Vebjørn Stadsvoll

Et design av en didaktisk situasjon for introduksjonen av trigonometri etter prinsippene i didaktisk ingeniørvirksomhet

Masteroppgave i Lektorutdanning for realfag for trinn 8-13
Veileder: Heidi Strømskag
Juni 2020

Masteroppgave

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Vebjørn Stadsvoll

Et design av en didaktisk situasjon for introduksjonen av trigonometri etter prinsippene i didaktisk ingeniørvirksomhet

Masteroppgave i Lektorutdanning for realfag for trinn 8-13
Veileder: Heidi Strømskag
Juni 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på en femårig lektorutdanning ved NTNU. Jeg valgte å skrive om design av undervisning, siden jeg har syntes dette har vært en vanskelig del av læreryrket. Det har derfor vært givende å få utfordret meg selv på nettopp dette. Dette prosjektet har vært en lang og utfordrende prosess, men samtidig utrolig lærerik. Gjennom denne oppgaven har jeg fått noen av verktøyene som må til for å bli en lærer som kan forbedre sin egen praksis.

Året 2020 har vært spesielt for mange med COVID-19 pandemien som har rammet verden. Som alle andre har også denne situasjonen påvirket meg. Det har blitt lange timer med hjemmekontor, da biblioteker og lesesaler har vært stengt. Corona har blitt snakket om til det utrettelige, og har også funnet veien til forordet av denne masteroppgaven. Grunnen til dette er at etter omstendighetene var jeg nødt til å tilpasse oppgaven min, noe leseren bør være klar over. Den opprinnelige planen for denne oppgaven var å designe en undervisningsøkt som skulle testes i en klasse på en videregående skole. Da dette ikke lenger var en mulighet, ble jeg i samråd med min veileder nødt til å gjøre noen endringer. Oppgaven tar derfor kun for seg design av matematikkundervisning og det forarbeidet som ligger til grunn for dette. For å gjøre opp mangel på empirisk data og analyse av dette ble det gjort en beslutning til å utvide designdelen til å omhandle en didaktisk sekvens bestående av fire undervisningsøkter.

Til tross for omstendighetene tror og håper jeg at denne oppgaven vil være en verdig slutt på min utdanning. Jeg vil takke min veileder Heidi for å være løsningsorientert i møte med en spesiell situasjon, samt gode tilbakemeldinger og diskusjoner. Jeg vil takke venner og familie som har heiet på meg hele veien. Til slutt vil jeg takke min kjæreste. Hjemmekontor hadde vært et utrivelig sted uten deg. Takk for korrekturlesning, støtte og oppmuntring.

Vebjørn Nordahl Stadsvoll

Oslo, juni 2020.

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg tatt for meg design av matematikkundervisning, spesifikt i emnet trigonometri. Designprosessen har vært informert av didaktisk ingeniørvirksomhet, med teorien om didaktiske situasjoner som rammeverk. Teorien for didaktiske situasjoner er en systemisk teori, der målkunnskapen står i sentrum. Man prøver å designe undervisning der målkunnskapens funksjon kommer til uttrykk. Dette oppnår man gjennom en grundig epistemologisk analyse av kunnskapen. Didaktisk ingeniørvirksomhet er en forskningsmetode for forskning på design av matematikkundervisning. Poenget med didaktisk ingeniørvirksomhet er å forstå hvordan ulike prosesser er med på å påvirke læringen til elever gjennom å design undervisningssituasjonen som skal forskes på. I denne oppgaven er kun de delene som omhandler design og forarbeid tatt i bruk.

Forarbeidet til designet har innebåret en grundig analyse av målkunnskapen for den didaktiske situasjonen og den didaktiske forskningen på dette emnet. På den måten har jeg gjort et dypdykk i trigonometriens epistemologi og didaktikk. Dette har vært med på å forberede meg som skal undervise i dette emnet, samtidig som det vært grunnlaget for selve designet.

I designet har jeg prøvd å etterstrebe idealene i teorien om didaktiske situasjoner om at en målkunnskap kan representeres av et problem med en optimal løsning. Og at elevene skal være i stand til å finne fram til denne optimale løsningen på egenhånd, uten betydelig hjelp av læreren, noe som skal reflekteres i designet.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

I denne oppgaven skal jeg ta for meg design av undervisning om trigonometri. Trigonometri er et flere tusen år gammelt emnet, og har blant annet blitt studert i Mesopotamia, det antikke Hellas, India, den arabiske verden og i Europa (Bressoud, 2010). Det har vært utgangspunktet for store bragder som pyramidene i Egypt, og utforskning av verdensrommet i antikk astrologi (Green, 1977). I dag er trigonometri sentralt innenfor felt som vitenskap og teknologi for å beskrive periodiske fenomener. Til tross for denne rike historien og anvendeligheten, er trigonometri et emnet som både elever og lærere sliter med i skolesammenheng (Blackett & Tall, 1991; Kendal & Stacey, 1997; Weber, 2005; Thompson, 2008; Bressoud, 2010; Hertel og Cullen, 2011; Moore, Laforest & Kim, 2015). Emnet er preget av rigorøse prosedyrer og tillærte kalkuleringer. Som vi skal se i denne oppgaven er det i skolematematikken en uforholdsmessig stor vektlegging trekanttrigonometri. Og mindre fokus på de periodiske aspektene ved trigonometri, som er mer relevante for dagens matematikkelever (Bressoud, 2010; Hertel og Cullen, 2011).

Med dette utgangspunktet har jeg derfor bestemt meg for å undersøke hvordan man kan designe undervisningen av trigonometri. Dette vil jeg gjøre ved å designe en didaktisk sekvens der jeg tar for meg introduksjonen til trigonometri, som elevene ofte møter løpet av første året i videregående. Jeg har valgt å gjøre dette ved hjelpe av didaktisk ingeniørvirksomhet, som tar i bruk teorien om didaktiske situasjoner som teoretisk rammeverk. Til sammen utgjør disse en metode for design av og forskning på matematikkundervisning. Med dette som bakgrunn har forskningsspørsmålet for denne oppgaven vært:

Hvordan kan man designe en didaktisk situasjon for introduksjonen av trigonometri ved hjelp av didaktisk ingeniørvirksomhet?

1.1. Oppgavens oppbygning

Denne oppgaven starter med en introduksjon til det teoretiske rammeverket, teorien om didaktiske situasjon. I metodedelen vil jeg gå gjennom didaktisk ingeniørvirksomhet som er brukt for designet av den didaktiske situasjonen. Den neste delen av oppgaven er forberedende analyse som er første del av designprosessen. Her vil det foregå en epistemologisk analyse av trigonometri, en didaktisk analyse av undervisningen på emnet og en institusjonell analyse. Etter dette kommer design og a priori analyse, her vil selve designet av den didaktiske situasjonen bli beskrevet, hvor det inngår en analyse av hvordan jeg tror elevene vil respondere på designet. Avslutningsvis kommer det noen didaktiske refleksjoner som jeg har gjort meg løpet av denne oppgaven.

2. Teoretisk rammeverk: Teorien om didaktiske situasjoner

Det teoretiske rammeverket for denne oppgaven er *Teorien om didaktiske situasjoner* (TDS i det følgende). TDS ble utviklet fra begynnelsen av 70-tallet og ble initiert av Guy Brousseau. Hans ideer var i liten grad kjent utenfor Frankrike før teorien for første gang ble publisert på engelsk i 1997(Brousseau, 1997, som sitert i Artigue, Hespekian & Corblin-lenfant, 2014). Siden da har det vært en utvikling av begrepene som sammenfatter TDS. Denne utviklingen har særlig blitt motivert av et ønske om å studere ordinære klassesituasjoner (Artigue et al. 2014). Selv om det ultimate målet med TDS er å forbedre elevenes matematiske kunnskap, er det ikke eleven som står i sentrum av teorien. I TDS er det derimot hvilke forhold som må ligge til rette for å muliggjøre eller hindre læring i et didaktisk system, og hvordan man kan optimalisere disse systemene som blir prioritert (Artigue et al. 2014). I følge Artigue egner derfor teorien seg til bruk i forskning der man har som hensikt å undersøke design av undervisning og å forstå hvilke mekanismer som fører til læring i en didaktisk setting. Dette oppnår man ved at designet baserer seg på en rekke antagelser for hvordan elevenes progresjon vil være i en undervisningssituasjon. Hvordan disse antagelsene stemte over ens med det som faktisk skjedde i løpet av undervisningen er det som gir grunnlag for å si hvor godt et design var og hva som kunne vært bedre.

Sentralt for teorien er at et didaktisk system er organisert rundt ideen om situasjoner. Et *didaktisk system* er sammensetningen av alle komponentene som er med på å påvirke undervisning og læring i en undervisningssetting. Brousseau (1997, som sitert i Artigue et al. 2014, s. 1) beskriver en situasjon som «en viss organisasjon av objekter og personer som har et visst forhold mellom dem». I TDS er man interessert i *didaktiske situasjoner*, rettere sagt er at man i en undervisningssetting hele tiden befinner seg i en didaktisk situasjon. Denne didaktiske situasjonen blir igjen delt i mindre situasjoner som endrer seg i forskjellige faser av undervisningen. Enkelte av disse situasjonene er intensjonelt *adidaktiske*, sammenhengen mellom adidaktiske og didaktiske situasjoner vil bli illustrert senere i oppgaven etter at sentrale begreper og situasjoner er blitt definert.

Et hovedprinsipp innenfor metodologien til TDS er ideen at en matematisk kunnskap kan representeres av en situasjon bestående av et (eller flere) problem(er), som kan løses på en optimal måte ved hjelp av denne kunnskapen. En slik situasjon blir av Brousseau (1997) omtalt som en *fundamental situasjon*, og kan sies å være det overordnede problemet som går igjen gjennom hele undervisningssettingen (Artigue, 2015). Dette forutsetter at man identifiserer hvilke betingelser som må innfris for at situasjonen leder til den tilsiktede målkunnskapen, og videre hvordan en slik situasjon kan designes i en undervisningssetting (Strømskag, 2017b).

2.1. Sentrale begreper i TDS

For å forstå bruken av TDS i denne oppgaven er det noen sentrale begreper innenfor teorien som først må forklares.

Adidaktisk situasjon er en situasjon der eleven tar et matematiske problem som sitt eget og prøver å løse problemet uten intervensjon fra læreren og uten didaktisk resonnement. Det innebærer å løse problemet for dets indre logikk og uten å prøve å tolke lærerens intensjon med problemet. En elev bør altså ikke spørre seg «hva er det læreren vil med dette problemet?», men «hvilken kunnskap *trenger* jeg for å løse dette problemet?». I tillegg til å sørge for progresjon av en adidaktisk situasjon har også læreren ansvar for *devolusjon* av den adidaktiske situasjonen. Det innebærer å introdusere problemet, få elevene til å ta på seg ansvaret for å løse problemet på egenhånd, og informere om reglene som gjelder når elevene opererer i den adidaktiske situasjonen (Strømskag, 2020).

Didaktisk kontrakt er et begrep som referer til at interaksjonen mellom lærer og elev styres av et sett med regler som henger sammen med kunnskapen som står på spill. Disse reglene former et sett av gjensidige forpliktelser og er ofte implisitte. Under devolusjonen foregår det en implisitt forhandling mellom elev og lærer der ansvaret for å lære målkunnskapen, midlertidig blir overført fra lærer til elev. Et eksperiment utført ved IREM (Institutt for forskning på matematikkundervisning) i Grenoble illustrerte hvordan den didaktiske kontrakten og didaktisk resonnement påvirker elevenes responser på et problem. Forskerne i IREM stilte det følgende spørsmålet til 8 år gamle elever: «Det er 26 sauer og 10 geiter på en båt. Hvor gammel er kapteinen?» 76 av 96 elever svarte at kapteinen var 36 år gammel

(Brousseauet al., 2013). Dette illustrer hvordan elevene gjør et didaktisk resonnement for å komme fram til svaret. Selv om de åpenbart ikke er noen korrelasjon mellom antall dyr på båten og kapteinens alder, inngår det i den didaktiske kontrakten at læreren oppgir relevante opplysninger for å løse problemet. Slik gjennomfører elevene et didaktisk resonnement om at de må addere antall dyr for å komme fram til kapteinens alder, selv om dette ikke gir noen mening.

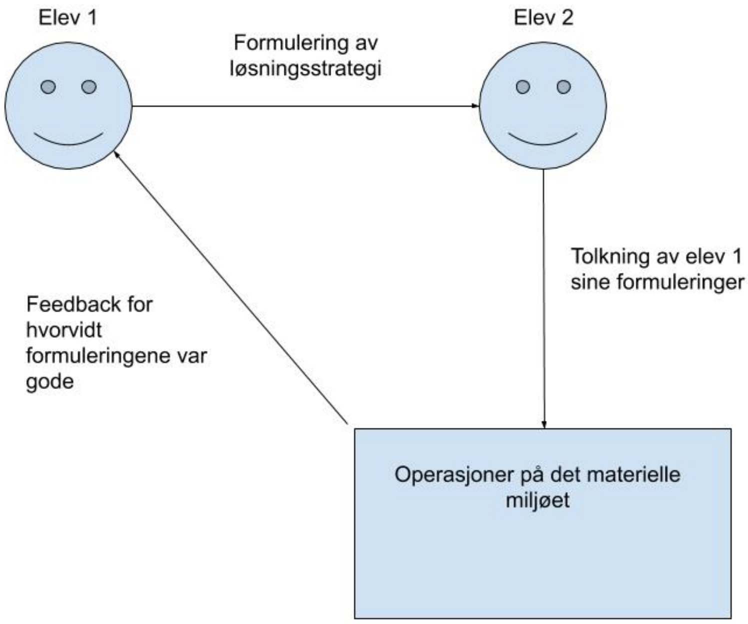
Et annet viktig begrep innenfor TDS er ideen om miljø. *Miljøet* består av den intellektuelle og materielle virkeligheten som elevene opererer i når de løser oppgaven innenfor den designede situasjonen. Funksjonen til miljøet er å gi feedback til elevene om hvorvidt deres responser er adekvate for at de skal ha en gradvis progresjon mot målkunnskapen (Strømskag, 2017a). Miljøet kan bestå av flere komponenter, som for eksempel: oppgaven som skal løses, materielle eller symbolske hjelpemidler, elevenes forkunnskaper, andre elever eller regler for å operere i en situasjon. Miljøet til en adidaktisk situasjon blir kalt et *adidaktisk miljø*. Et godt adidaktisk miljø skal gi feedback til eleven for hvorvidt en løsning er akseptabel med tanke på målkunnskapen. Dette innebærer å designe miljøet på en slik måte at elevene har et insentiv for å velge en løsningsstrategi som korresponderer med den tilsiktede kunnskapen (Strømskag, 2017a).

2.2. Faser i undervisningen, 4 situasjoner

I TDS starter undervisningen med devolusjon. Etter devolusjonen følger det fire situasjoner. For hver situasjon endres lærerens rolle og statusen på kunnskapen. De tre første situasjonene er intensjonelt adidaktiske: aksjonssituasjonen, formuleringssituasjonen og valideringssituasjonen. Den siste situasjonen er institusjonaliseringssituasjonen, og er ikke adidaktisk. Det følgende gir en kort beskrivelse av hver situasjon som beskrevet i Strømskag (2017b).

Aksjonssituasjonen er der elevene først engasjerer seg i det gitte problemet. Her skal elevene takle problemet på bakgrunn av dets indre logikk og uten lærerintervensjon. Elevene vil lage en representasjon av situasjonen i form av en implisitt modell av målkunnskapen. Denne implisitte modellen (eller forståelsen) av kunnskapen er utfallet av aksjonssituasjonen og vil være førende for den neste fasen.

Under *formuleringssituasjonen* skal elevene formulere en strategi for å operere på miljøet. Der elevene hadde en implisitt modell av målkunnskapen i forrige situasjonen, skal denne modellen nå gjøres eksplisitt. Typisk foregår dette ved at en elev (elev 1) skal få en annen elev (elev 2) til å operere på det materielle miljøet (se Figur 1). På den måten gjør elev 1 sin implisitte forståelse fra forrige situasjon eksplisitt ved å formulere en løsningsstrategi for elev 2. I denne situasjonen består miljøet av det materielle miljøet og elev 2. Elev 1 får feedback for hvorvidt sine formuleringer var gode ved å se på utfallet av elev 2 sine operasjoner på det materielle miljøet. Lærerens rolle i denne situasjonen er å hjelpe til med utvekslinger i klasserommet, samt å gjøre forskjellige observasjoner og formuleringer synlige for alle elevene.

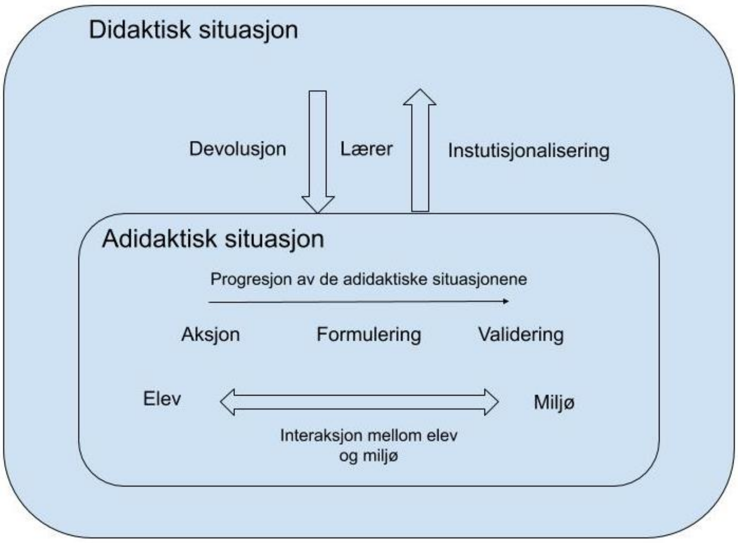


Figur 1. Modell av formuleringssituasjonen

Valideringssituasjonen er der elevene prøver å forklare et fenomen de har observert eller verifisere en formodning. I denne situasjonen fungerer lærerens rolle som lederen av en vitenskapelig debatt. Ideelt sett skal læreren kun gripe inn for å strukturere debatten eller for å få elevene til å bruke mer presise matematiske begreper.

Institusjonaliseringssituasjonen er den siste undervisningssituasjonen, og er i motsetning til de andre ikke adidaktisk. Det er her institusjonaliseringen som ble nevnt ovenfor trer frem. Her er lærerens rolle å informere studentene om formell matematisk terminologi og notasjon, og å trekke fram sentrale definisjoner og resultater for den kunnskapen som elevene har utviklet gjennom de foregående situasjonene. Slik går elevene gjennom en akkulturasjonsprosess som gjør at kunnskapen også kan brukes i andre settinger enn den gitte undervisningssituasjonen.

Figur 2 viser en modell av de forskjellige situasjonene i de forskjellige fasene i undervisningen, og sammenhengen mellom dem. Som man kan se befinner man seg hele tiden i den didaktiske situasjonen. I devolusjon gjør man overgangen fra ikke-adidaktisk til adidaktisk situasjon og i institusjonalisering motsatt, disse overgangene er lærerens ansvar. I de adidaktiske situasjonene har læreren ansvar for progresjonen fra aksjons- til valideringssituasjonen der læringen kommer som resultat av interaksjon mellom elev og miljøet. Imidlertid er det eleven som har læringsansvaret, et ansvar som ble tildelt elevene i devolusjonsfasen.



Figur 2. En modell som viser sammenhengen mellom didaktiske- og adidaktiske situasjoner med de forskjellige fasene

2.3. Læringsprosessen: en kombinasjoner av tilpasning og akkulturasjon

En karakteristikk ved TDS er synet på læring i matematikk som en kombinasjon av *tilpasning* og *akkulturasjon*. Tilpasning blir forklart ved: "the student learns by adapting herself to a milieu which generates contradictions, difficulties and disequilibria, rather as human society does. This knowledge, the result of the students' adaptation, manifests itself by new responses which provide evidence for learning." (Brousseau, 1997, s. 30, som sitert i Artigue et al. 2014). Tilpasning til kunnskap skjer altså ved elevenes interaksjon med miljøene i den adidaktiske situasjonen i form av responser. Videre sier Artigue at tilpasning ikke er nok alene, akkulturasjon er nødvendig for å koble elevenes responser til kunnskap som det er sosial og kulturell enighet om og som er institusjonelt legitimert. Denne akkulturasjonsprosessen kommer frem gjennom *institusjonalisering* i TDS. Under institusjonaliseringen er det lærerens ansvar å transformere responsene til elevene til mer formell matematisk kunnskap med konvensjonell notasjon, slik at kunnskapen kan bli brukt i andre situasjoner enn den som er designet av læreren (Strømskag, 2020).

3. Metode

Forskningsmetoden i denne oppgaven er didaktisk ingeniørvirksomhet (DI i det følgende). Rettere sagt ville muligens vært at DI er designmetoden til denne oppgaven. Dette er fordi DI som forskningsmetode er delt inn i fire faser, de to første av disse fasene omhandler designet av DI og er de som tas i bruk i denne oppgaven. De to siste fasene omhandler innsamling av data og analyse av disse, noe som ikke ble mulig å gjennomføre i denne oppgaven på grunn av Covid-19 pandemien, som nevnt i forordet. Senere i metodedelen vil hver av disse fasene bli forklart nærmere, der det er lagt mest fokus på de som er aktuelle for denne oppgaven.

For å få et godt innblikk i hva DI som forskningsmetode innebærer, samt hvordan den henger sammen med TDS vil jeg gi et kort sammendrag av den historiske utviklingen av DI i det følgende avsnittet.

