Birgit Aune

Våkenhet for matematiske mønster og struktur **og** *problemløsning ved tegning*

En studie av sammenhenger mellom fire elevers AMPS nivå og deres problemløsning i matematikk ved hjelp av tegning

Masteroppgave i i matematikkdidaktikk (1 - 7). LMM15004
Veileder: Magdalini Lada
Mai 2020

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Birgit Aune

Våkenhet for matematiske mønster og struktur **og** *problemløsning ved tegning*

En studie av sammenhenger mellom fire elevers AMPS nivå og deres problemløsning i matematikk ved hjelp av tegning

Masteroppgave i i matematikkdidaktikk (1 - 7). LMM15004
Veileder: Magdalini Lada
Mai 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

SAMMENDRAG

Mulligan og Mitchelmore (2013) har bidratt med mye kunnskap som belyser elevers våkenhet for struktur og mønster i matematikken. De kaller dette for å inneha *strukturell tankegang* og begrepet inkluderer både våkenhet for numeriske- og romlige strukturer. De har etablert et rammeverk med fem nivåer som gjør det lettere å analysere hvilket strukturelt bevissthetsnivå en elev er på. De har valgt å kalle dette *AMPS nivåer, Awareness of mathematical patterns and structures (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013).* Det er allerede etablerte sammenhenger mellom romforståelse og tallforståelse hvor en økt romforståelse fører til en økt tallforståelse (van Nes & van Eerde, 2010). Det er også etablerte sammenhenger mellom økt romforståelse og en mer vellykket problemløsning (Edens & Potter, 2007).

Inkludert i det å ha en større våkenhet for romlig struktur, er det å ha romforståelse. Hensikten med denne studien er å avdekke sammenhenger mellom AMPS nivå og hvordan elever løser problemløsende matematikkoppgaver ved hjelp av tegning.

Undersøkelsens konklusjoner er basert på fire 2. trinns elevers besvarelser, på fire problemløsende matematikkoppgaver. Studien belyser flere sammenhenger som gir innsikt på et område som fortsatt er litt uutforsket. Resultatene indikerer at det er en sammenheng mellom elevers AMPS nivå og romforståelse. Den viser også at det er en korrelasjon mellom høyere AMPS nivå og suksess i problemløsing. Jeg fant forbindelser mellom AMPS nivå og evnen til å visualisere samt evnen til å identifisere de matematiske objektene i oppgaveteksten. Resultater av studien indikerer i tillegg, at beskrivelsene av de ulike AMPS nivåene også kan beskrive elevenes tegninger.

ABSTRACT

Mulligan and Mitchelmore (2009) have contributed to mathematics research by investigating the structural development of students mathematical thinking. In their research they have found that structural thinking involves both spatial- and numerical structuring, and a deeper understanding of relationships and properties in mathematics. They have developed a framework containing of five levels of awareness of mathematical patterns and structure, AMPS, which enables us to determine a child's structural level. In the field of mathematic contemplation and learning, there is already an established connection between spatial structuring and number sense (van Nes & van Eerde, 2010). There is also an established correlation between increased spatial sense and success in problem solving (Edens & Potter, 2007).

Spatial sense is included as a part of structural thinking by way of structuring space. The intention of this thesis is to investigate the connections between *a* child's structural level and how he or she solves problems in mathematics by drawing.

The conclusions are based on the results of four, second grade students as they solve and draw four word-problems in mathematics. The study indicates several very interesting connections and suggests that mathematics education should focus more on developing student's structural awareness. Conclusions presented are correlations between a higher level of structural awareness, and the ability to visualize a problem and also to identify the mathematical objects in a word problem. In addition, the study suggests a connection between spatial sense, success in problem solving, and a higher level of structural awareness. There is also an indication that the descriptions of the different AMPS levels can also describe the student's drawings.

FORORD

Med dette forordet gjør jeg meg ferdig med masteroppgaven min og avslutter min videreutdanning for denne gangen. Jeg har brukt fire år på dette masterstudiet og kjenner en stolthet over å ha mestret det å jobbe som lærer i tillegg til det å være student selv. Det har vært noen rare år hvor mine medstudenter har blitt byttet ut med nye, fordi jeg har brukt dobbelt så lang tid som alle andre. Det har vært vemodig å ta farvel, men samtidig veldig spennende fordi jeg stadig har møtt nye mennesker. Det siste året har jeg dog vært alene med masterskrivingen min og ble svært glad for at min veileder, Magdalini Lada, kom tilbake og sørget for at jeg fullførte oppgaven på en god måte. Tusen takk for god og tydelig veiledning.

Jeg syntes mange av fagene i masterstudiet var svært givende og synes egentlig at disse burde være en del av den vanlige lærerutdanningen. Det som rørte meg mest var faget *Kreativitet, multimodalitet og estetikk i matematikk,* som ble forelest av Yvonne og Benedikte Grimeland. Jeg vil gi en stor takk til begge to for at de i sine forelesninger, klarte å inspirere meg ved å belyse sammenhenger i matematikken som jeg ikke var klar over tidligere. Jeg vil takke mine gode kolleger Linette Fjærli Dahl og Rikke Overvik for god veiledning underveis i masterskrivingen da Magdalini Lada var i fødselspermisjon. Deres hjelp gjorde at jeg klarte å samle meg om skrivingen i en periode hvor jeg følte meg veldig alene.

Jeg vil også takke min mann og døtre for god støtte og oppmuntring. Uten dere ville dette vært mye vanskeligere.

Birgit Aune

Barneskolelærer og masterstudent

11. mai 2020

INNHOLDSFORTEGNELSE

TABELLER

FIGURER

1 INNLEDNING

1.1 BEGRUNNELSE FOR FORSKNINGSSPØRSMÅL

Det er mange teorier og påstander rundt *hva* det viktigste elementet i matematikkundervisning er. Hva burde man fokusere mest på som underviser i matematikk? Hva er nøkkelen til matematisk forståelse? Mange mener algebra og det å inneha en algebraisk tankegang er det viktigste (*The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, 2004; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008). Noen mener det er spesifikt generalisering og bevisføring i en algebraisk situasjon (Lannin, 2005) mens Duval (2006) mener det handler om å mestre overgangen mellom ulike representasjonssystemer uten å miste viktig matematisk informasjon underveis. Mulligan og Michelmore (2009) mener essensen i de overnevnte områdene av matematikk, samt mange flere, involverer det å lete etter matematiske mønster og strukturer og på denne måten få en dypere forståelse for sammenhengene mellom ulike matematiske begrep. Denne påstanden støttes også av det nye læreplanverket «Kunnskapsløftet 2020 Grunnskolen», hvor både kjerneelementene algebra, generalisering og problemløsning, vektlegger å sette søkelyset på mønster og strukturer i undervisning. I kjerneelementet *Utforsking og problemløsning* forklares utforsking slik: «*Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing»(Saabye & Pedlex, 2019).* De forklarer kjerneelementet generalisering på følgende måte: «*Generalisering i matematikk handlar om at elevane oppdagar samanhengar og strukturar og ikkje blir presenterte for ei ferdig løysing» (Saabye & Pedlex, 2019)* og algebra slik: «*Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk» (Saabye & Pedlex, 2019).* Dette styrker Mulligan og Michelmores (2009) påstand om at våkenhet for matematiske mønster og struktur er komponenten som binder matematiske begrep sammen og den er vel verdt å undersøke nærmere.

Nasjonale prøver i matematikk for 5. trinn består av problemløsendeoppgaver med kontekster fra den virkelige verden (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette fordi matematikk i grunnskolen handler om det å sette matematikkunnskap i sammenheng med dagligdagse problemer og forstå når de ulike matematiske begrepene er nødvendig i problemløsningen (Saabye & Pedlex, 2019). Grunnen til at tekstoppgaver er utfordrende for elever er kompleks, men noe av vanskene omhandler det at elever må kunne trekke ut den nødvendige informasjonen fra oppgaveteksten (Vilenius-Tuohimaa, Aunola, & Nurmi, 2008). De må også kunne anvendelsesområdene for de ulike matematiske begrepene, samt forstå hvordan disse henger sammen slik at de benytter riktig verktøy og strategi på riktig sted (Bernardo, 1999).

Utfordringene ved tekstoppgaver og Mulligan og Mitchelmores (2009), samt Læreplanværket Kunnskapsløftet 2020's antydning om at brobyggeren mellom ulike matematiske begrep er en våkenhet for matematisk struktur og mønster, danner bakgrunnen for denne studien.

1.2 PROBLEMSTILLING

Min problemstilling er: Hvilke sammenhenger finnes mellom grad av *våkenhet for matematiske struktur og mønster* og hvordan fire elever på 2.trinn løser problemløsende matematikkoppgaver ved hjelp av tegning.

Formålet for undersøkelsen er som problemformuleringen stadfester, å finne sammenhengen mellom disse to grenene av matematikken: våkenhet for matematiske mønster og struktur og problemløsning ved tegning. Mulligan og Michelmore (2009) definerer *mønster* som enhver forutsigbar regularitet som involverer tall, rom eller måling. Med *struktur* mener de hvordan de ulike elementene er organisert og relatert til hverandre. En større våkenhet for struktur og mønster innebærer å ha en mer utviklet *strukturell tankegang* med økt innsikt i matematiske begrep og sammenhenger mellom disse. Det er disse definisjonene jeg benytter i min analyse av sammenhengene mellom våkenhet for matematiske mønster og strukturer, og problemløsing ved hjelp av tegning. Mulligan og Michelmore (2009) en forkortelse for de ulike nivåene av «*Awareness og mathematical patterns and structures*» og kaller dette *AMPS nivåer.*

Jeg tar utgangspunkt i Utdanningsdirektoratets definisjon av problemløsing:

> Problemløysing handlar om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk (Saaby & Pedlex, 2019, s. 30)

Jeg ser spesifikt på problemløsning ved hjelp av tegning, og bruker elevenes produkt fra problemløsningsprosessen i tillegg til empiri fra intervjuer, for å finne sammenhenger til deres etablerte AMPS nivå.

1.3 TEORI OG METODEVALG

Mulligan og Michelmore (2009) fant at det er en sammenheng mellom elevers AMPS nivå og matematikkresultater, hvor et høyere AMPS nivå korrelerte med bedre resultater i matematikk (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009). Mulligan, Michelmore, English og Crevensten (2013) implementerte noen år senere, et utviklingsprogram med den hensikt å utforske om våkenhet for struktur og mønster kunne tilegnes gjennom undervisning (English & Mulligan, 2013). Dette var en stor intervensjonsstudie på fire barneskoler i Australia. De fant at undervisningsprogrammet førte til at elevene i intervensjonsstudie økte sitt AMPS nivå og ble mer våken for sammenhenger i matematikken.

Mer kunnskap om dette fenomenet vil føre til at man avdekker mulige brobyggere mellom matematiske begrep, som igjen kan gjøre problemløsningens dørstokkmil litt mindre. Som lærer i grunnskolen vil jeg kunne spisse min undervisning slik at brobyggerne mellom matematiske begrep etableres, og kunnskap hos elevene øker. Jeg vil belyse et område av matematikken som fortsatt er litt uutforsket. På denne måten vil jeg bidra med en liten brikke i puslespillet forskere over hele verden jobber med, det å fult forstå sammenhenger i matematikken og elevers adaptasjon av ny kunnskap.

På grunn av at Mulligan og Michelmores (2009) fant en sammenheng mellom AMPS nivå og matematikkresultater, har jeg en forventning om å finne en korrelasjon som viser at elever på et høyere AMPS nivå har bedre resultater i problemløsningen. Jeg startet også med et håp om å avdekke sammenhenger mellom barns tegninger og deres AMPS nivå. Dette håpet ble bekreftet og jeg gleder meg til å presentere funnene senere i denne teksten.

Jeg har gjort en studie i to deler. Får å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt, måtte jeg først finne elever som var på ulike nivå i forhold til strukturell bevissthet. Mulligan og Michelmore gjorde i 2009 en studie for å avdekke om det var mulig å kategorisere elevers besvarelser på oppgaver om mønster og struktur, i reliable kategorier. De avdekket fire nivåer og laget et rammeverk for analysering av mønster- og strukturoppgaver. De oppdaget senere også et høyere nivå, hvor elevene evnet å generalisere mønster og strukturer. Dette rammeverket av fem AMPS nivåer, danner grunnlaget for analysen av strukturoppgavene jeg gav, og er del en av min studie.

Jeg analyserte 21 elevers besvarelser og valgte ut fire elever som var på fire ulike AMPS nivå, slik at jeg kunne sammenligne og se på likheter og forskjeller i andre del av analysen min.

I samme studie utdyper Mulligan og Michelmore (2009) hva de mener med å være våken for struktur og mønster. De kaller dette å inneha strukturell tankegang, som nevnt i tidligere avsnitt. Strukturell tankegang omhandler både numerisk struktur og romlig struktur. *Numerisk strukturering* omhandler å telle, gjenkjenne mengder, gruppere, dele opp og å estimere. *Romlig strukturering* omhandler kort fortalt, evnen til å visualisere noe mentalt. Begge disse blir mer inngående forklart i teorikapittelet. Både romlig- og numerisk strukturering er to områder av matematikken som har vært undersøkt av mange forskere tidligere (Nes & de lange, 2007), (van Nes & van Eerde, 2010), (Thomas, Mulligan, & Goldin, 2002), både for å stadfeste hva disse to begrepene innbefatter og også observasjoner om hvordan de gjør seg gjeldende hos elever i ulike matematiske situasjoner. I analysen av sammenhengene, benytter jeg funn og definisjoner fra disse forskerne samt Mulligan og Michelmore (2009), i forhold til hva det å inneha strukturell tankegang innebærer.

Andre del av empiri innsamlingen min var intervju i enerom, mens elevene løste fire problemløsende oppgaver ved hjelp av tegning. Intervjuene ble tatt opp på video slik at jeg kunne analysere kroppsspråk så vel som tale og tegning.

For å presentere hvordan elever bruker tegninger sine i problemløsning benytter jeg teorier fra bl.annet Saundry og Nicol (2006), som har delt inn elevers ulike bruksområder for tegninger i tre kategorier (Saundry, 2006). Disse suppleres også av teorier fra Woleck (2001) som også har studert barns bruk av tegninger (Cuoco & Curcio, 2001).

Jeg har brukt teorier om problemløsning og tegninger (Edens & Potter, 2007) (Hegarty & Kozhevnikov, 1999) for å sammenligne og utforske romlig struktur i tegninger til elevene i min studie.

I min søken etter å finne sammenhenger har jeg også valgt å ta med teorier om elevers utfordring ved en overgang fra en tekstoppgave til en tegning. Duval (2006) mener at det å mestre denne overgangen er svært viktig for forståelsen av de ulike begrepene i matematikken og sammenhengene mellom disse (Duval, 2006). Jeg var derfor svært nysgjerrig på om det var en sammenheng mellom elevenes AMPS nivå og hva de tok med seg av matematisk innhold fra den problemløsende oppgaven til tegningen sin.

Alle teoriene jeg har presentert her, supplerer hverandre og gir til sammen et godt teoretisk grunnlag for å svare på problemstillingen min. På grunn av begrenset tid og størrelse på denne oppgaven har jeg valgt å ikke legge så stor vekt på numerisk struktur i min analyse, men har valgt å heller gå litt dypere inn på analyse av romlig struktur.

1.4 OPPBYGGING

Teksten har en tradisjonell oppbygging og starter med å presentere de ulike teoriene jeg bruker i min analyse. Jeg går deretter over til metode som etterfølges av en todelt analysedel hvorav den første stadfester elevenes AMPS nivå. Empirien for denne delen av analysen består av elevenes besvarelser på tre strukturoppgaver samt en intervjudel. I den andre delen analyserer jeg hvordan elevene løser fire problemløsende matematikkoppgaver ved hjelp av tegning. Empirien for denne delen av analysen består av elevenes tegninger, ytringer og kroppsspråk fra videopptak gjort av problemløsingsfasen. I diskusjonsdelen belyser jeg sammenhengene mellom AMPS nivå og hvordan elevene har løst de fire problemløsende matematikkoppgavene og trekker til slutt konklusjoner i siste kapittel.

2 TEORI

I dette avsnittet vil jeg presentere litteratur som er relevant i min søking etter å finne svar på problemstillingen: Hvilke sammenhenger finnes mellom grad av våkenhet for struktur og mønster, *AMPS*, og hvordan fire elever på 2.trinn løser problemløsende matematikkoppgaver ved hjelp av tegning.

For å finne svar på dette spørsmålet starter jeg med å belyse hva fenomenet *våkenhet for struktur og mønster* innebærer ved å gå nærmere inn på hva det å inneha *strukturell tankegang* vil si.

2.1 STRUKTURELL TANKEGANG

Joanne T. Mulligan og Michael C. Mitchelmore har over flere år og mange forskningsprosjekter interessert seg for hvordan våkenhet for mønster og struktur, *Awareness of mathematical pattern and structure – AMPS*, påvirker hvordan barn løser oppgaver i matematikk. De definerer *matematisk mønster* som enhver forutsigbar regularitet som involverer tall, rom eller måling. Med *struktur* mener de hvordan de ulike elementene er organisert og relatert til hverandre. Det å være våken for disse regularitetene og hvordan de er relatert til hverandre definerer Mulligan og Michelmore (2009) som å inneha *strukturell tankegang.* Dersom man har et godt utviklet *strukturell tankegang,* har man en dypere våkenhet for sammenhengene mellom ulike matematiske begrep og hvordan denne forståelsen kan brukes for å løse ulike matematiske utfordringer (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009). Strukturell tankegang omhandler flere deler av matematikken, både numerisk strukturering og romlig strukturering. *Spatial – eller romlig strukturering*, er utbredt i geometrien og involverer den mentale operasjonen det er å konstruere en organisasjon, en form, et objekt eller et sett med objekter (Battista, 1999). Battista (1999) sier at det er den rommelige strukturen som bestemmer objektets oppbygging ved at man identifiserer de rommelige komponentene og setter disse i relasjon til hverandre. Man identifisere sammenhenger mellom eksisterende kunnskap og det nye objektet. Han uttaler at det å strukturere rom innebærer å begripe rommet i form av hjørner, kanter og polygoner. Han fremlegger at vi strukturerer rom når vi transformerer det ved å mentalt flytte, rotere og zoome inn for å studere noe nøyere (Battista, 1999). I sitt forskningsprosjekt undersøkte han hvordan elever på 2. trinn jobbet med å fullføre en 4 x 5 matrise hvor deler av noen rader og kolonner var borte. Jeg har brukt en tilsvarende oppgave i mitt forskningsprosjekt for å finne hvilket nivå elevene er i forhold til våkenhet for romlig struktur. Battista (1999) fant at mange elver strevde med å se strukturen i en matrise fordi de ikke så organiseringen av de rektangulære formene i matrisen. De som klarte oppgavene oppdaget 4 x 5 strukturen og klarte å visualisere de manglende rektanglene i matrisen (Battista, 1999). Battista (1999) understreker at det er denne strukturen lærere må jobbe med for at elever skal få et riktig mentalt bilde av sammenhengene i geometrien. Dersom deres mentale bilde er feil eller manglende, vil deres tilegnelse av ny kunnskap også inneholde misoppfatninger (Battista, 1999).

Romlig struktur er også viktig i den forstand at den er direkte knyttet til tallforståelse og romforståelse. Van Nes og De Lange (2007) definerer *tallforståelse* som lettheten og fleksibiliteten som barn innehar når de opererer med tall (van Nes og de Lange, 2007). Van Nes og Van Eerde (2010) utdyper nærmere hva som ligger i det å ha *romforståelse* og deler dette inn i tre kategorier: visualisering, orientering og form (van Nes & van Eerde, 2010). *Visualisering* innebærer evnen til å konstruere mentale bilder av todimensjonale og tredimensjonale objekter og å kunne rotere, flytte og endre disse mentalt for å inspisere deres egenskaper nærmere. Dette krever ingen fysisk forflytting kun evnen til å se for seg objektene mentalt (van Nes & van Eerde, 2010). *Orientering* er evnen til å forflytte seg selv for å inspisere noe nærmere. Nå er det ikke objektene som roteres og flyttes på, det er evnen til å mentalt forflytte en selv for å se på en annen del av et objekt (van Nes & van Eerde, 2010). *Form* handler om evnen til å kommunisere form til andre. I *form* ligger kunnskap om former, kjennskap til egenskapene ved de ulike formene, relasjonene mellom ulike former og evnene til å se sammenhenger. Dette handler det om å vite at en kube består av seks kvadrater og at en sylinder kan lages av to sirkler og et rektangel. Kunnskap om form beriker vokabular og fantasien (van Nes & van Eerde, 2010). Selv om van Nes og Van Eerde (2010) i hovedsak ordlegger seg slik at man kan tro at romforståelse kun gjør seg gjeldene i geometrien så vil også visualisering, orientering og form være svært viktige egenskaper i en problemløsingsfase. Visualisering og orientering vil da omhandle hvordan man visualiserer de matematiske objektene i oppgaveteksten og form vil omhandle hvordan disse relateres til hverandre, altså sammenhengen mellom disse.

Van Nes og De Lange (2007) ville finne ut hvordan romlig struktur påvirket barnehagebarn i å sette sammen og dele opp mengder, for å få innsikt i relasjoner mellom tall. De fant i sitt forskningsprosjekt ut at de tre komponentene i romforståelse, visualisering, orientering og form, påvirker hvordan barn jobber med tall og mengder. De knytter derfor en direkte relasjon mellom rommelig struktur og tallforståelse, hvor en større våkenhet for rommelig struktur førte til en bedre evne til å resonere for å finne riktig mengder (van Nes og de Lange, 2007).

