn: Australian Council for Educational Research.

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. *Review of research in education, 16*(1), 3-56. https://doi.org/10.3102/0091732X016001003

Djam'an, N. & Arsyad, N. (2019). Development and application of a three-tier test diagnostic Instrument to assess junior high school students' misconceptions in algebra. I M. Sakakibara, S. Graham, G. D. Dirawan, Y. b. Kamin & A. Y. Waziri (Red.), *Proceedings of the 1st International Conference on Advanced Multidisciplinary Research (ICAMR 2018)*. Makassar: Atlantis Press.

Don, G. E. A. (2011). *Secondary school students' misconceptions in algebra* (Doktoravhandling). University of Toronto, Toronto. Hentet fra http://hdl.handle.net/1807/29712

Drews, D., Dudgeon, J., Hansen, A., Lawton, F. & Surtees, L. (2017). *Children's errors in mathematics: Understanding common misconceptions in primary schools* (4. utg.). London: SAGE.

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21-29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eccius-Wellmann, C. (2012). The need to know algebra skills, misconceptions, misapplications and weaknesses of students. *China-USA Business Review, 11*(09), 1256–1266. https://doi.org/10.17265/1537-1514/2012.09.008

Eliassen, O. & Mathisen, C. (2018). *En kvalitativ studie av elevers misoppfatninger i forbindelse med algebraoppgaver fra TIMSS* (Masteroppgave). UiT Norges arktiske universitet, Tromsø. Hentet fra https://hdl.handle.net/10037/13795

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching children mathematics, 6*(4), 232–236. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/41197398

Foster, D. (2007). Making meaning in algebra: Examining students' understandings and misconceptions. *Assessing Mathematical Proficiency, 53*, 163-176. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378.017

Fui, C. S. & Lian, L. H. (2018). The effect of computerized feedback on students' misconceptions in algebraic expression. *Pertanika Journal of Social Science and Humanities, 26*(3), 1387-1403. Hentet fra http://journals-jd.upm.edu.my/Pertanika%20PAPERS/JSSH%20Vol.%2026%20(3)%20Sep.%202018/10%20JSSH-1869-2016.pdf

Fujii, T. (2003). Probing students understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. I N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Red.), *Proceedings of the 2003 joint meeting og PME and PMENA* (bd. 1, s. 47-66). Honolulu,: Center for Research and Development Group, University of Hawai'i,.

Fujii, T. (2014). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 453-455). Dordrecht: Springer.

Fumador, E. S. & Agyei, D. D. (2018). Students' errors and misconceptions in algebra: Exploring the impact of remedy using diagnostic conflic and conventional teaching approaches. *International Journal of Education, Learning and Development, 6*(10), 1–15. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/329024422

Grossman, B. M. (1996). *Intelligent algebraic tutoring based on student misconceptions* (Masteroppgave). Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts. Hentet fra https://core.ac.uk/download/pdf/4403556.pdf

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken-derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Bedre skole, 1*, 17-22.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Borge, I. C. (2017). Oppsummering og drøfting av hovedfunn. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Gurel, D. K., Eryilmaz, A. & McDermott, L. C. (2015). A Review and Comparison of Diagnostic Instruments to Identify Students' Misconceptions in Science. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education, 11*(5), 989-1008. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1369a

Hair, J. F. (2014). *Multivariate data analysis* (7. utg.). Harlow: Pearson.

Hansen, A., Drews, D., Dudgeon, J., Lawton, F. & Surtees, L. (2017). *Children's errors in mathematics* (4. utg.). California: SAGE Publications.

Hasan, S., Bagayoko, D. & Kelley, E. L. (1999). Misconceptions and the certainty of response index (CRI). *Physics education, 34*(5), 294–299. https://doi.org/10.1088/0031-9120/34/5/304

Hauge, R. E. (1997). *Bruk av diagnostiske oppgaver i grunnskolen for å kartlegge barns misoppfatninger i algebra* (Masteroppgave). Universitetet i Bergen, Bergen. Hentet fra http://bora.uib.no/bitstream/handle/1956/6692/94939524.pdf

Heale, R. & Twycross, A. (2015). Validity and reliability in quantitative studies. *Evidence Based Nursing, 18*(3), 66-67. https://doi.org/10.1136/eb-2015-102129

Hjardar, E. (2014). *Faktor: 9 Grunnbok* (Bokmål. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Hompland, A. B. (2012). *Misoppfatningar i algebra på ungdomsskulen: ei diagnostisk tilnærming* (Masteroppgave). Universitetet i Bergen, Bergen. Hentet fra https://bora.uib.no/handle/1956/6692

Hornburg, C., McNeil, N., Chesney, D. & Matthews, P. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences, 38*, 61-67. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001

IBM Corporation. (2017). IBM SPSS Statistics (Versjon 25.0.0.1).

Irawati, Zubainur, C. M. & Ali, R. M. (2018). Cognitive conflict strategy to minimize students' misconception on the topic of addition of algebraic expression. *Journal of Physics: Conference Series, 1088*(1), 012084. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012084

Irwansyah, I., Sukarmin, S. & Harjana, H. (2018). Development of three-tier diagnostics instruments on students misconception test in fluid concept. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika Al-Biruni, 7*(2), 207-217. https://doi.org/10.24042/jipfalbiruni.v7i2.2703

Jurkovic, N. (2001). Diagnosing and correcting student's misconceptions in an educational computer algebra system. I E. L. Kaltofen & G. Villard (Red.), *ISSAC '01: Proceedings of the 2001 international symposium on Symbolic and algebraic computation* (s. 195-200). New York: Association for Computing Machinery.

Kaput, J. J. (2007). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 5-18). New York: Routledge.

Karlsen, H. J. (2020, 13.01.20). Bort fra statistisk signifikans og p-verdier i forskningen? *Mad in Norway*. Hentet fra https://madinnorway.org/2020/01/bort-fra-statistisk-signifikans/

Kaufmann, O. T., Olafsen, A. R. & Rikheim, K. (2010). *Matte overalt: matematikk for barnetrinnet. Arbeidsbok* (Bokmål. utg.). Oslo: Samlaget.

Kaur, B. & Sharon, B. H. P. (1994). Algebraic misconceptions of first year college students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16*(4), 43–58. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/234710297

Ketterlin-Geller, L. R. & Yovanoff, P. (2009). Diagnostic assessments in mathematics to support instructional decision making. *Practical Assessment, Research & Evaluation, 14*(16), 1-11. https://doi.org/10.7275/vxrk-3190

Kielland, A. L. (1997). *Gift; Fortuna* (bd. 8). Oslo: Aschehoug.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* (Doktoravhandling). University of Agder, Kristiansand. Hentet fra http://hdl.handle.net/11250/2616438

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Fag – fordypning – forståelse : en fornyelse av Kunnskapsløftet* (Meld. St. 28 (2015–2016)). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Kurz, T. L. & Yanik, H. B. (2017). Learning algebra through motion: An examination of pre-service teachers' misconceptions when using motion detectors for the first time. *Investigations in Mathematics Learning, 11*(1), 44-55. https://doi.org/10.1080/19477503.2017.1375360

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school, 7*(4), 23-26. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/30213397

Leonard, M. J., Kalinowski, S. T. & Andrews, T. C. (2014). Misconceptions yesterday, today, and tomorrow. *CBE-Life Sciences Education, 13*(2), 179-186. https://doi.org/10.1187/cbe.13-12-0244

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M. & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction, 26*(2), 195-217. https://doi.org/10.1080/07370000801980845

Lim, K. S. (2010). An error analysis of Form 2 (Grade 7) students in simplifying algebraic expressions: A descriptive study. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 1*(8), 139–162. Hentet fra http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/20/english/Art_20_382.pdf

Lin, C.-Y., Ko, Y.-Y. & Kuo, Y.-C. (2014). Changes in pre-service teachers' algebraic misconceptions by using computer-assisted instruction. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 21*(3), 89–101. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/273759279

Ling, G. C. L., Shahrill, M. & Tan, A. (2016). Common Misconceptions of Algebraic Problems: Identifying Trends and Proposing Possible Remedial Measures. *Advanced Science Letters, 22*(5), 1547-1550. https://doi.org/10.1166/asl.2016.6675

Lucariello, J. & Tine, M. T. (2013). Algebraic misconceptions: A test for teacher (and researcher) use for diagnosing misconceptions of the variable. I N. L. Stein & S. Raudenbush (Red.), *Developmental Cognitive Science Goes to School* (s. 250-266). New York: Routledge.

Lucariello, J., Tine, M. T. & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 30-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 1–19. https://doi.org/10.1023/A:1002970913563

Makonye, J. P. & Stepwell, N. (2016). Eliciting learner errors and misconceptions in simplifying rational algebraic expressions to improve teaching and learning. *International Journal of Educational Sciences, 12*(1), 16-28. https://doi.org/10.1080/09751122.2016.11890408

Maskiewicz, A. C. & Lineback, J. E. (2013). Misconceptions are "so yesterday!". *CBE-Life Sciences Education, 12*(3), 352-356. https://doi.org/10.1187/cbe.13-01-0014

Matematikksenteret. (2019a). Fra misoppfatning til mestring. Hentet 24.09 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-

kartlegging/l%C3%A6ringsst%C3%B8ttende-pr%C3%B8ver-i-matematikk/fra-misoppfatning-til-mestring
Matematikksenteret. (2019b). Hva er en misoppfating? Hentet 20.09 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/misoppfatninger-i-matematikk/hva-er-misoppfatning
Matematikksenteret. (2019c). Vanlige misoppfatninger knyttet til Tall. Hentet 03.10 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/misoppfatninger-i-matematikk/vanlige-misoppfatninger-knyttet-til-tall
Matthew, S. & Ruveyda, K. (2015). Exploring Algebraic Misconceptions with Technology. *Mathematics Teaching in the Middle School, 21*(4), 222-229. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.21.4.0222
McHugh, M. L. (2013). The chi-square test of independence. *Biochemia medica, 23*(2), 143-149. https://doi.org/10.11613/BM.2013.018
McIntosh, A. (2007). *Alle Teller! Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen* (M. R. Settemsdal & I. M. Stedøy-Johansen, Overs.). Trondheim: Skipnes.
McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development, 6*(2), 285-306. https://doi.org/10.1207/s15327647jcd0602_6
Melander, E. (2015). *Applied VMS to handle mathematical misconception in algebra: Metacognition through interactive visualisation prototype* [Tillämpad VMS för att hantera matematiska missuppfattningar i algebra: Metakognition genom interaktiv visualiseringprototyp] (Masteroppgave). Linköpings universitet, Linköping. Hentet fra http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1040926/FULLTEXT01.pdf
Mestre, J. (1987). Why should mathematics and science teachers be interested in cognitive research findings? *Academic Connections, 3*, 8-11.
Microsoft Corporation. (2016). Microsoft Excel (Versjon 16.0.4738.1000).
Mullis, I. V. S. & Martin, M. O. (2013). *TIMSS 2015 assessment frameworks*. Lynch School of Education, Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.
Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2016). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. Lynch School of Education, Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.
Mulungye, M. M., O'Connor, M. & Ndethiu, S. (2016). Sources of student errors and misconceptions in algebra and effectiveness of classroom practice remediation in Machakos County - Kenya. *Journal of Education and Practice, 7*(10), 31–33. Hentet fra http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1099568.pdf
Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult?: A study of norwegian lower secondary students' algebraic proficiency* (Doktoravhandling). Universitet i Oslo, Oslo.
Naalsunds, M. (2012, 31.05.2012). Derfor er algebra så vanskelig. I H. Ø. Jakobsen (Red.). www.forskning.no. Hentet fra https://forskning.no/barn-og-ungdom-skole-og-utdanning-matematikk/derfor-er-algebra-vanskelig/703396
Ndemo, Z. & Ndemo, O. (2018). Secondary school students' errors and misconceptions in learning algebra. *Journal of Education and Learning (EduLearn), 12*(4). Hentet fra http://journal.uad.ac.id/index.php/EduLearn/article/view/9556
NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Oslo: De nasjonale forskningsetiske komiteene. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf
Norman, G. (2010). Likert scales, levels of measurement and the "laws" of statistics. *Advances in health sciences education, 15*(5), 625-632. https://doi.org/10.1007/s10459-010-9222-y
Nygaard, O. & Zernichow, A. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Spesialpedagogikk, 4*, 34-38.
Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics: Strategies to correct them* University Press of America.

Onstad, T., Hole, A. & Grønmo, L. S. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015: Matematikk og fysikk i videregående skole*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing).
Ormrod, J. E. (2016). *Human learning* (7. utg.). Boston: Pearson.
Permata, D., Wijayanti, P. & Masriyah, P. (2019). Students' misconceptions on the algebraic prerequisites concept: Operation of integer numbers and fractions. *Journal of Physics: Conference Series, 1188*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1188/1/012059
Peşman, H. & Eryılmaz, A. (2010). Development of a Three-Tier Test to Assess Misconceptions About Simple Electric Circuits. *The Journal of Educational Research, 103*(3), 208-222. https://doi.org/10.1080/00220670903383002
Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science education, 66*(2), 211–227. https://doi.org/10.1002/sce.3730660207
Progeny Software Inc. (2018). Timeline maker pro (Versjon 4.5.40).
Rakes, C. R. (2010). *Misconceptions in rational numbers, probability, algebra, and geometry* (Doktoravhandling). University of Louisville, Louisville. Hentet fra https://ir.library.louisville.edu/etd/1176/
Reed, R. A. (2010). *From learner algebraic misconceptions to reflective educator : Three cycles of an action research project* (Masteroppgave). University of Kwa-Zulu Natal. Hentet fra https://researchspace.ukzn.ac.za/bitstream/handle/10413/6073/Reed_Rosanthia_2010.pdf
Rollnick, M. & Mahooana, P. P. (1999). A quick and effective way of diagnosing student difficulties: two tier from simple multiple choice questions. *South African Journal of Chemistry, 52*(4), 161–164. Hentet fra https://journals.co.za/docserver/fulltext/chem/52/4/1571.pd
Rowntree, R. V. (2009). Students' understandings and misconceptions of algebraic inequalities. *School science and mathematics, 109*(6), 311–312. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18100.x
Russell, M., O'Dwyer, L. M. & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. *Behavior research methods, 41*(2), 414–424. https://doi.org/10.3758/BRM.41.2.414
Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15. Learning from errors and misconceptions.* Berkshire: McGraw-Hill Education.
Santiago, L., Coolbaugh, A. R., Markle, H. A., Hensel, R. A. M. & Morris, M. L. (2018). *Algebra-related misconceptions identified in a first-year engineering reasoning course*. Innlegg presentert ved 2018 ASEE Annual Conference & Exposition, Salt Lake City, Utah. Abstract hentet fra https://peer.asee.org/board-129-algebra-related-misconceptions-identified-in-a-first-year-engineering-reasoning-course.pdf
Schwartzman, S. (1996). Some common algebraic misconceptions. *Mathematics and Computer Education, 30*(2), 164–173.
Seifried, J. & Wuttke, E. (2010). Student errors: How teachers diagnose and respond to them. *Empirical Research in Vocational Education and Training, 2*, 147-162. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/233707062
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/bf00302715
Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191–228. https://doi.org/10.1007/BF01273663
Shadish, W. R., Cook, T. D. & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference*. Boston: Houghton Mifflin.
Sheshkalani, S. (2012). *Elevenes misoppfatninger i algebra kan avsløres og avklares i introduksjonen?* [Students' misconceptions in algebra can be revealed and clarified in the introduction?] (Masteroppgave). Universitetet for miljø- og biovitenskap, Oslo. Hentet fra http://hdl.handle.net/11250/188953

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860
Sjøberg, S. (1998). Jean Piaget: Forstått og misforstått? Brukt og misbrukt? *Nordisk pedagogik, 18*(2), 102-115. Hentet fra https://folk.uio.no/sveinsj/Jean_Piaget_Nordisk_%20Ped_Sjoberg.pdf
Sjøberg, S. (2007). Internasjonale undersøkelser: Grunnlaget for norsk utdanningspolitikk. I I. H. Hølleland (Red.), *På vei mot Kunnskapsløftet. Begrunnelser, løsninger og utfordringer* (s. 112–133). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
Sjøberg, S. (2014). Pisafisering av norsk skole. En suksesshistorie fra OECD. I K. A. Røvik, T. V. Eilertsen & E. M. Furu (Red.), *Reformideer i norsk skole: spredning, oversettelse og implementering* (s. 195–222). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang & V. Rohde (Red.), *Matematikk for alle. Rapport for LAMIS* (bd. 1, s. 24–37). Trondheim: LAMIS.
Smith III, J. P., Disessa, A. A. & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115–163. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/1466679
Statped. (2019). Misoppfatninger. Hentet 20.09 2019 fra http://www.acm1.no/dynamisk-undervisning/?page_id=327
Staudt, C. (2002). Understanding algebra through handhelds: Feedback beamed instantly helps a teacher identify students' misconceptions and correct them during a graphing lesson. *Learning & Leading with Technology, 30*(2), 36–39.
Stegall, J. B. & Malloy, J. A. (2019). Addressing misconceptions in algebra 1. *The Mathematics Teacher, 112*(6), 450-454. https://doi.org/10.5951/mathteacher.112.6.0450
Steinle, V., Gvozdenko, E., Price, B., Stacey, K. & Pierce, R. (2009). Investigating students' numerical misconceptions in algebra. I R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Red.), *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (bd. 2, s. 491-498). Palmerston North: MERGA.
Stephens, A. C. (2005). Developing students' understandings of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(2), 96-100. Hentet fra https://www.jstor.org/stable/41182862
Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9000-1
Stevens, S. S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science, 103*(2684), 677-680. https://doi.org/10.1126/science.103.2684.677
Strike, K. A. & Posner, G. J. (1985). A conceptual change view of learning and understanding. I L. H. T. West & A. L. Pines (Red.), *Cognitive structure and conceptual change* (s. 216–217). Orlando: Academic Press.
Svingen, O. E. L. (2016). Barns strategier i arbeid med tall. *Matematikksenteret*, 1–17. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Barns%20strategier%20i%20arbeid%20med%20tall.pdf
Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: challenges and strategies* Department for Education and Skills Standards Unit.
Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2014). *Using multivariate statistics* (6. utg.). Harlow: Pearson.
Tavakol, M. & Dennick, R. (2011). Making sense of Cronbach's alpha. *International journal of medical education, 2*, 53-55. https://doi.org/10.5116/ijme.4dfb.8dfd
Titus, F. (2010). *A cognitive analysis of developmental mathematics students' errors and misconceptions in real number computations and evaluating algebraic expressions* (Doktoravhandling). University of Houston, Houston. Hentet fra https://eric.ed.gov/?id=ED518732
Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn. *American Educator, 19*(1), 30-37. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/240415845

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2013, 20.10.2014). Reviderte læreplaner. Hentet 03.10 2019 fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/Erfaringer-og-vurderinger-av-eksamen-2013/6-Reviderte-lareplaner/

Utdanningsdirektoratet. (2015). Vær bevisst i valg av oppgaver. Hentet 03.05 2019 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/regning/god-regneopplaring/2.-var-bevisst-i-valg-av-oppgaver/

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Rammeverk for nasjonale prøver*. www.udir.no. Hentet fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/rammeverk-for-nasjonale-prover/

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Velleman, P. F. & Wilkinson, L. (1993). Nominal, ordinal, interval, and ratio typologies are misleading. *The American Statistician, 47*(1), 65-72. https://doi.org/10.2307/2684788

Wang, X. (2015). The Literature review of algebra learning: focusing on the contributions to students' difficulties. *Creative education, 6*, 144–153. https://doi.org/10.4236/ce.2015.62013

Welder, R. M. (2006). *Prerequisite knowledge for the learning of algebra*. Innlegg presentert ved Hawaii International Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields, Honolulu. Abstract hentet fra https://pdfs.semanticscholar.org/5098/1762429884763ea66b67f3852447f4527de6.pdf

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School science and mathematics, 112*(4), 255-264. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x

Yang, D.-C. & Sianturi, I. A. J. (2020). Sixth grade students' performance, misconception, and confidence on a three-tier number sense test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–21. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10051-3

Zielinski, S. F. (2017). *From no to yes: The impact of an Intervention on the persistence of algebraic misconceptions among secondary school algebra students* (Doktoravhandling). Northeastern University, Boston. https://doi.org/10.17760/d20270105

Zuya, H. E. (2014). Mathematics teachers' responses to students' misconceptions in algebra. *International Journal of Research in Education Methodology, 6*(2), 830-836. https://doi.org/10.24297/ijrem.v6i2.3880

Vedlegg

Vedlegg 1: Gjennomgang av tidligere forskningslitteratur
Vedlegg 2: Kompetansemål som omhandler algebra i LK06
Vedlegg 3: Oppgavesett - pilot
Vedlegg 4: Oppgavesett – hovedstudien
Vedlegg 5: Valideringsskjema av oppgavesett
Vedlegg 6: Ekstern validering av oppgavesett – pilot
Vedlegg 7: Kodebok for vurdering av oppgavene i oppgavesettet
Vedlegg 8: Teknisk rapport
Vedlegg 9: Variasjonsanalyse oppgavenivå
Vedlegg 10: Variasjonsanalyse elever i misoppfatning
Vedlegg 11: *Cohen's d* for gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatninger
Vedlegg 12: Kjikvadrattester for utbredelse på de ulike trinnene
Vedlegg 13: Søknad for prosjektet til Norsk senter for forskningsdata
Vedlegg 14: Godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata
Vedlegg 15: Utdrag fra chat med Norsk senter for forskningsdata angående bruk av elevbesvarelser
Vedlegg 16: Samtykkeskjema for deltagelse i studie