3.1. Didaktisk ingeniørvirksomhets opprinnelse og kobling til TDS

DI oppstod i det didaktiske forskningsmiljøet i Frankrike. Forskerne var bekymret over en utvikling der man i stor grad tok i bruk forskningsmetoder fra andre fagfelt for forskning på matematikkundervisning (Margolinas & Drijvers, 2015). For eksempel var (og er fortsatt) det utbredt med metoder lånt fra psykologi som intervjuer, spørreundersøkelser (tester) og sammenligning av resultater fra pre- og post-test. De mente at matematikk som fagfelt måtte utvikle egne forskningsmetoder for å fange opp meningen med matematikkundervisning, nemlig formidlingen av matematisk kunnskap gjennom didaktiske systemer og interaksjonen mellom å lære bort noe og å lære noe (Artigue, 2015).

På den måten oppstod DI som metodologi for forskning der det inngår klasseromrealisering. Dette er nyttig siden det er et behov for det Bachelard (1937, som sitert i Artigue, 2015) kaller *fenomenteknikk*, det vil si produksjonen av fenomener du har lyst til å studere (i dette tilfelle didaktiske fenomener). Videre var det fordelaktig å ha en forskningsmetode for faktisk klasseromrealisering siden det gjorde at man kunne etablere et tettere bånd mellom forskning på og praksis knyttet til matematikkundervisning.

Samtidig som DI ble utviklet var TDS ledende innad i det franske didaktikkmiljøet (Artigue, 2015; Margolinas og Drijvers, 2015). Dette gjør seg synlig ved at mange av de teoretiske konstruktene, systemiske perspektivene og verdiene som DI baserer seg på kommer fra TDS. På samme måte som i TDS etterstreber man i DI å designe situasjoner der:

- Den matematiske målkunnskapen er en optimal løsning av problemet som skal løses (fundamental situasjon);
- Elevene har sammen mulighet til å nå denne optimale løsningen gjennom deres interaksjon med miljøet, uten særlig hjelp fra læreren (adidaktisk situasjon) (Artigue, 2015).

På samme måte som i TDS er også lærerens hovedansvar devolusjon og institusjonalisering i DI. Altså devolusjon av situasjonen til elevene, og institusjonalisering av kunnskapen som elevene utvikler etter møte med situasjonen. Dette bygger på oppfatningen om at læring er en prosess kombinert av tilpasning til og akkulturasjon av kunnskap. Tilpasning refererer til elevenes tilpasning til *miljøet* i en gitt situasjon, der kunnskap oppstår/utvikles gjennom interaksjon med miljøet; og akkulturasjon referer prosessen der læreren skal hjelpe elevene å transformere denne kunnskapen til mer institusjonell akseptert kunnskap. Som vi så ovenfor er dette tanker som står svært sentralt i TDS, noe som gjør sammenhengen mellom TDS og DI tydelig.

3.2. DI som forskningsmetode

Kanskje en av de mest definerende trekkene ved DI er valideringsparadigme som den følger. Som man vil se senere i den didaktiske analysen i denne oppgaven er det svært utbredt at valideringen av forskning i didaktikk er forankret i pre- og post tester, der det eventuelt er en sammenligning av eksperiment- og kontrollgrupper (Blackett & Tall, 1991; Kendal & Stacey, 1997; Weber, 2005; Akkoc, 2008; Hertel & Cullen, 2011; Zamorano, Cortes & Herrera, 2019). I DI er imidlertid valideringen basert på sammenligning av *a priori*- og *a posteriori* analysene av den didaktiske situasjonen. Jeg vil gå nærmere inn på disse begrepene senere i dette avsnittet. Dette er et metodisk valg som må forstås utfra den didaktiske kulturen som DI har oppstått fra. I denne kulturen forstås forskning på matematikkundervisning som et eget felt, med et eget mål. Målet med denne forskningen er å finne ut hvordan man kan formidle matematisk kunnskap til elever gjennom didaktiske systemer (Artigue, 2015). Derfor er det ingen hensikt med den tradisjonelle framgangsmåten for validering (pre- og post-test, eksperimentell- og kontroll-gruppe) siden dette ikke vil gi noe innblikk i hvordan forskjellige faktorer i det didaktiske systemet påvirker læringen til elevene. Dette er grunnen til at valideringen fremkommer som et resultat av å sammenligne hvordan hypoteser og antagelser omkring disse didaktiske systemene henger sammen med det som faktisk skjedde. Videre ved hjelp av et rammeverk (TDS typisk) kan man bryte den didaktiske situasjonen i mindre deler og dermed se hvilke faktorer i det didaktiske systemet som er med på fremme eller hindre læring.

DI er strukturert etter fire faser, der man fokuserer på forskjellige ting i hver fase. Disse fasene følger etter hverandre kronologisk i forskningen og er de følgende: *forberedende analyse*, *design av undervisningsopplegg* og *a priori analyse*, *realisering, observasjon* og *datainnsamling*, *a posteriori analyse* og *validering*. På grunn av omstendighetene rundt denne oppgaven der det ikke vil bli anledning til å gjennomføre de to siste fasene vil det bli lagt mer vekt på de to første.

3.2.1. Forberedende analyse

Den forberedende analysen er der man legger grunnlaget for designet i DI. Den er igjen delt inn i tre deler hvor hver del tjener sitt eget formål.

1. I den *epistemologiske analysen* har man som hensikt å bli bedre kjent med den spesifikke målkunnskapen man skal lære bort, og inneholder ofte også en historisk del. Her prøver man å identifisere epistemologiske hindringer og situasjoner som representerer kunnskapen (fundamentale situasjoner) (Strømskag, 2017a). Videre kan den epistemologiske analysen hjelpe forskeren å få den nødvendige distansen til skolematematikken som de ellers forholder seg til for å kunne ta et mer reflektert standpunkt til målkunnskapen (Artigue, 2015).
2. Den *didaktiske analysen* er ment for å få et overblikk over hva litteraturen sier om undervisning på emnet. I tillegg til å gi en indikasjon på hva som muligens vil eller ikke vil fungere i en didaktisk situasjon, er den didaktiske analysen nyttig for å få inspirasjon

til hva man selv kan gjøre. Derfor vil sannsynligvis den didaktiske analysen være styrende for selve designet i en DI.

3. Den siste delen av den forberedende analysen er den *institusjonelle analysen.* Hensikten her er å få innblikk i konteksten hvor DI finner sted, og å identifisere hvilke faktorer som kan være med på å påvirke forskningen. Disse faktorene kan variere utfra hvor DI foregår. Har man en klasse i en spesiell setting ment for forskning har man mer kontroll på disse institusjonelle faktorene, mens en DI i et faktisk klasserom muligens vil bli mer styrt av disse. Eksempler på hva disse faktorene kan innebære er læreplaner for kunnskapen og hvilke læringsmetoder man bør ta i bruk, tekniske hjelpemidler, vurderingspraksiser, lærebøker eller elevenes forkunnskaper (Artigue, 2015).

3.2.2. Design av undervisningsopplegg og a priori analyse

Den neste fasen er design av undervisningsopplegg og a priori analyse. Denne fasen blir informert av den forberedende analysen og det er her man begynner å stille hypoteser og gjøre antagelser. Der hypoteser kan ha begynt å forme seg under den forberedende analysen, er man nå nødt til å gjøre disse eksplisitte. Dette skjer i form av hvordan designet av undervisningen skal se ut, og i a priori analysen ved å gjøre greie for de didaktiske valgene man har tatt. I denne fasen foreligger det en rekke valg i form av didaktiske variabler, det vil si variabler som påvirker kostand og effektiviteten av mulige strategier som elevene utvikler. Eksempler på slike didaktiske variabler kan være den sosiale organiseringen av elevene, utformingen av illustrative figurer (for eksempel det materielle miljøet) eller hvilken rekkefølge du vil introdusere forskjellige begreper. Disse variablene legger igjen styringer for miljøene, noe som påvirker elevenes interaksjoner med kunnskapen, hverandre, og med læreren (Artigue, 2015).

I a priori analysen blir de didaktiske variablene identifisert for hver situasjon, og man gjør formodninger rundt hvordan hver situasjon vil utvikle seg. Slike formodninger kan innebære hvordan elever vil interagere med miljøet, hvordan elever vil tolke en oppgave eller hvor stor del av læringsansvaret som skal legges på eleven (Artigue, 2015). Et viktig poeng her er at a priori analysen tar utgangspunkt i den *generiske og epistemiske eleven*. Det vil si at man går utfra forkunnskapene til en hypotetisk elev, og dens evne til å delta i aktiviteten som designes (Strømskag, 2017a). Det vil si at til tross for at man i realiseringen av undervisningsopplegget vil ha med faktiske studenter å gjøre, kan man ikke før et opplegg sette seg inn i hvordan hver enkelt elev vil reagere i situasjonen. Dette står i motsetning til hva som er utgangspunktet for a posteriori analysen i etterkant av realiseringen, da man analyser hvordan de faktiske elevene opptrådde i undervisningen. Dette gjør at det ikke er et perfekt samsvar i utgangspunkt for disse to analysene, noe som vil bli kommentert nærmere nedenfor.

3.2.3. Realisering, observasjon og datainnsamling

Denne delen av DI referer til gjennomføringen av designet og datainnsamlingen, som er utgangspunktet for a posteriori analysen. Dataene skal være med på å forstå hvordan miljøet er med på å bidra til at elevene kan nå målkunnskapen selv, samt å forstå devolusjons- og institusjonaliseringsprosessen. Typiske data man samler inn er: arbeidet til elever, observasjonsnotater og lyd- eller videoopptak som dokumenterer gruppearbeid til elever. I tillegg er det ofte aktuelt med komplementerende data som intervjuer eller tester (Artigue, 2015). Videre poengterer Artigue at realiseringen ofte fører til tilpasninger av designet, enten i løpet av realiseringen eller fra én realisering til neste.

3.2.4. A posteriori analyse og validering

I a posteriori analysen blir dataene analysert utfra a priori analysen. Det er altså aktuelt å se hvilke forskjeller og likheter det var mellom hypoteser og antagelser som ble gjort i forkant av opplegget og det som faktisk fant sted (Artigue, 2015). Som tidligere nevnt tar a priori analysen utgangspunkt i den generiske elev noe som ikke er tilfelle i a posteriori analysen, som tar utgangspunkt i faktiske elever. I følge Artigue er derfor validiteten til hypotesen som besvares gjennom sammenligning mellom de to analysene ikke perfekt, siden utgangspunktet for de to analysene ikke er det samme.

4. Foreløpig analyse

I denne delen av oppgaven går jeg over til første fase i designet av den didaktiske situasjonen. Som tidligere nevnt er den forberedende analysen delt inn i tre mindre biter; epistemologisk analyse, didaktisk analyse og institusjonell analyse. Utfallet av den forberedende analysen er med på å informere neste del av DI som er design og a priori analysen.

4.2. Epistemologisk analyse

4.2.1. Trigonometri

Ordet *trigonometri* stammer fra de greske ordene *trigonon*, som betyr «trekant», og *metron* som betyr «måling» («Trigonometry», u.å., avsn. 1). Dette gir en ide om hva trigonometri handler om, hvert fall deler av det trigonometri handler om. Trigonometri er studien om vinkler og vinkelforhold i 2- og 3-dimensjonale figurer. Sentralt for trigonometri er de trigonometriske funksjonene. Disse består av: $\sin(x)$ som er en forkortelse for sinus; $\cos(x)$ som er en forkortelse for cosinus; $\tan(x)$ som er en forkortelse for tangens; $\csc(x)$ som er en forkortelse for cosecant; $\sec(x)$ som er en forkortelse for secant; og $\cot(x)$ som er en forkortelse for cotangens (Weisstein, u.å.b), der x er en vinkel målt i grader eller radianer. I denne oppgaven vil jeg kun ta for meg på de 3 første av disse. De trigonometriske funksjonene blir også kalt sirkulære funksjoner. I dette fremkommer det en tvetydighet i trigonometri som har konsekvenser for læringen av emnet. Denne tvetydigheten skal diskuteres nærmere i neste avsnitt og hvilke implikasjoner det har for læringen av trigonometri.

4.2.2. To definisjoner av de trigonometriske funksjonene

Som etymologien til trigonometri impliserer, handler emnet om måling av trekanter. Da kan man stille spørsmål rundt hvorfor de trigonometriske funksjonene også kalles for de sirkulære funksjonene. Dette stammer fra at man har to definisjoner av de trigonometriske funksjonene. De to definisjonene er ganske forskjellige i matematisk natur, noe som medfører et didaktisk hinder i å forstå at de essensielt handler om det samme. Samtidig understreker begge definisjonene forskjellige matematiske egenskaper ved de trigonometriske funksjonene, noe som gjør at de begge er verdifulle i en undervisningssituasjon. De didaktiske implikasjonene som hver av definisjonen medfører og en diskusjon rundt dette vil komme senere i den didaktiske analysen.

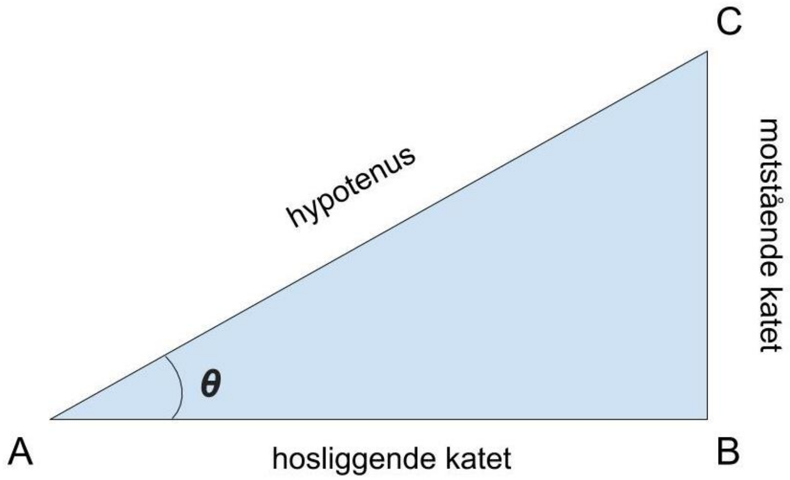
4.2.2.1. Rettvinklede trekanter

Den første definisjonen vi vil se på er *de trigonometriske funksjonene definert som forholdstall i en rettvinklet trekant* (dette vil bli omtalt som *forhold-definisjonen* i det følgende) og er hentet fra Weisstein (u.å.b). Forhold-definisjonen er definert utfra forholdet mellom katetene i en rettvinklet trekant med hensyn på en vinkel θ, der $0° < \theta < 90°$. Katetene i trekanten blir først navngitt etter hvordan de ligger i forhold til vinkel θ. Med utgangspunkt i Figur 3 blir da side AB = *hosliggende katet*, BC = *motstående katet* og AC = *hypotenus*, der hypotenusen alltid er den samme uavhengig av hvilken vinkel i trekanten man tar utgangspunkt i. De trigonometriske funksjonene blir etter dette definert til å være:

i) $\sin(\theta) \equiv \frac{motstående\ katet}{hypotenus}$

ii) $\cos(\theta) \equiv \frac{hosliggende\ katet}{hypotenus}$

iii) $\tan(\theta) \equiv \frac{motstående\ katet}{hosliggende\ katet}$



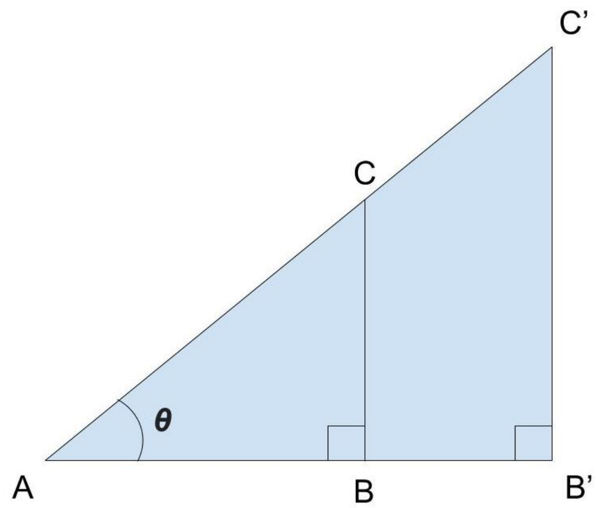
Figur 3. Rettvinklet trekant med referansevinkel θ*, med hosliggende- og motstående katet merket*

Dette kan så brukes til å regne ut lengden av en side med ukjent lengde i en rettvinklet trekant der man kjenner til en av de andre sidene og en av de små vinklene. Dette kan man se ved å undersøke to formlike trekanter. Med utgangspunkt i Figur 4 får man da:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

Siden $\sin(\theta) \equiv \frac{BC}{AB'}$, og ved å anta at AB' er kjent kan man da regne ut lengden av side B'C' ved:

$$\frac{BC}{AB} \equiv \sin(\theta) = \frac{B'C'}{AB'} \rightarrow B'C' = \sin(\theta) \cdot AB'$$



Figur 4. En rettvinklet trekant ABC med vinkel θ*, og en formlik trekant AB'C'*

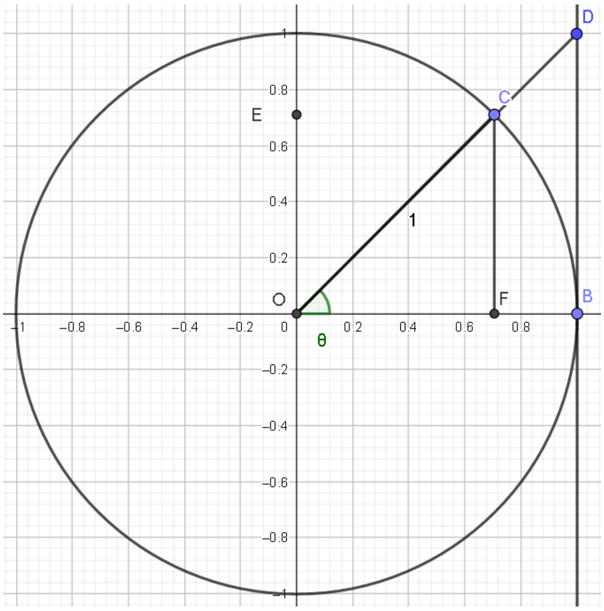
Eventuelt kan man regne ut en ukjent vinkel hvis man kjenner til to av sidene i en rettvinklet trekant ved å bruke inversen av den tilsvarende funksjonen, for eksempel:

$$\theta = \sin^{-1}(\frac{motstående\ katet}{hypotenus})$$

$\sin^{-1}$ kalles også arcus sinus som forkortes $\arcsin$.

4.2.2.2. Enhetssirkelen

Den andre definisjonen er *de trigonometriske funksjonene definert utfra enhetssirkelen* (vil bli omtalt som *enhetssirkel-definisjonen* i det følgende) og er hentet fra Weisstein (u.å.b). La θ være vinkelen som er bestemt utfra et punkt som starter på x-aksen og beveger seg mot klokken, til et punkt C langs omkretsen til en sirkel med radius lik 1 (se Figur 5). Sinus av θ er definert som y-koordinaten til punkt C, cosinus av θ er definert som x-koordinaten til punkt C. Eventuelt kan sinus og cosinus til θ defineres som lengden av linjene OE og OF. Tangens av θ er definert som der utvidelsen av linjesegmentet OC krysser med tangenten til sirkelen, derav navnet *tangens*. I Figur 5 er tangensen av θ representert av linjesegmentet BD.



Figur 5. Enhetssirkelen for en gitt vinkel θ, hvor definisjonen for sinus, cosinus og tangens er illustrert i form av linjesegmentene OE, OF og BD

Man kan forklare hvorfor dette vil stemme ved å ta i bruk forhold-definisjonen. Som man kan se i Figur 5 vil man ved å trekke en linje fra C til F som er normal på x-aksen ha produsert en rettvinklet trekant (trekant OFC i Figur 5). Fra den første definisjonen har vi da:

$$\sin(\theta) = \frac{motstående\ side}{hypotenus}$$

Siden hypotenus i enhetssirkelen er lik 1 får man:

$$\sin(\theta) = motstående\ side = y(C)$$

På tilsvarende måte får man for cosinus:

$$\cos(\theta) = hosliggende\ side = x(C)$$

Der $x(C)$ referer til x-koordinaten til punkt C, og $y(C)$ referer til y-koordinaten til punkt C.

Enhetssirkel-definisjonen er nyttig, både av praktiske hensyn og for dens potensiale til å illustrere matematiske egenskaper ved de trigonometriske funksjonene. For det første er det en langt kraftigere definisjon. I den første definisjonen er θ kun definert for vinkler mellom 0° og 90°. Mens for denne definisjonen kan de trigonometriske funksjonene ta inn alle reelle tall. Videre kommer de periodiske egenskapene tydeligere frem med denne definisjonen, ved en rent geometrisk analyse av enhetssirkelen kan man se at de trigonometriske funksjonene vil gjenta seg hver 360° slik at man får:

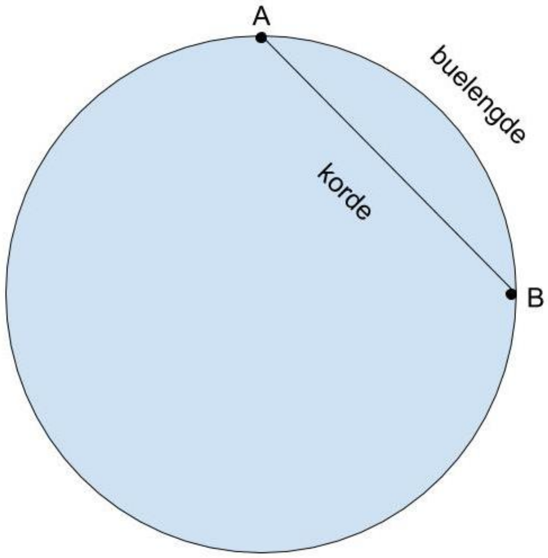
$$func(\theta + 360° \cdot n) = func(\theta)$$

Der $n \in \mathbb{Z}$, og $func$ er en trigonometrisk funksjon (Weisstein, u.å.b).

