Bruken av variasjon i konsept og prosedyre som utgangspunkt for læringsmuligheter for matematisk kompetanse

Et sammenligningsstudie av oppgaver for aldersgruppen 12-14 år innenfor temaet divisjon med brøk i en kinesisk og norsk lærebok

Dagrun Brandvik

Masteroppgave, høst 2018
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

Forord

Med denne avsluttende oppgaven setter jeg et punktum for mitt femårige studie ved NTNU, fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap. Etter fem år med forelesninger, utallige timer på lesesalen og mye praksis sitter jeg igjen med kunnskap og erfaringer som jeg gleder meg til å dra nytte av når jeg nå skal ut i arbeidslivet. Jeg kommer til å se tilbake på studietiden som et kapittel i livet mitt med mye glede, masse nye erfaringer og arbeidskrevende tider.

Jeg vil takke engasjerte og flinke lærere på Rotvoll som i løpet av årene har inspirert meg til å vil bli en så god lærer som overhodet mulig. Videre vil jeg takke familien min for gode råd og pushing til å ta høyere utdanning, og alle konstruktive tilbakemeldinger på oppgaven sånn i siste liten. Sist, men ikke minst vil jeg selvfølgelig rette en stor takk til veilederen min Liping Ding for sitt engasjement og ærlighet opp mot oppgaven, og all inspirasjon og støtte til å ferdigstille og levere slik den er i dag.

Dagrun Brandvik

Trondheim, november 2017

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innledning: Oppgaver er en stor del av skolehverdagen til elevene våre og dermed et viktig fokusområde

1.1 Bakgrunn og formål med studien

I den norske grunnskolen er det i ordinær undervisningssituasjoner i snitt 16,8 elever per lærer (Utdanningsdirektoratet, 2017). Hvis vi tar utgangspunkt i en hel klokketime og dividerer lærerens tid på antall elever får vi at hver enkelt elev har 3 min og 57 sekunder til disposisjon hver undervisningsøkt. Da har vi ikke tatt i betraktning enkelte elever som krever mer tid enn andre, fellesundervisning, tiden det tar og komme seg inn og ut av klasserommet og andre uforutsette hendelser som krever tid. Så i realiteten er det realistisk å tro at tiden læreren har å bruke til å hjelpe hver enkelt elev er mye lavere. En slik lærertettheten resulterer i at elevene bruker mye av tiden sin med å jobbe uten bistand fra en lærer.

Undersøkelser gjort i forbindelse med Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 1999 viste at elever verden over bruker i gjennomsnitt 80% av tiden i matematikktimene til å jobbe med oppgaver (Stein, M., & Hiebert, J., 2009) og i følge Stein, K. M., Remillars, J. & Smith, S. M. (2007) er lærebøker hovedkilden til oppgaver som elevene får tilgang til i løpet av undervisningstimen. Kvaliteten på oppgavene er viktig for hvilke læringsmuligheter vi legger til rette for hos elevene (Stein et al., 2007). Tiden med lærebøkene og viktigheten av kvaliteten på oppgavene understreker viktigheten av kvaliteten på fagstoffet elevene får tilgang til når de arbeider selvstendig, og slik blir læreboka, nærmere bestemt oppgavene i læreboka, en viktig læringskilde vi lærere bør å ha et gjennomtenkt og bevisst forhold til. Det å ha et bevisst forhold til oppgavene vi gjør tilgjengelig for elevene speiler det Hiebert et al. (1997) beskriver som den rollen nå læreren har fått i form av å legge til rette for læring sammenlignet med hvordan lærerrollen tidligere var basert på å kun videreformidle kunnskap.

Første året mitt på masterutdanningen hadde vi en forelesningstime om hvordan Kina la opp undervisning og oppgaver med bakgrunn i kinas variasjonspraksis. Denne variasjonspraksisen kan i følge Sun (2011a) spores helt tilbake til urgammel filosofi fra Taoismen og konfucianismen. Variasjonspraksisen blir på kinesisk kalt *Bianshi*, hvor *Bian* står for ”endring” og *shi* for ”form” (Sun, 2011b). Øst asiatiske land blir ofte beskyldt for ha en gammeldags læringskultur med blant annet store klasser, læring i form av pugging og lærerdominerte klasserom (Sun, 2011a). Til tross for dette ser vi i Programme for International Student Assessment (PISA) at Øst Asia har som tradisjon å produsere studenter med høye prestasjoner. Over en fjerdedel av elever fra Bejing-Shanghai-JiangsuGuangdong (Kina) ble i PISA 2015 klassifisert som elever med høyeste prestasjoner som skal kunne å løse oppgaver som krever evnen til å formulere komplekse matematiske situasjoner, (OECD, 2016). Dette såkalte ”Chinese paradoxical phenomenon” knytters opp mot Kinas urgamle variasjonspraksis, en daglig praksis som er allmenn godtatt og i bruk av kinesiske lærere både i undervisningen, oppgavene og hjemmearbeid (Sun, 2011a). I Kina er det tradisjon for å bruke lærebøkene som hovedmedium til undervisningsøktene og slik vil det å studere de kinesiske lærebøkene være et godt utgangspunkt for å forstå seg på den kinesiske undervisningssystemet (Sun, X, 2013).

Kombinasjonen av særegenheten ved kinas variasjonspraksis og prestasjonsevnene til de kinesiske elevene inspirerte meg til å følge temaet videre i mitt masterprosjekt.

1.2 Avgrensning og forskerspørsmål

Å se på kinas variasjonspraksis er et stort området hvor mange tema kunne blitt undersøkt og mange inngangsvinkler kunne blitt valgt. Jeg valgte å begrense meg til hvordan variasjonspraksisen, nærmere bestemt variasjonen i konsept og prosedyre i oppgaver, bidrar til ulike læringsmuligheter, og valgte videre å begrense meg til å se på læringsmulighetene knyttet opp mot det Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001) beskriver som matematisk kompetanse. I neste kapittel vil jeg forklare nærmere hva som menes med variasjon i konsept og prosedyre og matematisk kompetanse. Valgene rundt begrensingene mine begrunner jeg ut i fra det vi vet om viktigheten av at vi lærere har et bevisst forhold til beslutningene våre når vi velger ut oppgaver til elevene. Vi må være bevisste med hvilke læringsmuligheter vi legger til rette for. Forskningsspørsmålet mitt ble som følgende:

”Hvordan legger bruken av variasjon i konsept og prosedyre i oppgaver til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse på temaet divisjon med brøk?”

Gjennom dette forskningsspørsmålet ønsker jeg å komme frem til konkrete eksempler på hvordan bruk av variasjon i konsept og prosedyre bidrar til potensielle læringsmuligheter med tanke på å utvikle matematisk kompetanse innenfor temaet divisjon med brøk. Med potensielle læringsmuligheter menes at tekstbøker med oppgaver er kun første ledd i lengre kunnskapskjede hvor mange faktorer spiller inn før siste ledd; læring hos eleven (Stein, M., & Hiebert, J., 2009). Med å ta for meg konkrete eksempler ønsker jeg å gi en innblikk i hvordan man kan variere aspekter innenfor konsept og prosedyre, og få frem hvordan denne variasjonen er med på å legge til rette for ulike læringsmuligheter. Jeg ønsker med dette å øke bevisstheten til oss lærere rundt disse aspektene, nettopp fordi vi som lærere er en av de faktorene som i følge Stein, M., & Hiebert, J. (2009) er med å påvirker kunnskapskjeden som hvor læring hos eleven er siste ledd, blant annet fordi vi er de som velger ut og gjør oppgavene tilgjengelige for elevene.

1.3 Disposisjon

Oppgaven er bygd opp av fem kapitler hvor hvert kapittel har flere delkapitler. Hvert kapittel starter med en introduksjon av kapittelet som beskriver hva kapittelet skal ta for seg. Kapittel 1 er ment som en introduksjon og begrunnelse for valg av forskningsprosjektets fokus. I kapittel 2 vil jeg sette forskningsprosjektet mitt i et forskningshistorisk perspektiv, presentere to forskningsprosjekter som har vært til stor inspirasjon for mitt prosjekt og presentere relevant teori for å kunne svare på oppgavens forskningsspørsmål. I kapittel 3 vil jeg presentere og argumentere for valg av forskningsdesign, presentere lærebøkene jeg har tatt for meg og presentere og argumentere for analyseprosessen. Jeg vil også ta for meg hvilke faktorer jeg har tatt i betraktning med tanke på oppgavens validitet, relabilitet og forskningsetiske hensyn. I kapittel 4 vil jeg presentere analysen min ved å først ta for meg eksempler på oppgaver som inneholder variasjon i konsept for å deretter ta for meg eksempler på variasjon i prosedyre. Innenfor hvert delkapittel vil jeg argumentere for hvordan de ulike oppgavene jeg har presentert legger til rette for læringsmuligheter for matematisk kompetanse. Helt til slutt vil jeg benytte kapittel 5 til å oppsummere hovedfunnene mine og drøfte studiet mitt opp mot andre studier på tekstbøker og temaet divisjon med brøk. Jeg vil også benytte det avsluttende kapitelet til å rette et kritisk blikk mot valget mitt av forskningsdesign. Til slutt vil jeg avrunde med å si noe om hvorfor det er nyttig med slike sammenligningstudier på tvers av kulturer og hva oppgaven min kan bidra med inn i den norske skolen.