Strukturell tankegang omhandler også *numerisk strukturering* i form av å telle, gjenkjenne mengder, gruppere, dele opp og å estimere. Når et barn tegner en representasjon av et tall vil mulige interne representasjoner som gruppering, re gruppering, oppdelinger og mønster bli synlig (Thomas et al., 2002). Dette gir et bilde av hvor utviklet deres strukturelle bevissthet om tall og mengden i tall er. Thomas et al (2002) gjorde en stor undersøkelse hvor elever fikk oppgaven: *Lukk øynene og se for deg tallene fra 1 til 100. Tegn det du ser*. De endte opp med tre ulike kategorier av representasjoner for tall: *pictorial eller billedlig, ikonisk og symbolsk*. *Billedlig representasjon* er et bilde av et objekt. Dette kan for eksempel være en dinosaur eller et annet objekt med tallet 100 påskrevet. *Ikoniske tegninger* inkluderer tellestreker eller et antall objekter som fungerer som en representasjon av en mengde, altså mengden i tallet. *Symbolsk representasjon* inkluderer tall satt i et system som for eksempel en tallinje, et rutenett, en linjal eller en vertikal linje. Ut i fra disse tre kategoriene og ved hjelp av elevarbeid og intervju kunne Thomas et al (2002) studere elevenes våkenhet for numerisk struktur (Thomas et al., 2002). De undersøkte også om representasjonen var eller ble beskrevet som dynamisk eller statisk. Dersom eleven beskrev representasjonen som noe som var satt, altså ikke kunne endre seg, så var den *statisk.* En *dynamisk* representasjon ble beskrevet som noe som kunne endres. De hadde en elev som valgte å telle til 100 ved å hoppe med fem om gangen. Han understrekte hoppene med en alternering mellom 0 og 5 på enerplassen som kunne foregå i det uendelige. Han beskrev derfor representasjonen sin som dynamisk, den endret seg. De fant en stor andel av elevene som hadde høyere resultater i matematikk beskrev representasjonen sin som dynamisk (Thomas et al., 2002).

Dette er svært interessant fordi det å løse problemløsende oppgaver i matematikk er en dynamisk prosess. Med dette mener jeg at utgangspunktet, oppgaveteksten, er statisk, men hvor løsningen kommer fra det å endre dette statiske utgangspunktet og behandle det i forhold til beskrivelsen i oppgaveteksten. Vil da elever på et høyere strukturelt bevissthetsnivå ha lettere for å utføre denne operasjonen?

2.2 STRUKTURELLE BEVISSTHETSNIVÅ, AMPS

Alt det jeg til nå har presentert involverer hva det vil si å ha strukturell tankegang. Jeg går nå videre til å beskrive de ulike AMPS nivåene.

I 2009 søkte Mulligan og Mitchelmore etter å gi ny innsikt til hvordan unge elever kunne generalisere og abstrahere matematiske ideer tidligere og på mer komplekse måter, enn hva man før hadde antatt (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009). De formet en hypotese om at desto mer barns interne representasjonssystem var utviklet strukturelt, jo mer sammenhengende og velorganisert ville deres ytre representasjon være og jo høyere vil deres matematiske kompetanse være (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009). De ønsket derfor å finne ut om det var mulig å klassifisere barns/elevers løsninger med oppgaver om struktur i reliable kategorier. De ville også finne ut om barna/elevene havnet i samme kategori ved løsning av ulike oppgaver og dersom dette var tilfellet, om man kunne relatere deres strukturelle utvikling til hva de klarte å få til i matematikk (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009).

De gav trettini ulike oppgaver i struktur basert på tidligere forsking, blant annet Battista (1999). Oppgavene krevde viktige elementer som det å *dele opp, gjenkjenne mengder, gruppere, repetere, rommelig strukturering, multiplikative og proporsjons forhold og transformasjon*. Alle oppgavene krevde at elevene identifiserte, visualiserte, representerte eller kopierte mønsterelementer og struktur (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Mulligan og Michelmore (2009) fant at de kunne klassifisere elevenes svar i reliable strukturelle kategorier eller nivåer. Siden oppgavene varierte i vanskelighetsgrad, havnet ikke elevenes svar alltid på samme nivå, men over halvparten av oppgavene gjorde det. Dette førte til at Mulligan og Michelmore (2009) kunne hevde at elevene var relativt konsekvente i forhold nivå. De fant også at de kunne relatere elevenes nivå til deres matematiske kompetanse, ved at de som var på et høyt strukturelt bevissthetsnivå hadde bedre resultater på matematikkprøver. Det å være våken for strukturer fører til at fokuset i oppgaven blir på det matematiske ved at elever på lave nivåer for våkenhet for struktur og mønster, oftere vektlegger den ikke matematiske informasjonen i oppgaven i kontrast til de på et høyere AMPS nivå.

Undersøkelsen gav altså positivt svar til alle tre forskningsspørsmålene og Mulligan og Mitchelmore etablerete fire nivåer, etter hvert utviklet til 5, for strukturell bevissthet, AMPS nivåer (2009, s. 42):

1. Prestukturell: Ingen bevissthet om matematiske begreper og strukturer i forhold til disse.
2. Emergent: Eleven kjenner igjen noen relevante mønster/strukturer men klarer ikke å bruke de på en riktig måte.
3. Delvis strukturell: Eleven kjenner igjen de aller fleste relevante mønster/strukturer men representasjonen er uferdig eller ukorrekt.
4. Strukturell: Eleven representerer den gitte strukturen korrekt.
5. Advanced strukturell: Klarer å generalisere mønsteret.

I min forskningsstudiet gav jeg elevene fem oppgaver for å avklare strukturelt bevissthetsnivå. Alle oppgavene er hentet fra de tretti ni som Mulligang og Mitchelmore (2009) brukte.

Mulligan og Michelmore (2009) sine AMPS nivå, er grunnlaget for den første delen av analysen min. De benyttes også gjennom hele diskusjonskapittelet for å avdekke sammenhenger mellom strukturelt bevissthetsnivå og hvordan elevene løser problemløsende matematikkoppgaver ved hjelp av tegning.

2.3 BRUKSOMRÅDER FOR BARNS TEGNINGER I PROBLEMLØSING

I dette avsnittet vil jeg presentere forskning om hvordan barn bruker tegningene sine i problemløsning.

Når et barn tegner i møte med en matematikkoppgave så har denne tegningen ifølge Saundry og Nicol (2006), en av to funksjoner. Den kan være et redskap for manipulasjon eller som et støttesystem (Saundry, 2006). Saundry og Nicol gjorde i 2006 en middels stor undersøkelse av hvordan elever på 2. trinn løste et oppgavesett med matematikkoppgaver etterfulgt av en mindre studie med en problemløsende oppgave og dyptgående intervjuer. Den problemløsende matematikkoppgaven ble lest høyt for elevene og de ble bedt om å forklare hva de tenkte, og hva de ulike delene av tegningene representerte. Jeg benytter samme metode i min empiri innhenting. Saundry og Nicol (2006) kom fram til to funksjonskategoriene for elevenes tegninger. De fant at en tegning som blir brukt som et *manipulativ* brukes aktivt ved at elementer i tegningene blir manipulert og endret. Tegningen inneholder en bevegelse, altså handlingen i problemet blir tegnet og manipulert ved at ting blir gruppert med sirkler eller delt opp med linjer. Elementene på tegningen ble telt på samme måte som konkreter ville blitt telt og håndtert (Saundry, 2006).

En tegning som er et *støttesystem*, gir et stillas for å holde rede på elementene i problemet. I en oppgave hvor 18 kjeks skal deles på 12 barn blir kjeksene tegnet på den ene siden av arket og barna på den andre. Deretter vil kjeksene bli krysset ut etter hvert som de blir delt ut til et barn. Tegningen virker som et støtte for å holde rede alle elementene (Saundry, 2006).

De fant også at det var store variasjoner i hvor sofistikert tegningene var. Noen tegnet kunsteristiske tegninger og andre kun ikoniske representasjoner. Enkelte tegnet så avanserte tegninger at de mistet den matematiske essensen i oppgaven (Saundry, 2006). Dette stemmer med det Mulligan, Mitchelmore, Outhred & Russel (1997), som fant at elever som presterte lavt på matematikkoppgaver produserte dårlig organiserte pictorale eller ikoniske representasjoner, mens elever som presterte godt i matematikk produserte velorganiserte og abstrakte tegninger gjerne også med matematiske notasjoner (Biddulph & Carr, 1997). Det er store variasjoner i abstrakthet blant elevene i min studie, og representasjoner av mer eller mindre hjelpsomhet i problemløsningen.

Saudry og Nicol (2006) opplevde også at noen elever ikke tegnet i det hele tatt og etter nærmere undersøkelse fant de ut at disse elevene visualiserte problemet for så å komme fram til en løsning (Saundry, 2006). De fant at mental visualisering hadde stor betydning for hvordan elevene løste oppgavene og om de kom fram til riktig resultat (Saundry, 2006) noe som også da stemmer med funnene til Van Nes og De Lange (2007), som nevnt i tidligere avsnitt. Arcavi (2003) trekker visualiseringsbegrepet litt lengre og inkluderer også evnen til å overføre mentale bilder til papir eller tekniske hjelpemidler med den intensjon om å framstille- og kommunisere informasjon videre. Han fant også at visualisering har stor innflytelse på evnen til å løse matematikkoppgaver korrekt (Arcavi, 2003). Analysedelen vil avsløre tydelige tegn på visualisering og visualisering av hele oppgaven uten behov for teningen, hos elevene på de to høyeste AMPS nivåene.

Kristine Reed Woleck skrev i 2001 om sitt forskningsprosjekt hvor hun har undersøkt hvordan førsteklassinger bruker bilder for å representere og kommunisere sin matematiske forståelse (Cuoco & Curcio, 2001). Hun hentet empirien fra sin egen førsteklasse og brukte tid på forhånd på å gjøre elevene vant til å kommunisere matematikk og lete etter matematikk i bilder. Hun fant at elevenes teninger kunne deles inn i to hovedgrupper: *funksjonell*- og *dramatisk*. En *funksjonell tegning* ble brukt for å holde rede på elementene i problemet mye på samme måte som konkreter. Elementene ble brukt som en støtte og hadde en funksjon. De kunne manipuleres og kunne organiseres og telles, mye på samme måtes om Saundry og Nicols (2006) sine to kategorier *manipulativ og støttesystem* (Cuoco & Curcio, 2001). Når elevene tegnet en dramatisk tegning tegnet de seg selv og hvordan de løste problemet. I en oppgave hvor elevene skulle finne ut hvor mange kopper de trengte for å ha nok til en foreldrefrokost med 22 elever, en lærer og 33 foreldre, fortalte en elev at han startet med 22 og telte så 34 til og endte opp på 56. Tegningen hans viste en gutt med en tallinje og en arm som telte videre fra 22. Denne dramatiske tegningen ble en støtte i kommunikasjonen hans da han skulle formidle hvordan han løste problemet. Den var ikke til en direkte hjelp for å løse problemet (Cuoco & Curcio, 2001). En dramatisk tegning brukt på denne måten kan da også komme inn under Arcavis (2003) utvidede visualiseringsbegrep, men i en begrenset forstand fordi den ikke kommuniserer problemet i oppgaven, kun hvordan eleven løste den.

På samme måte som Saundry og Nicol (2006) nevner også Woleck (2001) grad av abstraksjon. Hun oppdaget at etter hvert som elevene opplevde hva som var nødvendig og viktig informasjon i oppgavene, så gikk tegningene fra å være rikt detaljert og til å bli funksjonell og mer abstrakt med bruk av symboler. Hun avdekket at tegningene ofte ble støtte for egentale som om elevene levde seg inn i problemet, snakket og tegnet seg gjennom det. Woleck (2001) betraktet i løpet av forskningsperioden sin gjentatte ganger, hvordan en tegning ikke er et statisk produkt med et dynamisk verktøy som støttet opp under kommunikasjonen i klasserommet. De måtte gå tilbake til tegningen sin, utfordre sin egen tankegang og begrunne løsningen sin. Hun opplevde at tegningene fungerte som en trampoline i forhold til det å begynne å kommunisere matematisk tankegang. Hun opplevde også som lærer at denne kommunikasjonen sammen med tegningene, gjorde at hun hele tiden hadde oversikt over elevenes kompetanse og deres utvikling (Cuoco & Curcio, 2001).

2.4 ROMFORSTÅELSE I BARNS TEGNINGER

Som nevnt tidligere handler romlig struktur om romforståelse i form av visualisering, form og orientering (van Nes & van Eerde, 2010). I dette avsnittet vil jeg utdype hva dette innebærer i forhold til tegninger, og introduserer teorier om *skjematiske tegninger*

Van Nes og De Lange (2007) knyttet direkte relasjon mellom rommelig struktur og tallforståelse hvor en større våkenhet for rommelig struktur førte til en bedre evne til å resonere for å finne riktig mengder (Nes & de lange, 2007). Hegarty og Kozhevnikovs gjorde i 1999 en undersøkelse hvor de kategoriserte elever på sjettetrinn sine tegninger, kroppsspråk og ytringer da de løste problemløsende matematikkoppgaver inn i de to kategoriene: *skjematisk* eller *pictoral/ billedlig*. Hegarty og Kozhevnikovs (1999) definisjon av en *skjematisk tegning eller ytring* er at eleven tegner et diagram, bruker gestikulering som viser rommelige relasjoner mellom objektene i problemet når de forklarer sin løsning, eller viser til et visuelt bilde av relasjonene som eksisterer i oppgaven (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). En *billedlig* tegning eller ytring er rikt detaljert med objekter som ikke er vesentlig for å løse oppgaven. Her ble personen eller objektet som oppgaven omhandlet i sentrum heller enn relasjonen mellom de ulike matematiske objektene. På grunn av det relasjonelle fokuset på de ulike objektene i oppgaven, hevder Hegarty og Kozhevnikov (1999) at det er skjematiske ytringer og tegninger som direkte kan knyttes til romforståelse og dermed også til suksess i problemløsning. I sin undersøkelse fant de en positiv korrelasjon mellom de som ytret og tegnet skjematisk og en vellykket problemløsing, og en negativ korrelasjon mellom de som ytret og tegnet billedlig og vellykket problemløsing (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

Kellah Eden og Ellen Potter gjorde i 2007 en undersøkelse for å finne sammenhengene mellom barns grad av romforståelse og hvordan de evnet å løse matematisk problemløsingsoppgaver ved hjelp av tegning. Eden og Potter (2007) laget to kategorier: *skjematisk* og *ikke skjematisk*, basert på Hegarty og Kozhevnikov (1999) sin tidligere kategorisering. De bestemte at en tegning er *skjematisk* når den viktige matematiske informasjonen i oppgaven blir tegnet riktig, slik at den nødvendige informasjonen blir synlig i tegningen. Tegningen blir utført som i en tabell og de spatiale relasjonene mellom de ulike objektene er riktig i forhold til hverandre. Den romlige strukturen fra oppgaven må dermed reproduseres riktig i bildene. Disse elementene vil da hjelpe eleven å løse den problembaserte matematikkoppgaven (Edens & Potter, 2007).
En tegning er *ikke skjematisk* når den nødvendige informasjonen ikke representeres riktig i forhold til hverandre. Den romlige strukturen i oppgaven blir da ikke tegnet riktig noe som fører til at en tegning som ikke er skjematisk, heller ikke vil være til hjelp i problemløsingen av oppgaven. Den blir da kun en representasjon av situasjonen i oppgaven uten den nødvendige matematiske informasjonen. Både en ikke skjematisk- og en skjematisktegning kan inneholde objekter som ikke er nødvendig for å løse oppgaven (Edens & Potter, 2007).

Eden og Potter (2007) bruker to ulike elevtegninger for å illustrere nettopp hva dette betyr i forhold til følgende matematikkoppgave: I en sjø står det en påle på 12 «fot». Den stikker ½ fot opp av vannet og ½ fot under havbunnen. Hvor dyp er innsjøen?

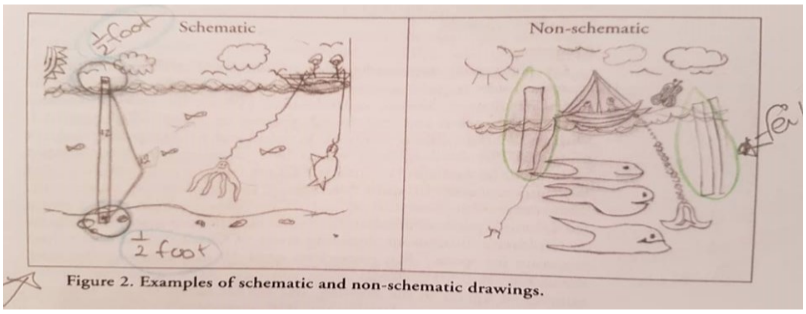


Figure 2. Examples of schematic and non-schematic drawings.

Figur 1 Forskjellen mellom skjematisk og ikke skjematisk tegning.

(s. 289)

Her ser vi tydelig at den skjematiske tegningen viser ½ fot både over og under vannet, mens den ikke-skjematiske tegningen viser pålene som flytende i vannet.

Eden og Potter (2007) undersøkte over to hundre fjerde- og femtetrinns elever. For å få en indikasjon på elevenes romforståelse gav de alle en ren tegneoppgave først. De fant store ulikheter i romforståelse. Elevene løste deretter fire *skjematiske problemløsende matematikkoppgaver*. En *skjematisk matematikkoppgave* innbyr til at den kan tegnes på en skjematisk måte. Den må være nord-, sør-, øst- eller vest- rettet og innby til den type struktur i tegningen (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

Eden og Potter (2007) fant en korrelasjon som viste at jo mer utviklet romforståelse til eleven var, desto bedre var prestasjonen på de problemløsende matematikkoppgavene. Dette knytter romforståelse sammen med problemløsing i matematikk og viser hvor viktig det er at all nødvendig matematiskinformasjon blir med videre i tegningen slik at denne blir et hjelpemiddel i løsningsfasen

Jeg benytter Eden og Potter (2007) sine beskrivelser av skjematiske- og ikke skjematiske tegninger i analysen av mine elevers tegninger. Jeg finner en korrelasjon mellom skjematiske tegninger, suksess i problemløsningen og AMPS nivå. I og med at romforståelse er en del av det å inneha en strukturell tankegang, gir dette indikasjoner på at et høyere AMPS nivå fører til en bedre utviklet romforståelse. Dersom man funderer videre på implikasjonene av dette utsagnet, vil man kunne trekke slutningen om at man kan måle en elevs romforståelse ved å måle elevens AMPS nivå.

2.5 REPRESENTASJONSSYSTEMER

Elevene i min studie, og andre elever som bruker tegning for problemløsning, må evne å oppfatte oppgaveteksten og overføre informasjonen til tegningen sin. Dette handler om det å oppfatte de ulike objektenes i oppgavetekstens relasjon til hverandre, altså transformere romforståelsen i oppgaven over til tegningen sin og gi objektene det riktige matematiske innholdet. Slike overganger vil dermed kunne påvirke hvordan elever bruker tegningen sin og i aller største grad, sluttresultatet. Det siste avsnittet vil derfor omhandle overgangen mellom ulike representasjonssystemer.

Overganger mellom ett representasjonssystem til et annet poengteres som svært viktig av Raymond Duval (2006). Duval (2006) har konsentrert sin forskning omkring representasjoner i matematikk. Han trekker fram tre punkter som skiller matematikk fra andre fag. Den første er avhengigheten og viktigheten av semiotisk representasjon for å utvikle matematisk tankegang. Som et eksempel så vil det å regne avhenge av forståelse for posisjonssystemet. Han hevder at ingen matematisk prosess kan utføres uten å bruke semiotiske system for representasjon, fordi matematisk prosessering alltid innebærer å erstatte noen semiotiske representasjoner for andre. Videre fremhever han at matematiske objekter ikke er til å ta og føle på og dermed kan matematikk fort bli for abstrakt. Han hevder at det finnes kun en inngang til matematisk forståelse, og det er semiotiske representasjoner. Å kunne/vite om <u>en</u> type semiotisk representasjon holder ikke, man må kunne bevege seg mellom ulike representasjonssystemer for å inneha matematisk forståelse (Duval, 2006). Duval (2006) presenterer en oversikt over fire ulike representasjonssystem, men jeg vil konsentrere meg om de tre som er relevant for min studie. Jeg har selv laget forkortelser for disse tre, for min egen enkelhetsskyld.

1. *Multifunksjonell diskursiv representasjon, MFD*, inneholder naturlig språk både skriftilig og muntlig. Dette er muntlige forklaringer og skriftlige begrunnelser og bevis.
2. *Multifunksjonell ikke diskursiv representasjon, MFID*, inneholder ikonisk tegning og mønster samt ikke ikoniske geometriske figurer.
3. *Monofunksjonell diskursiv representasjon, MOFD*, inneholder skriftlige symbolsk system som utregning og bevis. Dette er for det meste algoritmer.

110 RAYMOND DUVAL

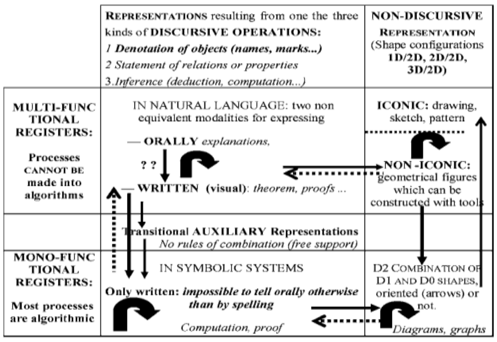


Figure 1. Classification of the registers that can be mobilized in mathematical processes.

Figur 2 Ulike representasjonssystemer i matematikk

(s. 110)

Duval (2006) hevder at for å fult ut forstå og utføre transformasjonen mellom ulike representasjonssystem, så må man først distansere seg fra det representerte objektet og hvordan det først ble representert i en semiotisk kjede. Når man har gjort det, har man muligheten til å velge en annen måte å representere objektet på (Duval, 2006). Dette er vanskelig teori og hva mener egentlig Duval med at man må *distansere seg*? Jeg har tolket dette til å bety at man evner å bruke det man har lært også i andre situasjoner. Altså se at denne kunnskapen er universell ved å evne og distansere seg fra konteksten av den oppgaven man holder på med, og hente opp igjen kunnskapen for å benytte den ved et senere tidspunkt og i en annen kontekst. Det som i dag handlet om for eksempel *ti epler*, kan i morgen benyttes når oppgaveteksten handler om *førti biler*. Elevene i mitt forskningsprosjekt skal evne å transformere muntlig tale og skriftspråk til en ikonisk tegning for å løse problemet i oppgaven. Dette betyr at de skal bevege seg fra MFD til MFID. Elevene må få med seg all viktig informasjon i talen og skriftspråket videre i tegningen sin, for så å formidle et resultat til meg. Analysen vil også vise en indikasjon på en videre transformasjon fra MFID til MOFD.

3 METODEKAPITTEL

3.1 FORSKNINGSDESIGN

I min masteroppgave ønsker jeg å finne ut hvilke sammenhenger som finnes mellom grad av våkenhet for matematisk struktur og mønster, AMPS, og hvordan fire elever på 2.trinn løser problemløsende matematikkoppgaver ved hjelp av tegning.

