

Erwin Hammer

## Kommuneøkonomi og allokering i kommunale investeringsfond

En studie av kommuneøkonomiens betydning for allokeringen i Trondheim kommunes kraftfond

Juni 2021





Kunnskap for en bedre verden

# Kommuneøkonomi og allokering i kommunale investeringsfond

En studie av kommuneøkonomiens betydning for allokeringen i Trondheim  
kommunes kraftfond

**Erwin Hammer**

Masteroppgave i Finansiell økonomi

Innlevert: Juni 2021

Hovedveileder: Ragnar Torvik

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for samfunnsøkonomi



---

## **Forord**

Denne masteroppgaven markerer slutten på mitt masterstudium i finansiell økonomi ved NTNU og min tid som student i Trondheim. I den anledning vil jeg takke venner, familie og fagstaben i Trondheim kommune for deres hjelp og bidrag til oppgaven. Sist men ikke minst ønsker jeg å rette en stor takk til min veileder Ragnar Torvik for strålende veiledning og verdifulle innspill.

Trondheim, 7. juni 2021

Erwin Hammer

---

## Sammendrag

Denne masteroppgaven studerer investeringsmandatet til Trondheim kommunes kraftfond og sammenligner innholdet i mandatet med kjente resultater fra finansteorien. Videre diskuteres faktorer som påvirker allokeringen i kraftfondets portefølje. Spesielt rettes det fokus på hvilken effekt kommuneøkonomien har for allokeringen i porteføljen.

Trondheim kommune kan sees på som en institusjonell investor med eksogen og ikke-omsettbar inntekt ettersom kommunen mottar skatteinntekter og statlige overføringer. I følge finansteorien skal det være mulig for kommunen å jevne ut sitt konsum ved å endre allokeringen i referanseporteføljen så fremt det finnes en samvariasjon mellom inntektene og aktivaklassene.

Ved å bruke inntektsdata fra Trondheim kommune og avkastninger fra referanseindeksene til både SPU og SPNs aksje- og renteportefølje vises det at effekten av å inkludere kommuneinntekter i porteføljevalget er neglisjerbar. I henhold til økonomisk teori tilsier det at allokeringen i kraftfondet isolert sett bør holdes uendret.

---

## **Abstract**

This thesis explores the investment mandate of Trondheim municipality's energy fund and compares its content with known results from conventional asset pricing and portfolio theory. Moreover, the thesis discusses topics related to the asset allocation of the fund and how exogenous non-tradable income and other items in the mandate may affect the allocation in reference portfolio.

Trondheim municipality can be regarded as an institutional investor with exogenous non-tradable income as income is received from various tax bases and transfer payments from the government. These income streams and their comovement with equities and fixed income may allow for a degree of consumption smoothing by changing the allocation in the reference portfolio provided there is sufficient comovement between income and the asset classes.

Using municipal income data and reference indices for the equity and fixed income portfolios of both Norwegian sovereign wealth funds, the main result is the increase in the risk-adjusted return from including variation in income in the portfolio choice is economically insignificant. The implication of this result is that the allocation in the portfolio should all else equal remain unchanged.

# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kommunen - økonomi, finansiering og rolle som investor</b>	<b>2</b>
2.1	Kommunens økonomi og finansiering . . . . .	2
2.1.1	Inntektssystemet . . . . .	2
2.1.2	Inntektsutjevningen . . . . .	3
2.2	Skattesatser i Trondheim kommune . . . . .	4
2.3	Trondheim kommunes kraftfond . . . . .	6
2.3.1	Formål . . . . .	6
2.3.2	Investeringsunivers . . . . .	7
2.3.3	Rammer for forvaltningen . . . . .	7
2.3.4	Bufferfond . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Avkastning og risiko i finansmarkedene</b>	<b>10</b>
3.1	Prising av finansielle aktivum . . . . .	10
3.2	Risikopremier for aksjer . . . . .	12
3.2.1	Aksjepremier i teorien . . . . .	12
3.2.2	Empiriske aksjepremier . . . . .	13
3.3	Risikopremier for obligasjoner . . . . .	13
3.3.1	Kredittrisiko . . . . .	14
3.3.2	Likviditetsrisiko . . . . .	15
3.3.3	Termin- og renterisiko . . . . .	16
3.4	Valutarisiko . . . . .	17
3.5	Tidsvarierende risikoaversjon . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Forvaltningen av Trondheim kommunes kraftfond</b>	<b>23</b>
4.1	Porteføljeteori . . . . .	23
4.1.1	Statisk porteføljevalg . . . . .	23
4.1.2	Dynamisk porteføljevalg . . . . .	27
4.2	Kommunens porteføljevalg . . . . .	28
4.2.1	Porteføljen . . . . .	28



4.2.2	Diversifisering . . . . .	29
4.2.3	Geografisk diversifisering . . . . .	31
4.3	Optimal allokering . . . . .	31
4.3.1	Statisk allokering og tidshorisont . . . . .	35
4.3.2	Dynamisk allokering og rebalansering . . . . .	37
4.3.3	Politisk risiko . . . . .	40
4.3.4	Bufferfond . . . . .	41
4.3.5	Valg av indekser for forvaltningen . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Porteføljeanalyse</b>	<b>43</b>
5.1	Datagrunnlag . . . . .	43
5.1.1	Kommuneinntekter . . . . .	43
5.1.2	Aksjeindekser . . . . .	43
5.1.3	Obligasjonsindekser . . . . .	44
5.1.4	Risikofri rente . . . . .	45
5.2	Metode . . . . .	45
5.3	Porteføljeoptimering med historiske data . . . . .	47
5.4	Porteføljeoptimering med fremoverskuende data . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Oppsummering</b>	<b>55</b>

# 1 Innledning

Trondheim kommunes kraftfond forvalter i dag over 7 milliarder norske kroner på vegne av dens innbyggere. Fondet er investert i flere aktivaklasser, både globalt og nasjonalt. I likhet med Statens pensjonsfond Utland kan kommunen trekke på midler fra kraftfondet for å øke tilbudet av kommunale tjenester til sine innbyggere. Denne egenskapen til kraftfondet gir kommunen et insentiv til å utføre forvaltningen på et ansvarlig vis og i henhold til prinsipper forankret i økonomisk teori og empiri.

Frem til nå har allokeringen av kraftfondets forvaltningskapital i svært liten grad blitt sett i sammenheng med fluktuasjoner i kommunens finanser. Ett av de sentrale funnene i porteføljeteorien er at optimal porteføljeallokering ikke kun avhenger av verdipapirenes forventede avkastning og risiko, men også samvariasjonen mellom verdipapirene i porteføljen og andre kontantstrømmer. Dette tilsier isolert sett at kommunen har valgt en for snever tilnærming til forvaltningen av kraftfondet.

Denne masteroppgaven har som hovedmål å undersøke hvorvidt Trondheim kommune kan forbedre forvaltningen ved å studere allokeringen i kraftfondet i henhold til klassisk finansteori, og spesielt i sammenheng med kommunens økonomi. En betydelig del av oppgaven vil redegjøre for hvilke hensyn kommunen bør ta når referanseporteføljen utformes, og hvordan disse eventuelt strider med dagens praksis. En slik redegjørelse krever en grundig gjennomgang av flere temaer, deriblant kommuneøkonomi, avkastning- og risikoegenskapene til finansielle aktivum og til slutt teorier for optimalt porteføljevalg.

Med unntak av Mork-utvalgets utredning av aksjeandelen i Statens pensjonsfond Utland i 2016 er litteraturen på dette området er svært begrenset, særlig i Norge. Dette er noe paradoksalt da staten Norge eier et av verdens største statlige investeringsfond som i mange år har finansiert betydelige deler av statsbudsjettet. På grunn av den mangelfulle litteraturen om forvaltningen av kommunale investeringsfond vil resultatene og ikke minst diskusjonen presentert i denne masteroppgaven være et nytt bidrag på dette området. Masteroppgaven er høyst relevant for kommuner med investeringsfond eller betydelige finansielle plasseringer, og spesielt kommuner uten ressurser til å gjennomføre selvstendige analyser.

## **2 Kommunen - økonomi, finansiering og rolle som investor**

Kapittel 2 går igjennom kommunens økonomi og inntektskilder, og årsaker til variasjon i kommunens inntekter. Kapittelet redegjør Trondheim kommunes kraftfond og dets investeringsmandat. Kapittel 2.1 gir en kort innføring i kommunesektorens inntektssystem. Kapittel 2.2 beskriver de ulike skatteinntektene til Trondheim kommune. Kapittel 2.3 går igjennom Trondheim kommunes kraftfond og dets investeringsmandat.

### **2.1 Kommunens økonomi og finansiering**

#### **2.1.1 Inntektssystemet**

Formålet med inntektssystemet i Norge er å oppnå et likeverdig tjenestetilbud på tvers av landets kommuner. Strukturelle forskjeller som demografi, klima og geografi har konsekvenser for den enkelte kommunens evne til å yte kommunale tjenester av tilstrekkelig mengde og kvalitet. Inntektssystemet skal kompensere kommuner med ufordelaktige strukturelle karakteristika som gjør det krevende for kommunen å yte kommunale tjenester uten betydelige kostnader. Dette gjøres ved å omfordele kommunenes inntekter.

Kommunesektorens inntekter består av to komponenter: Kommunens bundne inntekter og kommunens frie inntekter. Kommunens bundne inntekter består av øremerkede tilskudd, gebyrer og egenbetalinger. Øremerkede tilskudd er statlige overføringer som må benyttes til et forhåndsbestemt område eller tjeneste. Gebyrer og egenbetalinger er overføringer fra kommunens innbyggere til kommunen i forbindelse med bruk av kommunale tjenester. Kommunens frie inntekter er derimot inntekter som kommunen kan disponere uforpliktet under gjeldende lovverk. De frie inntektene består av rammetilskudd og skatteinntekter. Rammetilskudd er statlige overføringer fra stat til kommune og skatteinntekter er inntekter hentet fra skatter pålagt innbyggerne i kommunen (Kommunal- og moderniseringsdepartementet, 2020) [21].

### 2.1.2 Inntektsutjevningen

Kommunenes inntekter omfordes gjennom to omfordelingsordninger: Skatteutjevningen og utgiftsutjevningen. Skatteutjevningen er et selvfinansierende fordelingsystem som krever at kommuner med relativt høye skatteinntekter overfører deler av inntekten til kommuner med relativt lave skatteinntekter. Kommuner med skatteinntekter  $T_i$  over landsgjennomsnittet  $\bar{T}$  må overføre 60% av denne differansen til staten som igjen fordeler dette beløpet til kommuner med skatteinntekter under landsgjennomsnittet. Kommuner med skatteinntekt under landsgjennomsnittet får en kompensasjon tilsvarende 60% av denne differansen. I tillegg til denne omfordelingen vil kommuner med skatteinntekter under 90% av landsgjennomsnittet motta en tilleggskompensasjon på 35% av differansen mellom skatteinntekten og 90% av landsgjennomsnittet. Tilleggskompensasjonen finansieres imidlertid utenfor utjevningssystemet. Skatteutjevningen bestemmer den endelige skatteinntekten  $S_i$  til kommune  $i$  etter den stykkevise funksjonen

$$S_i(T_i, \bar{T}) = \begin{cases} T_i - 0.6(T_i - \bar{T}), & T_i > \bar{T} \\ T_i + 0.6(\bar{T} - T_i), & 0.9\bar{T} \leq T_i \leq \bar{T} \\ T_i + 0.6(\bar{T} - T_i) + 0.35T_i, & T_i < 0.9\bar{T} \end{cases} \quad (2.1)$$

Ved skatteutjevningen gjelder kun inntektene fra inntekts-, formues- og naturressursskatten. Eiendomsskatt er ikke inkludert for å unngå tung beskatning av mindre kommuners inntekter fra vannkraftverk gjennom eiendomsskatten (Borge, 2010) [4].

Utjevningssystemet tar utgangspunkt i at kommunenes rammetilskudd er stigende i graden av ufordelaktige strukturelle karakterstika. Fra statsbudsjettet allokeres det et beløp som skal fordeles i form av rammetilskudd til kommunene. Utgiftsutjevningen tar for seg allokeringen av dette beløpet til hver enkelt kommune. I utgangspunktet fordeles rammetilskuddet med et likt beløp per innbygger, også omtalt som innbyggertilskuddet. Denne overføringen utgjør mer enn 90% av det totale rammetilskuddet og har ingen konsekvenser for fordelingen av rammetilskuddet. Det resterende rammetilskuddet fordeles ved hjelp av en indeks som måler hver kommunes økonomiske behov, også omtalt som en kostnadsnøkkel. Eksempler på faktorer som inngår i kostnadsnøkkelens er reiseavstand, fergekostnader og vedlikeholdskostnader av veier. Kommuner med behov som overstiger landsgjennomsnittet blant kommunene vil

motta et ytterligere rammetilskudd, som finansieres direkte av kommuner med behov under landsgjennomsnittet. I rammetilskuddet inngår også det regionalpolitiske tilskuddet, som er et ekstra tilskudd som deles ut av regionalpolitiske hensyn. Denne omfordelingsordningen er også selvfinansierende.

## 2.2 Skattesatser i Trondheim kommune

Kommunene henter sine skatteinntekter fra fire skatter:

- Inntektsskatt
- Formuesskatt
- Eiendomskatt
- Naturressursskatt

Inntektsskatten tar utgangspunkt i skattyternes alminnelige inntekt:

$$\text{Inntektsskatt} = \text{Alminnelig inntekt} \cdot \text{Skattesats} \cdot \text{Kommunal skattøre} \quad (2.2)$$

Skatt på alminnelig inntekt fra personlige skattytere fordeles mellom stat, kommune og fylkeskommune. Den kommunale skattøren angir andelen av skatten som tilfaller kommunen. Etter skattereformen i 1992 lå skattesatsen på alminnelig inntekt flatt på 28%, men er over tid blitt redusert [4]. I 2021 er denne skattesatsen 22%. Eiendomsskatten i Trondheim kommune beregnes slik:

$$\text{Eiendomsskatt} = (\text{Eiendomsskatteverdi} - \text{Bunnfradrag}) \cdot \text{Skattesats} \quad (2.3)$$

Den avhenger av type skatteeiendom samt verdsettelsen av eiendommen. De ulike skattesatsene er gitt i tabellen på neste side

Skattesatser ved beregning av eiendomsskatt			
Type skatteeiendom	Skattesats	Bunnfradrag	Eiendomsskatteverdi
Bolig	0.32%	550 000kr	70% av fastsatt verdi
Næring	0.415%	0kr	Verdi fastsatt av kommunal takst
Ubebygdt tomt	0.415%	0kr	Verdi fastsatt av kommunal takst
Fritidseiendom	0.32%	550 000kr	70% av fastsatt verdi
Særskilt grunnlag	0.605%/0.7%	0kr	Takst fra 2018 fratrukket 3/7 av taksten

Fra relasjonen og tabellen over ser vi at eiendomsskatten vil variere ved endringer i skattesatsen og bunnfradraget, men også ved endringer i generelle boligpriser i kommunen.

Formuesskatten er en skatt på skatteytters nettoformue, og beregnes ved

$$\text{Formuesskatt} = (\text{Formue} - \text{Gjeld}) \cdot \text{Skattesats} \quad (2.4)$$

Formuen omfatter i utgangspunktet alle finansielle verdipapirer og fysiske objekter som kan omsettes, uavhengig av geografisk lokasjon, som for eksempel aksjer og eiendom. Skattesatsen på nettoformuen avhenger av hvilken klasse skattyter tilhører. For norske kommuner gjelder følgende skattesatser

Skattesatser ved beregning av formuesskatt		
Klasse	Formue	Skattesats
0	0 kr og over	0.7%
1	0 – 1500 000 kr	0%
1	1500 000 kr og over	0.7%

Variasjoner i formuesskatten vil dermed skyldes endringer i innbyggerenes nettoformue samt eventuelle endringer i skattesatsen for de ulike klassene.

Trondheim kommune mottar også en naturressursskatt fra kraftselskaper i kommunen. Beregningsgrunnlaget er basert på selskapenes gjennomsnittlige kraftproduksjon i inntektsåret samt de seks foregående årene. Fra den totale naturressursskatten mottar kommunen 0.11 kr per kWh produsert av kraftselskapene. Skatteinntektene fra naturressursskatten er dermed

$$\text{Naturressursskatt} = 0.11 \left( \frac{1}{7} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^7 \text{TkWh}_{i,t-7} \right) \quad (2.5)$$

hvor  $\text{TkWh}_{i,j}$  er den totale kraftproduksjonen til selskap  $i$  i år  $t$ .

## 2.3 Trondheim kommunes kraftfond

Trondheim kommunes kraftfond, kraftfondet heretter, ble opprettet etter vedtak i Trondheim bystyre i 2001. Kraftfondet inngår som en del av Trondheim kommunes virksomhet, men forvaltes adskilt fra kommunens øvrige midler.

### 2.3.1 Formål

Formålet til kraftfondet er å sikre en langsiktig avkastning som skal sørge for at kommunen kan yte et godt tjenestetilbud. Den langsiktige målsettingen til kraftfondet er å opprettholde 2017 realverdien av kommunens egenkapital og bufferfond, og sikre kommunen et jevnt uttak av midler. I tidsperioden  $[t, T]$  skal fondets realverdi  $W_T$  utvikle seg i følge

$$W_T = W_t \left( \prod_{k=0}^{T-t} \frac{KPI_{t+k+1}}{KPI_{t+k}} \right)^{\frac{1}{T-t}} \quad (2.6)$$

Av dette følger det av avkastningskravet i perioden  $[t, T]$  er

$$r_{TKK}^* = \left( \prod_{k=0}^{T-t} \frac{KPI_{t+k+1}}{KPI_{t+k}} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1 \quad (2.7)$$

### 2.3.2 Investeringsunivers

Investeringsuniverset til kraftfondet er definert i Trondheim kommunes finansreglement. Finansreglementet tillater plasseringer i følgende aktivaklasser:

- Norske aksjefond
- Globale aksjefond (Valutasikret/usikret)
- Norske renter og rentefond
- Globale renter (Valutasikret)
- Eiendom

Aksjeinvesteringene skal være i form av verdipapirfond og ikke enkeltaksjer, og kraftfondet kan selv vurdere om aksjeinvesteringene skal forvaltes aktivt eller indeksnært. Investeringer i rentebærende verdipapirer kan gjøres i rentefond eller obligasjoner.

### 2.3.3 Rammer for forvaltningen

Kommunens finansreglement definerer hvilke rammer som er satt for de ulike investeringene i kraftfondet og den øvrige porteføljen. Investeringene i kraftfondet fordeles i tre aktivaklasser, og allokeringen av disse bestemmes innenfor følgende rammer

Allokering (% av forvaltningskapitalen)			
Aktivaklasse	Minimum	Maksimum	Referanse
Aksjer	0	25	20
Renter	72	100	78
Eiendom	0	3	2

Aksjeporteføljen består av både norske og internasjonale aksjefond og kan inneholde valutarisiko så fremt valutarisikoen ikke overstiger 10% av forvaltningskapitalen. Rentebærende verdipapirer utenom rentefond skal ha en "Investment grade" kredittvurdering. Investeringsmandatet tillater kraftfondet å investere i norske og globale rentefond, forutsatt at rentefondet er valutasikret og har en god diversifisering med hensyn på sektor og utsteder.