2. Teori: bruken av variasjon i oppgaver som utgangspunkt for læringsmuligheter for matematisk kompetanse

Målet med denne oppgaven var å finne ut av hvordan oppgaver som benytter seg av variasjon i konsept og prosedyre i kinesiske lærebøker legger til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på å utvikle matematisk kompetanse på temaet divisjon med brøk. Jeg vil starte med å presentere noe om hva tidligere forskning på tekstbøker har kommet frem til på temaene variasjon og divisjon med brøk, og gå nærmere inn på to forskningsprosjekter som har vært til stor inspirasjon for mitt studie. For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt vil jeg videre å ta for meg noe teori om hva som er vesentlig med tanke på læring av temaet divisjon med brøk. Jeg har i hovedsak benyttet meg av Ma (2010) sin forskning på emnet fordi hennes forskning tar for seg innlæring av temaet opp mot kinesisk læringskultur. Deretter vil jeg presentere et teoretisk rammeverk på variasjon fordi det var hensiktsmessig å benytte meg av et teoretiske verktøy som kunne beskrive, forklare og kartlegge bruk av variasjon i oppgaver. Jeg har valgt å benytte meg av Gu, Huang og Marton (2004) sitt rammeverk. Til slutt vil jeg presentere teori og et rammeverk som kan si noe om utvikling av matematisk kompetanse og har valgt å benytte meg av Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk som beskriver fem ulike komponenter ved matematisk kompetanse.

2.1 Forskning på lærebøker: lærebøker har en dominerende rolle i undervisningen og et steg nærmere det som faktisk blir undervist

Lærebøker, som et støttemateriale til undervisning i matematikk, har i følge Fan, Zhu og Miao (2013) eksistert så lenge undervisningen har vært dokumentert. Til sammenligning har forskning på lærebøker et mye kortere tidsaspekt og Fan et al. (2013) poengterer at så sent som på 1980-tallet var det lite forskning på området, men at forskningen har tatt seg opp de siste tiårene. Fan et al. (2013) konkluderer med at det nå et område som har fått betraktelig mer oppmerksomhet fra forskere og personer i utdanningssystemet og at det har skjedd viktig fremgang på området de siste tiårene. Med sitt studie oppsummerer Fan et al. (2013) tidligere forskning på lærebøker, med hovedfokus på studier fra 1980-2012, og deler forskningen inn i fire ulike kategorier etter hvilket fokus forskningen har hatt; (1) rollen til lærebøkene, (2) tekstbokanalyse og sammenligning, (3) bruk av lærebøker og (4) andre områder. Mitt forskningsprosjekt går innenfor Fan et al. (2013) sin andre kategori; tekstbokanalyse og sammenligning. Med utgangspunkt i forskningsspørsmålet mitt har jeg derfor valgt å videre fokusere på kategori (2). Fan et al. (2013) fremhever at kategorien som går på tekstbokanalyse og sammenligning står for over halvparten av all forskning på lærebøker. De poengterer også at forskere innenfor de fire kategoriene har en generell enighet om at tekstbøker har en viktig og dominerende rolle i den moderne undervisningen og da spesielt innenfor faget matematikk, og at tekstbøkene blir sett på et steg nærmere den undervisningen som faktisk forekommer i klasserommet sammenlignet med det nasjonale pensumet. Et av målene med studiet deres var å komme med antydninger om videre forskning på tekstbøker og ut i fra fem ulike utfordringer de har oppsummert fra tidligere forskning har artikkelen konkluderer med fem ulike retninger for mulig videre forskning: (1) Det er nødvendig med et større perspektiv når det kommer til analyse av tekstbøker og ikke se på tekstbøker kun som en isolert identitet, (2) Det påpekes viktigheten av at videre forskning fokuserer på sammenhengen mellom tekstbøker og elevenes læringsutbytte. Læringsbøkene som er blitt brukt har ikke hatt noen direkte sammenheng med de resultatene som er blitt målt, eller representert majoriteten i det representative området elevene er blitt målt. (3) Forfatterne ønsker seg også mer forskning på utfordringene med selve utviklingen av tekstbøker og ikke bare på selve produktet tekstbok i seg selv. (4) For videre forskning blir det også påpekt at forskerne bør satse på mer avanserte og sofistikerte metoder, som for eksempel kan innebære kontroll- og sammenligningsgrupper. (5) Forskning på elektroniske lærebøker fordi det antas at det er et medium som kommer til å bli mer og mer tatt i bruk. Mitt forskningsprosjekt plasserer jeg innenfor Fan et. al (2013) sin andre retning med utgangspunkt i at jeg har valgt en kinesisk lærebok som majoriteten i Shang Hai benytter og en norsk lærebok som er den læreboka de fleste norske skolene bytter til når de bytter læreverk.

Et forskningsprosjekt som har vært interessant for mitt studie er Sun (2011a) sin artikkel hvor hun har sett på hvilken rolle variasjon i oppgaver har i kinesiske lærebøker når det komme til temaet divisjon med brøk. Forfatterne har sammenlignet en kinesisk lærebok med en amerikansk lærebok for å få frem særegenheten med den kinesiske variasjonspraksisen. Studien faller under Fan et al. (2013) sin kategori (2) av tekstbokanalyser. Sun (2011a) har utviklet et analyseverktøy med mål om å fungere som en lupe for å sammenligne oppgaver i kinesiske lærebøker opp mot kinas variasjonspraksis. I følge Sun (2011a) vil rammeverket gi oss muligheten til å se en urtradisjonell måte å lage sammenhenger mellom konsepter og løsninger, og få frem den matematiske strukturen og det rasjonelle bak algoritmene. Rammeverket består av å se på variasjon i konsept og løsningsmetode og er bygd opp på kodene OPMC og OPMS. OPMC står for ”one problem multiple changes” og er en kategori som innebærer oppgaver som varierer kriterier rundt oppgaven. OPMS står for ”one problem multiple solutions” og er en kategori som innebærer oppgaver som varierer løsningsmetodene. Disse rollene kom artikkelen frem til at oppgavesettene utgjør i kinesiske lærebøker:

- Oppgavene som baserer seg på variasjon i konsept (OPMC): A: Introdusere et nytt konsept ved å benytte oppgavesett med konseptssammenheng, B: Solidgjører det nye konseptet gjennom flere oppgavesett med konseptssammenheng, og C: Lærepensumrolle; få frem en kunnskapspakke og ikke kun et kunnskapspunkt.
- Oppgavene som baserer seg på variasjon i løsningsmetode (OPMS): A: Fokus på et tiltenkt pensum; ikke på en spesifikk algoritme, men en underliggende begrunnelse, B: Rettferdiggjøre prosedyren; knytte sammen multiplikasjon og divisjon for å forklare algoritmen bak brøkregning, C: Styrke pensumsammenhengen; knytte sammen brøkregning med konseptet likning,

og D: Intensivere pensumsammenhenger; skape et sammenhengende kunnskapstre.

Artikkelen oppsummerer at de fleste tekstbøker i Europa er basert på prinsippet ”En-ting-om-gangen”, altså å gjøre seg ferdig med et tema før man beveger seg videre. Mange vil i følge Sun (2011a) derfor argumentere for at den kinesiske fremgangsmetode er forvirrende for elevene, men basert på teori om varierende praksis vektlegges det å jobbe med flere aspekter samtidig, og prinsippet ved å gjøre ”en-ting-om-gangen” blir kritisert for å miste muligheten til å se sammenhenger mellom ulike tema og de generelle relasjonene. Sun (2011a) påpeker også at det ikke er noen overraskelse at den kinesiske læreboka viser en fordel ovenfor rammeverket, siden den kinesiske læreboka er lagd med utgangspunkt i en slik variasjonspraksis, men at det får frem hvordan ulike utdanningssystemer kan lære av forskjellige deler av utdanningsprosessene til hverandre.