For å kunne svare på dette har jeg gjort en kvalitativ studie i flere deler. Ifølge Line Christoffersen og Asbjørn Johannessen (2012) kan en kvalitativ studie ha liten grad av formalitet, noe som egner seg godt i og med at jeg forsker på elever som er 7 år. Det gir meg fleksibilitet og innbyr til en større grad av spontanitet og tilpasning for hver av de deltakende elevene. En kvalitativ studie stiller åpne spørsmål og innbyr til å gå i dybden for å få en større forståelse av fenomener og kognitiv tankegang (Christoffersen & Johannessen, 2012). I og med at jeg ønsker å forstå hvordan fenomenet *våkenhet for matematisk struktur og mønster* påvirker hvordan elever løser problembaserte oppgaver i matematikk, vil det være nødvendig å stille åpne spørsmål. Hver enkelt elev er unik i forhold til framgangsmåter og tankegang og jeg har et behov om å forstå nøyaktig hvordan hver enkelt av de fire elevene tenker.

For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt måtte jeg finne elever som var på ulike nivå i forhold til strukturell bevissthet. Jeg innhentet samtykke fra 21 elever på 2. trinn, og gav alle de 21 elevene fem ulike strukturoppgaver som var hentet fra Mulligan og Mitchelmore (2013). Jeg vil presentere oppgavene og framgangsmåte senere i dette kapittelet og samtidig forklare hvorfor jeg valgte å se bort fra to av disse oppgavene i min analyse.

Etter analysen av strukturoppgavene, valgte jeg ut fire elever som var på ulike nivå i forhold til strukturell bevissthet. Disse fire elevene ble senere intervjuet enkeltvis mens de løste fire problembaserte oppgaver i matematikk og også forklarte hvordan de tenkte da de løste oppgavene om struktur. Intervjuene ble tatt opp på video. Det finnes flere typer intervjuer jeg kunne velge og felles for alle er et ønske om å forstå, vurdere og tolke en person, en situasjon eller et fenomen bedre. Jeg ønsker å forstå hvordan strukturell bevissthet påvirker arbeid med problemløsing. Et intervju kan også, som i mitt tilfelle, gjøres for å teste ut en hypotese. Jeg har en hypotese om at jo større grad av strukturell bevissthet en elev har, desto mer vellykket er deres problemløsning.

I følge Patton (1980) har jeg fire typer intervju å velge mellom alle av varierende grad av formalitet; uformelt samtalepreget intervju, emneguidet intervju, standardisert åpent intervju og lukket kvantitativt intervju (Patton, 1980). Jeg valgte å gjennomføre et *emneguidet intervju* hvor emner man skal innom er forutbestemt, men hvor hverken strukturen eller alle spørsmålene er bestemt på forhånd. Et emne guidet intervju fører til at jeg som intervjuer blir trygg på at jeg dekker alle emnene som er nødvendig for forskningen min. Det er delvis strukturert og dermed også mer sammenlignbart fra et intervjuobjekt til et annet, enn et uformelt samtaleformet intervju, men dog mindre enn et strukturert åpent intervju eller et lukket kvantitativt. Intervjuet bærer fortsatt preg av å være en samtale og situasjonen vil derfor trygge elevene mer og ha mindre påvirkning på intervjuindividet, som i dette tilfellet er elever på 7 år. Min intervjuguide omhandlet to emner: Hva de ulike detaljene i elevenes tegninger representerte og elevens tanker om det matematiske problemet. Intervjumetoden gav mye fleksibilitet og kunne tilpasses hver enkelt elev, noe som ble nødvendig. Jeg fikk muligheten til å bekrefte eller oppklare mine tolkninger umiddelbart og fikk et godt innsyn i elevenes kognitive prosess.

I følge Arskey & Knight (1999) kunne jeg velge å ordlegge spørsmålene i form av to kategorier: *prompts* og *probes*. *Promts* er spørsmål som muliggjør oppklaringer dersom det kan synes som om at intervjuobjektet har misforstått eller ikke forstått spørsmålet. En promt kan for eksempel være å repetere spørsmålet eller endre ordlyden noe slik at det er oppklarende. Disse fungerer som en type igangsetter når noe tilsynelatende har stoppet litt opp. *Probes* er utforskende spørsmål i form av å be intervjuobjektet utdype et utsagn for å gå mer i dybden på noe. Dette gir en bedre og rikere forståelse av intervjuobjektets tanker. En måte å få fram intervjuobjektets tanker på er å be de tenke høyt når de løser en oppgave (Arksey & Knight, 1999). Jeg valgte å be elevene tenke høyt og forklare for meg hva de gjorde og hva de tegnet mens de løste oppgaven. Det å tenke høyt var mer naturlig for enkelte av elevene og mindre for andre og antall probes jeg stilte, varierte derfor veldig fra elev til elev. I og med at elevene var såpass unge og deres leseferdigheter begrenset, valgte jeg å lese oppgaveteksten for dem i tillegg til at elevene fikk den utdelt på ark. Det var stor forskjell på hvor mange promts i form av repetisjoner og klargjøringer av oppgaveteksten, jeg måtte gjøre for de ulike elevene. Jeg valgte å gjennomføre intervjuene i enerom med kun meg og en elev av gangen. Dette var nødvendig for at elevene ikke skulle influere hverandre. På denne måten blir min analyse av hver enkelt elevs oppgaveløsing mer valid og reliabel fordi den er upåvirket av andre. Jeg valgte å gjøre video-opptak for å kunne fange opp kroppsspråk som ble synlig i elevenes beskrivelser av sin kognitive prosess.

3.2 PILOTSTUDIE

Jeg er ingen erfaren forsker og elevene jeg forsker på er mine egne. Jeg var redd for at jeg ikke skulle klare å skille mellom lærer og forskerrollen og ville derfor øve meg litt på forhånd slik at jeg påvirket elevene minst mulig. Jeg var også usikker på hvor vanskelig jeg skulle lage oppgavene. Dersom oppgavene ble for enkle ville alle elevene løse dem og det ville dermed bli svært vanskelig å trekke noen konklusjoner i forhold til sammenhengen mellom problemløsing og våkenhet for mønster og struktur. Jeg hentet noen oppgaver fra Edens og Potter (2007) samt Hegarty og Kozhevnikov (1999) men endret ordlyden noe for å tilpasse de fra elever på 6. trinn til elever på 2. trinn (Edens & Potter, 2007) (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Disse oppgavene legger opp til at man kan tegne på en mer skjematisk måte. For å at tegninger skal være skjematisk må det være en *tabell-følelse* over tegningen i form av å være nord-, sør-, øst- eller vest rettet. Oppgavene må derfor innby til den type struktur i tegningen (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Det matematiske i oppgaven må være tegnet korrekt i forhold til hverandre, for å være skjematisk (Edens & Potter, 2007). Oppgavene var som følger:

1	En skoleklasse med 16 elever skal til dyreparken. Bussen har 6 seter og man kan sitte to eller tre på setene. Hvor mange seter må det sitte tre på, for at alle skal få plass på bussen?
2	På hver ende av en rett vei planter en mann et tre. Veien er 15 meter lang. Han planter et nytt tre hver 5 meter. Hvor mange trær planter mannen?
3	Det er 8 dyr på en låve. Det er noen høner og noen hester. Til sammen har de 22 føtter. Hvor mange er hester og hvor mange høner er det på låven?
4	På en innsjø står det en brygge på påler ute i vannet. Pålene er 14 meter lange. De stikker 1 meter opp av vannet og 2 meter ned i havbunnen. Hvor dyp er innsjøen?

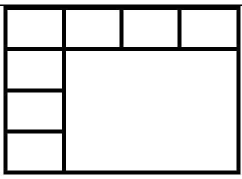
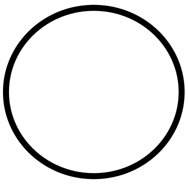
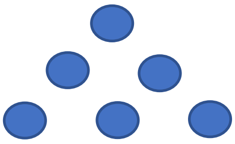
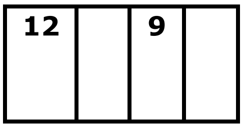
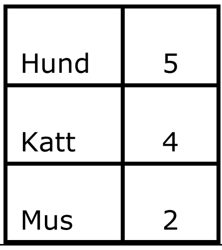
Tabell 1 Problemløsendematematikkoppgaver i pilotstudien

Jeg var mest usikker på den delen av studie mitt som omhandlet problemløsingen og intervju og valgte derfor å gjøre pilotstudie i etterkant av å ha innhentet data fra 21 elever på fem strukturoppgaver. Jeg valgte å bruke de samme fire elevene i min hovedstudie. Dette valget ble basert på at fordelen ved at elevene var trygge i situasjonen, ville oppveie for sannsynligheten for at pilotstudien influerte resultatene i hovedstudien. Jeg gav ingen hjelp til elevene i pilotstudien. De fikk heller ikke vite om deres løsning var riktig eller feil, og en påvirkning av hovedstudien var derfor svært usannsynlig. Dette førte også til at min vurdering av oppgavenes vanskelighetsgrad var tilpasset nettopp de elevene jeg skulle bruke. Det at elevene er trygge i intervjusituasjonen fører til at resultatene av hovedstudien mer reliabel.

Validitet handler om meningen som gis til data, og konklusjonen trukket på bakgrunn av denne imperiene. Ary, Jacobs og Raxaviech (1996), trekker fram fire hovedkriterier for validitet i kvalitativ forskning: Kredibilitet i form av sannhet, overførbarhet i form av muligheten til å generalisere, pålitelighet i form av stabilitet og bekreftbarhet i form av nøytralitet (Ary, Jacobs, & Razavieh, 1996).). Validitet er en demonstrasjon av at et bestemt måleinstrument faktisk måler det intensjonen er, og at resultatene blir nøyaktig framlagt, forklart og teoretisert. Som forsker må jeg være trygg på at de instrumentene jeg har valgt å benytte for å forstå sammenhengen mellom strukturelt nivå og problemløsing, faktisk måler sammenhengene. Jeg opplevde et mulig problem med to av oppgavene som omhandlet måleenheten *meter*. Så langt i elevenes studieløp, har vi kun målt med ustandardiserte måleenheter. Jeg var klar over at dette på forhånd og tenkte at dette kunne løses ved at jeg hadde med en linjal som var en meter lang, vise denne og si at dette var like langt som en meter. Da elevene løste disse to oppgavene, observerte jeg at noen ble så opphengt i størrelsen at de ikke klarte å distansere seg fra dette og kun se på tallene. Empiri fra disse oppgavene kunne dermed også inneholde feilinformasjon i form at måleinstrumentet mitt kanskje ikke målte det den skulle.

3.3 GJENNOMFØRING

Jeg gjennomførte datainnsamlingen på min egen arbeidsplass og blant mine egne elever. Det var 44 elever i klassen og 21 foreldrepar hadde samtykket til at deres barn kunne være med i studien. Første del av studien omhandlet som nevnt innhenting av data som skulle avdekke elevenes strukturelle bevissthetsnivå. Gruppen på 21 elever ble delt i to hvorav en gruppe var 10 elever og en annen var 11. Elevene ble plassert med god avstand fra hverandre slik at de ikke hadde mulighet til å se på hverandres besvarelser og dermed bli influert av andre. Oppgavene var hentet fra Mulligan & Michelmore (2013). Disse oppgavene er også presentert i tidligere artikler av forfatterne, men jeg valgte denne utgaven fordi den detaljert beskriver hvordan de har analysert de ulike oppgavene (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013). Dette gjorde det lettere for meg å replikere selve analysen i min egen studie. Oppgavene ble gitt muntlig av meg til alle elevene mens de satt på sine allokerte plasser. Jeg hadde forstørret alle oppgavene til A3 format og viste oppgavene ved å holde de opp mens jeg beskrev kort hva de skulle gjøre. Deretter delte jeg ut oppgavearket til elevene slik at de kunne begynne umiddelbart etter å ha fått arket. Jeg gikk rundt og så på elevenes oppgavebesvarelser underveis for å forsikre meg om at de hadde forstått det de skulle gjøre og for å se om det var noen besvarelser som skilte seg ut fra andre. Jeg gjorde meg tilgjengelig for elevene dersom de ønsket å stille meg spørsmål samtidig som jeg kunne spørre om ting som vekket min nysgjerrighet. Dette er de oppgavesettet for struktur og hvordan det ble forklart for elevene:

	Oppgave	Oppgaven slik den ble forklart høyt for elevene	Hva elevene fikk utdelt
1		Her ser dere et bilde laget av streker. Det er ferdig øverst (peker på øverste rad) og her på siden (peker på første kolonne). Her i midten er den ikke ferdig for her mangler det noe (peker på blankt område). Nå skal dere gjøre ferdig bildet slik at det blir sånn som det allerede er øverst og på siden, også i midten.	Et A4 ark med oppgaven påtegnet slik den ble vist for elevene.
2		Dette er en klokke men den mangler noe. Nå skal dere gjøre ferdig klokken ved å tegne på det som mangler.	Et A4 ark med oppgaven slik den ble vist for elevene.
3		Nå skal dere få se et bilde med noen sirkler. Dere får bare se det en kort stund. Etterpå skal dere tegne det dere så på arket dere har fått utdelt.	Et blankt A4 ark utdelt i forkant av oppgaveforklaringen.
4		Her er et ark med to tall (peker på de to tallene). Ved siden av hvert tall er det en blank rute (peker på de blanke rutene). Dere skal tegne noe som er like mange som tallet dere ser i den tomme ruten. Dere kan tegne hva som helst men antallet skal være riktig.	Et A4 ark med oppgaven slik den ble vist for elevene.
5		Her ser dere en oversikt over noen dyr. Her står det hund og 5 (peker på hund og 5 tallet). Her står det katt og 4 (peker på katt og 4 tallet). Her står det mus og 2 (peker på mus og 2 tallet). Nå skal dere tegne så mange av hver som det står i oversikten.	Et A4 ark med oppgaven slik den ble vist for elevene.

Tabell 2 Strukturoppgaver gitt til 21 elever

Etter pilotstudie laget jeg nye problembaserte matematikkoppgaver, også disse inviterende til en skjematisk tegning ved å være nord-, sør-, øst-, eller vest rettet. Jeg valgte denne gangen å eliminere ukjente måleenheter. Jeg laget også en oppgave hvor selve måleenheten er helt eliminert, men hvor oppgavestrukturen er nøyaktig lik en annen. Dette for å se om denne ekstra faktoren med måleenhet i oppgaven, var utløsende for evnen til å løse den. De nye oppgavene var som følger:

1	Det er 8 kjøretøyer i en garasje. Noen er sykler og noen er biler. Til sammen er det 22 dekk. Hvor mange er sykler og hvor mange er biler?
2	Fillip har fått en bilbane i bursdagspresang. Den består av 20 biter helt rette bilbaneskinner. Han skal sette opp flagg langs hele bilbanen. Han

	setter et i begynnelsen og ett på slutten. Deretter setter han et flagg for hver femte bilbanebit. Hvor mange flagg setter Fillip opp langs bilbanen?
3	Mari skal lage en kake med tre forskjellige smaker. Kaken er like høy som 10 fyrstikker. Sjokoladen er nederst og den er like høy som to fyrstikker. Øverst er det jordbær og den er like høy som 3 fyrstikker. I midten er det banan. Hvor mange fyrstikker høy er bananen?
4	Per har laget et tårn av lego. Tårnet er 14 klosser høyt. Nederst er det to svarte klosser. Øverst er det en rød kloss. De i midten er grønn. Hvor mange grønne klosser er det i midten?

Tabell 3 Problemløsendematematikkoppgaver i hovedstudien

Jeg valgte som nevnt ut fire elever, Gustav, Lilly, Lars og Arnt, som var på ulike nivå i forhold til våkenhet for matematiske strukturer og mønster. Det at elevene var på ulike AMPS nivå var nødvendig for å svare på forskningsspørsmålet mitt. Ingen av de 21 elevene som gjorde strukturoppgavene var på det laveste AMPS nivået, prestrukturell, men jeg hadde en som var på emergent nivå og det var Gustav. Lilly var på delvis strukturelt nivå, Lars var på strukturelt nivå og Arnt på advanced nivå.

Det er mye å ta hensyn til når man skal intervjue barn på 7 år. Det å sørge for at barnet føler seg trygg ved at lokasjonen er kjent, at man tilpasser språket til alderen, at man sørger for at barnet slapper av ved at atmosfæren er hyggelig selv om den er alvorlig og at den ikke føles som en «prøve», at intervjueren har på seg klær som ikke skremmer på grunn av autoritet, at aldersforskjellen mellom intervjuobjektet og intervjueren ikke er for stor og at man gir positive tilbakemeldinger og takk for svarene man får (Morrison, 2013). Jeg er læreren til disse elevene og intervjuene ble gjort på skolen som er en kjent lokasjon. Jeg har en god relasjon til elevene og er vant til å ordlegge meg i et språk som gjør at denne aldersgruppen forstår hva jeg sier. Disse faktorene gav meg et godt utgangspunkt for å gjennomføre intervjuene med så lite negativ stresspåvirkning som mulig. Jeg intervjuet en og en elev på et grupperom og gjorde videoopptak av elevenes løsningsprosesser. Før intervjuene startet påpekte jeg for elevene at jeg nå var forsker og ikke lærer. Jeg sa at jeg forsket på hvordan elever tenker når de løser ulike matematikkoppgaver og at jeg derfor ikke kunne hjelpe dem. Jeg fortalte videre at dette var fordi jeg ville finne ut akkurat hvordan de tenkte uten å få hjelp fra noen og at de bare skulle gjøre så godt de kunne. Intervjuet startet med spørsmål om deres besvarelser på strukturoppgavene. Dette ble gjort for å bekrefte at jeg hadde analysert elevene til riktig nivå. Elevene hadde fargeblyanter, tusjer, blyanter, viskelær og blanke ark tilgjengelig under hele løsningsprosessen av de problembaserte matematikkoppgavene. De ble oppfordret til å tegne for å løse oppgaven og også oppfordret til å tenke høyt underveis slik at jeg kunne forstå hva de tenkte, gjorde og tegnet. Jeg leste oppgaven høyt for deretter å legge oppgaven ved det blanke A4 arket som eleven skulle tegne på. Dette ble gjort slik at de som ønsket å lese teksten selv hadde muligheten til det. Spørsmålet ble lest så mange ganger som eleven initierte et ønske om det ved enten å spørre direkte, uttale en fakta med en spørrende mine eller ved lengre tenkepauser. Alle fire problembaserte oppgavene ble løst etter hverandre i ett sammenhengende intervju. Intervjuene varierte i lengde fra 21 minutter til 47 minutter dette uten å regne med samtalen omkring strukturoppgavene.

3.4 METODEANALYSE

Analysen er styrt av mitt forskningsspørsmål og er både induktiv og deduktiv. Jeg har undersøkt hvilke sammenhenger det er mellom elevers bevissthetsnivå om mønster og struktur og hvordan de løser problemløsende oppgaver. Den første delen av studien, hvor jeg analyserte elevers bevissthetsnivå, var deduktiv. Jeg lette etter spesielle kjennetegn som beskrevet av Mulligan og Michelmore (2013). Mulligan og Michelmore fant fem ulike bevissthetsnivå for struktur og mønster; *prestrukturell, emergent, delvis strukturell, strukturell og advanced strukturell*. I sin artikkel fra 2013 beskriver de hva som kjennetegner hvert nivå på de ulike strukturoppgavene jeg har brukt i min studie, bortsett fra en som gjelder oppgave 3 og nivået «delvis strukturell». I og med at Mulligan og Michelmore ikke spesifiserer AMPS nivået for denne oppgaven, laget jeg en beskrivelse basert på Mulligan og Michelmore (2013) sin generelle beskrivelse av nivået delvis strukturell (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013). Nivåbeskrivelse for de ulike oppgavene er beskrevet nærmere i analysekapittelet.

Som nevnt endte jeg opp med å bruke analysen fra kun tre av de fem strukturoppgavene. Oppgave 5, den hvor elevene skulle strukturere data ved å tegne et slags liggende stolpediagram, var ubrukelig fordi elevene aldri hadde sett et stolpediagram eller jobbet med statistikk før. Alle tegnet riktig antall katter, hunder og mus, men ingen strukturerte de slik at en mus var like stor som en hund. Elevenes tegninger var mer realistiske og musen alltid mye mindre enn både hunden og katten. Her endte dermed alle 21 elever på prestrukturelt nivå på grunn av noe som ikke handlet om våkenhet for struktur og mønster å gjøre. Oppgave 4, hvor man skulle strukturere tall, viste seg også å ikke gi troverdig data. Denne oppgaven avslørte de laveste nivåene, men klarte ikke å skille mellom de øverste nivåene fordi tallene rett og slett ble for små.

Mulligan og Michelmore (2009) konkluderte med at elever i all hovedsak var på samme strukturelle bevissthetsnivå på alle deres 35 oppgaver. De fant ulikheter i AMPS nivå på flere oppgaver, men mente at dette handlet om oppgavens vanskelighetsgrad og ikke elevens AMPS nivå. De stadfestet elevenes AMPS nivå, til nivået hvor hovedtyngden av oppgavebesvarelsene havnet. Jeg har brukt samme strategi i min analyse og plassert elevene på AMPS nivået hvor hovedtyngden av besvarelsene havnet. Det er en dessverre en svakhet i min oppgave at jeg kun har tre strukturoppgaver. Jeg kunne med større sikkerhet ha stadfestet elevenes AMPS nivå dersom alle mine fem oppgaver kunne brukes som empiri. På tross av dette så viser de tre oppgavene en god indikasjon på elevenes AMPS nivå ved at minst to av tre oppgaver er på samme AMPS nivå. Jeg føler meg trygg på at analysen min er korrekt, fordi den ble underbygget i intervjuet omhandlende strukturoppgavene i etterkant.

I analyserte valgte jeg og fargekode de ulike oppgavene med *blå for emergent, grønn for delvis strukturell, oransje for strukturell og rød for «advanced» strukturell*.

Den andre delen av analysen min omhandler intervjuene rundt de problemløsende matematikkoppgavene og elevenes tegninger. Denne er både deduktiv og induktiv. Jeg har sett på hvordan elevene har brukt sine tegninger for å løse oppgaven i form av om den er et manipulativ eller et støttesystem samt grad av abstraksjon (Saundry, 2006), om den er skjematisk (Edens & Potter, 2007) og om elevene evner å få med seg nødvendig informasjon fra et representasjonssystem til et annet (Duval, 2006) og om hvorvidt oppgavene er løst riktig. Ut ifra disse funnene har jeg formet teorier om sammenhengene mellom elevers bevissthetsnivå om struktur og mønster og hvordan de løser problembaserte matematikkoppgaver ved hjelp av tegning.