Andelen rentefond kan utgjøre maksimalt 25% av kraftfondets forvaltningskapital. Investeringer i eiendom skal gjøres gjennom ikke-belånte fondsplasseringer, og fondene skal



være godt diversifisert med hensyn på geografi og eiendomsobjekt. Eiendomsinvesteringene kan gjøres i norske kroner eller alternativt være sikret i norske kroner. Verdipapirer utenom rentefond skal ha en "Investment grade" kredittvurdering, og rammene for slike investeringer fordeles etter utsteder. Denne fordelingen er gitt i tabellen under

Kredittrammer fordelt på sektor og motpart (% av forvaltningskapital)				
Type utsteder av obligasjon	Maksimum per sektor	Maksimum per motpart < 1 år	Maksimum per motpart > 1 år	Maksimum per motpart totalt
Norsk stat/Garantert av norsk stat	100	100	100	100
Norske kommuner og fylkeskommuner	100	20	20	20
Verdipapirer garantert av AAA stat	100	100	100	100
Skandinaviske kommuner og fylkeskommuner	20	20	20	20
Banker og kredittforetak	70	-	-	-
Kraft	30	10	10	10
Andre utstedere	30	5	5	5

Kraftfondets faktiske portefølje vil normalt avvike fra referanseporteføljen grunnet øvrige markedsforhold. Porteføljen tillates å avvike fra referanseporteføljen, men kun innen maksimums- og minimumsrammene definert overfor. Over tid skal allokeringen styres mot referanseporteføljen gjennom rebalansering av porteføljen. Dette utføres gjennom salg av aktivaklasser med porteføljevekt over referansevekten og på tilsvarende vis kjøp av aktivaklasser med porteføljevekt under referansevekten.

Plasseringer i rentebærende investeringer skal sørge for en jevn forfallstruktur i renteporteføljen. I tillegg skal andelen ansvarlige lån og fondsobligasjoner til sammen ikke utgjøre mer enn 12 prosent av forvaltningskapital, der fondsobligasjoner ikke kan utgjøre mer enn 8 prosentpoeng av disse 12. Finansreglementet tillater også bruk av enkelte finansielle derivater i forvaltningen, men kun i forbindelse med risikostyring av fondets eiendeler.

### 2.3.4 Bufferfond

Sammen med opprettelsen av Trondheim kommunes kraftfond ble også et bufferfond opprettet med 300 mNOK i bufferkapital. I år der avkastningen til kraftfondet er lavere enn budsjettert vil bufferfondet belastes med differansen i realavkastning.

$$\text{Bufferkapital}_t = \text{Bufferkapital}_{t-1}(1 + r_{t-1,t}^K - r_{t-1,t}^B) \quad (2.8)$$

hvor  $r^K$  er realavkastningen i kraftfondet og  $r^B$  budsjettert realavkastning. Dermed vokser bufferfondet i år med meravkastning i kraftfondet og blir en reserve i år hvor avkastning er lavere enn budsjettert.

### 3 Avkastning og risiko i finansmarkedene

Kapittel 3 går i dybden på de ulike prisingen av ulike finansielle aktivum og deres avkastnings- og risikodrivere. Kapittel 3.1 gir en innføring i hvordan finansielle aktivum prises teoretisk og hvilke faktorer som påvirker prisen. Kapittel 3.2 ser nærmere på risikopremier for aksjer sett i lys av kjente teoretiske og empiriske resultater. Kapittel 3.3 fokuserer på risikopremier for obligasjoner, og retter fokuset mer spesifikt mot kreditt-, likviditets og løpetidsrisiko. Kapittel 3.4 beskriver betydningen av valutarisiko for internasjonale plasseringer og gir en kort diskusjon av beslutningen om å valutasikre posisjoner i porteføljen. Kapittel 3.5 diskuterer effekten av risikoaversjon på aktivapriser og hvordan risikoaversjonen kan variere over tid.

#### 3.1 Prising av finansielle aktivum

Finansielle aktivum prises ved å neddiskontere fremtidige kontantstrømmer. Teorien presenteres i henhold til Cochrane (2005) [7]. Betrakt en investor som ønsker å maksimere sin nytte over to perioder. Optimeringsproblemet til denne investoren er

$$\max_n u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t \{u(c_{t+1})\} \quad (3.1)$$

hvor  $u'(\cdot) > 0$ ,  $u''(\cdot) < 0$  fanger opp investorens risikoaversjon og  $\beta \in (0, 1)$  investorens tidspreferanser. Investoren kan skyve konsum fram i tid ved å plassere midler i et finansielt aktivum  $\tilde{x}$  med pris  $p_t$  som betaler en usikker kontantstrøm  $\tilde{x}_{t+1}$  i neste periode. Investoren løser optimeringsproblemet i (3.1) under bibetingelsene

$$c_t = w_t - np_t \quad (3.2)$$

$$c_{t+1} = w_{t+1} + n\tilde{x}_{t+1} \quad (3.3)$$

Likning (3.3) definerer konsumet ved ulike perioder. Tid  $t$  konsumet defineres som den resterende formuen etter at investoren har kjøpt  $n$  enheter av det finansielle aktivumet til pris  $p_t$ . Tid  $t + 1$  konsumet er definert som tid  $t + 1$  formuen i tillegg til tid  $t + 1$  kontantstrømmene fra de  $n$  finansielle aktivumene kjøpt i periode  $t$ .

Førsteordensbetingelsen til investoren er

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} \frac{\partial c_t}{\partial n} + \beta \mathbb{E}_t \left( \frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{t+1}} \frac{\partial c_{t+1}}{\partial n} \right) = 0 \quad (3.4)$$

En omskrivning av likning (3.4) gir den kjente prisingsformelen for et risikabelt aktivum  $\tilde{x}$

$$p_t = \beta \mathbb{E}_t \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \tilde{x}_{t+1} \right\} = \mathbb{E}_t \{ m_{t,t+1} \tilde{x}_{t+1} \} \quad (3.5)$$

hvor  $m_{t+1}$  er investorens stokastiske diskonteringsfaktor (*SDF*). Dette uttrykket gir en nyttig forståelse for hvilke faktorer som driver aktivapriser. Generelt er investoren villig til å betale mer om forventet utbetaling  $x_{t+1}$  øker da dette øker investorens konsummuligheter fram i tid. I finansteorien oppfattes den stokastiske diskonteringsfaktoren som en motsyklisk variabel i den forstand at  $m_{t+1}$  er lav i høykonjunkturer og høy i lavkonjunkturer. Årsaken til det er at i lavkonjunkturer antas investorens nåværende konsum  $c_t$  å være på et lavt nivå, slik at marginalnyttens  $u'(c_t)$  vil i nåværende periode være høy. Ved å bruke at bruttoavkastningen  $\tilde{R}$  kan uttrykkes som  $R = x_{t+1}/p_t$  kan likning (3.5) forenkles til

$$\mathbb{E}_t \{ m_{t,t+1} \tilde{R} \} = 1 \quad (3.6)$$

Fra kovariansdefinisjonen kan forventet avkastning uttrykkes som

$$\mathbb{E}_t(\tilde{R}) = Cov(m_{t+1}, \tilde{R}) - \mathbb{E}_t \{ m_{t,t+1} R \} \quad (3.7)$$

Ved å bruke at risikofrie aktivum<sup>1</sup> som statsobligasjoner eller bankinnskudd har avkastning  $R_f = 1/\mathbb{E}_t(m_{t+1})$  kan forventet avkastning uttrykkes som

$$\mathbb{E}_t(\tilde{R}) = R_f - R_f Cov(m_{t+1}, \tilde{R}) \quad (3.8)$$

hvor  $Cov(m_{t+1}, \tilde{R})$  er negativ under antakelsen at risikable aktivum generelt har høyere avkastninger i høykonjunkturer enn lavkonjunkturer eller mer konkret høyere avkastninger når husholdningen har minst behov for å øke konsumet.

<sup>1</sup>Om aktivumet er risikofritt er  $\tilde{R}$  ikke-stokastisk, slik at  $\mathbb{E}_t \{ m_{t,t+1} \tilde{R} \} = \mathbb{E}_t \{ m_{t,t+1} \} \tilde{R} = 1$ . Da har vi at  $\tilde{R} = 1/\mathbb{E}_t \{ m_{t,t+1} \}$ .

## 3.2 Risikopremier for aksjer

Uttrykket til den forventede avkastningen kan oppsummeres ved følgende:

$$\text{Forventet avkastning} = \text{Risikofri rente} + \text{Aksjepremie} \quad (3.9)$$

Med andre ord vil investorer kreve en meravkastning  $-R_f \text{Cov}(m_{t+1}, \tilde{R}) > 0$  for å investere i aksjer som en kompensasjon for mulig konsumbortfall. Denne meravkastningen omtales som en aksjepremie eller en risikopremie og er en helt essensiell størrelse i finansteorien.

### 3.2.1 Aksjepremier i teorien

Gjennom årene er det blitt utviklet flere finansteoretiske modeller som har forsøkt å forklare hvilke faktorer som påvirker aksjepremien. Sharpe (1964) [26], Lintner (1965) [13] og Mossins (1966) [22] svært innflytelsesrike kapitalverdimodell (CAPM) har i lang tid formet synet på forholdet mellom avkastning og risiko. Hovedkonklusjonen som kan trekkes ut av kapitalverdimodellen er at forventet avkastning til aksjer kan beskrives som en lineær funksjon av forventet avkastning til en markedsportefølje som kun inneholder markedsrisiko. Helningen til funksjonen bestemmes av samvariasjonen mellom aktivumet og markedsporteføljen. Denne samvariasjonen omtales som aktivumets  $\beta$

$$\mathbb{E}(r) - r_f = \beta(\mathbb{E}(r_M) - r_f) \quad (3.10)$$

$$\text{hvor } \beta = \frac{\text{Cov}(r, r_M)}{\sigma_M^2} \quad (3.11)$$

Implikasjonen av dette er at forventet avkastning kun bør drives av markedsrisiko. Selskaper med høy eksponering mot markedsrisiko skal i følge kapitalverdimodellen ha en høyere aksjepremie, her representert ved en høy  $\beta$ .

Til tross for modellens innflytelse er den gjentatte ganger blitt motbevist empirisk. Som en konsekvens av dette har det vært gjort flere forsøk på å utlede mer virkelighetsnære modeller som forklarer prising og risikopremier av aksjer. Breedens (1979) [5] konsumkapitalverdimodell (CCAPM) tar utgangspunkt i at det ikke er markedsrisiko som bestemmer aksjepremier, men samvariasjon mellom avkastninger og konsum. Aksjer som samvarierer positivt med konsum har høyere risikopremie enn aksjer som samvarierer negativt. Aksjer med lav eller negativ samvariasjon har lave risikopremier da husholdninger vil ønske å bruke disse aktivumenes

egenskaper til å jevne ut deres konsumbane. I finansteorien omtales dette som en ”hedging demand”. Barros (2006) [3] katastrofemodell argumenterer for at aksjepremier er høye for å kompensere investorer for katastroferisiko som for eksempel krig eller finansielle kriser. Bansal og Yarons (2004) [24] langtidsrisikomodell tar utgangspunkt i at det er stor usikkerhet i konsumvekst på lang sikt, og at denne faktoren driver aksjepremier.

### 3.2.2 Empiriske aksjepremier

French og Fama (1992) [9] tar utgangspunkt i kapitalverdimodellen og studerer en tilsvarende problemstilling empirisk ved å inkludere flere forklaringsvariabler. Forfatterne estimerer en flerfaktormodell med tverrsnittdata på formen

$$r_i - r_f = \beta_1(r_M - r_f) + \beta_2SMB_i + \beta_3HML_i \quad (3.12)$$

hvor *SMB* er meravkastningen til selskaper med lav markedsverdi sammenlignet med selskaper med høy markedsverdi (*Small Minus Big*). *HML* er meravkastningen til selskaper med lav pris/bok *P/B* sammenlignet med selskaper som har høy pris/bok (*High Minus Low*). French og Fama viser at størrelse og *P/B* forklarer variasjon i aksjepremier, hvilket står i strid med konklusjonen som trekkes ut av kapitalverdimodellen.

Flerfaktormodeller er blitt populære i den empiriske litteraturen, og det er blitt gjort flere forsøk på å avdekke faktorer som påvirker aksjepremier. Carhart (1997) [6] tar utgangspunkt i French og Famas trefaktormodell og inkluderer månedlig momentum (*Monthly Momentum Factor*) som en ytterligere faktor

$$r_i - r_f = \beta_1(r_M - r_f) + \beta_2SMB_i + \beta_3HML_i + \beta_4MOM_i \quad (3.13)$$

og viser at denne faktoren også er med på å forklare risikopremier for aksjer.

## 3.3 Risikopremier for obligasjoner

Den teoretiske prisen til en kupongbærende obligasjon bestemmes i henhold til likning (3.5). Det finnes imidlertid én rente  $y$  som gir den samme prisen på obligasjonen, og denne renten er obligasjonens yield.

For å illustrere dette tydeligere kan man betrakte den generelle prisingsformelen

$$P_0 = \mathbb{E}_0 \left( \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1 + r(0, t))^t} + \frac{F}{(1 + r(0, T))^T} \right) \quad (3.14)$$

Yielden på obligasjonen er den ene diskonteringsfaktoren renten  $y$  som sørger for at (3.14) holder. Gitt kontantstrømmene  $C_t$  og hovedstolen  $F$  må prisen  $P_t$  falle for at obligasjonens yield skal øke. Dermed har obligasjonsprisen og yielden et inverst forhold.

Yielden på obligasjonen skal kompensere for risiko forbundet med investeringen, og har følgelig en risikopremie. Denne risikopremien reflekterer hovedsakelig tre typer risiko<sup>2</sup>:

- Kredittrisiko
- Likviditetsrisiko
- Terminrisiko

Dermed kan obligasjonens yield dekomponeres på følgende vis:

$$\text{Yield} \approx \text{Risikofri rente} + \text{Kredittpremie} + \text{Likviditetspremie} + \text{Terminpremie} \quad (3.15)$$

Disse utgjør en betydelig del av obligasjonens risikopremie og er derfor sentrale størrelser som må diskuteres i forbindelse med forvaltningen av kraftfondet.

### 3.3.1 Kredittrisiko

Stater og selskaper som utsteder obligasjoner har en strengt positiv sannsynlighet for mislighold. Denne misligholdsansynligheten utgjør en risiko for at obligasjonsholderen ikke mottar kontantstrømmene fra obligasjonen, og denne type usikkerhet omtales som kredittrisiko. Graden av kredittrisiko avhenger av flere forhold som påvirker utsteders betalingsevne, som for eksempel likviditet, soliditet og andre finansielle nøkkeltall. Obligasjoner utstedt av stater med svært god betalingsevne omtales som risikofrie da misligholdsansynlighetene ansees å være nær null. Stater og selskaper med en ikke-neglisjerbar misligholdssannsynlighet inneholder kredittrisiko, og som en konsekvens av dette vil markedsaktører kreve en høyere rente (eller yield) som en kompensasjon for risiko.

<sup>2</sup>Det finnes flere typer risiko, for eksempel inflasjon- eller volatilitetsrisiko. Se Litterman (2003) [14] eller alternativt Fabozzi (2012) [10].

Påslaget over den renten avledet av risikofrie obligasjoner, risikofrie renter, kalles en kredittspread eller kredittpremie. Renten på en obligasjon som er eksponert for kredittisiko er høyere enn yielden til det risikofrie alternativet og vil dermed omsettes til en lavere pris enn det risikofrie alternativet. I praksis er det krevende å estimere bedriftens eller statens konkurssannsynlighet, og følgelig kredittspread på obligasjoner. Merton (1974) [19] utleder en svært innflytelsesrik strukturell modell for kredittisiko som ofte omtales som Merton-modellen. Modellen tar utgangspunkt i et Black-Scholes rammeverk og utleder analytiske uttrykk for konkurssannsynligheter og kredittspreader.

### 3.3.2 Likviditetsrisiko

Likviditeten til et finansielt verdipapir beskriver hvor enkelt verdipapiret kan omsettes i et marked i et rimelig tidsintervall uten betydelige endringer i markedspris. Verdipapirer som er lite likvide vil oppleve betydelige kursfall dersom verdipapirene skal selges i løpet av et kort tidsrom. Disse kan være lite likvide på grunn av individuelle karakterstika, som for eksempel lav residualletterspørsel for verdipapiret, eller lav etterspørsel på grunn av andre markedsforhold som for eksempel økt risikoaversjon. På tilsvarende vis vil likvide verdipapirer omsettes i løpet av kort tid med markedspriser nære sine teoretiske markedspriser. Likvide markeder har flere trekk, blant annet en lav bid-ask spread, som er differansen mellom kjøps- og salgspisene i markedet. Dette kan også omtales som breddelikviditet (Norges Bank, 2017) [2].

Om Trondheim kommune har plasseringer i verdipapirer med lav likviditet eksponeres kommunen mot likviditetsrisiko. Dette er risikoen for endringer i markedsverdi som følge av endringer i markedelikviditeten. Investorer som plasserer midler i verdipapirer eksponert for likviditetsrisiko vil kreve en likviditetspremie.

Land med store markeder for statsobligasjoner kjennetegnes ofte ved deres høye likviditet. Et eksempel er markedet for amerikanske statsobligasjoner. I høyt likvide markeder kan aktører raskt selge obligasjoner uten store kursfall fordi det alltid vil finnes en motpart som er villig til å kjøpe obligasjonen til tilnærmet lik pris. I slike markeder vil likviditetspremien normalt være lav. Det som derimot ikke er opplagt er at risikofrie statsobligasjoner ikke nødvendigvis er frie for likviditetsrisiko. Et godt eksempel er det norske markedet for statsobligasjoner. Stater henter ofte finansiering av andre stater, institusjoner og større foretak for å finansiere budsjettunderskudd, men i Norge har derimot disse underskuddene i de siste to tiårene blitt



dekket med overføringer fra Statens pensjonsfond Utland. Som en konsekvens av dette har den norske stat ikke hatt et like stort behov for å utstede obligasjoner i kredittmarkedene sammenlignet med andre stater (Norges Bank, 2017) [2]. Dette reflekteres i størrelsen og likviditeten i det norske obligasjonsmarkedet.

Implikasjonen av dette er at kommunen ikke kan betrakte risikofrie statsobligasjoner som for eksempel norske og amerikanske som identiske, og de må derfor gjøre en vurdering av hvor mye likviditetsrisiko som er ønskelig blant de risikofrie plasseringene.