Et annet forskningsprosjekt som har vært inspirerende for mitt studie er Zhang. J., Wang. R., Huang. R & Kimmins. D. (2017) sin forskning hvor de har tatt for seg seks populære lærebøker i Kina alle fra klassetrinnene 7-9, og sett på hvordan disse bøkene har benyttet seg av variasjon i oppgavene. Målet med forskningen var å videreutvikle forståelsen vår for bruk av variasjon i oppgaver i tekstbøker ved å se på noen populære matematikkbøker. Analysen faller med dette under Fan et al. (2013) sin kategori (2) av tekstbokanalyser. Forfatterne presenterer et rammeverk hvor de har definert fire ulike matematiske kunnskaper og ser på hvordan bruk av variasjon i konsept og prosedyre legger til rette for en forståelse av disse kunnskapene. Kunnskapene som blir definert er: (1) Det matematiske konseptet, (2) Matematiske prinsipper som inkluderer; forhold, regler, formler og teoremer, (3) Matematiske ferdigheter som inkluderer; regneoperasjoner som innebærer spesifikke prosedyrer og steg, konstruksjon av figurer og dataprosessering, og (4) Matematiske tenkemetoder som bygger på matematisk innhold og ferdigheter. Forfatterne bygger variasjonsdelen av rammeverket sitt på Gu et al. (2004) sin inndeling av variasjon innenfor konsept og prosedyre. Zhang et al. (2017) oppsummerer bruken av variasjon innenfor de fire matematiske kunnskapene slik:

- Å utvikle det matetiske konseptet (1); (a) brukes variasjon i konsept når man skal forme et nytt konsept, brukes til å utforske det ulike instanser har til felles og til å bygge opp essensielle karakteristiske trekk ved konseptet, (b) Når man assimilerer konseptet tar man i bruk ikke-konseptuell variasjon for å få frem de kritiske aspekreftene ved konseptet og få fokuset bort fra uvesentlige aspekter, og (c) Når man skal forsterke og ta i bruk et konsept brukes det variasjon i prosedyre for å hjelpe elevene til å knytte sammenhenger mellom ulike representasjoner og typer kunnskap.

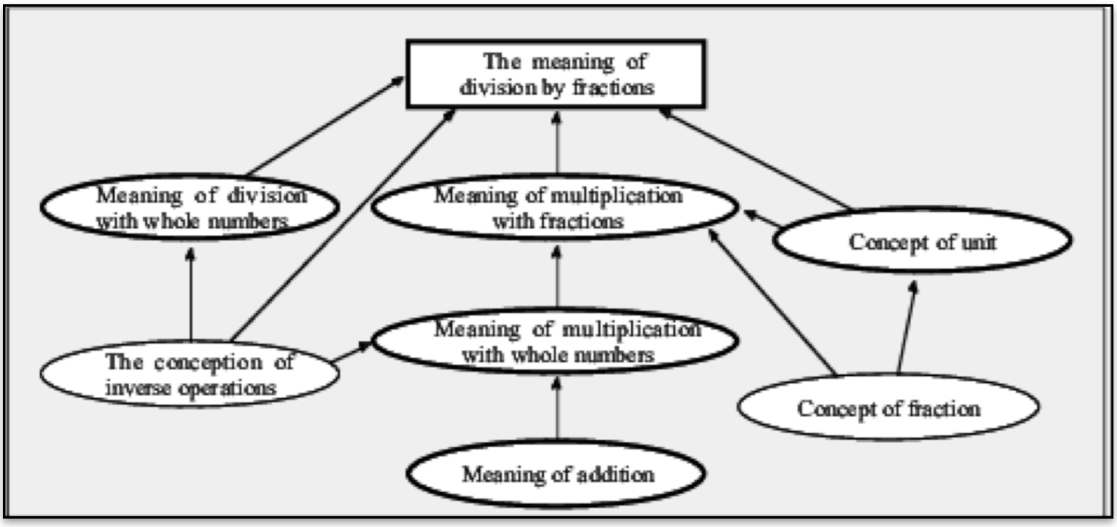
- Å utvikle matematiske prinsipper (2); (a) For å oppdage matematiske prinsipper blir variasjon i prosedyre benyttet til å oppdage like egenskaper, (b) For å bygge sammenhenger mellom ulike prinsipper blir variasjon i prosedyre benyttet for å oppdage bevis for prinsippene og bygge et reversibelt kunnskapsnettverk, og (c) For å ta i bruk prinsipper blir variasjon i prosedyre benyttet for å oppdage likheter ved ulike representasjoner og bygge reversible sammenhenger mellom kunnskaper.
- Å utvikle matematiske ferdigheter (3); for å utvikle matematiske ferdigheter blir variasjon i prosedyre benyttet i ulike steg. Slike oppgaver med variasjon i prosedyre blir bygd på enkle konsepter, formler og figurer og blir suksessivt utviklet fra en situasjon som er kjent for elevene til og ende opp i en situasjon som helt ukjent.
- Å utvikle matematiske tenkemetoder (4); ved å ta i bruk oppgaver som inneholder variasjon i prosedyre hjelper man elevene å oppdage og forme problemer, analyse og løse dem, å erfare fremgangsmetoder for å lære matematikk. I tillegg bidrar variasjon i prosedyre til å gi elevene mulighet til å vurdere og ta beslutninger basert på ulike faktorer.

Innenfor (1) Det matematiske konseptet ble det brukt 74% konseptuell variasjon og 36 % variasjon basert på prosedyre, innenfor (2) Matematiske prinsipper ble det benyttet 33 % konseptuell variasjon og 88 % variasjon basert på prosedyre, innenfor (3) Matematiske ferdigheter var det en stor overvekt og nesten kun bruk av variasjon basert på prosedyre, og innenfor den siste kunnskapen (4) Matematiske tenkemetoder var det utelukkende bruk av variasjon basert på prosedyre. Zhang et al. (2017) poengterer at kinesiske lærebøker bruker variasjon i oppgaver til å introdusere nye tema og legge til rette for en dypere forståelse for temaet. De presiserer også at for å få et mer omfattende bilde på bruk av variasjon i lærebøker må flere studier som denne gjennomføres og videre studier på hvordan oppgaver blir tatt i bruk i klasserommet og igjen hvordan dette påvirker læringsutbytte til elevene er gunstig.

2.2 Divisjon med brøk; et rikt matematisk tema og en sammensatt kunnskapspakke

Brøk blir ofte betraktet som det mest komplekse tallet i matematikken i grunnskolen og divisjon med brøk blir ansett som den mest avanserte operasjonen som innebærer brøk (Ma, 2010). Divisjon med brøk blir også sett på som et oppsummerende tema av hele aritmetikken, og slik blir det å dividere med brøk er et rikt matematisk tema som gir mulighet for mange ulike konseptuelle forklaringer og innfallsvinkler (Ma, 2010). Li (2008) poengterer også konseptets kompleksitet og får frem hvor viktig det er at lærere tenker nøye igjennom hva elevene trenger å lære forbi den algoritmiske metoden. Viktige elementer ved innlæringen av temaet er i følge Li (2008) er at man knytter sammenhenger til andre matematiske tema, varierer representasjonene eller knytter konteksten opp mot den virkelige verden.

Ma (2010) får frem hvordan konseptet divisjon består av det hun beskriver som en kunnskapspakke bestående av flere andre konsepter. Kunnskapspakken er bygd opp av forståelse for addisjon, multiplikasjon med hele tall, multiplikasjon med brøk, konseptet brøk, konseptet av en enhet, konseptet av inverse operasjoner og divisjon med hele tall, se Figur 1. Under hennes forskningsprosjekt på kinesiske lærere kom det frem at lærerne mente at forståelsen for multiplikasjon med brøk ble sett på som basiskunnskap for å forstå konseptet divisjon med brøk, og slik en nøkkelfunksjon i kunnskapspakken til divisjon med brøk. Hun presiseres også at kunnskapspakken fremhever at det å lære er en kontinuerlig prosess hvor den nye kunnskapen blir støttet av tidligere kunnskap og den tidligere kunnskapen blir gjenopptatt og forsterker av nye kunnskapen (Ma, 2010).