3.5 ETISKE BETRAKTNINGER

Forskeren må hensynta tre aspekter for at forskningen skal være etisk riktig. Den første av disse er *informantens rett til selvbestemmelse og autonomi*. Dette punktet omhandler at jeg som forsker har innhentet samtykke fra deltakere i forkant av datainnsamlingen min (Christoffersen & Johannessen, 2012). Mine deltakere er barn og samtykke er derfor innhentet av foreldrene. Samtykkeskjema er vedlagt. I tillegg til dette spurte jeg hver enkelt av de 21 som deltok i datainnsamlingen om de ville være med i min forsknings-studie. Jeg fortalte at jeg kun var ute etter å se på hvordan de løste oppgavene og at de bare skulle gjøre så godt de kunne. Jeg fortalte videre at det var veldig viktig for meg at de prøvde å løse oppgavene selv og uten å se på hverandres løsninger fordi jeg var interessert i å finne ut hvordan nettopp de tenkte og ikke hvordan de tenkte dersom de så på sidemannen. Jeg sa at dette var frivillig, at de kunne avbryte når som helst, og at jeg satte stor pris på at de ville hjelpe meg med min studie.

Det andre hensynet en forsker må ivareta er *forskerens plikt til å respektere informantens privatliv* (Christoffersen & Johannessen, 2012). Dette punktet omhandler personvernet og min forskning er anonymisert ved at jeg kun viser til elever på 2. trinn samt at jeg benytter fiktive navn på elevene. Innsamlet empiri er anonymisert og egen kodenøkkel oppholdes på et annet sted. Filene er passordbeskyttet. På tross av dette vil det være mulig å finne ut hvilken skole jeg arbeider på, men dog ikke nøyaktig hvilke elever som har deltatt i studien.

Det tredje hensynet en forsker må ivareta er *forskerens ansvar for å unngå skade* (Christoffersen & Johannessen, 2012). Min studie er ganske ufarlig i så henseende. Den skade jeg derimot kan volde er på elevenes motivasjon for å løse matematikkoppgaver dersom oppgavene er for vanskelige. Som nevnt tidligere har jeg laget oppgaver som er over middels krevende i forhold til alderen til elevene. Dette var nødvendig for å kunne finne svar på mine forskningsspørsmål. For å gjøre sannsynligheten for skade så liten som mulig var jeg svært nøye med å påpeke at jeg kun forventet at de skulle gjøre så godt de kunne. Jeg sa også at de kunne si seg fornøyd med løsningen sin når de følte at de hadde gjort så godt de kunne og at jeg i hovedsak var interessert i hvordan de tenkte når de løste oppgaven. Jeg har ikke observert at noen av de intervjuede deltakerene har fått mindre motivasjon for faget i ettertid. Tvert imot har jeg sett en oppblomstring i tiltakslyst blant de fire elevene ved at de nå prøver å løse en oppgave selv om denne virker vanskelig.

3.6 METODE KRITIKK

Jeg føler jeg har tatt gode og veloverveide valg i forhold til datainnsamlingen min, men dog har de metodene jeg har valgt sine svake sider. Et emneguidet intervju gir meg som nevnt, friheten til å tilpasse intervjuet til elevene. På tross av dette kan det hende at viktige tema ble ekskluderes fordi jeg ikke forutså at de kan være relevante. Samtidig er ordlyden på de ulike spørsmålene ikke forutbestemt, og elevene kan ha oppfatte spørsmål ulikt.

Validitet og reliabilitet i intervjusituasjonen er avgjørende for om min forskning er verdt å lese. *"A practical way of achieving greater validity in interviews is to minimize bias as much as possible"* (Cohen, 2018, s. 271). «Bias», forutinntatthet eller partiskhet, er karakteristikker ved intervjueren og eller intervjuobjektet som har en innflytelse på intervjuet. Eksempler på forutinntatthet kan være holdninger, meninger og forventninger av intervjueren, at intervjueren observerer og tilegner intervjuobjektet egne erfaringer og følelser, at intervjueren søker etter svar som støttes av rammeverket hun skal bruke, feiltolkninger av hva intervjuobjektet sier og feiltolkninger gjort av intervjuobjekter av hva intervjueren har spurt om (Cohen, Morrison, & Manion, 2018). Jeg øvde på det å intervjue da jeg gjorde mitt pilotprosjekt. Jeg gjorde noen feil i pilotprosjektet som førte til at dataen jeg samlet inn ikke var valid. Etter øvingen var jeg trygg på at jeg skulle klare å skille mellom det å være en forsker og matematikklærer. Selv om jeg har vært veldig klar over nødvendigheten av dette skillet, så er jeg i bunn og grunn en matematikklærer og jeg opplevde det som svært vanskelig å ikke stille spørsmål som ledet elevene videre. Jeg tror jeg lyktes, men det får være opp til leseren å avgjøre.

Mulligan og Michelmore (2009) intervjuet sine deltakere samtidig som elevene gjorde strukturoppgavene. Dette førte til at de kunne stille spørsmål umiddelbart og på denne måten bli sikker på at analysen av oppgavene samt at bevishetsnivå for struktur og mønster var riktig. Jeg valgte en annen framgangsmåte hvor intervjuet om elevenes strukturbesvarelser ble gjort en uke etter at de hadde gjort oppgavene. Opptaket av denne delen av intervjuet viser at tre av de fire elevene husket godt hva de tenkte og kunne forklare det for meg. En av elevene måtte derimot tenke seg litt om før han klarte å kommentere på den ene av oppgavene. Dette er en svakhet i min datainnsamling, men jeg er trygg på at jeg plasserte alle elevene på riktig bevishetsnivå for struktur og mønster.

4 ANALYSE

I dette kapittelet presenterer jeg funnene mine på bakgrunn av innhentede oppgaver om struktur og mønster samt problemløsende matematikkoppgaver. Kapittelet er i hovedsak todelt. Jeg analyserer først strukturoppgavene og dette er som nevnt i metodekapittelet, en deduktiv analyse basert på Mulligan og Michelmores rammeverk presentert både i 2009 samt i 2013 (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009; J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013). Den andre delen er både være en induktiv- og deduktivanalyse av empiri fra de problemløsende matematikkoppgavene. Jeg analyserer først deduktivt ved hjelp av tidligere forskning omkring betydningen av barns tegninger samt forskning som knytter elevtegninger sammen med problemløsning. Deretter ser jeg i en induktiv analyse, på sammenhengene mellom analysefunnene av strukturoppgavene og de problemløsende oppgavene.

4.1 VÅKENHET FOR STRUKTUR OG MØNSTER

De fem nivåene for våkenhet for struktur og mønster, AMPS, i Mulligan og Michelmores' rammeverk (2009, s. 42) er som presentert i teorikapittelet følgende:

1. Prestukturell: Ingen bevissthet om matematiske begreper og strukturer i forhold til disse.
2. Emergent: Eleven kjenner igjen noen relevante mønster/strukturer men klarer ikke å bruke de på en riktig måte.
3. Delvis strukturell: Eleven kjenner igjen de aller fleste relevante mønster/strukturer men representasjonen er uferdig eller ukorrekt.
4. Strukturell: Eleven representerer den gitte strukturen korrekt.
5. Advanced strukturell: Klarer å generalisere mønsteret.

For flere av enkeltoppgavene har de også gått mer detaljert til verks i sin artikkel av 2013 og beskriver der hva jeg kan se etter på de ulike oppgavene. Jeg vil gå igjennom strukturempirien oppgave for oppgave og også presentere den mer oppgavespesifikke nivådelingen til Mulligan og Michelmore (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013).

4.1.1 AREALOPPGAVEN

Nivå beskrivelser (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013):

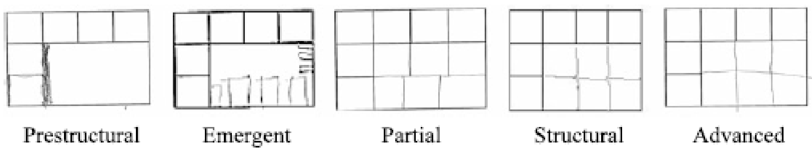


Fig. 5 Structural development in grid completion task

Figur 3. De ulike AMPS nivåene for arealoppgaven (S.39)

Prestrukturell: Forstår at det skal være noe i det tomme rommet, men tegner ikke alltid firkanter.

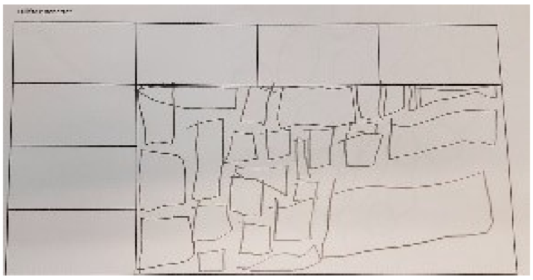
Emergent: Har forstått en eller to kjennetegn ved en tabell som f.eks. rader eller kolonner, rammer eller kongruens. Reproduserer disse kjennetegnene uten å være systematisk. Både antall og romligstruktur er feil representert.

Delvis strukturell: En tabell som er uferdig eller med feil antall firkanter. Forsøker å fylle tomrommet, men tegner ikke riktig antall firkanter eller tegner firkantene separate fra hverandre.

Strukturell: Har oppdaget mønsteret i tabellen og tegner riktig antall firkanter og på riktig sted, men tegner de individuelt en og en.

Advanced: Ser at mønsteret i tabellen er konstruert ved hjelp av heltrukkede vannrette- og loddrette linjer. Disse fullfører oppgaven veldig raskt.

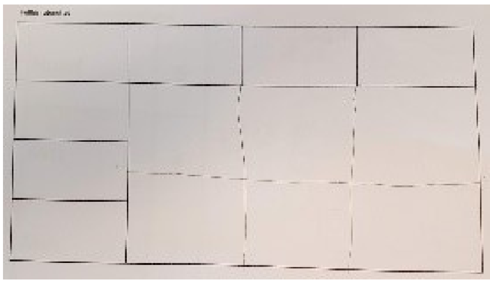
Dette er elevenes besvarelser på denne oppgaven:



Gustav har forstått at han skal tegne firkanter og at det er en struktur horisontalt og vertikal, men antall og rommelig struktur, er feil. Han er på emergent nivå. I intervjuet hadde han følgende beskrivelse på sin tegning:

Figur 4 Gustav sin løsning på arealoppgaven

1.10 G: Jeg startet her (peker på firkanten han har tegnet helt nederst på venstre side. Altså kolonne to, rad fire) Så gikk jeg oppover (kolonne to, rad tre og kolonne to, rad to) og så tegnet jeg her (peker på rad to og viser at han tegnet ferdig rad to) Og så tegnet jeg ned her (peker på siste kolonne på høyre side og viser at han tegnet denne rad for rad)



Lilly har laget en tabell, men med feil antall firkanter. Rutene er laget med heltrekkende linjer men med feil antall. Hun har riktig antall kolonner, men feil antall rader. Lilly er på nivå delvis strukturell.

Figur 5 Lilly sin løsning på arealoppgaven

I intervjuet i etterkant mener hun at alt er riktig:

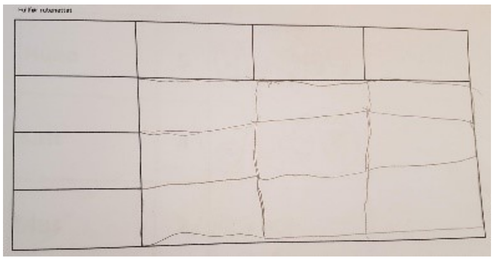
2.22 LY: Jeg laget to streker (peker på vertikal strek som skiller kolonne to og tre) og så to streker her (peker på vertikal strek som skiller kolonne tre og fire) og så lagde jeg en i midten her (peker på horisontal strek plassert i midten av rad tre)

2.23 I: Hvorfor laget du den streken i midten?

2.24 LY: For å lage det samme mønsteret som der (peker på øverste rad og første kolonne)

2.25 I: Så nå er det samme mønster?

2.26 LY: Ja (virker fornøyd)



Lars har laget en tabell med riktig antall firkanter og på de er tegnet på riktig sted. Rutene er tegnet individuelt. Lars er på strukturelt nivå. I intervjuet i etterkant var han litt usikker på hva han tenkte, men uttalte følgende:

Figur 6 Lars sin løsning på arealoppgaven

3.12 L: Nei, jeg husker ikke alt, men jeg startet her og så gikk jeg nedover her (peker på kolonne to fra rad to til rad fire) og så bortover her (peker på rad fire og horisontalt bortover til kolonne fire) og så oppover her (peker på kolonne fire fra rad fire til rad to) og så nedover her (peker på kolonne tre fra rad to til fire)

Arnt har laget en tabell med riktig antall firkanter og på de er tegnet på riktig sted. Tabellen er konstruert ved heltrukket linjer og eleven ble raskt ferdig med oppgaven. I intervjuet i etterkant viste han at dersom han skulle utvide tabellen så var det bare å forlenge linjene.

Figur 7 Arnt sin løsning på arealoppgaven

Dette er vist med noe svake grønne linjer i elevtegningen. Arnst er på advanced nivå. På spørsmål om hvordan han ville ha utvidet tabellen så svarte han følgende:

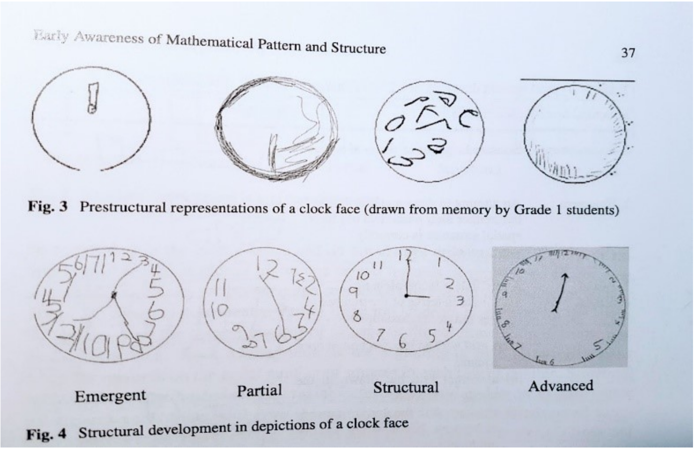
4.24 A: Da ville jeg gjort det samme som her. Sånn først (peker horisontalt) og så nedover (peker vertikalt)

4.25 I: Nå får du en annen farge av meg så kan du tegne det som du tenker at det skal være (gir en grønn fargeblyant)

4.26 A: (tar grønn fargeblyant og begynner å tegne en utvidet ramme først. Deretter forlenger han de eksisterende linjene vertikalt for så å forlenge de horisontale. Han lager to rader og en kolonne til, alle med sammenhengende linjer både vertikalt og horisontalt)

4.1.2 KLOKKEOPPGAVEN

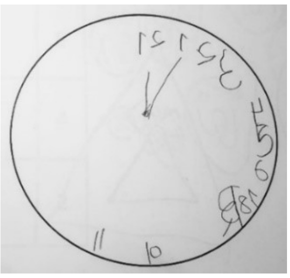
Nivåbeskrivelser (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013)



Figur 8 De ulike AMPS nivåene på klokkeoppgaven (s. 37)

> Prestrukturell: Viser ingen tegn på forståelse av at klokken består av deler som indikerer tid. Mangler det meste som er nødvendig for å kunne avlese et klokkeslett.
>
> Emergent: Er klar over at en klokke har tall som er telleenheter rundt kanten av sirkelen og at tallet en er nær toppen av klokken. Ingen formening om siste tall i sirkelen.
>
> Delvis: Vet at klokkens tall er begrenset til tallene mellom en og tolv og at tolv er på toppen.
>
> Strukturell: Vet at tallene er distribuert med likt mellomrom rundt klokkens sirkel. Vet at tallene indikerer timer.
>
> Advanced: Plasserer 12, 3, 6 og 9 før de fyller inn de andre tallene. Kan indikere ettminuttsintervaller mellom tallene.

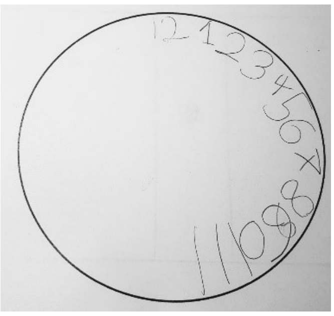
Disse elevene hadde lærte om klokkens oppbygging, timer, minutter samt viserne en måned før disse intervjuene. Jeg antok derfor at deres bevissthetsnivå om klokken ville være noe høyere enn på de andre oppgavene.



Gustav begrenser seg til tall mellom en og tolv når han tegner klokken. Han plasserer tolv øverst, men har ikke en jevn avstand mellom tallene sine. I intervjuet i etterkant sier han at han begynner med tallet en selv om det er noe usikkert om han husker dette korrekt. Gustav er på nivået delvis strukturell på denne oppgaven. Da han ble spurt om han syntes den så riktig ut, svarte han følgende:

Figur 9 Gustav sin løsning på klokkeoppgaven

1.4	G:	Nei! (sier dette med trykk og lener seg bakover og rister på hodet)
1.5	I:	Hva tenker du skulle vært annerledes da?
1.6	G:	Jeg vet ikke (intervjuer avslutter)



Figur 10 Lilly sitt første forsøk på klokkeoppgaven

Lilly tegnet først en klokke, men ble ikke fornøyd og ville prøve igjen. På første forsøk plasserte hun tolv øverst og fortsatte så med tallene fra en til elleve. I intervjuet fortalte hun hvorfor hun ville gjøre det en gang til:

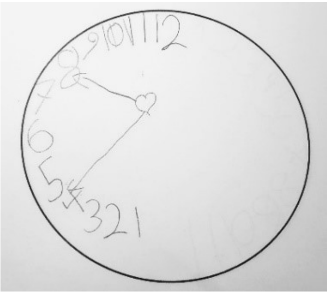
2.2 LY: Jeg syntes ikke den var bra nok

2.3 I: Hva var det du ikke var fornøyd med da?

2.4 LY: Tolv står jo der og elleve skal være der (peker til venstre for tolv) og ikke der (peker på ellevetallet hun har tegnet)

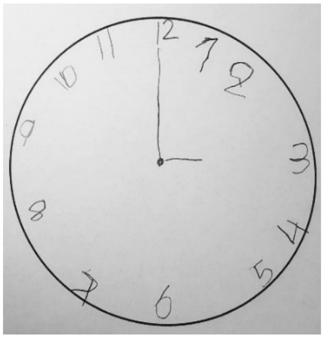
2.5 I: Okei, så fikk du prøve en gang til (tar fram klokkebesvarelse nr. 2)

2.6 LY: Ja, den var jeg ganske fornøyd med. Jeg kunne jo ikke gjøre den en gang til



Figur 11 Lilly sitt andre forsøk på klokkeoppgaven

På neste forsøk plasserte hun også tolv øverst for så å fortsette til venstre med tallene elleve og nedover til en. Hun har begrenset seg til tallene mellom en og tolv, men disse er ikke jevnt fordelt i sirkelen. Lilly er på delvis strukturelt nivå.



Intervjuet viser at Lars tegnet en klokke ved å plassere tallene tolv, seks, tre og ni først. Han er klar over at tallene skal være jevnt fordelt og at de indikerer timer. Intervjuet viser at han derimot ikke er klar over hvor mange minutter det er mellom hvert av tallene på klokka. Lars er på strukturelt nivå nå, men på god vei til advanced nivå.

Figur 12 Lars sin løsning på klokkeoppgaven

I intervjuet forklarte han at han gjorde følgende:

3.2 L: Jeg begynte å tegne prikker der og der og der og der (peker på punktene for tre, ni, seks og tolv) sånn at jeg skulle huske på hvor det var. Så begynte jeg å tegne tallene der og der og der og der (peker på prikk for 12, 9, 3, 6). Så begynte jeg med en og to og fire og fem, sju og åtte og ti og elleve

3.3 I: Okei. Hvis du ser på klokken din nå, er det noe du kunne tegnet i tillegg til dette her?

3.4 L: Nei

3.5 I: Vet du hva denne viseren heter? (peker på minuttviseren)

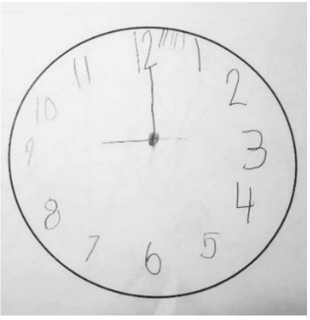
3.6 L: Minuttviseren

3.7 I: og den da? (peker på timeviseren)

3.8 L: Timeviseren

3.9 I: Vet du hvor mange minutter det er mellom tolv og ett for eksempel?

3.10 L: Jeg husker ikke helt



Arnt tegnet klokken ved å plassere tolv, seks, tre og ni først. Intervjuet viser at han er klar over at det er fem minutter mellom hvert av tallene og at disse kan tegnes med streker. Han er også klar over at det er seksti minutter i en time. Arnt er på advanced nivå på denne oppgaven. Stekene mellom tolv og ett, er tegnet på under intervjuet i etterkant av oppgaveløsingen.

Figur 13 Arnt sin løsning på klokkeoppgaven

4.9 I: Vet du hvor mange hakk minuttviseren går før den kommer bort til en? (peker på mellomrommet mellom 12 og 1)

4.10 A: Fem.

4.11 I: Kunne du tegnet dette på noen måte?

4.12 A: Jeg kunne tegnet på streker

4.13 I: Vil du vise meg på en hvordan du ville gjort det? Kan du gjør det mellom 12 og 1?

4.14 A: Ja (tar en blyant og tegner streker)

4.15 I: Sånn ja. Og da er det sånne hele veien?

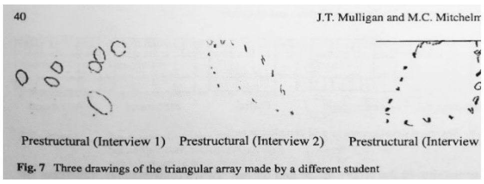
4.16 A: Ja

4.17 I: Vet du hvor mange sånne det er hele veien rundt da?

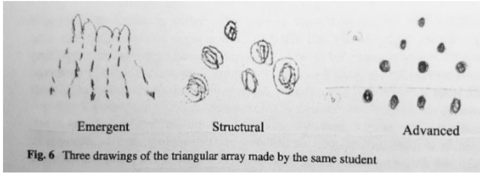
4.18 A: Nei, men det er jo fem pluss fem (peker på mellomrommene mens han kakker ned med blyanten) og fem pluss fem, fem pluss fem, fem pluss fem, fem pluss fem og fem pluss fem. Det er seksti.