### 3.3.3 Termin- og renterisiko

Obligasjonens yield og pris har som tidligere nevnt et inverst forhold: Når prisen på en obligasjon øker så reduseres obligasjonens yield. Størrelsesordenen på denne prisreduksjonen vil derimot avhenge av obligasjonens løpetid. Obligasjoner med lang løpetid vil alt annet likt falle mer i markedsverdi sammenlignet med obligasjoner med korte løpetider ved en renteøkning. Dette gjør at en investor også er utsatt for terminrisiko eller løpetidsrisiko, og vil normalt kreve en terminpremie som er voksende i obligasjons løpetid.

Terminrisikoen, og mer generelt renterisikoen, kan måles ved beregne renteporteføljens durasjon. Durasjonen måler prisendringen til en obligasjon gitt en endring i yieldkurven til obligasjonen<sup>3</sup>. Durasjonen til en obligasjon  $j$  beregnes ved

$$D_j = \sum_{i=1}^T \left( \frac{C_{i,j}}{P_0} \right) t_i \quad (3.16)$$

hvor  $P_0$  er tid 0 prisen på obligasjonen og  $t_i$  tidspunktet kontantstrømmen  $C_{i,j}$  utbetales. Durasjonen er en additiv størrelse, hvilket innebærer at durasjonen til en hel renteportefølje blir summen av de vektete durasjonene i porteføljen

$$D = \sum_{j=1}^n w_j D_j \quad (3.17)$$

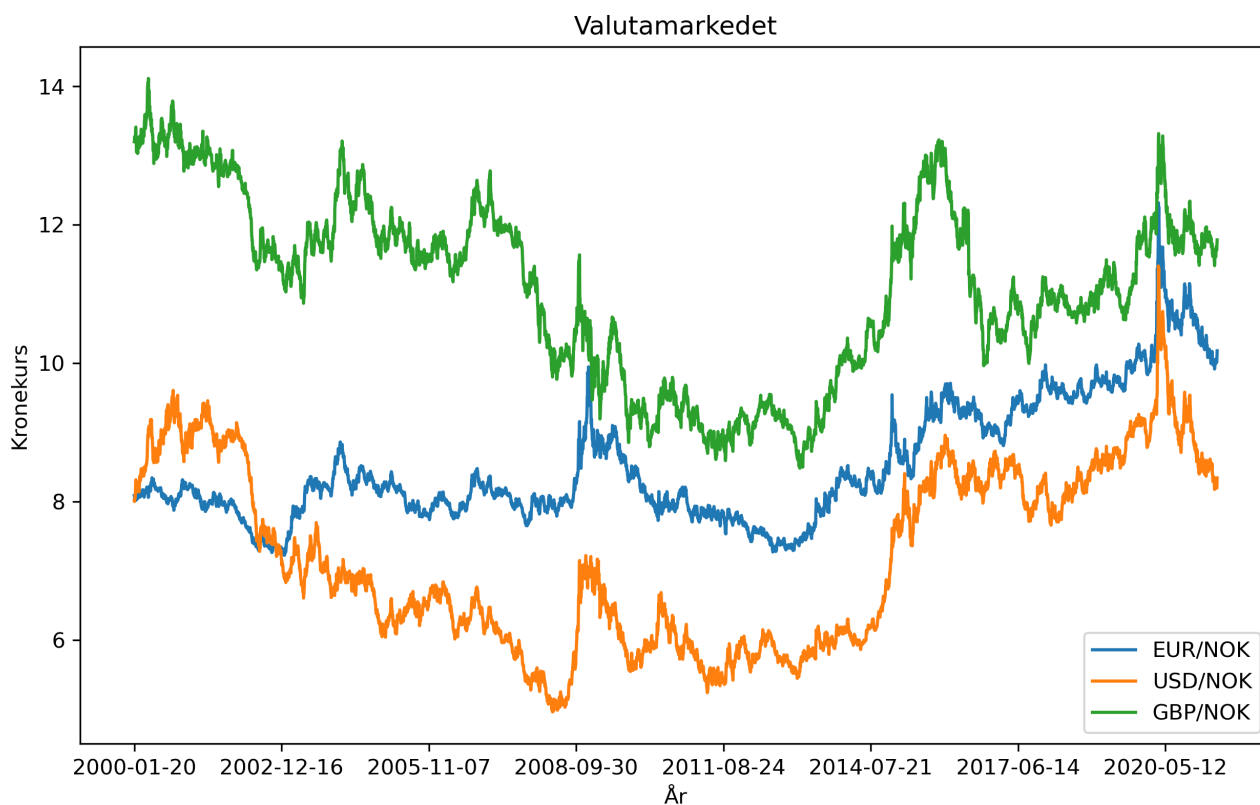
Porteføljer med høy durasjon har høyere terminrisiko, men har som konsekvens av dette også høyere yield fordi investeringen er bundet opp over en lenger tidshorison. Noen obligasjoner er også utstedt som en såkalt obligasjon med flytende rente.

<sup>3</sup>Prisendringen ved en endring i yield er imidlertid ikke-lineær. Dermed blir durasjon bare en approksimasjon for små endringer i yielden.

Renten er flytende i den forstand at kupongrenten varierer med en bestemt markedsrente pluss et eventuelt påslag. Slike obligasjoner vil alt annet likt ha lavere durasjon enn obligasjoner med fast rente fordi kupongutbetalingene nedjusteres i takt med deler av obligasjonens yield. Uansett hvilke obligasjoner som inkluderes i kraftfondets portefølje må kommunen gjøre en vurdering av hvor høy termin- og renterisiko som skal være i porteføljen.

### 3.4 Valutarisiko

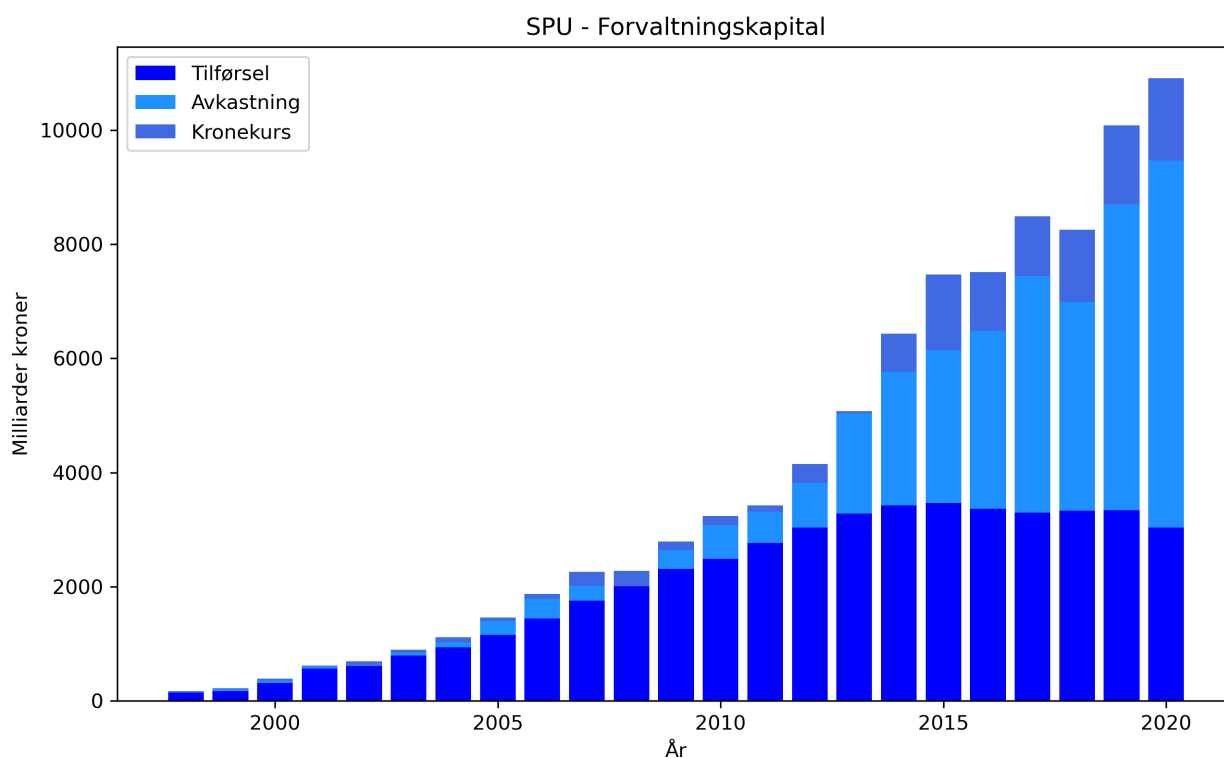
Når kommunen plasserer midler i verdipapirer omsatt i fremmede valutaer eksponeres kommunen mot valutarisiko. For å motivere hvilken effekt valutarisiko har kan man se på utviklingen i noen nøkkelvalutaer i perioden 2000-2020.



Figur 3.1: Valutakurser i perioder 2000-2020. Kilde: Norges Bank

Figur (3.1) viser at valutakursene har vært ustabile over tid, noe som er blitt et kjennetegn for valutamarkedet. I de siste årene har kronekursen på generelt grunnlag svekket seg mot enkelte store valutaer. Et naturlig spørsmål er dermed hvilken effekt dette vil ha for kraftfondets

portefølje. I perioden 2014-2020 utgjorde endring i kronekursen omtrent 14% av SPUs portefølje i gjennomsnitt, hvilket utgjør 1250 milliarder norske kroner. Dette illustrerer hvilken betydning valutaeksponering kan ha for Trondheim kommunes kjøpekraft. Sammenligner man forvaltningskapitalen til SPU med utviklingen i valutamarkedet ser vi at den generelle depresieringen av kronen som vist i figur (3.1) har ført til endringer i valutakurser har utgjort en større andel av forvaltningskapitalen til SPU. Figur (3.2) illustrerer dette.



Figur 3.2: Dekomponering av fondskapitalen til SPU. Kilder: Norges Bank Investment Management

Siden valutarisiko kan ha en stor betydning for markedsverdien til kraftfondets portefølje er det naturlig å kommentere hvordan valutarisiko virker inn i porteføljen. Betrakt et utenlandsk verdipapir med markedsverdi  $A_t$  i utenlandsk valuta, og la spotkursen mellom denne valutaen og norske kroner være  $S_t$ , målt i norske kroner. Avkastningen på verdipapiret i perioden  $[t, T]$  er

$$r_{t,T} = \frac{A_T S_T}{A_t S_t} - 1 \quad (3.18)$$

Dermed er kroneavkastningen på verdipapiret avhengig av endringen i markedsverdien til

verdipapiret samt endringen i valutakursen. Avkastningen målt i innenlandsk valuta stiger når verdipapirets avkastning øker ( $\Delta A/A > 0$ ), men også når den innenlandske valutaen depresierer mot den utenlandske valutaen ( $\Delta S/S > 0$ ). Med andre ord vil kraftfondets portefølje stige i verdi når kronen depresierer mot valutaen de internasjonale plasseringene omsettes i.

For å skjerme porteføljen mot valutarisiko kan kommunen velge å valutasikre deler av porteføljen. Dette kan gjøres ved kjøp av valutasikrede fond eller alternativt ved å benytte derivatkontrakter som for eksempel terminkontrakter eller valutabytteavtaler. Disse derivatene lar kommunen låse inn forhåndsbestemte valutakurser ved vekslingstidspunktet, og eliminerer valutarisikoen fullstendig. Fordelen ved valutasikring er at kommunen kan ta posisjoner i delmarkeder som ansees som attraktive på tross av høy variasjon i prisen på valutaene plasseringene omsettes i. I scenarier der den fremmede valutaen svekkes mot kronen i den samme perioden kraftfondet skal selge seg ut av posisjonene vil porteføljen oppleve betydelige tap. Disse tapene unngås ved å valutasikre porteføljen. På tilsvarende vis kan denne mekanismen også tale imot valutasikring ved at en kronedepresiering løfter kroneavkastningen på verdipapiret.

Selv om valutasikring skjermer kommunen fullstendig fra valutarisiko vil kommunen nå påta seg motpartrisiko. Derivatkontrakter som brukes for å eliminere valutarisiko krever ofte at motpart må stille med sikkerhet skulle det bli sannsynlig at en (eller begge) motparter ikke kan møte forpliktelsene bestemt i avtalen. Motpartrisiko i forbindelse med valutasikring er verken opplagt eller godt kommunisert i lærebøkene, og kan derfor være en risikoeksponering som kommunen undervurderer. Det kan spekuleres i at grunnen til at denne risikoen ikke er godt kommunisert er fordi den er av liten betydning i perioder med høy stabilitet i finansmarkedene, hvilket har vært en norm de siste tiårene. I perioder med høy usikkerhet og en negativ utvikling i finansmarkedene vil kommunen derimot være utsatt for motpartrisiko på to fronter: Først ved at motparten vil kreve at kommunen må stille med sikkerhet som følge av store kursfall på plasseringer i kraftfondet, men også ved at motpart selv ikke kan møte forpliktelsene til kommunen. Disse mekanismene diskuteres i et Staff Memo publisert av Norges Bank [1]. Kommunen bør derfor være godt kjent med motpart- og kredittrisiko ved bruk av eventuelle sikringsinstrumenter<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>I praksis vil nok kommunen heller kjøpe valutasikrede fond enn å valutasikre posisjonene selv. Men i så fall vil kommunen måtte betale høyere forvaltningsgebyrer. [KLPs valutasikrede fond](#) krever for eksempel høyere gebyrer enn sine tilsvarende usikrede fond. Spørsmålet blir da om valutasikring er kostnadseffektivt.

Et relevant spørsmål er i hvilke situasjoner kommunen bør valutasikre deler av porteføljen. Svaret på spørsmålet avhenger i større grad av kommunens evne til å ta risiko og valutaenes tidsserieegenskaper. I perioder med høy uro i internasjonale finansmarkeder er en generell observasjon at etterspørselen etter store valutaer øker. Et godt eksempel er appresieringen av amerikanske dollar under finanskrisen i 2007-08 eller alternativt coronapandemien i 2020-2021. Ettersom den norske kronen er en liten og forholdsvis lite likvid valuta vil uro i finansmarkedene ofte resultere i en svekkelse av kronen mot de store valutaene eller såkalte ”trygge havner”. Om man tar for gitt at dette normalt vil skje i fremtidige ekstremisituasjoner taler det for høyere eksponering mot plasseringer utstedt i store valutaer. I slike scenarier vil kursfallet på utenlandske plasseringene motvirkes av en kronesvekkelse. Med andre ord kan valutaeksponering bidra til å dempe svingninger i kraftfondets portefølje. Valutaeksponering kan altså fungere som en ”hedge” mot nasjonale og internasjonale lavkonjunkturer så lenge kronekursen beholder sin medsykliske variasjon.

### 3.5 Tidsvarierende risikoaversjon

I de klassiske finansteoretiske modellene prises finansielle aktivum under antakelsen at investorer har konstant risikoaversjon, ofte gjennom en CRRA nyttefunksjon på formen

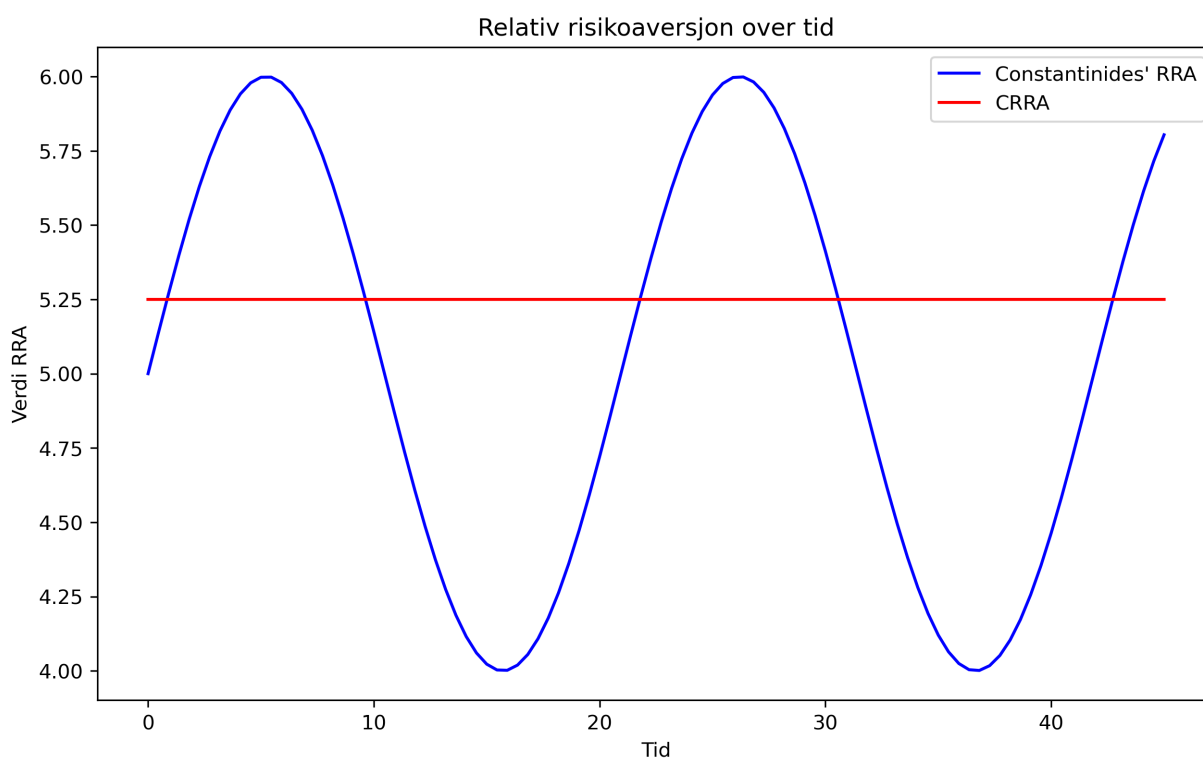
$$U(c_t) = \frac{1}{1-\gamma} c_t^{1-\gamma} \quad (3.19)$$

Med andre ord er investorens avveining mellom avkastning og risiko konstant over tid og for alle nivåer av risiko. Det er mange grunner til å tro at dette denne antakelsen ikke kan rettfærdiggjøres. For det første vil investorer trolig endre preferanser over tid. Et eksempel er en kommune eller en stat som gjør betydelige endringer i sitt balanseregnskap slik at flere forpliktelser må betjenes, som for eksempel økt helsetilbud til sine innbyggere. Alt annet likt må denne kommunen dermed redusere svingninger i porteføljen for å kunne opprettholde dette tilbudet. I så fall kan kommunen bli mer risikoavers. En annen grunn er at investorer kan over- eller undervurdere sin risikoaversjon, slik at når risiko materialiserer seg vil investorer innse at risikoaversjonen opprinnelig var for lav (eller alternativt for høy).