Et alternativt syn på enhetssirkelen er at man anser radius til en sirkel som enheten for sirkelen i stedet for å definere radius = 1. Denne vinklingen av enhetssirkelen gjør definisjonen enda mer generell ved at enhver sirkel kan ansees som en enhetssirkel. For at dette skal være hensiktsmessig krever det imidlertid at man tar i bruk et nytt mål for lengder og vinkel i sirkelen, nemlig *radianer*. Jeg skal komme nærmere inn på hva radianer er og hvorfor de er hensiktsmessig, både av praktisk, matematiske og didaktiske grunner. Før dette er det nødvendig med et historisk innblikk i trigonometri for å se under hvilke forutsetninger radianer oppstod, og for å få dypere innblikk i trigonometri generelt.

4.2.3. Trigonometriens historie og utvikling

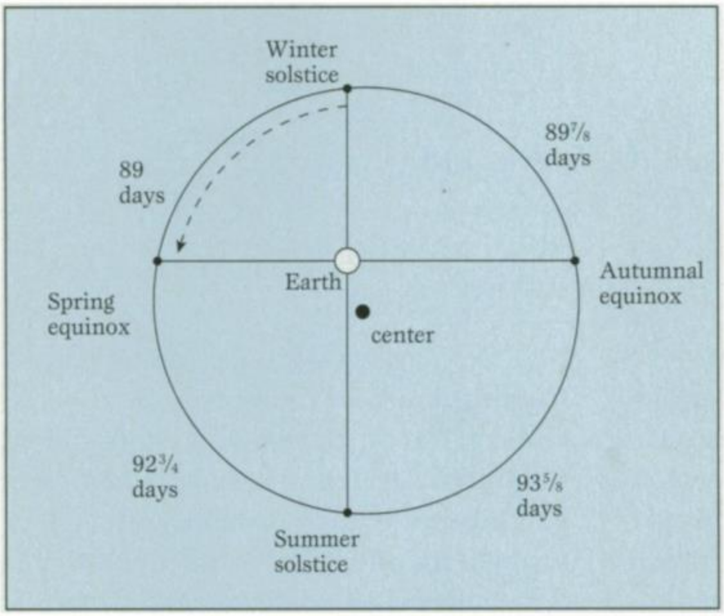
Den historiske oversikten er hovedsakelig basert på Bressoud (2010), der han gjennomgår trigonometriens utvikling fra det antikke Hellas til i dag. Samtidig diskuterer han hvilke implikasjoner trigonometriens historie kan ha for undervisningen av emnet, og kritiserer med det dagens trigonometriundervisning for å være fjerntliggende fra sin opprinnelse. Trigonometri oppstod fra antikkens astronomi, mer spesifikt for å kunne regne korden til en gitt buelengde mellom to punkter på en sirkel (se Figur 6).



Figur 6. En sirkel der man ser buelengden og korden mellom to punkter A og B

4.2.3.1. Det første trigonometriske problemet: korden

I følge Bressoud (2010) er det fundamentale problemet i trigonometri ble utarbeidet av Hipparchus av Rodos, ca. 190-120 år fvt. Han studerte den relative banen til sola rundt jorda. Det vil si banen som sola tilsynelatende har rundt jorden hvis man antar at jorda står stille. Målingene til Hipparchus viste at årstidene hadde forskjellig lengde (se Figur 7). En sirkel ble konstruert der hvert jevndøgn (vinterjevndøgn, vårjevndøgn, osv.) ble markert i sirkelen (Bressoud, 2010). Buelengden som korresponderte til hver årstid ble utregnet. Deretter regnet han ut korden til hver av disse buelengdene, dette ga grunnlag for å kunne bestemme hvor jorda lå i forhold til sentrum av den relative banen til sola rundt jorda (Bressoud, 2010). Dette resultatet viser at jorda går i en elliptisk bane rundt solen, siden en perfekt sirkulær bane ville gjort at jorda lå i sentrum av den relative banen til sola.



Figur 7: Hipparchus fant ut at sesongene hadde forskjellig lengde. Han brukte dette resultatet for å finne ut hvor jorda lå i solas bane (Bressoud, 2010, s. 108)

Buelengde ble målt i grader, der 360° var hele omkretsen av sirkelen. Grunnen til at nettopp 360 grader er det vi bruker i dag kommer sannsynligvis fra babylonerne. De hadde for tradisjon å sette radius i en sirkel til 60, det ble derfor naturlig å dele omkretsen i 360 deler siden:

$$O = 2\pi R \approx 6R = 6 \cdot 60 = 360 \text{ (Green, 1977).}$$

Lengden av korden (skrives crd) vil avhenge av radiusen. Enkelte korder er lette å finne, for eksempel:

$$crd(180°) = 2R$$

$$crd(60°) = R$$

Andre verdier for korder er langt mer avansert å finne, det ble derfor laget tabeller av tilnærmede verdier. Den eldste overlevende tabellen av dette slaget ble laget av Ptolemaios av Alexandria (90-168 evt.). Hans tabell bestod av utregninger av korder for en sirkel med radius 60, der kordene for hver halve grad var beregnet (Bressoud, 2010) med en nøyaktighet av orden 0,0000001 (Green, 1977).

4.2.3.2. Fra korde til halv-korde

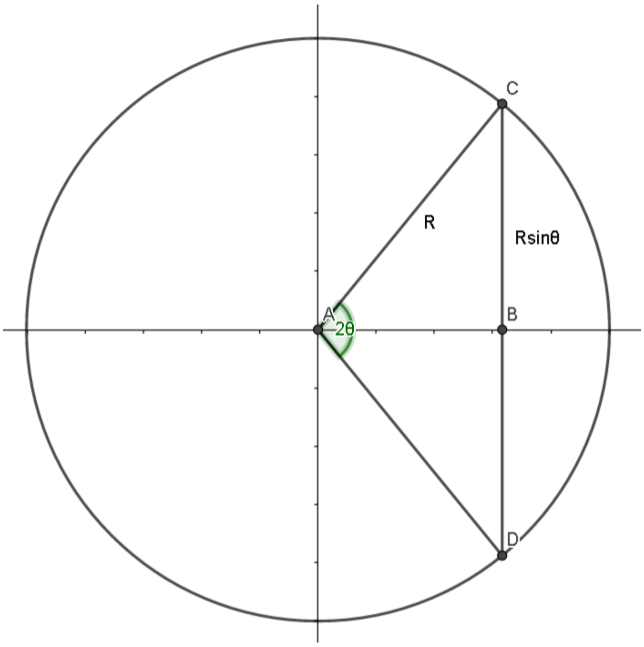
Sammenhengen mellom dagens trigonometri og korder er kanskje ikke umiddelbart åpenbar, men ved å tegne en sirkel inn i et koordinatsystem med korden vinkelrett på x-aksen blir denne sammenhengen fort tydelig (se Figur 8). Som man ser i figuren, tilsvarer sinusfunksjonen en halv-korde (BC i figur). Med en korde som spenner seg over en buelengde med lengde 2θ har man at lengden av korden er:

$$crd(2\theta) = 2Rsin(\theta)$$

Dermed får man for en halv-korde:

$$\frac{1}{2}crd(2\theta) = Rsin(\theta)$$

Dette kjenner vi igjen som sinus i enhetssirkelen der $R \equiv 1$.



Figur 8. Korden til en buelengde med lengde 2θ i en sirkel med radius R. Her kommer frem sammenhengen mellom korde og sinusfunksjonen

Det var indiske astronomer som begynte å jobbe med halv-korder (eller sinus) i stedet for korder mellom 300 og 500 år evt. Det er også her ordet *sinus* stammer fra. På sanskrit er ordet for korde *jya*. Det vi kaller sinus, nemlig halv-korde het *ardha-jya*. Etter hvert som astronomene hovedsakelig gikk over til å jobbe med halv-korder droppet man prefiksen og ordet *jya* ble brukt for halv-korde. Når den indiske astronomien nådde den arabiske verden ble dette oversatt til *jyba*, men siden vokalen *a* ikke ble skrevet på arabiske var stavelsen den samme som det arabiske ordet *jayb*. Når dette igjen ble oversatt til latin av europeere forvekslet de de to ordene og tok dermed utgangspunkt i *jayb* som betyr bøyd eller bukt, den latinske ekvivalenten til dette er ordet *sinus* som vi i dag bruker (Bressoud, 2010; Green, 1977). Ordet *sinus* slo fort an gjennom verkene til Leonardo av Pisa (som vi kjenner som Fibonacci i dag) på 1200-tallet (Cooke, 2005). I dag kan det virke som at ordet sinus har sitt opphav fra hvordan sinus-funksjonen ser ut når den er plottet i det kartesiske plan, sannheten er at sinus ikke ble tolket som en funksjon på reelle tall før flere hundre år senere ved introduksjonen av radian-begrepet (Bressoud, 2010).

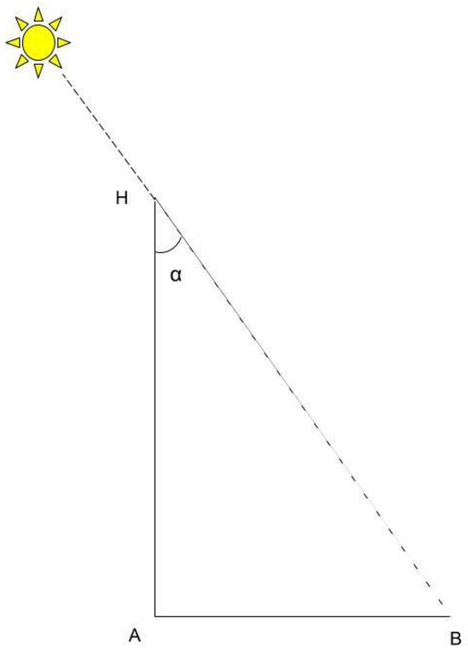
4.2.3.3. Vinkelmål og radianer

Før 1900-tallet ble ikke grader brukt som et mål for en vinkel, slik som det er i dag. Grader var en enhet som hovedsakelig ble brukt i sammenheng med buelengder. På samme måte som i dag var det slik at 1° tilsvarte $\frac{1}{360}$ av en full omdreining rundt en sirkels omkrets, men siden grader var et mål for en lengde var størrelsen av 1° avhengig av radiusen. Ptolemaios hadde i sin tabell av sinusverdiene valg en radius på 60, dette var hensiktsmessig siden brøkene hans var uttrykt med 60 i nevneren. Dette var en tradisjon som først oppstod i det antikke Mesopotamia og ble bragt videre til India (Cooke, 2005). De indiske astronomene var de første som innså at det var hensiktsmessig å bruke samme enhet for både radius og buelengde siden sinusverdien relaterte disse to lengdene. Da fikk man at radiusen R til en vilkårlig sirkel var $R = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}29° \approx 57°$ (57,29° er her et lengdemål for radiusen). Desimaltall fantes ikke ennå på denne tiden, og det var tungvint å jobbe med blandede tall. Derfor valgte inderne å dele opp gradene i gradminutter, på denne måten fikk man at sirkel bestod av $360 * 60 = 21600$ gradminutter. Da fikk man at radiusen var $R = \frac{21600\ grd.min.}{2\pi} = 3437{,}7$ gradminutter (Cooke, 2005). Dermed kunne man oppnå mer nøyaktige kalkulasjoner ved avrunding til nærmeste heltall siden gradminutter vil gi en avrundingsfeil som er $\sim 10^2$ mindre enn ved bruk av grader.

Leonhard Euler (1707-83) var den første som bestemte seg for å sette radiusen til en fast verdi lik 1. I likhet med inderne innså Euler viktigheten av kunne utrykke buelengden og linjesegmenter i samme enhet. Med radius = 1 får man en omkrets = 2π. Slik blir buelengder for første gang uttrykt i forhold til π, for eksempel så blir 180°= π, og 90°=$\frac{\pi}{2}$. Det kan se ut som Euler brukte radianer her, men det gjorde han faktisk ikke. For han var dette bare en nyttig måte for å uttrykke radius, sinus og buelengde i en og samme enhet. Det var ikke før man begynte å ta vinkelen, istedenfor buelengde, som argument i de trigonometriske funksjonene, at utrykke *radianer* oppstod; nesten 100 år etter Eulers død (Bressoud, 2010).

4.2.3.4. Trekanttrigonometri

Trigonometri med trekanter oppstod ved observasjon av skygger. Kjente man til vinkelen til solen i forhold til en vertikal linje kunne man regne ut skyggen kastet av en vertikal pinne (se Figur 9) (Bressoud, 2010). I følge Bressoud ble den første tabellen med slike verdier som vi kjenner til i dag ble laget al-Khwarizmi (ca 790-840), den samme matematikeren som også er kjent for sitt verk *al-jabr*, hvor ordet *algebra* stammer fra. Bruken av trigonometri for å regne ut lengden av sider i rettvinklede trekanter ble imidlertid ikke utbredt før 1533 med posthum publikasjonen av *De Triangulis Omnimodis* (*Om Triangler av Alle Sorter*) av Johann Müller (1436-76). Ordet *trigonometri* kom senere med Bartholomew Pitiscus (1561-1613) og hans bok *Trigonometria* (Cooke, 2005), som tidligere nevnt stammer dette fra gresk og betyr trekantmåling.

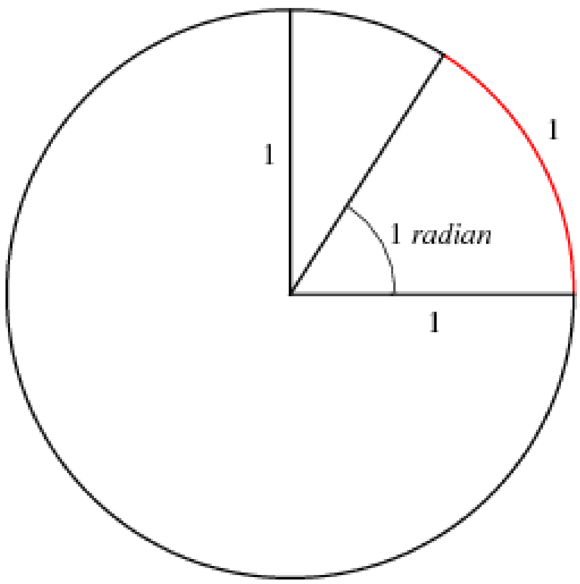


Figur 9. Skyggen (AB) kastet av en vertikal pinne AH av solen for en gitt vinkel α

Etter at Euler hadde fiksert verdien til radiusen til 1, ble det mulig å tenke på de trigonometriske funksjonene som faktiske forhold i en rettvinklet trekant. Og etter hvert oppdaget man at hvis målet er å finne ukjente sider i rettvinklede så er forhold-definisjonen en mer effektiv framgangsmåte. Etter 1850-årene begynte denne definisjonen å komme inn i lærebøkene. Ankomsten av radian-begrepet signaliserer at forhold-definisjonen begynner å bli dominerende. Når man ikke lenger jobber med sirkler i trigonometri gir det ikke lenger mening å snakke om buelengder. Dermed går man over til at grader referer til vinkler, begreper *radianer* ble til for å referere til enheten for hvor stor del av en sirkel en vinkel inneslutter der omkretsen = 2π (Bressoud, 2010).

4.2.4. Radianer

Som vi har sett ovenfor var det hovedsakelig to ting som førte til at radianer ble innført. For det første ønsket man å kunne uttrykke en radius, buelengde og sinus-verdier (og verdier av de andre trigonometriske funksjonene) i samme enhet. Det andre var at det var praktisk med en enhet for vinkelmål som refererte til disse lineære verdiene. Det er nettopp disse tingene som gjenkjenner radianer. 1 radian tilsvarer vinkelen som inneslutter buelengden på en sirkel av lengde 1 radius (se Figur 10). På den måten får man at vinkelmålet har et korresponderende lineært mål, som gjør at radius, buelengder, sinus-verdier, men også vinkler essensielt uttrykkes i samme enhet.



Figur 10. Sirkel med radius 1, der vinkelen 1 radian er tegnet inn med tilsvarende buelengde

Siden en radian tilsvarer lengden av en radius får man at en full omdreining tilsvarer 2π radianer, fordi omkretsen av en sirkel er lik $2\pi r$. Sammenlignet med vinkelgrader får man da at 360°=2π, 180°=π og 1°=$\frac{\pi}{180}$, generelt har man at en vinkel med mål n grader vil tilsvare $v(radianer) = \frac{n°}{180°}\pi$.

Radianer er også nyttig siden det gjør at identitetene for den deriverte av sinus (og cosinus) kan skrives på en veldig enkelt måte:

$$\frac{d}{dx}\sin(\theta) = \cos{(\theta)}$$

(og $\frac{d}{dx}\cos(\theta) = -\sin{(\theta)}$).

Dette resultatet kommer fra definisjonene av den deriverte for sinus:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin{(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[\sin(x)\cos{(h)} + \cos(x)\sin{(h)}] - \sin{(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin{(h)} - \sin{(x)}(1-\cos(h))}{h}$$

Ved å separere utrykke og sette funksjonene med x utenfor grensene får man:

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)\cdot\frac{1-\cos(h)}{h}$ (Singha, 2018)

$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h}$ kan skrives på en annen måte ved:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)\cdot(1+\cos{(h)}}{h\cdot(1+\cos{(h)}} = \lim_{h\to 0}\frac{1-cos^2(h)}{h\cdot(1+\cos{(h)}}$$

Ved Pytagoras' identitet (sin $(\theta)^2 + \cos{(\theta)}^2 = 1$= får man at:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-cos^2(h)}{h\cdot(1+\cos{(h)}} = \lim_{h\to 0}\frac{sin^2(h)}{h\cdot(1+\cos{(h)}} = \lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{1+\cos(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot 0$$

(Khan Academy, 2018).

Dermed ser man at $\lim_{h\to 0}\frac{\sin{(h)}}{h}$ er en essensiell grenseverdi for å finne den deriverte av sin(x). Verdien til denne grenseverdien kan man regne ut ved å bruke skviseregelen med en geometrisk analyse av enhetssirkelen og får at $\lim_{h\to 0}\frac{\sin{(h)}}{h} = 1$ (Khan Academy, 2018). Dette baserer seg imidlertid på at *h* er målt i radianer. Kvalitativt kan man se at man vil få en annen verdi hvis *h* er målt i grader ved å undersøke den deriverte av sin(x) i x=0. Når *h* er i radianer får man:

$$\frac{d}{dx}\sin(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h) - \sin{(0)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin{(h)}}{h} = 1$$

Siden det er snakk om den deriverte vet man at 1 tilsier at sin(x) endrer seg i samme hastighet som x (for radianer). Sinusfunksjonene er uforandret for det tilsvarende målet i grader, men *h* er mye mindre siden 1° tilsvarer $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}017 \ll 1$. Dermed får man at den deriverte i grader er:

$$\frac{d}{dx}\sin(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h°)}{h°} = \frac{\pi}{180}$$

(Lamar, 2017).

Man får dermed at den deriverte av sinus målt i grader er:

$$\frac{d}{dx}\sin(\theta) = \frac{\pi}{180}\cos(\theta)$$

(og $\frac{d}{dx}\cos(\theta) = -\frac{\pi}{180}\sin(\theta)$).

4.3. Didaktisk analyse

Trigonometri har en rik historie innenfor matematikk, men er også essensielt for mange andre fagfelt, særlig innenfor vitenskap, teknologi og ingeniørvirksomhet. En karriere innenfor fysikk, astronomi, optikk, IT eller som ingeniør krever en viss kunnskap om de trigonometriske funksjonene og deres bruksområder (Weber, 2005; Hertel & Cullen, 2011). Likevel viser litteratuten at trigonometri er et emnet som kan være vanskelig både for elever og lærere (Blackett & Tall, 1991; Kendal & Stacey, 1997; Weber, 2005; Thompson, 2008; Bressoud, 2010; Hertel & Cullen, 2011; Moore, Laforest & Kim, 2015). Det er derfor viktig å finne ut hvordan man kan sikre god undervisning på dette emnet. Den tradisjonelle undervisningen av trigonometri kjennetegnes ofte med mange prosedyriske fremgangsmåter og huskeregler (Kendal & Stacey, 1997; Hertel & Cullen, 2011; Mooreet al., 2015). Et eksempel på dette er huskeregelen SOH CAH TOA (Sinus Opposite Hypotenus Cosinus Adjacent Hypotenus Tangens Opposite Adjacent) for å huske definisjonene av sinus, cosinus og tangens som forholdstall i en rettvinklet trekant. Selv om denne huskeregelen er på engelsk, husker jeg den selv fra min egen introduksjon til trigonometri på videregående. Den didaktiske forskningen er i konsensus om at trigonometri bør læres med fokus på forståelse. I denne delen av oppgaven skal jeg gå nærmere inn på hva denne forståelsen innebærer og hvordan dette kan oppnås.

4.2.1 Rettvinklet trekant eller enhetssirkel

Som sagt finnes det to definisjoner av de trigonometriske funksjonene. Når man skal introdusere elevene sine for trigonometri blir et naturlig spørsmål: «hvilken av definisjonene skal man begynne med?». Kendal og Stacey (1997) har forsket på nettopp dette spørsmålet og beskriver en studie der de testet åtte klasser (alder:14 –15 år). Halvparten av disse klassene ble introdusert for trigonometri med definisjonen av de trigonometriske funksjonene som forholdstall i rettvinklede trekanter (forhold-definisjonen), og den andre halvparten med definisjonen av de trigonometriske funksjonene som x- og y-koordinater i enhetssirkelen (enhetssirkel-definisjonen). Suksesskriteriet for studien var basert på i hvilken grad elevene hadde forbedret seg fra en pre- til post-test; kunnskapen som ble testet var regning av ukjente sider i rettvinklede trekanter. Her kom det frem at elevene som hadde blitt lært opp i å bruke forhold-definisjonen hadde forbedret seg i en betydelig større grad sammenlignet med elevene som lærte seg enhetssirkel-definisjonen. Elevene som brukte forhold-definisjonen brukte i større grad riktig trigonometrisk funksjon, hadde mer suksess med operasjoner og manipulering av utrykk med trigonometriske funksjoner og hadde i snitt en bedre holdning til trigonometri i etterkant av sekvensen (Kendal & Stacey, 1997). Her bør det understrekes at elevene kun jobbet med oppgaver som involverte regning med trekanter. Det er derfor naturlig at forhold-definisjonen, som blir utledet fra rettvinklede trekanter, viste seg å være mer gunstig. Et annet interessant funn i studien var at nesten alle elevene med hell tok i bruk huskeregelen SOH CAH TOA for å huske hvilken trigonometrisk funksjon de skulle bruke i forskjellige situasjoner. Dette kan tyde på at slike regler kan være til støtte når man tar i bruk forhold-definisjonen.