4.1.3 PYRAMIDEOPPGAVEN

På denne oppgaven går ikke Mulligan og Mitchelmore så veldig detaljert inn på hvordan de definerer de ulike stadiene. Jeg legger derfor vekt på den generelle beskrivelsen av stadiene i analysen av pyramideoppgaven (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013). Derimot legger de ved bilder av to elevers arbeid over en periode på atten måneder, hvorav den ene utvikler seg fra Emergent- til Advanced nivå, mens den andre forblir på Prestrukturelt nivå (2013, s. 39 og 40).



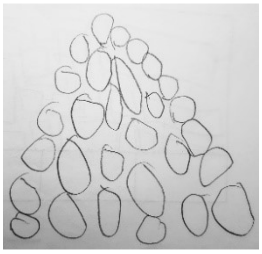
Figur 14 AMPS nivået prestrukturell på pyramideoppgaven (s. 39)



Figur 15 De ulike AMPS nivåene på pyramideoppgaven (s. 40)

I artikkelen (2013) legger de til følgende beskrivelse på fire av de fem nivåene:

> Prestukturell. Ingen bevissthet om den lineære sammenhengen eller trekantformen.
>
> Emergent. Lager prikker som viser en trekantform.
>
> Strukturell. Tegner det triangulære mønsteret riktig.
>
> Advanced strukturell. Klarer å utvide figuren ved å generalisere mønsteret.
>
> (J.T.Mulligan & Mitchelmore, 2013, s. 39)



Gustav lager en tydelig trekantform med sirkler. Han har ingen formening om antallet, lineær sammenheng eller antall høydenivå. Han tegner sirkler for å fylle tomrommet han lager etter å ha tegnet kantene. Gustav er på emergent nivå i denne oppgaven. Intervjuet bekrefter at han var bevisst formen på figuren.

Figur 16 Gustav sin løsning på pyramideoppgaven

1.19 I: Ja, for det er jo ikke en firkant

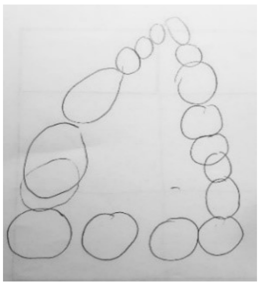
1.20 G: Neeii (fnyser)

1.21 I: Nei, hva har du laget da?

1.22 G: En trekant akkurat som det var

1.23 I: Ja, så du så den trekanten?

1.24 TG: Ja



Lilly tegner en trekantform og intervjuet viser at hun er klar over at figuren hun skal kopiere har denne formen. Den nederste linjen/kanten med sirkler er på linje, men de resterende høydenivåene viser ingen lineær sammenheng mellom sirklene på høyre- og venstre kant. Lilly er på delvis strukturelt nivå i denne oppgaven.

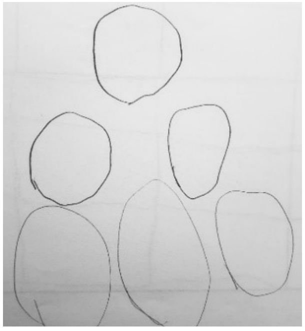
Figur 17 Lilly sin løsning på pyramideoppgaven

2.30 I: hva var det som var vanskelig?

2.31 LY: Formen av rundinger som skulle bli en annen form

2.32 I: Hvilken form skulle de bli da?

2.33 LY: En trekant



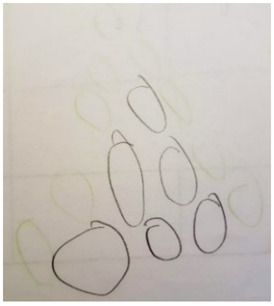
Lars har kopiert figuren korrekt. Han viser bevisshet om den lineære sammenhengen ved en tre, to, en struktur i en pyramideform. I intervjuet i etterkant får han spørsmål om hvordan en rad til under den nederst ville være, og han forstår at denne ville bestå av fire sirkler. Han er også at han er klar over hvor plasseringen av sirklene ville komme. Lars er på advanced nivå i denne oppgaven.

Figur 18 Lars sin løsning på pyramideoppgaven

3.15 I: Hvis det var en rekke til med sånne rundinger her (peker under nederste rad med tre rundinger), hvor mange rundinger ville det vært i den rekken da?

3.16 L: Fire, tror jeg

3.20 L: ….og så fire her og da blir det sju, åtte, ni, ti (peker på midtstilte plasser under den nederste raden med tre sirkler).



Arnt har reprodusert figuren korrekt. Han har en tydelig pyramideform med sirkler i mønsteret en, to, tre. Den lineære sammenhengen i pyramiden er tydelig. Arnt er på advanced nivå i denne oppgaven.

Figur 19 Arnt sin løsning på pyramideoppgaven

4.28 A: (har fortsatt grønn fargeblyant. Begynner å tegne grønne sirkler ved siden av de han hadde fra før. Han begynner på nederste rad på venstre side, deretter på rad to og så øverst. Så bytter han side og tegner en ny ved nederste rad på høyre side. Deretter på rad to og så øverst. Han avslutter med å legge til to grønne sirkler over de øverste og en til midtstilt fra disse to, over der igjen. Nå er pyramiden på fem rader med fordelingen en, to, tre, fire, fem. Den eksisterende pyramiden var på tre rader med fordelingen en, to, tre).

Analysen av elevenes strukturoppgaver gir dermed følgende resultat:

	Areal	**Klokke**	**Pyramide**
Gustav	Emergent	Delvis	Emergent
Lilly	Delvis	Delvis	Delvis
Lars	Strukturell	Strukturell	Advanced
Arnt	Advanced	Advanced	Advanced

Tabell 4 Et sammendrag over elevenes AMPS nivå på de ulike strukturoppgavene

Mulligan og Michelmore (2013) konkluderte med at de kunne plassere elevene i sin studie i reliable kategorier på tross av at elevene varierte i forhold til strukturelt nivå på mange av oppgavene. Dette var fordi oppgavene varierte i vanskelighetsgrad og en slik variasjon var naturlig. Det var også fordi deres analyse viste at elevene AMPS nivå utpekte seg ved at over halvparten av oppgavene ble analysert til det samme strukturelle nivået.

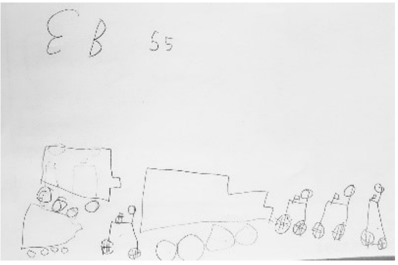
Jeg har et lavere antall oppgaver og dermed mindre å støtte meg til, men har valgt samme strategi som Mulligan og Michelmore (2013), og plasserer elevene på det nivået hvor de har en overvekt. Gustav er derfor i hovedsak på emergent nivå. Lilly er på delvis strukturelt nivå. Lars er i hovedsak på strukturelt nivå. Arnt er på advanced nivå.

4.2 PROBLEMLØSING VED HJELP AV TEGNING

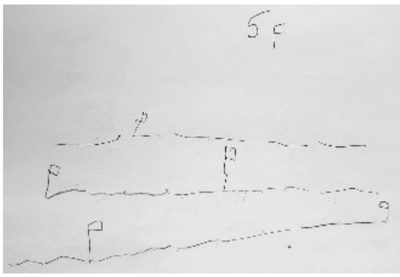
I dette kapittelet vil jeg presentere elevenes løsninger på de fire problemløsende oppgavene. Jeg vil analysere de i forhold til de ulike teoriene om bruk av tegninger i problemløsing, og også se på deres transformasjon fra et representasjonssystem til et annet. Denne delen av analysen er strukturert litt annerledes enn første del. Jeg setter nå eleven i sentrum og analyserer problemløsningen til hver enkelt elev ut ifra de ulike teoriene om bruk av tegning i problemløsning.

4.2.1 GUSTAV – PÅ EMEGENT NIVÅ

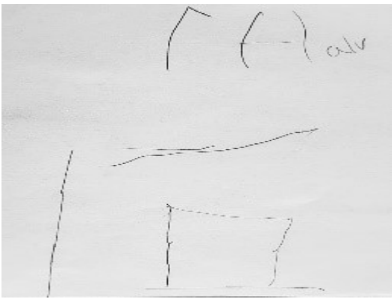
Figur 20 Gustav garasje



Figur 21 Gustav bilbane



Figur 22 Gustav kake



Figur 23 Gustav legotårn

4.2.1.1 Bruk av tegningene

Gustav er konstant i måten han bruker tegningene sine på. På alle oppgavene tegner han på samme måte som om han hadde konkreter å jobbe med, som et manipulativ (Saundry, 2006). På *garasjeoppgaven* tegner han sykler og biler, teller hjul og kjøretøy, tegner flere, teller igjen. På slutten av sin problemløsing, når han er sikker på at han har nok dekk, teller han kjøretøy og oppdager at han har tegnet ni kjøretøy. Han oppfatter at dette ikke oppfyller kravet i oppgaven, åtte kjøretøy, og visker ut de to syklene og erstatter disse med en bil. På *bilbaneoppgaven* bygger han på en måte opp bilbanen ved at han teller fem bilbanebiter og plasserer så et flagg. Han stopper opp etter å ha telt til fem fire ganger og har fått tjue bilbanebiter, plasserer det siste flagget og teller opp antall flagg til sist. På *kakeoppgaven* tegner han fyrstikkene oppå hverandre for så å tegne kaken ved siden av. På *legotårnoppgaven* tegner han klosser, teller underveis, legger til klosser, visker ut og tegner nye.

Alle de fire elevtegningene er funksjonelle (Cuoco & Curcio, 2001) og hjelper Gustav i hans problemløsing med litt variert vellykkethet. Tegningene viser en noe variert grad av abstraksjon. I *garasjeoppgaven* velger Gustav å ha med uvesentlige detaljer på sykkelrepresentasjonen sin i form av styre, eiker på dekkene samt sete. Derimot har han utelatt selve garasjen og konsentrert seg kun om kjøretøyene. På *bilbaneoppgaven* har han kun tegnet bilbanebitene og flaggene, på *kakeoppgaven* kun kaken og fyrstikkene, på *legotårnoppgaven* kun legoklossene. Alle disse elementene er vesentlig for å kunne løse oppgavene.

4.2.1.2 Skjematisk eller ikke skjematisk

Gustav har tegnet *garasjeoppgaven* samt *bilbaneoppgaven* skjematisk (Edens & Potter, 2007). På disse to oppgavene blir det matematiske i oppgaveteksten tegnet riktig i forhold til hverandre, og resultatet av oppgavene er riktig. Underveis i oppgaveløsingen klarer Gustav hele tiden å holde rede på det matematiske i oppgaveteksten. Hans tegning på *Garasjeoppgaven er* arealorientert slik oppgaveteksten innbyr til. På *bilbaneoppgaven* oppstår det et problem da arket ikke er langt nok til å tegne alle tjue bilbanebitene fra venstre mot høyre. Dette hindrer ikke Gustav og han finner en kreativ løsning ved å skrå fortsettelsen sin oppover og tilbake mot venstre side av arket, for så å fortsette på skrå tilbake til høyre igjen. Jeg tolker dette som at tegningen er horisontalt orientert men med en kreativ løsning på grunn av plassmangel (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

Kakeoppgaven er ikke tegnet skjematisk (Edens & Potter, 2007). Gustav har forsøkt å holde rede på de matematiske elementene i oppgaven, men lykkes ikke tilstrekkelig til å løse oppgaven riktig. Denne oppgaven inneholder en måleenhet som et ekstra element og dette elementet fører til forvirring og feil resultat. *Legotårnoppgaven* har ikke et tilsvarende ekstra element og begge oppgavene er ganske like foruten den ekstra måleenheten i *kakeoppgaven*. På et tidspunkt i løsingen av *legotårnoppgaven* har Gustav riktig resultat, men fargeleggingen av klossene i etterkant visker ut streker og fører til at han glemmer det matematiske. Han teller klosser og kommer fram til feil resultat uten å forstå at dette ikke gir et fullstendig tårn med fjorten klosser. *Legotårnoppgaven* er ikke skjematisk fordi antall klosser ikke står i forhold til det matematiske i oppgaven (Edens & Potter, 2007). Både *kakeoppgaven* og *legotårnoppgaven* innbyr til en sør- til nord orientering og Gustav har laget tegninger med samme vertikale orientering (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

4.2.1.3 Overganger mellom to ulike representasjonssystem

I intervjuet er det jeg som leser oppgaven for eleven i tillegg til at han får den utdelt skriftlig. Eleven må evne å trekke ut nødvendig informasjon fra min opplesing for å kunne gå videre med å løse oppgaven ved hjelp av tegning. Han må gjøre transformasjon fra Multifunksjonell diskursiv representasjon, MFD til Multifunksjonell ikke diskursiv representasjon, MFID *(Duval, 2006).* I *garasjeoppgaven* og *bilbaneoppgaven* klarer Gustav denne transformasjonen. På *garasjeoppgaven* spør han to ganger underveis i intervjuet om hvor mange dekk det skulle være, og klarer å holde rede på de nødvendige matematiske detaljene ved hjelp av dette.

På *bilbaneoppgaven* spør han kun en gang i begynnelsen av oppgaveløsningen, for å utelukke at det er snakk om måleenheten meter;

1.52 G: Det her er liksom. Eh Hvor mange meter var det?

1.53 I: Det var 20 biter med bilbane

1.54 G: Okei…

På begge disse oppgavene ble all nødvendig informasjon vellykket transformert fra MFD til MFID og hans løsning på oppgavene ble riktig. Derimot skjer det noe på *kakeoppgaven* som gjør at denne transformasjonen ikke blir vellykket. Gustav starter med å stadfeste at viskelærets størrelse tilsvarer en fyrstikk og begynner å tegne to fyrstikker oppå hverandre. Han tegner så en fyrstikk til over de to foregående og sier at her er det ti fyrstikker, mens han i virkeligheten kun har målt opp tre fyrstikker.

1.62 G: Okei. Så, Vent litt (tar opp et viskelær)Så høy som det viskelæret her kan en fyrstikk være. (legger viskelæret på arket og tegner en strek langs den ene kanten. Flytter viskelæret litt opp og tenger en ny strek)Hva var det nederst?

1.63 I: Nederst er det to fyrstikker med sjokolade

1.64 G: (tegner en strek som er like høy som de to strekene han har tegnet, ved siden av strekene) Og oppå der?

1.65 I: Oppå der er det banan, men vi vet ikke hvor mye, men øverst er det tre fyrstikker høyt med jordbær

1.66 G: (tar blyanten opp til hodet mens han myser med øynene. Han flytter viskelæret litt oppover mens han mumler) Tre fyrstikker er like høyt som (tegner en strek) og så (setter to fingre fra hverandre et lite stykke over firkanten han har tegnet men på høyde med de tre strekene han har målt opp) Det her er ti fyrstikker

Denne feilen fører til at han ikke løser oppgaven. Han klarer ikke å transformere informasjonen i matematikkoppgaven fra MFD til MFID*.* Linjer 1.77 til 1.82 i intervjuet viser at han baserer svaret sitt på en visuell betraktning fra sin egen tegning:

1.77 I: Så var spørsmålet mitt, for i midten så er det banan, men hvor høy er bananen?

1.78 G: (tenker ganske lenge mens han lener hodet litt til siden og støtter den på hånden sin) humm. Jeg vet ikke? Eller, det er en fyrstikk? Eller en halv fyrstikk.

1.79 I: er det en halv fyrstikk?

1.80 G: ja (tenger en strek litt under ti- fyrstikkmerket).

1.81 I: Hvordan tenker du nå? Hvorfor tror du at det er en halv fyrstikk?

1.82 G: Jo fordi ellers så blir den jo like stor som der (peker på ti-fyrstikkmerket) og derfor må det bli en halv (skriver 1 halv på arket. Bruker visuell måling for å komme fram til en halv)

Legotårnoppgaven er som nevnt tidligere, bygd opp på samme måte som *kakeoppgaven,* men uten måleenheten fyrstikker*.* I denne oppgaven klarte Gustav en vellykket transformasjon fra naturlig språk MFD, til ikonisk bilde MFID*,* og på et tidspunkt i oppgaveløsingen hadde han riktig resultat med elleve klosser. Dessverre forvirrer han seg selv under fargeleggingsprosessen fordi hans opprinnelige klosser blir hvisket ut av den grønne tusjen. Dette fører til at sluttresultatet hans blir feil

1.103 I: Ja og hvor mange grønne ble det?

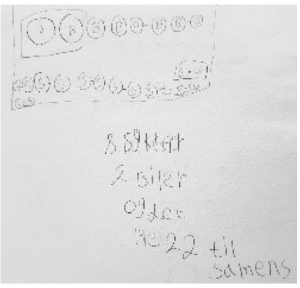
1.104 G: (teller på nytt bare grønne) En, to, tre…tolv? (teller på nytt) En, to, tre…ni?

1.105 I: Blir det ni?

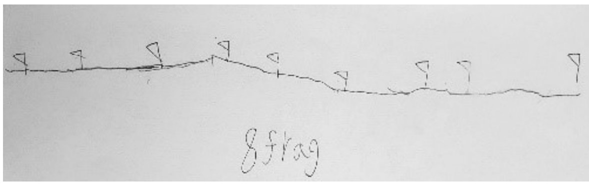
1.106 G: Ja. Det blir ni (skriver 9G)

4.2.2 LILLY– PÅ DELVIS STRUKTURELT NIVÅ

Figur 24 Lilly Garasje



Figur 25 Lilly bilbane



Figur 26 Lilly kake

Figur 27 Lilly legotårn

4.2.2.1 Bruk av tegningene

Lilly bruker tegningene sine som manipulativ, på samme måte som konkreter hvor hun kan gruppere eller dele opp elementer i oppgavene (Saundry, 2006). På *garasjeoppgaven* tegner hun dekk som hun benevner B eller S for om det er et bildekk eller et sykkeldekk etter hvert som hun tegner. Hun knytter to og to dekk sammen med en liten strek slik at både sirkler med B og sirkler med S er satt i par. På *kakeoppgaven* tegner hun opp fyrstikker og bygger kaken ved siden av de ti fyrstikkene. På *bilbaneoppgaven* teller hun til fem og plasserer et flagg og gjentar prosessen flere antall ganger. Dette er på samme måte som Gustav, og begge bruker tegningen sin slik de ville bygget opp en bilbane. På *Legotårnoppgaven* visker hun ut og legger til klosser slik at tårnet blir riktig i forhold til kravene i matematikkoppgaven. Disse fire tegningene er manipulativer for å løse de problemløsende matematikkoppgavene (Saundry, 2006).

Alle tegningen til Lilly er funksjonelle ved at de forsøker å systematisere det matematiske i oppgaveløsingen og ikke portretterer henne selv, i selve oppgaveløsingen (Cuoco & Curcio, 2001). Tegningene er også relativt abstrakte ved at de ikke inneholder uvesentlige detaljer. *Garasjeoppgaven* inneholder kun dekk, *bilbaneoppgaven* har kun bilbanebiter og flagg og *legotårnoppgaven* har kun legoklosser. *Kakeoppgaven* er den som er minst abstrakt fordi den både inneholder fyrstikker i tårn og en kake.

4.2.2.2 Skjematisk eller ikke skjematisk

En tegning er *skjematisk* dersom det matematiske i oppgaven portretteres riktig i forhold til hverandre samt at sluttresultatet er riktig (Edens & Potter, 2007). Lilly har ikke tegnet *garasjeoppgaven* skjematisk fordi hun ikke har greid å forholde seg til rammevilkåret med kun åtte kjøretøy i garasjen. Hun kommer fram til at det er åtte sykler og to biler i garasjen. *Garasjeoppgaven* har en arealorientering og Lilly har tatt hensyn til dette og tegnet en arealorientert tegning over kjøretøyene (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Lilly strevde også med en av rammefaktorene i *bilbaneoppgaven.* Denne er tegnet ikke skjematisk fordi hun ikke begrenser seg til tjue bilbanebiter og ender opp med å tegne førti bilbanebiter mens hun selv sier hun har tegnet ni. Oppgaven har som nevnt en vest til øst orientering, noe som også kommer fram i elevtegningen til Lilly (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

Kakeoppgaven er ikke skjematisk fordi fyrstikker og kake ikke står i forhold til hverandre matematisk. Hun tegner ti fyrstikker på den ene siden av arket, men lager et stort kakefat under kaken som måler opp til fyrstikk fem/seks, og kaken over dette. Hennes kake er derfor like høy som ca. fem fyrstikker i proporsjon. *Legotårnoppgaven* er tegnet skjematisk og det matematiske i oppgaven blir etter hvert tegnet riktig i forhold til hverandre. Med dette mener jeg at også Lilly som Gustav, ødelegger resultatet sitt ved at hun fargelegger over sine opprinnelige blyantstreker med grønn tusj. Lilly forsøker å tegne svarte streker på rett plass etterpå, men kommer da til et tårn med kun tolv klosser istedenfor fjorten slik oppgaven presenterer. Hun ønsker å avslutte oppgaven med dette resultatet, men jeg presser henne litt ekstra her og hun klarer å løse dilemmaet sitt ved å plassere to ekstra streker på det grønne feltet av tårnet sitt:

2.188 I: Men til meg så sier du også at dette er tolv

2.189 LY: Ja

2.190 I: Så hva kan du gjøre da?

2.191 LY: Da lager jeg noen nye klosser her da (setter på to ekstra svarte streker der det er grønne klosser og begynner å telle igjen) En, to, tre…fjorten. Nå er det fjorten klosser.