Constantinides (1990) [8] tar utgangspunkt i et dynamisk porteføljevalg hvor investoren også har en konsumvane som ønskes opprettholdt, eller såkalte "habit formation models". Porteføljevalget løses ved å konstruere to porteføljer  $H, B_t$ , hvor  $H$  er en selvfinansierende risikofri portefølje og  $B_t$  en risikabel portefølje. Constantinides viser at den relative risikoaversjonen til denne investoren er

$$\text{Relativ risikoaversjon}_t = \left( \frac{H + B_t}{B_t} \right) \gamma \quad (3.20)$$

Figur (3.3) illustrerer forskjellen mellom den konstante relative risikoaversjonen og den tidsvariende relative risikoaversjonen.



Figur 3.3: Illustrasjon av relativ risikoaversjon med Constantinides'  $RRA = 5 + \sin(0.3t)$

Intuisjonen bak resultatet er at i oppgangstider vil markedsverdien til den risikable porteføljen utgjøre en større andel av den samlede porteføljen  $H + B_t$ , hvilket leder til lavere risikoaversjon. På samme vis vil nedgangsperioder føre til at den risikable porteføljen utgjør en mindre andel av den samlede porteføljen  $H + B_t$ , hvilket leder til høyere risikoaversjon. Med andre ord vil investorer med en konsumvane ha en risikoaversjon som stiger i nedgangsperioder og synker i oppgangstider.

Under antakelsen at risikoaversjon i realiteten er motsyklisk vil dette ha implikasjoner for kraftfondets portefølje. For å illustrere virkningen av dette, anta at investorer velger en allokering i henhold til Mertons aksjeandel<sup>5</sup>

$$w = \frac{\mu}{\gamma_t \sigma^2} \quad (3.21)$$

hvor  $\gamma_t$  er en tidsvarierende risikoaversjon tilsvarende den i likning (3.20),  $\mu$  risikopremien til en risikabel portefølje og  $\sigma^2$  variansen til porteføljen.

Med Constantinides variant av den relative risikoaversjonen vil verdien variere motsyklisk med konjunktursyklusen. Det vil si at den relative risikoaversjonen er høy i lavkonjunkturer og lav i høykonjunkturer. Den konstante risikoaversjonen tar ikke hensyn til konjunktursituasjonen og vil være konstant over tidsperioden. Når risikoaversjonen er motsyklisk vil aksjeandelen være medsyklisk, hvilket medfører at investorer under lavkonjunkturer vil substituere seg fra risikable aktivum til risikofrie aktivum. Denne variasjonen i risikoaversjon vil dermed utgjøre en ytterligere risikofaktor for kraftfondets portefølje ved å forsterke medsykliske svingninger i aktivapriser.

---

<sup>5</sup>Merk at en ikke-konstant risikoaversjon ville gitt en annen optimal aksjeandel, men dette er kun for å illustrere virkningen av varierende risikoaversjon.

## 4 Forvaltningen av Trondheim kommunes kraftfond

Kapittel 4 gir en oversikt over ulike teorier som tar for seg optimalt porteføljevalg og hvilke hensyn kommunen må ta ved fastsettelse av referanseporteføljen til kraftfondet. Kapittel 4.1 går igjennom statisk og dynamisk porteføljeteori. Kapittel 4.2 tar utgangspunkt i teorien gjennomgått i kapittel 4.1 og ser på porteføljevalget til en kommune med eksogene inntekter. Kapittel 4.3 diskuterer andre faktorer som kan påvirke den optimale allokeringen i kraftfondets referanseportefølje.

### 4.1 Porteføljeteori

Porteføljeteori er teorien som omhandler verdipapirseleksjon og allokeringen av disse verdipapirene. Den moderne porteføljeteorien har sitt opphav fra Markowitz' (1952) artikkel om optimalt porteføljevalg. Hovedfunnet i artikkelen er at optimal allokering og verdipapirseleksjon ikke kun avhenger av avkastning og variasjon, men også samvariasjonen mellom de ulike verdipapirene. Modellen utledet i artikkelen omtales som en "mean-variance" modell fordi den baserer seg på aktivumenes forventede avkastning og varians.

#### 4.1.1 Statisk porteføljevalg

I det statiske porteføljevalget ser man på en investor som i dag velger en allokering i porteføljen og lar denne allokeringen stå uendret ut perioden. Porteføljeteorien som benyttes i dette kapitlet har sitt opphav fra Markowitz (1952) sin artikkel om porteføljevalg [17]. For å presentere teorien benyttes notasjonen i Zenios (2007) [28].

Anta at vi har en portefølje med  $n$  aktivum med forventet avkastning  $\bar{r}_i$  for aktivum  $i$ .  $x$ ,  $\bar{r}$  er vektorer med henholdsvis porteføljevækt og avkastninger. La  $\tilde{r}$  være en vektor med faktiske avkastninger. Denne porteføljen har forventet avkastning og varians

$$R(x; \bar{r}) = x' \bar{r} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i \quad (4.1)$$

$$\sigma^2(x) = x' Q x = \mathbb{E} [(R(x; \tilde{r}) - R(x; \bar{r}))^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (4.2)$$



For å konstruere en portefølje med minimal risiko gitt et avkastningsmål  $\mu$  kan investoren løse optimeringsproblemet

$$\min_x \sigma^2(x) \text{ gitt bibetingelsene} \quad (4.3)$$

$$R(x; \bar{r}) \geq \mu \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (4.5)$$

Av Lagranges multiplikatormetode følger det at løsningsvektoren til optimeringsproblemet over blir

$$x^* = \lambda_\mu Q^{-1} \bar{r} + \lambda_1^* Q^{-1} \mathbf{1}, x^* \in \mathbb{R}^n \quad (4.6)$$

hvor  $\lambda_\mu, \lambda_1$  er Lagrangemultiplikatorene til henholdsvis bibetingelse 1 og 2 og  $Q^{-1}$  er den inverse til varians-kovariansmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Ved å variere avkastningsmålet  $\mu$  konstrueres porteføljer med minimum varians til de ulike avkastningsmålene  $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ . For hvert mål  $\mu_i$  gis det en optimal løsningsvektor  $x_i^*$  med tilhørende standardavvik  $\sigma_i$ . Kurven i  $(\sigma, \mu)$ -planet som dannes av punktene  $\{(\sigma_1, \mu_1), \dots, (\sigma_k, \mu_k)\}$  omtales som den effisiente porteføljefronten. Figur (4.1) viser en illustrasjon av effisiente porteføljer til ulike standardavvik. Porteføljen er effisient i den forstand at kurven kun består av porteføljer med minimal varians gitt et avkastningsmål.

Modellen kan utvides med et risikofritt aktivum med avkastning  $r_f$  og vekt  $x_f$ . Da blir optimeringsproblemet

$$\min_x \sigma^2(x) \text{ gitt bibetingelsene} \quad (4.7)$$

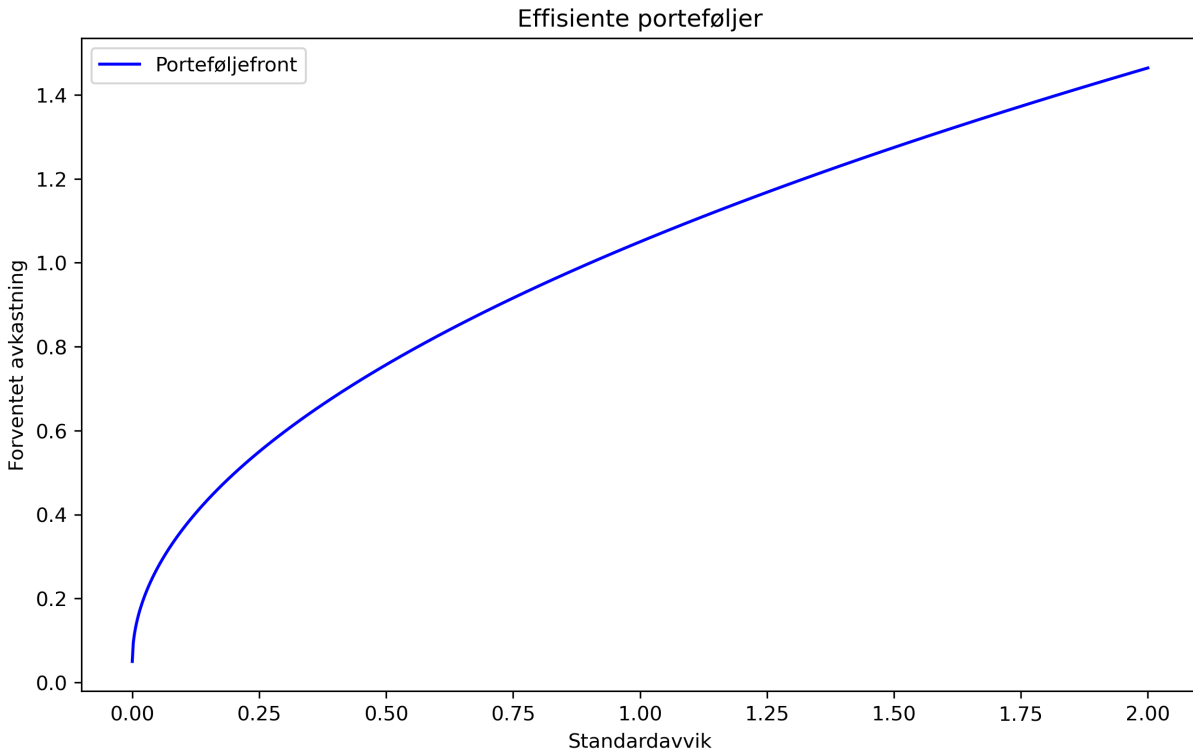
$$\sum_{i=1}^n (\bar{r}_i - r_f) x_i \geq \mu - r_f \quad (4.8)$$

med løsningsvektor

$$x^* = \lambda_\mu^* Q^{-1} (\bar{r} - \mathbf{1} r_f), x^* \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (4.9)$$

hvor vektningen i det risikofrie aktivumet  $x_f^*$  er inkludert i løsningen.

$$R(x^*; \bar{r}) = x_f^* r_f + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^*\right) R_T(x^*, \bar{r}) \quad (4.10)$$



Figur 4.1: Illustrasjon av en effisient porteføljeffront

Av Tobins separasjonsteorem kan porteføljen i likning (4.10) kan dekomponeres i to porteføljer: en portefølje med det risikofrie aktivumet  $r_f$  og en risikabel portefølje  $T$

$$R(x^*; \bar{r}) = (1 - x)r_f + xR_T(x_T; \bar{r}) \quad (4.11)$$

hvor  $x$  er andelen plassert i porteføljen  $T$ . Porteføljen  $T$  består av vektene  $x_T^*$  som løser optimeringsproblemet

$$\max_{x_T} S = \frac{R_T(x_T; \bar{r}) - r_f}{\sigma(x_T)} \quad (4.12)$$

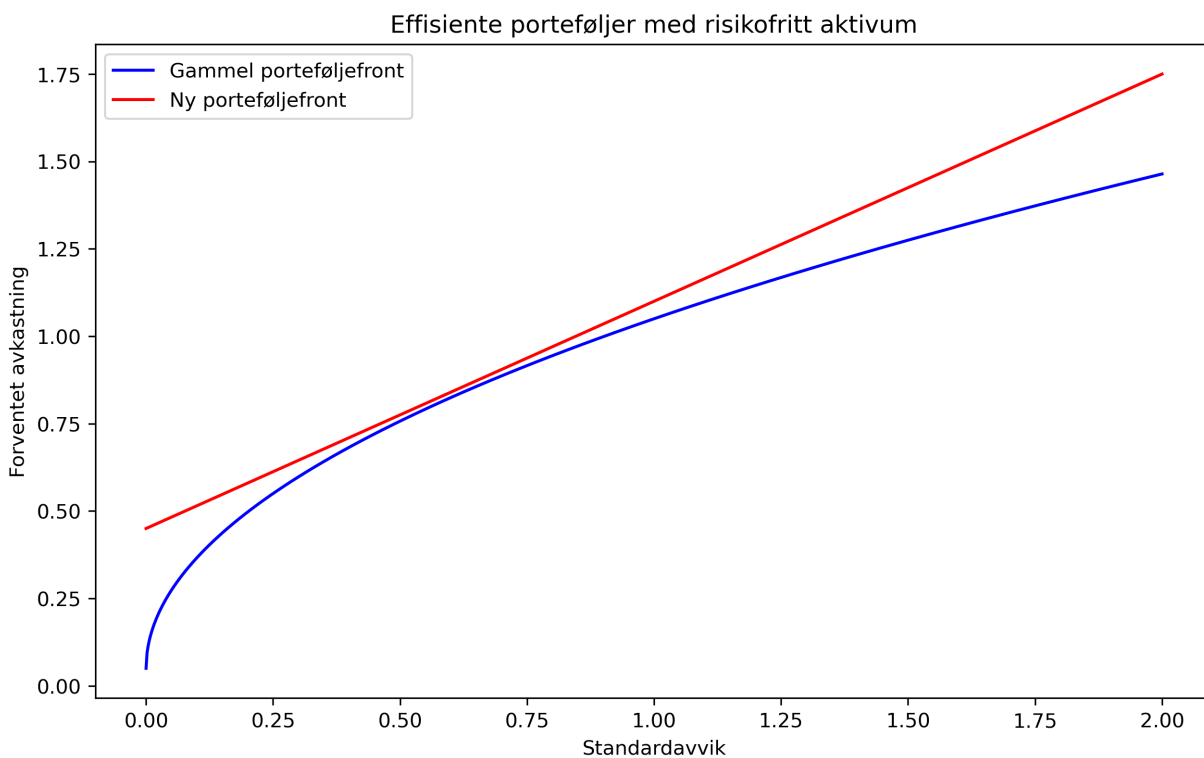
Brøken  $S$  omtales som Sharpe-brøken og er et mål på risikojustert avkastning. Sharpe-brøken gir forventet meravkastning i porteføljen når standardavviket øker med ett prosentpoeng.

Tobins separasjonsteorem sier at enhver effisient portefølje kan representeres som en lineær kombinasjon av porteføljen  $T$  og det risikofrie aktivumet  $r_f$ .

Med dette kan den forventede avkastningen kan uttrykkes som

$$R(x^*; \bar{r}) = r_f + \left( \frac{R_T(x_T^*; \bar{r}) - r_f}{\sigma_T(x_T^*)} \right) \sigma(x) \quad (4.13)$$

Likning (4.13) omtales som kapitalallokeringslinjen og viser ulike sammensetninger av avkastning og standardavvik når det risikofrie verdipapiret inkluderes i porteføljen. Porteføljen  $T$  er porteføljen som bestemmes av tangeringspunktet mellom kapitalallokeringslinjen og den opprinnelige porteføljefronten.



Figur 4.2: Illustrasjon av porteføljefront med risikofritt aktivum

Figur (4.2) viser at kapitalallokeringslinjen danner en rekke nye kombinasjoner av forventet avkastning og risiko som ikke var tilgjengelig i den opprinnelige porteføljefronten. Dette tillater mindre risikoaverse investorer å konstruere effisiente lavrisikoporteføljer til maksimal risikojustert avkastning.

Mean-variance modeller har imidlertid noen begrensninger som bør påpekes. Først må det påpekes at løsningen til optimeringsproblemet i (4.12) er utsatt for estimatskjevhet. Dersom estimatene på forventet avkastning og variasjon er skjeve vil dette nødvendigvis resultere i at porteføljevektene  $x_T$  også blir skjeve og følgelig ikke-representative for fremtidig avkastning og samvariasjon. Med andre ord blir den estimerte porteføljefronten ulik den ”sanne” porteføljefronten.

En annen kjent svakhet ved rammeverket til Markowitz er at allokeringen  $x^*$  ofte er svært sensitiv ovenfor endringer i avkastningsegenskapene til aktivumene. Problemstillingen som utforskes her tillater likevel å benytte dette optimeringsproblemet som en rimelig approksimasjon ettersom fokuset er mer rettet mot endringen i allokeringen snarere enn hva allokeringen blir når kommuneinntekter inkluderes i modellen.

En siste kommentar er at optimeringsproblemet i (4.12) ikke nødvendigvis er forenlig med investorens mål for forvaltningen. Sharpe-brøken blir brukt som objektfunksjon for investorer som er interessert i å maksimere forholdet mellom porteføljens avkastning og standardavvik, men standardavviket til porteføljen behøver ikke å være det korrekte risikomålet for kommunen. Investorer som begrenses av finansielle forpliktelser kan for eksempel være mer interessert å minimere sannsynligheten for ekstremverdihendelser, og i så fall vil ikke Sharpe-brøken være det beste målet på risikojustert avkastning. Dette kan motivere bruk av andre godt etablerte risikomål som eksempel Value at Risk (VaR), Conditional Value at Risk (CVaR) eller en kombinasjon av disse. Zenios (2008) [28] gir en god oversikt over porteføljemodeller med alternative risikomål.

#### 4.1.2 Dynamisk porteføljevalg

Et alternativ til det statiske porteføljevalget er investorens dynamiske porteføljevalg. Den prinsipielle forskjellen mellom det statiske og dynamiske porteføljevalget er at porteføljevalget gjentas i hver periode  $t, \dots, T$ . Altså vil vektingen i porteføljen variere over tid. I finansteorien tar det dynamiske porteføljevalget utgangspunkt i at investoren har en nyttefunksjon  $U(\cdot)$  som avhenger av nytte i dag og nytte i fremtiden. Investoren har på tid  $t$  en inntekt  $Y_t$  og formue  $A_t$ , og ønsker å finne den optimale fordelingen mellom konsum  $C_t$ , sparing  $Y_t + A_t - C_t$  og allokeringen av midlene spart. Sparingen gjøres i en portefølje med et risikofritt og et risikabelt aktivum med vekter  $1 - w_t, w_t$  henholdsvis.

Dermed må også husholdningen bestemme optimal allokering  $w_t$  i porteføljen. Optimeringsproblemet formuleres som en Bellmanlikning på formen

$$V_t(A_t) = \max_{w_t, C_t} \mathbb{E}_t [V_{t+1}(Y_{t+1}, A_{t+1}) | A_t, Y_t] \text{ gitt bibetingelsen } A_{t+1} = (Y_t + A_t - C_t)R_{p,t+1} \quad (4.14)$$

som kan løses ved dynamisk programmering. Kommunen maksimerer sin verdifunksjon  $V_t(A_t)$  gitt en dynamisk budsjettbetingelse  $A_{t+1} = (Y_t + A_t - C_t)R_{p,t+1}$ . Denne løsningen gir kommunen den optimale allokeringen  $w_t$  i kraftfondets portefølje. Dynamiske porteføljevalg er mer komplisert å løse matematisk og kan kreve bruk av numeriske metoder for å løse optimeringsproblemene. Til tross for at dynamiske modeller ikke vil bli brukt aktivt i analysen er det hensiktsmessig å presentere metoden ettersom enkelte resultater som benyttes senere er hentet fra dynamiske porteføljemodeller.