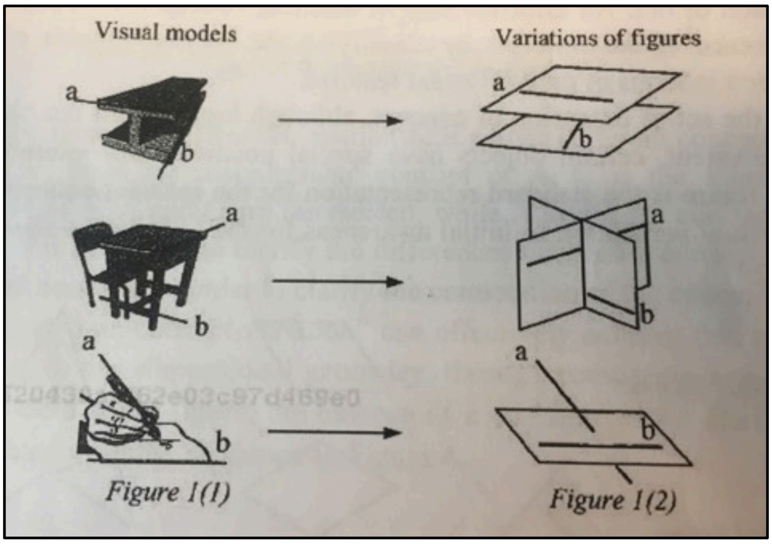
Figur 1. Figuren viser hvilke konseptet som henger sammen og som ligger til grunn for å forstå konseptet divisjon med brød (Ma, 2010, s 77)

2.3 Å utvikle et teoretisk rammeverk for å studere hvordan bruken av variasjon i konsept og prosedyre legger til rette for ulike læringsmuligheter

For å kunne besvare forskningsspørsmålet mitt var jeg avhengig av et rammeverk som kunne gi meg muligheten til å kunne si noe om sammenhengen mellom bruken av variasjon og læringsmuligheter for matematisk kompetanse. Innenfor temaet variasjon var det flere teoretiske rammeverk jeg kunne benyttet meg av. Jeg valgte å benytte meg av Gu et al. (2004) sin teori om variasjon fordi den er blitt brukt i lignende studier og er direkte knyttet opp mot kinas urgamle variasjonspraksis, og rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) på matematisk kompetanse fordi det gir meg muligheten til å systematisk se på ulike komponenter ved det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som å lære matematikk suksessfullt. I tillegg har jeg ikke klart å oppdrive tidligere forskning som kobler disse rammeverkene sammen og det gir meg muligheten til å se variasjonsteorien fra et nytt perspektiv.

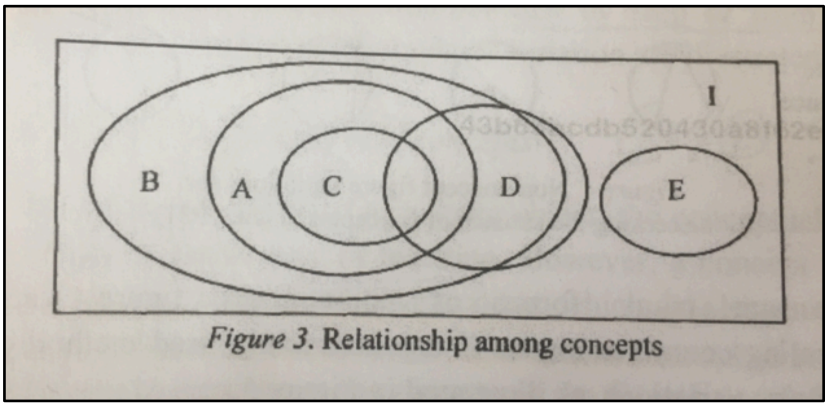
2.3.1 Kinas variasjonspraksis: variasjon i konsept og prosedyre

Gu et al. (2004) har igjennom et lengre studie på hvordan man underviser i Kina valgt å oppsummere det å undervise med variasjon med å dele det inn i to kategorier; variasjon i konsept og variasjon i prosedyre. Den første kategorien variere kritiske aspekter rundt selve objektet som skal læres og er med på å styrke forståelsen for objektet fra ulike perspektiv. I følge Gu et al. (2004) er det nødvendig å la elevene få erfare konkrete og visuelle aspekter ved konseptet for å kunne knytte sammenhenger opp mot den abstrakte siden. Kategorien er gunstig når konseptet blir sett på som statisk og Gu et al. (2004) kaller metoden for konseptuell variasjon. Videre deles kategorien inn i to ulike måter å variere; (1) konseptuell variasjon og (2) ikke-konseptuell variasjon. (1) Den første metoden går ut på å variere visuelle og konkrete aspekter ved objektet. Et eksempel på slik variasjon kan være å variere med å benytte seg av konkrete materialer eller eksempler fra dagliglivet for å hjelpe elevene til å se meningen med konseptet, eller som i Figur 2 hvor man varierer mellom konkrete situasjonsbestemte objekter og over til generelle modeller for å hjelpe elevene til å se det abstrakte ved objektet (Gu et al., 2004).



Figur 2. Figuren viser hvordan man kan variere med visuelle figurer ved å gå fra en konkret situasjon til et abstrakt konsept (Gu et al., 2004, s 316)

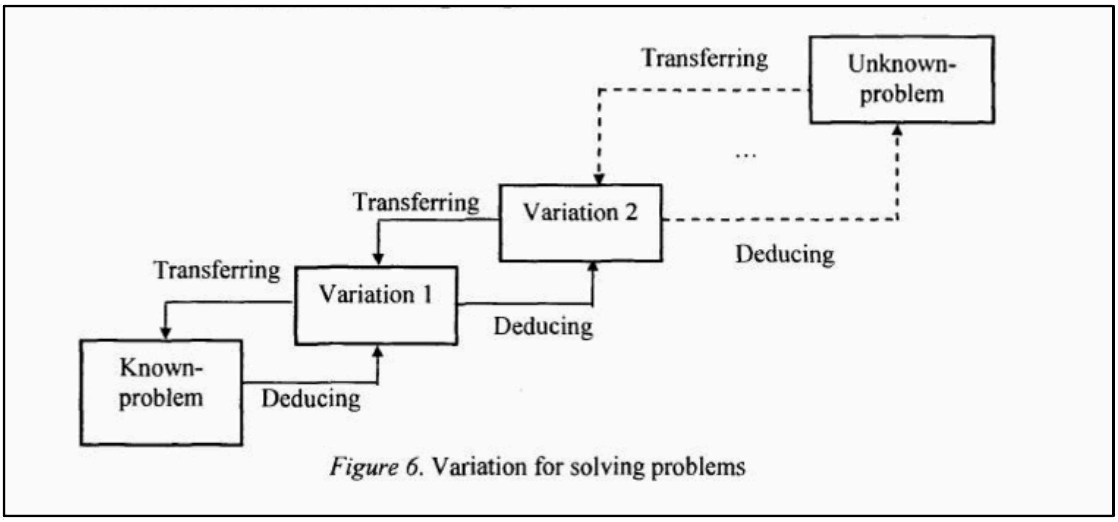
Ikke-konseptuell variasjon går ut på å variere med eksempler som ikke er innenfor konseptet som skal læres. Det er nødvendig å klargjøre forskjellen mellom konseptet som skal læres og relevante konsepter for å klargjøre betingelsene rundt det aktuelle konseptet (Gu et al., 2004). Denne klargjøringen og slik sammenhengen mellom ulike konsept kan vi representert i Figur 3.



Figur 3. Figuren viser hvordan ulike konsepter henger sammen (Gu et al., 2004 s 318)

Den andre kategorien, variasjon i prosedyre, ser på konseptet som skal læres som dynamisk og bygger på det Gu et al. (2004) poengterer at det er et faktum at det finnes et hierarkisk system når man studerer matematiske aktiviteter. Gjennom variasjon i prosedyre skal elevene komme frem til en løsning på et problem stegvis eller med ulike løsningsmetoder (Gu et al., 2004). Variasjon i prosedyre skal også hjelpe elvene å knytte sammenhenger mellom tidligere lært kunnskap og ny kunnskap og slik skape en hieratisk struktur i kunnskapen. Ved deres definisjon på variasjon i prosedyre blir den tidlige lærte kunnskapen og den nye kunnskapen knyttet sammen ved å lage en passende "scaffolding" av kunnskapen ved å bevisst separere den matematiske aktiviteten i stegvise suksessive deler, se Figur 4. Denne tradisjonelle kinesiske omgjøringsprosessen som er i følge Gu et al. (2004) en forutinntatt rutine i kinesiske klasserom kalles for "pudian", likt som "scaffolding" i vesten.

"Similar to the word scaffold, the word "pudian" is derived from the description of daily life. For example, by putting blocks or stones together as a pu dian, a person can pick fruit from a tree which cannot be reached without the pu dian." (Gu et al., 2004 s 340).



Figur 4. Figuren viser hvordan man kan variere med "scaffolding" ved å stegvis omgjøre et kjent problem til ukjentproblem og omvendt (Gu et al., 2004 s 322)

Et kritisk punkt når man skal benytte seg av variasjon i prosedyre er hvordan man designer "scaffoldingen" (Gu et al., 2004). De poengterer at det er nødvendig med et gjennomtenkt forhold til avstanden mellom det ukjente problemet og det kjente problemet, videre beskrevet som "den potensielle avstanden". Desto lengre avstanden er mellom variasjonene av problemene desto vanskeligere blir oppgaven oppfattet av elevene. "Den potensielle avstanden" er slik avgjørende for hvilken type læring man legger til rette for hos eleven. Det poengteres videre at en kortere avstand vil hjelpe eleven å forstå ny kunnskap, mens en lengre avstand kan være nyttig for eleven når den skal utvikle utforskende kunnskap. Gu et al. (2004) beskriver to typiske måter å variere kunnskapen stegvis mot et ny kunnskap/konsept. Det første er å styrke forståelsen for utviklingen bak selve konseptet og nyttighetsfølelsen ved å la elevene stegvis erfare prosessen bak formasjonen av konseptet. Det andre er å omgjøre ukjente problemer stegvis til et kjent problem eller omvendt å starte med et kjent problem og omforme det til noe ukjent.