2.192 I: og hvor mange er grønne?

2.193 LY: En, to, tre…elleve klosser er det i midten nå

Både *kakeoppgaven og legotårnoppgaven* har en sør til nord orientering og denne kommer også fram i Lillys elevtegninger (Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

4.2.2.3 Overganger mellom to ulike representasjonssystem

Lilly strever med å få med seg viktig matematisk informasjon fra muntlig og skriftlig tale, Multifunksjonell diskursiv representasjon, MFD, til tegningen som er en Multifunksjonell ikke diskursiv representasjon, MFID *(Duval, 2006).* På *garasjeoppgaven* klarer hun ikke å forholde seg til begrensningen med kun åtte kjøretøy i oppgaveteksten. Jeg var usikker på om hun forsto at det skulle være åtte kjøretøy til sammen, biler og sykler, og påpekte dette, men hun klarte kun å fokusere på den ene rammefaktoren med 22 dekk:

2.70 I: Ja, men husk at det skulle være åtte kjøretøy både med sykler og biler

2.71 LY: Ja, nå er det åtte av syklene da! Og TO biler!

2.72 I: Ja, men det skal være åtte til sammen. Det er ikke mer enn åtte kjøretøy i garasjen og 22 dekk

2.73 LY: Det ble 22 dekk da!

I *bilbaneoppgaven* skjedde det samme. Hun klarte å få med seg informasjonen om at det ble plassert ett flagg hver femte bilbanebit, men klarte ikke å begrense seg til tjue bilbanebiter. På spørsmål om hvor mange bilbanebiter det var til sammen etter at hun hadde plassert åtte flagg, så kom hun fram til at det var ni bilbanebiter, på tross av at hun telte til fem mellom hvert flagg:

2.109 LY: (tegner videre) En, to, tre, fire, fem (tegner flagg) og så slutten. En, to, tre, fire, fem (tegner et flagg

2.110 I: Okei, så hvor mange flagg ble det?

2.111 LY: En, to, tre…åtte. Det er åtte flagg

2.112 I: Okei og så bare et kontrollspørsmål (redd for å påvirke LY negativt og gi usikkerhet). Hvor mange bilbanebiter har du tegnet?

2.113 LY: (teller inni seg mens hun teller oppholdene mellom flaggene) Ni biter? (Litt spørrende)

Hun har derfor ikke en vellykket transformasjon mellom de to representasjonssystemene MFD og MFID (Duval, 2006).

På *kakeoppgaven* virker det som om hun ikke klarer å koble måleenheten fyrstikker med størrelsen på kaken hun tegner. Hun har heller ikke klart å komme fram til riktig resultat og bruker en visuell evaluering over hvor stor bananen er uten å hensynta fyrstikkenes størrelse ved siden av:

2.137 LY: Okei, (teller mens hun har blyanten på bananlaget i kaken, ikke på fyrstikkene ved siden av) en, to, tre…sju banan. Så mye banankake

Hun gjør også det samme med sjokoladelaget selv om hun vet at denne er like høy som to fyrstikker:

2.142 I: Sjokoladen var like høy som to fyrstikker

2.143 LY: Okei (bøyer seg over arket og teller med blyantspissen på den brune firkanten hun har fargelagt, sjokoladen) en, to, tre… Sju den også. Den ble også sju

2.144 I: Hva mener du med at den ble sju?

2.145 LY: Jeg telte jo den her (peker på sjokoladelaget) og den ble sju

2.146 I: Hva teller du når du teller sju?

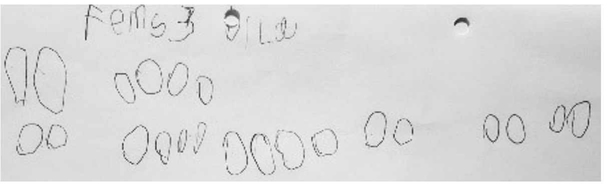
2.147 LY: Da teller jeg hvor lang kaka er

All matematisk informasjon i oppgaven blir heller ikke her, transformert mellom representasjonssystemene MFD og MFID (Duval, 2006).

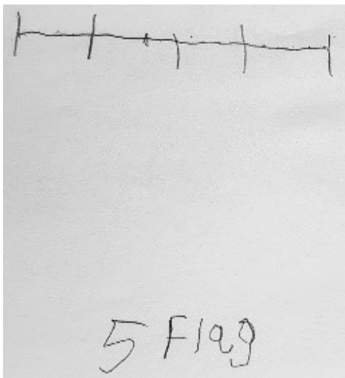
På *legotårnoppgaven* transformeres all viktig informasjon fra MFD til MFID og hun klarer å løse oppgaven riktig, med en god dytt fra meg som nevnt tidligere.

4.2.3 Lars – PÅ STRUKTURELT NIVÅ

Figur 28 Lars garasje



Figur 29 Lars bilbane



Figur 30 Lars kake

Figur 31 Lars legotårn

4.2.3.1 Bruk av tegningene

Lars bruker tegningene sine som manipulativer hvor handlingen er manipulert ved grupperinger, på to av oppgavene (Saundry, 2006). På de andre to oppgavene, bruker han tegningen som et støttesystem hvor han holder rede på elementer i oppgaven (Saundry, 2006). På *garasjeoppgaven* bruker Lars tegningen sin som et manipulativ hvor han grupperer dekk i grupper på to og fire mens han teller hvor mange dekk han har tegnet. Han teller ikke høyt for å holde rede på antall kjøretøy, men stopper opp, og tar tenkepauser for så å tegne videre i form av sykler og biler. Dette gjør at han ikke får behov for å viske ut eller rette opp noe han tegner

3.32 L: Ja, som blir (teller sirklene) en, to, tre…seks. (tegner to sirkler til under de to som representerte sykkelen) En toer som blir en sykkel, så nå er det jo åtte (han teller ikke) (tegner fire sirkler litt bortenfor og under det som representerte bilen) og så fire, så nå er det jo tolv (teller ikke men stopper for å tenke litt, setter blyanten til munnen og den ene hånden til hodet)

På *bilbaneoppgaven* tegner han prikker, bilbanebiter, mens han teller til fem for så å tegne en strek, et flagg. Dette gjør han inntil han kommer til tjue biter. Da kontrollteller han antall biter og finner så antall flagg. Han bygger opp bilbanen på tegningen på samme måte som han ville gjort dersom han hadde de fysiske bilbanebitene, som et manipulativ (Saundry, 2006). På de resterende to oppgavene bruker Lars tegningene sine som støttesystem. På *kakeoppgaven* tegner Lars kun de ti fyrstikkene i et tårn for så å fargelegge fyrstikker etter anvisningen i oppgaven. De to nederste blir brune, deretter blir den øverste rød, så teller han de i midten mens han fargelegger de gule (Linje 3.53 til 3.60). Han deler ut fyrstikker mellom de ulike smakene i kaken. *Legotårnoppgaven* løses ved å tenger et tårn på fjorten klosser for så å telle fra kloss tre til tretten, uten å bry seg med de nederste og den øverste (Linje 3.78).

Lars bruker en del tid på å tenke over detaljene i oppgavetekstene. Visualisering øker sannsynligheten for å løse oppgaven riktig (Saundry, 2006). Lars viser tydelig tegn på at han visualiserer oppgaven før han begynner selve tegningen. I intervjuet på *garasjeoppgaven* stiller han et spørsmål som tydeliggjør dette:

> 3.26 L: Er det trehjula sykla eller? (løfter ut den ene hånda som holder blyanten og vifter litt med denne)

Han forklarer hvordan han tenker på *legotårnoppgaven* før han begynner på selve tegningen:

> 3.70 L: (peker nederst på arket) Det er en svart her. Det var to svarte ja og så var det o en rød her (peker øverst på arket og setter en prikk) og så er det grønne i midten.

Lars bruker tegningene sine på en svært funksjonell måte ved at de er til støtte for ham under løsningen av oppgavene og hjelper ham med å forholder seg til oppgavenes kontekst (Cuoco & Curcio, 2001). Tre av tegningene er abstrakte og en av disse også ganske minimalistisk (Cuoco & Curcio, 2001). *Garasjeoppgaven* er tegnet med kun dekk i grupper på to eller fire og *bilbaneoppgaven* er tegnet ved prikker for bilbanebiter og vertikale streker for flagg. Den mest abstrakte tegningen er *kakeoppgaven* hvor Lars helt har unngått å tegne en kake. Han har kun tegnet de ti fyrstikkene og fordelt disse mellom sjokolade, banan og jordbær. *Legotårnoppgaven* er den som er minst abstrakt fordi den blir tegnet som klosser i et tårn, noe oppgaven innbyr til.

4.2.3.2 Skjematisk eller ikke skjematisk

En tegning er skjematisk dersom det matematiske i oppgaven er tegnet riktig i forhold til hverandre og resultatet er korrekt (Edens & Potter, 2007). Lars har løst alle oppgavene med riktig resultat og alle tegningene hans er skjematiske. Lars har vært nøye med størrelse i tegningene sine og vi ser spesielt på *bilbaneoppgaven og kakeoppgaven* at bilbanebitene og fyrstikkene har samme størrelse. Dette gjør at avstanden mellom flaggene i *bilbaneoppgaven* framstår som jevn, bortimot som en tallinje. *Kakeoppgavens* fyrstikker ble også nøye konstruert ved at han tegnet fem prikker og slo disse sammen med en strek:

> 3.52 L: (begynner å tegne prikker mens han teller) En, to, tre…fem, en fyrstikk (tenger en strek nedover langs prikkene han tegnet) (begynner å tegne prikker mens han teller) En, to, tre…fem, to fyrstikker…

På grunn av dette framstår kakelagene riktig i forhold til spesifikasjonene i oppgaveteksten. Det er lett å lese av resultatet i tegningene hans. Som nevnt tidligere er oppgavetekstene konstruert slik at de har en naturlig orientering enten fra sør til nord/vertikal, *kakeoppgaven og legotårnoppgaven*, fra vest til øst/horisontal, *bilbaneoppgaven* eller en arealorientering, *garasjeoppgaven.* Dette fordi de skal innby til en skjematisk tegning (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Lars har konstruert tegninger som demonstrerer nettopp disse orienteringene.

4.2.3.3 Overganger mellom to ulike representasjonssystem

Duval (2006) hevder at en god overgang hvor all matematisk informasjon transformeres fra et representasjonssystem til et annet, et nøkkelen til en vellykket problemløsing (Duval, 2006). Lars evner å få med seg all matematisk informasjon fra naturlig språk, Multifunksjonell diskursiv representasjon/ MFD til ikonisk tegning, Multifunksjonell ikke diskursiv representasjon/MFID (Duval, 2006) på alle de fire matematikkoppgavene. Han utviser en stor forståelse for nødvendig informasjon og dette kommer tydelig fram i både *kakeoppgaven* og *legotårnoppgaven.* På *kakeoppgaven* unnlater han helt å tegne en kake og konsentrerer seg om fyrstikkene som skal fordeles mellom de tre kakelagene:

3.54 L: (strekker seg til tusjene og velger brun og begynner å fargelegge brunt horisontalt over de to nederste strekene.)

3.58 L: (tar en rød fyrstikk og begynner å fargelegge rødt horisontalt over den øverste fyrstikken) Her er jordbær. En (fargelegger så over den nest øverste) To (fargelegger så den tredje øverste) Tre fyrstikker

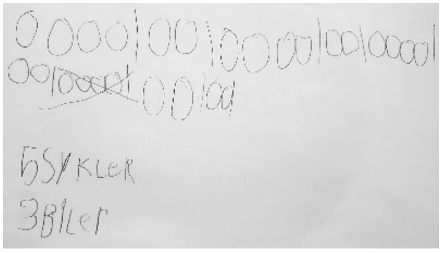
3.60 L: (tar en gul tusj) Banan. (begynner å fargelegge de resterende fyrstikkene i midten) En, to… fem

På legotårnoppgaven tegner han alle de fjorten klossene, men unnlater å bry seg om de to nederste og den øverste klossen:

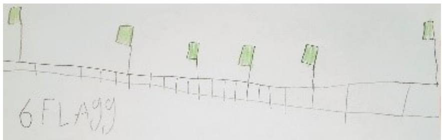
3.78 L: hm (tar hånden til hodet og begynner å fargelegge litt i den tredje klossen og videre oppover mens han teller) En, to, tre…elleve (stoppere før den øverste klossen) Det er elleve grønne klosser (Han har ikke fargelagt noe i de to nederste og den øverste klossen) (skriver 11 grønne øverst på arket)

4.2.4 ARNT – PÅ ADVANCED NIVÅ

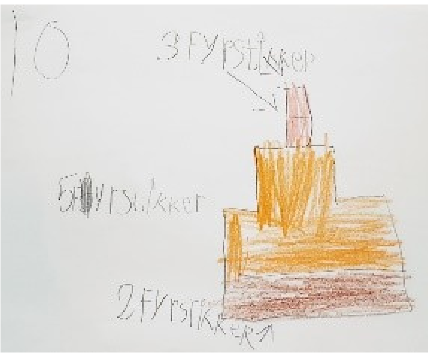
Figur 32 Arnt garasje



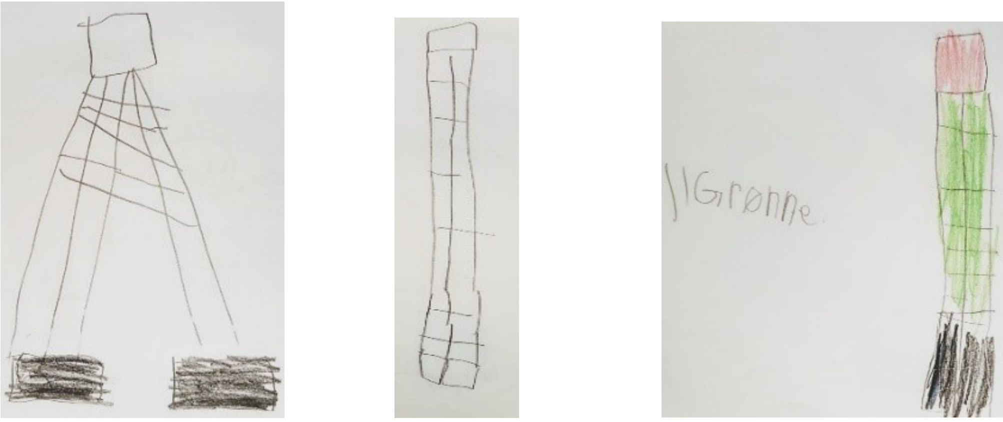
Figur 33 Arnt bilbane



Figur 34 Arnt kake



Figur 35 Arnt Legotårn 1, 2 OG 3



4.2.4.1 Bruk av tegningene

Arnt bruker tegningene på tre ulike måter. I *garasjeoppgaven* fungerer tegningen som et manipulativ (Saundry, 2006) hvor han kan gruppere dekk i grupper på to og fire for henholdsvis sykkel og bil. Han gjør feil til å begynne med, og ender opp med tjueto dekk og sju kjøretøy. Han krysser ut den ene bilen og tegner en sykkel istedenfor for så å legge til en sykkel til etter en ny tellerunde:

4.48 A: Det er jo 22 dekk ..– (teller igjen og kommer til 20) Tjue! (tegner to sirkler til) Tjueen og Tjueto.

Tegningen er ganske abstrakt og inneholder ingen unødvendige elementer, kun bildekk i grupper på to og fire. På *bilbaneoppgaven* fungerer tegningen som et støttesystem (Saundry, 2006) hvor han først tegner de tjue bilbanebitene for så å plassere flagg etter hver femte bilbanebit:

4.65 A: (peker på bitene) (tegner et flagg, fargelegger)(peker på fem biter, tegner et flagg, fargelegger)

4.66 A: (peker på bitene) (tegner et flagg, fargelegger)(peker på fem biter, tegner et flagg, fargelegger)

4.67 I: Hva gjør du nå når du peker på bitene Arnt?

4.68 A: Teller, fem og så fem

Etter mitt spørsmål gjør han feil og teller med bilbanebiten hvor han nettopp har plassert et flagg. Dette gjør at det halvveis i utplasseringen, blir kun fire biter mellom hvert flagg:

4.69 A: (bøyer seg over arket og fortsetter med å telle fem og så tegne flagg) (jeg ser at han teller med biten han tegnet flagg på og dermed blir det fire biter mellom enkelte steder og tre helt til slutt) En, to, tre, fire, fem seks (teller mens han peker på flaggene). Seks flagg

Bilbaneoppgaven er ikke tegnet abstrakt. Den inneholder ordentlige flagg og selve bilbanen er en dobbelstrek inndelt med vertikale streker for inndeling i bilbanebiter.

Både *garasjeoppgavens- og bilbaneoppgavens* tegning er funksjonelle og hjelper Arnt i hans problemløsing, om enn noe mislykket på *bilbaneoppgaven (Cuoco & Curcio, 2001).*

På *kakeoppgaven* endrer tegningen karakter og blir et *dynamisk verktøy* som hjelper Arnt i hans kommunikasjon med meg (Cuoco & Curcio, 2001). Han har visualisert løsningen mentalt og trenger ikke tegningen for å løse oppgaven. Arnt tegner for å forklare hvordan han tenker:

4.81 A: Det er jo enkelt!

4.82 I: Er det det? Okei, hvordan da? Fortell meg og gjerne tegn også sånn at jeg forstår

4.83 A: Det er 10 fystikker (peker på oppgaveteksten). Da tegner vi bare en kake her. Og dette er easy fordi her er jo sjokoladen og den er like høy som 2 fyrstikker (fargelegger brunt). Sånn! I midten er det

4.84 I: banan og den vet vi ikke hvor mye er

4.85 A: Ja, og øverst er det jordbær..

4.86 I: ja, og den er like høy som tre fyrstikker.

4.87 A: uhum (bekreftende)

4.88 I: Hvordan tenker du nå?

4.89 A: Da tenker jeg da liksom – Det er 10 fyrstikker her og så her er det jo tre pluss to og det er jo fem. (peker på oppgaveteksten).

4.90 I: Uhum (bekreftende)

4.91 A: Så da må bananen være fem fyrstikker høy.

Det samme gjelder for *legotårnoppgaven,* men her gjør han det vanskeligere for seg selv fordi han ønsker å lage et *Eiffeltårn* med skrå føtter. Han strever veldig med å få klossene i tårnet til å stemme overens med antall klosser i oppgaveteksten. Han husker først feil og tror det skal være fjorten grønne klosser, men justerer dette med en gang han finner ut at hele tårnet er fjorten:

4.117 A: Å. A. Ja, du. Tårnet skulle ha fjorten klosser. Jeg trodde det skulle være fjorten grønne klosser det skulle være jeg. (tar et nytt ark)

4.118 I: Okei. Så du laget 14 grønne og så la du til to svarte og en rød?

4.119 A: Uhum (bekreftende). Men det er bare fire unna. Så det er (tenker) elleve.

Hverken *kakeoppgaven og legotårnoppgaven* er tegnet abstrakt noe som ville vært unaturlig i og med at disse tegningene ble brukt som dynamiske verktøy for kommunikasjon og ikke som hjelp i selve oppgaveløsingen.

4.2.4.2 Skjematisk eller ikke skjematisk

Garasjeoppgaven og *kakeoppgaven* er tegnet skjematiske fordi det matematiske i oppgaven er presentert riktig i forhold til hverandre samt at resultatene er riktig (Edens & Potter, 2007). *Bilbaneoppgaven* er *ikke skjematisk* fordi han tegner tjueen biter istedenfor tjue:

4.59 A: (Tegner to parallelle linjer som går over hele arket. Begynner deretter å tegne streker som deler opp de to linjene i mindre biter mens han teller) En, to, tre, fire…… og tjue. Det er bilbanebitene (peker på delene, ser ikke at han har tegnet 21 biter)

I tillegg plasserer han flaggene feil i forhold til rammevilkåret i oppgaven slik presentert i foregående avsnitt.

Tegningen på *legotårnoppgaven* er vanskeligere å analysere fordi selve tegningen viser tolv grønne klosser mens Arnt i sin kommunikasjon sier at det er elleve. Tegningen viser dermed feil forhold mellom det matematiske i oppgaven, mens resultatet og den muntlige kommunikasjonen rundt er riktig. Er da hans tegning *skjematisk* eller *ikke skjematisk?* Jeg har valgt å vektlegge sluttresultatet og kommunikasjonen mer enn selve tegningen og kategoriserer hans løsning på denne oppgaven som *skjematisk.* Jeg er trygg på at dette er riktig kategorisering fordi selve tegningen ikke var et verktøy for selve oppgaveløsningen, men et hjelpemiddel i kommunikasjonen med meg.

Alle tegningene til Arnt har riktig orientering i forhold til oppgavetekstene: *Garasjeoppgaven* er tegnet arealorientert, *bilbaneoppgaven* er tegnet med en horisontal orientering*, kake- og legotårnoppgaven* er tegnet med en vertikal orientering (Hegarty & Kozhevnikov, 1999)

4.2.4.3 Overganger mellom ulike representasjonssystem

Arnt har en vellykket overgang mellom de to representasjonssystemene naturlig språk, Multifunksjonell diskursiv representasjon/ MFD og ikonisk tegning, Multifunksjonell ikke diskursiv representasjon/MFID (Duval, 2006) på tre av oppgavene sine: *Garasjeoppgaven, kakeoppgaven* og *legotårnoppgaven.* På disse oppgavene blir all nødvendig informasjon med fra et representasjonssystem til et annet og oppgavene blir løst riktig. Hos Arnt ser jeg også muligheten til at han i tillegg, kunne hatt en vellykket transformasjon til Monofunksjonell diskursiv representasjon, MOFD i form av skriftlig utregning. Han uttaler seg med eksplisitte regnestykker for addisjon og subtraksjon i både *kake- og legotårnoppgaven*:

Kakeoppgaven:

4.91 A: Så da må bananen være fem fyrstikker høy.

4.92 I: Hvordan vet du det da?

4.93 A: Jo fordi fem pluss fem blir jo ti.

Legotårnoppgaven:

4.120 I: Elleve grønne?

4.121 A: Ja!

4.122 I: Hvordan kom du på det nå?

4.123 A: Jeg kom på det fordi her er det jo tre klosser som ikke er grønn så hvis du tar fjorten minus tre så blir det elleve.

Arnt unnlater å skrive utregningene sine i tegningen sin. På tegningen markerer han kun forholdene i matematikkoppgaven ved å skrive tallsymbolet på hvert lag i *kakeoppgaven* og ingenting i *legotårnoppgaven.* Han har derfor ikke fullført en transformasjon til MOFD, og holder seg innenfor de to typene av multifunksjonelle representasjonssystem jeg krever av ham i intervjuet.