Vedlegg 1: Gjennomgang av tidligere forskningslitteratur

Tittel	**Referanse**	**Type publikasjon**	**Hensikt**	**Forsknings-metode**	**Alders-gruppe**	**Misopp-fatninger identifisert relevante for min studie**	Studien fokuserer på **utbredelse utover enkelt-oppgaver**	**sammen-heng mellom misoppfat-ninger**	**elevenes opplevelse av misopp-fatninger**
Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception	(Clement, 1982)	Artikkel	Belyse misoppfatninger blant studenter	Mixed-method N_{kvan}: 150 N_{kval}: 15	Studenter, college, ingeniør studiet (USA)	(3)	-	-	-
Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalised arithmetic)	(L. R. Booth, 1983)	Doktor-avhandling	Belyse hvordan undervisning kan tilpasses (utfra intervju) for å redusere utbredelsen av misoppfatninger	Mixed-method N_{kvan}: ? N_{kval}: 72	Elever, 13-15 år (USA)	(2), (3), (4), (5), (7)	-	-	-
Intelligent tutoring systems for teaching algebra: The handling of student misconceptions	(Bozeman, 1990)	Konferanse-foredrag	Belyse hvordan bruk av digitale verktøy kan identifisere misoppfatninger	-	-	-	-	-	-
Algebraic Misconceptions of First Year College Students	(Kaur & Sharon, 1994)	Artikkel	Belyse misoppfatninger blant -studenter	Mixed-method N_{kvan}: 18 N_{kval}: ?	Studenter, college (Singapore)	-	-	-	-
Some Common Algebraic Misconceptions	(Schwartzman, 1996)	Artikkel	Belyse misoppfatninger blant college-studenter	Kvalitativ N=21	Studenter, college (USA)	-	-	-	-

Intelligent algebraic tutoring based on student misconceptions	(Grossman, 1996)	Master-oppgave	Utvikle programvare som identifiserer typiske feil og bruke den informasjonen til å gi hint	Kvalitativ N = 1?	Elev 8. klasse (USA)	(6)	-	-	-
Bruk av diagnostiske oppgaver i grunnskolen for å kartlegge barns misoppfatninger i algebra	(Hauge, 1997)	Master-oppgave	Belyse hvilke misoppfatninger blant elever, og hvordan konstruere og bruke diagnostiske oppgaver for å kartlegge disse	Mixed-method N_{kvan}: 1523 N_{kval}: 10	Elever, 6., 8., 10. klasse (Norge)	(3), (5), (7)	-	-	-
Diagnosing and correcting student's misconceptions in an educational computer algebra system	(Jurkovic, 2001)	Konferanse-foredrag	Belyse hvordan bruk av digitale verktøy kan identifisere misoppfatninger	-	-	-	-	-	-
Understanding algebra through handhelds; feedback beamed instantly helps a teacher identify students' misconceptions and correct them during a graphing lesson. (Mathematics)	(Staudt, 2002)	Artikkel	Belyse hvordan bruk av digitale verktøy kan identifisere misoppfatninger	Kvalitativ N=?	Elever, middle school (USA)	-	-	-	-
Making Meaning in Algebra: Examining Students' Understandings and Misconceptions	(Foster, 2007)	Bokkapittel	Belyse hvordan en diagnostisk prøve kan identifisere misoppfatninger	Kvalitativ N=5	Elever, ikke spesifisert (algebra1) (USA)	(1)	-	-	-
Key Misconceptions in Algebraic Problem Solving	(J. L. Booth & Koedinger, 2008)	Artikkel	Belyse hvordan misoppfatninger hindrer videre læring	Mixed-method N_{kvan}: 49 N_{kval}: 2	Elever, algebra1 (USA)	(1)	x	-	-
Students' understandings and misconceptions of algebraic inequalities	(Rowntree, 2009)	Artikkel	Belyse hvordan misoppfatninger hindrer videre læring	Review	Elever, ulike aldre (USA)	-	-	-	-

Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study	(Russell et al., 2009)	Artikkel	Belyse hvordan en diagnostisk prøve med oppfølgings-materiell kan redusere utbredelsen av misoppfatninger	Kvantitativ N=905	Elever, 6–12. klasse (USA)	(1), (3), (8)	x[11]	-	-
Misconceptions in Rational Numbers, Probability, Algebra, and Geometry	(Rakes, 2010)	Doktor-avhandling	Belyse hvordan undervisning om sannsynlighet kan adressere misoppfatninger iblant annet algebra	Mixed-method N_{kvan}: ? N_{kval}: ?	?, (USA)	(2), (3)	?	?	?
A Cognitive Analysis of Developmental Mathematics Students' Errors and Misconceptions in Real Number Computations and Evaluating Algebraic Expressions	(Titus, 2010)	Doktor-avhandling	Undersøke elevers burk av prioriterte regneoperasjoner i algebraiske uttrykk og undersøke bakgrunnen for misoppfatningen	Mixed-method N_{kvan}: 10 N_{kval}: 356	Studenter, collage (USA)	(2)	-	-	-
From learner algebraic misconceptions to reflective educator : three cycles of an action research project.	(Reed, 2010)	Master-avhandling	Undersøke om elevenes ulike hjemmespråk kan kobles til misoppfatninger i algebra	Kvalitativ N=40	Elever, 8. klasse (Sør-Afrika)	(1), (3), (7)	-	-	-
Elevenes misoppfatninger i algebra kan avsløres og avklares i introduksjonen?	(Sheshkalani, 2012)	Master-oppgave	Undersøke hvordan introduksjon i algebra kan legges best mulig til rette for å identifisere og adressere misoppfatninger	Mixed-method N_{kvan}: 27 N_{kval}: 27	Elever, 7. klasse (Norge)	(2), (3)	-	-	-

[11] Definerer at elever har misoppfatninger hvis mer enn 35 % av svarene knyttet til ett begrep er feil

Misconceptions in Linear Algebra: the Case of Undergraduate Students	(Aygor & Ozdag, 2012)	Artikkel	Belyse misoppfatninger blant studenter	Mixed-method N_{kvan}: 60 N_{kval}: 60	Studenter, matematikk universitet (Tyrkia)	-	-	-	-
The Need to Know Algebra Skills, Misconceptions, Misapplications and Weaknesses of Students	(Eccius-Wellmann, 2012)	Artikkel	Belyse misoppfatninger blant studenter	Kvantitativ N=270	Studenter, økonomi universitet (Mexico)	(1), (2)	-	-	-
Improving algebra preparation: implications from research on student misconceptions and difficulties	(Welder, 2012)	Artikkel	Belyse typiske misoppfatninger og hvordan de kan adresseres	Rewiev	Elever, ulike aldre (USA)	(1), (2), (3), (7)	-	-	-
Misoppfatningar i algebra på ungdomsskulen : ei diagnostisk tilnærming	(Hompland, 2012)	Master-oppgave	Undersøke misoppfatninger og hvordan adressere disse	Mixed-method N_{kvan}: 157 N_{kval}: 14	Elever, 10. klasse (Norge)	(1), (2), (3), (5)	-	-	-
Probing Students' Numerical Misconceptions in School Algebra	(Akhtar & Steinle, 2013)	Artikkel	Belyse utbredelse av misoppfatninger	Kvantitativ N=1082	Elever, 7-9. klasse (Australia)	(3), (4)	x	-	-
Algebraic misconceptions: A test for teacher (and researcher) use for diagnosing misconceptions of the variable	(Lucariello & Tine, 2013)	Bokkapittel	Belyse hvordan en diagnostisk prøve kan identifisere misoppfatninger	Kvantitativ N=477	Elever, 6.-12. klasse (USA)	(2), (3), (7),	x[12]	-	-
Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review	(Bush & Karp, 2013)	Artikkel	Belyse misoppfatninger knyttet til nødvendige ferdigheter for å mestre algebra	Rewiev	Elever, ulike aldre (USA)	(1), (2), (3), (4), (5), (7)	-	-	-

[12] Kategoriserer de som avgir svar som knyttes til en misoppfatning i $\frac{1}{3}$ eller flere av oppgavene, som «misconceivers».

A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions	(Lucariello et al., 2014)	Artikkel	Belyse hvordan en diagnostisk prøve identifiserer misoppfatninger, og sammenheng mellom misoppfatninger og karakterer	Kvantitativ N=437	Elever, 6-12 (USA)	(2), (3), (4)	-	-	-
Changes in pre-service teachers' algebraic misconceptions by using computer-assisted instruction	(Lin et al., 2014)	Artikkel	Belyse hvordan digitale verktøy kan redusere utbredelse av misoppfatninger	Kvalitativ N=42	Lærerstudenter, 18-21 år (USA)	(1), (2)	-	-	-
MATHEMATICS TEACHERS' RESPONSES TO STUDENTS' MISCONCEPTIONS IN ALGEBRA	(Zuya, 2014)	Artikkel	Belyse læreres tilbakemeldinger på svar som tyder på misoppfatninger	Kvalitativ N=87	Lærere, lower and higher secondary school (Nigeria)	(3), (7)	-	-	-
Applied VMS to handle mathematical misconception in algebra : Metacognition through interactive visualisation prototype	(Melander, 2015)	Master-oppgave	Belyser hvordan visualiseringer og teknologi kan gi dypere forståelse for algebra ved å adressere typiske misoppfatninger	Kvantitativ N=30	Elever, 7–9. klasse (Sverige)	(1), (3), (4)	-	-	-
A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra	(Byrd, McNeil, Chesney & Matthews, 2015)	Artikkel	Belyse hvordan misoppfatninger hindrer videre læring	Kvantitativ N=100	Elever, 3. og 5. klasse (USA)	(1)	-	-	-
Exploring Algebraic Misconceptions with Technology	(Matthew & Ruveyda, 2015)	Artikkel	Belyse hvordan bruk av digitale verktøy kan identifisere misoppfatninger	Kvalitativ N=? (en klasse)	Elever, middle school (USA)	(4), (5)	-	-	-

Common Misconceptions of Algebraic Problems: Identifying Trends and Proposing Possible Remedial Measures	(Ling, Shahrill & Tan, 2016)	Konferanse-foredrag	Identifisere typiske misoppfatninger og hvordan de kan adresseres	Kvalitativ N=18	Elever, secondary school (Brunei)	(2)	-	-	-
Sources of Student Errors and Misconceptions in Algebra and Effectiveness of Classroom Practice Remediation in Machakos County—Kenya	(Mulungye, O'Connor & Ndethiu, 2016)	Artikkel	Belyse misoppfatninger, og hvordan lærere adresserer misoppfatninger	Mixed-method N_{kvan}=432 N_{kval}=15	Elever, secondary school (Kenya)	(2)	-	-	-
Misconceptions and learning algebra	(J. L. Booth et al., 2017)	Bokkapittel	Belyse typiske misoppfatninger og hvordan de kan adresseres	Rewiev	Elever, ikke spesifisert (algebra1) (USA)	(1), (2), (3), (5), (7), (8)	-	-	-
Eliciting Learner Errors and Misconceptions in Simplifying Rational Algebraic Expressions to Improve Teaching and Learning	(Makonye & Stepwell, 2016)	Artikkel	Belyse hvordan målretta undervisning knyttet til misoppfatninger reduserer utbredelsen	Kvalitativ N=10	Elever, 10. klasse (Sør-Afrika)	-	-	-	-
Misoppfatningar i algebra hjå elevar på første trinn i vidaregåande skule	(Audestad, 2016)	Master-oppgave	Belyse typiske misoppfatninger og elevenes tanker bak misoppfatningene	Mixed-method N_{kvna}=91 N_{kval}=10	Studenter, VG1 (Norge)	(1), (2), (3),	-	-	-
From No to Yes: The Impact of an Intervention on The Persistence of Algebraic Misconceptions among Secondary School Algebra Students	(Zielinski, 2017)	Doktor-avhandling	Belyse hvordan misoppfatninger kan adresseres med spesialtilpasset undervisning	Kvalitativ N=67	Elever, secondary school (USA)	(1), (3), (4), (7),	-	-	-

Algebravansker. Hva er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig? Er det hull i grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger hos elever på videregående skole som gjør at algebra er vanskelig for dem?	(Balasundaram, 2017)	Master-oppgave	Belyse at misoppfatninger elevene har med seg fra grunnskolen fører til dårlige resultater på videregående skole	Mixed-method N_{kvan}=91 N_{kval}=10	Studenter, R1 (Norge)	(1), (3), (4)	-	-	-
Algebra-related misconceptions identified in a first-year engineering reasoning course	(Santiago, Coolbaugh, Markle, Hensel & Morris, 2018)	Konferanse-foredrag	Belyse misoppfatninger blant studenter	Kvantitativ N=100	Studenter, universitet, ingeniør (USA)	-	-	-	-
The effect of computerized feedback on students' misconceptions in algebraic expression	(Fui & Lian, 2018)	Artikkel	Belyse hvordan computerbaserte tilbakemeldinger kan redusere utbredelsen av misoppfatninger	Kvantitativ N=120	Elever, 7. klasse (Malaysia)	(3), (7)	x	-	-
Cognitive conflict strategy to minimize students' misconception on the topic of addition of algebraic expression	(Irawati, Zubainur & Ali, 2018)	Konferanse-foredrag	Belyse hvordan kognitiv konflikt kan redusere utbredelse av misoppfatninger	Kvantitiv N=20	Elever, 8. klasse (Indonesia)	-	-	-	-
Secondary school students' errors and misconceptions in learning algebra	(Ndemo & Ndemo, 2018)	Artikkel	Belyse misoppfatninger blant studenter	Mixed-method N_{kvan}=65 N_{kval}= 5	Studenter, secondary school (15-17 år), (Zimbabwe)	(3)	-	-	-
Learning algebra through motion: An examination of pre-service teachers' misconceptions when using motion detectors for the first time	(Kurz & Yanik, 2017)	Artikkel	Belyse hvordan bruk av digitale verktøy kan utfordre misoppfatninger	Kvalitativ N=26	Lærerstudenter (USA)	(8)	-	-	-

Addressing Misconceptions in Algebra 1	(Stegall & Malloy, 2019)	Artikkel	Belyse hvordan misoppfatninger kan adresseres ved hjelp av språket	Kvalitativ $N_{lærere}$=3 N_{elever}=?	Lærere og elever, 10. klasse (algebra 1), (USA)	-	-	-	-
Students' misconceptions on the algebraic prerequisites concept: Operation of integer numbers and fractions	(Permata, Wijayanti & Masriyah, 2019)	Artikkel	Belyse typiske misoppfatninger blant elevene	Mixed-method N_{kvan}=32 N_{kval}= 3	Elever, 7. klasse (Indonesia)	-	-	-	-
Lessening the Load of Misconceptions: Design-Based Principles for Algebra Learning	(Barbieri et al., 2019)	Artikkel	Belyse en lærerressurs som reduserer utbredelsen av misoppfatninger	Kvantitativ N=202	Elever, 13-14 år (algebra 1), (USA)	(1)	-	-	-

(1) eleven tolker likhetstegnet som en kommando, (2) eleven tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon, (3) eleven tolker bokstaver som forkortelser for objekt, (4) eleven tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall, (5) eleven tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi, (6) eleven tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet, (7) eleven bestemmer verdien til bokstaver ut fra plassering i alfabetet, (8) eleven tror at funksjoner beskriver bilder og ikke sammenhenger, (8) eleven tror at funksjoner beskriver bilder og ikke sammenhenger

Vedlegg 2: Kompetansemål som omhandler algebra læreplanen

Trinn	Mål for opplæringa er at eleven skal kunne (LK20)	Mål for opplæringa er at eleven skal kunne (LK06)
2	• utforske og beskrive generelle eigenskapar ved partal og oddetal • utforske den kommutative og den assosiative eigenskapen ved addisjon og bruke dette i hovudrekning	• kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster
3	• utforske den kommutative og den assosiative eigenskapen ved addisjon og bruke dette i hovudrekning • beskrive likskap og ulikskap i samanlikning av storleikar, mengder, uttrykk og tal og bruke likskaps- og ulikskapsteikn	• kjenne att, eksperimentere med, beskrive og vidareføre strukturar i talmønster • bruke matematiske symbol og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing
4	• modellere situasjonar frå sin eigen kvardag og forklare tenkjemåtane sine • lage algoritmar og uttrykkje dei ved bruk av variablar, vilkår og lykkjer	
5	• løyse likningar og ulikskapar gjennom logiske resonnement og forklare kva det vil seie at eit tal er ei løysing på ei likning • lage og programmere algoritmar med bruk av variablar, vilkår og lykkjer	• beskrive referansesystemet og notasjonen som blir nytta for formlar i eit rekneark, og bruke rekneark til å utføre og presentere berekningar • stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal
6	• bruke variablar og formlar til å uttrykkje samanhengar i praktiske situasjonar • bruke variablar, lykkjer, vilkår og funksjonar i programmering til å utforske geometriske figurar og mønster	
7	• bruke ulike strategiar for å løyse lineære likningar og ulikskapar og vurdere om løysingar er gyldige • lage og vurdere budsjett og rekneskap ved å bruke rekneark med cellereferansar og formlar	

Kompetansemålene er vurdert ut fra Kaput (2007) sin definisjon av algebra.

Vedlegg 3: Oppgavesett – pilot

Oppgavesett - Algebra

☐ 8. trinn ☐ 9. trinn ☐ 10. trinn

☐ Gutt ☐ Jente

Skole: ______________________________

- Les oppgaveteksten nøye på alle oppgaver.
- Gjør så godt du kan på alle oppgaver!
  Det er flott om du avgir et svar, selv om du er usikker.
- Vis/forklar svaret ditt der du får beskjed om dette.
- Skriv gjerne med penn.

Oppgave 1

Hvilke tall skal stå i den tomme ruten?

4 + 3 + 5 = ☐ + 5

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 2

Hvilken verdi har x i utsagnet nedenfor?

3x = 30

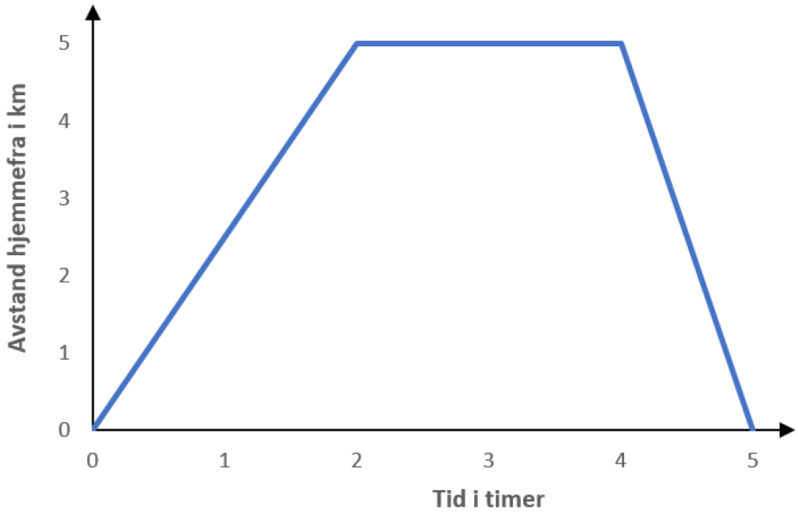
Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 3

Grafen framstiller en fottur.



Beskriv med egne ord hva grafen forteller om turen:

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 4

Skriv en matematikkfortelling som passer til utsagnet:
3a + 2a = 5a

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 5

Janne har løst oppgaven nedenfor på følgende måte:

Forenkle uttrykket hvis mulig:
3a + 2b + 7a + 2 + 3b

$3a + 2b + 7a + 2 + 3b = \underline{\underline{10a + 5b + 2}}$

Vurder om Janne sin løsning er riktig eller ikke, og forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 6

Studer utsagnet:

$x \cdot x = 16$

a) **Hvilken verdi har x i utsagnet?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

b) **Kan x ha andre verdier i utsaget (enn det du svarte i a)?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 7

Forenkle uttrykket hvis mulig:
5a + 2b + a =

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 8

Noen elever skal finne verdien til x i utsagnet x + x + x = 12

Marit svarte: x = 2, x = 5 og x = 5
Therese svarte: x = 9, x = 2 og x = 1
Astrid svarte x = 4

Vurder om svaret til hver enkelt er riktig eller galt.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 9

Linda er i USA og kjøper 6 donuts for 12 dollar.
Hun ønsker å finne ut hvor mye en donut koster, og skriver ned utsagnet 6d = 12.

Hva står *d* for i uttrykket til Linda?

- ◻ 1 donut
- ◻ dollar
- ◻ antall donuts
- ◻ donuts
- ◻ prisen per donut

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

◻ Veldig sikker ◻ Ganske sikker ◻ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ◻ Ganske usikker ◻ Veldig usikker

Oppgave 10

Hvilken verdi har x i utsagnet nedenfor?
2x + 5 = 29

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

◻ Veldig sikker ◻ Ganske sikker ◻ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ◻ Ganske usikker ◻ Veldig usikker

Oppgave 11

Vurder om utsagnet er riktig eller ikke.

8 = 8

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 12

Noen elever skal finne verdien til x for utsagnet x + y = 16.

Henrik skrev x = 6 og y = 10
Jacob skrev: x = 8 og y = 8
Fillip skrev x = 9 og y = 7

Vurder om svaret til hver enkelt elev er riktig eller feil.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 13

Hvis c + d = 7, hva er da c + d + e?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 14

Appelsiner koster a kr per stykk og bananer koster b kr per stykk.

Hvis jeg kjøper 4 appelsiner og 3 bananer, hva betyr da uttrykket 4a + 3b?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 15

Hvilke tall skal stå i den tomme ruten?

37 + 54 = ☐ + 55

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☐ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Oppgave 16

Regn ut verdien til uttrykket nedenfor, når x er 3 og y er 4:

$3x + 2y =$

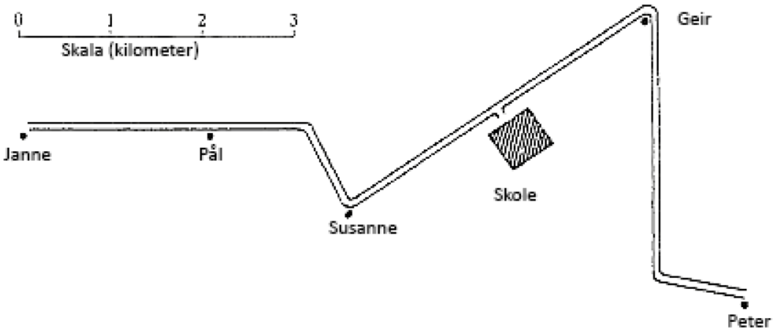
Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☐ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Oppgave 17

Faren til Peter kjører ham til skolen. Han kjører i 60 km per time på rette strekninger, men må senke farten i svingene.