Ved variasjon i konsept og prosedyre gir man elevene muligheten til å erfare kritiske og essensielle aspekter ved objektet som skal læres og gir de muligheten til å knytte sammenhenger mellom tidligere lært kunnskap og ny kunnskap, slik gir man i følge Gu et al. (2004) elevene muligheten til meningsfylt læring.

2.3.2 Å lære matematikk suksessfullt: å utvikle matematiske kompetanse med utgangspunkt i forståelse

I løpet de siste tusentallet har definisjonen på suksessfull læring av matematikk endret seg i takt med fokuset i samfunnet og skolen (Kilpatrick et al., 2001). Frem mot 1950-tallet var hovedfokuset i grunnskolen å lære seg ferdigheter innenfor beregninger basert på å kunne ta i bruk metoder korrekt og effektivt, men med ”New Math” som kom på rundt 1950-60 tallet ble det mer fokus på forståelse for strukturer og ideer (Kilpatrick et al., 2001). Reformen som kom like etterpå tok fokuset tilbake til korrekthet og hurtighet frem til reformen ”Mathematical power” i 1980-90 hvor fokuset gikk over til det å begrunne, løse problemer lage matematiske kobling og kommunisere matematikk (Kilpatrick et al., 2001). Gjennom de ulike fokusene på hva suksessfull læring er har lærerens rolle blitt endret fra å tidligere være en formidler og hovedkilde til hva som er korrekt innenfor matematikkens regler og formler, til å nå handle om å ha ansvaret for å legge til rette for læring (Hierbert et al. 1997). Dette samsvaret med Utdanningsdirektoratet sin definisjon på hva som er hovedoppgaven til læreren: ”Hovedoppgaven for læreren er å medvirke til læring hos elevene gjennom tilrettelegging av læringsaktiviteter og ved veiledning av elevene i læringsprosessen” (Utdanningsdirektoratet, 2017).

Noe av ansvaret til læreren innebærer i følge Hierbert et al. (1997) å velge ut oppgaver som gir elevene muligheter for læring med forståelse. Det å forstå er et vanskelig ord å beskrive fordi det er så komplekst. Det å forstå handler ikke om noe du har eller ikke har, men noe som alltid er under endring, (Hierbert et al. 1997). Allerede tidlig i forrige århundre advarte filosofen og psykologen John Dewey (1910) mot læring uten forståelse. Dewey (1910) advarte mot det undervisingsfokuset som preget undervisningen på den tiden og advarte mot undervisningsmetoder som baserte seg på metoder for å kun få raske resultater. Dette kunne ødelegge for elevenes mulighet for å reflektere og gi mening til hva de drev med.

> Sheer imitation, dictation of steps to be taken, mechanical drill, may give results most quickly and yet strengthen traits likely to be fatal to reflective power. The pupil is enjoined to do this and that specific thing, with no knowledge of any reason except that by so doing he gets his result most speedily; his mistakes are pointed out and corrected for him; he is kept at pure repetition of certain acts till

> they become automatic. Later, teachers wonder why pupil reds with so little expression, and figures with so little intelligent consideration of the terms of his problem (Dewey, 1910, s 52)

Kilpatrick et al. (2001) tar også med seg begrepet forståelse i sin beskrivelse av suksessfull læring av matematikk og beskriver det å lære matematikk suksessfullt som å tilegne seg fem ulike komponenter som til sammen utgjør det de definere som matematisk kompetanse. Disse fem komponenten er (1) konseptuell forståelse, (2) prosedyremessig flyt, (3) strategisk kompetanse, (4) adaptiv resonering og (5) produktiv disponering. De fremhever at innlæringen av de ulike komponentene ikke skal forekomme hver for seg, men parallelt og over tid. Slik skal komponentene flette seg sammen og fungerer som støtte for hverandre. Matematisk kompetanse handler ikke om alt eller ingenting, men at alle ideer kan forstås på mange ulike nivåer og måter (Kilpatrick et al., 2001).

Konseptuell forståelse

Kilpatrick et al. (2001) beskriver konseptuell forståelse som en komponent av kompetansen hvor eleven har et integrert og funksjonelt grep om den matematiske ideen i form av at elevene skjønner hvorfor temaet er viktig og i hvilke situasjoner det kan benyttes. Elevene skal da forstå mer enn bare fakta og metoder i form av at de forstår hvorfor fakta og metodene fungerer. Konseptuell forståelse skal i følge de omhandler det å organisere kunnskapen til en sammenhengende enhet, slik at ny kunnskap kan læres ved å knytte ny kunnskapen opp kunnskap de allerede har lært. Slik skal konseptuell forståelse gi grunnlaget for å kunne argumentere for sammenhenger og videre gi grunnlaget for å lære ny kunnskap og løse nye problemer. Konseptuell forståelse skal gi elevene selvtillit og utgangspunkt til å bevege seg mot et høyre nivå av forståelse (Kilpatrick et al., 2001).

Prosedyremessig flyt

Kilpatrick et al. (2001) beskriver prosedyremessig flyt som komponent av kompetansen hvor eleven har kunnskap om når og hvordan en matematisk prosedyre skal benyttes, og eleven skal kunne gjennomføre prosedyrene fleksibelt, nøyaktig og hurtig. Slik argumenterer de for at komponenten henger nøye sammen med konseptuell forståelse. Det å forstå gjør det å lære regneferdigheter enklere og gjør det lettere å huske, og det å lære seg regneferdigheter kan gjøre det enklere å oppnå en forståelse for ulike matematiske tema. Det poengteres at hvis elevene lærer en prosedyre uten forståelsen først kan det være vanskelig å engasjere de i å sette seg inn i hvorfor prosedyren fungerer. Videre poengteres det at hvis elever lærer prosedyrer uten noen form for forståelse kan man se på lærdommen som isolerte kunnskapsbiter. Det å sette nye kunnskapstema i sammenheng med gamle kan da bli vanskelig. Hvis prosedyrene blir lært inn med forståelse kan elvene gjerne modifisere metodene og ta de i bruk i lignende situasjoner, men hvis metodene blir lært inn uten forståelse blir det fort slik at eleven kun klarer å ta det i bruk i en spesifikk situasjon (Kilpatrick et al., 2001).

Strategisk kompetanse

Kilpatrick et al. (2001) beskriver strategisk kompetanse som en komponent av kompetansen hvor eleven klare å formulere et matematisk problem, representere problemet og til slutt komme med en løsning. Elevene burde da kunne flere løsningsstrategier i tillegg til å kunne vise til hvilken strategi som er mest hensiktsmessig for et spesifikt problem. Oppgaver som ikke baserer seg på rutine, altså oppgaver som må løses med flere løsningsmetoder, vil i følge de bidra til at elevene må ta i bruk sin strategiske kompetanse å finne ut av hvilken strategi de skal benytte seg av og hvorfor. Strategisk kompetanse henger nøye sammen med både konseptuell forståelse og possessorisk flyt. Eleven må ha en forståelse for konseptet som skal løses og må vite hvordan regnemetodene skal gjennomføres for å kunne formulere et problem, representere problemet og løse problemet (Kilpatrick et al., 2001).

Adaptiv resonering

Kilpatrick et al. (2001) beskrives adaptiv resonering som en komponent av kompetansen hvor eleven evner å tenke logisk om relasjoner mellom konsept og situasjon. Elevene benytter adaptiv resonering til å navigere mellom fakta, prosedyrer, konsepter og løsninger og slik se hvordan alt sammen henger sammen. Adaptiv resonering brukes også i matematikken til å avgjøre misforståelser og uenigheter, og er bredere og mindre formell form for argumentasjon enn deduktiv resonnering. Slik argumenterer de for at adaptiv resonering omfavner det å rettferdiggjøre valgene sine, noe som også yngre elever kan jobbe med. Adaptiv resonering henger i følge nøye sammen med konseptuell forståelse i den grad at forståelse for konseptet fungerer som en kilde for resonering (Kilpatrick et al., 2001).