Som avslutning på analysekapittelet vil jeg sammenfatte hovedpunktene i min analyse av elevenes problemløsning i en tabelloversikt. Tallverdien står for antall oppgaver i hver kategori:

Elevers AMPS nivå	**Bruk av tegninger**			**Vellykket?**	**Skjematisk ?**	**Representasjons -systemer**
	Mani-pulativ	Støtte-system	Dynamisk verktøy	Antall riktige	Skjematisk	Vellykket transformasjon
GUSTAV *Emergent*	4	0	0	2	2	2
LILLY *Delvis strukturell*	4	0	0	1	1	1
LARS *Strukturell*	2	2	0	4	4	4
ARNT *Advanced*	1	1	2	3	3	3

Tabell 5 Sammenfatning av analysefunn av problemløsningsoppgavene

5 DISKUSJON AV FUNN

I min masteroppgave ønsker jeg å undersøke hvordan grad av bevissthet om struktur og mønster, påvirker hvordan fire elever på 2. trinn løser problembaserte matematikkoppgaver ved hjelp av tegning. I dette kapittelet vil jeg diskutere de ulike punktene av analysen min: Hvordan elevene bruker tegningene, om tegningene er skjematiske eller ikke og hvordan transformasjonene mellom ulike representasjonssystemer gjøres av de ulike elevene. Jeg vil diskutere disse punktene i forhold til elevenes bevissthetsnivå for mønster og struktur, AMPS nivå, og undersøke hva dette innebærer i forhold til numerisk- og romlig struktur. Jeg vil også diskutere ulikhetene mellom elevene og deres løsninger.

5.1 BRUK AV TEGNINGENE

I dette avsnittet vil jeg diskutere elevenes bruk av tegningene i forhold til deres AMPS nivå. For å undersøke sammenhengen mellom elevenes AMPS nivå og hvordan de bruker tegningene sine for å løse problemløsende matematikkoppgaver, vil jeg bruke Mulligan og Michelmores (2009) beskrivelser for de ulike AMPS nivåene, og se om jeg kan finne spor av nivåbeskrivelsene i elevenes tegninger.

Når elever tegner for å løse problemer i matematikk har tegningene mange funksjoner. De kan fungerer istedenfor konkreter, som et *manipulativ* hvor grupperinger, inndelinger og organisasjon hjelper eleven i problemløsingen (Saundry, 2006). Tegningen kan også være et støttesystem for å holde rede på elementer i oppgaven og gi eleven mulighet til å dele ut de ulike elementene i oppgaveteksten (Saundry, 2006). Woleck (2001) kaller begge disse kategoriene for funksjonelle tegninger fordi de hjelper eleven i problemløsingen (Cuoco & Curcio, 2001).Tegningen kan også vise seg å være uvesentlig for selve oppgaveløsningen fordi elevene visualiserer problemet og løsningen uten tegning og hvor tegningen fungere som et dynamisk verktøy i kommunikasjonen med andre for å forklare tankegangen rundt egen løsning (Cuoco & Curcio, 2001).

Sandry og Nicol (2006) fant i sin undersøkelse at de som laget seg et system hvor de eliminerte, sjekket og sjekket igjen, var mest vellykket i sin problemløsning. Dette gjaldt uavhengig av hvor detaljert tegningen var og om de i det hele tatt tegnet eller kun visualiserte en løsning. De fant at elever som brukte tegningen sin som et støttesystem oftere benyttet et system hvor de eliminerte, sjekket og re sjekket og at det derfor var disse elevene som hadde størst suksess i sin problemløsing.

Selv om jeg ikke har funnet noen direkte *teoretiske* sammenhenger mellom tegning-kategoriene til Saundry og Nicol (2006) og innholdet i Mulligan og Michelmores (2013) AMPS nivå, vektlegger jeg dette i diskusjonen fordi analysefunnene antyder en forskjell i elevenes fleksibilitet som kan være verdt å undersøke i en større studie.

Det var store variasjoner blant elevene i min studie, i forhold til hvordan de brukte tegningen. Gustav er på emergent nivå i forhold til våkenhet for matematisk struktur og mønster og alle hans tegninger er manipulativer som erstatter konkreter. Selv om tegningen hans var manipulativer, var det tydelig at han på *garasjeoppgaven* laget seg et system hvor han telte og telte igjen, for å holde kontrollen på elementene i oppgaven, kjøretøy og dekk, i forhold til oppgavetekstene. Selv om Saundry og Nicol (2006) fant at denne vellykkede strategien ble mest brukt av elever som brukte tegningen sin som et støttesystem, så demonstrerer Gustav at han også kan bruke den og det kan være nettopp denne strategien som gjør at han lykkes i to av de fire oppgavene. På *bilbaneoppgaven* er det en regularitet i oppgaven som elevene kan oppdage: grupper på fem som skal bli til tjue. Gustav oppdaget dette mønsteret og tegnet strukturert små streker i fem og fem. Han telte, telte igjen og slutter når han kommer til tjue. På *kakeoppgaven* er tegningen hans svært mangelfull og hans løsning på oppgaven blir feil. Mulligan og Michelmore (2013) beskriver AMPS nivået emergent, slik*: «Eleven kjenner igjen noen relevante mønster/strukturer men klarer ikke å bruke de på en riktig måte» (s. 35).* Dette kommer tydelig fram i tegningen hans på *kakeoppgaven*. Han vet at det handler om lag i kaken og at kaken skal være ti fyrstikker høy, men det at det er laget i midten som er ukjent, gjør at han ikke klarer å benytte bygge opp strategien sin på en vellykket måte. Representasjonen hans blir ukorrekt fordi han ikke klarer å bruke strukturen i oppgaven på riktig måte. Det er samme problematikk i *legotårnoppgaven*, hvor midten mangler, men denne oppgaven mangler det ekstra elementet med måleenheten fyrstikker. Han kommer nesten i mål, men ender dessverre med feil løsning.

Lilly var på delvis strukturelt nivå i forhold til våkenhet for matematiske struktur og mønster. Hennes bruk av tegningene er også som manipulativer, på samme måte som Gustav. Hun teller og teller igjen, men klarer ikke å forholde seg til alle rammefaktorene i oppgavetekstene. Mulligan og Michelmores (2013) beskrivelse av hennes matematiske strukturelle bevissthetsnivå, delvis strukturell er følgende: *«Eleven kjenner igjen de aller fleste relevante mønster/strukturer men representasjonen er uferdig eller ukorrekt» (s. 35).* På *garasjeoppgaven* har hun tegnet tjueto dekk og merket disse slik at de skal tilhøre biler og sykler. Hun vet at det skal være åtte av noe, men klarer ikke å forholde seg til at *åtte* omhandler alle kjøretøy. Hun strever også med å forholde seg til at biler har fire dekk og sykler to og denne forvirringen kommer fram i tegningen ved at dekkene er i par uavhengig av om de er sykkel- eller bildekk. Representasjonen blir ukorrekt. På *bilbaneoppgaven* kommer det tydelig fram at hun har oppdaget strukturen med fem bilbanebiter og ett flagg, men hun klarer ikke å forholde seg til begrensingen om tjue bilbanebiter. Representasjonen blir derfor også her, ukorrekt. På *kakeoppgaven* vet hun at kaken skal være like høy som ti fyrstikker og tegner de ti fyrstikkene oppå hverandre og kaken ved siden av. Tegningen hennes viser derimot en kake som er ca. fem fyrstikker høy og et kakefat som er tilsvarende høy og disse til sammen blir like høy som de ti fyrstikkene. Tegningen er ukorrekt i forhold til oppgaveteksten og passer som de andre to foregående tegningene hennes, til Mulligan og Michelmores beskrivelse av bevissthetsnivået for mønster og struktur, delvis strukturell. På *legotårnoppgaven* er hennes representasjon korrekt, men dog med ett stort dytt fra meg, som vist i analysekapittelet.

Michelmore (2009) konkluderte i sin undersøkelse med at de kunne klassifisere elevers besvarelser i reliable strukturelle nivå. Derimot fant de også at selv om elevenes svar på de ulike oppgavene kunne plasseres i kategorier som var konsekvent for alle oppgavene, så varierte oppgavene i strukturell vanskelighetsgrad. Dette førte til at elevenes svar på oppgavene ikke viste det samme strukturelle nivået, men det var en tydelig hovedtyngde i forhold til ett AMPS nivå på alle elevene. Elevene på emergent nivå og delvis strukturelt nivå var de som varierte mest i forhold til AMPS nivå på de ulike oppgavene.

Vanskelighetsgraden på de fire problemløsende oppgaver jeg bruker i min studie er ikke lik. *Kakeoppgaven* inneholder et ekstra element med måleenheten fyrstikker og denne oppgaven er den vanskeligste av alle. Det er derfor ikke overraskende at elevene på de to laveste AMPS nivåene ikke klarer å løse denne oppgaven. Dette forklarer også variasjonene i tegningene til disse to elevene og hvorfor de har klart å produsere en og to tegninger korrekt.

Lars er på strukturelt nivå i forhold til bevissthet omring matematisk mønster og struktur (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013). Han varierer mellom å bruke tegningene sine som støttesystem og manipulativer (Saundry, 2006), og demonstrerer dermed en større verktøykasse i forhold til hvordan han bruker tegningene sine. Lars har stor suksess med sin problemløsing og løser alle oppgavene riktig. I intervjuene er det flere tegn på at han visualiserer oppgaveteksten før han starter på tegningen sin og underveis i tegningen. På *garasjeoppgaven* spør han for eksempel om det er trehjulsykler eller tohjulsykler i garasjen (linje 3.26), og på *legotårnoppgaven* peker han øverst og nederst på arket mens han forklarer hvordan han tenker:

> 3.70 L: (peker nederst på arket) Det er en svart her. Det var to svarte ja og så var det o en rød her (peker øverst på arket og setter en prikk) og så er det grønne i midten.

Mulligan og Michelmore (2013) beskriver strukturelt bevissthetsnivå slik: *«Eleven representerer den gitte strukturen korrekt» (s. 35).* Dette er også tilfellet for alle tegninger til Lars. Han oppdager den vesentlige strukturen i alle de fire problemløsendeoppgavene og klarer å videreføre sammenhengene mellom disse i sine tegninger. Dette gjør at tegningene er gode verktøy i hans problemløsing fordi representasjonene er riktige.

Arnt er på advanced nivå i forhold til våkenhet for matematisk struktur og mønster. Arnt brukte en av tegningene sine som manipulativ*: garasjeoppgaven.* På denne delte han inn i grupper på to og fire for henholdsvis sykkel og bil. På *bilbaneoppgaven* fungerte tegningen som et støttesystem for å plassere ut riktig antall flagg etter å ha tegnet bilbanen ferdig. På de resterende to oppgavene: *kakeoppgaven og legotårnoppgaven* var tegningene unødvendig for selve oppgaveløsningen. Han visualiserte løsningen uten å tegne og brukte tegningene som dynamiske verktøy for å kunne forklare egen tankegang til meg. Med disse tre funksjonene viser Arnt at hans verktøykasse for hvordan han bruker tegningen, er enda større enn verktøykassen til Lars. Dette indikerer at han innehar en større fleksibilitet i problemløsningen enn alle de andre tre elevene. Mulligan og Michelmore (2013) beskriver advanced strukturelt bevissthetsnivå slik: *«Eleven representerer den gitte strukturen korrekt og klarer å generalisere mønsteret» (s.35).* Det er vanskelig å finne bevis for evnen til å generalisere i denne problemløsingen fordi eleven aldri ble spurt om å gjøre dette. Han skulle kun finne svar på problemstillingene i oppgavene, og intervjuet stoppet med en gang han hadde kommet fram til en løsning. *Bilbaneoppgaven* og *garasjeoppgaven* var begge godt egnet til å kunne stille spørsmål som kunne avdekke hans evne til å generalisere. Dersom jeg hadde stilt følgende spørsmål: Hva om det ikke var åtte kjøretøy i garasjen, men ni, hvor mange hadde da vært sykler og hvor mange hadde vært biler? Er det et mønster her? Det samme gjelder *bilbaneoppgaven* hvor et spørsmål om hva om det var tjuefem bilbanebiter eller tretti bilbanebiter, ville kunne avsløre en generalisering som viser forholdet 5:1+1 mellom antall bilbanebiter og flagg. Dette gjorde jeg ikke dessverre og denne delen av diskusjonen blir derfor utilstrekkelig og uten muligheten til å kunne trekke en konklusjon i forhold til hans evne til å generalisere problemene. Derimot representerte han den gitte strukturen korrekt i tre av de fire oppgavene.

Når jeg nå sammenligner disse fire elevene så er den største forskjellen mellom dem, deres verktøykasse i forhold til hvordan de bruker tegningene sine i sin problemløsning. Elevene på emergent nivå og delvis strukturelt nivå brukte begge sine tegninger på en måte, som manipulativer hvor de kunne gruppere og hviske ut og hvor de bygget opp objektet i oppgavene på samme måte som konkreter (Saundry, 2006). Deres mangel på fleksibilitet kunne ha vært et hinder som førte til at de ikke klarte å løse flere oppgaver. Elevene på strukturelt nivå og advanced strukturelt nivå brukte tegningene sine på tre ulike måter, som manipulativer, som støttesystem, hvor elementer i oppgaven blir distribuert ut (Saundry, 2006), og som et dynamisk verktøy som støttet kommunikasjonen med meg (Cuoco & Curcio, 2001). Denne avsnittet avslører også at beskrivelsen av de ulike AMPS nivåene beskriver mange av tegningen til elevene. Dette gir en indikasjon på at man kan stadfeste en elevs AMPS nivå ved å studere tegninger av problemløsning i matematikk, men dette krever et større studie.

5.2 STRKTURELT BEVISSHETSNIVÅ OG EVNEN TIL Å LØSE OPPGAVER RIKTIG

Mulligan og Michelmore (2013) fant en stor korrelasjon mellom elevers strukturelle bevisshetsnivå og deres evne til å løse oppgaver i matematikk riktig. Desto høyere strukturelt bevisshetsnivå desto bedre resultater på matematikkoppgavene *(s. 35).* Hos mine elever stemmer dette tildeles, men ikke eksakt. Av mine elever er det Lilly, på delvis strukturelt nivå, som har minst suksess når det gjelder å løse oppgavene korrekt, med kun en av fire riktig. Gustav, på emergent nivå, løste to oppgaver korrekt. Hans strategi med å telle, sjekke og resjekke, kompenserte muligens for hans lave bevissthet omkring matematisk struktur og mønster, men dette er kun en antakelse.

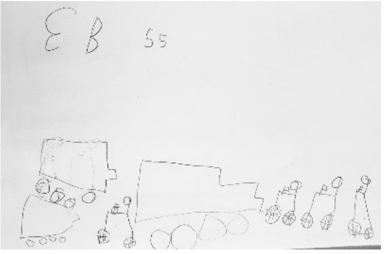
Lars, eleven på strukturelt nivå, løste alle fire oppgavene korrekt og Arnt, eleven på advanced nivå løser tre av fire korrekt. Analysen av Arnts løsning på bilbaneoppgaven viser en sannsynlighet for at det var jeg, intervjueren, som gjorde at Arnt ikke løste denne oppgaven korrekt. I det jeg stilte et oppklaringsspørsmål om hva han gjorde, og han stoppet opp for å forklare, så ble fortsettelsen hans feil. Dersom jeg hadde latt han fullføre tegningen slik han var på vei til å gjøre og stilt spørsmålet i etterkant, så er det en stor sannsynlighet for at resultatet hans på denne oppgaven ville vært korrekt. Denne uttalelsen baserer seg på at begynnelsen av oppgavenløsningen (Linje 4.65 og 4.66) var helt korrekt utført. Jeg legger derfor ikke stor vekt på suksessratens ulikheter mellom Lars og Arnt.

Funnene mine viser, på lik linje som Mulligan og Michelmore (2013), en sammenheng mellom våkenhet for struktur og mønster og evnen til å løse problemløsende matematikkoppgaver korrekt med en betydelig større suksess for en vellykket problemløsning for elever på et høyere AMPS nivå. Dette er ikke et overraskende resultat i og med at en mer utviklet strukturell tankegang innebærer forståelse for romlige- og numeriske strukturer som er til stor hjelp i en problemløsningssituasjon. Jeg går nærmere inn på hvordan denne våkenheten og forståelsen gjør seg gjeldende, i de neste avsnittene.

5.3 FOKUS PÅ DET MATEMATISKE

I et tidligere studie fant Mulligan, Mitchelmore, Outhred & Russel (1997), at elever som presterte lavt på matematikkoppgaver produserte dårlig organiserte pictorale eller ikoniske representasjoner, mens elever som presterte godt i matematikk produserte velorganiserte og abstrakte tegninger gjerne også med matematiske notasjoner (Biddulph & Carr, 1997). Mulligan og Michelmore (2009) hevder at det å være våken for strukturer gjør at fokuset i oppgaven blir på det matematiske. De har funnet at elever på lave nivåer for våkenhet for struktur og mønster, ofte fokuserer på den ikke matematiske informasjonen i oppgaven, i kontrast til de på et høyere AMPS nivå.

Det er en forskjell i forhold til abstrakthet og fokus i tegningen hos mine elever. Gustav produserte i *garasjeoppgaven* svært detaljerte representasjoner av biler og sykler. Disse detaljene er uvesentlige for problemløsningen, men han velger å bruke tid på å tegne de allikevel.



Kontrastene er stor til Lars sin løsning på *kakeoppgaven,* hvor han helt ignorerer å tegne en kake og bare tegner fyrstikkene og fordeler disse mellom de ulike kakelagene.

Lars sitt fokus er på det matematiske og han evner å konsentrere seg om de nødvendige detaljene, og ignorerer det som ikke omhandler det matematiske.

Arcavi (2003) fant i en studie at visualisering har stor innflytelse på evnen til å løse matematikkoppgaver korrekt. Han omtaler visualisering ikke bare som evnen til å produsere mentale bilder, men også evnen til å overføre disse bildene på papir eller til tekniske hjelpemidler med intensjonen om å framstille- og kommunisere informasjon.

Lilly produserte ganske abstrakte tegninger, men hun klarte ikke å hente ut informasjonen fra tegningen sine og kommunisere dette til meg. Hun klarer ikke å fokusere på de matematiske detaljene i matematikkoppgavene. Dette kommer veldig tydelig fram i hennes løsning av *garasjeoppgaven* hvor hun ikke klarer å forholde seg til alle rammevilkårene i oppgaven. Hun velger fram et rammevilkår, 22 dekk, og forholder seg kun til dette (Linje 2.71 – 2.73).

Kontrasten mellom Lilly og Arnt er også stor i forhold til dette. Hos Arnt var to av tegningene kun brukt i hans kommunikasjon med meg slik at han kunne bedre forklare sin tankegang. Hans visualisering ble overført til papir i den hensikt å kommunisere informasjon. Han hadde allerede en løsning på oppgaven og uttrykte dette i intervjuet av *kakeoppgaven* ved å si at dette var enkelt fordi han bare kunne legge sammen de to kakelagene han visste høyden på, og subtrahere dette fra kakens totale høyde (Linje 4.81 – 4.93).

Arnt demonstrerer her en dypere våkenhet for sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon og bruker denne kunnskapen til å løse oppgaven. Han gir uttrykk for å ha en *strukturell tankegang* som forklart av Mulligan og Michelmore (2009) som det å inneha en dypere våkenhet for sammenhengene mellom ulike matematiske begrep og hvordan denne forståelsen kan brukes for å løse ulike matematiske utfordringer.

5.4 SKJEMATISK ELLER IKKE SKJEMATISK

I dette avsnittet vil jeg se på sammenhengen mellom elevenes evne til å tegne skjematisk og deres AMPS nivå samt sammenligne elevenes løsninger i forhold til dette. En tegning er *skjematisk* når den viktige matematiske informasjonen i oppgaven blir tegnet riktig, slik at den nødvendige matematiske informasjonen blir synlig i tegningen. Disse elementene vil da hjelpe eleven å løse den problembaserte matematikkoppgaven (Edens & Potter, 2007). En skjematisk tegning har også en orientering som står i samsvar med oppgaveteksten (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Hegarty og Kozhevnikov

(1999) inkluderer også ytringer og gestikulering som viser romlige relasjoner mellom objektene i oppgaven i sin definisjon av en skjematisk besvarelse.

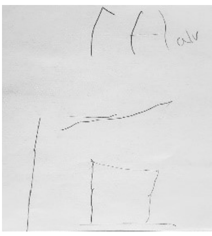
Mine fire elever presterte ulikt på oppgavene, men som nevnt tidligere viser resultatene en klar tendens med at de to på laveste nivå i forhold til *AMPS*, løste tre oppgaver til sammen, mens de to på øverste *AMPS nivå* til sammen løste sju av oppgavene riktig. I analysekapittelet presenterte jeg en tabell over analysefunnene mine. Dette er et utdrag fra denne tabellen som presenterer AMPS nivå hos elevene i studien min samt om tegningen deres var skjematisk eller ikke:

	AMPS NIVÅ	**Riktige løsninger**	**Skjematiske tegninger**
GUSTAV	*Emergent*	2	2
LILLY	*Delvis strukturell*	1	1
LARS	*Strukturell*	4	4
ARNT	*Advanced*	3	3

Tabell 6 AMPS nivåer, vellykkethet og skjematiske tegninger

Det å tegne skjematisk har sterk forbindelse til romforståelse fordi det handler om å identifisere og deretter tegne elementene riktig i forhold til hverandre, altså må de romlige elementene portretteres riktig. Eden og Potter (2006) fant at økt romforståelse korresponderte med en økt vellykkethet i å løse problemløsende matematikkoppgaver. Det å inneha romforståelse handler om visualisering, orientering og form. Visualisering innebærer evnen til å konstruere mentale bilder og å kunne mentalt rotere disse for å inspisere objektene fra en annen vinkel. Orientering omhandler evnen til å forflytte seg selv mentalt for å inspisere noe nærmere. Form omhandler kunnskap om geometriske former og sammenhengene mellom disse (van Nes & van Eerde, 2010).

Mulligan og Michelmore (2013) mener at det å inneha strukturell tankegang innebærer å være våken for både romlige strukturer og numeriske strukturer. De påpeker også at en elev på et lavere AMPS nivå vil konsentrere sin tankegang omkring det visuelle og støtte seg til dette, mens en på et høyere AMPS nivå vil støtte seg til det matematiske (J. T. Mulligan & Mitchelmore, 2013). Dette kommer godt fram i Gustav sin løsning av *kakeoppgaven*:



Elementene i hans tegning, kaker og fyrstikker, står ikke i forhold til hverandre og han ender opp med å støtte seg til det visuelle i sin egen tegning. Når da dette er romlig uproporsjonert, ikke skjematisk, blir også konklusjonen hans helt feil (Linje 1.77 – 1.82).

Jeg observerte noe lignende hos Lilly, men på en litt annen måte fordi hun i begynnelsen av oppgaveløsningen på flere av oppgavene, evnet å forholde seg til relasjonene mellom de romlige elementene. Dette vises godt på *bilbaneoppgaven* hvor hun tydelig teller til fem mellom hvert flagg, men så evner hun ikke å sette dette i relasjon til antall bilbanebiter. Selv om hun telte til fem mellom flaggene så støttet hun seg til det visuelle når hun ble spurt om hvor mange bilbanebiter hun hadde tegnet. Hun kom fram til at det er ni og ikke førti som hun egentlig har tegnet (Linje 2.109 – 2.113). Hun manglet forståelse for at rommet mellom flaggene representerte fem bilbanebiter og ikke en.