Tegn en graf som viser hvordan farten varierer langs skoleveien:

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 18

Forenkle uttrykket, hvis mulig:

$2x + 4 + 3x + 5$

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 19

Vurder utsagnet nedenfor:

$4 + x = 4 + y$

□ Dette er alltid sant □ Dette er aldri sant □ Dette kan være sant

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 20

Studer utsagnet:

x + 6 + x = 13

a) **Hvilken verdi har x i utsagnet?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

b) **Kan x ha andre verdier i utsaget (enn det du svarte i a)?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 21

Hvilke tall skal stå i de tomme rutene?

3 + ☐ = 4 + 4 = ☐

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☐ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Oppgave 22

Vurder utsagnet nedenfor:

a + b + c = a + b + d

☐ Dette er alltid sant ☐ Dette er aldri sant ☐ Dette kan være sant

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

☐ Veldig sikker ☐ Ganske sikker ☐ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ☐ Ganske usikker ☐ Veldig usikker

Oppgave 23

Gulrøtter koster 13 kr per kg, og poteter koster 5 kr per kg.

Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, **hva står da 13g + 5p for**?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 24

I en klasse er det seks ganger så mange jenter som gutter.

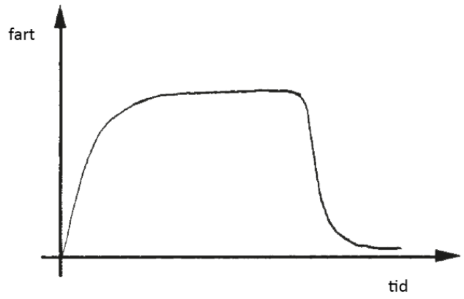
Skriv et uttrykk der du bruker bokstavene *j* og *g* for å vise sammenhengen mellom antall gutter og jenter i klassen:

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker Vet ikke □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 25



Hvilken av idrettene nedenfor stemmer mest med en slik graf?

- ◻ Stup
- ◻ Turn
- ◻ Sprint
- ◻ Fallskjermhopping
- ◻ Orientering
- ◻ Spydkast
- ◻ Sprangridning
- ◻ Høydehopp

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

◻ Veldig sikker ◻ Ganske sikker ◻ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker ◻ Ganske usikker ◻ Veldig usikker

Vedlegg 4: Oppgavesett – hovedstudien

Oppgavesett - Algebra

☐ 8. trinn ☐ 9. trinn ☐ 10. trinn

☐ Gutt ☐ Jente

Skole: ________________________________

- Les oppgaveteksten nøye på alle oppgaver.
- Gjør så godt du kan på alle oppgaver!
  Det er flott om du avgir et svar, selv om du er usikker.
- Vis/forklar svaret ditt der du får beskjed om dette.
- Skriv gjerne med penn.

Oppgave 1

Hvilke tall skal stå i den tomme ruten?

4 + 3 + 5 = ☐ + 5

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 2

Hvilken verdi har x i utsagnet nedenfor?

3x = 30

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 3

Skriv en matematikkfortelling som passer til utsagnet:

3a + 2a = 5a

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 4

Janne har løst oppgaven nedenfor på følgende måte:

Forenkle uttrykket hvis mulig:
3a + 2b + 7a + 2 + 3b

3a + 2b + 7a + 2 + 3b = 10a + 5b + 2

Vurder om Janne sin løsning er riktig eller ikke, og forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 5

Studer utsagnet:

$x \cdot x = 16$

a) **Hvilken verdi har x i utsagnet?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

b) **Kan x ha andre verdier i utsaget (enn det du svarte i a)?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 6

Forenkle uttrykket hvis mulig:

5a + 2b + a =

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 7

Noen elever skal finne verdien til x i utsagnet x + x + x = 12

Marit svarte: x = 2, x = 5 og x = 5
Therese svarte: x = 9, x = 2 og x = 1
Astrid svarte x = 4

Vurder om svaret til hver enkelt er riktig eller galt.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 8

Linda er i USA og kjøper 6 donuts for 12 dollar.
Hun ønsker å finne ut hvor mye en donut koster, og skriver ned utsagnet 6d = 12.

Hva står *d* for i uttrykket til Linda?

□ 1 donut

□ dollar

□ antall donuts

□ donuts

□ prisen per donut

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 9

Hvilken verdi har x i utsagnet nedenfor?
2x + 5 = 29

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 10

Noen elever skal finne verdien til x for utsagnet x + y = 16.

Henrik skrev x = 6 og y = 10
Jacob skrev: x = 8 og y = 8
Fillip skrev x = 9 og y = 7

Vurder om svaret til hver enkelt elev er riktig eller feil.

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 11

Hvis c + d = 7, hva er da c + d + e?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 12

Appelsiner koster a kr per stykk og bananer koster b kr per stykk.

Hvis jeg kjøper 4 appelsiner og 3 bananer, hva betyr da uttrykket 4a + 3b?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 13

Hvilke tall skal stå i den tomme ruten?

37 + 54 = ☐ + 55

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 14

Regn ut verdien til uttrykket nedenfor, når x er 3 og y er 4:

3x + 2y =

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 15

Vurder utsagnet nedenfor:

4 + x = 4 + y

□ Dette er alltid sant □ Dette er aldri sant □ Dette kan være sant

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 16

Hvilke tall skal stå i de tomme rutene?

3 + ☐ = 4 + 4 = ☐

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 17

Studer utsagnet:

$x + 6 + x = 13$

a) **Hvilken verdi har x i utsagnet?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

b) **Kan x ha andre verdier i utsaget (enn det du svarte i a)?**

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 18

Vurder utsagnet nedenfor:
a + b + c = a + b + d

□ Dette er alltid sant □ Dette er aldri sant □ Dette kan være sant

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Oppgave 19

Gulrøtter koster 13 kr per kg, og poteter koster 5 kr per kg.

Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, **hva står da 13g + 5p for**?

Vis hvordan du tenker her:

I hvor stor grad er du sikker på at svaret ditt er riktig?

□ Veldig sikker □ Ganske sikker □ Vet ikke om jeg er sikker eller usikker □ Ganske usikker □ Veldig usikker

Vedlegg 5: Valideringsskjema av oppgavesettet

Studie	Pilot	tolker likhetstegnet som en kommando	tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon	tolker bokstaver som forkortelser for objekt	tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	bestemmer verdien til bokstaver ut fra plassering i alfabetet	tror at funksjoner beskriver bilder og ikke sammenhenger	Kilde
1	1	X								(Alibali, 1999)
2	2						X			
3	4			X						Brekke et al. (2000)
4	5		X							
5	6				X					
6	7		X							Brekke et al. (2000)
7	8				X					Akhtar og Steinle (2013)
8	9			X						Akhtar og Steinle (2017)
9	10						X			
10	12					X				Akhtar og Steinle (2013)
11	13		X[13]					X		Inspirert av Küchemann (1978)
12	14			X						Zuya (2014)
13	15	X								Stephens (2006)
14	16						X			
15	19					X				Brekke et al. (2000)
16	21	X								Li et al. (2008)
17	20				X					
18	22					X				Brekke et al. (2000)
19	23			X						Brekke et al. (2000)
-	3								X	Brekke (2002)
-	11	X								Baroody & Ginsburg, 1983 hentet fra Stephens (2006)
-	17								X	Brekke (2002)
-	18		X							Ojose (2015)
-	24			X						J. L. Booth et al. (2017)
-	25								X	Brekke (2002)
Studie		3	3	4	3	3	3	1	-	
Pilot		4	4	5	3	3	3	1	3	

[13] Oppgaven endret kategori etter faktoranalyse til *tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall* (se kapittel 5.1.2)

Vedlegg 6: Ekstern validering av oppgavesett – pilot

Person 1

Oppg.	tolker likhetstegnet som en kommando	tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon	tolker bokstaver som forkortelser for objekt	tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	bestemmer verdien til bokstaver ut fra plassering i alfabetet	tror at funksjoner beskriver bilder og ikke sammenhenger	Kilde
1	X								Alibali, 1999 hentet fra Stephens (2006)
2						X			
3								X	Brekke (2002)
4			X				(x)		Brekke, Grønmo og Rosén (2000)
5		X							
6				X					
7		X					(x)		Brekke et al. (2000)
8				X					Akhtar og Steinle (2013)
9			X						Akhtar og Steinle (2017)
10						X			
11	X								Baroody & Ginsburg, 1983 hentet fra Stephens (2006)
12					X				Akhtar og Steinle (2013)
13		X							Inspirert av Küchemann (1978)
14			X				(x)		Zuya (2014)
15	X								Stephens (2006)
16						X	(x)		
17								X	Brekke (2002)
18		X					(x)		Ojose (2015)
19					X				Brekke et al. (2000)
20				X					
21	X								Li, Ding, Capraro og Capraro (2008)
22					X				Brekke et al. (2000)
23			X						Brekke et al. (2000)
24		X	X						Booth, McGinn, Barbieri og Young (2017)
se 20 25									
26								X	Brekke (2002)
sum									

Kommentar: På dette tidspunktet var det satt inn feil oppgave som oppgave 25. Siden denne ikke inngår i studien, ble det ikke foretatt noen ny validering.

Person 2

Oppg.	tolker likhetstegnet som en kommando	tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon	tolker bokstaver som forkortelser for objekt	tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet	bestemmer verdien til bokstaver ut fra plassering i alfabetet	tror at funksjoner beskriver bilder og ikke sammenhenger	Kilde
1	X	X							Alibali, 1999 hentet fra Stephens (2006)
2				(X)		X	X		
3								X	Brekke (2002)
4			X						Brekke, Grønmo og Rosén (2000)
5						(X)			
6							(X)		
7						X	(X)(X)		Brekke et al. (2000)
8				X			(X)		Akhtar og Steinle (2013)
9			X						Akhtar og Steinle (2017)
10						X			
11	X								Baroody & Ginsburg, 1983 hentet fra Stephens (2006)
12					X				Akhtar og Steinle (2013)
13							X		Inspirert av Küchemann (1978)
14			X						Zuya (2014)
15	X	X							Stephens (2006)
16						X			
17								X	Brekke (2002)
18						X			Ojose (2015)
19					X				Brekke et al. (2000)
20				X					
21	X	X							Li, Ding, Capraro og Capraro (2008)
22					X				Brekke et al. (2000)
23			X						Brekke et al. (2000)
24			X						Booth, McGinn, Barbieri og Young (2017)
25								X	
26									Brekke (2002)
sum									

Vedlegg 7: Kodebok for vurdering av oppgavene i oppgavesettet

	Riktig svar	**Svar som tyder på misoppfatning**
Oppgave 1	7 Elevsvar med regnefeil, men at elever viser han tolker likhetstegnet som en representasjon på likevekt er kodet riktig.	12 og eller 17
Oppgave 2	10	0
Oppgave 3	Tre av en delmengde addert med to av samme delmengde Eks: Nora kjøper tre flasker brus som koster a kr og Per kjøper to flasker brus som koster a kr. Hvor mange kroner må de betale til sammen?	Variabelen a blir forklart som et objekt. Eks: Nora har tre appelsiner og Per har to appelsiner. Hvor mange appelsiner har de til sammen?
Oppgave 4	Riktig.	Bearbeider uttrykket mer for å få et svar uten regnestykke (eks 17ab), eller skriver at svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon.
Oppgave 5a	x = 4	Svarer to ulike tall med produkt 16 i enten a og eller b. Eks: 1 og 16, 2 og 8
Oppgave 5b	Nei.	
Oppgave 6	6a + 2b	Bearbeider uttrykket mer for å få et svar uten regnestykke. Eks: 7, 7ab, 8, 8ab, 12 (5+2+5)
Oppgave 7	Marit: feil Therese: feil Astrid: riktig	Marit: riktig Therese: riktig Astrid: riktig eller Marit: riktig Therese: riktig Astrid: feil
Oppgave 8	Prisen per dounut	1 donut, dollar, donuts
Oppgave 9	12	4
Oppgave 10	Henrik: riktig Jacob: riktig Fillip: riktig	Henrik: riktig Jacob: feil Fillip: riktig eller Henrik: feil Jacob: riktig Fillip: feil

Oppgave 11	7 + e I tillegg er elevsvar som «hva som helst», eller jeg vet ikke hva e er, men sju større enn det e er kodet som riktig.	12 (5 = 12)
Oppgave 12	Et svar der det går fram at a er kostnaden per appelsin og b kostnaden per banan. Eks: Hvor mye fire appelsiner og tre bananer koster til sammen.	Variablene a og b blir forklart som objekter. Eks: Fire appelsiner pluss tre bananer, eller hvor mange frukt de har kjøpt til sammen.
Oppgave 13	36 Elevsvar med en regnefeil, men som viser at de tolker likhetstegnet som en representasjon på likevekt er kodet riktig.	91 og eller 146
Oppgave 14	17	57
Oppgave 15	Dette kan være sant	Dette er aldri sant
Oppgave 16	$3 + \underline{5} = 4 + 4 = \underline{8}$	$3 + \underline{1} = 4 + 4 = \underline{8}$ eller $3 + \underline{1} = 4 + 4 = \underline{12}$
Oppgave 17a	x = 3,5	Svarer to ulike tall med sum 7 i enten a og eller b. Eks: 3 og 4, 5 og 2
Oppgave 17b	Nei	
Oppgave 18	Dette kan være sant	Dette er aldri sant
Oppgave 19	Et svar der det går fram at g er antall kg gulrøtter og p er antall kg poteter. Eks: Hvor mye du må betale når du kjøper g kg gulrøtter og p kg poteter.	Variablene g og p blir forklart som objekter. Eks: 13 gulrøtter pluss 5 poteter

Elevene må i tillegg ha avgitt en forklaring i vis hvordan du tenker-ruta som støtter opp under svaret som er vist i tabellen ovenfor. Alle andre svar er kodet som andre feilsvar.

Vedlegg 8: Teknisk rapport

	Riktig svar			Svar som tyder på misoppfatning			Andre feilsvar			Ubesvart	
Oppg.	**Antall**	**Andel**	**Gj. snitt grad av sikkerhet**	**Antall**	**Andel**	**Gj. snitt grad av sikkerhet**	**Antall**	**Andel**	**Gj. snitt grad av sikkerhet**	**Antall**	**Andel**
1	236	64 %	4,5	113	31 %	3,8	7	2 %	2,4	13	3 %
2	260	71 %	4,1	55	15 %	3,4	13	4 %	2,3	41	10 %
3	16	5 %	3,3	172	48 %	3,7	12	4 %	1,7	169	44 %
4	248	69 %	3,9	13	4 %	3,8	17	5 %	2,5	91	22 %
5	166	45 %	4,3	176	48 %	4,0	5	1 %	2,9	22	6 %
6	194	54 %	4,0	37	10 %	3,0	31	10 %	2,2	107	27 %
7	174	48 %	4,1	106	30 %	4,0	14	4 %	2,1	75	18 %
8	32	9 %	4,1	310	86 %	4,0	2	1 %	2,0	25	5 %
9	161	44 %	4,5	103	29 %	4,0	33	9 %	2,8	72	18 %
10	144	40 %	3,7	84	24 %	3,8	43	12 %	2,8	98	25 %
11	36	10 %	3,3	200	56 %	3,9	24	7 %	2,6	109	27 %
12	80	23 %	3,9	144	21 %	3,6	27	29 %	2,3	118	27 %
13	217	60 %	4,4	86	25 %	3,6	6	2 %	1,8	60	13 %
14	155	43 %	4,3	61	17 %	3,3	47	13 %	2,4	106	27 %
15	136	40 %	2,9	98	28 %	3,5	16	5 %	3,1	119	27 %
16	208	58 %	4,2	93	26 %	3,7	12	4 %	3,0	56	13 %
17	138	38 %	3,9	147	41 %	3,6	7	2 %	1,6	77	19 %
18	104	31 %	2,7	110	33 %	3,5	16	5 %	3,0	139	32 %
19	38	12 %	3,5	168	49 %	3,7	15	5 %	1,8	148	34 %

Vedlegg 9: Variasjonsanalyse oppgavenivå

Tolker likhetstegnet som en kommando – Oppgave 1

Descriptives

S_1

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	236	4,468	,7733	,0503	4,369	4,567	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	113	3,792	1,0912	,1027	3,589	3,995	1,0	5,0
Andre feilsvar	7	2,429	1,2724	,4809	1,252	3,605	1,0	4,0
Total	356	4,213	,9805	,0520	4,111	4,316	1,0	5,0

ANOVA

S_1

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	57,687	2	28,843	35,903	,000
Within Groups	283,589	353	,803		
Total	341,275	355			

Post Hoc Tests

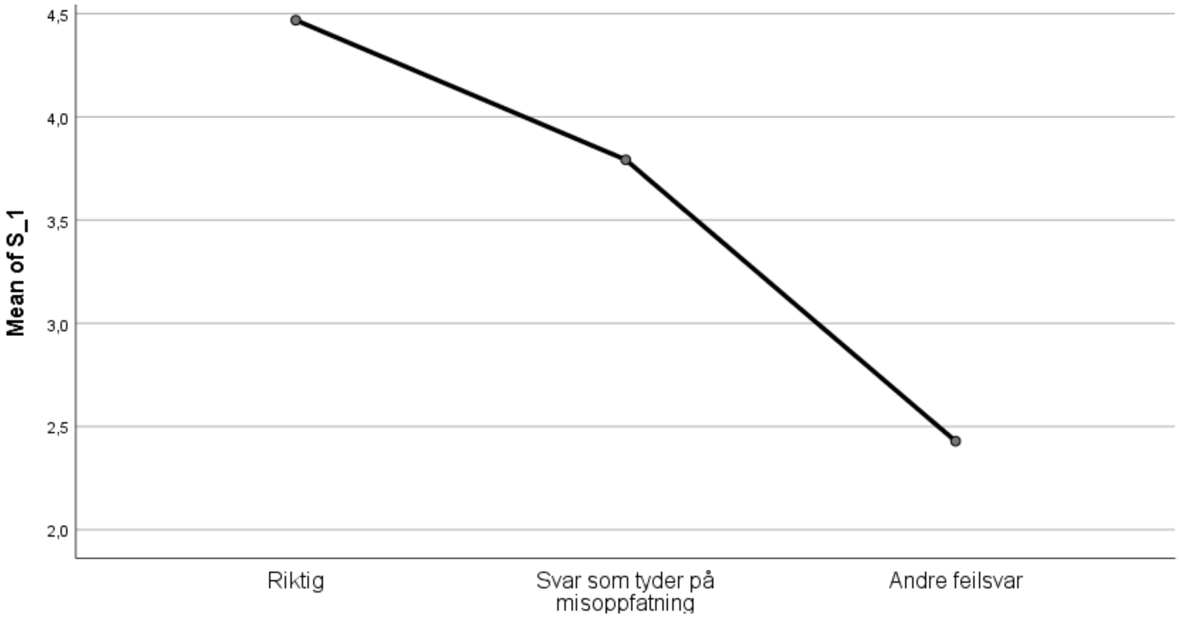
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_1
Games-Howell

(I) O_1	(J) O_1	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,6762*	,1143	,000	,406	,947
	Andre feilsvar	2,0396*	,4836	,013	,565	3,514
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,6762*	,1143	,000	-,947	-,406
	Andre feilsvar	1,3635	,4918	,067	-,109	2,836
Andre feilsvar	Riktig	-2,0396*	,4836	,013	-3,514	-,565
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,3635	,4918	,067	-2,836	,109

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker likhetstegnet som en kommando – Oppgave 13

Descriptives

S_13

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	217	4,382	,8478	,0576	4,269	4,496	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	86	3,640	1,1052	,1192	3,403	3,876	1,0	5,0
Andre feilsvar	5	2,000	1,0000	,4472	,758	3,242	1,0	3,0
Total	308	4,136	1,0214	,0582	4,022	4,251	1,0	5,0

ANOVA

S_13

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	57,194	2	28,597	33,154	,000
Within Groups	263,079	305	,863		
Total	320,273	307			

Post Hoc Tests

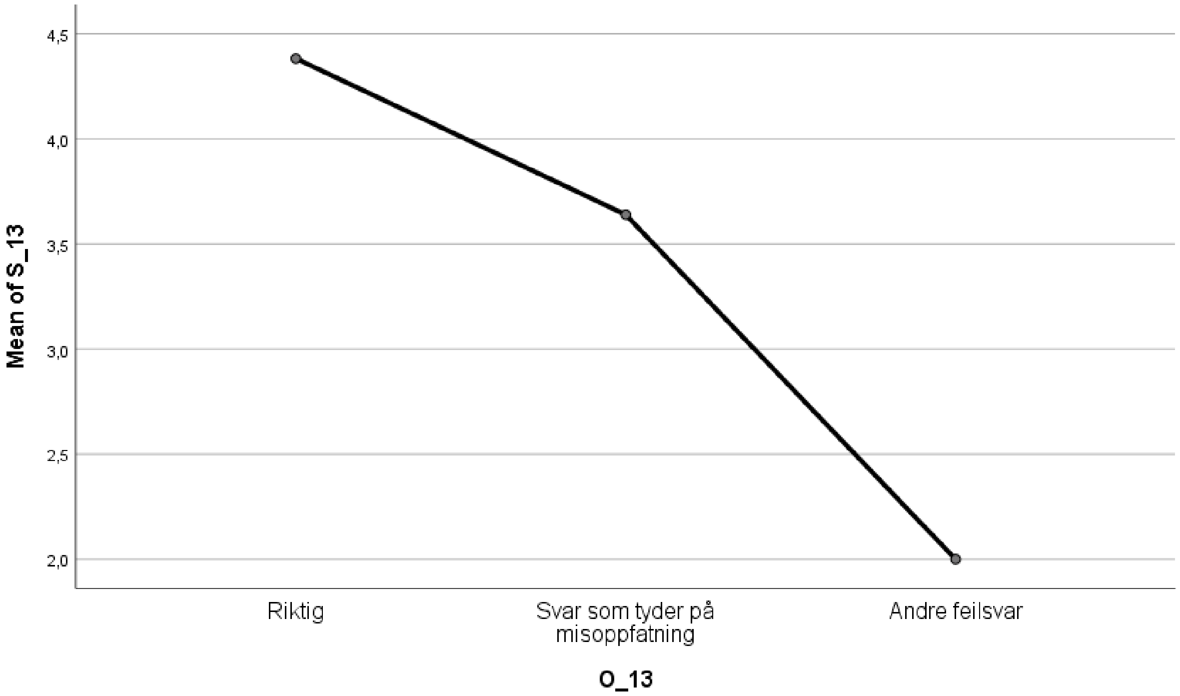
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_13
Games-Howell