Mange forfattere har imidlertid problemer med bruk av forhold-definisjonen, hovedsakelig fordi det er en metode som avhenger av memorering og utregninger (Weber, 2005; Thompson, 2008; Bressoud, 2010; Hertel & Cullen 2011). Bressoud (2010) mener at selv om trekanttrigonometri har en plass i skolematematikken, er det større sannsynlighet for at elevene vil anvende de trigonometriske funksjonene som periodiske funksjoner. Den historiske definisjonen, der sinusfunksjonen kobler sammen buelengde og linjesegment (halv-korde), er langt mer transparent sett i forhold til forhold-definisjonen. Den historiske definisjonen, som ligner veldig på enhetssirkel-definisjonen, gir en geometrisk representasjon av sinusverdier og tydeliggjør at disse sinusverdiene faktisk beskriver en funksjon når man tar vinkel (eller buelengde) som argument (Bressoud, 2010).

Hertel og Cullen tar til orde for *direkte lengder-metoden*. Dette vil si at man anser verdien av en trigonometrisk funksjon som faktiske lengder, og baserer seg på bruk av enhetssirkelen for å kunne lese av disse lengdene. Direkte lengder-metoden kan dermed sies å stamme fra enhetssirkel-definisjonen. I deres studie viste det seg at denne metoden var særlig nyttig for å hjelpe elevene til å forstå kvalitative egenskaper ved trigonometriske funksjoner. Eksempler på slike kvalitative egenskaper kan være å sammenligne størrelsen av to forskjellige trigonometriske funksjoner [hvilken er størst av sin(θ) og tan(θ)?], eller å evaluere fortegne til trigonometriske funksjoner for en gitt vinkel (Hertel & Cullen 2011). Sentralt for denne studien var også bruken av dynamiske geometri programmer, noe som vil bli utdypet i et senere avsnitt.

4.2.2 Enhetssirkel og forståelse

Weber (2005) sin studie prøver å svare på hvordan studenter forstår de trigonometriske funksjonene og hvorvidt man kan designe undervisning som fører til bedre forståelse hos studentene. Han tar i bruk Gray og Tall (1994) sitt rammeverk for matematisk forståelse for å få innblikk i elevenes forståelse av trigonometriske funksjoner. Sentralt i dette rammeverket er begrepet *procept*. Et procept er noe som både representerer en matematisk prosess, men også et matematisk objekt som er resultatet av prosessen. Et eksempel på et procept er sin(θ), siden det kan representere en prosess der man leser av y-verdien til en koordinat i enhetssirkelen bestemt av vinkelen θ; samtidig representerer sin(θ) en faktisk verdi, nemlig y verdien av denne koordinaten. At elevene har en proceptuell forståelse av matematiske objekter og operasjoner er essensielt for matematisk forståelse (Gray & Tall, 1994; Weber, 2005). Weber identifiserer to kriterier som peker på at elevene forstår de trigonometriske funksjonene som procepter. Jeg beskriver disse nedenfor.

Det første kriteriet er *at elevene er i stand til å gjøre gode estimater av de trigonometriske funksjonene*.

Når elever blir bedt om å estimere verdien av en trigonometrisk funksjon for eksempel sin(30°) inviterer dette til en mental prosess der elevene konstruerer en geometrisk representasjon. Det kan gjøres med både forhold-definisjonen og enhetssirkel-definisjonen. Ved forhold-definisjonen innebærer det å mentalt (eller fysisk) konstruere en rettvinklet trekant der en av de små vinklene er 30°. Deretter må man sammenligne hypotenusen og den motstående siden og estimere forholdet mellom lengden av sidene. Ved enhetssirkel-definisjonen må man se for seg en enhetssirkel, med en stråle fra sentrum ut til omkretsen med vinkel 30°. I dette krysningspunktet må man se for seg en horisontal linje og dermed estimere hvor denne krysser i y-aksen for å estimere sinus-verdien. Begge fremgangsmåtene er krevende prosesser som forutsetter at man har god forståelse av sinus-funksjonen, spesielt forutsetter det at man har innblikk i *prosessen* som sin(30°) representerer. Samtidig er det tydelig at denne prosessen er langt tydeligere og lettere å utføre med enhetssirkel-definisjonen sammenlignet med forhold-definisjonen.

Det andre kriteriet er *at elevene er i stand til å rettferdiggjøre hvorfor de trigonometriske funksjonene har de egenskapene de har*.

Når elevene klarer å rettferdiggjøre hvorfor trigonometriske funksjoner har spesifikke egenskaper, er det også tegn på at elevene anser disse som procepter. Eksempler på dette kan være; hvorfor er cos(180°)=-1? eller hvorfor er aldri sin(θ) større enn 1? Dette skyldes at det krever en forståelse for *prosessen* som cos(180°) eller sin(θ) representerer for å kunne svare på *hvorfor* de innehar disse egenskapene (Weber, 2005). Hvis man husker på at forhold-definisjonen kun gjelder for $0° < \theta < 90°$, blir det fort tydelig at man er nødt til å ta i bruk enhetssirkel-definisjonen for å svare på disse spørsmålene.

Weber (2005) underviste en eksperimentgruppe i trigonometri etter prinsippet å forstå trigonometriske funksjoner som procepter. Spørreundersøkelser og intervjuer ble utført og resultatet ble sammenlignet med en kontrollgruppe. Kontrollgruppen ble undervist av en uavhengig foreleser med 30 års erfaring som selv beskrev undervisningen som tradisjonell. Resultatet av eksperimentet var at eksperimentgruppen var i stand til å gjøre gode estimater av de trigonometriske funksjonene. Videre viste det seg at elevene kunne gjøre rede for deres egenskaper og rettferdiggjøre hvorfor de hadde disse egenskapene. Noe de oppnådde ved hjelp av enhetssirkelen. Kontrollgruppen derimot var i liten grad i stand til å gjøre det samme. Disse begrensningene kunne forklares ved at disse elevene ikke trodde de trigonometriske funksjonene kunne eksistere uavhengig av deres geometriske modeller. Dette syntes blant annet gjennom at flere elever mente det var umulig å gjøre estimater av de trigonometriske funksjonene uten å få oppgitt en trekant der nødvendige sider og vinkler var markert. Tilsynelatende var ikke disse elevene i stand eller tilbøyelig til å mentalt (eller fysisk) konstruere geometriske modeller som kunne hjelpe dem med å svare på slike spørsmål. En annen begrensing som ble identifisert var mangelen på kontroll over de trigonometriske funksjonene som kontrollelevene demonstrert. Dette kjennetegner at elevene anså de trigonometriske funksjonene som mekaniske, stegvise operasjoner, som ikke var meningsfulle for elevene. Til motsetning vil elever som føler de har kontroll over de trigonometriske funksjonene oppleve disse som meningsfulle og målrettede operasjoner som anvendes uten at man blir eksplisitt bedt om det (Weber, 2005).

4.2.3 Dynamiske geometriprogrammer

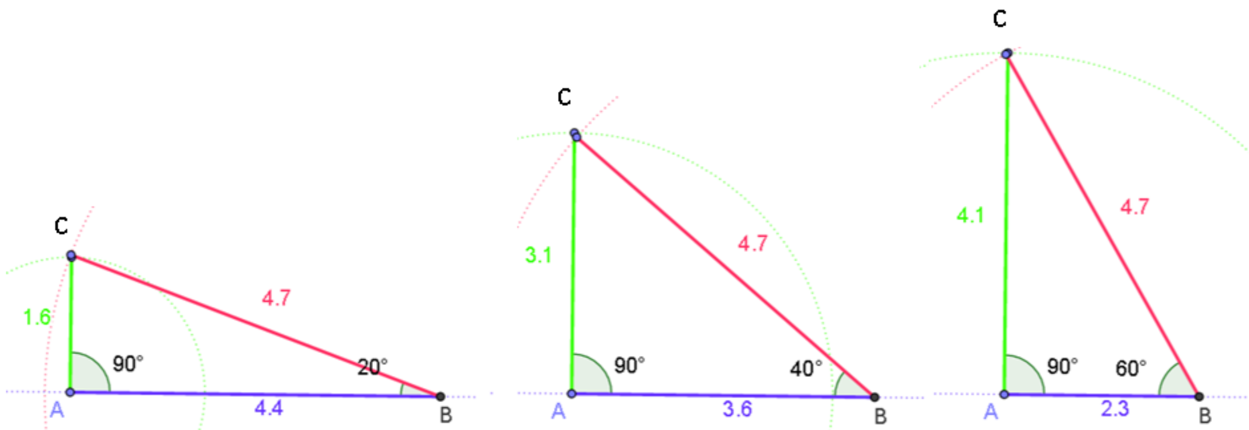
Dynamiske geometriprogrammer (heretter DGP) er en hyppig anvendt teknologi innenfor matematikkundervisning (Hertel & Cullen, 2011; Kepceoglu & Yavuz, 2016; Zamorano et.al., 2019). DGP er nyttige siden de tillater konstruksjon og manipulasjon av geometriske objekter, der man kan følge tilhørende verdier. Det meste utbredte DGP i dag er GeoGebra. GeoGebra er givende i en matematikkundervisning siden det kan skape koblinger mellom geometri, algebra, regneark, grafer og statistikk i ett og samme program. Videre kan man dele konstruksjonene sine online. På denne måten kan man også bruke andres konstruksjoner, i tilfeller der man ikke har de tekniske ferdighetene til å lage disse selv.

Særlig kan DGP være berikende for trigonometriundervisningen siden de kan bidra til en dynamisk forståelse av geometriske figurer. I den tradisjonelle undervisningen der man som regel har brukt penn og papir, kan man se for seg to scenarioer.

- Hvis man tegner grovere skisser, der en dynamisk forståelse kanskje ligger mer til rette, kan man få inntrykk av at det er kun ved numeriske prosedyrer man kan oppnå nøyaktige resultater.
- På den andre siden hvis man bruker lang tid på konstruksjonen av en figur så legger dette til rette for en statisk forståelse av geometriske figurer. For eksempel kan det være vanskelig for en elev med statisk forståelse av en trekant å se for seg hva som skjer hvis man endrer på en liten vinkel der hypotenusen forblir den samme (Blackett & Tall, 1991).

Blackett og Tall (1991) gjennomførte en studie for å se om dynamiske geometriprogrammer kunne hjelpe elevene å oppnå en dypere forståelse av trekanttrigonometri. I denne studien ble kontrollgrupper sammenlignet med eksperimentgrupper som ble introdusert til trekanttrigonometri gjennom bruk av et DGP. I dette programmet var det slik at hvis elevene skrev inn tilstrekkelig informasjon for å konstruere en trekant, ble trekanten konstruer og de andre verdiene ble utregnet av programmet. På denne måten kunne elevene utforske hvordan trekanter og forholdene mellom størrelser i trekanter hang sammen. For eksempel (se Figur

11) så eleven hvordan katetene (AC og AB) i en trekant forandret seg i forhold til hverandre når de økte en av de små vinklene (vinkel ABC) og hypotenusen forble den samme. Dette gir elevene et bilde av det omvendt proporsjonale forholdet mellom cosinus og sinus. Kontroll- og eksperimentgrupper ble sammenlignet på pre- og post-test. Testene inneholdt både «standard» og «varierte» spørsmål, og det var ingen signifikant forskjell mellom kontroll- og eksperimentgrupper på pre-test. Studien holdt oversikt over både kjønn og nivå til elevene, og resultatet viste at elevene i eksperimentgruppene scoret bedre på post-test på kryss av både kjønn og nivå (Blackett & Tall, 1991).



Figur 11. Bilde av dynamisk forståelse av en trekant ved stegvis forandring av vinkel ABC der hypotenusen forblir den samme

Litteraturen viser også at DGP kan være givende for å forstå andre aspekter ved trigonometri, som enhetssirkelen, trigonometriske funksjoner og egenskaper ved de trigonometriske funksjonene (Hertel & Cullen, 2011; Kepceoglu & Yavuz, 2016; Zamorano et.al., 2019). Hertel & Cullen (2011) viste hva bruk av DGP kan bidra til. En eksperimentgruppe ble undervist i direkte lengder-metoden (som nevnt ovenfor), der det ble tatt i bruk DGP for å belyse dette temaet. Sammenligning mellom kontrollgruppen og eksperimentgruppen som hadde fått opplæring gjennom DGP viste:

1. At elevene i eksperimentgruppen viste mer fleksibilitet i valg av løsningsstrategier. På en pre-test hadde 72 % av elevene valgt en løsningsstrategi som baserte seg på forhold-definisjonen, mens direkte lengder-metoden (som baserer seg på enhetssirkel-definisjonen) ble brukt i 2 % av elevenes besvarelser. På en post-test etter forsøket hadde disse tallene endret seg henholdsvis til 28 % og 53 % (Hertel & Cullen, 2011). Noe som viste at disse elevene var mer rettet mot å bruke direkte lengder-

metoden, men også at de var mer fleksible i valg av løsningsstrategier etter undervisning med DGP.

2. At elevene var mer suksessfulle i bruk av løsningsstrategier. Uavhengig av hvilken løsningsstrategi elevene hadde tatt i bruk, så man en økning i korrekte svar fra pre-test til post-test. Prosentvis riktige svar for elevene som valgte å bruke forhold-metoden gikk fra 36 % til 53 %. Tilsvarende for elever som brukte direkte lengder-metoden gikk riktige svar fra 67 % til 79 % (Hertel & Cullen, 2011).

Bruk av DGP har også vist å kunne forbedre elevers forståelse av egenskaper ved de trigonometriske funksjonene. Særlig har det vært til hjelp for at elever skal forstå grafiske representasjoner av de trigonometriske funksjonene. Kepceoglu og Yavuz (2016) viste hvordan DGP hjalp elevene å forstå hvordan variablene n, a og b i et uttrykk som $sin^n(ax + b)$ påvirket amplituden og periodisiteten til funksjonen. I en annen studie viste også Zamorano et al. (2019) hvordan DGP kunne hjelpe elevene å se hvordan endringer enhetssirkelen ga utslag i den grafiske representasjonen av en trigonometrisk funksjon. Dette resulterte i at elevene totalt viste en forbedring på 37 % fra en pre-test til post-test, der elevene ble testet på egenskaper ved de trigonometriske funksjonene (Zamorano et al., 2019).

4.2.4 Begrepsbilde av radian

Radian er et begrep mange elever sliter med i starten (Csongor, 1985; Eggleton, 1999; Weber, 2005; Akkoc, 2008). En multi-casestudie ble gjennomført av Akkoc (2008) for å få et dypere innblikk i hva som gjenkjenner begrepsbildet av radianer til lærerstudenter ved et tyrkisk universitet. Tall og Vinner (1981) definerer begrepsbilde som «the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes» (s. 152). Hovedfunnet i studien var at studentene hadde et svært sterkt begrepsbilde av grader, som skygget for deres begrepsbilde av radianer. Dette skyldtes at de aller fleste elevene ikke definerte radianer som buelengden i en sirkel, men som et vinkelmål de knyttet sterkt opp mot grader. Spesifikt gjorde dette seg synlig ved at elevene:

- alltid anså argumentet i trigonometriske funksjoner som grader, med mindre det var uttrykt i forhold til π (for eksempel mistolker sin(30) som sin(30°), selv om de eksplisitt ble fortalt at det var snakk om reelle tall)
- ved vinkelmål i radianer måtte de finne det ekvivalente målet i grader for å ha en god forståelse av hva det betydde

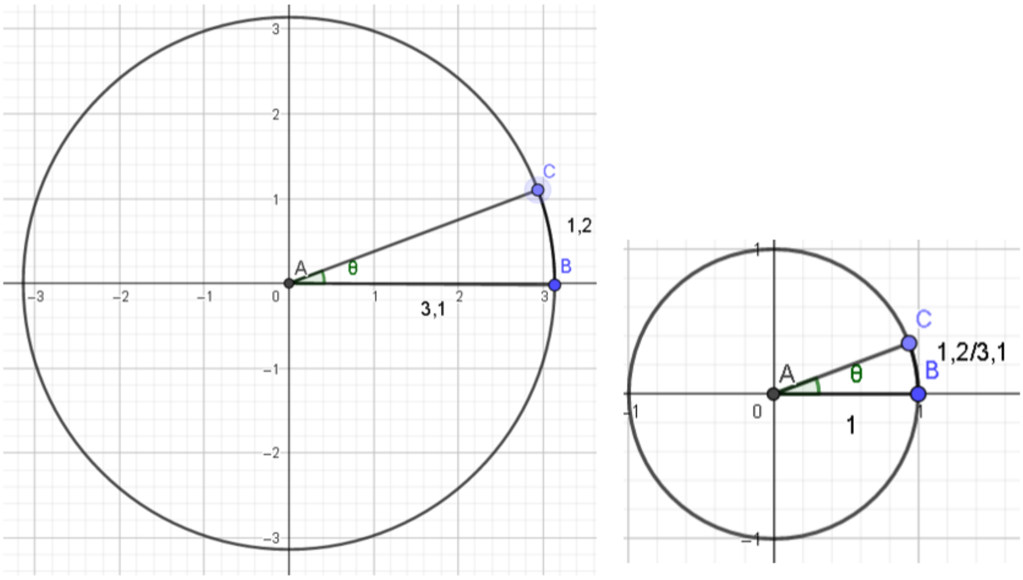
- hadde to forskjellige begrepsbilder av π i forskjellige kontekster; π som reelt tall, altså $\approx 3{,}14$; og π som et vinkelmål som er ekvivalent med 180° (Akkoc, 2008)

At grader er det dominerende begrepsbildet hos elever kan være problematisk for forståelsen av trigonometriske funksjoner som funksjoner definert på reelle tall. Videre er dette viktig å være bevisst på siden det viser seg at elever med sterkt begrepsbilde av radianer vil etablere rikere forbindelser med enhetssirkelen, mens elever med sterkt begrepsbilde av grader vil være mer komfortable med trekanttrigonometri (Topcu, 2006, som sitert i Akkoc, 2008).

4.2.5 Radius som enhetsstørrelse

Ifølge Moore et al. (2015) er det en tett sammenheng mellom elevers forståelse av enhetssirkelen og deres oppfatning av måling av størrelser. Mer spesifikt handler det om å prøve å gi elevene en forståelse av enhetssirkelen som bygger på å ta radiusen som enhetsstørrelse. Å anse radiusen som en enhetsstørrelse innebærer at lengden av radiusen blir en målenhet i seg selv, på samme måte som for eksempel centimeter. Dette er særlig hensiktsmessig når man snakker om måling i sirkler siden lengden av radiusen i en sirkel vil alltid være *én radius*. Dette gir igjen en ny mening til radius=1 i enhetssirkelen. Dette 1-tallet blir ofte tolket som at radiusen er av størrelse 1, et enhetsløsttall som ikke egentlig gir mye mening. Istedenfor kan man tolke dette 1-tallet til å bety radius av lengden 1 radian, noe som gjør at alle sirkler kan tolkes som en enhetssirkel.

I studien utført av Moore et al. (2015) ble det indentifisert en forståelse av enhetssirkelen som et separat tilfelle av andre sirkler. Et eksempel på denne måten å forstå enhetssirkelen ble vist der en student ble bedt om å finne vinkelen som er definert ved en buelengde på 1,2 tommer i en sirkel med radius 3,1 tommer.



Figur 12. Viser hvordan en student brukte enhetssirkelen for å løse en oppgave i Moore et al. (2015) sin studie

Måten studenten valgte å løse denne oppgaven på var å «gjøre om til radianer først» ved å dele radiusen i den første sirkelen på 3,1, for å få en radius på 1. Deretter konstruerte han en ny sirkel med radius 1, og kom fram til at den tilsvarende buelengden ville være $\frac{1,2}{3,1} \approx 0,387$ (se Figur 12). For å finne vinkel θ brukte han så formelen $s = r\theta$ for å finne vinkelen og fikk dermed $\theta = \frac{\frac{1,2}{3,1}}{1} = \frac{1,2}{3,1} \approx 0,387$ (Moore et al., 2015, s. 229). Her kommer det tydelig frem at studentens forståelse av enhetssirkelen er som en separat sirkel fra andre sirkler som kan brukes til å regne på andre sirkler gjennom tillærte formler og metoder. Hadde han istedenfor brukt radiusen som en enhetsstørrelse ville han ha innsett at alle mål i radianer numerisk ville vært $\frac{1}{3,1}$ av mål i tommer. Dette ville produsert det samme svaret, nemlig at buelengden er lik $\frac{1,2}{3,1} \approx 0,387\ rad$. Hvis man da innser at buelengden målt i radianer er det samme som den tilsvarende vinkelen målt radianer, har man allerede kommet fram til svaret, uten behov for formler eller faste prosedyrer.

Fra starten av hadde studentene måttet sammenligne verdier og enheter på hver sirkel de møtte for og så determinere hvilke kalkulasjoner som var nødvendige. I løpet av læringseksperimentet skjedde det imidlertid et skifte i elevenes forståelse av enhetssirkelen. Dette skjedde først når elevene innså at enhver sirkel har radius lik 1 *radiuslengde*, dermed er alle numeriske verdier ekvivalente til enhetssirkelen for enhver sirkel når man tar radiusen som enhetsstørrelse. Da kan man se at elevene implisitt tar i bruk radianer, siden 1 radian er lik lengden av radius. Etter dette skifte var studentene mer komfortable med bruk av radianer og var i bedre stand til å implementere de trigonometriske funksjonene i oppgaver (Moore et al., 2013).