## 4.2 Kommunens porteføljevalg

En vesentlig forskjell mellom kommunen og en tradisjonell investor er at høyest mulig avkastning til lavest mulig risiko i kraftfondets portefølje ikke nødvendigvis er optimalt for kommunen. Om kommunens formål er å maksimere avkastningen i den samlede porteføljen til en gitt risikoramme må også samvariasjonen mellom kraftfondets portefølje og kommunens eksogene inntekter inkluderes i porteføljevalget.

### 4.2.1 Porteføljen

For å skreddersy teorien til kommunens porteføljevalg utvides porteføljen med en inntektsvekst  $g$ . Inntekten kan tolkes som en perodesvis vekst ved

$$\tilde{g} = \frac{I_{t+1} - I_t}{I_t} \quad (4.15)$$

hvor  $I$  er en inntektsvariabel. Avkastning til kommunen som helhet blir

$$R_K(x; \tilde{r}, \tilde{g}) = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{r}_i + \tilde{g} \quad (4.16)$$

Til dette formålet er det hensiktsmessig å betrakte  $\mathbb{E}(\tilde{g}) = 0$ . Dette kan begrunnes ved at  $g$  kun allokeres til konsum, og er i den forstand ikke et omsettbart finansielt aktivum.

Alternativt kan denne begrensningen tolkes som at kommunen kun er gitt inntektene som trengs for å sikre sitt tjenestebehov, slik at den reelle inntektsveksten er null i forventning. Gitt denne antakelsen kan porteføljens forventede avkastning og varians uttrykkes som

$$R(x; \bar{r}, \bar{g}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i \quad (4.17)$$

$$\sigma_K^2(x) = E \left[ \{R(x; \tilde{r}, \tilde{g}) - R(x; \bar{r}, \bar{g})\}^2 \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} + \sigma_g^2 + \sum_{i=1}^n x_i \sigma_{ig} \quad (4.18)$$

Denne porteføljen er en utvidelse av den enkle mean-variance modellen vist i kapittel 3. Forskjellen er at kommunens portefølje også inkluderer et variansledd  $\sigma_g^2$  og et kovariansledd  $\sum_{i=1}^n x_i \sigma_{ig}$ . Grunnlaget for problemstillingen er at leddet  $\sum_{i=1}^n x_i \sigma_{ig}$  kan være av såpass høy størrelsesorden at den opprinnelige allokeringen i kraftfondets portefølje ikke maksimerer kommunens risikjusterte avkastning, som nå er gitt ved kommunens Sharpe-brøk

$$S_K = \frac{R_K(x; \tilde{r}, \tilde{g}) - r_f}{\sigma_K(x)} \quad (4.19)$$

En antakelse som gjøres i analysen er at kommunen mottar inntektsstrømmen  $g$  eksogent<sup>6</sup>. Implikasjonen av denne antakelsen er at kommunen må studere ulike porteføljesammensetninger i kraftfondet gitt  $g$ .

#### 4.2.2 Diversifisering

Svingningene i porteføljen til kommunen kan dekomponeres på følgende vis:

$$\text{Risiko} = \text{Omsettbar risiko} + \text{Ikke-omsettbar risiko} \quad (4.20)$$

Den omsettbare risikoen er risikoen for svingninger i kommunens formue grunnet omsettbare aktivum som aksjer og obligasjoner. Den ikke-omsettbare risikoen er derimot risikoen for svingninger i kommunens formue som skyldes svingninger i deres ikke-omsettbare aktiva. Ikke-omsettbare aktiva er for eksempel skatteinntekter, rammetilskudd og statlige overføringer. Den omsettbare risiko kan igjen dekomponeres i systematisk risiko og usystematisk risiko. Usystematisk risiko er selskapsspesifikk risiko som for eksempel sviktende finansielle

<sup>6</sup>I praksis kan kommunen endre for eksempel skattesatser for å tilpasse seg kraftfondets portefølje, men det er naturlig å anta at kraftfondets portefølje må tilpasses kommunens økonomi snarere enn at kommunens økonomi endres for å tilpasses kraftfondets portefølje.

nøkkeltall eller dårlig ledelse. Systematisk risiko er risiko som avhenger av makroøkonomiske og makrofinansielle forhold som påvirker alle bedrifter samtidig. Eksempler er sjokk i realøkonomiske størrelser som renter, inflasjon og BNP. En alternativ dekomponering av risikoen i porteføljen blir:

$$\text{Risiko} = \text{Systematisk risiko} + \text{Usystematisk risiko} + \text{Ikke-omsettbare risiko} \quad (4.21)$$

Kommunen kan eliminere den usystematiske risikoen i porteføljen ved diversifisering. Når kommunen øker antallet aktivum i porteføljen vil den usystematiske risikoen monotont tendere mot null. Intuisjonen bak dette resultatet er at usystematisk oppsiderisiko i gjennomsnitt motvirker usystematisk nedsiderisiko<sup>7</sup>. For å illustrere virkningen av diversifisering lar vi  $P$  være en portefølje med aktivum som er likt vektet,  $x_i = 1/n \forall i = 1, \dots, n$  i porteføljen. Da gjelder

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}_j^2 + \frac{n-1}{n} \bar{\sigma}_{jk} \rightarrow \bar{\sigma}_{jk} \text{ når } n \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

slik at porteføljens varians tenderer mot den gjennomsnittlige kovariansen  $\bar{\sigma}_{jk}$ , som også kan oppfattes som systemrisikoen i porteføljen. Det sentrale funnet i kapitalverdimodellen er tett knyttet til dette resultatet. Kapitalverdimodellens konklusjonen er at aksjepremier ikke kan baseres på usystematisk risiko da denne typen risiko kan elimineres ved diversifisering, slik at investorer kun baserer forventet avkastning på aktivumets samvariasjon med en diversifisert markedsportefølje.

Ved å diversifisere porteføljen vil svingningene reduseres av to årsaker. Diversifiseringen eliminerer usystematisk risiko slik at  $\sigma_K$  faller, men fordi antallet aktivum i porteføljen øker vil også korrelasjonen  $\rho_{g,K}$  reduseres. Reduksjonen i korrelasjon kan begrunnes ved at diversifiseringen eliminerer det opprinnelige korrelasjonspreget til den ikke-diversifiserte porteføljen. Om porteføljen er bredt investert vil eventuelle selskaper eller sektorer med svært høy eller svært lav korrelasjon med  $g$  ha liten betydning i porteføljen. Dette fører til at leddet  $\sum_{i=1}^n x_i \sigma_{ig}$  trolig blir neglisjerbart. Så om porteføljen opprinnelig hadde høy korrelasjon med kommunens inntekter oppnås diversifisering på grunn av lavere varians og korrelasjon. Om porteføljen opprinnelig hadde svært lav eller negativ korrelasjon med kommunens inntekter vil diversifiseringsgevinsten være noe mindre fordi korrelasjonen vil stige med antall aktivum i porteføljen.

<sup>7</sup>Forutsetter at alle selskapene ikke er perfekt korrelerte, det vil si  $\rho_{i,j} < 1 \forall i \neq j$

Med andre ord behøver ikke diversifiserte porteføljer å ha en høyere Sharpe-brøk enn sine konsentrerte motparter. I et diskusjonsnotat publisert av Norges Bank Investment Management (NBIM) vises det blant annet at kombinasjoner av diversifiserte og konsentrerte porteføljer øker porteføljens Sharpe-brøk [16].

#### 4.2.3 Geografisk diversifisering

Investeringsmandater som tillater internasjonale plasseringer gir muligheter til å oppnå diversifisering på tvers av regioner. Strukturelle forhold som næringsstruktur, humankapital, sammensetningen av produksjonsfaktorer m.m gjør den systematiske risikoen ulik for ulike land og regioner. Systemrisikoen kan være ulik i sin sammensetning, det vil si sammensetningen av faktorer som utløser risikoen, men også ulik i form av tid, det vil si når den inntreffer økonomien. I henhold til likning (4.22) skal det være mulig å oppnå en ytterligere diversifisering, hvor porteføljevariansen nå tenderer mot gjennomsnittlig kovarians mellom ulike land. Et godt eksempel som motiverer geografisk diversifisering er den norske petroleumsnæringens betydning for norsk økonomi. Historisk sett har utviklingen i norsk økonomi vært tett knyttet til utviklingen i petroleumsnæringen grunnet ringvirkningseffekter. Dette har trolig gjort norske finansmarkeder mer sårbare overfor negativ utvikling i petroleumssektoren, og som en konsekvens av dette har norsk markedsrisiko i større grad vært preget av petroleumssektoren sammenlignet med andre land som ikke eksporterer olje. Oljepriserisiko og geografisk diversifisering har også vært et relevant tema for forvaltningen av SPU (Meld. St. 14, 2018-2019) [11].

### 4.3 Optimal allokering

Sammenlignet med en tradisjonell mean-variance investor er kommunen mer interessert i å velge allokeringen  $x^*$  slik at kommunens risikojusterte avkastning,  $S_K$ , er maksimert. Dette gjøres ved å løse optimeringsproblemet

$$\max_x S_K = \frac{R_K(x; \tilde{r}, \tilde{g}) - r_f}{\sigma_K(x)} \quad (4.23)$$

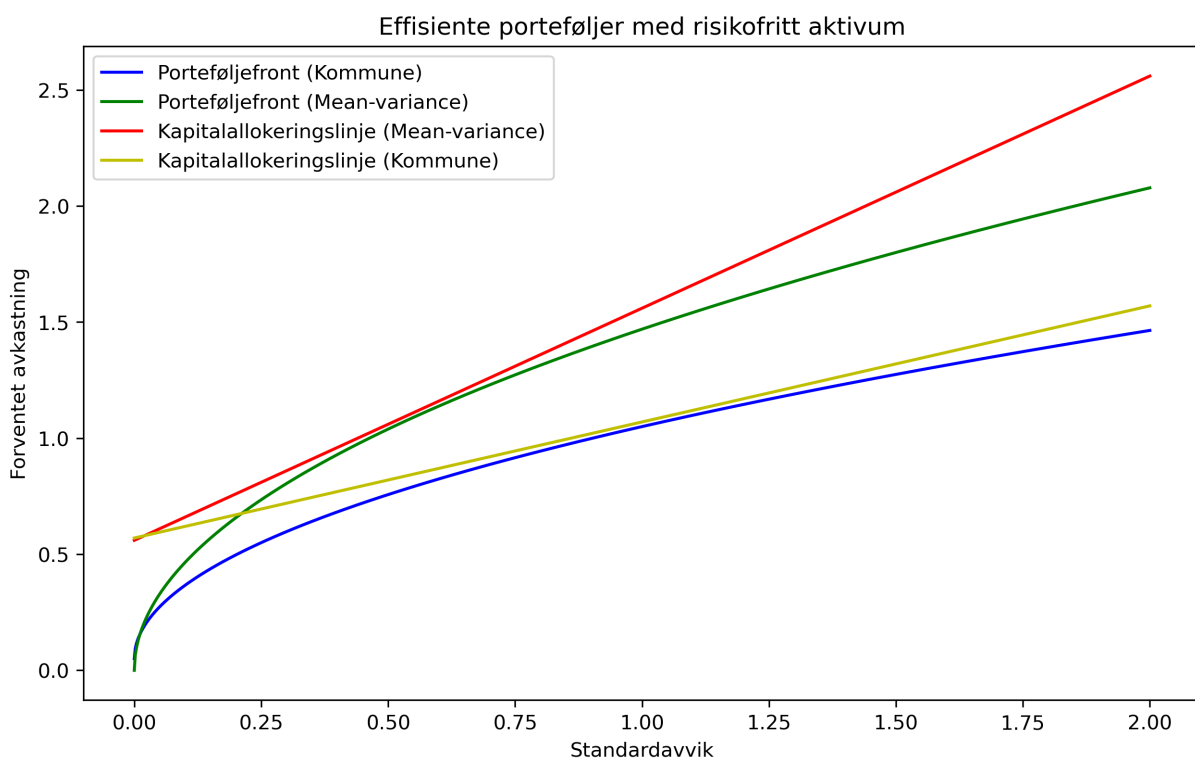


hvor  $\sigma_K^2(x)$  er variansen til kommunen gitt en allokering  $x$ . Løsningen i (4.23) gir de optimale vektene i den risikable porteføljen  $T$  som brukes til å danne kapitalallokeringslinjen

$$R^*(x; \bar{r}) = r_f + \left( \frac{R_T(x_T^*; \bar{r}, \tilde{g}) - r_f}{\sigma_T(x_T^*)} \right) \sigma(x) \quad (4.24)$$

Kapitalallokeringslinjen tar nå høyde for samvariasjonen mellom kraftfondets portefølje og kommunens inntekter  $g$ . Langs kapitalallokeringslinjen ligger kommunens effisiente porteføljer, det vil si porteføljene med minimal varians gitt et avkastningsmål.

Figur (4.3) viser en illustrasjon av hvordan porteføljefronten kan endres når kommunen tar hensyn til kommunens inntekter i forvaltningen av kraftfondet.



Figur 4.3: Illustrasjon av porteføljefronter

Hvor kommunen legger seg på kapitalallokeringslinjen avhenger av allokeringen  $x$ . Når  $x$  er høy øker kommunen vektningen mot den riskable porteføljen  $T$ , og tar følgelig mer finansiell risiko. Det er viktig å påpeke at allokeringen mellom  $r_f$  og porteføljen  $T$  ikke kan bestemmes av porteføljeteorien presentert i kapittel 4.1. Denne allokeringen bør helst bestemmes av kommunens preferanser overfor risiko og eventuelle andre hensyn som kan være av betydning for forvaltningen.

I finasteorien kan allokeringen mellom den risikofrie og risikable porteføljen studeres ved å se på dynamiske modeller for optimalt porteføljevalg. Finasteorien viser at porteføljevalget til husholdninger med omsettbar- og ikke-omsettbar risiko avhenger av egenskapene til de ulike postene på husholdningens balanse. Hver post på balanseregnskapet har ulike egenskaper i form av avkastning, variasjon og samvariasjon med andre poster på balansen.

For Trondheim kommune kan et enkelt balanseregnskap stilles opp som følgende:

Kommunens balanseregnskap	
Aktiva	Passiva
Skatteinntekter	Gjeld
Rammetilskudd	Øvrige utgifter
Andre statlige overføringer	
Kraftfondets forvaltningskapital	
Kommunens bufferfond	
Aktiva	Aktiva - Passiva = Egenkapital

I prinsippet innebærer dette at kommunen bør inkludere forpliktelser som gjeld og andre utgifter i porteføljevalget, men i denne analysen er fokuset rettet mot aktivasiden av balansen. Viceira (2001) studerer et dynamisk porteføljevalg for husholdninger med og uten eksogene, usikre arbeidsinntekter [27]. I henhold til artikkelen benyttes følgende notasjon

- $\mu = E_t(r_{e,t+1} - r_f)$  er den (betinget) forventede aksjepremien
- $\sigma_u^2$  er variansen til den ikke-forventede avkastningen til aksjen
- $\gamma$  er husholdningens konstante relative risikoaversjon

Det vises at i tilfellet hvor husholdningen ikke har arbeidsinntekt er følgende allokering til aksjeporteføljen optimal<sup>8</sup>:

$$\alpha^r = \frac{\mu + \sigma_u^2/2}{\gamma\sigma_u^2}, \frac{\partial\alpha^r}{\partial\mu} > 0, \frac{\partial\alpha^r}{\partial\gamma} < 0, \frac{\partial\alpha^r}{\partial\sigma_u^2} < 0 \quad (4.25)$$

Resultatet viser at husholdningen bør allokere mer til aksjeporteføljen når premien  $\mu$  øker, risikoaversjonen  $\gamma$  faller og variansen til aktivumet  $\sigma_u^2$  faller.

<sup>8</sup>Her kan aksjeporteføljen tolkes synonymt med en risikabel portefølje.

I det mer interessante tilfellet hvor husholdningen har en eksogen inntekt, som i vårt tilfelle blir den ikke-omsettbare inntekten  $g$  kan det vises at den optimale allokeringen blir

$$\alpha^e = \frac{\mu + \sigma_u^2/2}{\gamma \bar{b}_1 \sigma_u^2} - \left( \frac{\pi^e(1 - b_1^e)}{\bar{b}_1} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_{\xi u}}{\sigma_u^2} \right), \bar{b}_1 < 1, \frac{\partial \alpha^r}{\partial \sigma_{\xi u}} < 0 \quad (4.26)$$

Med en eksogen arbeidsinntekt vil vektingen mot risikable aktivum fortsatt øke når  $\mu$ ,  $\gamma$  øker og  $\sigma_u^2$  faller. Men i tillegg vil det være optimalt å øke aksjeandelen ytterligere når samvariasjonen  $\sigma_{\xi, u}$  mellom inntektene  $\xi$  og meravkastningen  $u$  i aksjeporteføljen faller.

I scenariet der  $\sigma_{\xi, u} \leq 0$  kan det vises at  $\alpha^e > \alpha^r$ . Altså bør en husholdning med eksogen inntekt ha en høyere aksjeandel enn en husholdning uten eksogen inntekt når samvariasjonen mellom inntekten og meravkastningen er negativ. Intuisjonen bak resultatet er at når husholdningen har en alternativ inntektskilde så vil effekten av et negativt sjokk i den finansielle formuen delvis motvirkes av økt eksogen (ikke-omsettbare) inntekt. Altså bidrar denne ikke-positive samvariasjonen til å jevne ut husholdningens konsum. Dette gir en viss forståelse for hvordan kommunen bør ta utgangspunkt i utformingen av kraftfondets portefølje.

For å illustrere hvordan dette resultatet fungerer: Ta alle parameterne og variablene i likning (4.26) utenom  $\sigma_{\xi, u}$  for gitt. Anta at kommunens faktiske aksjeandel<sup>9</sup> er  $\alpha^e = \alpha^*$ . Da kan likning (4.26) skrives om for en implisitt verdi av  $\sigma_{\xi, u}$ ,  $\sigma_{\xi, u} = \sigma_{\xi, u}^*$ . Med andre ord er dette den implisitte kovariansen som er konsekvent med kraftfondets nåværende aksjeandel  $\alpha^*$ . Dersom den implisitte kovariansen  $\sigma_{\xi, u}^*$  er høyere enn empiriske kovariansen  $\hat{\sigma}_{\xi, u}$  er implikasjonen at  $\hat{\alpha}^e > \alpha^*$ , hvor  $\hat{\alpha}^e$  er den empiriske aksjeandelen, det vil si aksjeandelen i (4.26) med den empiriske kovariansen substituert inn for  $\sigma_{\xi, u}$ . I dette tilfellet er det optimalt for kommunen øke aksjeandelen i porteføljen fordi kovariansen er lavere enn antatt. På tilsvarende vis er kommunen overinvestert i aksjer om den empiriske samvariasjonen er høyere enn den implisitte samvariasjonen gitt av den faktiske aksjeandelen. Da er det optimalt for kommunen å redusere aksjeandelen i porteføljen.