(I) O_13	(J) O_13	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,7430*	,1323	,000	,429	1,057
	Andre feilsvar	2,3825*	,4509	,012	,799	3,966
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,7430*	,1323	,000	-1,057	-,429
	Andre feilsvar	1,6395*	,4628	,042	,084	3,195
Andre feilsvar	Riktig	-2,3825*	,4509	,012	-3,966	-,799
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,6395*	,4628	,042	-3,195	-,084

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker likhetstegnet som en kommando – Oppgave 16

Descriptives

S_16

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	208	4,185	,9857	,0683	4,050	4,320	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	93	3,742	1,1506	,1193	3,505	3,979	1,0	5,0
Andre feilsvar	11	3,182	1,5374	,4635	2,149	4,215	1,0	5,0
Total	312	4,018	1,0865	,0615	3,897	4,139	1,0	5,0

ANOVA

S_16

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	20,586	2	10,293	9,177	,000
Within Groups	346,567	309	1,122		
Total	367,153	311			

Post Hoc Tests

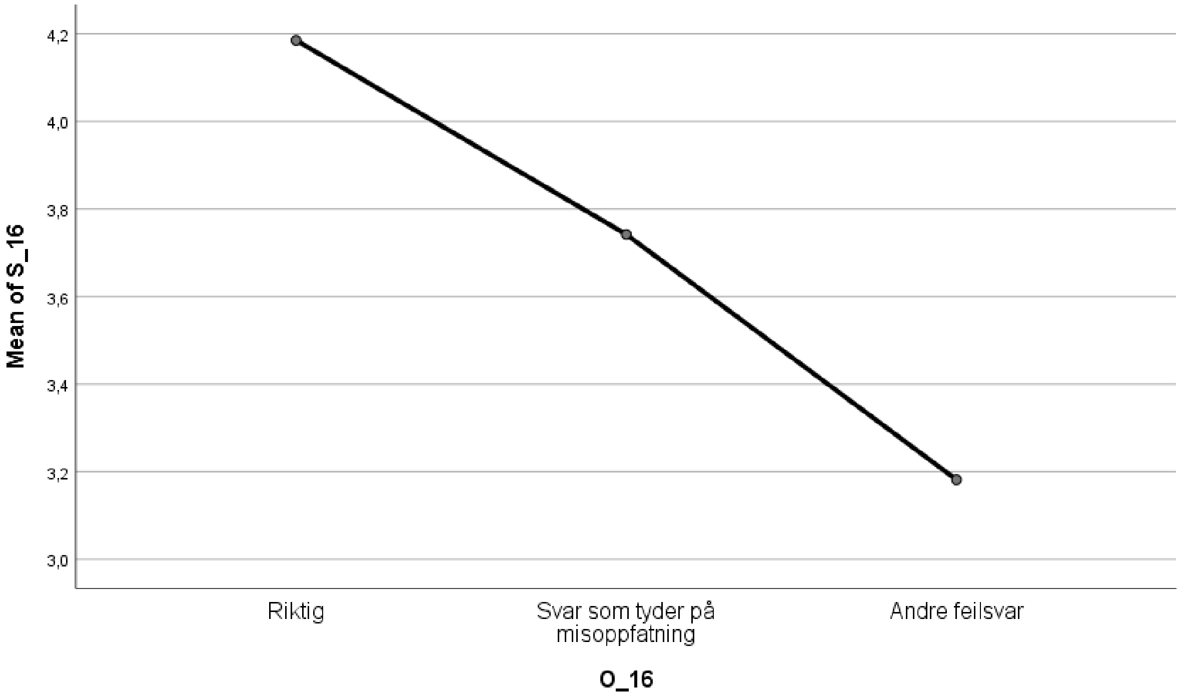
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_16
Games-Howell

(I) O_16	(J) O_16	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,4432*	,1375	,004	,118	,769
	Andre feilsvar	1,0033	,4686	,129	-,272	2,279
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,4432*	,1375	,004	-,769	-,118
	Andre feilsvar	,5601	,4787	,493	-,727	1,847
Andre feilsvar	Riktig	-1,0033	,4686	,129	-2,279	,272
	Svar som tyder på misoppfatning	-,5601	,4787	,493	-1,847	,727

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon – Oppgave 4

Descriptives

S_4

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	248	3,859	1,0011	,0636	3,734	3,984	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	13	3,769	1,2352	,3426	3,023	4,516	1,0	5,0
Andre feilsvar	17	2,529	1,0073	,2443	2,011	3,047	1,0	4,0
Total	278	3,773	1,0583	,0635	3,648	3,898	1,0	5,0

ANOVA

S_4

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	28,120	2	14,060	13,706	,000
Within Groups	282,103	275	1,026		
Total	310,223	277			

Post Hoc Tests

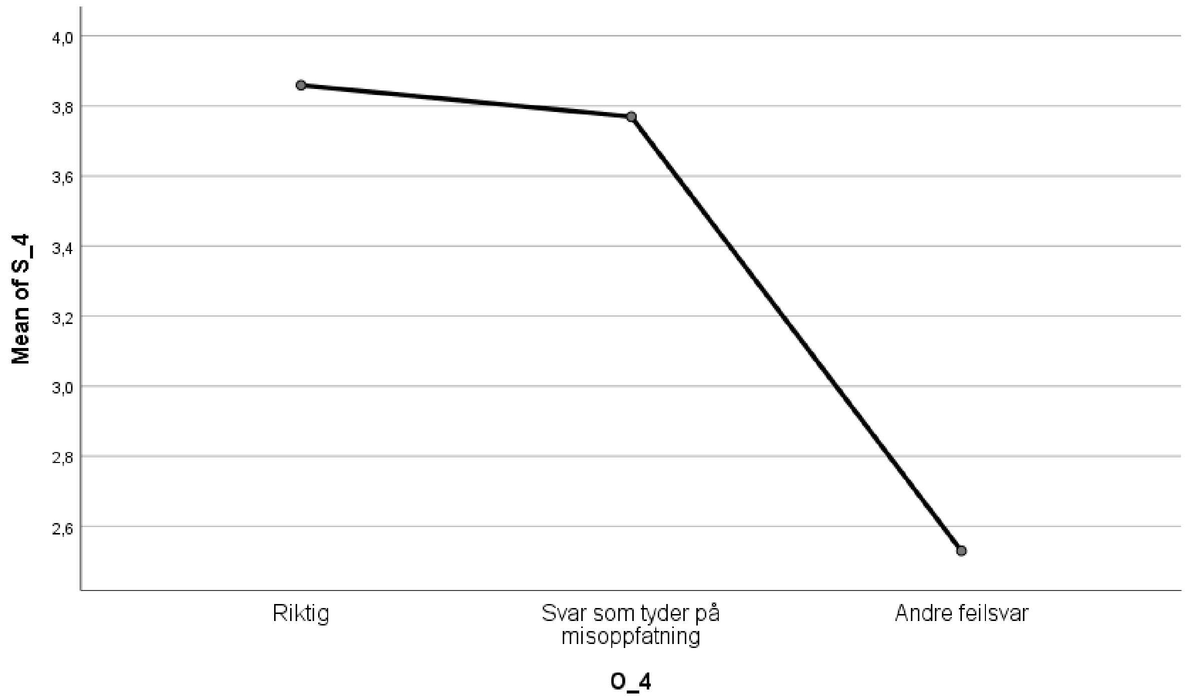
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_4
Games-Howell

(I) O_4	(J) O_4	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,0896	,3484	,964	-,832	1,011
	Andre feilsvar	1,3295*	,2524	,000	,686	1,973
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,0896	,3484	,964	-1,011	,832
	Andre feilsvar	1,2398*	,4208	,019	,186	2,294
Andre feilsvar	Riktig	-1,3295*	,2524	,000	-1,973	-,686
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,2398*	,4208	,019	-2,294	-,186

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon – Oppgave 6

Descriptives

S_6

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	194	4,028	1,0775	,0774	3,876	4,181	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	37	2,959	1,2040	,1979	2,558	3,361	1,0	5,0
Andre feilsvar	31	2,194	1,1667	,2096	1,766	2,622	1,0	5,0
Total	262	3,660	1,2810	,0791	3,504	3,816	1,0	5,0

ANOVA

S_6

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	111,145	2	55,573	45,387	,000
Within Groups	317,122	259	1,224		
Total	428,267	261			

Post Hoc Tests

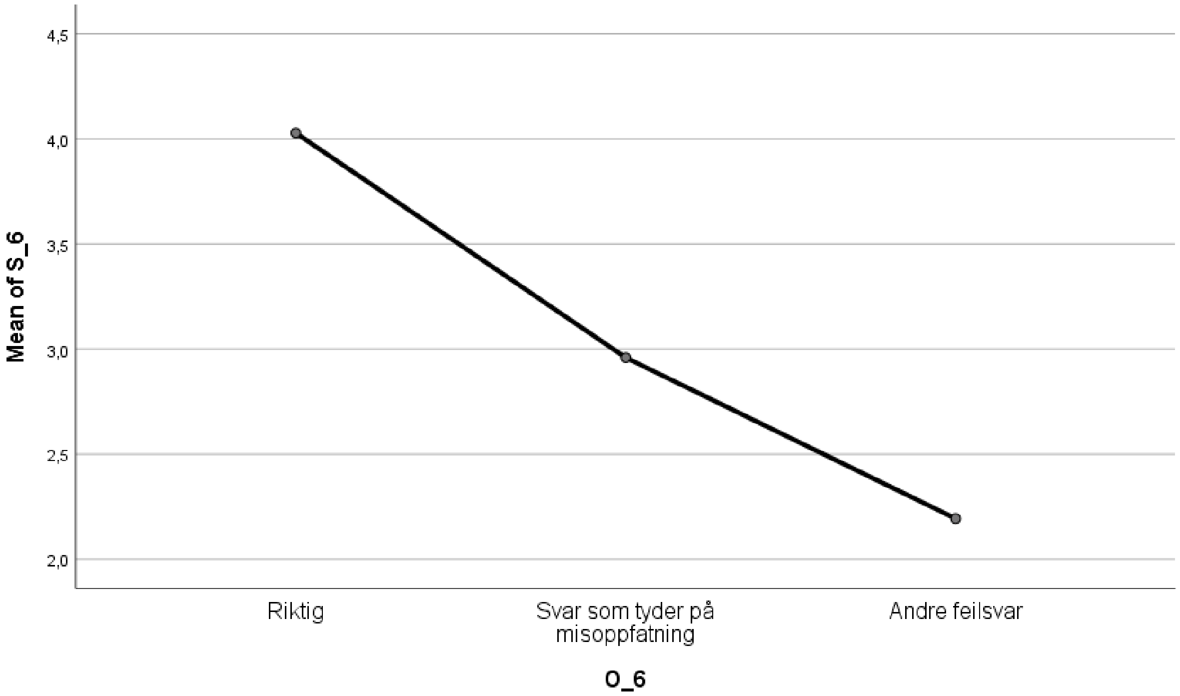
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_6
Games-Howell

(I) O_6	(J) O_6	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	1,0689*	,2125	,000	,555	1,583
	Andre feilsvar	1,8348*	,2234	,000	1,290	2,379
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-1,0689*	,2125	,000	-1,583	-,555
	Andre feilsvar	,7659*	,2883	,026	,074	1,457
Andre feilsvar	Riktig	-1,8348*	,2234	,000	-2,379	-1,290
	Svar som tyder på misoppfatning	-,7659*	,2883	,026	-1,457	-,074

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker bokstaver som forkortelser for objekt – Oppgave 3

Descriptives

S_3

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	16	3,313	1,4477	,3619	2,541	4,084	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	172	3,721	1,1750	,0896	3,544	3,898	1,0	5,0
Andre feilsvar	12	1,667	,8876	,2562	1,103	2,231	1,0	3,0
Total	200	3,565	1,2773	,0903	3,387	3,743	1,0	5,0

ANOVA

S_3

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	48,446	2	24,223	17,277	,000
Within Groups	276,209	197	1,402		
Total	324,655	199			

Post Hoc Tests

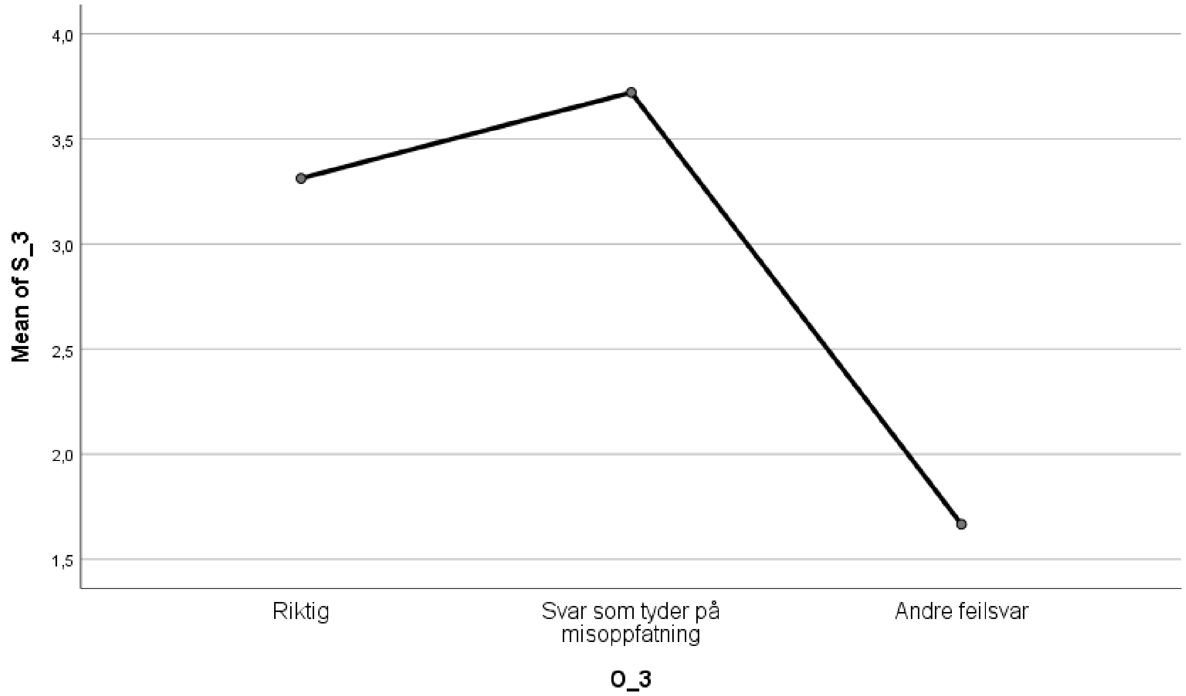
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_3
Games-Howell

(I) O_3	(J) O_3	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	-,4084	,3728	,530	-1,366	,549
	Andre feilsvar	1,6458*	,4434	,003	,542	2,750
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	,4084	,3728	,530	-,549	1,366
	Andre feilsvar	2,0543*	,2714	,000	1,343	2,766
Andre feilsvar	Riktig	-1,6458*	,4434	,003	-2,750	-,542
	Svar som tyder på misoppfatning	-2,0543*	,2714	,000	-2,766	-1,343

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker bokstaver som forkortelser for objekt - Oppgave 8

Descriptives

S_8

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	32	4,094	,9625	,1701	3,747	4,441	2,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	310	3,958	,9820	,0558	3,848	4,068	1,0	5,0
Andre feilsvar	2	2,000	1,4142	1,0000	-10,706	14,706	1,0	3,0
Total	344	3,959	,9911	,0534	3,854	4,064	1,0	5,0

ANOVA

S_8

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	8,257	2	4,128	4,283	,015
Within Groups	328,674	341	,964		
Total	336,930	343			

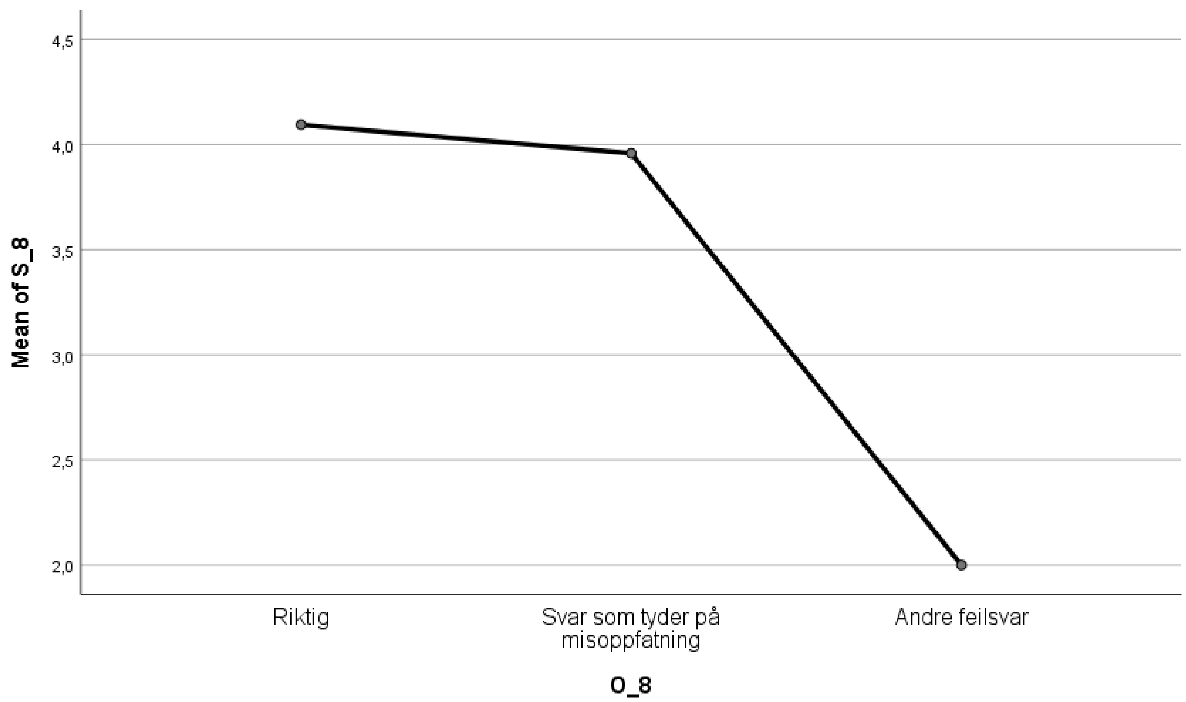
Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_8
Games-Howell

(I) O_8	(J) O_8	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,1357	,1791	,731	-,301	,572
	Andre feilsvar	2,0938	1,0144	,409	-14,760	18,948
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,1357	,1791	,731	-,572	,301
	Andre feilsvar	1,9581	1,0016	,438	-16,853	20,769
Andre feilsvar	Riktig	-2,0938	1,0144	,409	-18,948	14,760
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,9581	1,0016	,438	-20,769	16,853

Means Plots



Tolker bokstaver som forkortelser for objekt – Oppgave 12

Descriptives

S_12

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	80	3,869	1,0486	,1172	3,635	4,102	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	144	3,556	1,1064	,0922	3,373	3,738	1,0	5,0
Andre feilsvar	27	2,278	1,3180	,2537	1,756	2,799	1,0	5,0
Total	251	3,518	1,1978	,0756	3,369	3,667	1,0	5,0

ANOVA

S_12

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	51,575	2	25,788	20,825	,000
Within Groups	307,094	248	1,238		
Total	358,669	250			

Post Hoc Tests

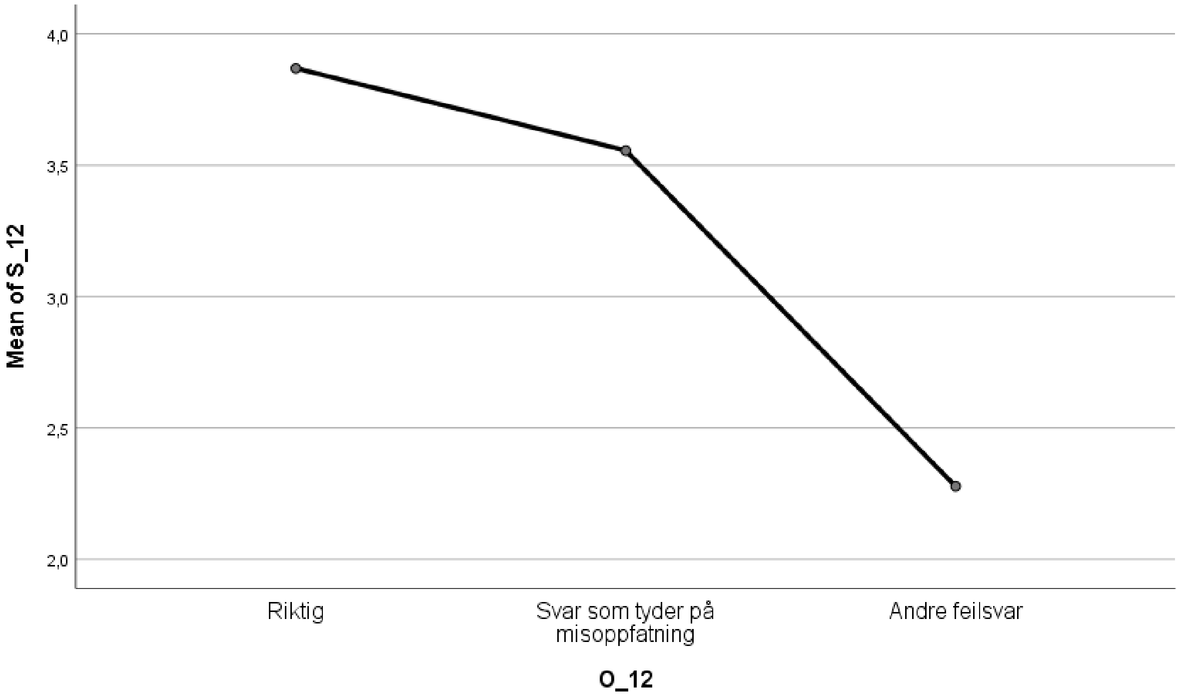
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_12
Games-Howell