4.4. Institusjonell analyse

Siden det ikke vil foregå en faktisk realisering av designet i en faktisk klasse vil den institusjonelle analysen ta utgangspunkt i en hypotetisk klasse. Jeg vil derfor stå fritt til å velge klasse og hvilke forutsetninger som skal ligge til rette. Likevel vil jeg prøve å ta utgangspunkt i en alminnelig, realistisk situasjon, og vil bruke min erfaring fra skolen (både som elev og lærer) for å oppnå dette.

For dette designet har jeg tatt utgangspunkt i en matematikk T-klasse fra studiespesialiserende. Jeg antar at dette er en alminnelig klasse, med et alminnelig klasserom. Det vil si at det er snakk om en gjennomsnittlig klasse, med standard utstyr. På denne skolen antar jeg at det er 60-minuters økter, klasserommet er utstyr med pc og prosjektor, og elevene har også skole-PCer. Læreren som skal utføre øktene er meg selv.

Jeg har også forutsatt noen forkunnskaper som elevene bør ha. Disse forutsetningene henter jeg fra kompetansemålene etter 10. årstrinn i læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2006). Kjennskap til det kartesiske koordinatsystemet er en forutsetning. Elevene bør også være i stand til å regne med brøk i ligninger. Det vil være en fordel hvis elevene har en viss kjennskap til å bruke DGP som for eksempel GeoGebra. Mer spesifikt må elevene ha noen grunnleggende ferdigheter i geometri. Dette innebærer å kunne regne med formlike trekanter, kjenne til vinkelsummen i en trekant. Det vil også være nyttig for elevene å kjenne til π og sammenhengen mellom π og omkretsen av en sirkel. Alle disse tingene finner man i kompetansemålene fra 10. klasse. Det er derfor ikke urimelig å anta at elevene har disse forkunnskapene.

Målkunnskapene for den didaktiske situasjonen er bestemt utfra kompetansemål fra fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2020), men også den epistemologiske og didaktisk analysen. I fagfornyelsen står det at mål for opplæringen er at elevene skal kunne:

- Gjøre greie for definisjonene av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å beregne lengder, vinkler og areal i vilkårlige trekanter.

- Bruke trigonometri til å analysere og løse sammensatte teoretiske og praktiske problemer med lengder, vinkler og areal (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Som man kan se ut ifra kompetansemålene er trekanttrigonometri sterkere vektlagt enn sirkeltrigonometri. Likevel har jeg valgt å likestille disse fremgangsmåtene i mitt design. Dette begrunner jeg utfra den forberedende analysen, der vi har sett at trekanttrigonometri har sitt utgangspunkt i sirkeltrigonometri. I tillegg vil elevene senere i utdanningen ha større nytte av sirkeltrigonometri (Weber, 2005; Bressoud, 2010). Likevel mener jeg trekanttrigonometri er en fin inngang, og kan være med på å hjelpe elevene å forstå enhetssirkelen. En annen forskjell fra læreplanen er at radianer ikke er inkludert før i læreplanen før matematikk R. Jeg tror likevel elevene kan dra nytte av å lære dette tidligere. Det vil gi et rikere begrepsbilde av enhetssirkelen, og vil bidra til å forhindre at begrepsbilde av grader skal bli for dominerende som rapportert av Akkoc (2008).

Utfra dette er det satt som mål at elevene etter den didaktiske situasjonen skal kunne:

- Definisjonene for sinus, cosinus og tangens som forholdstall i rettvinklede trekanter.
- Bruk disse definisjonene til å regne ut sidene i rettvinklede trekanter.
- Definisjonene for sinus, cosinus og tangens utfra enhetssirkelen.
- Bruke disse definisjonene til å regne ut lengder og vinkler i en sirkel, både med grader og radianer.
- Rettferdiggjøre hvorfor definisjonene stemmer.

5. Design og a priori analyse

I denne oppgaven vil designet av den didaktiske situasjonen og a priori analysen bli beskrevet. Den didaktiske situasjonen er beregnet for elever i matematikk T på videregående skole og består av en undervisningssekvens på fire økter. Tema for øktene er trigonometri, der vi skal gå gjennom trekanttrigonometri, enhetssirkelen og bruk av radianer.

Hver økt vil bli introdusert med tema for økten og en begrunnelse for hvorfor enkelte valg er gjort med bakgrunn i den forberedende analysen. Hver fase vil bli beskrevet der det inngår en fortløpende a priori analyse. Den vanlige gangen i øktene er at man starter med devolusjonssituasjon som blir etterfulgt av aksjons-, formulerings-, valideringssituasjonen og til slutt institusjonaliseringssituasjonen, men det vil avvike noe i enkelte økter.

5.1. 1. økt: Intro til trekanttrigonometri gjennom formlike trekanter

I første økt skal elevene bli introdusert for de trigonometriske funksjonene gjennom forhold-definisjonen. Grunnen til at jeg velger å starte med dette er fordi det kan introduseres gjennom et kjent begrep, nemlig formlike trekanter. Videre tror jeg det er fordelaktig å starte med dette siden det kan gi støtte for hvorfor enhetssirkelen stemmer. I tillegg til dette finner man støtte for at det er fordelaktig å introdusere trigonometri gjennom trekanttrigonometri i Kendal og Stacey (1997) sin forskning. I de adidaktiske fasene vil elevene kun jobbe sinus og cosinus. Dette er fordi oppgaven er designet rundt at hypotenusen i formlike trekanter er oppgitt. Uten dette tror jeg ikke det adidaktisk potensialet i oppgaven ville vært like godt.

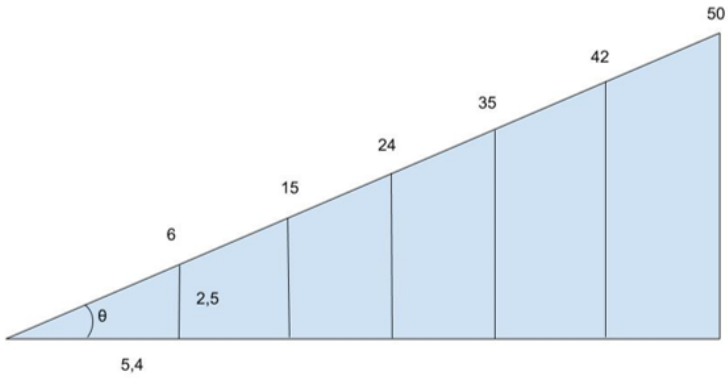
5.1.1. Devolusjonssituasjonen i økt 1

I devolusjonssituasjonen vil det være viktig å avklare flere punkter for at elevene skal forstå oppgaven riktig. Her møter elevene noen kjente og noen nye begreper. Det er rimelig å anta at elevene kjenner til formlike trekanter og hvordan man regner med disse. Likevel tror jeg det er viktig at jeg i devolusjonssituasjonen forklarer eller tar en liten gjennomgang for å oppfriske minnet til elever som eventuelt har glemte dette. Dette er essensielt fordi oppgaven avhenger sterkt av at elevene kjenner til hvordan man regner ut ukjente sider i formlike trekanter. Begreper som elevene sannsynligvis ikke har møtt før er *motstående-* og *hosliggende katet*. Her har jeg gjort et bevisst valg om å introdusere elevene for disse begrepene tidlig siden de blir mye brukt i sammenheng med trekanttrigonometri. Her vil jeg forklare at disse begrepene referer til hvor en katet ligger i forhold til vinkel θ, og kan gjennomgå noen eksempler for å illustrere dette.

1. økt

I figuren under ser dere en serie med formlike, rettvinklede trekanter. I den minste trekanten er det oppgitt størrelse på katetene, slik at det *motstående katet* er 2,5 og det *hosliggende katet* er 5,4.

a) Alle trekantene har oppgitt hypotenusen (6, 15, 24, osv..). Bruk dette for å regne ut de motstående og hosliggende katetene til alle de formlike trekantene.



b) I denne oppgaven skal dere møte en annen gruppe. Få den andre gruppa til å tegne inn en ny trekant, og bestem lengden av hypotenusen til den nye trekanten. Fortell dem hvordan de skal gå frem for å regne ut det hosliggende og motstående katet.

c) Forklar hvorfor dere alltid vil være i stand til å finne de katene uavhengig av hvor stor hypotenusen i trekanten er.

Figur 13. Oppgaveark til første økt

Neste del av devolusjonssituasjonen blir å informere om «spillereglene». På dette punktet vil elevene bli delt inn i grupper på 2 og få utdelt oppgavearket. Når man ser på figuren i oppgaveteksten (se Figur 13) er det kanskje ikke åpenbart for alle elevene at figuren inneholder flere trekanter. For noen kan det kanskje se ut som det kun er en stor trekant delt inn i mindre biter. Her vil jeg derfor informere om at det faktisk er snakk om flere trekanter og at tallene langs hypotenusen forteller lengden av hypotenusen til hver av trekantene. Elevenes oppgave blir å regne ut de to katetene for hver av disse hypotenusene (trekantene).

5.1.2. Aksjonssituasjonen i økt 1

Aksjonssituasjonen trer inn i oppgave a), der det forventes at elevene skal regne med formlike trekanter for å finne de motstående- og hosliggende katetene. For eksempel for trekanten med hypotenus lik 15 får man:

Motstående katet: $\frac{2,5}{6} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{2,5}{6} \cdot 15 = 6,25.$

Og for hosliggende katet: $\frac{5,4}{6} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{5,4}{6} \cdot 15 = 13,5.$

Ved å gjenta denne operasjonen får man (for de motstående katetene):

Ved hypotenus lik 24: $\frac{2,5}{6} = \frac{x}{24} \rightarrow x = \frac{2,5}{6} \cdot 24 = 10.$

Ved hypotenus lik 35: $\frac{2,5}{6} = \frac{x}{35} \rightarrow x = \frac{2,5}{6} \cdot 35 = 14,58.$

Ved hypotenus lik 42: $\frac{2,5}{6} = \frac{x}{42} \rightarrow x = \frac{2,5}{6} \cdot 42 = 17,5.$

Ved hypotenus lik 50: $\frac{2,5}{6} = \frac{x}{50} \rightarrow x = \frac{2,5}{6} \cdot 50 = 20,83.$

Ved å gjenta disse operasjonene flere ganger er intensjonen at elevene skal se at forholdet $\frac{2,5}{6} \approx 0,42$ går igjen i alle utregningene uavhengig av lengden på hypotenusen. Elevene er ikke klar over det ennå, men de har nå brukt sinus for å regne de ukjente katetene med formelen $hypotenus * \sin(\theta) = motstående\ katet$, der $\sin(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hypotenus}$.

Det er imidlertid noen didaktisk «farer» som kan gjøre at målkunnskapen ikke kommer like tydelig frem her:

1. Elevene kan ta i bruk forholdet $\frac{6}{2,5} = \frac{hypotenus}{x}$, noe som gjør at det er flere algebraiske operasjoner som må til for å komme fram til det ønskede forholdet, altså $\frac{motstående\ katet}{hypotenus} = \frac{2,5}{6}$. Dette er noe som imidlertid kan adresseres i formuleringssituasjonen, der flere løsninger vil bli presentert.
2. En annen ting elevene kan gjøre er at de tar i bruk forholdene i trekantene de har regnet ut framfor det som er oppgitt fra start. For eksempel etter å ha regnet ut katetene til trekanten med hypotenus lik 15, kan elevene finne på å bruke det nye forholdet istedenfor, altså $\frac{6,25}{15}$ istedenfor $\frac{2,5}{6}$. Dette kan gjøre at elevene får inntrykk av at det ikke er et fast forhold for alle trekantene, men et som endrer seg løpet av utregningene. Samtidig kan dette være en fordel når man senere belyser de forskjellige løsningsstrategiene elevene brukte. Her går det an å vise at selv om tallene er forskjellig, vil forholdet alltid forbli det samme, nemlig at $\frac{2,5}{6} = \frac{6,25}{15} = \frac{10}{24}$, osv.

5.1.3. Formuleringssituasjonen i økt 1

I formuleringssituasjonen skal elevene gjøre løsningsstrategien sin eksplisitt for en annen gruppe. Den ideelle eller mest effektive løsningsstrategien som jeg har identifisert her, er den som ble nevnt ovenfor, altså at man tar i bruk forholdet $\frac{2,5}{6} \approx 0,42$ og dermed får at man generelt kan regne ut lengden av motstående katet ved:

$$motstående\ katet = hypotenus \cdot 0,42$$

Tilsvarende for lengden av hosliggende katet med forholdet $\frac{5,4}{6} = 0,9$ kan man regne ut:

$$hosliggende\ katet = hypotenus \cdot 0,9$$

Her har ikke elevene fått det mest interaktive materielle miljøet å jobbe med. Likevel får de en viss indikasjon på hvorvidt svarene deres er korrekte ved at det tydelig kommer frem i figuren at sidene blir gradvis større, noe som også svarene deres burde reflektere. Når elevene i oppgave b) blir bedt om å få en annen gruppe til å tegne inn en ny vilkårlig trekant er min hypotese at dette vil gi en videre bekreftelse for at metoden er generell. Elever kan tenke at figurer og tall presentert av læreren i oppgaven kan være nøye utvalgt (noe som ikke er tilfelle) for at utregninger skal stemme. Ved at elevene selv tegner inne en ny trekant kan de altså få videre bekreftelse på at løsningsstrategien deres er god. Når elevene så blir bedt om å få en annen gruppe til å prøve deres løsningsstrategi tjener dette flere formål. For det første blir elevene nødt til å utrykke løsningsstrategien sin eksplisitt. Hvis elevene ikke ennå har innsett at de i hver kalkulasjon brukte det faste forholdet (som tilsvarer sin(θ) eller cos(θ)) blir de kanskje klar over det nå. For det andre kan det hende at enkelte elever får se en ny, mer effektiv løsningsstrategi, og kan se verdien av denne.

På slutten av formuleringssituasjonen planlegger jeg å ha en felles del i klassen der forskjellige løsningsstrategier kan bli demonstrert. Poenget med dette er å gjøre den optimale løsningen tilgjengelig for alle elevene og elevene får en anledning til å diskutere dette. Samtidig som at jeg kan vise at forskjellige løsningsstrategier (for eksempel de to nevnt i aksjonssituasjonen) essensielt gjør det samme.

5.1.4. Valideringssituasjonen i økt 1

Valideringen i økt 1 kommer frem i oppgave c). Her skal elevene begrunne hvorfor de mener at løsningsstrategien deres vil fungere uansett hvor stor hypotenusen er. Denne valideringsprosessen er påbegynt i de foregående situasjonene der elevene har sett at det vil fungere for flere gitte tilfeller og for et vilkårlig tilfelle de selv valgte. De har imidlertid ikke sett på noen tilfeller der hypotenusen er større enn 50. Rent intuitivt kan man tenke seg at trekanten vil fortsette å vokse på en lineær måte, noe som gjør at forholdene vil forbli de samme. En mer formell fremgangsmåte vil være å se på minstekravet for at to trekanter skal være formlike, nemlig at to trekanter er formlike hvis de har to parvis like store vinkler (NDLA, 2018). Man kan observere at vinkel θ er felles og at trekanten vil være rettvinklet uavhengig av hvor mye man skalerer hypotenusen. Dette gjør at uansett hvor lang hypotenusen er, så vil den tilsvarende trekanten alltid være formlik med den minste trekanten i figuren.

5.1.5. Institusjonaliseringssituasjonen i økt 1

I institusjonaliseringssituasjonen skal det komme fram at det elevene egentlig har jobbet med i de adidaktiske situasjonene har vært de trigonometriske funksjonene sinus og cosinus, her som forholdstall. Her er det viktig å poengtere at sinus og cosinus er forholdstall som avhenger av vinkelen, og siden vinkelen var den samme gjennom hele oppgaven var også forholdstallet det samme. De formelle definisjonene av sinus og cosinus som forholdstall i en trekant vil bli presentert slik:

$$\sin(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hypotenus}$$

og

$$\cos(\theta) = \frac{hosliggende\ katet}{hypotenus}$$

Tangens ble ikke med i de adidaktiske situasjonene da jeg tror det ville forstyrret det adidaktiske potensialet i miljøet. I institusjonaliseringen kan man komme inn på hvordan man ville gått fram hvis man får oppgitt en av katetene istedenfor hypotenusen. På dette tidspunktet har elevene fått en del erfaring med å regne ut sider i trekanter. Jeg tror derfor det vil være mulig for de å forstå hvordan man gjør de tilsvarende kalkulasjonene der man for eksempel skal finne motstående katet ved hjelp av hosliggende katet. På den måten lærer også elevene hvordan man finner tangens ved forhold-definisjonen:

$$\tan(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hosliggende\ katet}$$

Dette kan så brukes til å vise hvordan kalkulasjonene elevene allerede har vært gjennom kan skrives med ny notasjon. Der de tidligere har brukt $motstående\ katet = \frac{2,4}{6} \cdot hypotenus$, kan dette nå skrives på den mer generelle formen $motstående\ katet = \sin(\theta) \cdot hypotenus$, og tilsvarende for cosinus og tangens.

Som det blir nevnt i litteraturen er elevene svært avhengige av å huske forhold-definisjonen når de gjør utregninger med rettvinklede trekanter (Kendal & Stacey, 1997; Weber, 2005; Thompson 2008). Jeg tror det vil være nyttig for elevene å ha en huskeregel for definisjonene av sinus, cosinus og tangens i starten. Likevel tror jeg ikke det nødvendigvis vil være givende for elever å bli presentert for en huskeregel (for eksempel SOHCAHTOA). Avslutningsvis vil derfor elevene få i lekse å komme opp med sin egen huskeregel som de vil få bruk for i neste undervisningsøkt.

5.2. 2. økt: Dynamisk forståelse av trekanttrigonometri gjennom DGP

I forrige økt møtte elevene for første gang de trigonometriske funksjonene gjennom å regne med formlike trekanter. Jeg tror dette er en god inngang, men kan gi elevene et statisk begrepsbilde av trekanter og bruk av forhold-definisjonen. Derfor skal elevene i denne økten jobbe med forhold-definisjonen med en mer dynamisk tilnærming. Dette skal skje gjennom at elevene skal arbeide med et GeoGebra-script kalt «Triangle maker v2» (Palma, u.å.), der man kan konstruere en trekant. I følge Blackett og Tall (1991) kan bruk av DGP (GeoGebra i dette tilfellet) bidra til å gi elevene et mer dynamisk begrepsbilde av trekanter. Samtidig viser det hvordan de trigonometriske funksjonene endrer seg med vinkelen, noe elevene ikke fikk erfare i den første økten. Videre gjør dette at elevene kan undersøke egenskaper ved de trigonometriske funksjonene som vil gi elevene en bedre forståelse av emnet (Weber, 2005). Jeg kommer nærmere inn på disse egenskapene i valideringssituasjonen av denne økten.

5.2.1. Devolusjonssituasjonen i økt 2

Denne økten er delt inn i to deler. Den første delen består av oppgave a) og b) (se Figur 14) og har to formål. Det ene er at elevene skal bli komfortable med GeoGebra-scriptet, det andre er at elevene skal få prøvd ut huskeregelen som de fikk i lekse å lage etter forrige økt. I devolusjonssituasjonen blir det en gjennomgang av hvordan elevene kan laste ned GeoGebra-scriptet, samt en kort gjennomgang av hvordan scriptet fungerer med hele klassen. Jeg vil dele inn elevene i grupper på to, der de skal jobbe sammen på én PC. Jeg vil også be elevene tenke gjennom hvordan de skal forklare fremgangsmåten deres og at de blir enige om én huskeregel, slik at de er forberedt for oppgave b). I tillegg vil jeg informere om reglene i oppgave b). Gruppene skal forklare for den andre gruppen på tur. Her er det viktig at man forklarer og ikke gjør det for dem. I oppgave c), d) og e) skal elevene sette seg tilbake i de originale gruppene på to og to.

2. økt

I denne økten skal dere bruke GeoGebra-scriptet: Triangle maker v2.

a) Lag en valgfri rettvinklet trekant. Bruk huskeregelen dere har lagd i lekse for å regne sinus, cosinus og tangens til vinkel θ.

b) Møt en annen gruppe. Forklar for dem hvordan de skal konstruere trekanten dere lagde i oppgave a) og hvordan de skal gå fram for å regne ut sinus, cosinus og tanges ved hjelp av huskeregelen.

La vinkel ABC være rettvinklet og hypotenusen være lik 10.

c) Konstruer trekantene med vinkel θ lik 15°, 30°, 45°, 60° og 75°, og fyll inn tabellen nedenfor.

Vinkel θ	sin(θ)	cos(θ)	tan(θ)
15°			
30°			
45°			
60°			
75°			

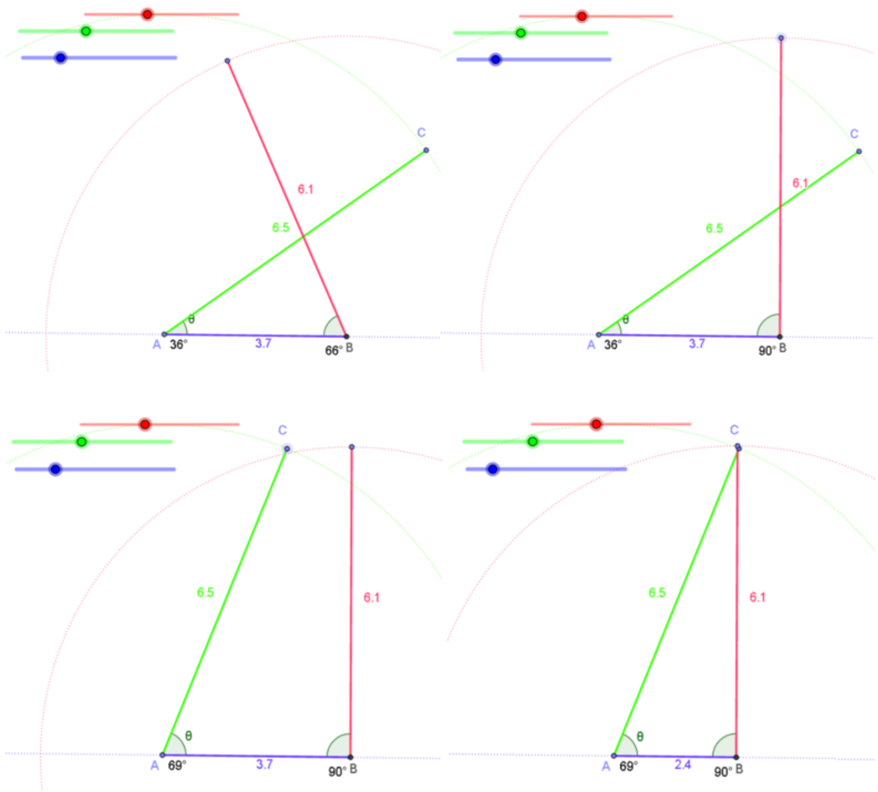
d) Hva skjer når θ er 0° og 90°?

e) Hvorfor kan aldri sinus eller cosinus være større enn 1?