<sup>9</sup>Det vil si dagens aksjeandel i referanseporteføljen. I finansreglementet innebærer dette  $\alpha^* = 0.2$ .

### 4.3.1 Statisk allokering og tidshorisont

I investeringsmandatet til kommunen er det bestemt at kraftfondet skal ha en lang investeringshorisont. Et naturlig spørsmål blir dermed hvilken betydning dette har for kommunens porteføljevalg, og om det statiske porteføljevalget ikke lenger er anvendelig til kommunens formål. Svaret er både ja og nei. Mange investeringsrådgivere, investorer og andre praktiserende økonomer anbefaler husholdninger å øke aksjeandelen i porteføljen når tidshorisonten er lang<sup>10</sup>.

Rådene argumenteres ofte ved at risikable aktivum som aksjer generelt stiger mer enn det de faller, og siden husholdninger med lang investeringshorisont tåler midlertidige svingninger, følger det at aksjeandelen bør økes. Den implisitte forutsetningen som disse investeringsrådgiverne tar er at risikoen kan tidsdiversifiseres. I så fall vil allokeringen som gis av det statiske porteføljevalget gi en for lav aksjeandel. Dette er ikke nødvendigvis riktig.

For å vise hvorfor dette er (ubetinget) feil, anta at porteføljen er log-normalfordelt<sup>11</sup> med verdi  $W_t$  på tid  $t$ , forventning  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ . Da kan verdiutviklingen i porteføljen uttrykkes som:

$$\ln \left( \frac{W_{t+T}}{W_t} \right) = \ln \left( \frac{W_{t+1}}{W_t} \right) + \ln \left( \frac{W_{t+2}}{W_{t+1}} \right) + \dots + \ln \left( \frac{W_{t+T}}{W_{t+T-1}} \right) \quad (4.27)$$

$$= \sum_{i=1}^T \ln (1 + R_{p,t+i}) \quad (4.28)$$

$$= \sum_{i=1}^T r_{p,t+i} \quad (4.29)$$

Altså er log-avkastningen i porteføljens verdi mellom  $[t, T]$  summen av de periodesvise log-avkastningene. Om avkastningene er uavhengige og identisk fordelte (*i.i.d*) ser man at

$$\mathbb{V} \left( \sum_{i=1}^T r_{p,t+i} \right) = \sigma^2 T \quad (4.30)$$

Dette innebærer at variansen i porteføljens verdi vokser proporsjonalt med tiden, altså vil risikoen stige over tid. Under antakelsene gitt ovenfor vil det ovennevnte forslaget om å øke aksjeandelen være en feilslutning fordi økt aksjeandel fører til enda større variasjon på lang sikt<sup>12</sup>. Dette faktumet kan illustreres grafisk ved å simulere to korrelerte porteføljer, for

<sup>10</sup>Se for eksempel DNBs forbrukerøkonom Silje Sandmæls [tips til unge pensjonssparere](#)

<sup>11</sup> $X$  er log-normalfordelt dersom  $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$

<sup>12</sup>Dette temaet diskuteres grundig i Merton og Samuelson (1974) [23]

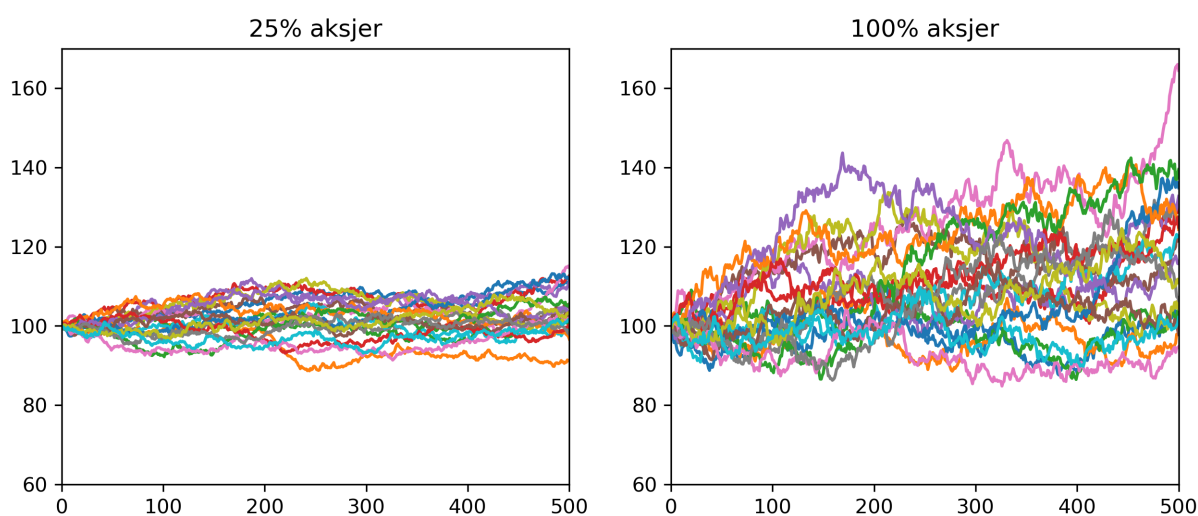
eksempel en aksjeportefølje,  $S_t$ , og en renteportefølje,  $V_t$ , som begge følger geometrisk Brownsk bevegelse med uavhengige og normalfordelte avkastninger. Anta at disse porteføljene har korrelasjon  $\rho$ . Disse prosessene uttrykkes ved:

$$P_t = \alpha S_t + (1 - \alpha)V_t \quad \text{hvor} \quad (4.31)$$

$$dS_t = \mu_1 S_t dt + \sigma_1 S_t dB_t, \quad dB_t \sim N(0, 1) \quad (4.32)$$

$$dV_t = \mu_2 V_t dt + \sigma_2 V_t \left( \rho dB_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right), \quad dZ_t \sim N(0, 1) \quad (4.33)$$

Figur (4.4) viser verdiutviklingen til porteføljen ved ulike aksjeandeler. Figuren viser at sluttformuen inkluderer en betydelig andel utfall hvor sluttformuen er lavere enn tid 0 verdien  $P_0$ . Etersom kraftfondet i all hovedsak er mer interessert i terminalverdien  $P_T$  ved slutten av tidshorizonten kan det tenkes at det ikke nødvendigvis er ønskelig å øke aksjeandelen i porteføljen isolert sett. Sett i lys av Barros katastrofemodell og Bansal og Yarons teori om langtidsrisiko kan man også argumentere for at nedsiderisikoen er større enn antatt. Isolert sett kan det tale for å redusere risikoeksponeringen i fondet.



Figur 4.4: Portefølje med aksjer og statsobligasjoner med korrelasjon  $\rho = 1$

Samuelson (1969) [25] og Merton (1969, 1971) [18] [20] viser at porteføljevalget på lang sikt sammenfaller med porteføljevalget på kort sikt under en av to betingelser. Den første betingelsen er avkastninger må være identiske og uavhengige fordelt i tillegg til at husholdningen har en såkalt "power utility" nyttefunksjon som den beskrevet i likning (3.19). Intuisjonen bak dette resultatet er at hvis avkastninger er uavhengig fordelt så vil informasjonen husholdningen mottar på tid  $t$  ikke forbedre allokeringen.

Den andre betingelsen er at husholdningen må ha en "log utility" nyttefunksjon. Under denne forutsetningen behøver ikke avkastninger å være uavhengige og identisk fordelte. Spørsmålet om hvorvidt Trondheim kommune bør endre allokeringen avhengig av tidshorizonten vil avhenge av om en av de to betingelsene oppfylles. I denne analysen ser vi bort fra spørsmålet om kommunens nyttefunksjon. Når det gjelder *i.i.d* antakelsen har aksjeavkastninger vist seg å være uforutsigbare, men i en noe svakere grad enn det *i.i.d* antakelsen forutsetter.

I henhold til finansteorien kan det tenkes at midlertidige perioder med høye avkastninger vil etterfølges av en priskorrigerings hvor prisen beveger seg mot en pris forenlig med fundamentale verdier. Dette kan begrunnes ved at selskaper "overprises" i høykonjunkturer og "underprises" i lavkonjunkturer, slik at prisen over tid går mot en "korrekt" pris. Denne dynamikken kan for eksempel beskrives ved en Ornstein-Uhlenbeck prosess

$$dS_t = \theta(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t, \theta > 0 \quad (4.34)$$

Likningen viser at når avkastningen  $r_t$  er over sin fundamentale verdi  $\mu$ , vil prisen nedjusteres over tid, og responsen på denne korrigeringen avhenger av størrelsen på parameteren  $\theta$ , hvor lav  $\theta$  gir en langsom korrigerings. Dermed vil ikke avkastningene lenger være uavhengige. Om aksjeavkastninger følger en slik prosess vil variasjonen være mindre enn variasjonen som kommer av den geometriske Brownske bevegelsen. Intuisjonen er at svært høye eller lave priser vil etter hvert dras tilbake mot en likevektspris. Selv om verdipapirene følger prosessen over kan det likevel vises at variansen øker over tid. Altså vil en korrigerings som den beskrevet over likevel ikke kunne forsvare forslaget om å øke aksjeandelen når tidshorizonten er lang ved å bruke tidsdiversifiseringsargumentet.

### 4.3.2 Dynamisk allokering og rebalansering

Under visse forutsetninger ble det vist at den langsiktige porteføljeallokeringen mellom de ulike aktivaklassene er myopisk, altså lik den kortsiktige allokeringen. Det som imidlertid skiller det statiske porteføljevalget fra det dynamiske porteføljevalget er at i det dynamiske porteføljevalget kan husholdninger justere allokeringen over tid. Denne egenskapen gjør at kommunen kan dra nytte av dynamiske investeringsstrategier. Når markedet utvikler seg vil tid  $t$  allokeringen  $x_t$  avvike fra  $x_0$ , og følgelig vekk fra kommunens preferanser. For kommunen kan derfor en statisk "kjøp-og-hold" strategi ikke være optimal.

Implikasjonen av dette er at kraftfondet trenger en dynamisk investeringsstrategi som opprettholder kommunens preferanser over tid.

I kapittel 3 ble det dynamiske porteføljevalget hvor husholdningen valgte en perodesvis allokering  $x_t$  nevnt som en alternativ tilnærming. Utfordringen med denne investeringsstrategien er at den krever nye allokeringer i hver periode, og som kan variere betydelig avhengig av utviklingen i finansmarkedene. En slik strategi vil sjeldent være optimal for kommunen da kommunen har behov for en viss forutsigbarhet for å kunne møte fremtidige forpliktelser. Om allokeringene  $x_t$  varierer betydelig vil enkelte perioder medføre en allokering som kan forsterke svingninger i kraftfondets markedsverdi. Som en investor med en lang tidshorison er ikke kortsiktige svingninger i og for seg selv en bekymring, men fordi kommunen i perioder vil ha behov for å ta ut midler av fondet kan store svingninger, kombinert med uttak fra kraftfondet, resultere i en betydelig reduksjon av fondets grunnkapital. Av den grunn kan kraftfondet dra nytte av en investeringsstrategi som reduserer sannsynligheten for slike scenarier. En annen ulempe er at en slik investeringsstrategi, på grunn av dets uforutsigbarhet, er vanskelig å beskrive i et investeringsmandat. Dette er en ikke-triviell vurdering som kommunen må ta i forbindelse med politisk risiko.

En investeringsstrategi som unngår disse to utfordringene er å ha faste vekter i referanseporteføljen. Med faste vekter investerer kommunen i prinsippet motsyklisk. Når enkelte aktivaklasser stiger i markedsverdi vil disse utgjøre en større vekt av porteføljen. For å holde vektingen i aktivaklassene fast må porteføljen rebalanseres ved å selge andeler i de overvektede aktivaklassene, og på tilsvarende vis kjøpe andeler i de undervektede aktivaklassene. Tar vi utgangspunkt i relasjonen fra kapittel 3

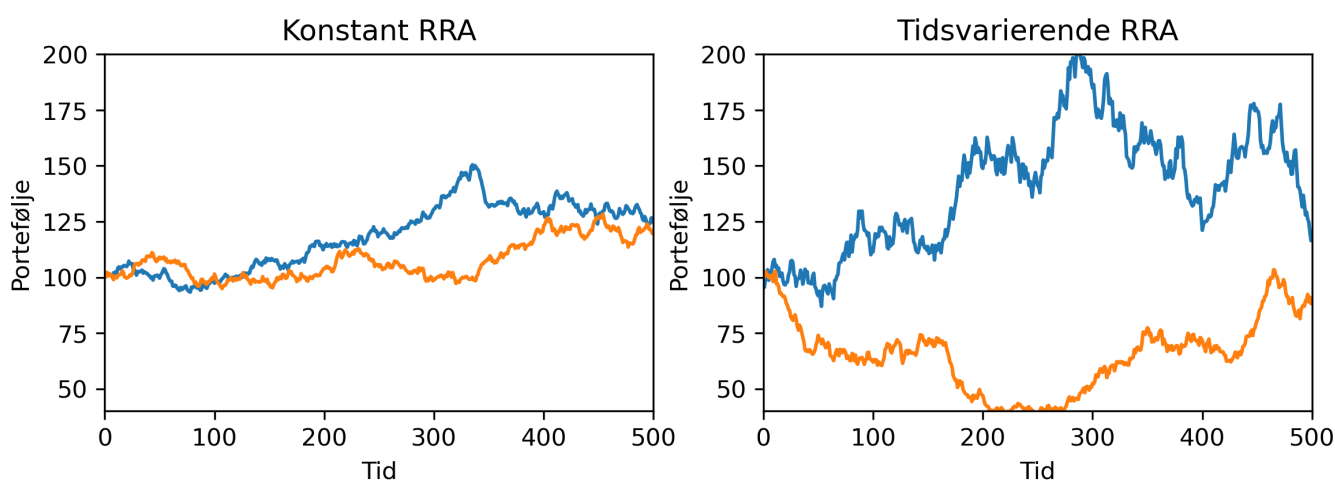
$$E_t(\tilde{R}) = R_f - R_f Cov(m_{t+1}, \tilde{R}), Cov(m_{t+1}, \tilde{R}) < 0 \quad (4.35)$$

tilsier finansteorien at risikable aktivaklasser bør være medsyklisk fordi disse aktivaklassene bør følge konjunktursyklusen. I høykonjunkturer hvor husholdninger har høy konsum  $c_t$  og lav marginalnytte  $u'(c_t)$  vil husholdninger foretrekke å jevne ut konsumet ved å allokere midler til risikable aktivum. Gjelder dette bør aksjer og selskapsobligasjoner som helhet stige i verdi i høykonjunkturer og på tilsvarende vis falle i lavkonjunkturer.

I kapittel 3 ble det også diskutert at investorers relative risikoaversjon heller kunne uttrykkes som

$$\text{Relativ risikoaversjon}_t = \left( \frac{H + B_t}{B_t} \right) \gamma \quad (4.36)$$

Denne relative risikoaversjonen er motsyklisk fordi den er høy i lavkonjunkturer og lav i høykonjunkturer. Om risikoaversjonen er motsyklisk vil svingninger i aktivapriser forsterkes fordi husholdninger i enda større grad ønsker å unngå variasjon i konsumbanen, her representert ved en økning i absoluttverdien til  $Cov(m_{t+1}, \tilde{R})$ . Denne effekten illustreres i figur (4.5).



Figur 4.5: Illustrasjon av tidsvarierende relativ risikoaversjon med korrelerte aktivaklasser ( $\rho = -0.5$ )

Som en konsekvens av husholdningenes medsykliske substitusjon til risikable aktivum vil priser på risikofrie plasseringer svinge motsyklisk. Rebalanseringsstrategien vil derfor kreve at kommunen må selge aksjer og selskapsobligasjoner i høykonjunkturer og på tilsvarende vis øke kjøpet av statsobligasjoner. På denne måten dempes svingninger i porteføljen. For å vise effekten av dette kan man betrakte et enkelt eksempel som vises på neste side.



## Portefølje uten rebalansering

Portefølje	Høykonjunktur	Lavkonjunktur
Aksjer: 80	Aksjer: 140	Aksjer: 20
Statsobligasjoner: 20	Statsobligasjoner: 10	Statsobligasjoner: 40
Markedsverdi: 100	Markedsverdi: 150	Markedsverdi: 60

## Portefølje med rebalansering

Rebalansert portefølje	Høykonjunktur	Lavkonjunktur
Aksjer: 50	Aksjer: 87.5	Aksjer: 12.5
Statsobligasjoner: 50	Statsobligasjoner: 25	Statsobligasjoner: 100
Markedsverdi: 100	Markedsverdi: 112.5	Markedsverdi: 112.5

I dette enkle to-periode eksempelet vil rebalanseringen resultere i at kommunen jevner ut svingninger i porteføljen samtidig som høyere forventet avkastning oppnås. Denne konklusjonen er ikke langt unna det som observeres empirisk. I et diskusjonsnotat publisert av Norges Bank Investment Management (NBIM) vises det at rebalanseringsstrategier har resultert i høyere avkastning og lavere risiko til Statens pensjonfond Utland enn kjøp-og-hold strategier [15]. Men til og med i scenarier der rebalansering gir lavere forventet avkastning kan verdien av å jevne ut svingninger i porteføljen overgå verdien av høyere forventet avkastning. Dette gjelder spesielt om risikoaversjon er medsyklisk. For kommunen vil derfor en motsyklisk investeringsstrategi som faste vekter i referanseporteføljen trolig være en fordelaktig dynamisk investeringsstrategi, så fremt aktivklassene har sykliske tidsserieegenskaper. Hvorvidt aktivklassene i investeringsuniverset har disse egenskapene er derimot et empirisk spørsmål.

### 4.3.3 Politisk risiko

I perioder med uro i finansmarkedene og relativt høye urealiserte tap i kraftfondets portefølje vil politikere i kommunen kunne vedta endringer i kraftfondets investeringsmandat. Slike endringer vil trolig være i form av nye vekter i referanseporteføljen og/eller hyppigere eller større uttak fra fondet, og vil resultere i en reduksjon av kraftfondets forvaltningskapital. Dette er en risikofaktor som kraftfondet er utsatt for, og omtales ofte som politisk risiko<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Bør ikke forveksles med finansiell risiko forbundet med politisk uro.

I Trondheim kommunes finansreglement kan bystyret vedta å tære på fondets grunnkapital eller alternativt oppløse kraftfondet med 2/3 flertall. Dette innebærer at kraftfondet er utsatt for politisk risiko, og dette bør derfor vurderes i investeringsstrategien. Dette er imidlertid ikke en enkel oppgave da politisk risiko er en størrelse som er svært krevende å kvantifisere. Likevel kan politisk risiko brukes som et kvalitativt argument for allokeringen i referanseporteføljen. Det kan tenkes at den politiske risikoen trolig vil være størst i perioder hvor kraftfondets portefølje har falt betydelig i markedsverdi. I et slikt scenario kan bystyret vedta å tære på fondets kapital hvilket kan tolkes som en ytterligere finansiell risiko for kraftfondet. Med andre ord kan kommunens preferanser endres brått. I økonomisk teori omtales dette som tidsinkonsistens.