(I) O_12	(J) O_12	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,3132	,1492	,093	-,039	,666
	Andre feilsvar	1,5910*	,2794	,000	,909	2,273
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,3132	,1492	,093	-,666	,039
	Andre feilsvar	1,2778*	,2699	,000	,616	1,940
Andre feilsvar	Riktig	-1,5910*	,2794	,000	-2,273	-,909
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,2778*	,2699	,000	-1,940	-,616

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker bokstaver som forkortelser for objekt – Oppgave 19

Descriptives

S_19

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	38	3,526	1,3098	,2125	3,096	3,957	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	168	3,702	1,1726	,0905	3,524	3,881	1,0	5,0
Andre feilsvar	15	1,800	1,1464	,2960	1,165	2,435	1,0	4,0
Total	221	3,543	1,2816	,0862	3,373	3,713	1,0	5,0

ANOVA

S_19

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	49,849	2	24,924	17,444	,000
Within Groups	311,493	218	1,429		
Total	361,342	220			

Post Hoc Tests

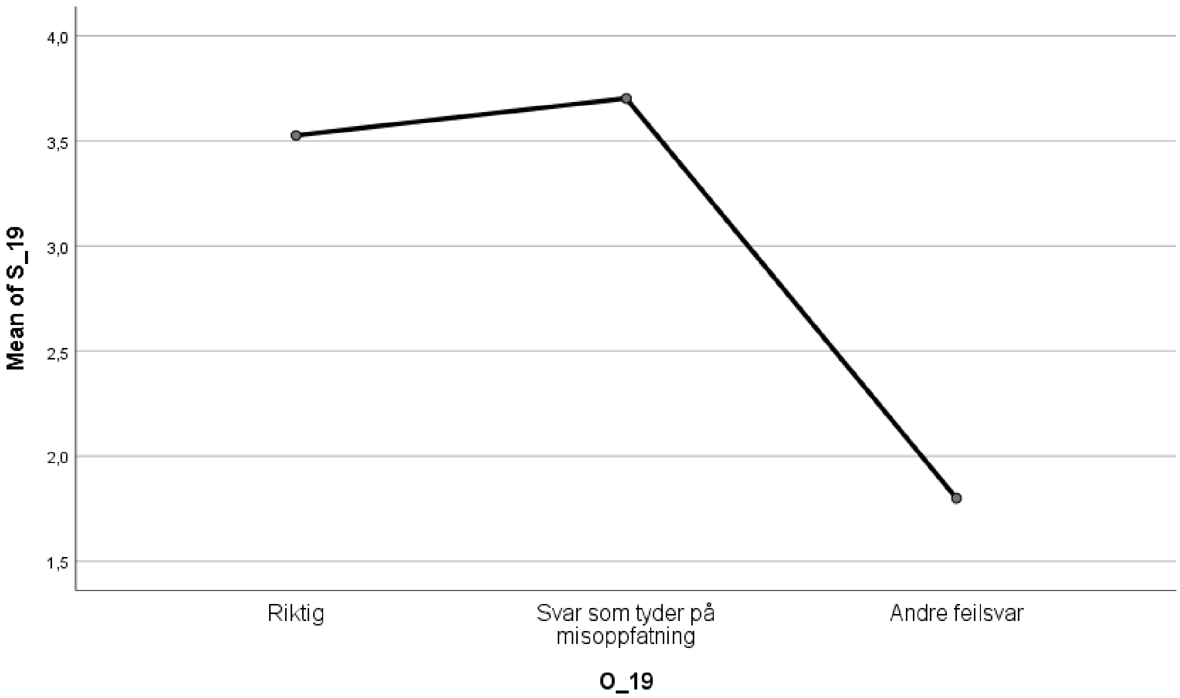
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_19
Games-Howell

(I) O_19	(J) O_19	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	-,1761	,2309	,728	-,733	,381
	Andre feilsvar	1,7263*	,3644	,000	,827	2,626
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	,1761	,2309	,728	-,381	,733
	Andre feilsvar	1,9024*	,3095	,000	1,107	2,698
Andre feilsvar	Riktig	-1,7263*	,3644	,000	-2,626	-,827
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,9024*	,3095	,000	-2,698	-1,107

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall – Oppgave 5

Descriptives

S_5

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	166	4,2801	,73896	,05735	4,1669	4,3934	2,00	5,00
Svar som tyder på misoppfatning	176	4,0270	,88175	,06646	3,8958	4,1582	1,00	5,00
Andre feilsvar	3	3,0000	1,00000	,57735	,5159	5,4841	2,00	4,00
Total	345	4,1399	,83102	,04474	4,0519	4,2279	1,00	5,00

ANOVA

S_5

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	9,406	2	4,703	7,049	,001
Within Groups	228,159	342	,667		
Total	237,564	344			

Post Hoc Tests

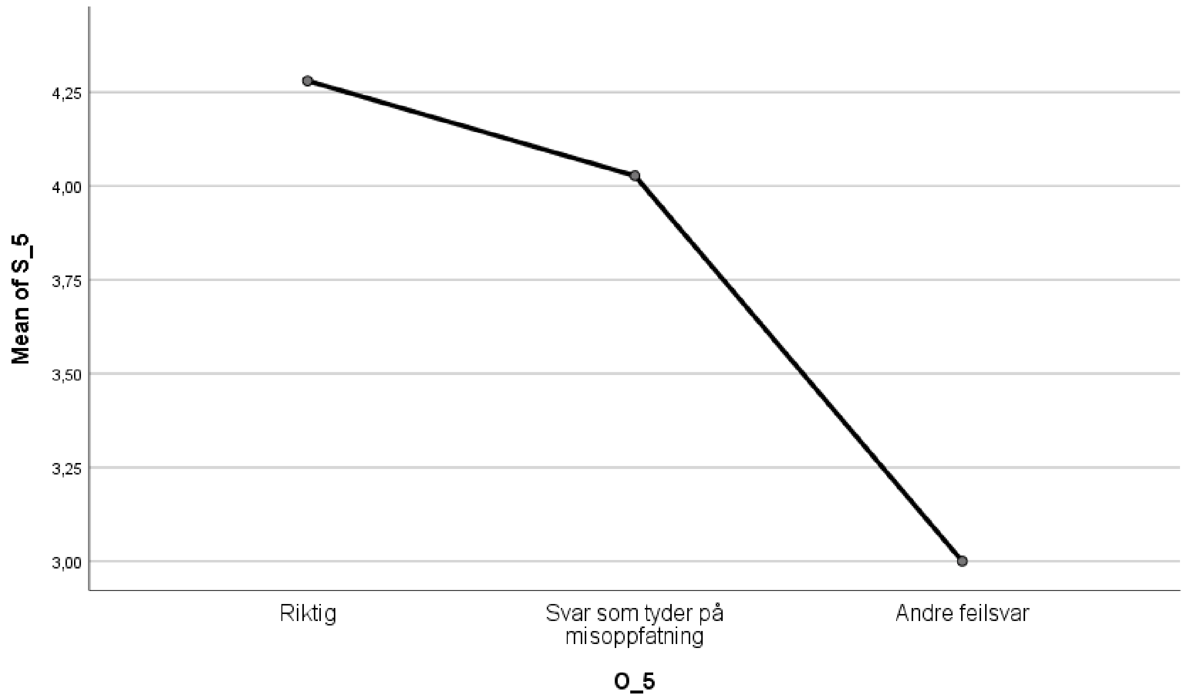
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_5
Games-Howell

(I) O_5	(J) O_5	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,25313*	,08779	,012	,0465	,4598
	Andre feilsvar	1,28012	,58019	,269	-2,0671	4,6273
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,25313*	,08779	,012	-,4598	-,0465
	Andre feilsvar	1,02699	,58116	,365	-2,3024	4,3564
Andre feilsvar	Riktig	-1,28012	,58019	,269	-4,6273	2,0671
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,02699	,58116	,365	-4,3564	2,3024

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall – Oppgave 7

Descriptives

S_7

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	174	4,078	1,0595	,0803	3,919	4,236	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	106	3,962	,9849	,0957	3,773	4,152	1,0	5,0
Andre feilsvar	14	2,071	,9169	,2450	1,542	2,601	1,0	4,0
Total	294	3,940	1,1072	,0646	3,813	4,068	1,0	5,0

ANOVA

S_7

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	52,228	2	26,114	24,755	,000
Within Groups	306,980	291	1,055		
Total	359,208	293			

Post Hoc Tests

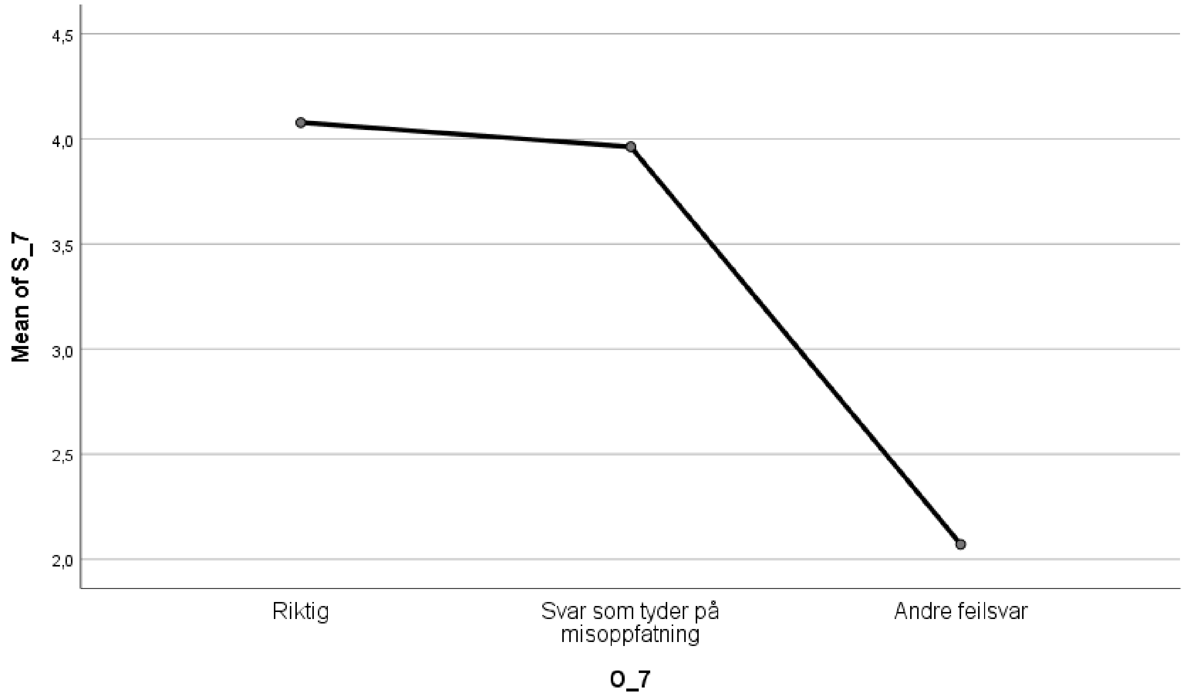
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_7
Games-Howell

(I) O_7	(J) O_7	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,1153	,1249	,626	-,179	,410
	Andre feilsvar	2,0062*	,2579	,000	1,340	2,672
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,1153	,1249	,626	-,410	,179
	Andre feilsvar	1,8908*	,2631	,000	1,217	2,565
Andre feilsvar	Riktig	-2,0062*	,2579	,000	-2,672	-1,340
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,8908*	,2631	,000	-2,565	-1,217

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall – Oppgave 11

Descriptives

S_11

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	36	3,333	1,2873	,2146	2,898	3,769	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	200	3,865	1,1160	,0789	3,709	4,021	1,0	5,0
Andre feilsvar	23	2,652	1,3007	,2712	2,090	3,215	1,0	5,0
Total	259	3,683	1,2113	,0753	3,535	3,832	1,0	5,0

ANOVA

S_11

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	35,466	2	17,733	13,232	,000
Within Groups	343,072	256	1,340		
Total	378,539	258			

Post Hoc Tests

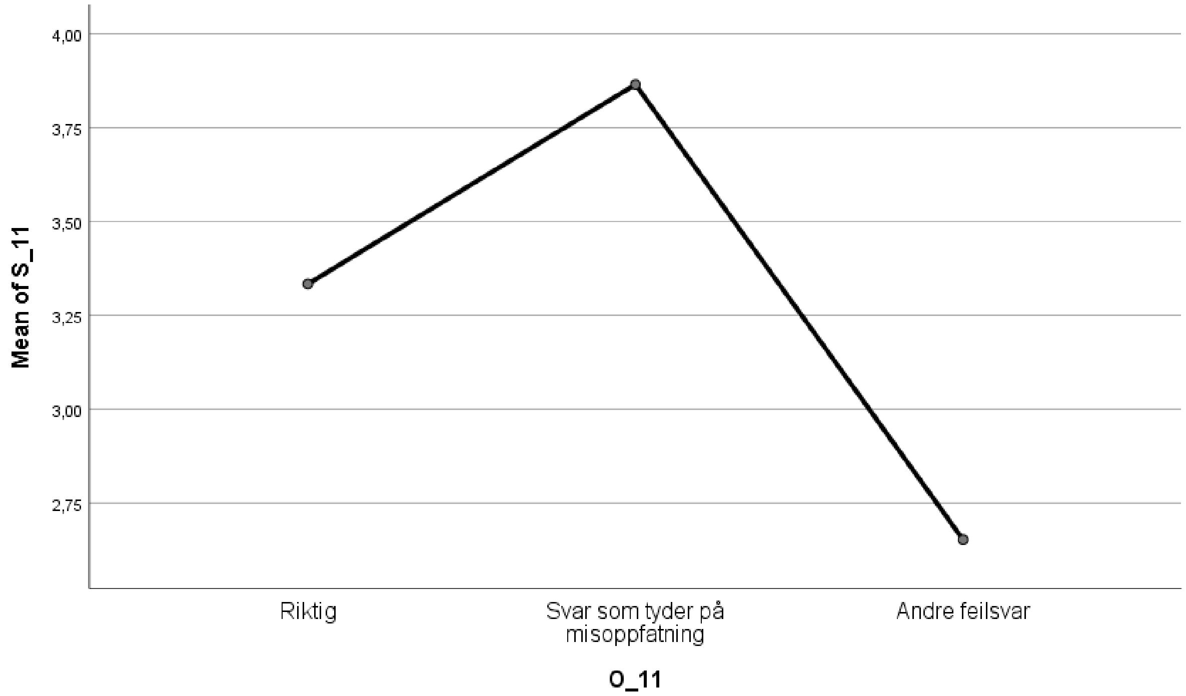
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_11
Games-Howell

(I) O_11	(J) O_11	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	-,5317	,2286	,062	-1,086	,022
	Andre feilsvar	,6812	,3458	,131	-,156	1,518
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	,5317	,2286	,062	-,022	1,086
	Andre feilsvar	1,2128*	,2825	,001	,511	1,915
Andre feilsvar	Riktig	-,6812	,3458	,131	-1,518	,156
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,2128*	,2825	,001	-1,915	-,511

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall – Oppgave 17

Descriptives

S_17

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	138	3,8514	1,02418	,08718	3,6790	4,0238	1,00	5,00
Svar som tyder på misoppfatning	147	3,5952	1,00612	,08298	3,4312	3,7592	1,00	5,00
Andre feilsvar	6	1,4167	,80104	,32702	,5760	2,2573	1,00	3,00
Total	291	3,6718	1,06760	,06258	3,5486	3,7950	1,00	5,00

ANOVA

S_17

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	35,829	2	17,915	17,507	,000
Within Groups	294,705	288	1,023		
Total	330,534	290			

Post Hoc Tests

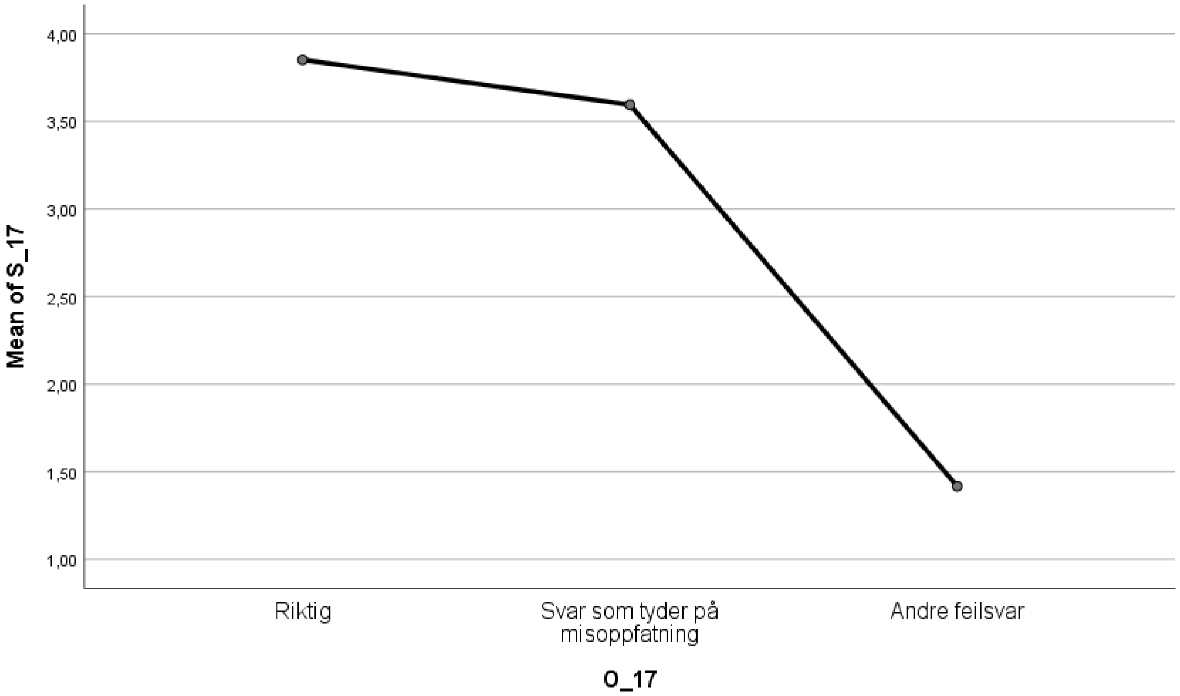
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_17
Games-Howell

(I) O_17	(J) O_17	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,25621	,12036	,086	-,0274	,5398
	Andre feilsvar	2,43478*	,33845	,001	1,3823	3,4873
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,25621	,12036	,086	-,5398	,0274
	Andre feilsvar	2,17857*	,33739	,002	1,1253	3,2318
Andre feilsvar	Riktig	-2,43478*	,33845	,001	-3,4873	-1,3823
	Svar som tyder på misoppfatning	-2,17857*	,33739	,002	-3,2318	-1,1253

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi – Oppgave 10

Descriptives

S_10

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	144	3,701	1,0779	,0898	3,524	3,879	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	84	3,845	,9724	,1061	3,634	4,056	1,0	5,0
Andre feilsvar	43	2,826	1,2435	,1896	2,443	3,208	1,0	5,0
Total	271	3,607	1,1253	,0684	3,472	3,742	1,0	5,0

ANOVA

S_10

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	32,307	2	16,154	13,983	,000
Within Groups	309,590	268	1,155		
Total	341,897	270			

Post Hoc Tests

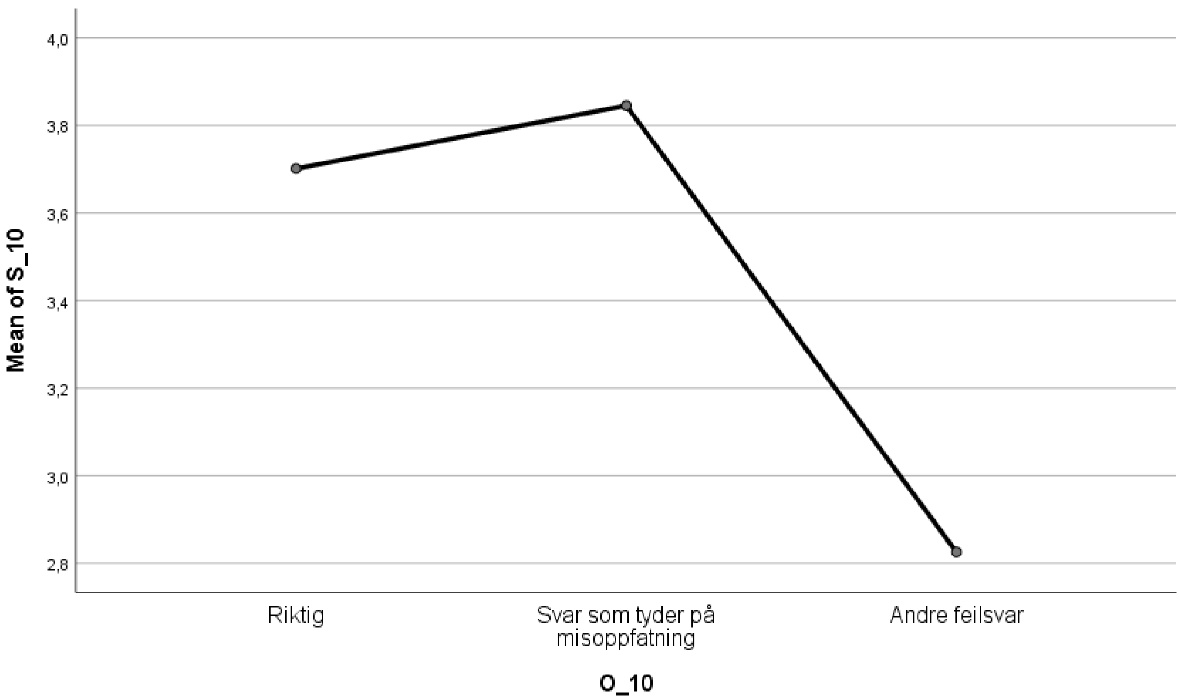
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_10
Games-Howell

(I) O_10	(J) O_10	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	-,1438	,1390	,556	-,472	,185
	Andre feilsvar	,8758*	,2098	,000	,372	1,380
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	,1438	,1390	,556	-,185	,472
	Andre feilsvar	1,0197*	,2173	,000	,499	1,540
Andre feilsvar	Riktig	-,8758*	,2098	,000	-1,380	-,372
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,0197*	,2173	,000	-1,540	-,499