Figur 14. Oppgaveark til andre økt

5.2.2. Aksjonssituasjon I i økt 2

I denne fasen jobber elevene med oppgave a), og hensikten er hovedsakelig at elevene skal bli kjent med scriptet som er det materielle miljøet i denne økten. Et annet poeng med oppgaven er at elevene skal få trene seg på å bruke deres egenlagde huskeregel. Figur 15 viser et eksempel på hvordan en elev kan gå fram for å konstruere en rettvinklet trekant. Her er det gjort ved at man først lager en 90° vinkel i ABC, deretter er vinkel BAC justert slik at toppunktene til grønn og rød linje er horisontale for hverandre. Til slutt er linjestykke AB minsket for at punktene skal treffe. Dermed har man konstruert en trekant, der vinklene og lengden av sidene blir vist. Når trekanten er konstruert har elevene den informasjonen de trenger for å regne ut sinus, cosinus og tangens til θ.



Figur 15. Viser en stegvis fremgangsmåte for å konstruere en rettvinklet trekant i Triangle maker v2 (rekkefølgen på figurene er fra venstre til høyre)

5.2.3. Formuleringsfase i økt 2

Formuleringssituasjonen kommer i oppgave b). I oppgave a) har elevene opparbeidet en implisitt framgangsmåte for å konstruere en rettvinklet trekant ved hjelp av GeoGebra-scriptet. I formuleringen blir denne fremgangsmåten gjort eksplisitt ved at elevene skal forklare hvordan de gikk frem for en annen elevgruppe. En annen fordel med at elevene deler fremgangsmåtene sine er at det finnes flere måter å konstruere en trekant på, eksemplet i Figur 15 er bare én av mange. Når elevene deler kan det hende at de ser en bedre måte enn den de kom på selv. I formuleringssituasjonen skal også elevene dele huskeregelen de hadde i lekse. Ved at elevene deler denne med andre elever gjør det at elevene blir eksponert for flere av disse reglene og de kan dermed ta i bruk den de synes er mest gunstig. En annen fordel er at elever som ikke gjorde hjemmeleksen eller ikke klarte å komme på en regel, kan ta i bruk en medelevs huskeregel.

Når elevene er ferdige med oppgave b), planlegger jeg å ta en felles del slik at de forskjellige framgangsmåtene for å konstruere en trekant og huskeregler for forhold-definisjonen kan bli tilgjengelige for hele klassen. Ved å vise flere måter å gjøre det på, kan hver enkelt elev bestemme seg for hvilken løsningsstrategi de foretrekker.

5.2.4. Aksjonssituasjon II i økt 2

Her begynner den andre delen av økten. Fra den forrige delen er elevene mentalt utstyrt for å kunne løse oppgave c). Denne oppgaven er designet med flere formål. Det ene er at elevene skal få et mer dynamisk begrepsbilde av trekanter. Dette er en forutsetning for å ha god forståelse av trekanttrigonometri (Blackett & Tall, 1991). Når elevene fyller inn tabellen blir de nødt til å konstruere trekanter der vinkel θ blir gradvis større, og hypotenusen forblir den samme. Dette gjør at elevene får oppleve det omvendt proporsjonale forholdet mellom de to katene når vinkel θ vokser, dette er ekvivalent med det omvendt proporsjonale forholdet mellom cosinus og sinus (se Tabell 1), noe som vil bli tatt opp i institusjonaliseringssituasjonen.

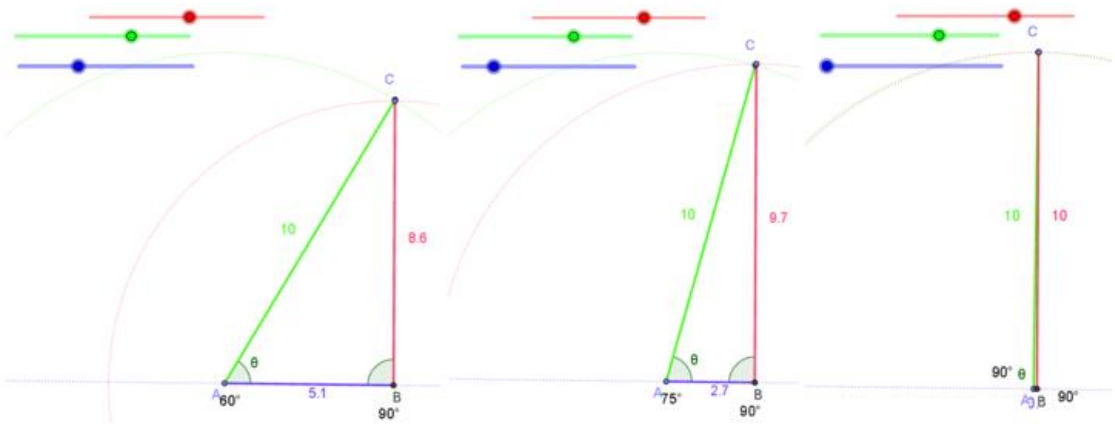
Vinkel θ	sin(θ)	cos(θ)	tan(θ)
15°	0,26	0,97	0,27
30°	0,5	0,86	0,58
45°	0,71	0,71	1
60°	0,86	0,5	1,72
75°	0,97	0,26	3,73

Tabell 1. Tabell fra oppgave c) med utregnede verdier

En annen fordel med oppgaven er at elevene får en viss mengdetrening i å bruke huskeregelen de nettopp har laget. Jeg tror en huskeregel kan være et nyttig hjelpemiddel i starten og fungere litt som mentale støttehjul. For at elevene ikke skal være avhengig av slike huskeregler er det viktig at de bruker dem slik at de blir internalisert. På den måten kan elevene etter hvert «ta av støttehjulene» og på den måten implementere disse løsningsstrategiene uten å være avhengig av en huskeregel. Dette er imidlertid et langtidsmål, og ikke noe som skjer løpet av en undervisningsøkt. Til slutt er denne oppgaven med på å informere neste fase av økten, valideringssituasjonen; der elevene skal se på noen mer generelle egenskaper ved de trigonometriske funksjonene.

5.2.5. Valideringssituasjonen i økt 2

Vi kommer inn i valideringssituasjonen i oppgave d) og e). Hensikten med disse oppgavene er at elevene skal være i stand til å si noe om egenskapene til trekanter og de trigonometriske funksjonene. Ifølge Weber (2005) er dette viktig siden det krever et innblikk i prosessen som funksjonene innebærer for å kunne si noe om deres egenskaper. Er elevene i stand til dette tyder det på en god forståelse av de trigonometriske funksjonene (Weber, 2005). Poenget med oppgave d) er at elevene skal forstå hvorfor forhold-definisjonen kun gjelder for vinkler 0° < θ < 90°. Fra forrige oppgave vil elevene ha sett på hvordan trekanten forandret seg etter hvert som vinkel θ ble større. Dette vil være med å hjelpe dem å svare på oppgave d). Hva som skjer når θ er lik 0° tror jeg er ganske intuitivt for elevene, da du umulig kan ha en trekant der en av vinklene er 0° siden dette bare vil resultere i en linje. Hva som skjer når θ er lik 90° er kanskje mindre intuitivt, men burde være greit å svare på ved hjelp av det materielle miljøet (se Figur 16). Gjennom det materielle miljøet har elevene erfart at etter hvert som θ nærmer seg 90° vil trekanten bli tynnere, helt til man ikke lenger har en trekant. Dette resultatet kan også forklares gjennom vinkelsummen av trekanter. Der summen av vinklene i en trekant er 180°, siden man har en rettvinklet trekant betyr det at hvis θ er lik 90° er den tredje vinkelen nødt til å være lik 0°. Dermed kan man ikke ha en trekant der to vinkler er 90°.



Figur 16. Det materielle miljøet viser hva som skjer når θ går mot 90°

Oppgave e) er designet for at elevene skal utforske flere egenskaper ved de trigonometriske funksjonene. I dette tilfelle; hvorfor sinus og cosinus aldri kan være større enn 1. I likhet med oppgave d) er elevene nødt til å ha et innblikk i prosessene som sinus og cosinus representerer for å kunne svare på spørsmålet. Ved å være i stand til å forklare hvorfor man ser disse egenskapene vil elevene vise til en bedre forståelse av de trigonometriske funksjonene (Weber, 2005). I oppgave c) har elevene erfart at dette stemmer for de verdiene av θ som de ble bedt om å undersøke. Kombinert med resultatet fra oppgave d) som var ment for å overbevise elevene om at forhold-definisjonen kun er gyldig for θ mellom 0° og 90°, gjør dette at elevene allerede har opplevd overbevisende indikatorer på at sinus og cosinus aldri kan være større enn 1. En mer generell betraktning, som også støttes av det materielle miljøet, er at hypotenusen i en trekant alltid vil være større enn en katet.

5.2.6. Institusjonaliseringssituasjonen i økt 2

I institusjonaliseringssituasjonen vil blant annet de resultatene elevene har kommet fram til bli formalisert. Det ene elevene så på i valideringssituasjonen var hva som skjer i 0° og 90°. Som nevnt kan det hende dette var intuitivt for enkelte elever gjennom feedback fra det materielle miljøet. Likevel tror jeg det kan være lurt med en gjennomgang av hva en vinkel på 0° innebærer, og hvorfor man ikke kan ha en trekant når en av vinklene er lik 0°. Videre kan man se på vinkelsummen av trekanter for å kunne begrunne hvorfor forhold-definisjonen ikke er gyldig for θ ≥ 90°. Dette er også en god anledning til å vise notasjon for gyldighetsområde til en definisjon, for eksempel:

$$\sin(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hypotenus}, \text{for } 0° < \theta < 90°.$$

Her kan man også gjøre elevene oppmerksomme på tegnet ∀ som også kan brukes istedenfor «for».

I oppgave e) skulle elevene vise hvorfor sinus og cosinus aldri kunne vært større enn 1. Dette kunne de overbevise seg selv om enten ved å se på tabellen eller ved å innse at hypotenusen alltid er større enn en katet. Med mer formell notasjon kunne jeg presentert dette resultatet for elevene som:

$$\sin(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hypotenus} < 1, \text{fordi } motstående\ katet < hypotenus$$

$$\cos(\theta) = \frac{hosliggende\ katet}{hypotenus} < 1, \text{fordi } hosliggende\ katet < hypotenus$$

I tillegg til dette vil det vært aktuelt å komme inn på noen andre resultater som elevene muligens kan ha lagt merke til løpet av opplegget. Det ene er sammenhengen mellom sinus og cosinus. Det kan tenkes at enkelte elever ville oppdage at når θ ble større, ble samtidig sinus større, mens cosinus sank. Elevene ble ikke bedt om å undersøke dette forholdet spesifikt. Det er flere grunner til dette. For det første vil jeg ikke ha for mange spørsmålet i opplegget. Det andre er at jeg tror det krever et visst matematisk vokabular for å kunne beskrive dette fenomenet på en god måte. Jeg tror likevel elevene kan inkluderes for å se på denne sammenhengen i institusjonaliseringssituasjonen. De har observert fra det materielle miljøet at når vinkelen øker så vil den hosliggende siden bli mindre, mens den motstående siden blir større. Fra definisjonen får man dermed at cosinus vil bli mindre, mens sinus vil bli større. Den generelle sammenhengen $\sin(90° - \theta) = \cos(\theta)$ kan dermed bli presentert for elevene.

Et annet resultat som jeg også tror passer bedre til institusjonaliseringssituasjonen, er hvordan tan(θ) utvikler seg når θ→ 90°. Som elevene ser utfra Tabell 1 vokser tan(θ) når θ vokser, og i motsetning til sinus og cosinus kan tangens være større enn 1. Dette er fordi:

$$\sin(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hypotenus}$$

Og

$$\cos(\theta) = \frac{hosliggende\ katet}{hypotenus}$$

Siden

$$\tan(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hosliggende\ katet} = \frac{\frac{motstående\ katet}{hypotenus}}{\frac{hosliggende\ katet}{hypotenus}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Får man at når θ→90° vil cos(θ)→0° som gjør at tan(θ)→∞. På den måten lærer elevene hvorfor tan(θ)→∞ når θ→90, men også den alternative skrive måten til tangens, nemlig:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

5.3. 3. økt: Estimater av og egenskaper ved de trigonometriske funksjonene med enhetssirkelen

I den tredje økten går vi over til å se på enhetssirkelen. I denne økten skal de trigonometriske funksjonene gjennom enhetssirkel-definisjonen bli introdusert gjennom direkte-lengder metoden (Hertel & Cullen, 2011). Ifølge dem vil dette hjelpe elevene å forstå kvalitative egenskaper ved de trigonometriske funksjonene. Dette blir viktig siden det vil være et sterkt fokus på at elevene skal være i stand til å gjøre estimater av sinus, cosinus og tangens, og å kunne forklare egenskapene til disse funksjonene. Ifølge Weber (2005) er dette kritisk for å oppnå en god forståelse av de trigonometriske funksjonene ved å «… fysisk eller mentalt konstruere geometriske objekter for å hjelpe dem å håndtere trigonometriske situasjoner» (Weber, 2005, s. 103). Det materielle miljøet som skal hjelpe elevene å utføre disse konstruksjonene er et GeoGebra script. Som Hertel og Cullen (2011) viste kan DGP (GeoGebra) bidra til at elevene blir mer fleksible i hvilke løsningsstrategier de tar i bruk og i hvor stor grad de lykkes med å bruk disse løsningsstrategiene. Dette vil være en fordel siden elevene sannsynligvis vil ha et sterkt begrepsbilde av de trigonometriske funksjonene gjennom forhold-definisjonen. Det vil derfor være nyttig at de bruker hjelpemidler som vil hjelpe dem å se nytten av enhetssirkel-definisjonen også.

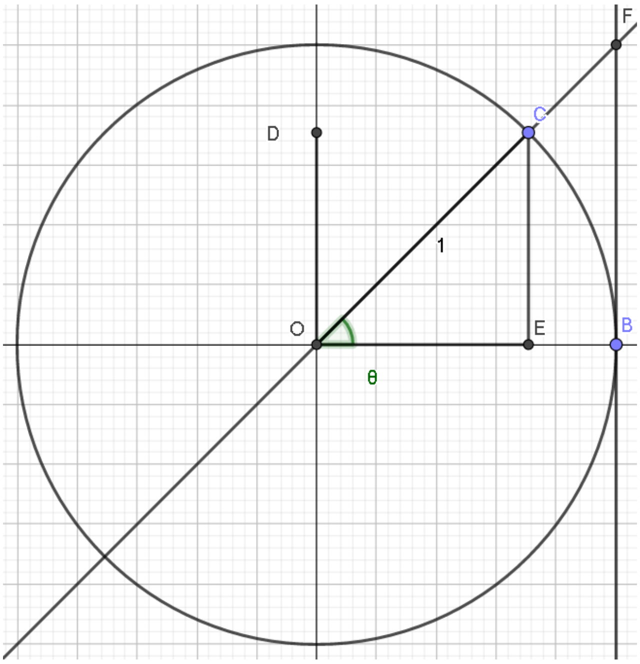
5.3.1. Devolusjonssituasjon I i økt 3

Devolusjonssituasjonen vil starte med at elevene blir kjent med scriptet, samt få en rettferdiggjøring for hvorfor det stemmer med utgangspunkt i det elevene allerede har lært. Scriptet fungerer ved at man fritt kan flytte punkt C langs sirkelens omkrets (se Figur 17). Punkt D er y-koordinaten til C, punkt E er x-koordinaten til C, og punkt F er krysningspunktet mellom linjen som går gjennom OC og tangenten til sirkelen. Begrunnelsen for hvorfor OD og OE representerer sinus og cosinus kan forklares med det elevene har lært om trekanttrigonometri i de foregående øktene. Fra den historiske undersøkelsen så man at trekanttrigonometri først ble mulig når man fikserte radiusen i en sirkel til 1 (Bressoud, 2010). Her går vi andre veien andre veien og bruker elevenes forkunnskaper til for å vise hvorfor OD=sin(θ) og OE=cos(θ):

Vi får dermed:

$$\sin(\theta) = \frac{motstående\ katet}{hypotenus} = \frac{motstående\ katet}{1} = OD$$

$$\cos(\theta) = \frac{hosliggende\ katet}{hypotenus} = \frac{hosliggende\ katet}{1} = OE$$

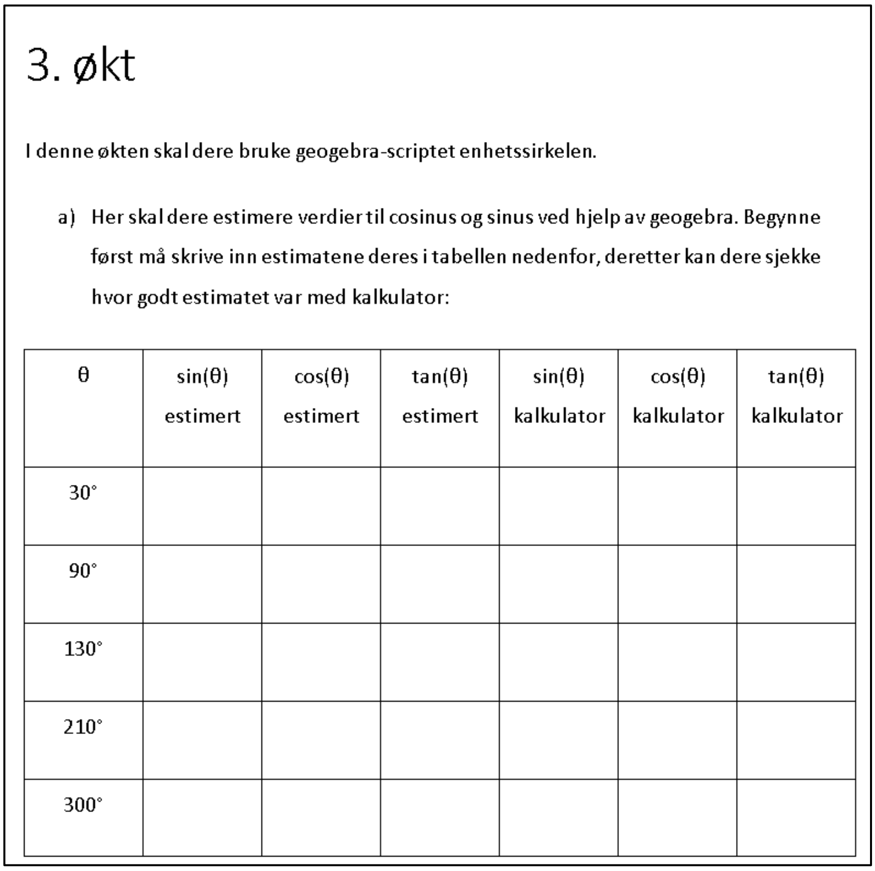


Figur 17. Det materielle miljøet, et GeoGebra-script. linje OD representerer sin(θ), OE representerer cos(θ) og BF representerer tan(θ)

Tangens er ikke like lett å forklare utfra tidligere kunnskap da det ikke er åpenbart at $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ tilsvarer tangenten (utfra Figur 17). Jeg vil derfor forklare den geometriske tolkningen til tangens utfra etymologien til tangens. Ordet tangens stammer fra tangent, jeg tror dette vil være tilstrekkelig for at elevene skal kunne operere med det materielle miljøet og lese ut tanges.

5.3.2. Aksjonssituasjonen i økt 3

Aksjonssituasjonen begynner i oppgave a) (se Figur 18). Her skal to og to elever gå sammen og prøve å løse oppgaven ved hjelp av GeoGebra-scriptet. Som man kan se i Figur 17 har jeg med vilje utelatt at GeoGebra skriver lengdene på OD, OE og BF direkte ut. Dette er fordi jeg tror elevene ikke hadde vært nok involvert i estimeringsprosessen hvis disse verdiene ble utregnet av GeoGebra. Hadde disse verdiene vært gitt tror jeg det hadde vært mer fjerntliggende for elevene å anse sin(θ), cos(θ) og tan(θ) som faktiske lengder, og ikke bare utskrevne tallverdier. For at elevene skal estimere lengden av disse blir de nødt til å måle linjestykkene som representerer sinus, cosinus og tangens. Prosedyren underbygger dermed en forståelse av disse som lengder. Alternativt kan det hende elevene estimerer dette ved å se hvor punktene ligger i forhold til radiusen. Dette vil også være ønskelig å se hos elevene da det indikerer at de anser radiusen som en enhetlig størrelse, noe som er et læringsmål for den neste økten.