Lars støtter seg også til det visuelle i tegningene sine og i og med at alle tegningene var skjematiske samt at han visste hva de ulike objektene representerte, så ble også resultatene hans riktige. Lars demonstrerte også i *legotårnoppgaven*, at han visualiserte oppgaven mentalt før han begynte å tegne ved å gestikulere med fingeren og peke på ulike steder på arket da han klargjorde for seg selv hvordan legotårnet så ut (Linje 3.70).

Å visualisere noe mentalt, er en komponent i det å inneha romforståelse og både Lars og Arnt viser tydelige tegn på å visualisere. Hos Arnt var tegningen som nevnt tidligere, uvesentlig i to av oppgaveløsningene, og han hadde allerede løst oppgavene mentalt før han tegnet. Det er dermed en stor kontrast i hvordan elevene støtter seg til sine arbeidstegninger og hvordan de evner å holde rede på de rommelige elementene i oppgavene. Dette underbygges av van Nes og de Lange (2007) som fant at en større våkenhet for romlig struktur, gir en bedre evne til å resonnere for å finne riktig mengde (Nes & de lange, 2007).

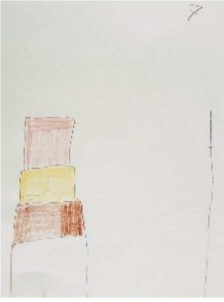
5.5 OVERGANGER MELLOM ULIKE REPRESENTASJONSSYSTEM

I dette avsnittet vil jeg diskutere sammenhengene mellom elevenes AMPS nivå og deres evne til å foreta overganger mellom ulike representasjonssystemer. Ramond Duval (2006) hevder at ingen matematisk prosess kan utføres uten å bruke semiotiske system for representasjon, fordi matematisk prosessering alltid innebærer å erstatte noen semiotiske representasjoner for andre. Videre fremhever han at matematiske objekter ikke er til å ta og føle på og dermed kan matematikk fort bli for abstrakt. Duval (2006) har identifisert fire representasjonssystemer og mine elever skal evne å transformere mellom to av disse representasjonssystemene. De skal bevege seg fra muntlig tale/skriftspråk som Duval (2006) betegner som multifunksjonell diskursiv representasjon/MFD, til ikonisk tegning som betegnes som multifunksjonell ikke diskursiv representasjon/MFID (Duval, 2006).

Alle elevene i min studie hadde vellykkede transformasjoner fra MFD TIL MFID men det er ikke tvil om at de på et høyere AMPS nivå lyktes bedre, som nevnt under avsnittet *Bruk av tegningene.*

Mulligan og Michelmore (2009) definerer *struktur* som hvordan de ulike elementene er organisert og relatert til hverandre, og det å inneha *strukturell tankegang* som å ha en dypere våkenhet for sammenhengene mellom ulike matematiske begrep og hvordan denne forståelsen kan brukes for å løse ulike matematiske utfordringer. En større våkenhet for mønster og struktur innebærer å inneha en større evne til å se numeriske strukturer så vel som romlig struktur.

For å kunne gjøre en vellykket transformasjon må altså mine elever identifisere de matematiske objektene i de problemløsende oppgavene, se sammenhengen mellom disse og representere objektene riktig i et nytt representasjonssystem. De må erstatte en semiotisk representasjon med et annet. I kakeoppgaven tegnet Lilly de ti fyrstikkene ved siden av en kake, men hun hadde ikke gitt de ti fyrstikkene et matematisk innhold.



De er ikke matematiske objekter for henne og bidrar derfor ikke positivt i hennes problemløsning, men heller tvert imot forvirrende fordi hun ville bruke *prikker på arket* som sin måleenhet. Hun bruker sine egenproduserte prikker til å finne ut hvor høyt bananlaget er, og sjekket sjokoladelagets høyde med samme metode. Selv om Lilly får vite informasjonen om at sjokoladelaget i kaken er like høyt som to fyrstikker, så ignorerer hun denne informasjonen og konsentrerer seg heller om å måle prikker på sjokoladelaget så vel som bananlaget.

Hun ender opp med at begge er sju, men ikke sju fyrstikker. Fyrstikkene har ikke blitt en måleenhet for henne, de har ikke innhold og hun tegner dem fordi de står i oppgaveteksten (Linje 2.142 – 2.147). Hun har ikke oppdaget den matematiske strukturen i oppgaven og satt kake og fyrstikker i relasjon til hverandre.

Dette er i stor kontrast til Lars både i samme oppgave, *kakeoppgaven* og også i *legotårnoppgaven.* Som nevnt tidligere ignorerer han helt å tegne en kake og fordeler kun fyrstikkene mellom de ulike lagene i *kakeoppgaven* (Linje 3.53 til 3.60). I legotårnoppgaven tegner han alle de fjorten klossene, men begynner ikke å telle fra den nederste klossen, men fra den tredje klossen. Han avslutter tellingen på den nest øverste klossen og ignorerer dermed både de to svarte klossene nederst og den røde øverst (Linje 3.78). Han har gitt klossene innhold og identifisert det matematiske objektet som er av interesse for å finne svar på oppgaven. Han er våken for den matematiske strukturen i oppgaven og ignorerer elementene uten betydning for oppgaveløsningen.

Som nevnt tidligere fokuserer elevene på et høyere AMPS nivå på det matematiske i oppgavene og har en bedre utviklet strukturell tankegang som gjør at de ser sammenhenger mellom matematiske begreper (J. Mulligan & Mitchelmore, 2009). Dette blir veldig synlig hos Arnt som uttrykte seg med eksplisitte regnestykker på to av oppgavene, *kakeoppgaven* (Linje 4.91 – 4.93) *og legotårnoppgaven* (Linje 4.120 – 4.123). Med disse to uttalelsene demonstrerte Arnt en forståelse for sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon. Disse uttalelsene gjør også at jeg mener at Arnt kunne gjort en vellykket transformasjon til Monofunksjonell diskursiv representasjon, MOFD i form av skriftlig utregning med tallsymboler, dersom han hadde blitt bedt om det.

Det er evnen til å identifisere de matematiske objektene som gjør at elevene på de to øverste AMPS nivåene lykkes bedre med sin overføring enn de to på de lavere AMPS nivåene. De fokuserer mer på, samt evner å forstå, det matematiske i oppgaven, slik at det som er nødvendig informasjon blir med over fra ett representasjonssystem til et annet.

6 KONKLUSJON

Så hva har jeg egentlig funnet ut ved å undersøke sammenhengen mellom elevers bevissthetsnivå for struktur og mønster og hvordan de løser ulike matematikkoppgaver ved hjelp av tegning? Jeg vil påstå at denne undersøkelsen gir innsikt som kan hjelpe lærere med å forstå elevers matematikkutfordringer og tilrettelegge for en undervisning som favner flere elever. Undersøkelsen min indikerer at det er en korrelasjon mellom elevenes suksess i problemløsning og deres AMPS nivå hvor et høyere AMPS nivå fører til økt vellykkethet.

Selv om jeg ikke kunne finne en direkte teoretisk forbindelse mellom hvordan elevene bruker tegningen sin og deres AMPS nivå, gav undersøkelsen en indikasjon på at elever på et høyere AMPS nivå varierer mer mellom ulike bruksmåter: manipulativer, støttesystem eller i kommunikasjonen med andre, mens de på et lavere AMPS nivå holdt seg til en bruksmåte, som et manipulativ (Saundry, 2006). Denne mulige sammenhengen kan være verdt å undersøke i en større studie for å avdekke om det er et behov for at lærere vektlegger det å utvide bruksområdet for tegninger i problemløsning, eller om det er uvesentlig for suksess.

Undersøkelsen gav også en indikasjon på at Mulligan og Michelmores (2009) beskrivelse av de ulike AMPS nivåene, også kan beskrive tegningene til elevene. Dette betyr at man også har mulighet til å identifisere AMPS nivået til eleven ved å studere tegningene, i alle fall til en viss grad. En større studie med mer tid og flere elever kunne avdekke muligheten til å etablere nivåbeskrivelser av elevers tegninger ved problemløsendematematikkoppgaver, med utgangspunkt i Mulligan og Michelmores (2009) AMPS nivåer.

Resultatene av undersøkelsen viser en sammenheng mellom AMPS nivå og romforståelse i form av at et høyere AMPS nivå førte til en større sannsynlighet for skjematisk tegning som igjen har en positiv korrelasjon til romforståelse (Edens & Potter, 2007). Det å inneha en bedre forståelse for rom, førte til at de ulike matematiske elementene i oppgavene ble portrettert riktig i forhold til hverandre, slik at tegningene gav god visuell støtte i problemløsningen. Som nevnt tidligere er visualisering i form av å se for seg ting mentalt, en del av det å inneha romforståelse. Undersøkelsen gav en positiv korrelasjon mellom mental visualisering og et høyere AMPS nivå ved at elevene på et høyere AMPS nivå visualiserte flere av oppgavene før de tegnet, mens de på et lavere AMPS nivå støttet seg til det visuelle i sine arbeidstegninger.

Analysen min indikerte også at det er en korrelasjon mellom AMPS nivå og evnen til å identifisere de matematiske objektene i oppgaven og overføre disse videre i et nytt representasjonssystem. Elevene på et høyere AMPS nivå lyktes bedre med å identifisere de matematiske objektene og transformere disse fra multifunksjonell diskursiv representasjon/MFD til multifunksjonell ikke diskursiv representasjon/MFID (Duval, 2006). De på et lavere AMPS nivå tegnet detaljene i oppgaveteksten, men strevde enten med å gi de ulike objektene et matematisk innhold eller å fullføre oppgaven innenfor rammene i oppgaveteksten. Dette førte til at deres overføring ble uten innhold og dermed til mindre hjelp i oppgaveløsningen. Elevene på et høyere AMPS nivå gav de ulike objektene i tegningen sin det riktige matematiske innholdet i forhold til oppgaveteksten, og klarte dermed å løse de aller fleste oppgavene riktig. Deres fokus var på det matematiske. De fokuserte på strukturene i oppgaveteksten og evnet å overføre det nødvendige til tegningene sine. Det ble også tydeliggjort en forståelse for sammenhengen mellom de to matematiske begrepene Addisjon og Subtraksjon hos Arnt, eleven på det øverste AMPS nivået. I kakeoppgaven finner Arnt fram til tykkelsen på bananen ved å addere de to andre kakelagene han vet tykkelsen på, for deretter å finne forskjellen mellom hele kaken og summen av sjokolade- og jordbærlaget (Linje 4.89 til 4.93).

Med disse resultatene kan jeg konkludere med at det er sammenhenger mellom elevenes AMPS nivå og hvordan de løser problemløsende matematikk oppgaver ved hjelp av tegning. Samtidig er det vanskelig å si om det er et høyere AMPS nivå som fører til bedre romforståelse, ett større fokus på det matematiske i oppgaveteksten, en bedre evne til å identifisere de matematiske objektene eller om det er motsatt og at disse egenskapene fører til et høyere AMPS nivå. Det som er uten tvil, er at disse egenskapene påvirker hverandre og fører til bedre resultater i matematikk.

Så hvordan kan da en lærer bruke denne informasjonen for å bedre elevers utbytte av undervisningen? Mulligan og Michelmore (2009) definerer *matematisk mønster* som enhver forutsigbar regularitet som involverer tall, rom eller måling. Med *struktur* mener de hvordan de ulike elementene er organisert og relatert til hverandre. Ved å jobbe systematisk med å sette søkelys på strukturer og mønster, økes sannsynligheten for at sammenhenger i matematikken åpenbare seg for elever og deres matematiske forståelse blir dypere. Det å inneha strukturell tankegang omfatter som nevnt tidligere, både romlig struktur og numerisk struktur. Oppgaver som muliggjør oppdagelse av de store ideene i matematikk som for eksempel titallsystemet oppbygging. Hvilket siffer endrer seg dersom man adderer eller subtraherer en, ti eller hundre? Oppgaver som utfordrer romforståelse og mental visualisering som ved geometri og mønsteroppgaver vil kunne bidra til at elevene også blir bedre til å løse tekstoppgaver. Oppgaver som vektlegger numeriske strukturer som det å telle, gjenkjenne mengder, gruppere, dele opp og å estimere, vil være svært viktig i undervisningen. Læreren kan også sette søkelys på det å identifisere de matematiske objektene i tekstoppgaver slik at elevene som har en tendens til å vektlegge det overfladiske, får hjelp til å finne det som er viktig.

Min studiet omfattet kun fire elever på 2. trinn og kan dermed ikke sies å gjelde for alle elever, men det gir en indikasjon som det er verdt å undersøke nærmere. Det ville vært svært interessant å gjøre ett større studie med flere elever for å gi en dypere forståelse for disse sammenhengene og muligens avdekke flere. En større studie vil også, som nevnt tidligere, gi muligheten til å etablere nivåbeskrivelser av tegninger i problemløsning.

Det ville også vært svært interessant gjøre en intervensjonsstudie hvor et undervisningsopplegg som omhandler mønster og struktur, implementeres i undervisningen hos en større gruppe elever med en kontrollgruppe. Dersom man da har en før- og ettertest med problemløsende matematikkoppgaver, vil man kunne si med mer sikkerhet om oppgaver med struktur og mønster, påvirker resultater i problemløsning og på hvilken måte. Dersom man i tillegg har kartlagt elevenes AMPS nivå, vil man også kunne se om det hjelper/ikke hjelper for elever på ulike nivå. En slik studie ville vært interessant lesing for både lærere i undervisningssituasjoner og for utdanningsdirektoratet i videre jobbing med læreplaner i matematikk.

7 KILDER

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *An International Journal, 52*(3), 215-241. doi:10.1023/A:1024312321077

Arksey, H., & Knight, P. (1999). *Interviewing for social scientists : an introductory resource with examples*. In.

Ary, D., Jacobs, L. C., & Razavieh, A. (1996). *Introduction to research in education* (5th ed. ed.). Fort Worth: Harcourt Brace College.

Battista, M. T. (1999). The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6*(3), 170-177.

Bernardo, A. B. I. (1999). Overcoming Obstacles to Understanding and Solving Word Problems in Mathematics. *Educational Psychology, 19*(2), 149-163. doi:10.1080/0144341990190203

Biddulph, F., & Carr, K. (1997). *People in mathematics education : Proceedings of the twentieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated, 7-11 July 1997 : Vol.1* (Vol. Vol.1). Melbourne: MERGA.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Cohen, L., Morrison, K., & Manion, L. (2018). *Research methods in education* (8th ed. ed.). London: Routledge.

Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (2001). *The roles of representation in school mathematics* (Vol. 2001). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1 2), 103-102), p.103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Edens, K., & Potter, E. (2007). The Relationship of Drawing and Mathematical Problem Solving: Draw for Math Tasks. *Studies in Art Education, 48*(3), 282-298. doi:10.1080/00393541.2007.11650106

English, L. D., & Mulligan, J. T. (2013). *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*. In Advances in Mathematics Education.

The Future of the Teaching and Learning of Algebra. (2004). (Vol. 8). Dordrecht: Springer Netherlands, Dordrecht.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689. doi:10.1037/0022-0663.91.4.684

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the Early Grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teacers of Mathematics.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning through Patterning Activities. In (pp. 231-258).

Morrison, K. (2013). Interviewing children in uncomfortable settings: 10 lessons for effective practice. *Educational Studies, 39*(3), 320-337. doi:10.1080/03055698.2012.760443

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. doi:10.1007/BF03217544

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 29-45). Dordrecht: Springer Netherlands.

Nes, F. T., & de lange, J. (2007). Mathematics education and Neurosciences: Relating Spatial Structures to the Development of Spatial Sense and Number Sense. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*.

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Beverly Hills, Calif: Sage.

Saabye, M., & Pedlex. (2019). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 : grunnskolen* (1. utgave. ed.). Oslo: Pedlex.

Saundry, C. (2006). Drawing as problem-solving : young children’s mathematical reasoning through the act of drawing. In: The University of British Columbia.

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 117-133. doi:10.1016/S0732-3123(02)00106-2

Utdanningsdirektoratet. (2020). Nasjonalprøve i regning 5. trinn 2019. Retrieved from https://pgsc.udir.no/kursweb/content?contentItemId=48348877&marketplaceId=624075&selectedLanguageId=1

van Nes, F., & van Eerde, D. (2010). Spatial Structuring and the Development of Number Sense: A Case Study of Young Children Working with Blocks. *Journal of Mathematical Behavior, 29*(3), 145-159. doi:10.1016/j.jmathb.2010.08.001

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K., & Nurmi, J. E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology, 28*(4), 409-426. doi:10.1080/01443410701708228

8 VEDLEGG

8.1 GODKJENNING FRA NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Elevers strukturelle nivå og tegning i problemløsende matematikk

Referansenummer

544378

Registrert

05.09.2018 av Birgit Irene Aune - birgitia@stud.ntnu.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet NTNU / Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap (SU) / Institutt for lærerutdanning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Magdalini Lada, magdalini.lada@ntnu.no, tlf: 73412375

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Birgit Irene Aune, birgit.i.aune@gmail.com, tlf: 95490430

Prosjektperiode

05.09.2018 - 30.06.2020

Status

24.10.2018 - Vurdert

Vurdering (1)

24.10.2018 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivning så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 24.10.2018, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdater meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.6.2020.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp behandlingen ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Pernille E. Grøndal
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

8.2 SAMTYKKESKJEMA

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet

" Elevers strukturelle nivå og tegning i problemløsende matematikk"?

Til foresatte for elever på 2. trinn ved Stabbursmoen skole

Som dere vet er jeg er masterstudent ved NTNU, Institutt for Lærerutdanning, i tillegg til å være lærer for deres barn her på skolen. Jeg skal gjennomføre et kort forskningsprosjekt. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Jeg håper du vil bidra til at vi får mer kunnskap omkring læring av matematikk, ved å la ditt barn delta i forskningsprosjektet mitt.

Formål

I masteroppgaven min ønsker jeg å se nærmere på sammenhengene mellom barns strukturelle nivå og hvordan de tegner når de løser problemløsende oppgaver i matematikk. Jeg ønsker å undersøke hvilke sammenhenger som finnes, samt om de som ikke klarer å tegne, allikevel klarer å løse oppgaven og forklare hvordan de tenker.

Resultatene av studien vil bli brukt i en eksamensbesvarelse/masteroppgave ved NTNU.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

NTNU, Institutt for Lærerutdanning er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Ditt barn er i riktig aldersgruppe for en undersøkelse av sammenhengen mellom struktur og problemløsing.

Ditt barn har i sitt arbeid med matematikk, erfaring fra å tegne for å løse en matematikkoppgave.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å la ditt barn delta i undersøkelsen vil han/hun gjøre 5 oppgaver for å avdekke strukturelt nivå for deretter å løse opptil 5 problemløsende oppgaver tilpasset barnets alder/erfaring.

Jeg vil også gjøre et personlig intervju for å avdekke tanker omkring detaljene i hans/hennes tegninger. Jeg vil også forsøke å avdekke tankeprosessen i arbeidet med matematikk oppgavene.

Jeg ønsker å gjøre videoopptak av intervjuet. Dette fordi gestikulering og kroppsspråk blir en viktig del av analysen min. Videopptak vil bli slettet så snart forskningsprosjektet er avsluttet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du/ditt barn velger å delta, kan du/ditt barn når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert.

Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Birgit Aune og veiledere/forelesere vil ha tilgang til datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres med medstudenter.
- Navn vil bli anonymisert og erstattet med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrig data. Lagret data vil være innelåst eller/og kryptert på pc.
- Masteroppgaven blir publisert men alt datamateriell blir anonymisert slik at ingen vil klare å gjenkjenne ditt barn ved lesing av masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2020. Videopptak vil bli slettet så snart intervjuet er transkribert. Alt datamateriell blir anonymisert ved publisering av oppgaven og deretter slettet.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NTNU, Fakultet for Samfunns- og utdanningsvitenskap, Institutt for lærerutdanning, har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- NTNU, Institutt for Lærerutdanning ved Eivind Kaspersen (eivind.kaspersen@ntnu.no)/Mari-Ann Igland (mari.a.igland@ntnu.no)
- Vårt personvernombud: *Thomas Helgesen,* thomas.helgesen@ntnu.no, 93079038
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Jeg håper du vil samtykke til at ditt barn kan delta i prosjektet slik at vi kan lære mer om sammenhengen mellom strukturelt nivå og hvordan elever tegner for å løse oppgaver. Tidligere forskning har vist en stor sammenheng mellom struktur og tallforståelse. Dette vil bidra til mer kunnskap også om sammenhengen mellom strukturen og tegning for problemløsing. Jeg er avhengig av at du samtykker på alle punktene for å kunne bruke data fra ditt barn i min forskning.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig Magdalini Lada Student Birgit Aune

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *(sett inn tittel)*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i personlig intervju for å avdekke tanker omkring løsning av matteoppgaver
- ☐ å delta i å gjøre 5 oppgaver for å avdekke strukturelt nivå
- ☐ å delta i å gjøre opptil 5 problemløsende oppgaver
- ☐ at det blir gjort video-opptak av intervjuet

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni 2020

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.3 INTERVJUGUIDE

Tema 1: Detaljer i elevtegningen.

Spørsmål som avdekker hvorfor de ulike detaljene i elevtegningen er der og hva de betyr. Eks:

1. Hva betyr de ulike detaljene?
2. Forklar hvorfor du har tegnet den akkurat slik.

Tema 2: Tanker

Spørsmål for å avdekke elevens tanker da han/hun skulle løse problemløsende matematikkoppgaver. Eks:

1. Hvordan tenkte du da du hørte/ løste oppgaven?
2. Hvordan ser det ut i tankene dine? Har du et bilde? Beskriv

8.4 FORKLARING AV TEGNSETTING I TRANSKRIBERT INTERVJU

... = reglen fortsetter til

() = beskrivelser av kroppsspråk, gestikulering eller hva eleven gjør underveis

.... = begynnelsen av dialogen er utelatt

Jeg har nummerert transkribert tale slik at alle som begynner med samme siffer, er fra intervju med samme barn:

1. = Gustav
2. = Lilly
3. = Lars
4. = Arnt

NTNU
Kunnskap for en bedre verden