Produktiv disposisjon

Kilpatrick et al. (2001) beskriver produktiv disposisjon som en komponent av kompetansen hvor eleven mestrer å se fornuften i det å lære matematikk. Eleven klarer da å se at det å legge ned arbeid i å forstå matematikken lønner seg. For å kunne få muligheten til å utvikle en produktiv disposisjon argumenterer de for at elevene må ha fått gjentatte muligheter til forstå matematikken, å gjenkjenne fordelene med utholdenhet, og erfare fordelen med å forstå. For eksempel når elevene jobber med å utvikle sin strategiske kompetanse i forbindelse med å oppgaver med flere mulige løsningsstrategier erfarer elevene at det lønner seg å forstå matematikken fremfor å kun memorere algoritmer. Til sammenligning vil elever som ikke blir gitt muligheten til å løse slike krevende oppgaver gå glipp av det å erfare at forståelse fremfor memorering er veien mot å lære matematikk, (Kilpatrick et al., 2001)

3. Metode: fra idé til gjennomføring

Med dette kapitelet ønsker jeg å redegjøre for valgene jeg har tatt i de ulike prosessene som utgjør et slikt studie. Først vil jeg presentere forskningsdesignet jeg har valgt og hvordan designet henger sammen med forskningsspørsmålet mitt. Så vil jeg presentere og argumentere for valg av lærebøker. Deretter vil jeg presentere hvordan jeg har samlet inn, bearbeidet og analysert datamaterialet mitt. Til slutt vil jeg si noen ord om hvilke grep jeg har tatt for å styrke validiteten og relabilitet av forskningsresultatene mine og hvilke etiske betraktninger jeg har tatt hensyn til.

3.1 Mål og forskningsdesign for oppgaven

Med denne oppgaven hadde jeg som hensikt å finne hvilke læringsmuligheter som skapes ved ulike oppgaver i ulike lærebøker. For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt valgte jeg å benytte meg av kvalitativ dokumentanalyse, nærmere bestemt tekstbokanalyse.

3.1.1 Dokumentanalyse som kvalitativ metode

Fan et al. (2013) beskriver tekstbokanalyse som et vidt begrep som inkluderer både: (1) analyse av enkeltbøker og bøker som kommer i serie, som som regel da har et formål å fremme hvordan et eller flere spesifikke tema eller et aspekt er blitt behandlet i læreboka, og (2) analyse av forskjellige bøker fra samme land eller/og ulike land, der formålet er å få frem likheter og ulikheter med tekstbøkene. Mitt studie kommer innenfor Fan et al. (2013) sin andre kategori av tekstbokanalyse.

Dokumentanalyse kan enten benyttes som metode alene eller som i en suppleringsmetode i en triangulasjon med andre metoder (Cohen, Manion, Morrison & Bell 2011). Jeg har valgt å benytte meg av dokumentanalyse som metode alene fordi jeg ønsker å gå i dybden av lærebøkene i form av å se på oppgavene innenfor temaet divisjon med brøk. Dokumentanalyse som en kvalitativ forskningsmetode er en systematisk prosedyre for å omtale og evaluere både fysiske og elektroniske dokumenter (Bowen, 2009). Et dokument som er valgt ut og undersøkt taler ikke for seg selv, det må nøye analyseres og tolkes (Cohen et al., 2011). Spesielt når det er snakk om dokumenter i undervisningssammenheng må forfatteren vurdere relabiliteten til dokumentet fordi slike dokumenter ofte er basert på politiske motivasjoner, noe som kan påvirke de pedagogiske valgene i dokumentet (Cohen et al., 2011). Forskeren må verifisere forfatteren og få frem sted og dato for produksjonen av dokumentet (Cohen et al., 2011). Metoden innebærer å skumlese, dybdelese og analysere. Forskeren må avklare dokumentets eksistens, tilgjengelighet og viktigheten, i tillegg til dokumentets opprinnelig formål, konteksten det ble produsert og den tiltenkte målgruppen (Bowen, 2009).
Hvis vi sammenligner kvalitative metoder med kvantitative blir de kvalitative metodene regnet som mer åpne og prosessorienterte (Postholm & Jacobsen, 2011).

Med kvalitative metoder starter ofte forskeren med en vid problemstilling som endrer seg etter hvert forskningens utvikling. Slik formes forskningsdesignet seg gjennom selve forskningsprosessen, (Nilssen, 2012). En slik utvikling erfarte jeg selv med mitt forskningsspørsmål. Jeg startet med en mye videre og åpen problemstilling enn det jeg endte opp med og erfarte hvordan problemstillingen endret seg etter hvilke funn jeg gjorde og hvilket fagstoff jeg kom over.

Til sammenligning med andre kvalitative forskningsmetoder har dokumentanalyse både fordeler og ulemper. Fordelene er at metoden er tidsbesparende med tanke på å samle inn data, materialet kan være lett tilgjengelig, kostnadseffektiv, ikke-påvirkelig av forskningsprosessen, stabil med tanke på tid, nøyaktig med tanke på informasjon rundt navn, kilder osv., og stor dekning med tanke på tid, hendelser og settinger (Bowen, 2009). Ulempene kan være at dokumentene er produserte uavhengig av forskningens agenda, lav gjenfinnbare, og forutinntatt utvelgelse av tilgjengelige dokumenter. Ulempene er i utgangspunktet potensielle og tatt fordelene i betraktning vil disse veie tyngre enn ulempene (Bowen, 2009). Min forskning sin agenda er å finne hvilke potensielle læringsmuligheter som skapes med tanke på variasjon i konsept og prosedyre i oppgavene i lærebøkene. Selvsagt vil da den kinesiske læreboka inneha en fordel fordi den er produsert med utgangspunkt i variasjonspraksisen jeg har basert analysen min på. I den forstand kan det argumenteres for at det er til ulempe for den norske læreboka at den produsert uavhengig av denne variasjonspraksisen. Dette er likevel noe som jeg ikke har lagt vesentlig vekt på i min analyse, fordi poenget med analysen er å få frem særegenheten ved den kinesiske variasjonskulturen og slik bruke den norske læreboka til å forsterke dette. Med tanke på gjenfinnbarhet ble ikke det noe ulempe med mitt studie siden jeg hadde lærebøkene tilgjengelige hele tiden og selve utvelgelsesprosessen vil jeg begrunne senere. Når det kommer til ulempen i form av at jeg som forsker er forutinntatt i utvelgelsen av dokumenter har jeg prøvd å motvirke dette ved å forhøre med veilederen min om hvilken kinesisk lærebok jeg bør velge med utgangspunkt i hvilken bok som blir mest brukt i det representative området i Kina. Jeg valgt den norske læreboka med utgangspunkt i hvilken lærebok som skal være den nyeste og mest "oppdaterte" læreboka. Slik har jeg prøvd å minimalisere den siste ulempen Bowen (2009) nevner ved dokumentanalyse.

3.2 Valg og presentasjon av lærebøker

Jeg valgte å fokusere på kun grunnbøkene og ikke oppgavebøkene. Dette valget tok jeg på bakgrunn i det Stein et al. (2009) skriver om hvordan faktorene rundt oppgaven påvirker selve oppgaven. Når jeg tar for meg læreboka får jeg sett hvilke eksempler og forklaringer som blir presentert før og rundt oppgavene og slik har jeg et bedre utgangspunkt for å vurdere oppgavene. Et annet argument for å fokusere på grunnboka fremheves av Li, Y., Chen, X., & An, S (2009). De påpeker viktigheten av verktøy som går i dybden på bøkene og som ikke ser på overfladiske faktorer. Hadde jeg tatt utgangspunkt i oppgavebøkene i tillegg hadde jeg fått langt flere oppgaver å analyse og ikke like stor mulighet til å gå i dybden av hver enkelt oppgave. Derfor valgte jeg å fokuserer på de oppgavene som eksisterte i grunnboka og heller gå mer i dybden på disse.

Jeg har valgt å ta for meg den kinesiske boken ”Matematikk 6. klasse” fra byen Shang Hai. Jeg valgte ”Matematikk 6. klasse” fordi det er denne boken som blir brukt som utgangspunkt for undervisningen i Shanghai og elever fra Shang Hai er blant de elevene som skårer best i matematikk i PISA-undersøkelsene de siste årene. Læreboka ble valgt fordi jeg ønsket å benytte meg av en lærebok som faktisk ble benyttet i det området hvor de gode læringsresultatene hadde blitt målt. Slik fikk jeg en sammenheng mellom læringsmateriale og læringsutbytte. Dette er noe Fan et al. (2013) har kritisert ved tidligere forskning og noe som de etterspør i videre forskning. Jeg har også tatt utgangspunkt i læreboka fordi det var denne jeg hadde til disposisjon via min veileder som opprinnelig er fra Kina. Jeg valgte å ta for meg den norske læreboken Maximum med utgangspunkt i at læreboka er en av de nyeste lærebøkene på markedet, utgitt i 2013. Slik burde læreboka være oppdatert på nyere forskning på undervisningsmetoder, og med det har jeg prøvd å velge en lærebok hvor forfatterne har hatt muligheten til å velge oppgaver basert på variasjonsteori fra nyere forskning. Jeg valgte også Maximum med utgangspunkt i at forlagt selv mente Maximum er den læreboken skoler oftest bytter over til når de skal bytte læreverk. Med tanke på dette vil muligens Maximum være en av de mest brukte læreverkene fremover i den norske skolen, og slik svært relevant for min analyse.