3. økt

I denne økten skal dere bruke geogebra-scriptet enhetssirkelen.

a) Her skal dere estimere verdier til cosinus og sinus ved hjelp av geogebra. Begynne først må skrive inn estimatene deres i tabellen nedenfor, deretter kan dere sjekke hvor godt estimatet var med kalkulator:

θ	sin(θ) estimert	cos(θ) estimert	tan(θ) estimert	sin(θ) kalkulator	cos(θ) kalkulator	tan(θ) kalkulator
30°						
90°						
130°						
210°						
300°						

Figur 18. Oppgavetekst til 3. økt

I scriptet er heller ikke vinkel θ gitt. Dette er for at elevene skal bli flinkere på å senere kunne mentalt konstruere vinkler. Hvis vinkelen ble skrevet ut av programmet, ville elevene funnet disse vinklene uten at det hadde vært noen tankeprosess rundt det. Ved at de er utelatt, blir elevene tvunget til å tenke mer på hva en vinkel egentlig representerer. For eksempel når elevene skal finne vinkelen som er 30°, blir de nødt til å resonere rundt hva 30° egentlig betyr. Her kan elevene resonnere seg fram til at 30° er nødt til å være en tredjedel av 90°, og dermed vite sånn cirka hvor de skal plassere vinkelen. Slike resonnementer vil være nyttige når elevene etter hvert skal gå over til å måle vinkler i radianer.

I denne fasen blir også elevene for første gang bedt om å regne med kalkulator. Dette er noe elevene uansett må lære seg, siden man oftest bruker kalkulator når man regner med de trigonometriske funksjonene. Her blir elevene bedt om å bruke kalkulator slik at de kan se hvor godt estimatet deres var. Men enda viktigere er at elevene skaper en kobling mellom verdien de får ut på kalkulatoren og hva denne verdien egentlig betyr.

5.3.3. Devolusjonssituasjon II i økt 3

Før neste del av økten er det nødvendig med en ny devolusjon. I denne delen skal elevene leke en lek jeg har valgt å kalle «trigonometri-spørsmål alias». Alias er en lek der man blir utdelt et ord. Målet med leken er at man skal forklare hva ordet er uten å si selve ordet, slik at noen andre skal klare å gjette hva ordet er. I denne versjonen av alias er det ikke et ord, men et spørsmål elevene skal gjette på. Her vil elevene bli utdelt et ark med flere trigonometrispørsmål (se Figur 19).

Trigonometri-spørsmålet alias ark 1

Her skal dere møte en annen gruppe som har «Gjett spørsmålet leken ark 2».

- Hva er cos(90°)?
- For hvilke verdier av θ er sin(θ) negativ?
- For hvilke verdier av θ er cos(θ)=-0,5?
- For hvilke verdier av θ er tan(θ) positiv?
- Når er sin(θ)=-1?
- For hvilke verdier av θ er cos(θ)=0,8?
- Når er tan(θ)=∞?
- For hvilke verdier av θ er cos(θ) positiv?

Trigonometri-spørsmålet alias ark 2

Her skal dere møte en annen gruppe som har «Gjett spørsmålet leken ark 1».

- Hva er sin(90°)?
- For hvilke verdier av θ er sin(θ)=0,8?
- Når er tan(θ)=0?
- For hvilke verdier av θ er sin(θ) positiv?
- For hvilke verdier av θ er sin(θ)=-0,5?
- Når er cos(θ)=-1?
- For hvilke verdier av θ er cos(θ) negativ?
- For hvilke verdier av θ er tan(θ) negativ?

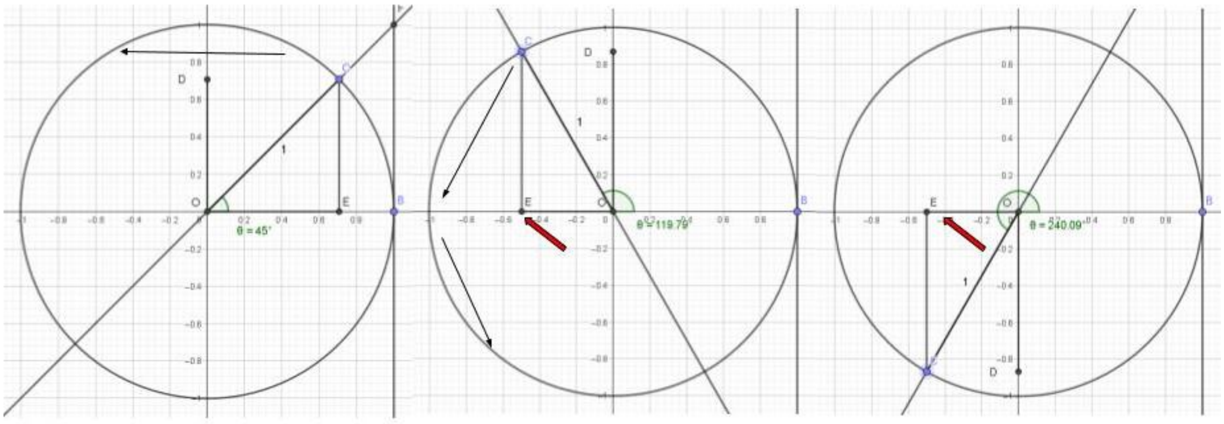
Figur 19. De to spørsmålsarkene til trigonometri-spørsmål alias

Halvparten av elevgruppen vil få ark 1, mens den andre halvparten vil få ark 2. Leken går sin gang på samme måte som alias, det er altså ikke lov å si hva spørsmålet er. Elevene gjetter annenhver gang. For eksempel så begynner gruppen med ark 2 (Gruppe 2) å gjette hva som er spørsmålet til elevene som har ark 1 (Gruppe 1). På samme måte som i alias har Gruppe 1 kun lov til å snakke og bruke ord for å forklare. Elevene kan imidlertid fortelle Gruppe 2 hvordan de skal operere på det materielle miljøet (GeoGebra-scriptet) for å svare på spørsmålet. For hvert spørsmål har elevene ett minutt til å svare, hvis de ikke klarer å gjette spørsmålet kan de avsløre spørsmålet. Deretter bytter de roller og går videre til neste spørsmål.

Før vi begynner vil jeg vise elevene hvordan de kan få GeoGebra til å vise vinkel θ, som ikke ble vist i forrige del av økten. Dette er fordi jeg tror det vil være en bedre adidaktisk potensialet i oppgaven hvis elevene får denne gitt av GeoGebra. For at elevene skal skjønne gangen i leken tror jeg det er lurt å kjøre noen eksempler felles, der jeg lar en elev operere på miljøet og hele klassen kan være med på gjette spørsmålet, mens jeg skal prøve å forklare slik at elevene skal gjette hva spørsmålet er. For eksempel velger jeg at elevene skal gjette på spørsmålet «hva er sinus til 180°?». Da kan jeg si til eleven som operer på GeoGebra scriptet: «plasser punkt C helt til venstre på enhetssirkelen». Allerede her kan klasse begynne å gjette hva spørsmålet kan være. Hvis de ikke klarer å gjette hva spørsmålet er kan jeg for eksempel si «en av de trigonometriske funksjonene til denne vinkelen er lik 0». Jeg tror dette vil være tilstrekkelig informasjon til at noen av elevene vil gjette hva spørsmålet er. Hvis det er nødvendig, kan jeg gjenta dette med flere eksempler til jeg tror elevene har forstått gangen i leken.

5.3.4. Formuleringssituasjonen i økt 3

I oppgave a) har elevene utviklet en implisitt løsningsstrategi for å finne sinus, cosinus og tangens ved gitte vinkler. Denne løsningsstrategien blir gjort eksplisitt i alias-leken de nå skal gjennomføre. Dette skjer gjennom at elevene som ser spørsmålet er nødt til å forklare for en annen elevgruppe hvordan de finner svaret på spørsmålet. For eksempel kan vi se på det tredje spørsmålet på ark1. Her er spørsmålet «For hvilke verdier av θ er cos(θ)=-0,5?». Hvordan en elev kan gå frem for å forklare spørsmålet ved hjelp av det materielle miljøet kan man se i Figur 20.



Figur 20. Eksempel på hvordan en elev kunne gått fram for å forklare spørsmålet: «For hvilke verdier av θ er cos(θ)=-0,5?»

Helt til venstre i figuren har man en vilkårlig vinkel, elevene som forklarer (Gruppe 1), ber elevene som skal gjette (Gruppe 2) flytte punkt C slik at E ligger på -0,5. Her kan det tenkes at enkelte elever vil si seg fornøyde ved at de ikke tenker på at det kan være to vinkler som svarer til denne verdien. For et fullgodt svar kan Gruppe 1 deretter be Gruppe 2 flytte vinkelen nedover som indikert av pilene på den midterste sirkelen i Figur 20 slik at punkt E igjen ligger på -0,5. Dermed bør elevene ha tilstrekkelig med informasjon til å gjette hva spørsmålet er. Hvis Gruppe 2 fortsatt ikke klarer å gjette hva spørsmålet er kan Gruppe 1 fortsette å gi hint inntil minuttet er omme.

5.3.5. Valideringssituasjonen i økt 3

I denne økten glir formuleringssituasjonen og valideringssituasjonen inn i hverandre. Dette er fordi alias-leken også tjener et annet formål ved siden av å la elevene gjøre løsningsstrategiene sine fra aksjonssituasjonen eksplisitte. I denne delen ser også elevene på en rekke egenskaper ved de trigonometriske funksjonene, der noen er mer generelle enn andre. Som Weber (2005) påpeker vil en elev med god forståelse av de trigonometriske funksjonene være i stand til å forklare hvorfor de innehar visse egenskaper. Videre sier han at dette oppnås ved at de har en proceptuell forståelse av de matematiske objektene man ser på. Dette innebærer at man forstår *prosessen* som for eksempel sinus innebærer. Alias-leken ble designet for at elevene skulle få innblikk i disse prosessene. I denne leken blir elevene nødt til å formulere fremgangsmåten (prosessen) for å kunne svare på spørsmål som omhandlet egenskaper ved de trigonometriske funksjonene. Når elevene skal gjette spørsmålet er de også nødt til å tolke hva en fremgangsmåte innebærer.

Resten av valideringssituasjonen vil gå ut på å ha en felles gjennomgang. Både for å oppsummere og for å sikre at alle elevene får med seg de egenskapene de ikke klarte å gjette seg frem til eller ikke forstod. Generelle egenskaper som kan være aktuelt å ta opp her kommer an på hva elevene fikk til under formuleringssituasjonen. Hvis det var et spørsmål som mange slet med å få til kan man ta en gjennomgang av dette. Eksempler på egenskaper man kan gjennomgå er hvilket fortegn de trigonometriske funksjonene har for forskjellige vinkler eller å se på ekstremalverdier til sinus, cosinus og tangens. Her er det viktig at elevene forklarer *hvorfor* de har de egenskapene som de har. I en muntlig felles gjennomgang kan også elevene få anledning til å prøve å forklare hvorfor funksjonene innehar disse egenskapene uten direkte manipulering av det materielle miljøet. De får dermed trening i å mentalt konstruere geometriske objekter for å forklare egenskapene ved de trigonometriske funksjonene.

5.3.6. Institusjonaliseringssituasjonen i økt 3

Institusjonaliseringen vil ikke være en stor del av denne økten. Det er fordi det ikke er noen særlig ny notasjon elevene jobber med og kunnskapen elevene har opparbeidet seg til dette punktet er ganske institusjonell av natur. Det er likevel et par ting jeg vil inkludere i denne fasen. Det ene er en presisjon av at denne fremgangsmåten kun gjelder for enhetssirkelen. Dette kan vises veldig fort med et eksempel der man har en sirkel med radius større (eller mindre) enn 1. Dette vil være et viktig poeng som vi skal ta med oss videre til neste økt, der vi skal se på fordelene med å bruke radiusen som en enhetsstørrelse slik at enhver sirkel essensielt er en enhetssirkel. Det andre som vi skal se på er de periodiske egenskapene ved de trigonometriske funksjonene når de er definert utfra enhetssirkelen. Dette ble ikke med i de foregående situasjonene siden det er vanskelig å implementere i GeoGebra på en god måte og siden jeg tror det ville forstyrret det adidaktiske potensialet. Det er imidlertid enkelt å demonstrere disse egenskapene med den kunnskapen elevene har opparbeidet løpet av økten. I og med at vi jobber med en sirkel tror jeg det vil være enkelt å overbevise elevene om at en vinkel er uforandret hvis du gjør en 360° omdreining. På den måten får man at:

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 360°)$$

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 360°)$$

Utfra det elevene har jobbet med tror jeg også det vil være greit å vise hvorfor man for tangens får:

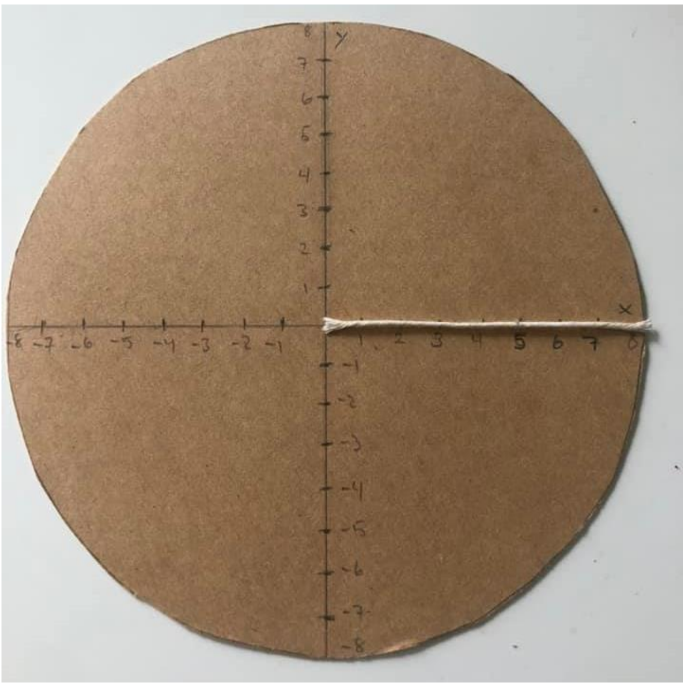
$$\tan(\theta) = \tan(\theta + 180°)$$

5.4. 4. økt: Intro til radianer gjennom radius som enhetsstørrelse

I den fjerde og siste økten skal elevene bli kjent med radianer og hvordan radianer kan brukes i enhetssirkelen. I designet er det blant annet fokus på at elevene skal få et godt begrepsbilde av radianer. Akkoc (2008) rapporterte om elevers begrepsbilde av radianer. Et av hovedfunnene fra denne studien var at elevers begrepsbilde av grader overskygget for deres forståelse av radianer. Derfor er det gjort et bevisst valg i denne introduksjonen til radianer at det ikke vil foregå noen sammenligning mellom grader og radianer. En annen grunn til at elevene i denne studien hadde et svakt begrepsbilde av radianer var at de ikke så sammenhengen mellom buelengder og vinkler. Elevene skal derfor jobbe med de trigonometriske funksjonene der buelengden er tatt som argument i funksjonene. Et annet funn i Akkocs studie var at elevene trodde at radianer alltid var uttrykt ved π. For at elevene ikke skal innarbeid denne misoppfatning vil de jobbe med vanlige reelle tall, der notasjon med π først vil bli introdusert i institusjonaliseringen.

Designet er også informert av Moore og hans kollegers studie (2013). Denne studien viser fordelene ved å ta radiusen som enhetsstørrelse. En vanlig misoppfatning hos elever er at mål i radianer kun gjelder for enhetssirkelen, og at det er nødvendig å «konvertere» en gitt sirkel til enhetssirkelen for at mål i radianer skal gi mening (Mooreet al., 2013). For å unngå dette er det materielle miljøet designet for at elevene skal bruke radiusen som enhetsstørrelse. Det materielle miljøet (se Figur 21) består av en pappsirkel der x- og y-aksen med verdier i cm er oppgitt og en hyssingbit som har samme lengde som radiusen. Halvparten av elevene vil bli utdelt en sirkel med radius lik 8 cm, mens den andre halvparten vil få en sirkel med radius lik 12 cm.

.



Figur 21. Det materielle miljøet i økt 4 består av en pappsirkel med en hyssingbit som har lik lengde som radiusen

5.4.1. Devolusjonssituasjonen i økt 4

I devolusjonssituasjonen skal elevene bli kjent med det materielle miljøet, samt noen begreper de skal bruke denne økten. Et av disse begrepene er *taulengde* særlig i sammenheng med buelengde. En taulengde referer til hvor mange lengder av hyssingbiten en avstand svarer til. For eksempel hvis hyssingbiten er 8 cm, så er 8 cm 1 taulengden, 12 cm er 1,5 taulengder, 16 cm er 2 taulengder osv. Dette er det elevene trenger å kunne for å løse oppgave a) (se Figur 22), som jeg anser som en del av devolusjonssituasjonen. Dette er fordi oppgave a) er designet for at elevene skal bli kjent med miljøet, og for å bli komfortable med å bruke taulengder som en måleenhet. Jeg ser det som en fordel at elevene blir kjent med miljøet gjennom å interagere med det selv. I denne oppgaven skal derfor elevene plassere hyssingbiten langs omkretsen av sirkelen og dermed svare på hvor mange taulengder henholdsvis hele, halve og kvarte sirkelen svarer til. Her forventes det at elevene vil komme fram til tilnærmede verdier som 6,3, 3,1 og 1,5. I denne fasen av økta kommer ikke disse svarene til å bli kommentert i noen særlig grad, men vil bli tatt opp igjen i institusjonaliseringen der vi vil se at disse verdiene egentlig er 2π, π og $\frac{\pi}{2}$.

4. økt

a) I denne oppgaven skal dere finne ut hvor mange taulengder det er rundt deler av en sirkel. Bruk hyssingbiten og pappsirkelen til å fylle ut tabellen nedenfor:

Del av sirkelen	Taulengder
Hele sirkelen	
Halve sirkelen	
Kvarte sirkelen	

b) I tabellen nedenfor er buelengder oppgitt (i taulengder). Buelengden forteller hvor et punkt ligger på sirkelens omkrets. I denne oppgaven skal dere finne x- og y-koordinaten til disse punktene. Koordinatene skal gis i taulengder og fylles inn under:

buelengde	x-koordinat	y-koordinat
1		
1,8		
3,1		
4,5		

c) Møt en gruppe som har en annen sirkel enn dere. Bli enige om en buelengde. Dere skal fortelle den andre gruppa hvordan de skal gå frem for å finne x- og y-koordinaten til denne buelengden på sirkelen deres.

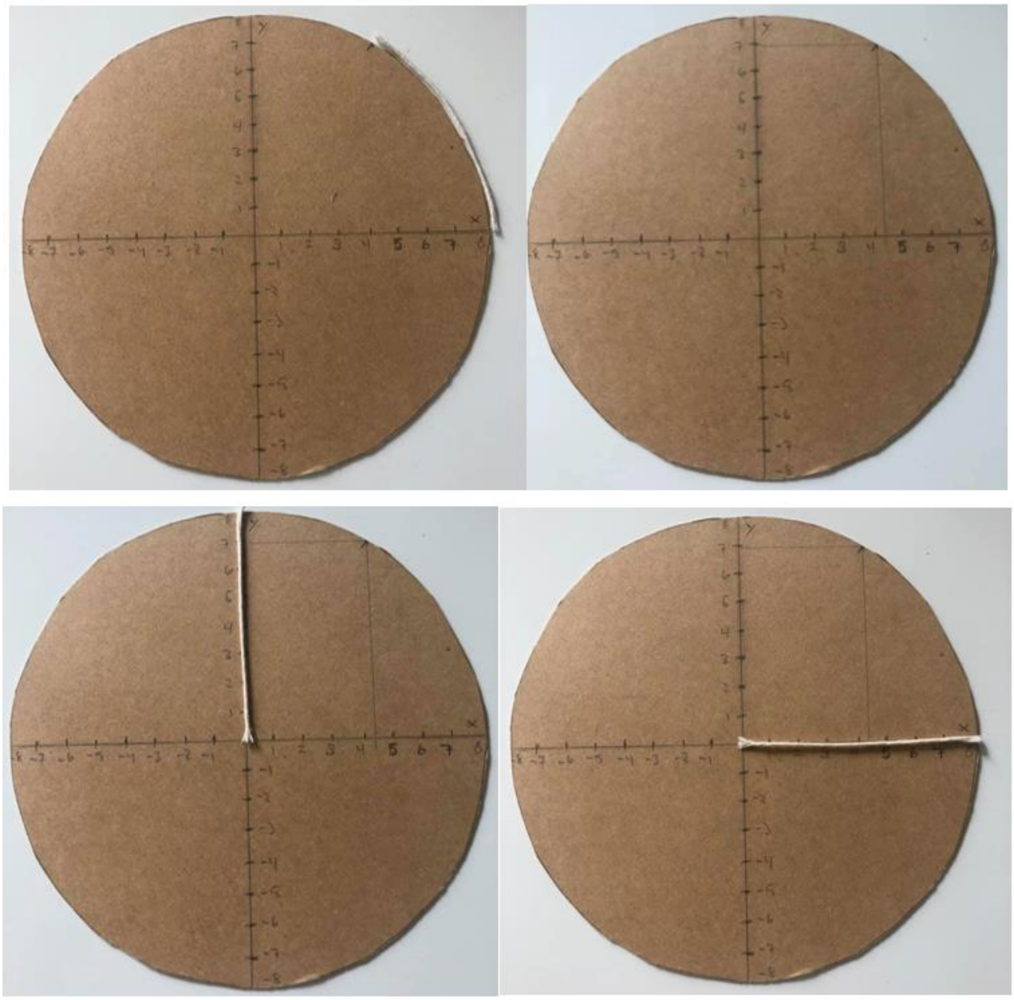
d) Lag en generell formell for hvordan man gjør om en målt lengde til en lengde i taulengder.

Figur 22. Oppgaveark til 4. økt

Neste del av devolusjonssituasjonen er å informere elevene om oppgave b). Her møter elevene begrepet *buelengde*. De vil bli informert om at det referer til hvor langt langs omkretsen man beveger seg der lengst til høyre på x-aksen er startpunktet. I oppgaveteksten blir elevene bedt om å finne punkter som svarer til gitte buelengder, og deretter finne x- og y-koordinatene til disse punktene. Jeg regner med at elevene er kjent med hvordan man finner koordinatene til et punkt fra før av. Det som kanskje er nytt for elevene er at disse koordinatene skal oppgis i taulengder. Dette står i oppgaveteksten, men jeg vil likevel presisere at disse koordinatene ikke skal oppgis i cm, men i taulengder da dette er essensielt for at elevene skal nå målkunnskapen.