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi – Oppgave 15

Descriptives

S_15

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	136	2,871	1,2707	,1090	2,656	3,087	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	98	3,515	1,1675	,1179	3,281	3,749	1,0	5,0
Andre feilsvar	16	3,063	1,4361	,3590	2,297	3,828	1,0	5,0
Total	250	3,136	1,2752	,0806	2,977	3,295	1,0	5,0

ANOVA

S_15

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	23,713	2	11,857	7,683	,001
Within Groups	381,163	247	1,543		
Total	404,876	249			

Post Hoc Tests

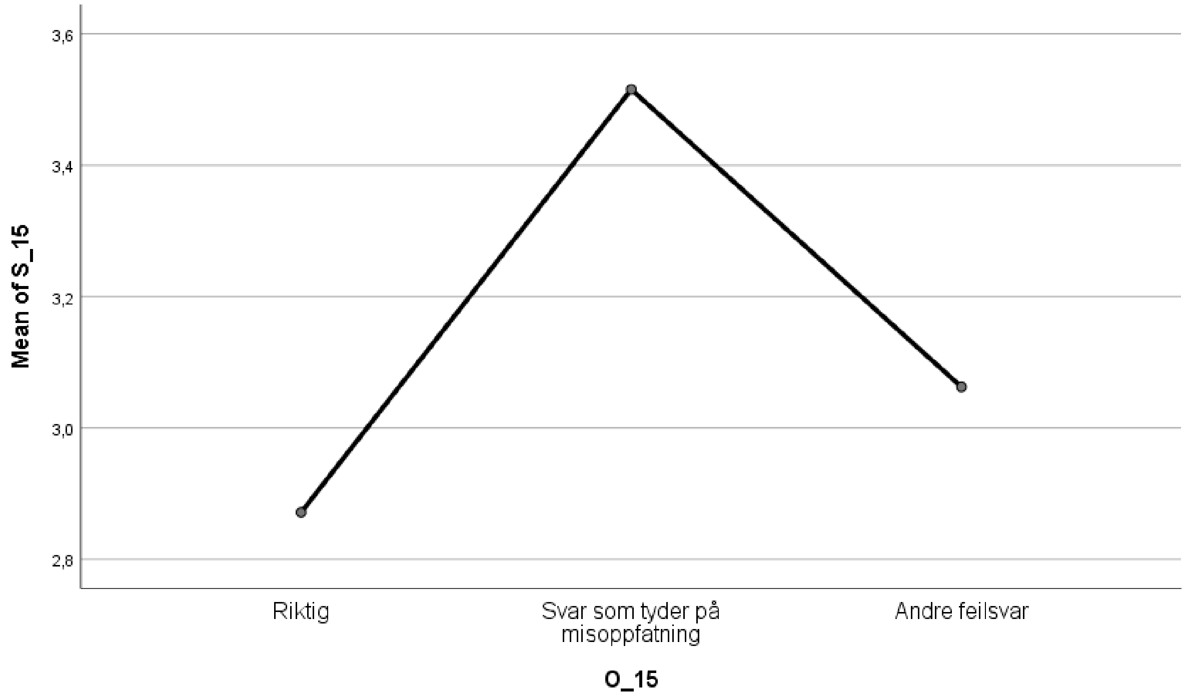
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_15
Games-Howell

(I) O_15	(J) O_15	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	-,6440*	,1606	,000	-1,023	-,265
	Andre feilsvar	-,1912	,3752	,868	-1,149	,767
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	,6440*	,1606	,000	,265	1,023
	Andre feilsvar	,4528	,3779	,469	-,510	1,416
Andre feilsvar	Riktig	,1912	,3752	,868	-,767	1,149
	Svar som tyder på misoppfatning	-,4528	,3779	,469	-1,416	,510

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi – Oppgave 18

Descriptives

S_18

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	104	2,712	1,2593	,1235	2,467	2,956	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	110	3,464	1,2091	,1153	3,235	3,692	1,0	5,0
Andre feilsvar	16	3,000	1,3166	,3291	2,298	3,702	1,0	5,0
Total	230	3,091	1,2866	,0848	2,924	3,258	1,0	5,0

ANOVA

S_18

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	30,382	2	15,191	9,889	,000
Within Groups	348,701	227	1,536		
Total	379,083	229			

Post Hoc Tests

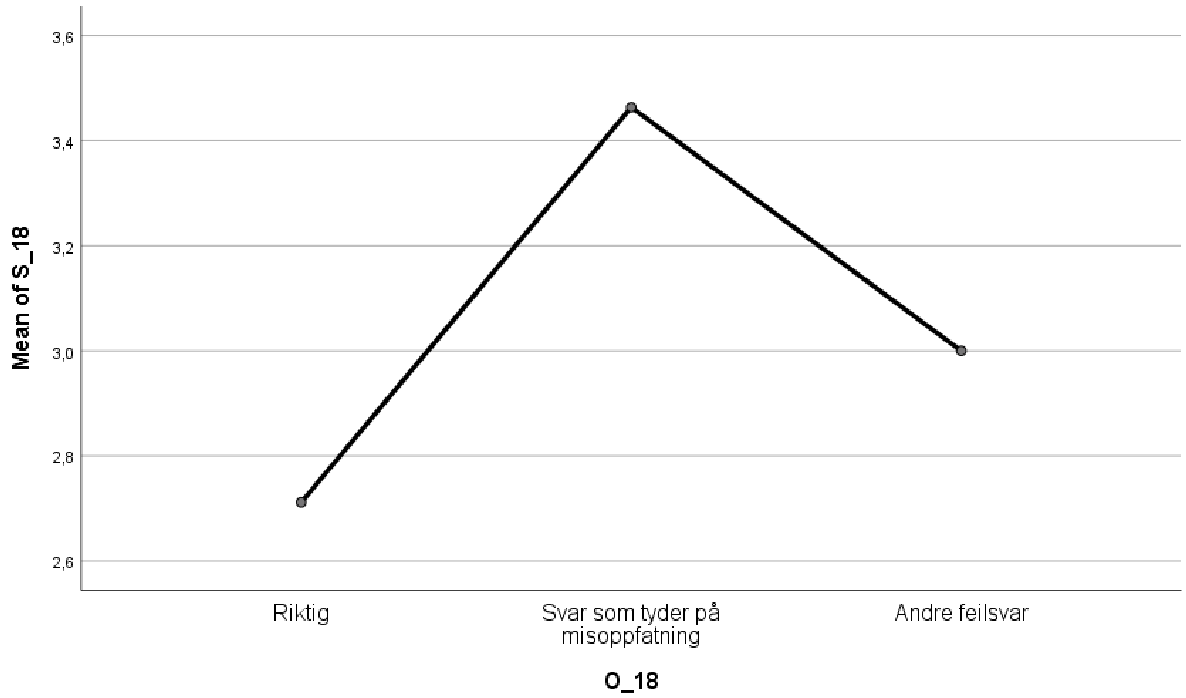
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_18
Games-Howell

(I) O_18	(J) O_18	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	-,7521*	,1689	,000	-1,151	-,353
	Andre feilsvar	-,2885	,3515	,695	-1,180	,603
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	,7521*	,1689	,000	,353	1,151
	Andre feilsvar	,4636	,3487	,397	-,423	1,350
Andre feilsvar	Riktig	,2885	,3515	,695	-,603	1,180
	Svar som tyder på misoppfatning	-,4636	,3487	,397	-1,350	,423

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet – Oppgave 2

Descriptives

S_2

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	260	4,117	1,0429	,0647	3,990	4,245	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	55	3,364	1,0113	,1364	3,090	3,637	1,0	5,0
Andre feilsvar	13	2,308	1,3775	,3820	1,475	3,140	1,0	5,0
Total	328	3,919	1,1341	,0626	3,796	4,042	1,0	5,0

ANOVA

S_2

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	60,940	2	30,470	27,533	,000
Within Groups	359,669	325	1,107		
Total	420,609	327			

Post Hoc Tests

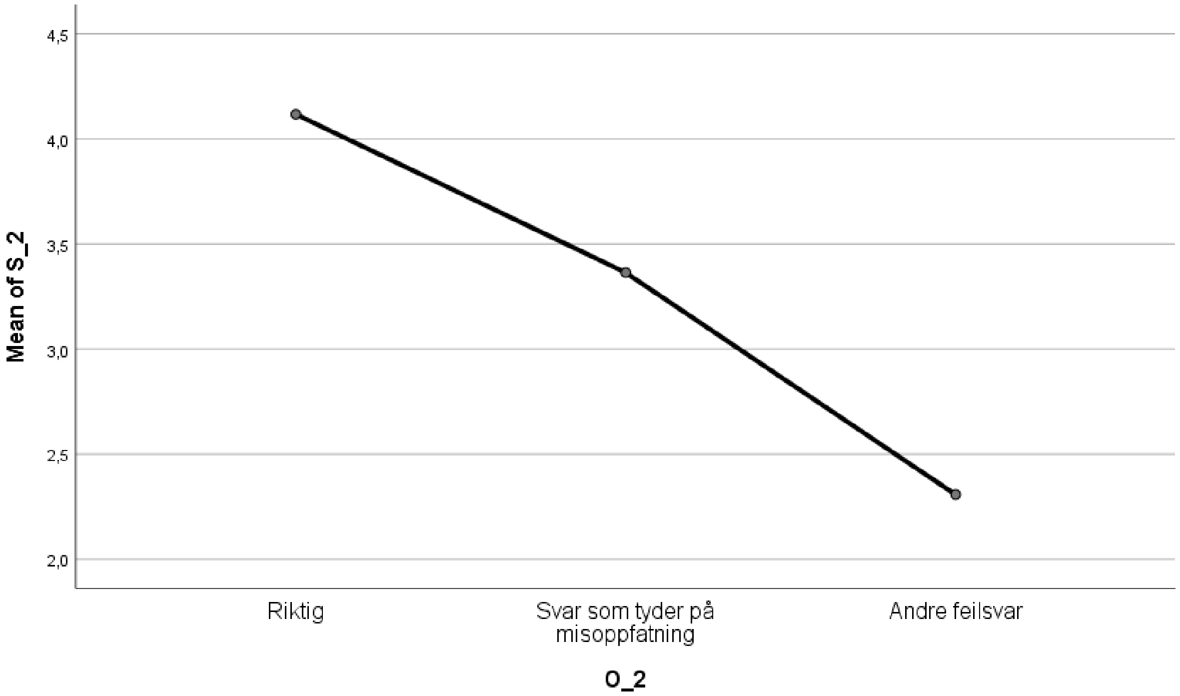
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_2
Games-Howell

(I) O_2	(J) O_2	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,7537*	,1509	,000	,393	1,114
	Andre feilsvar	1,8096*	,3875	,001	,783	2,836
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,7537*	,1509	,000	-1,114	-,393
	Andre feilsvar	1,0559*	,4056	,049	,004	2,108
Andre feilsvar	Riktig	-1,8096*	,3875	,001	-2,836	-,783
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,0559*	,4056	,049	-2,108	-,004

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet – Oppgave 9

Descriptives

S_9

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	161	4,457	,8128	,0641	4,330	4,583	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	103	3,995	1,0630	,1047	3,787	4,203	1,0	5,0
Andre feilsvar	33	2,803	1,3916	,2422	2,310	3,296	1,0	5,0
Total	297	4,113	1,1028	,0640	3,987	4,239	1,0	5,0

ANOVA

S_9

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	77,058	2	38,529	40,039	,000
Within Groups	282,913	294	,962		
Total	359,971	296			

Post Hoc Tests

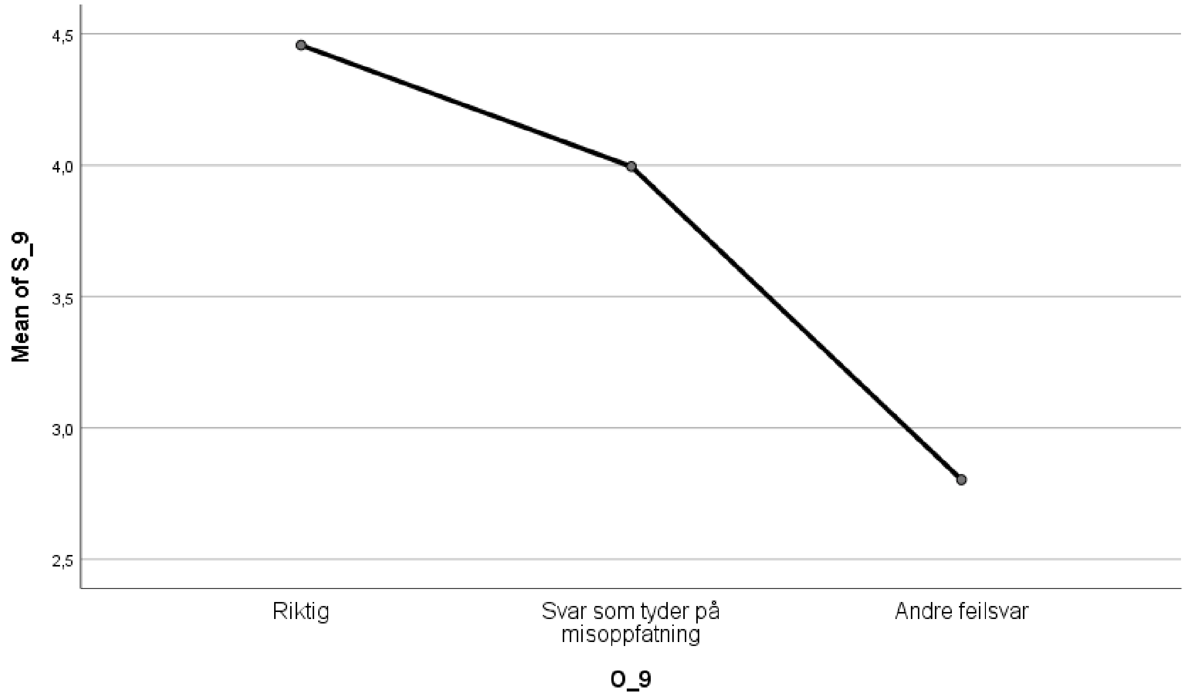
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_9
Games-Howell

(I) O_9	(J) O_9	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,4614*	,1228	,001	,171	,752
	Andre feilsvar	1,6535*	,2506	,000	1,041	2,266
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,4614*	,1228	,001	-,752	-,171
	Andre feilsvar	1,1921*	,2639	,000	,552	1,832
Andre feilsvar	Riktig	-1,6535*	,2506	,000	-2,266	-1,041
	Svar som tyder på misoppfatning	-1,1921*	,2639	,000	-1,832	-,552

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet – Oppgave 14

Descriptives

S_14

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Riktig	155	4,281	,9364	,0752	4,132	4,429	1,0	5,0
Svar som tyder på misoppfatning	61	3,295	1,1597	,1485	2,998	3,592	1,0	5,0
Andre feilsvar	46	2,413	1,2033	,1774	2,056	2,770	1,0	5,0
Total	262	3,723	1,2673	,0783	3,569	3,877	1,0	5,0

ANOVA

S_14

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	138,305	2	69,153	63,765	,000
Within Groups	280,883	259	1,084		
Total	419,188	261			

Post Hoc Tests

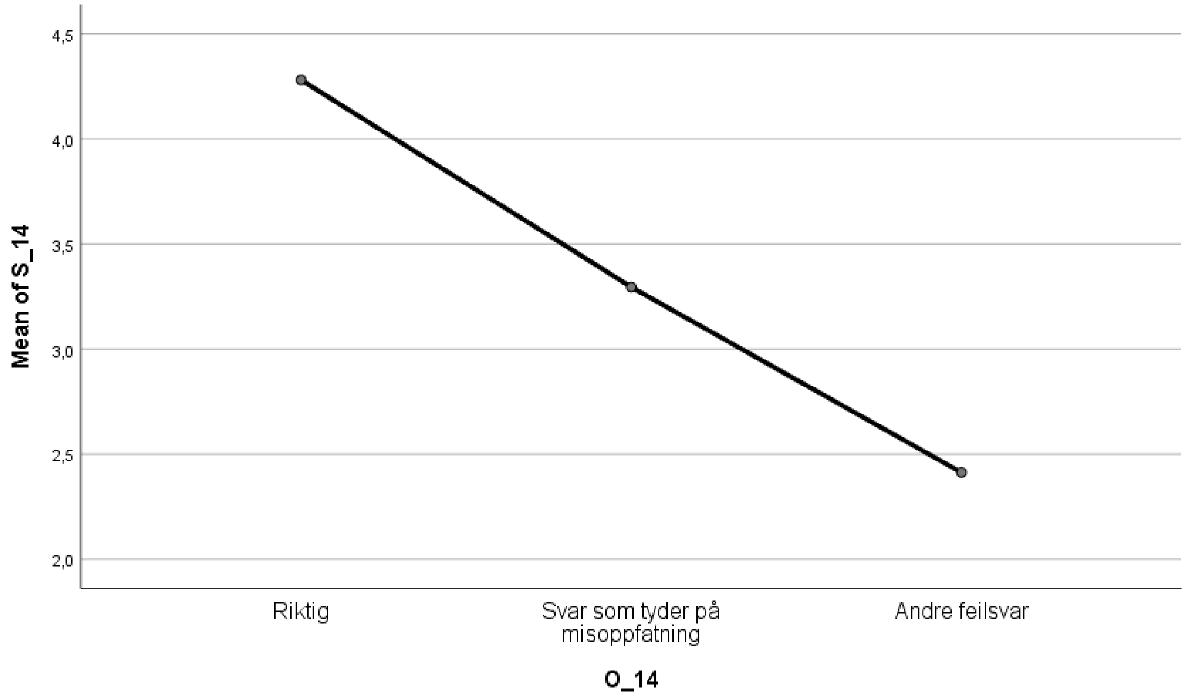
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_14
Games-Howell

(I) O_14	(J) O_14	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Riktig	Svar som tyder på misoppfatning	,9856*	,1664	,000	,589	1,382
	Andre feilsvar	1,8676*	,1927	,000	1,405	2,330
Svar som tyder på misoppfatning	Riktig	-,9856*	,1664	,000	-1,382	-,589
	Andre feilsvar	,8820*	,2313	,001	,331	1,433
Andre feilsvar	Riktig	-1,8676*	,1927	,000	-2,330	-1,405
	Svar som tyder på misoppfatning	-,8820*	,2313	,001	-1,433	-,331

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Vedlegg 10: Variasjonsanalyse elever i misoppfatning

Tolker likhetstegnet som en kommando

Descriptives

S_M1

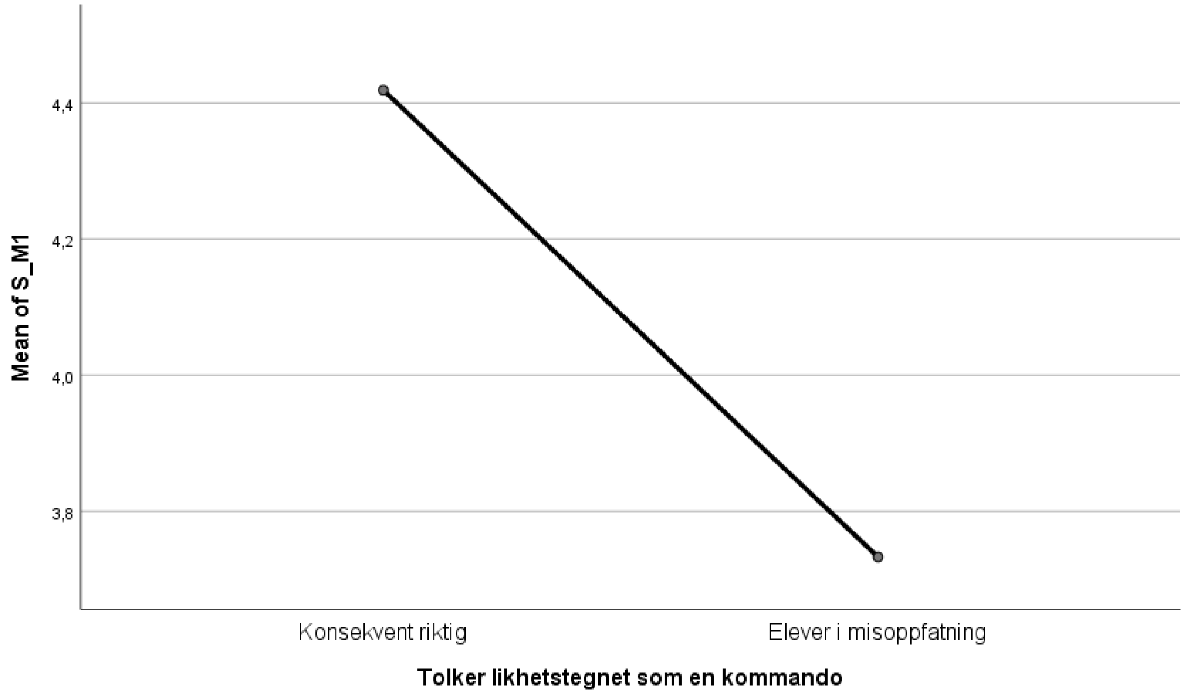
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
Konsekvent riktig	158	4,419	,6708	,0534	4,313	4,524	2,0	5,0
Elever i misoppfatning	48	3,733	,8455	,1220	3,487	3,978	1,7	5,0
Total	206	4,259	,7701	,0537	4,153	4,365	1,7	5,0

ANOVA

S_M1

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	17,332	1	17,332	33,917	,000
Within Groups	104,249	204	,511		
Total	121,581	205			