For å redusere den politiske risikoen bør kraftfondet redusere sannsynligheten for ekstremverdier i porteføljen. Dette vil i hovedsak innebære en lavere allokering til risikable verdipapirer, men kan også forsvare kraftfondets bruk av motsykliske investeringsstrategier som virkemiddel for å jevne ut svingninger. Politisk risiko kan også i den forstand motivere bruk av Value at Risk (VaR) eller Conditional Value at Risk (CVaR) som alternative risikomål for kraftfondets finansielle risiko. Mork-utvalget argumenterer i sin utredning av aksjeandelen i SPU at politisk risiko også kan reduseres om investeringsstrategien forankres i finansteori- og empiri, men også om graden av transparens øker [12].

#### 4.3.4 Bufferfond

Som tidligere nevnt kan store svingninger i kraftfondet føre til ytterligere tap av fondskapital dersom kommunen ønsker å ta ut midler fra fondet i samme periode. Isolert sett taler dette for å redusere aksjeandelen i kraftfondets portefølje. Et motargument er at kommunen har et bufferfond som også kan belastes ved behov. Bufferfondet beskrevet i kapittel 2 utvikler seg etter

$$\text{Bufferkapital}_t = \text{Bufferkapital}_{t-1}(1 + r_{t-1,t}^K - r_{t-1,t}^B) \quad (4.37)$$

og vokser i perioder hvor realavkastningen i kraftfondet er høyere enn budsjettert. Dersom bufferkapitalen er av tilstrekkelig størrelse kan kommunen vurdere å belaste bufferfondet i perioder hvor kraftfondets kapital er relativt lav. Isolert sett kan dette rettferdiggjøre en økning av aksjeandelen i porteføljen, så fremt bufferkapitalen er høy nok til å møte kommunens fremtidige behov for finansiering av kommunale tjenester.

#### 4.3.5 Valg av indekser for forvaltningen

Referanseporteføljen er ofte basert på såkalte referanseindekser som benyttes som et sammenligningsgrunnlag mellom den faktiske porteføljen og referanseporteføljen. Referanseindeksene deles inn etter de ulike aktivaklassene, slik det i praksis vil være en referanseindeks for aksjeforvaltningen og en annen referanseindeks for renteforvaltningen.

Hvilke indekser som brukes som referanse avhenger forvalterens investeringsstrategi, forventede avkastning samt porteføljens risikoprofil. Investorer med høy risikoaversjon vil for eksempel velge eller konstruere referanseindekser med lav risiko.

Store, institusjonelle investorer benytter ofte verdensindekser som en av eventuelt flere referanseindekser, men andre alternativ kan være børsindekser som S&P 500 eller OSEBX. Konstruksjonen av referanseindeksene er vesentlig for å forstå hvilke risikofaktorer kraftfondets portefølje er eksponert mot. Kapittel 5 vil diskutere konstruksjonen av referanseindeksene brukt i analysen og deres implikasjoner for resultatene.

## 5 Porteføljeanalyse

Kapittel 5 ser nærmere på kommunens mean-variance porteføljemodell og kommuneinntektenes betydning for allokeringen i kraftfondet. Kapittel 5.1 går igjennom datagrunnlaget til analysen. Kapittel 5.2 går kort igjennom metoden brukt i analysen. Kapittel 5.3 diskuterer den deskriptive statistikken og viser resultatene fra porteføljeoptimeringen med og uten kommuneinntekter. Kapittel 5.4 gjentar analysen og diskusjonen i kapittel 5.3, men med mer realistiske anslag på fremtidig avkastning.

### 5.1 Datagrunnlag

#### 5.1.1 Kommuneinntekter

For Trondheim kommunes økonomi har vi årlig data på skatteinntekter, rammetilskudd og frie- og disponible inntekter i perioden 2000-2020.

#### 5.1.2 Aksjeindekser

Vi har årlig avkastning i perioden 1998-2020 for tre aksjeindekser

- Referanseindeksen til SPUs aksjeportefølje (Valutasikret)
- Referanseindeksen til SPUs aksjeportefølje (Usikret)
- Referanseindeksen til SPNs norske aksjeportefølje (i NOK)

Referanseindeksen til SPUs aksjeportefølje er basert på den globale aksjeindeksen FTSE Russell Global All Cap, med noen modifiseringer i vektingen<sup>14</sup>. Indeksen vektes etter selskapenes friflytjusterte markedsverdi. Den friflytjusterte markedsverdien til et selskap er den totale markedsverdien til et børsnotert selskaps aksjer som er tilgjengelig for aktiv omsetning i annenhåndsmarkedet. Med andre utgjør selskap  $j$  vekt  $w_j$  gitt ved

$$w_j = \frac{p_j n_j}{\sum_{i=1}^n p_i n_i} = \frac{\text{Friflytjustert markedsverdi til selskap } i}{\text{Total friflytjustert markedsverdi}}, \text{ med } \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad (5.1)$$

hvor  $p_i$  er aksjekursen i annenhåndsmarkedet og  $n_i$  antall utstedte aksjer tilgjengelig for aktiv omsetning. Med en slik konstruksjon vil indeksen i større grad drives av selskaper med høy

<sup>14</sup>Se mandat for forvaltningen av SPU.

friflytjustert markedsverdi, og kan i den forstand gi et noe skjevt estimat på avkastning og risiko til investeringsuniverset sammenlignet med en  $1/n$  vekting, for eksempel. For å unngå denne skjevheten er SPUs referanseindeks justert ved tillegge land ulike faktorer. Med denne vektingsregelen utgjør land  $k$

$$w_k = \frac{m_k f_k}{\sum_{i=1}^n m_i f_i} = \frac{\text{Markedskapitalisering}_k \cdot \text{Faktor}_k}{\text{Total markedskapitalisering} \cdot \text{Faktor}}, \sum_{i=1}^n m_i f_i = 1 \quad (5.2)$$

hvor  $m_i$  er landets markedskapitalisering og  $f_i$  en justeringsfaktor avhengig av landtilhørighet. For eksempel er justeringsfaktoren til USA lik 1, men for utviklede markeder i Europa er denne faktoren 2.5. Dette fordeler landsallokeringen mer jevnt og gjør at denne indeksen kan oppnå bedre geografisk diversifisering. Avkastningen til den usikrede aksjeporteføljen måles ved å beregne avkastningen til porteføljen målt i kroner NOK. Vektene i valutakurven bestemmes av landsvektene i porteføljen.

Den norske aksjeporteføljen til SPN har indeksen Oslo Børs Benchmark Index (OSEBX) som referanseindeks. OSEBX inneholder de største og mest likvide aksjene på Oslo Børs, og vektet også etter friflytjustert markedskapitalisering som beskrevet i likning (5.1).

### 5.1.3 Obligasjonsindekser

Vi har årlig avkastning i perioden 1998-2020 for tre obligasjonsindekser

- Referanseindeksen til SPUs renteportefølje (Valutasikret)
- Referanseindeksen til SPUs renteportefølje (Usikret)
- Referanseindeksen til SPNs renteportefølje (i NOK)

Referanseindeksen til SPUs obligasjonsportefølje har faste vekter som fordeles mellom en stat- og selskapsdel. Statsdelen av referanseporteføljen utgjør 70%. Land  $i$  inngår i statsdelen av referanseindeksen med vekt i henhold til likning (5.2), men med følgende definisjon av justeringsfaktoren  $f$ :

$$f_i = \min \left( \frac{\text{BNP}_i}{\text{Markedskapitalisering}_i}, 2 \right) \quad (5.3)$$

Dermed vil land med høy BNP relativt til markedskapitaliseringen få en høyere vekt i porteføljen.

Selskapsdelen av porteføljen følger metodikken til Bloomberg Barclays Global Aggregate Bond Index, som også vekter selskapsobligasjon  $i$  etter ren markedskapitalisering, det vil si med justeringsfaktor  $f_i = 1$ .

Avkastningen til den usikrede obligasjonsporteføljen måles ved å beregne avkastningen til porteføljen målt i kroner NOK ved å bruke valutakursene i SPUs valutakurv. Vektene i valutakurven bestemmes av landsvektene i porteføljen.

Obligasjonsindeksen til SPN følger også markedsindeksen Bloomberg Barclays Global Aggregate Bond Index. I denne indeksen består 85% av rentepapirer med norsk utsteder og er utstedt i NOK eller alternativt valutasikret. De resterende 15% består av verdipapirer med dansk, finsk eller svensk utsteder. Disse behøver ikke å være valutasikret. I tillegg til denne geografiske allokeringen skal selskapsdelen ha en indeksvekt på 70% og statsdelen 30% hvor allokeringen i begge delindeksene følger metodikken til Bloomberg Barclays Global Aggregate Bond Index. Denne referanseporteføljen tar dermed mer risiko i selskapsobligasjoner og samtidig mindre valutarisiko sammenlignet med SPUs obligasjonsindeks.

#### 5.1.4 Risikofri rente

I analysen benyttes den gjennomsnittlige 2021 renten på norske statsobligasjoner med 10 års løpetid som risikofri rente. I perioden 1/1/2021-24/05/2021 er denne renten 1.32%.

## 5.2 Metode

Metoden tar utgangspunkt i kommuneporteføljen fra kapittel 3. Gjennomsnittlig avkastning til porteføljen beregnes ved

$$R(x; \bar{r}, \bar{g}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i \quad (5.4)$$

Med henholdsvis varians med og uten kommuneinntekter

$$\sigma_K^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n x_i \sigma_{ig} \quad (5.5)$$

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (5.6)$$

Merk at variansen til kommunen,  $\sigma_g^2$ , er tatt ut av det første uttrykket. Dette gir den samme løsningen  $x^*$  fordi variansen  $\sigma_g^2$  skalerer objektfunksjonen med en konstant. Dette gir et tydeligere bilde av porteføljefronten. For beregninger av henholdsvis forventet avkastning, standardavvik, kovarians og korrelasjon for de ulike aktivumene benyttes de empiriske estimatorene:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \quad (5.7)$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2} \quad (5.8)$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) \quad (5.9)$$

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} \quad (5.10)$$

For å måle variasjonen i kommunens inntekter defineres veksten i kommuneinntekter som vekst i frie- og disponible inntekter per capita

$$g_{t,t+1} = \frac{FD_{t+1}}{FD_t} \frac{B_t}{B_{t+1}} - 1 \quad (5.11)$$

hvor  $FD_t$  er kommunens frie- og disponible inntekter ved tid  $t$  og  $B_t$  er kommunens befolkning ved tid  $t$ . Per capita justeringen korrigerer veksten for innbyggertilskuddet diskutert i kapittel 2. Variasjon og samvariasjonen til veksten i inntekter gjøres med de empiriske estimatorene over.

Med estimatene for avkastning, variasjon og samvariasjon løses optimeringsproblemene

$$\min_x \sigma_K^2 \text{ gitt bibetingelsen } \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i = \mu \quad (5.12)$$

og

$$\min_x \sigma^2 \text{ gitt bibetingelsen } \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i = \mu \quad (5.13)$$

hvor  $\mu$  varieres. Deretter beregnes maksimal Sharpe-brøk for begge porteføljene med tilhørende porteføljevекter.

### 5.3 Porteføljeoptimering med historiske data

Porteføljeoptimeringen tar utgangspunkt i den deskriptive statistikken for de ulike indeksene og kommunens inntektsvekst i perioden gitt i tabellen under.

Deskriptiv statistikk (Årlige avkastninger 1998-2020)				
Aktivaklasse	Gjennomsnittlig avkastning ( $\bar{R}$ )	Standardavvik ( $\sigma$ )	Norsk stat 10 år ( $r_f$ )	Sharpe-brøk ( $\bar{R} - r_f/\sigma$ )
Aksjer SPU (Valutasikret)	8%	18%	1.32%	0.371
Aksjer SPU (Usikret)	9%	18.66%	1.32%	0.4115
Aksjer SPN	10.3%	24%	1.32%	0.374
Renter SPU (Valutasikret)	4.6%	2.9%	1.32%	1.13
Renter SPU (Usikret)	5.6%	9.1%	1.32%	0.47
Renter SPN	5.25%	2.89 %	1.32%	1.36
Kommuneinntekter	5.48%	3.14%	-	-

Det som umiddelbart er synlig fra tabellen er at aksjeporteføljene i gjennomsnitt har hatt høyere avkastning og variasjon enn hva de tilsvarende renteporteføljene har. En egenskap som ved første øyekast kan virke overraskende er at renteporteføljene har høyere Sharpe-brøk enn aksjeporteføljene. Det kan være flere årsaker til dette, men hovedgrunnen er at det generelle rentenivået til verdensøkonomien har falt over tid og har følgelig bidratt til å øke markedsverdien på renteporteføljene til begge pensjonsfondene.

Størrelsesordenen på denne verdistigningen vil først og fremst avhenge av hvordan den totale yielden i de ulike renteporteføljene er dekomponert. I obligasjonsporteføljer med ulike risikopremier kan lavere risikofrie renter motvirkes av økte kreditt- eller likviditetspremier, slik at prisøkningen ikke blir like stor. Effekten av lave risikofrie renter vil dermed gjelde spesielt for renteporteføljer med store andeler statsobligasjoner, som for eksempel renteporteføljen til Statens pensjonfond Utland som består av en statsdel på 70%.

En annen faktor som påvirker porteføljens verdi er fordelingen mellom obligasjoner med fast og flytende rente. Obligasjoner med fast rente vil være mer sensitive ovenfor endringer i risikofri rente fordi kontantstrømmene (kupongutbetalingene) er uavhengig rentenivået.



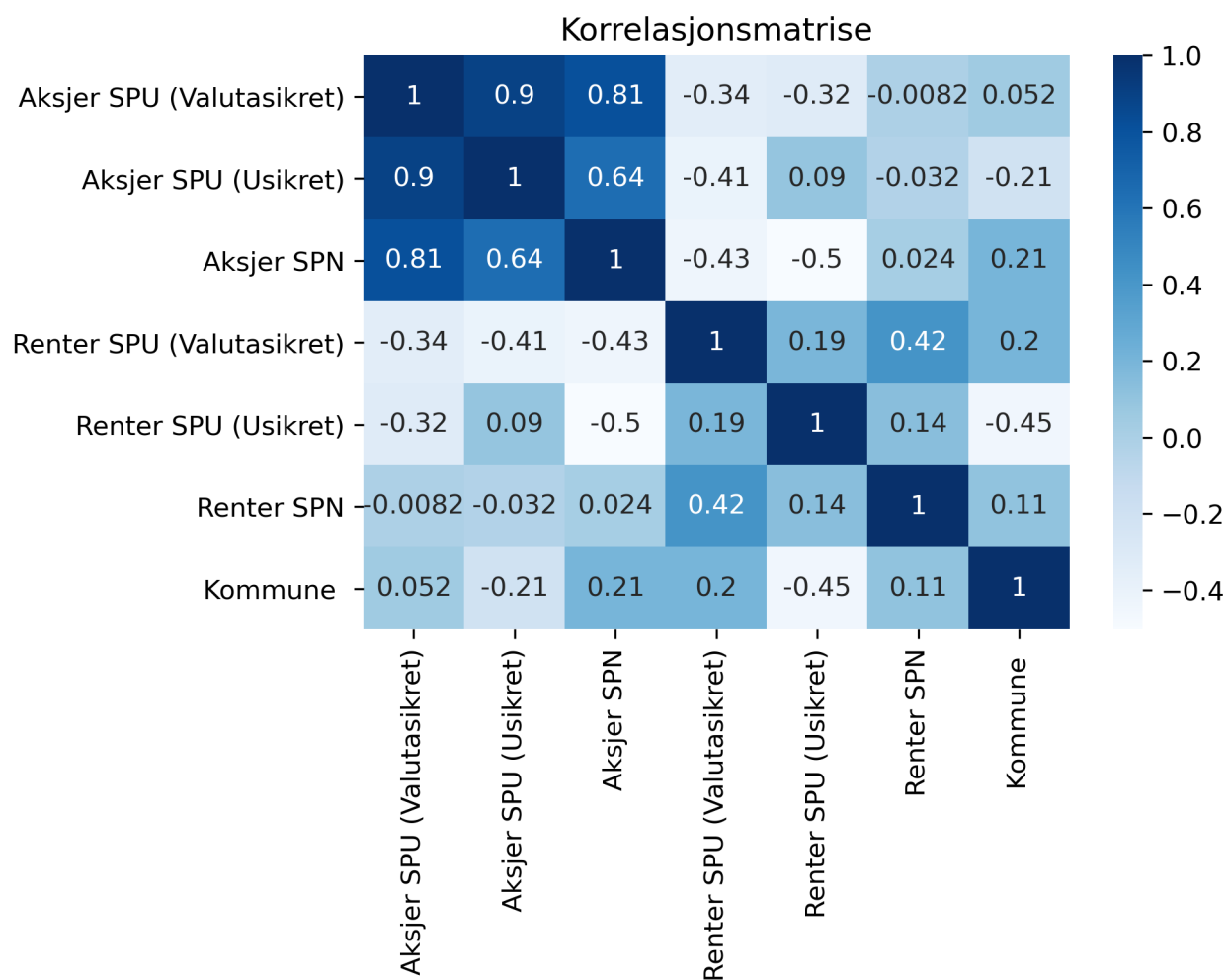
Obligasjoner med flytende rente vil derimot ha kontantstrømmer som beveger seg i samme retning som risikofri rente, da disse vanligvis bestemmes av en fastsatt markedsrente og et påslag over denne. Dette gir en dempende effekt på kursoppgangen. Renteporteføljer med store andeler fastrenteobligasjoner vil altså ha høyere durasjon. På denne måten vil historiske avkastningene gi et skjevt bilde av fremtidige avkastninger, og spesielt dersom porteføljene inneholder store andeler statsobligasjoner og/eller fastrenteobligasjoner. Et annet spørsmål er om dette også har hatt en stor betydning for de ulike samvariasjonene, men dette utforskes ikke videre.

Et naturlig spørsmål som bør stilles er om de fallende rentene også har preget avkastningene til aksjeporteføljene. For å illustrere argumentet kan man benytte prisingsformelen fra Gordons vekstmodell

$$P_t = \frac{D_{t+1}}{r - g} \quad (5.14)$$

hvor  $D_{t+1}$  er neste periodes dividendeutbetaling,  $r$  er diskonteringsrenten til aksjen og  $g$  er veksten i dividender. På den ene siden vil en reduksjon i rentenivået også øke aksjepriser fordi diskonteringsrenten  $r$  faller. På en annen side kan man tenke seg at de lave rentene er en respons på lavere inntjening og følgelig lavere utbetalinger i form av dividender  $D$  eller redusert  $g$  som følge av lavere økonomisk vekst. Altså vil prisoppgangen grunnet større diskonteringsfaktor motvirkes av en nedjustering av forventede fremtidige kontantstrømmer. I så fall bør aksjeporteføljene til SPU og SPN ikke være like tydelig preget av de fallende rentene. Størrelsen på denne effekten vil derimot ikke diskuteres videre.