5.4.2. Aksjonssituasjonen i økt 4

Aksjonssituasjonen starter idet elevene går løs på oppgave b). Her har elevene fått oppgitt 4 forskjellige buelengder (oppgitt i taulengder) og skal finne x- og y-koordinaten til punktet som buelengden svarer til. En mulig fremgangsmåte for den første buelengden i oppgave b) er vist i Figur 23. Først blir buelengden av 1 taulengde målt opp ved hjelp av hyssingbiten. Deretter er det blitt tegnet inn hvor x- og y-koordinatene vil ligge. I de to siste bildene er hyssingbiten plassert langs aksene for å se hva taulengden av koordinatene er. Når hyssingbiten er lagt opp på aksene som i Figur 23, kan elevene enten estimere taulengden ved øyemål, eller ved å se hvor mange centimeter koordinatene svarer til og dermed konvertere til taulengde. Ved den sistnevnte metoden ville elevene i dette tilfellet få at y-koordinaten er ca. 6,9 cm og x-koordinaten er ca. 4,4 cm. I taulengder får man da at $y = \frac{6{,}9}{8} = 0{,}86$ og $y = \frac{4{,}4}{8} = 0{,}55$. Begge metodene har sine fordeler; elevene som finner taulengden på øyemål vil kanskje få et sterkere begrepsbilde av radian som enhetsstørrelse, mens elevene som kalkulerer taulengden vil implisitt ta i bruk den generelle sammenhengen mellom målte lengder og mål i radianer. Denne sammenhengen vil bli sett nærmere på i validerings- og institusjonaliseringssituasjonen.



Figur 23. Her er det materielle miljøet brukt til å finne buelengden som er en radian, deretter er taulengdene av x- og y-koordinaten funnet

5.4.3. Formuleringssituasjonen i økt 4

I oppgave c) starter formuleringssituasjonen. Her skal elevene møte en annen gruppe som hadde en annen sirkel enn dem selv. Altså vil det på hvert gruppepar være en gruppe med en sirkel med radius lik 8 cm og en sirkel med radius lik 12 cm. Gruppene skal bytte sirkel, slik at de i denne oppgaven operer på en ny sirkel enn i den forrige oppgaven. Gruppene blir sammen enige om en felles buelengde som begge gruppene skal undersøke. Deretter går gruppene på omgang og forteller hvordan den andre gruppen skal operere på den nye sirkelen. I løpet av formuleringssituasjonen vil elevene dele fremgangsmåtene sine. Dette gjør at de er nødt til å gjøre løsningsstrategien fra oppgave b) eksplisitt, samtidig som elevene kan få muligheten til å se en annen fremgangsmåte enn sin egen.

Et sentralt poeng med denne oppgaven er at elevene vil erfare at buelengden de har bestemt seg for vil gi det samme punktet på de to sirklene, og at de tilsvarende x- og y-koordinatene også vil være de samme når de er oppgitt i taulengder.

5.4.4. Valideringssituasjonen i økt 4

I oppgave d) blir elevene bedt om å finne en generell formell for hvordan man gjør om en målt størrelse til en størrelse i taulengder. Flere av elevene har nok implisitt brukt en slik formel i aksjonssituasjonen, dette ble så gjort eksplisitt i formuleringssituasjonen. I spørsmålet er det ikke gitt noen notasjon for de forskjellige størrelsene. Dette er fordi jeg tror hvis jeg hadde navngitt størrelsene som elevene har undersøkt løpet av økten, kunne dette vært en kilde til forvirring. Jeg har derfor latt elevene stå fritt når det kommer til hvordan de vil formulere formelen. Dette kan for eksempel gjøres med bokstaver som:

$$TL = \frac{L}{R}$$

Der TL er taulengde, L er en målt lengde og R er radiusen (lengden av en taulengde). En annen tenkelig fremgangsmåte er at elevene velger å skrive en formel med ord, for eksempel:

$$Taulengde = \frac{målt\ lengde}{lengde\ av\ hyssing}$$

I løpet av en felles gjennomgang kan forskjellige formler bli vist på tavla, og elevene kan få muligheten til å fortelle hvordan de kom fram til formelen sin. Mer formell notasjon vil komme i institusjonaliseringssituasjonen.

5.4.5. Institusjonaliseringssituasjonen i økt 4

I institusjonaliseringssituasjonen vil elevene bli introdusert for mer formelle begreper og notasjon. I denne økten jobbet elevene med taulengde som en måleenhet. Taulengden var lik radiusen. Jeg vil fortelle at det vi har kalt for taulengde blir i matematikk kalt *radian*, og at dette navnet kommer av at en radian er lik lengden av radiusen til en sirkel. På den måten er alle svarene elevene har kommet fram til mål i radianer.

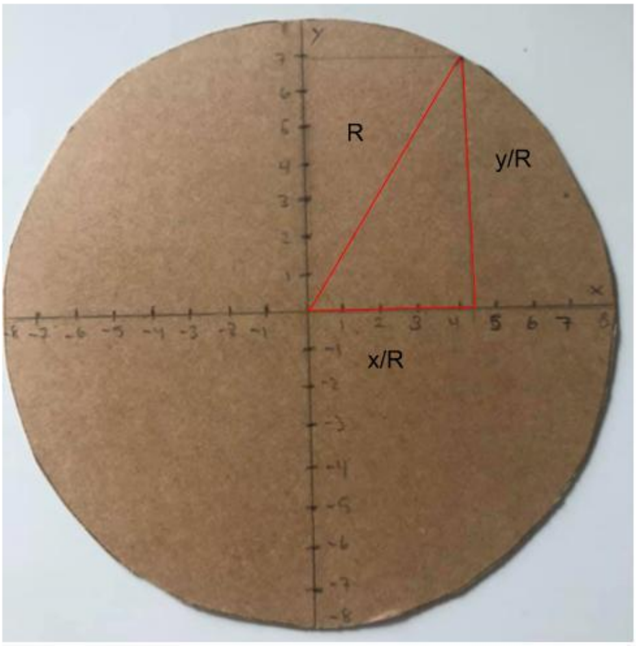
Etter dette vil jeg komme inn på sammenhengen mellom x- og y-koordinatene som elevene fant og sinus og cosinus. Flere av elevene har nok allerede innsett at måten man fant disse koordinatene minnet om hvordan de fant sinus og cosinus i enhetssirkelen, og at verdiene i taulengder også så ut til å være typiske verdier for sinus og cosinus. Dette kan vises ved hjelp av trekanttrigonometri (se Figur 24). Dette samsvarer med den formelen som elevene allerede har funnet i oppgave d) ved at:

$$Taulengde = \frac{målt\ lengde}{lengde\ av\ hyssing}$$

Når den målte lengden er y-koordinaten får man:

$$\frac{målt\ lengde}{lengde\ av\ hyssing} = \frac{y}{R} = \sin(\theta)\ [\text{i radianer}]$$

Slik ser elevene at det de har funnet er faktisk sinus og cosinus til sirkelen ved forskjellige buelengder.



Figur 24. Forklaring på sammenhengen mellom målte verdier x og y og sinus og cosinus

Det er imidlertid en stor forskjell fra tidligere. Før har elevene funnet sinus og cosinus til vinkler, her derimot ser elevene at man også kan ta buelengde (i radianer) som argument til de trigonometriske funksjonene. Dette er en fin overgang til å presisere at buelengde og vinkel er det samme når man snakker om radianer. Noe som elevene allerede har erfart i sin interaksjon med det materielle miljøet

Helt til slutt skal vi komme tilbake til resultatet elevene fikk i oppgave a). Til nå har elevene ennå ikke bruk π i sammenheng med radianer. Jeg tror dette har vært hjelpsomt for elevenes forståelse, men denne konvensjonen er essensiell at elevene kjenner til. Jeg tror det er sannsynlig at elevene har fått resultater som er veldig nærme de faktiske verdiene. Hvis jeg spør elevene om de husker formelen for omkretsen av en sirkel er jeg sikker på at flere kjenner den, nemlig $2\pi R$. Jeg tror det er rimelig å anta at verdien elevene fant for taulengder rundt hele sirkelen burde være nærme 2π($\approx 6{,}3$). Dette kan elevene enkelt sjekke verdien av 2π på en kalkulator. På tilsvarende måte kan jeg så vise at resultatet for halve sirkelen og kvarte sirkelen er π og $\frac{\pi}{2}$, og at disse også burde stemme over ens med resultatene som elevene fikk.

6. Didaktiske refleksjoner

I dette avsnittet vil jeg gjøre noen didaktiske refleksjoner rundt designet mitt, DI som forskningsmetode og hva jeg har fått ut av prosessen i sin helhet.

6.1. Kommentarer til designet

Jeg vil begynne med å kommentere designet av de didaktiske situasjonene. Hver økt er bygd opp rundt konstruktene som man finner i TDS. I devolusjonssituasjonene prøver jeg å formidle oppgaven til elevene og å få dem til å ta over ansvaret for læringen, og forhandler dermed frem den didaktiske kontrakten. Jeg har forsøkt å gjøre aksjons-, formulerings- og valideringssituasjonene adidaktiske. Og til slutt prøvd å koble den kunnskapen elevene har opparbeidet seg gjennom disse situasjonene til institusjonell kunnskap. Jeg vil innrømme at det ikke har vært lett, spesielt å designe de adidaktiske situasjonene. Her er det en fin balansegang mellom det å la elevene være autonome og å ha nok struktur i en oppgave for at elevene skal klare å fullføre en oppgave på egenhånd. I tillegg har det vært et poeng at elevene har sammenlignbare resultater de kan diskutere. Jeg har ofte løst dette dilemmaet ved å gi elevene tabeller de skal fylle ut og deretter gitt de en viss frihet ved at de kan undersøke valgfrie verdier. På denne måten har elevene fått sammenlignbare resultater, der de også kan se hvordan de trigonometriske funksjonene gradvis utvikler seg, samtidig som elevene får en følelse av å være autonome.

Et annet didaktisk valg jeg har gjort er å holde oppgavene matematiske i sitt innhold. En vanlig måte å formulere matematiske oppgaver på i skolen er å konstruere en slags fortelling. For eksempel noe som «Lars skal bygge et tak …» eller «Lise går en skitur i en sirkulær løype …», som kan være aktuelt i trigonometrioppgaver. Jeg har med vilje unngått slike formuleringer. Ifølge Lee (1996) kan slike forsøk på å gjøre matematikk «relevant» for elevene skape forvirring for elevene og frustrasjon for lærerne. Videre argumenterer hun for at slike formuleringer forhindrer akkulturasjonsprosessen som er nødvendig når man starter med matematikk. En sentral del av å bli del av en kultur er å lære seg språket. Hva kan man si? Hva er det vi snakker om, og hvordan snakker vi om det? Hvilke symboler, objekter og fremgangsmåter tar man i bruk? (Lee, 1996) Svaret på disse spørsmålene kommer man til i institusjonaliseringen, men hvorfor ikke la elevene ta del av kulturen de skal bli en del av fra starten av? Dette står ikke i motsetning til prinsippene i TDS. Relevans kan fastsettes på mange måter. I TDS skaper man relevans gjennom at en målkunnskap representeres av et problem med en optimal løsning. Hvordan dette problemet er formulert er åpent for tolkning. I dette designet er disse problemene formulert med tanke på akkulturasjonsperspektivene som er beskrevet ovenfor.

6.2. Relevans i skolen

Som forberedelse til mitt design leste jeg to artikler skrevet av Brousseau og hans kolleger (2002; 2004) som omhandlet to forskjellige læringseksperimenter. I disse eksperimentene ble TDS tatt i bruk for å designe undervisning av statistikk og sannsynlighet og rasjonale- og desimaltall på barnetrinnet. Siden hverken tema eller aldersgruppe er overensstemmende med denne oppgaven min ble ikke artiklene direkte tatt i bruk, men har bidratt til inspirasjon. Det er imidlertid en viktig innrømmelse som Brousseau gjør: hans didaktiske sekvenser ble ikke designet for å bli brukt i skoler. Dette skyldes at vanlige skoler ikke har den samme matematiske og didaktiske assistansen som er tilgjengelig for forskere (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2004). Istedenfor sier han at de ble designet som eksperimenter i didaktikk og epistemologi. Dette er noe jeg selv har erfart løpet av denne oppgaven. Med alt arbeidet som ligger bak det å planlegge en slik didaktisk sekvens er det urealistisk at en lærer skal gjøre dette i samme grad i en ellers hektisk hverdag. I tillegg kommer etterarbeidet som ikke var en del av denne oppgaven. Likevel er det mange elementer av TDS og DI som jeg tror kan være nyttig og lærerikt for lærere som er ute i skoler. Dette gjør seg også synlig ved at det i forskningen har vært et økt fokus på at DI også skal være mer aktuelt for skolene (Artigue, 2015). I likhet med Artigue tror jeg DI kan ha et positivt bidrag på skolematematikken. Etter min erfaring kan skolematematikken være styrt av læreboka. I Matematikk 1T (Heiret al., 2012) har jeg sett hvordan trigonometri blir presentert for elevene. Her blir elevene presentert for resultater, metoder bli demonstrert ved eksempler og resten er opp til eleven gjennom mengdetrening. Det er svært sterkt fokus på å vise *hvordan* man gjør noe, framfor å vise *hvorfor* det er slik. Her kommer viktigheten av det didaktiske og epistemologiske forarbeidet frem. Denne delen av designet er med på å informere læreren om hvordan man kan la elevene ta del i egen læringsprosess. Slik at de selv kan finne ut både hvordan og hvorfor man utfører matematiske prosesser. Videre la jeg merke til at i denne læreboken var trigonometri et kapittel på 40 sider, 2 av disse ble viet til enhetssirkelen; noe jeg valgte å sidestille med trekanttrigonometri. Dette var begrunnet av den forberedende analysen, noe som viser viktigheten av å sette seg inn i et emne for å kunne gjøre autonome valg som lærer for at elevene skal få en så god undervisning som mulig.

6.3. Personlig utbytte

Personlig har jeg funnet denne prosessen veldig lærerik på flere nivåer. Gjennom å aktivt ha tatt i bruk TDS og DI har jeg lært å se undervisning på en ny måte. Hvordan man kan systemisk dele inn undervisningen i mindre deler tror jeg vil være et nyttig verktøy for å forstå prosessene som finner sted i en læringssituasjon. DI har bidratt til å gi meg et nytt perspektiv på planlegging av undervisning. Spesifikt har jeg erfart viktigheten av å sette seg inn i epistemologien og didaktikken av et emnet. I denne oppgaven har jeg fått utfordret min egen matematiske kunnskap på emnet, noe som er lett å ta for gitt når man har studert matematikken så lenge som jeg har. Jeg har også gjort et dypdykk i den didaktiske forskningen på emnet. Dette har gjort at jeg har sett nytteverdien av å være oppdatert på den didaktiske forskningen, samtidig som jeg har lært hvordan man går fram for å få innblikk i dette.

Det er beklagelig at jeg befant meg i en situasjon der jeg ikke fikk anledning til å teste designet mitt i praksis. Dette er det jeg har savnet mest i denne oppgaven og det har noen klare ulemper. Det er i realiseringen man ser hva elevene fikk til og hvordan de responderte på oppgavedesignet. I etterkant av en realisering vil man se hvilke justeringer man eventuelt blir nødt til å gjøre. For eksempel kan det hende jeg ville opplevd at elevene trengte mer trening i et tema før det var gunstig å gå videre. Slike tilpasninger av opplegget ble altså ikke mulig i denne oppgaven. En annen fase av DI som ikke ble mulig var a posteriori analysen og valideringen. Det er ingen måte å kunne si hvor godt et design er uten å implementere designet og analysere resultatene. Heldigvis fikk jeg et glimt av hvordan DI fungerer i praksis i mitt pilotprosjekt til denne masteroppgaven som jeg utførte høsten 2019. I dette prosjektet skulle elevene gjennom DI selv klare å finne en generell formel for summen av to påfølgende trekanttall. Der fikk jeg indikasjoner på at elevene syntes det var svært motiverende å ta en aktiv rolle i matematikkundervisningen. Jeg husker godt et utsagn fra en av elevene i mine transkripsjoner: «Dette her *er* matte, sånn genimatte!», i det de selv klarte å komme fram til det generelle uttrykket som var målkunnskapen for økta. Selv om det ikke ble anledning til å teste designet mitt i denne oppgaven, vil det komme flere muligheter for å gjøre dette når jeg selv går ut som lærer. Det vil gi meg anledning til å kjøre den didaktiske sekvensen flere ganger og forhåpentligvis forbedre designet fra gang til gang. Design av undervisning er en kontinuerlig prosess som egentlig aldri tar slutt. Et design vil aldri være perfekt, man kan bare håpe på å forbedre det med tiden. I etterkant av denne masteren tror jeg at jeg vil være forberedt til å møte denne utfordringen, hvor jeg kan utnytte den kunnskapen jeg nå sitter med for å stadige utvikle meg og min praksis som lærer.

Referanseliste

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. Bikner-Ahsbahs, A., Knipping C. & Presmeg N. (Red). *Approaches to qualitative research in mathematics education* (s.467-496). Dordrecht, Nederland: Springer Science + Business Media Dordrecht.

Artigue, M., Haspekian, M. & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). I A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Red.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (s. 47-64). Advances in Mathematics Education. Cham, Sveits: Springer International Publishing.

Blackett, N. & Tall, D. (1991). *Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software*, 1, 144-151. Assisi, Italia. PME.

Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *The Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, Virginia. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20, 363-411.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part I: Rationals as measurement. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23, 1-20.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2013). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. Dordrecht, Nederland: Springer Science + Business Media.

Cooke, R. (2005). *The History of Mathematics, a Brief Course (2. utg.)*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Csongor, J. (1985). Think Radian. *The Mathematics Teacher,78*(2), 106-106.

Eggleton, P. (1999). Experiencing radians. *The Mathematics Teacher, 92*(6), 468-471.

Gray, E. & Tall, D. (1992). Success and failure in mathematics: Procept and procedure 2. *Mathematics teaching*, 142, 6-10.

Green, D. (1977). Historical Topics: Plane Trigonometry. *Mathematics in School, 6*(5), 7-10.

Hertel, J. & Cullen, C. (2011). Teaching trigonometry: A directed Lenght approach. *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 1400-1407). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Kepceoglu, I., & Yavuz, L. (2016). Teaching a concept with GeoGebra: Periodicity of trigonometric functions*. *Educational Research Review, 11*, 573-581.

Kendal, M., & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, 34(1), 4-8.

Khan Academy. (2018). Limit of sin(x)/x as x approaches 0 [videoklipp]. Hentet fra https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-8/v/sinx-over-x-as-x-approaches-0

Khan Academy. (2018). Limit of (1-cos(x))/x as x approaches 0 [videoklipp]. Hentet fra https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-8/v/1-cosx-over-x-as-x-approaches-0

Lamar, M. (2017). The lim of sin(x) /x as x tends to 0 = 1, if x is in radians. But why is the lim of sin(x) /x as x tends to 0 = pi /180 if x is in degrees? [Svar i forum]. Hentet fra https://www.quora.com/The-lim-of-sin-x-x-as-x-tends-to-0-1-if-x-is-in-radians-But-why-is-the-lim-of-sin-x-x-as-x-tends-to-0-pi-180-if-x-is-in-degrees

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra* (s. 87-106). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Moore, K., LaForest, K., & Kim, H. (2016). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics, 92*, 221-243.

NDLA. (2018). Formlike trekanter. Hentet fra https://ndla.no/nb/subjects/subject:29/topic:1:165344/topic:1:165378/resource:1:22943

Palma, M. (u.å). Triangle maker v2 [GeoGebra-script]. Hentet 15 juni 2020 fra https://www.GeoGebra.org/m/NtfTvamb

Singha, S. (2018). Why is cos x the derivative of sin x? [svar i forum]. Hentet fra https://www.quora.com/Why-is-cos-x-the-derivative-of-sin-x

Strømskag, H. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university* *college*. Doktoravhandling, Universitet i Agder, Kristiansand. http://hdl.handle.net/11250/2394000

Strømskag, H. (2017a). A methodology for instructional design in mathematics—with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM Mathematics Education* 40, 909–921.

Strømskag, H. (2017b). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 22 (2), 71–91.

Strømskag, H. (2020). Shunning algebraic formalism: Student teachers and the intricacy of percents. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40(1), 55-96.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Thompson, P. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Red.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, s. 31-49). Morelia, Mexico: PME.

Trigonometry. (u.å). I wikipedia. Hentet 27. april 2020 fra https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry
https://mathworld.wolfram.com/Trigonometry.html 27.04.20

Utdanningsdirektoratet (2008). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Utdanningsdirektoratet (2020). *Matematikk T (MAT09-01): Kompetansemål og vurdering.* Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat09-01/kompetansemaal-og-vurdering/kv42

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*. 17. 91-112.

Weisstein, E. W. (u.å.a). Radian. *I MathWorld – a Wolfram Web Resource.* Hentet fra https://mathworld.wolfram.com/Radian.html

Weisstein, E. W. (u.å.b). Trigonometry. *I MathWorld – a Wolfram Web Resource.* Hentet fra https://mathworld.wolfram.com/Trigonometry.html

Zamorano, F., Cortes, C. & Herrera, M. (2019). Designing an intuitive interface to enhance trigonometry learning. E. Bohemia, G. Gemser, N. Fain, C. de Bont & R A. Almendra (Red.) *Conference Proceedings of the Academy for Design Innovation Management*. (Vol 2, s. 1242-1258). London, Storbritannia: Academy for Design Innovation Management.

NTNU

Kunnskap for en bedre verden