	Den kinesiske læreboka	**Den norske læreboka**
Navn	”Matematikk 6. Klasse”	Maximum
Antall sider totalt	120	343
Kapittelfordeling	Kap 1: Divisibility of numbers Kap 2: Fraction Kap 3: Rate and ratio Kap 4: Circle and circle sector	Kap 1: Tall og tallregning Kap 2: Geometri Kap 3: Brøk, desimaltall og prosent Kap 4: Statestikk Kap 5: Algebra og likninger
Antall sider om divisjon med brøk	5	5
Antall oppgaver	9	13
Alderstrinn	12-13 år	13-14 år
Forfatter	Shanghai elementary and secondary schooling (including kindengarden) curriculum reform committee	Grete Normann Tofteberg, Janneke Tangen, Ingvill Merete Stedøy-Johansen og Bjørnar Alseth
Utgivelsesdato	2005	2013
Forlag	Shanghai Educational Publishing House	Gyldendal Norsk Forlag AS

Tabell 1. Tabellen viser en oversikt over informasjon knyttet til den kinesiske og den norske læreboka.

Den kinesiske læreboka inneholdt noe som de kaller ”Considerations”, og disse hadde de to varianter av; ”Consideration 1” og ”Considartion 2”. Læreboka inneholdt også noe de kalte ”Question” og hadde én variant av denne. Både ”Consideration 1”, ”Cosnideration 2” og ”Question” har jeg valgt å definere som oppgaver med utgangspunkt i Stein et al. (2009) sin definisjon på en oppgave, se mer informasjon under delkapittel 3.4.3. I tillegg inneholdt den kinesiske læreboka oppgaver med oppgavenummer, likt som den norske læreboka.

3.3 Valg og innsamling av datamateriell

Siden jeg har valgt å ta for meg analyse av lærebøker ble selve innsamlingen av datamaterialet ganske enkelt. Da jeg hadde bestemt meg for hvilke lærebøker jeg skulle fokusere på var det kun å innhente disse og begrense datamaterialet til det aktuelle temaet. Det aktuelle temaet var begrenset til et delkapittel i hver bok.

3.3.1 Valg av matematisk tema

Jeg valgte å ta for meg temaet divisjon med brøk fordi jeg personlig synes temaet er utfordrende og interessant å lære bort, og erindrer fra mine tidligere dager som elev at dette temaet var vanskelig å forstå. Li (2008) støtter opp under mitt syn på temaet ved sin forklaring på at algoritmen for utregning av divisjon med brøk i seg selv ikke er noe vanskelig å lære, men det å forstå selve prosedyren bak regneoperasjonen kan være noe mer utfordrende. Jeg synes også at temaet er spennende fordi det gir oss lærere muligheten til å ta tak i temaet fra ulike vinkler, noe som Ma (2010) også fremhever ved å forklare divisjon med brøk som en oppsummering av hele aritmetikken, og slik gir oss lærere muligheten til mye variasjon i forklaringer og innfallsvinkler. Li (2008) får frem kompleksiteten rundt innlæringen av temaet divisjon med brøk og hvor rikt på matematikk temaet er. Nettopp fordi temaet er så rikt på matematikk er det viktig for oss som lærere og ha nok kunnskap om temaet for å slik kunne benytte oss av disse mulighetene for læring.

3.4 Bearbeiding og analyse av materialet

Da jeg hadde bestemt meg for hvilke lærebøker jeg skulle benytte og begrenset datamaterialet til et delkapittel i hver bok sto igjen arbeidet med å bearbeide og analysere materialet.

3.4.1 Oversetting

Det kinesiske materialet har jeg fått oversatt til engelsk av en kinesisk mastergradsstudent ved NTNU. Oppgavene som jeg har tatt i bruk som eksempler har jeg både fremstilt på sitt opprinnelige språk og engelsk. Jeg valgte å fremstille eksemplene både på sitt opprinnelig språk og engelsk, i stedet for norsk, med tanke på å få minst mulig ledd med oversetting. Avgjørelsen med minst mulig ledd med oversetting gjorde jeg med tanke på å minimaliserer faktoren for at noe av pedagogisk betydning rundt oppgavene skulle forsvinne og slik påvirke resultatene mine. Jeg valgte å ikke oversette navnene på oppgavene til norsk, men tok i bruk oversettingen som var gjort fra kinesisk til engelsk. Avgjørelsen tok jeg på samme grunnlag som fremstillingen av oppgavene på engelsk og ikke norsk. Jeg har valgt å referere til oppgavene i hermetegn, for eksempel; ”Consideration 1” eller ”Question” fordi oppgavene egentlig har et kinesisk navn.

3.4.2 Utvikling av analyseverktøy

Jeg valgte å basere analyseverktøyet mitt på Gu et al. (2004) sin inndeling av kinas variasjonspraksis, fremfor Sun (2011a) sitt rammeverk, på grunn av at Gu et al. (2004) sitt rammeverk var lettere å benytte grunnet gode eksempler og forklaringer. Så kunne jeg heller benytte Sun (2011a) sine resultater til referanse. Et annet argument for å bruke Gu et al. (2004) sin inndeling av variasjon var bruken av det samme rammeverket i det velrennomerte og nylige publiserte studiet til Zhang et al. (2017) hvor de har, likt som mitt studie, sett på variasjon i konsept og prosedyre i oppgaver. Dette ga meg en unik mulighet til å sammenligne resultatene mine opp mot deres.

Jeg valgte å benytte meg av rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) på matematisk kompetanse når jeg skulle ta for meg hvilke læringsmuligheter som ble lagt til rette for fordi det ga meg muligheten til å systematisk se på ulike komponenter ved det de beskriver som å lære matematikk suksessfullt. I tillegg er det er det ikke gjort tidligere forskning på se disse rammeverkene i sammenheng og det ga meg muligheten til å se på kinas variasjonspraksis fra et nytt perspektiv.

Li et al. (2009) påpeker at en av svakhetene med tidligere tekstbokanalyser at mye forskning er basert på å se etter likheter og ulikheter i innhold og tema i forskjellige lærebøker og slik går mindre i dybden av bøkene. For å få en bedre forståelse for tekstbøker burde man i følge Li et al. (2009) utvikle et mer finjustert analyseverktøy som går dypere. Ved å begrense meg til å se på kun oppgavene og benytte meg av et analyseverktøy som går i dygden av oppgavene i form av å se på hvordan bruken av variasjon legger til rette for potensielle læringsmuligheter vil jeg argumentere for at jeg går dypere enn å kun se på likheter og forskjeller når det kommer til å presentere innhold eller et tema. Da det å se på oppgavene ville da hvert en av faktorene og ikke hele oppgaven.

Da jeg valgte å lage analyseguiden, se Tabell 2, for variasjon i oppgavene tok jeg utgangspunkt i inndelingen til Gu et al. (2004), som beskriver kategorien variasjon i konsept ved å dele inn i (1) konseptuell variasjon og (2) ikke-konseptuell variasjon. Kategorien variasjon i prosedyre blir beskrevet som enten å variere ved og stegvis omgjøre kunnskapen mot en løsning eller å løse problemet med ulike fremgangsmetoder, men blir ikke fysisk delt inn i to ulike deler. Jeg har valgt å splitte kategorien i to fysiske deler for å gjøre det mer oversiktlig i analysen. Da jeg skulle lage analyseguiden for Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon på matematisk kompetanse, se Tabell 3, tok jeg utgangspunkt i de fem ulike komponentene.

Variasjon i konsept	Variasjon i prosedyre
(1) Konseptuell variasjon: Variasjon av visuelle og konkrete aspekter ved objekter.	(1) Ulike steg mot en løsning
(2) Ikke-konseptuell variasjon: Variasjon ved å ta i bruk objekter som er utenfor konseptet	(2) Ulike måter å løse problemer på

Tabell 2. Tabellen viser analyseguiden for variasjon i konsept og prosedyre.

De fem ulike komponentene ved matematisk kompetanse
1. *Konseptuell forståelse:* komponenten hvor eleven har et integrert og funksjonelt grep om den matematiske ideen og skjønner hvorfor temaet er viktig og i hvilke situasjoner ideen kan benyttes.
2. *Prosedyremessig flyt:* komponenten hvor eleven har kunnskap om når og hvordan en matematisk prosedyre skal benyttes, og kunne benytte prosedyren fleksibelt, nøyaktig og hurtig.
3. *Strategisk kompetanse:* komponenten hvor eleven skal klare å formulere et matematisk problem, representere problemet og til slutt komme med en løsning.
4. *Adaptiv resonering:* komponenten hvor eleven evner å tenke logisk om relasjoner mellom konsept og situasjon, og kunne navigere mellom fakta, prosedyrer, konsepter og løsninger og slik se hvordan alt sammen henger sammen.
5. *Produktiv disponering:* komponenten hvor eleven mestrer å se fornuften i det å lære matematikk, og se at det å legge ned arbeid i å forstå matematikken lønner seg.