Means Plots



Descriptives

S_M1

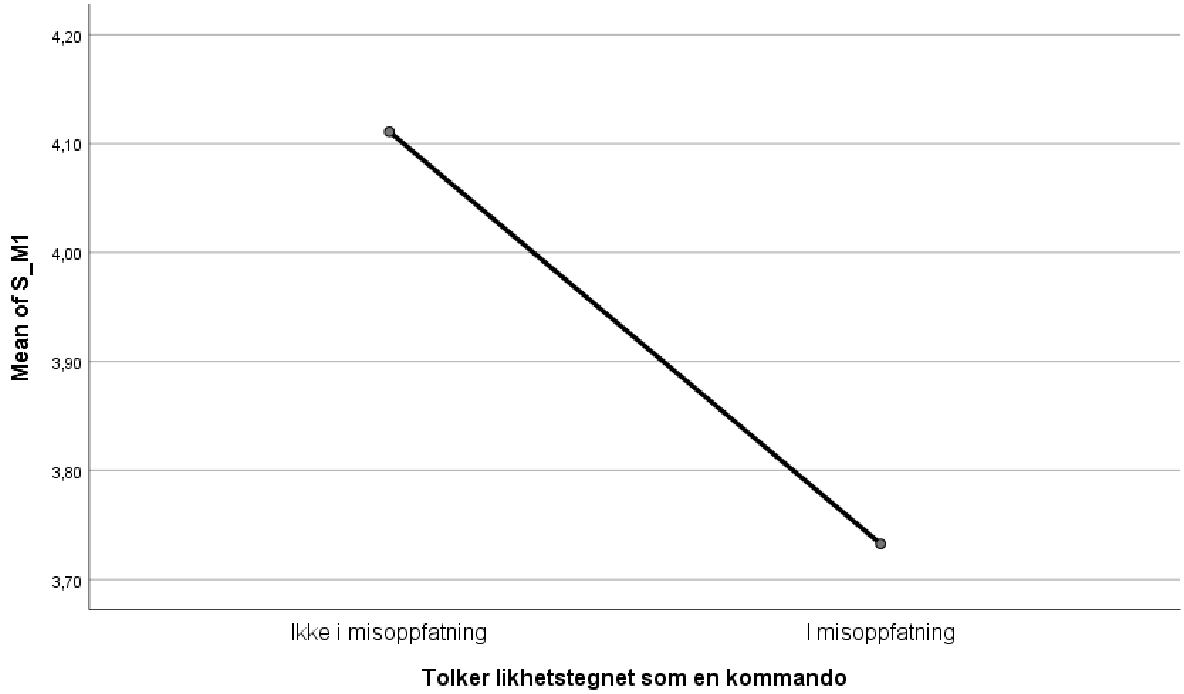
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Ikke i misoppfatning	312	4,1108	,92213	,05221	4,0081	4,2136	1,00	5,00
I misoppfatning	48	3,7326	,84547	,12203	3,4871	3,9781	1,67	5,00
Total	360	4,0604	,92021	,04850	3,9650	4,1558	1,00	5,00

ANOVA

S_M1

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	5,950	1	5,950	7,147	,008
Within Groups	298,048	358	,833		
Total	303,998	359			

Means Plots



Tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon

Descriptives

S_M2

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Konsekvent riktig	174	4,043	,9046	,0686	3,908	4,178	1,0	5,0
Elever i misoppfatning	6	3,458	,7486	,3056	2,673	4,244	2,5	4,5
Konsekvent andre feilsvar	2	1,000	,0000	,0000	1,000	1,000	1,0	1,0
Total	182	3,990	,9531	,0706	3,851	4,130	1,0	5,0

ANOVA

S_M2

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	20,067	2	10,033	12,442	,000
Within Groups	144,354	179	,806		
Total	164,421	181			

Post Hoc Tests

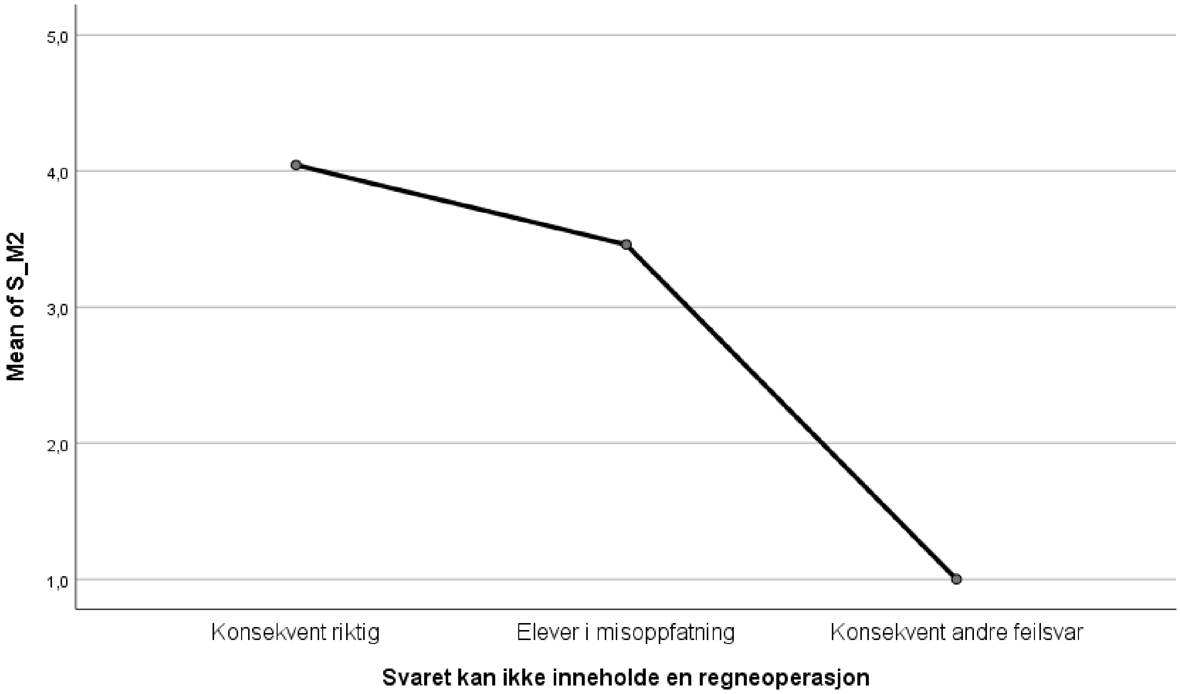
Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_M2
Games-Howell

(I) Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon	(J) Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Konsekvent riktig	Elever i misoppfatning	,5848	,3132	,234	-,401	1,571
	Konsekvent andre feilsvar	3,0431*	,0686	,000	2,881	3,205
Elever i misoppfatning	Konsekvent riktig	-,5848	,3132	,234	-1,571	,401
	Konsekvent andre feilsvar	2,4583*	,3056	,001	1,464	3,453
Konsekvent andre feilsvar	Konsekvent riktig	-3,0431*	,0686	,000	-3,205	-2,881
	Elever i misoppfatning	-2,4583*	,3056	,001	-3,453	-1,464

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots



Descriptives

S_M2

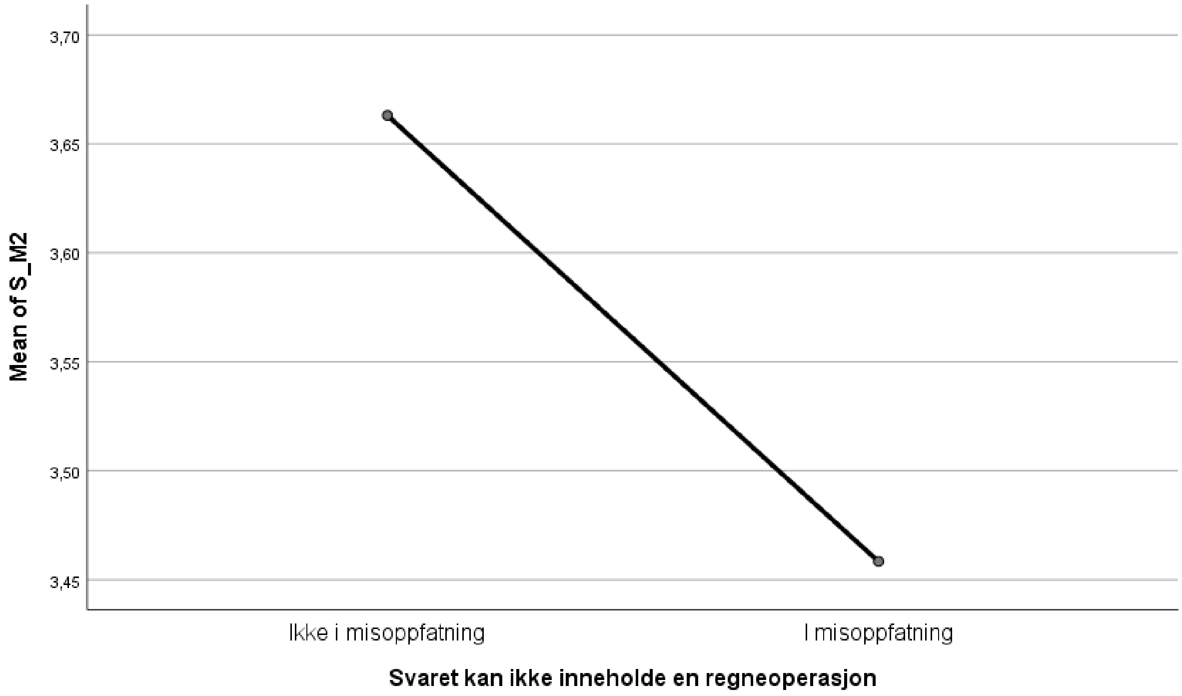
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
Ikke i misoppfatning	296	3,6630	1,06814	,06208	3,5408	3,7852	1,00	5,00
I misoppfatning	6	3,4583	,74861	,30562	2,6727	4,2440	2,50	4,50
Total	302	3,6589	1,06222	,06112	3,5387	3,7792	1,00	5,00

ANOVA

S_M2

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,246	1	,246	,218	,641
Within Groups	339,375	300	1,131		
Total	339,621	301			

Means Plots



Tolker bokstaver som forkortelser for objekt

Descriptives

S_M3

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Konsekvent riktig	1	3,500	.	.	.	.	3,5	3,5
Elever i misoppfatning	35	4,005	,7546	,1276	3,746	4,264	1,8	5,0
Total	36	3,991	,7485	,1247	3,737	4,244	1,8	5,0

ANOVA

S_M3

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,248	1	,248	,435	,514
Within Groups	19,360	34	,569		
Total	19,608	35			

Means Plots

Descriptives

S_M3

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Ikke i misoppfatning	321	3,6086	,92479	,05162	3,5071	3,7102	1,00	5,00
I misoppfatning	35	4,0048	,75460	,12755	3,7455	4,2640	1,75	5,00
Total	356	3,6476	,91619	,04856	3,5521	3,7431	1,00	5,00

ANOVA

S_M3

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	4,952	1	4,952	5,982	,015
Within Groups	293,038	354	,828		
Total	297,990	355			

Means Plots

Tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall

Descriptives

S_M4

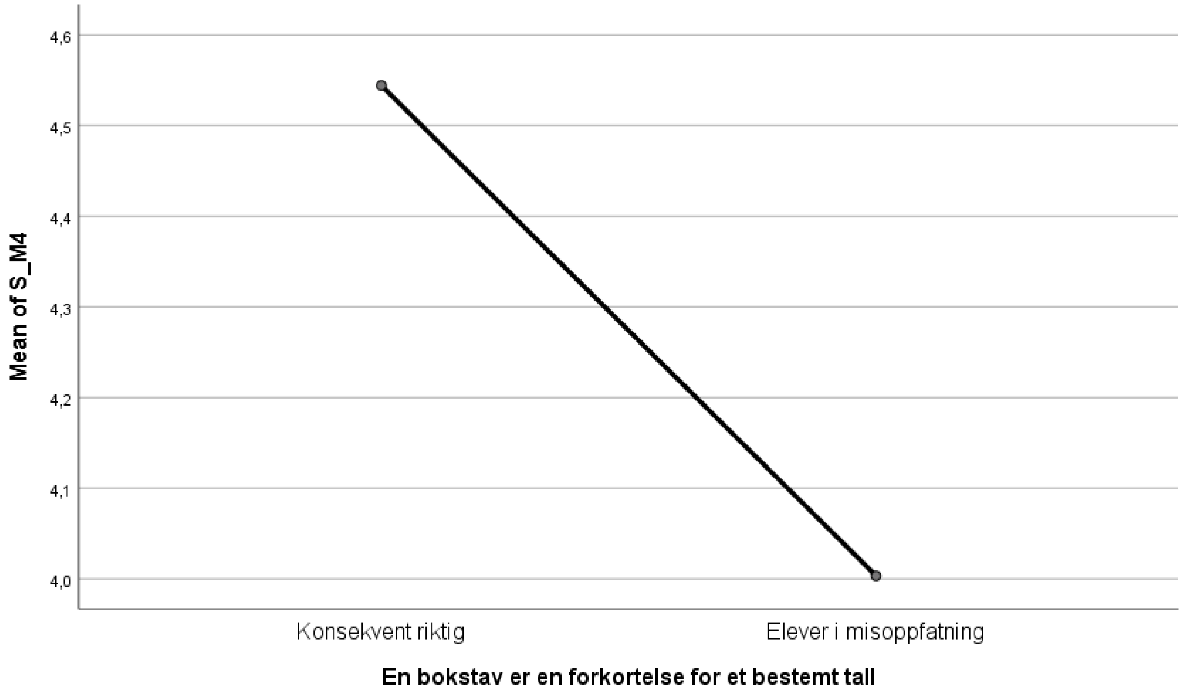
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
Konsekvent riktig	17	4,544	,4960	,1203	4,289	4,799	3,5	5,0
Elever i misoppfatning	38	4,003	,5724	,0929	3,815	4,191	2,6	5,0
Total	55	4,170	,6008	,0810	4,008	4,333	2,6	5,0

ANOVA

S_M4

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	3,435	1	3,435	11,339	,001
Within Groups	16,059	53	,303		
Total	19,494	54			

Means Plots



Descriptives

S_M4

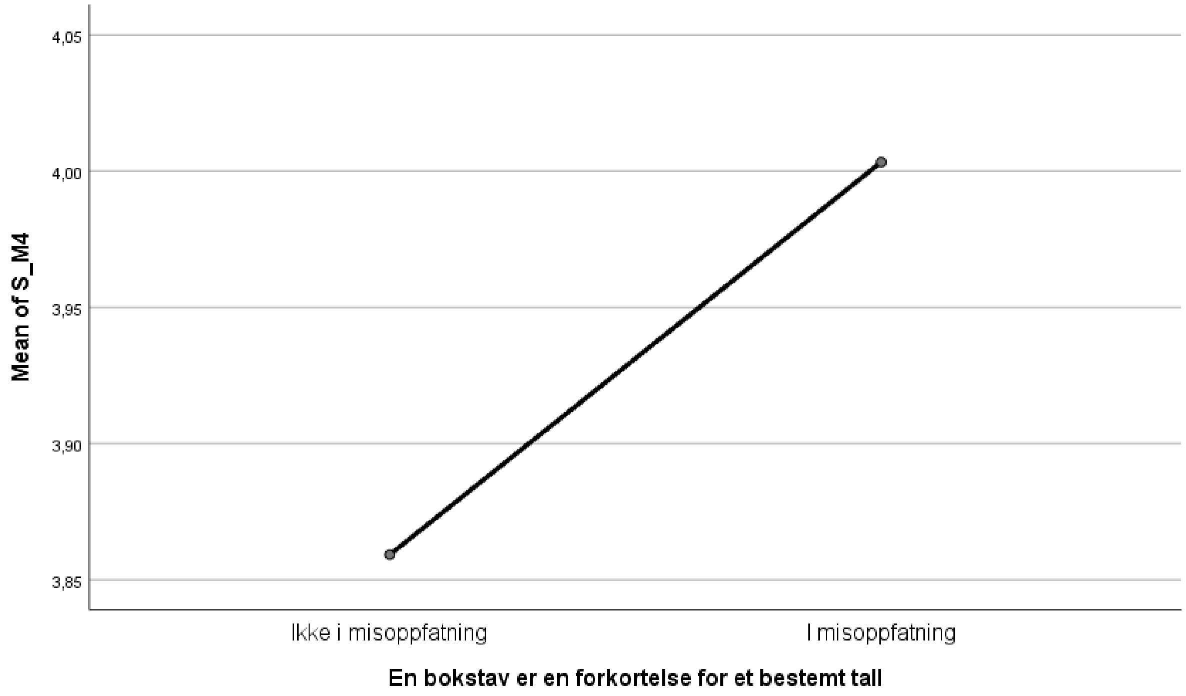
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Ikke i misoppfatning	250	3,8592	,77864	,04925	3,7622	3,9562	1,50	5,00
I misoppfatning	38	4,0033	,57240	,09286	3,8151	4,1914	2,63	5,00
Total	288	3,8782	,75540	,04451	3,7906	3,9658	1,50	5,00

ANOVA

S_M4

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,685	1	,685	1,202	,274
Within Groups	163,087	286	,570		
Total	163,772	287			

Means Plots



Tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi

Descriptives

S_M5

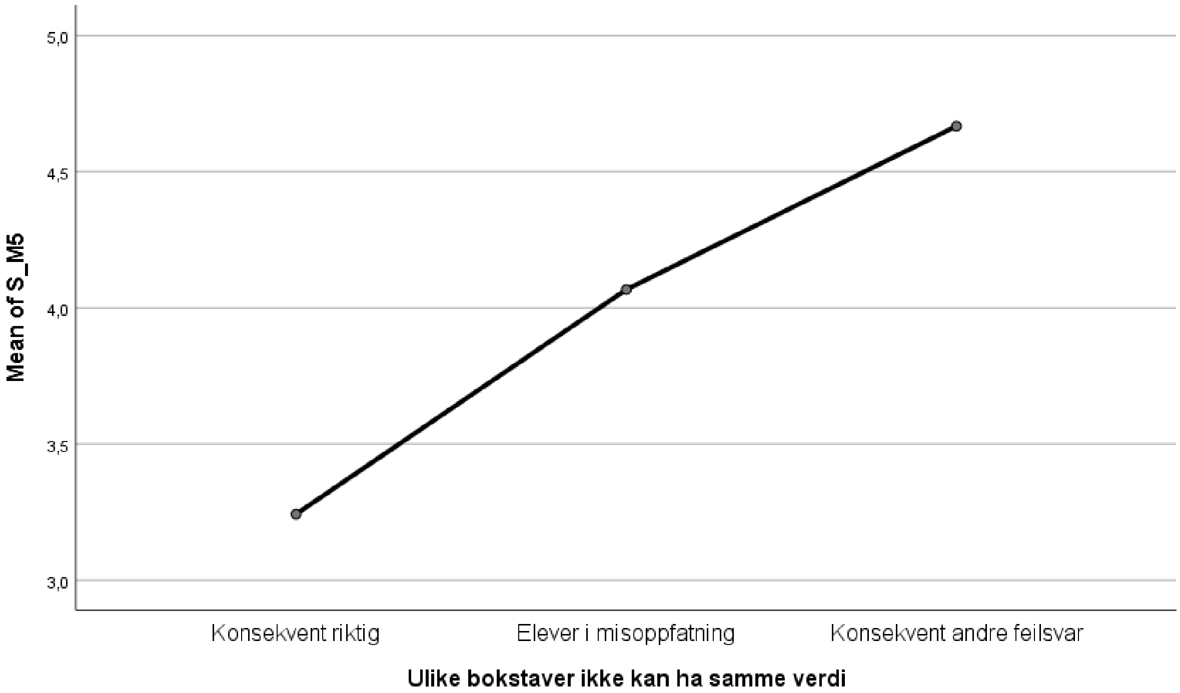
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Konsekvent riktig	44	3,242	1,1392	,1717	2,896	3,589	1,0	5,0
Elever i misoppfatning	40	4,067	,6792	,1074	3,849	4,284	1,7	5,0
Konsekvent andre feilsvar	1	4,667	.	.	.	.	4,7	4,7
Total	85	3,647	1,0298	,1117	3,425	3,869	1,0	5,0

ANOVA

S_M5

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	15,287	2	7,643	8,493	,000
Within Groups	73,792	82	,900		
Total	89,078	84			

Means Plots



Descriptives

S_M5

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Ikke i misoppfatning	276	3,0770	1,06744	,06425	2,9505	3,2035	1,00	5,00
I misoppfatning	40	4,0667	,67916	,10738	3,8495	4,2839	1,67	5,00
Total	316	3,2023	1,07726	,06060	3,0830	3,3215	1,00	5,00

ANOVA

S_M5

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	34,219	1	34,219	32,429	,000
Within Groups	331,332	314	1,055		
Total	365,551	315			

Means Plots

Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet

Descriptives

S_M6

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Konsekvent riktig	121	4,574	,5892	,0536	4,468	4,680	1,7	5,0
Elever i misoppfatning	25	3,847	,6454	,1291	3,580	4,113	2,3	5,0
Konsekvent andre feilsvar	4	2,583	,9179	,4590	1,123	4,044	1,7	3,7
Total	150	4,400	,7269	,0593	4,283	4,517	1,7	5,0

ANOVA

S_M6

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	24,535	2	12,267	33,279	,000
Within Groups	54,187	147	,369		
Total	78,722	149			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

Dependent Variable: S_M6
Games-Howell

(I) Verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet	(J) Verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Konsekvent riktig	Elever i misoppfatning	,7277*	,1397	,000	,385	1,071
	Konsekvent andre feilsvar	1,9910*	,4621	,044	,093	3,889
Elever i misoppfatning	Konsekvent riktig	-,7277*	,1397	,000	-1,071	-,385
	Konsekvent andre feilsvar	1,2633	,4768	,131	-,556	3,083
Konsekvent andre feilsvar	Konsekvent riktig	-1,9910*	,4621	,044	-3,889	-,093
	Elever i misoppfatning	-1,2633	,4768	,131	-3,083	,556