Figur (5.1) på neste side viser en korrelasjonsmatrise tilhørende tabellen over. Av korrelasjonsmatrisen kan det sees at samvariasjonen varierer betydelig etter aktivaklasser. Mellom aktivaklassene er et generelt trekk at aksjeporteføljene samvarierer negativt med renteporteføljene. Dette er i tråd med finansteorien presentert i kapittel 3 og 4. I så fall skal det være mulig å oppnå diversifiseringsgevinster i henhold til kapittel 4. Den negative samvariasjonen mellom aksjer og renter støtter også forslaget om bruk av rebalanseringsstrategier diskutert i kapittel 4. En annen vesentlig egenskap til disse aktivaklassene er at usikrede porteføljer også samvarierer negativt med ulike aktivaklasser, hvilket betyr at kraftfondet kan oppnå ytterligere diversifisering ved å ta valutarisiko.



Figur 5.1: Korrelasjonsmatrise mellom ulike aktivaklasser og kommuneinntekter (årlig data).  
Kilder: Norges Bank Investment Management, Folketrygdfondet, Trondheim kommune

Et annet moment som er relevant for allokeringen i kraftfondet er samvariasjonene mellom de ulike aktivaklassene og kommunens inntekter. De negative fortegnene til aksjeporteføljen og spesielt renteporteføljen til SPU tilsier at kommunen skal kunne jevne ut svingninger på aktivasisiden av balanseregnskapet ved å ta valutarisiko. Dette samvarer med Viceiras (2001) aksjeandel med ikke-omsettbare inntekter som ble diskutert i kapittel 4. Videre kan det sees at kommuneinntektene samvarierer positivt med SPNs aksje- og renteporteføljer, samt SPUs valutasikrede aksje- og renteportefølje.

I henhold til porteføljeteorien presentert i kapittel 3 vil det isolert sett være mulig å oppnå høyere risikojustert avkastning ved å allokere større andeler til SPUs usikrede porteføljer. Investeringsmandatet til kraftfondet begrenser derimot kraftfondet i å ta valutarisiko, hvilket vil forhindre kommunens evne til å oppnå denne diversifiseringsgevinsten.

Et relevant spørsmål blir dermed om kommunen kan forbedre allokeringen i fondet ved å lette på eller til og med fjerne rammene satt på valutarisiko. Et nøyaktig svar på dette spørsmålet krever imidlertid en mer omfattende empirisk analyse av denne problemstillingen, spesielt med tanke på korrelasjonsmatrisens manglende robusthet.

Resultatene fra porteføljoptimeringen presentert i kapittel 5.2 vises i tabellen under

Optimal risikabel portefølje for med historisk data		
Aktivaklasse	Vekt med kommuneinntekter	Vekt uten kommuneinntekter
Aksjer SPU (Valutasikret)	0%	0%
Aksjer SPU (Usikret)	0.8%	0%
Aksjer SPN	9.1%	9.7%
Renter SPU (Valutasikret)	32.3%	40.9%
Renter SPU (Usikret)	26%	17.7%
Renter SPN	31.7%	31.8%
$\sum_{i=1}^6 x_i^* \sigma_{ig}$	$\approx 0$	$\approx 0$
<b>Sharpe-brøk</b>	1.062	1.066

Selve allokeringen i den risikable porteføljen er svært høyt vektet mot renteporteføljene. Dette skyldes som tidligere nevnt den nedadgående trenden i det globale rentenivået som har oppblåst porteføljenes Sharpe-brøk. En kan imidlertid se at selv om den totale allokeringen mellom aksjer og renter forblir uendret foreslår modellen kommunen å ta mer valutarisiko når inntekter hensyntas i porteføljevalget. Sett i lys av den negative samvariasjonen mellom kommunens inntekter og begge usikrede porteføljene er ikke dette resultatet overraskende.

## 5.4 Porteføljeoptimering med fremoverskuende data

Som tidligere nevnt har den nedadgående trenden i verdens rentenivå bidratt til å øke den risikjusterte avkastningen til aktivaklassen renter sammenlignet med aksjer. Ettersom fremtidige renter ikke kan bli stort lavere enn det nåværende rentenivået bør en fremoverskuende analyse ta høyde for dette ved å nedjustere forventede fremtidige avkastninger.

For aktivaklassen aksjer kan man tenke seg at nettoeffekten av lave renter har hatt mindre betydning for prisingen av aksjer sammenlignet med obligasjoner, og særlig statsobligasjoner. I så fall vil historisk Sharpe-brøk for både aksjer og renter overvurdere fremtidig Sharpe-brøk. For å gjøre analysen mer realistisk forutsettes det videre at forventet avkastning på aktivaklassen renter nedjusteres med 3 prosentpoeng sammenlignet med aksjer. For aktivaklassen aksjer kan man anta at forventet avkastning faller med 1 prosentpoeng.

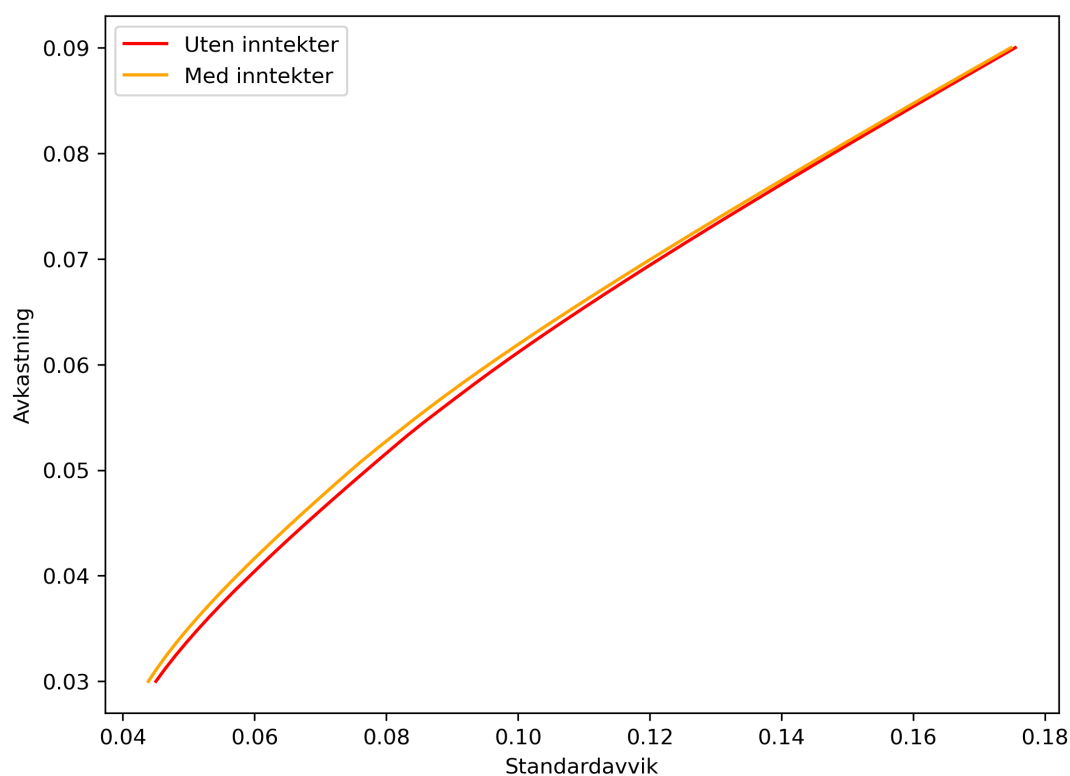
Videre antas det at kovariansmatrisen mellom de ulike aktivumene forblir den samme, selv om en kan argumentere for at dette også bør påvirke samvariasjonsegenskapene til de ulike porteføljene. Tabellen under gir oppdaterte avkastninger og Sharpe-brøker for den nye avkastningsprognosen.

Deskriptiv statistikk for fremoverskuende data (Årlige avkastninger)				
Aktivaklasse	Gjennomsnittlig avkastning ( $\bar{R}$ )	Standardavvik ( $\sigma$ )	Norsk stat 10 år ( $r_f$ )	Sharpe-brøk ( $\bar{R} - r_f/\sigma$ )
Aksjer SPU (Valutasikret)	7%	18%	1.32%	0.315
Aksjer SPU (Usikret)	8%	18.66%	1.32%	0.358
Aksjer SPN	9.3%	24%	1.32%	0.332
Renter SPU (Valutasikret)	1.6%	2.9%	1.32%	0.105
Renter SPU (Usikret)	2.9%	9.1%	1.32%	0.172
Renter SPN	2.25%	2.89 %	1.32%	0.32
Kommuneinntekter	5.48%	3.14%	-	-

Porteføljeoptimeringen deles i to: En løsning for porteføljen som ikke tar hensyn til kommuneinntekter og en løsning for porteføljen som tar hensyn til kommuneinntektene. Tabellen under gir den optimale allokeringen og ytterligere informasjon tilhørende figur (5.2).

Optimal risikabel portefølje med fremoverskuende data		
Aktivaklasse	Vekt med kommuneinntekter	Vekt uten kommuneinntekter
Aksjer SPU (Valutasikret)	3.5%	1.7%
Aksjer SPU (Usikret)	0%	0%
Aksjer SPN	18.9%	21.1%
Renter SPU (Valutasikret)	15.5%	23.1%
Renter SPU (Usikret)	45.7%	38.9%
Renter SPN	16.4%	15.2%
$\sum_{i=1}^6 x_i^* \sigma_{ig}$	$\approx 0$	$\approx 0$
<b>Sharpe-brøk</b>	0.28	0.276

Figur (5.2) viser porteføljefronten til begge porteføljene. Figuren viser at porteføljen som inkluderer samvariasjon med kommuneinntektene gir en marginal gevinst målt i risikojustert avkastning ved at kommunen klarer å oppnå en marginalt høyere avkastning gitt risiko.



Figur 5.2: Porteføljefront med fremoverskuende data

Av tabellen kan det sees at allokeringen er noe ulik allokeringen i kapittel 5.3. Den største forskjellen er at det allokeres mer til aksjeporteføljene.

Det gir mening da dette følger av nedjusteringen renteporteføljenes Sharpe-brøk. Tabellen viser at fordelingen mellom aksjer og renter er omtrent lik, men at optimeringsproblemet endrer fordelingen innad i aksje- og renteporteføljen. For eksempel tas det mer valutarisiko i aksjeporteføljen og mindre valutarisiko i renteporteføljen når kommuneinntektene inkluderes. Uansett bør denne allokeringen tolkes med varsomhet på grunn av sensitivitetsproblemene til optimeringsmetoden.

Den mer interessante observasjonen er imidlertid hvilken effekt endringen i allokeringen har på risikojustert avkastning når kommuneinntekter inkluderes. Ettersom "samvariasjonsleddet"  $\sum_{i=1}^6 x_i^* \sigma_{ig}$  er tilnærmet null (men negativ) oppnås det en økning i risikojustert avkastning når kommunens inntekter inkluderes. Dette er konsistent med den økte Sharpe-brøken i tabellen og skiftet til høyre i figur (5.2).

Isolert sett tilsier dette at kommunen har valgt en for snever tilnærming til forvaltningen av kraftfondet, og at kommunen også kan øke risikoen ("øke aksjeandelen") i den samlede porteføljen i henhold til Viceira (2001). Motargumentet er imidlertid at endringen i Sharpe-brøken er omtrent null, slik at effekten på risikojustert avkastning er økonomisk ubetydelig.

Det siste spørsmålet som gjenstår å besvare er om denne svake samvariasjonen, og følgelig resultatet fra porteføljeanalysen, er i tråd med økonomisk intuisjon. Svaret er mer eller mindre ja. Den svake samvariasjonen skyldes trolig flere årsaker. Den første årsaken kan være at staten øker overføringer til kommunen i nedgangsperioder. På den måten dempes en eventuell samvariasjon ved at kommunens inntekter i større grad blir uavhengig konjunktursyklusen eller utviklingen i finansmarkedene. Med svak samvariasjon følger det at den neglisjerbare endringen i risikojustert avkastning også ansees som troverdig.

Sees dette i sammenheng med diskusjonen om optimal allokering til den risikable porteføljen fra kapittel 4.3 vil kommunen kunne bruke inntektene som en "hedge" i den forstand at staten finansierer kommunens eventuelle konsumbortfall. Dette kan tale for å øke risikoen i kraftfondet fordi behovet for uttak dekkes av staten, selv om den risikojusterte avkastningen forblir den samme<sup>15</sup>.

---

<sup>15</sup>Det kan i teorien oppstå politisk vilje til å stoppe overføringer til kommunen dersom kommunen eksplisitt benytter overføringene til å ta mer risiko i porteføljen. Det er derfor lite sannsynlig at økt aksjeandel i fondet kan være optimalt over flere perioder, selv om det kan være det i et en-periodesspill.

Den andre årsaken er at inntektene til kommunen bestemmes av en rekke faktorer som er uavhengig utviklingen i finansmarkedene. For eksempel er det ingen umiddelbar årsak til at faktorer i kommunens kostnadsnøkkel som vedlikeholdskostnader og demografi bør samvariere med utviklingen i finansmarkedene. Man kan likevel argumentere for at skatteinntekter bør ha en positiv samvariasjon med konjunktursyklusen, men når man inkluderer globale og diversifiserte porteføljer i porteføljevalget bør denne samvariasjonen forsvinne. Den mest troverdige forklaringen på den svake samvariasjonen er at kommuneøkonomien er for kompleks til at det skal finnes et tydelig preg av samvariasjon. Av dette følger det at kommunen ikke vil kunne forbedre sin risikjusterte avkastning når allokeringen sees i sammenheng med kommunens finanser.

## 6 Oppsummering

Denne masteroppgaven har studert investeringsmandatet til Trondheim kommunes kraftfond sett i lys av finansteorien. Spesielt har oppgaven forsøkt å undersøke om Trondheim kommune bør endre allokeringen i kraftfondets portefølje når man tar hensyn til fluktuasjoner i kommunens finanser.

Problemstillingen er bred i sin natur og har derfor krevd en gjennomgang og diskusjon av en rekke temaer, deriblant kommunens økonomi og kommunenes inntektsystem, prising av finansielle verdipapir og risikopremier samt teorier for optimalt porteføljevalg med og uten eksogene inntekter.

Porteføljeteorien viser at allokeringen av risikable aktivum kan gjøres ved hjelp av en klassisk Markowitzoptimering, men at allokeringen til den risikable porteføljen bestemmes av kommunens risikopreferanser. Resultater fra finansteorien viser imidlertid at kommunen bør øke andelen i den risikable porteføljen så fremt den samvarierer negativt med kommunens eksogene inntekter. Videre redegjøres det for andre faktorer som kan påvirke allokeringen til den risikable porteføljen. Faktorer som trekkes fram er tidshorisont, varierende risikoaversjon, politisk risiko, valutarisiko, fondskonstruksjon samt kommunens bufferfond.

Ved å bruke historiske og enkle fremoverskuende avkastninger til SPU og SPNs aksje- og obligasjonsportefølje samt kommunens frie- og disponible inntekter i perioden 2001-2020 vises det at porteføljer som tar hensyn til kommunens inntekter ikke gir en vesentlig forskjell i risikojustert avkastning. I lys av dette bør ikke fluktuasjoner i kommunens finanser isolert sett ha en stor påvirkning på allokeringen i kraftfondet.



## Referanser

- [1] Norges Bank. “Bond market fire sales and turbulence in the Norwegian FX market in March 2020”. I: *Norges Bank Staff Memo: 2/2020* (2020).
- [2] Norges Bank. “Likviditeten i det norske statsobligasjonsmarkedet”. I: *Norges Bank Staff Memo 1/2017* (2017).
- [3] Robert J. Barro. “Rare Disasters and Asset Markets in the Twentieth Century”. I: *The Quarterly Journal of Economics* (2006).
- [4] Lars-Erik Borge. *Local government in Norway*. 2010.
- [5] Douglas T. Breeden. “An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities”. I: *Journal of Financial Economics* (1979).
- [6] Mark M. Carhart. “On Persistence in Mutual Fund Performance”. I: *Journal of Finance* (1997).
- [7] John H. Cochrane. *Asset Pricing: Revised Edition*. 2005.
- [8] George M. Constantinides. “Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle”. I: *The Journal of Political Economy* (1990).
- [9] Kenneth R. French Eugene F. Fama. “The Cross-Section of Expected Stock Returns”. I: *Journal of Finance* (1992).
- [10] Frank J. Fabozzi. *Handbook of Fixed Income Securities*. 2012.
- [11] Finansdepartementet. “Energiaksjer i Statens pensjonsfond utland”. I: *Meld. St. 14* (2018-2019).
- [12] Knut Anton Mork m. fl. “Aksjeandelen i Statens pensjonsfond utland”. I: *Norges offentlige utredninger* (2016).
- [13] John Lintner. “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets”. I: *Review of Economics and Statistics* (1965).
- [14] Bob Litterman m.fl. *Quantitative Investment Management*. 2003.
- [15] Norges Bank Investment Management. “Empirical Analysis of Rebalancing Strategies”. I: *Discussion Note* (3:2012).

- [16] Norges Bank Investment Management. "International Diversification". I: *Discussion Note: 01/2017* (2017).
- [17] Harry Markowitz. "Portfolio Selection". I: *Journal of Finance* (1952).
- [18] Robert C. Merton. "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case". I: *The Review of Economics and Statistics* (1969).
- [19] Robert C. Merton. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". I: *Journal of Finance* (1974).
- [20] Robert C. Merton. "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model". I: *Journal of Economic Theory* (1971).
- [21] Kommunal- og moderniseringsdepartementet. "Inntektssystemet for kommuner og fylkeskommuner (Grønt hefte)". I: *Prop. 1 S* (2020-2021).
- [22] Jan Mossin. "Equilibrium in a Capital Asset Market". I: *Econometrica* (1966).
- [23] Robert C. Merton Paul A. Samuelson. "Fallacy of the Log-Normal Approximation to Portfolio Decision-Making Over Many Periods". I: *Journal of Financial Economics* (1974).
- [24] Amir Yaron Ravi Bansal. "Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles". I: *Journal of Finance* (2004).
- [25] Paul A. Samuelson. "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming". I: *The Review of Economics and Statistics* (1969).
- [26] William F. Sharpe. "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk". I: *Journal of Finance* (1964).
- [27] Luis M. Viceira. "Optimal Portfolio Choice for Long-Horizon Investors with Nontradable Labor Income". I: *Journal of Finance* (2002).
- [28] Stavros A. Zenios. *Practical Financial Optimization: Decision Making for Financial Engineers*. Wiley-Blackwell, 2008.