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Means Plots

Descriptives

S_M6

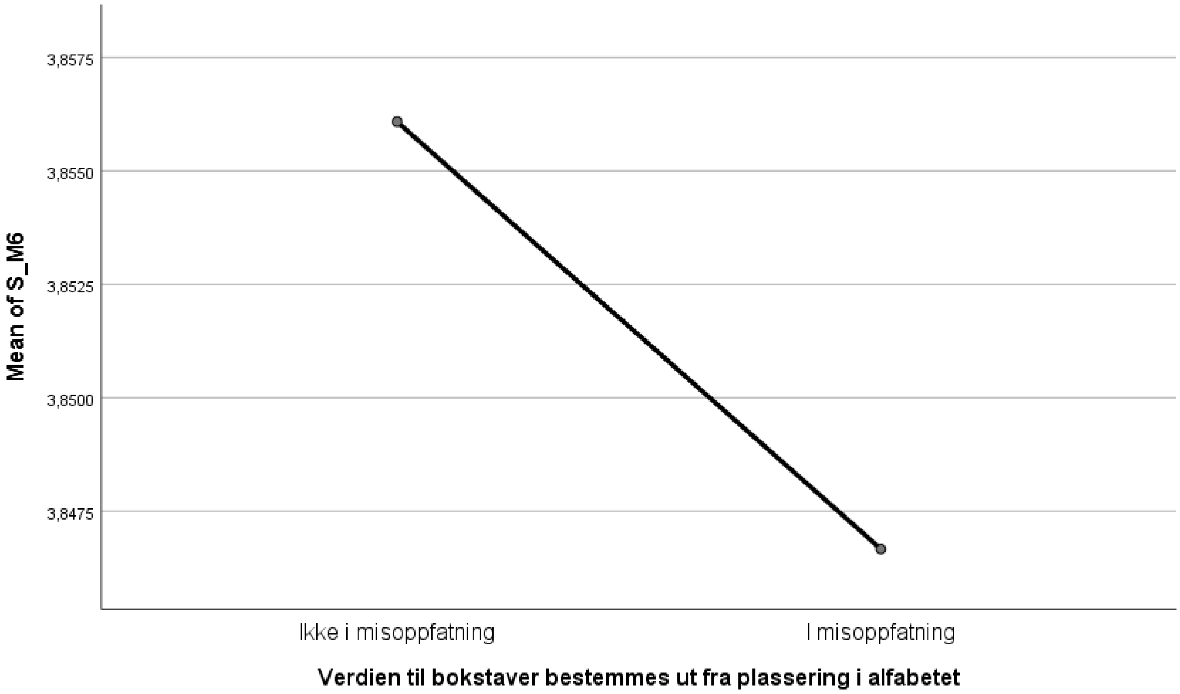
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
Ikke i misoppfatning	326	3,8561	1,05103	,05821	3,7416	3,9706	1,00	5,00
I misoppfatning	25	3,8467	,64535	,12907	3,5803	4,1131	2,33	5,00
Total	351	3,8554	1,02681	,05481	3,7476	3,9632	1,00	5,00

ANOVA

S_M6

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	,002	1	,002	,002	,965
Within Groups	369,014	349	1,057		
Total	369,016	350			

Means Plots



Vedlegg 11: ***Cohen's d*** **for gjennomsnittlig uttrykt grad av sikkerhet for elever i misoppfatninger**

	A	B	C	D	E	F
1		**Alt riktig**		**I misoppfatning**		
2		**Gjennomsnitt**	**St.avvik**	**Gjennomsnitt**	**St.avvik**	**d**
3	Tolker likhetstegnet som en kommando	4,4190	0,6708	3,7330	0,84547	0,90
4	Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon	4,0430	0,9046	3,4583	0,74861	0,70
5	Tolker bokstaver som forkortelser for objekt	3,5000		4,0050	0,7546	
6	En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	4,5440	0,4960	4,0033	0,5724	1,01
7	Ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	3,2420	1,1392	4,0667	0,67916	-0,88
8	Verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet	4,5740	0,5892	3,8467	0,64535	1,18
9						
10						
11						
12		**Ikke i misoppfatning**		**I misoppfatning**		
13		**Gjennomsnitt**	**St.avvik**	**Gjennomsnitt**	**St.avvik**	**d**
14	Tolker likhetstegnet som en kommando	4,1108	0,9221	3,7330	0,74861	0,45
15	Svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon	3,6630	1,0681	3,4583	0,74861	0,22
16	Tolker bokstaver som forkortelser for objekt	3,6086	0,9248	4,0050	0,75460	-0,47
17	En bokstav er en forkortelse for et bestemt tall	3,8592	0,7786	4,0033	0,57240	-0,21
18	Ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi	3,0770	1,0674	4,0667	0,67916	-1,11
19	Verdien til bokstaver bestemmes ut fra plassering i alfabetet	3,8561	1,0510	3,8467	0,64535	0,01

Vedlegg 12: Kjikvadrattester for utbredelse på de ulike trinnene

Tolker likhetstegnet som en kommando

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker likhetstegnet som en kommando"				
		M	**R**	Totalt (rad)
8 .trinn	O	29	64	93
	F	21,67	71,33	
9. trinn	O	12	39	51
	F	11,88	39,12	
10. trinn	O	7	55	62
	F	14,45	47,55	
Totalt (kolonne)		48	158	206
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	29	21,67	7,33	2,48
8. trinn R	64	71,33	-7,33	0,75
9. trinn M	12	11,88	0,12	0,00
9. trinn R	39	39,12	-0,12	0,00
10. trinn M	7	14,45	-7,45	3,84
10. trinn R	55	47,55	7,45	1,17
			x^2	**8,24**

M: Elever i misoppfatning
R: Elever med alle oppgaver riktig i denne misoppfatningen

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker likhetstegnet som en kommando"				
		M	**IM**	Totalt (rad)
8 .trinn	O	29	150	179
	F	23,87	155,13	
9. trinn	O	12	69	81
	F	10,80	70,20	
10. trinn	O	7	93	100
	F	13,33	86,67	
Totalt (kolonne)		48	312	360
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	29	23,87	5,13	1,10
8. trinn IM	150	155,13	-5,13	0,17
9. trinn M	12	10,80	1,20	0,13
9. trinn IM	69	70,20	-1,20	0,02
10. trinn M	7	13,33	-6,33	3,01
10. trinn IM	93	86,67	6,33	0,46
			x^2	**4,90**

M: Elever i misoppfatning
IM: Elever som ikke er i misoppfatning

Tror at svaret ikke kan inneholde en regneoperasjon

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon"				
		M	R	Totalt (rad)
8 .trinn	O	6	54	60
	F	2,00	58,00	
9. trinn	O	0	49	49
	F	1,63	47,37	
10. trinn	O	0	71	71
	F	2,37	68,63	
Totalt (kolonne)		6	174	180
	O	F	O-E	$(O-E)^2/E$
8. trinn M	6	2,00	4,00	8,00
8. trinn R	54	58,00	-4,00	0,28
9. trinn M	0	1,63	-1,63	1,63
9. trinn R	49	47,37	1,63	0,06
10. trinn M	0	2,37	-2,37	2,37
10. trinn R	71	68,63	2,37	0,08
				12,41

M: Elever i misoppfatning
R: Elever med alle oppgaver riktig i denne misoppfatningen

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "svaret kan ikke inneholde en regneoperasjon"				
		M	IM	Totalt (rad)
8 .trinn	O	6	129	135
	F	2,68	132,32	
9. trinn	O	0	72	72
	F	1,43	70,57	
10. trinn	O	0	95	95
	F	1,89	93,11	
Totalt (kolonne)		6	296	302
	O	F	O-E	$(O-E)^2/E$
8. trinn M	6	2,68	3,32	4,10
8. trinn IM	129	132,32	-3,32	0,08
9. trinn M	0	1,43	-1,43	1,43
9. trinn IM	72	70,57	1,43	0,03
10. trinn M	0	1,89	-1,89	1,89
10. trinn IM	95	93,11	1,89	0,04
				7,57

M: Elever i misoppfatning
IM: Elever som ikke er i misoppfatning

Tolker bokstaver som forkortelser for objekt

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker bokstaver som forkortelser for objekt"				
		M	R	Totalt (rad)
8 .trinn	O	20	0	20
	F	19,44	0,56	
9. trinn	O	8	0	8
	F	7,78	0,22	
10. trinn	O	7	1	8
	F	7,78	0,22	
Totalt (kolonne)		35	1	36
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	20	19,44	0,56	0,02
8. trinn R	0	0,56	-0,56	0,56
9. trinn M	8	7,78	0,22	0,01
9. trinn R	0	0,22	-0,22	0,22
10. trinn M	7	7,78	-0,78	0,08
10. trinn R	1	0,22	0,78	2,72
				3,60

M: Elever i misoppfatning
R: Elever med alle oppgaver riktig i denne misoppfatningen

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker bokstaver som forkortelser for objekt"				
		M	IM	Totalt (rad)
8 .trinn	O	20	160	180
	F	17,70	162,30	
9. trinn	O	8	72	80
	F	7,87	72,13	
10. trinn	O	7	89	96
	F	9,44	86,56	
Totalt (kolonne)		35	321	356
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	20	17,70	2,30	0,30
8. trinn IM	160	162,30	-2,30	0,03
9. trinn M	8	7,87	0,13	0,00
9. trinn IM	72	72,13	-0,13	0,00
10. trinn M	7	9,44	-2,44	0,63
10. trinn IM	89	86,56	2,44	0,07
				1,03

M: Elever i misoppfatning
IM: Elever som ikke er i misoppfatning

Tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall"				
		M	**R**	Totalt (rad)
8 .trinn	O	21	2	23
	F	15,89	7,11	
9. trinn	O	8	8	16
	F	11,05	4,95	
10. trinn	O	9	7	16
	F	11,05	4,95	
Totalt (kolonne)		38	17	55
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	21	15,89	5,11	1,64
8. trinn R	2	7,11	-5,11	3,67
9. trinn M	8	11,05	-3,05	0,84
9. trinn R	8	4,95	3,05	1,89
10. trinn M	9	11,05	-2,05	0,38
10. trinn R	7	4,95	2,05	0,85
				9,28

M: Elever i misoppfatning
R: Elever med alle oppgaver riktig i denne misoppfatningen

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tror at en bokstav er en forkortelse for et bestemt tall"				
		M	**IM**	Totalt (rad)
8 .trinn	O	21	115	136
	F	17,94	118,06	
9. trinn	O	8	60	68
	F	8,97	59,03	
10. trinn	O	9	75	84
	F	11,08	72,92	
Totalt (kolonne)		38	250	288
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	21	17,94	3,06	0,52
8. trinn IM	115	118,06	-3,06	0,08
9. trinn M	8	8,97	-0,97	0,11
9. trinn IM	60	59,03	0,97	0,02
10. trinn M	9	11,08	-2,08	0,39
10. trinn IM	75	72,92	2,08	0,06
				1,17

M: Elever i misoppfatning
IM: Elever som ikke er i misoppfatning

Tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi"				
		M	**R**	Totalt (rad)
8 .trinn	O	16	15	31
	F	14,76	16,24	
9. trinn	O	11	15	26
	F	12,38	13,62	
10. trinn	O	13	14	27
	F	12,86	14,14	
Totalt (kolonne)		40	44	84

	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	16	14,76	1,24	0,10
8. trinn R	15	16,24	-1,24	0,09
9. trinn M	11	12,38	-1,38	0,15
9. trinn R	15	13,62	1,38	0,14
10. trinn M	13	12,86	0,14	0,00
10. trinn R	14	14,14	-0,14	0,00
				0,50

M: Elever i misoppfatning
R: Elever med alle oppgaver riktig i denne misoppfatningen

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tror at ulike bokstaver ikke kan ha samme verdi"				
		M	**IM**	Totalt (rad)
8 .trinn	O	16	135	151
	F	19,11	131,89	
9. trinn	O	11	65	76
	F	9,62	66,38	
10. trinn	O	13	76	89
	F	11,27	77,73	
Totalt (kolonne)		40	276	316

	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	16	19,11	-3,11	0,51
8. trinn IM	135	131,89	3,11	0,07
9. trinn M	11	9,62	1,38	0,20
9. trinn IM	65	66,38	-1,38	0,03
10. trinn M	13	11,27	1,73	0,27
10. trinn IM	76	77,73	-1,73	0,04
				1,11

M: Elever i misoppfatning
IM: Elever som ikke er i misoppfatning

Tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet"				
		M	R	Totalt (rad)
8 .trinn	O	24	29	53
	F	9,08	43,92	
9. trinn	O	1	35	36
	F	6,16	29,84	
10. trinn	O	0	57	57
	F	9,76	47,24	
Totalt (kolonne)		25	121	146
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	24	9,08	14,92	24,54
8. trinn R	29	43,92	-14,92	5,07
9. trinn M	1	6,16	-5,16	4,33
9. trinn R	35	29,84	5,16	0,89
10. trinn M	0	9,76	-9,76	9,76
10. trinn R	57	47,24	9,76	2,02
				46,61

M: Elever i misoppfatning
R: Elever med alle oppgaver riktig i denne misoppfatningen

H_0 = Ingen forskjell i utberdelse "tolker bokstaver som en plassholder i posisjonssystemet"				
		M	IM	Totalt (rad)
8 .trinn	O	24	152	176
	F	12,54	163,46	
9. trinn	O	1	78	79
	F	5,63	73,37	
10. trinn	O	0	96	96
	F	6,84	89,16	
Totalt (kolonne)		25	326	351
	O	**F**	**O-E**	**$(O-E)^2/E$**
8. trinn M	24	12,54	11,46	10,48
8. trinn IM	152	163,46	-11,46	0,80
9. trinn M	1	5,63	-4,63	3,80
9. trinn IM	78	73,37	4,63	0,29
10. trinn M	0	6,84	-6,84	6,84
10. trinn IM	96	89,16	6,84	0,52
				22,75

M: Elever i misoppfatning
IM: Elever som ikke er i misoppfatning

Vedlegg 13: Søknad for prosjektet til Norsk senter for forskningsdata

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Meldeskjema 814910

Sist oppdatert

28.10.2019

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

- Lydopptak av personer
- Andre opplysninger som vil kunne identifisere en fysisk person

Type opplysninger

Du har svart ja til at du behandler andre opplysninger som vil kunne identifisere en person, beskriv hvilke

Skal du behandle særlige kategorier personopplysninger eller personopplysninger om straffedommer eller lovovertredelser?

Nei

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Misoppfatnigner knyttet til algebra

Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

For å kunne se om det er noen utvikling i misoppfatninger på de forskjellige trinnene trenger jeg å få informasjon om hvilket klassetrinn elevene tilhører.

Ekstern finansiering

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Olav Dalsegg Tokle, olav.dalsegg.tokle@matematikksenteret.no, tlf: 95107067

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet NTNU / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Janne Fauskanger, janne.fauskager@uis.no, tlf: 51833558

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Elever i ungdomsskolen

Rekruttering eller trekking av utvalget

Rekruttering av skoler ved å kontakte rektorer

Alder

12 - 15

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 1

- Lydopptak av personer
- Andre opplysninger som vil kunne identifisere en fysisk person

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1?

Pedagogiske eller psykologiske målinger eller tester

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Personlig intervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

- Elektronisk (e-post, e-skjema, digital signatur)
- Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Ved å kontakte student

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?

Ved å kontakte student

Totalt antall registrerte i prosjektet

100-999

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Behandling

Hvor behandles opplysningene?

- Maskinvare tilhørende behandlingsansvarlig institusjon
- Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?

- Student (studentprosjekt)
- Prosjektansvarlig

Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?

Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (kodenøkkel)?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

- Opplysningene anonymiseres
- Adgangsbegrensning
- opplysningene krypteres under lagring

Varighet

Prosjektperiode

01.08.2019 - 01.07.2020

Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?

Nei, data vil bli oppbevart uten personopplysninger (anonymisering)

Hvilke anonymiseringstiltak vil bli foretatt?

- Koblingsnøkkelen slettes
- Personidentifiserbare opplysninger fjernes, omskrives eller grovkategoriseres
- Lyd- eller bildeopptak slettes

Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Ja

Begrunn

Jeg tenker å bruke elevenes skriftlig arbeid som eksempler i min studie. Det vil ikke være noen opplysninger om skole, kjønn eller trinn knyttet til eksemplet, men håndskriften vil kunne identifiseres av andre personer der de kjenner en bestemt persons håndskrift.

Tilleggsopplysninger

Endringen gjelder bare en presisering om at jeg ønsker å bruke eksempler fra elevenes skriftlig arbeid i som eksempler i min masteroppgave.

Vedlegg 14: Godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata

N

NSD Personvern

30.10.2019 13:11

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 814910 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Vi viser til endringer registrert 28.10.2019 og 30.10.2019. Vi kan ikke se at det er gjort noen oppdateringer i meldeskjemaet eller vedlegg som har innvirkning på NSD sin vurdering av hvordan personopplysninger behandles i prosjektet.

Les mer om hvilke endringer som skal registreres hos NSD før endringer meldes inn i fremtiden: nsd.uib.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til videre med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: [redacted]

Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

N

NSD Personvern

30.10.2019 12:44

Kvittering på at meldeskjema med referansekode 814910 er innsendt og mottatt.

Vedlegg 15: Utdrag fra chat med Norsk senter for forskningsdata angående bruk av elevbesvarelser

[redacted]
30.10.2019 09:04

Ja, dersom du kan velge besvarelser uten utpreget spesiell håndskrift, kan du hake av for "nei" under at de vil gjenkjennes. Endringen i selve oppgavesettet er av en slik art at det ikke vil ha innvirkning på vår vurdering.

Olav Dalsegg Tokle
30.10.2019 08:55

Hei og takk for svar.

Jeg mener ikke at utvalget kan identifiseres i publikasjonen, men jeg kan jo ikke gå 100 % god for at det ikke finnes en person som kjenner håndskriften til én i utvalget. Selv mener jeg at sannsynligheten for dette er så lav at det er uproblematisk, men siden jeg ikke har noen erfaring med dette fra før, og at den personen jeg chattet med anbefalte meg det, søkte jeg på nytt. Jeg har satt meg som mål å hente inn omtrent 750 besvarelser, så jeg skal nok ha god mulighet til å velge eksempler som ikke har en utpreget spesiell håndskrift.

Ut fra ditt svar, virker det som om vi ser saken likt, og at jeg kan gå i gang med å samle inn data?

Med vennlig hilsen
Olav Dalsegg Tokle

NSD Personvern
30.10.2019 08:44

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 814910 må kompletteres for at NSD kan fortsette vurderingen.

Når du har gjort oppdateringene i skjemaet, må du gå til siden "send inn" og trykke "bekreft innsending".

Dersom du har ytterligere kommentarer eller spørsmål kan du skrive en melding i dialogfeltet over og trykke "send melding".

Følgende kommentar er gitt av NSDs personvernrådgiver:

Hei Olav. Dersom du mener at utvalget kan identifiseres i publikasjonen bør du innhente eksplisitt samtykke og informere om dette. I utgangspunktet ser vi ikke umiddelbart at det er sannsynlig at utenforstående kan identifisere enkeltelver basert på håndsskriv, slik at det er ikke sikkert at det er nødvendig. Spesielt om du kan velge eksempler som ikke har en utpreget spesiell håndskrift. Dersom du likevel mener at de kan identifiserer bør du som sagt informere og innhente eksplisitt samtykke til dette.

Ta gjerne kontakt her i meldingsdialogen om du har spørsmål angående tilbakemeldingen. Det er også mulig å ta eventuelle spørsmål over telefon om du foretrekker det.

Mvh
[redacted]

Vedlegg 16: Samtykkeskjema for deltagelse i studien

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet "Elevers forutsetninger for å mestre algebra"?

Til foresatte for elever på <…>. trinn ved <…> skole

Jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, og skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt på skolen til ditt barn. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU. I masteroppgaven ønsker jeg å se nærmere på elevenes forutsetninger for å mestre algebra i skolen. Min erfaring er at mange elever møter store utfordringer i overgangen fra å regne med tall til at tallene blir erstattet med generelle bokstaver, og at mange hull i elevenes tall- og tallregningslære kommer til syne når de blir introdusert for algebra. Derfor vil jeg se nærmere på hvilke, og i hvilken utbredelse, ulike misoppfatninger knyttet til algebra er på ulike trinn i skoleløpet.

I denne studien vil jeg se på misoppfatninger hos elever på 8.–10. trinn. Å være i en misoppfatning er en naturlig del av elevenes læringsprosess, og handler om at elevene overgeneraliserer basert på forhåndskunnskap. De tar med seg tidligere kunnskap inn i forståelsen av et nytt begrep.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Jeg ønsker å utføre studien min på elever på 8.–10. trinn, og derfor er din sønn/datter blant de som blir spurt. I utvalget mitt ønsker jeg å ha representert en blanding av barn fra by/bygd, og små og store skoler.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?

I studien skal alle deltakere svare på et oppgavesett. Settet består av oppgaver som er ment å kartlegge misoppfatninger knyttet til algebra. Til sammen er det 20 - 25 oppgaver, og det vil ta elevene omtrent 30 minutter å besvare oppgavene. I utgangspunktet vil jeg gjennom testene ikke samle inn opplysninger som gjør at jeg kan identifisere enkeltelever. Jeg ønsker opplysninger om skole, trinn og kjønn, men elevene vil være anonyme. Elevene vil gjennomføre testene på papir, og alle data vil så bli lagt inn på data og analysert av meg.

Det kan også bli aktuelt å foreta et lite intervju med utvalgte elever, og da trenger jeg eget samtykke til at ditt barn kan bli intervjuet. Intervjuene vil være «dynamiske». Med dette menes at jeg vil stille elever utdypende spørsmål, mens de sitter med oppgavesettet. På denne måten håper jeg å unngå behov for å vite elevenes navn. Spørsmålene har til hensikt å finne ut hva som ligger bak elevenes svar. Hvorfor har de svart som de gjør?

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet, men for å få et så riktig bilde av elevenes forståelse som mulig, håper jeg at alle blir med. Hvis du/ditt barn velger å delta, kan du/ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om ditt barn vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis det ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Olav Dalsegg Tokle og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Eventuelle navn på elever vil jeg alltid erstatte med en kode. Koden vil oppbevares innelåst.
- Alle filer med personopplysninger vil oppbevares i passordbeskyttede filer og mapper.

Hva skjer med opplysningene når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes i løpet av juni 2020. Etter at prosjektet er avsluttet vil alle data bli anonymisert. Det vil dermed ikke være mulig å identifisere enkeltelever.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- få slettet personopplysninger om ditt barn,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Institutt for Lærerutdanning har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: Thomas Helgesen
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Olav Dalsegg Tokle

Janne Fauskanger, veileder　　　　Olav Dalsegg Tokle, student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Elevers forutsetninger for å mestre algebra* og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at .... (elevens navn):

- ☐ Svarer på oppgavesettet
- ☐ Deltar i eventuelle elevintervju

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni 2020

Olav Dalsegg Tokle

Er elever, i misoppfatning, selv klar over at de er i misoppfatning?

NTNU

Kunnskap for en bedre verden