Tabell 3. Tabellen viser analyseguiden for de fem ulike komponentene ved det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som matematisk kompetanse.

3.4.3 Analyse av innsamlet data

Jeg har benyttet meg av en deduktiv analysemetode hvor jeg har kodet analysematerialet mitt ut i fra analyseverktøyet jeg har utviklet. Da jeg skulle begynne å analysere oppgavene så jeg raskt at jeg måtte jeg ta utgangspunkt i en definisjon på hva en oppgaver er for å kunne sile ut alt som ikke var oppgaver. Det var da jeg valgte å ta utgangspunkt i Stein et al. (2007) sin definisjon på en oppgave og har sortert innholdet i lærebøkene deretter. Stein et al. (2007) definerer en oppgave som en klasseromsaktivitet med formål å fokusere elevenes oppmerksomhet på en spesifikk matematisk ide. Jeg valgte å definere de ulike eksemplene i lærebøkene som ikke en oppgave, fordi svaret på spørsmålet kom fortløpende. Jeg måtte også ta et valg om jeg skulle se på hver enkelt oppgave eller alle oppgavene samlet som en enhet. Jeg valgte å se på alle oppgavene som en helhet, altså hvordan variasjon i konsept og prosedyre varierte gjennom alle oppgavene samlet. Valget om å se på alle oppgavene som en samlet enhet tok jeg med bakgrunn i hvor ulikt de to lærebøkene var bygd opp. Den kinesiske læreboka er stor sett bygd på oppgavesett og den norske læreboka var stort sett bygd opp med enkeltoppgaver. Hadde jeg valgt å sett på oppgavene enkeltvis hadde jeg ikke fått med hele bildet av variasjonsaspektet i den kinesiske læreboka, nettopp fordi den kinesiske læreboka er bygd opp med oppgavesett for å skape variasjon. Hadde jeg valgt å sett på alle oppgavene samlet i den kinesiske læreboka og enkeltvis i den norske ville det vært implisitt at den kinesiske læreboka ville inneholdt mer variasjon i et sett med oppgaver enn en og en oppgave i den norske, og slik ville resultatene mine blitt lite troverdige med tanke på sammenligningen av de ulike variasjonsaspektene. Derfor tok jeg utgangspunkt i alle oppgavene som en samlet enhet og så etter variasjon både på tvers av oppgavene og innad i oppgavene.

Da jeg hadde sortert oppgavene etter hvilken variasjon jeg kunne se tok jeg for meg hvordan de ulike variasjonene skapte potensielle læringsmuligheter med tanke på det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som matematisk kompetanse. Jeg valgte ut eksempler på oppgaver fra den kinesiske læreboka som fikk vist typiske trekk ved den kinesiske variasjonspraksisen og oppgaver fra den norske læreboka til sammenligningsgrunnlag.

3.5 Validitet og relabilitet

Cohen et al. (2011) omtaler validitet som hvor ærlig, dypt og omfangsrikt forskningsmaterialet er. Validiteten er viktig uansett om studiet er kvalitativt eller kvantitativt, med lav validitet svekkes resultater og konklusjoner. I mitt forskningsprosjekt består analysematerialet av lærebøker. Det vil si at jeg som forsker ikke har noe vesentlig mulighet til å påvirke materialet mitt, annet enn selve utvelgelsen av lærebøkene. Begrunnelsen for utvelgelsen av lærebøkene mener jeg styrker validitet i oppgaven basert på det er en gjennomtenkt og ærlig begrunnelse på hvorfor jeg har tatt for meg akkurat disse bøkene. Andre grep jeg har gjort for å sikre validiteten er å utvikle et analyseverktøy som går i dybden av lærebøkene, noe som Li et al. (2009) poengterer er viktig i fremtidig forskning. Jeg har også benyttet meg av et analyseverktøy som er benyttet i flere andre forskningsprosjekter av renommerte forskere. I og med at analyseverktøyet er brukt i flere andre forskningsprosjekter jeg argumentere for at verktøyet styrker validiteten til min oppgave. Et siste grep jeg har foretatt er med tanke på at den ene lærebok er blitt oversatt fra sitt opprinnelige språk. Vi må gå ut i fra at noe av pedagogisk betydning kan ha forsvunnet i oversettelsen, og med dette i bakhodet har jeg tatt i bruk det opprinnelig dokumentet i form av bilder, og slik forhåpentligvis bidratt til å minske sjansen for at noe vesentlig har forsvunnet. I tillegg til å beholde de opprinnelige bildene har veilederen Liping Ding, som har morsmålet sitt på kinesisk, hjulpet til med oversettelsen teksten og tolkningen av bildene og slik bidratt til en mer kvalitativ oversettelse.

Cohen et al. (2011) omtaler relabilitet som hvor pålitelig forskningen er. For at forskningen skal være pålitelig skal man i følge Cohen et al. (2011) kunne gjennomføre forskningsprosessen på liknende grupper i en liknende kontekst og komme frem til liknende resultatene. Jeg som forsker har tatt ulike grep for å sikre relabiliteten til studiet mitt. Det første jeg prøvde å tenke over var hvordan jeg skulle være mest mulig objektiv i min posisjon som forsker. Som mastergradsstudent har jeg med meg en ”bagasje” som vil påvirke de valgene jeg tar når jeg analyserer lærebøkene og dette har jeg prøvd å ha et reflektert forhold til når jeg har analysert oppgavene. Et av tiltakene for å være så objektiv som mulig var å utvikle et analyseverktøy basert på tidligere forskning. Slik ble det analyseverktøyet som styrte analysen av oppgavene og analysen ble minst mulig påvirket av mitt utgangspunkt. Et annet grep jeg har gjort er å benytte meg av et analyseverktøy som er blitt gjennomført i lignende studier og fått lignende resultater, og som jeg slik mener går direkte inn og styrker relabiliteten til mitt forskningsprosjekt. Som forsker har jeg også prøvd å dokumentere dataene mine og analyseprosessen min detaljert og transparent som overhodet mulig.

3.6 Etiske betraktninger

I og med at jeg har studert lærebøker, har jeg ikke hatt direkte med personer å gjøre. Slik har jeg hatt færre etiske betraktninger å ta hensyn til sammenlignet med om jeg skulle gjennomført for eksempel et intervju eller observasjon av elever. Selv om jeg kun har hatt lærebøker å forholde meg til er det noen etiske betraktninger jeg har hatt i bakhodet. For det første er lærebøkene er skrevet av forfattere og disse forfatterne blir indirekte vurdert når jeg vurdert deres arbeid. I den forbindelse vil jeg nevne at målet mitt har ikke vært å vurdere om den ene eller den andre boka er bedre eller dårlige enn den andre, men å se på hvilke læringsmuligheter de ulike bøkene legger til rette for hos elevene. Mitt fokus har vært å studere den kinesiske variasjonskulturen og ønsker derfor kun å se på hvordan de gir elevene muligheten til å lære. Den andre etiske faktoren jeg har tatt i betraktning er åndsverksloven. Når man jobber med dokumentanalyse er det viktig å holde seg innenfor lover og regler for kopiering og distribuering av andre sine verk, og det har jeg jobbet for å etterstrebe gjennom hele arbeidsprosessen med prosjektet mitt.

4. Analyse: Et dypdykk i oppgavene

Med dette kapittelet ønsker jeg å besvare forskningsspørsmålet mitt med utgangspunkt i oppgaver fra hvert sitt delkapittel i den kinesiske og den norske læreboka. Målet med forskningsspørsmålet var å komme frem til spesifikke eksempler på hvordan bruk av variasjon i konsept og prosedyre bidrar til potensielle læringsmuligheter for å utvikle matematisk kompetanse innenfor temaet divisjon med brøk. Jeg vil derfor ta for meg spesifikke oppgaver fra de ulike bøkene og belyse hvordan vi kan argumentere for at akkurat disse oppgavene kan bidra til slike læringssituasjoner. Jeg vil først ta for meg oppgaver som inneholder variasjon i konsept og presentere de ulike variasjonsaspektene analysematerialet viste innenfor denne kategorien. Deretter vil jeg presentere oppgaver med variasjon i prosedyre og presentere de ulike variasjonsaspektene som analysematerialet viste innenfor den sistnevnte kategorien.

4.1 En analyse av oppgaver fra den kinesiske og den norske læreboka med utgangspunkt i variasjon i konsept

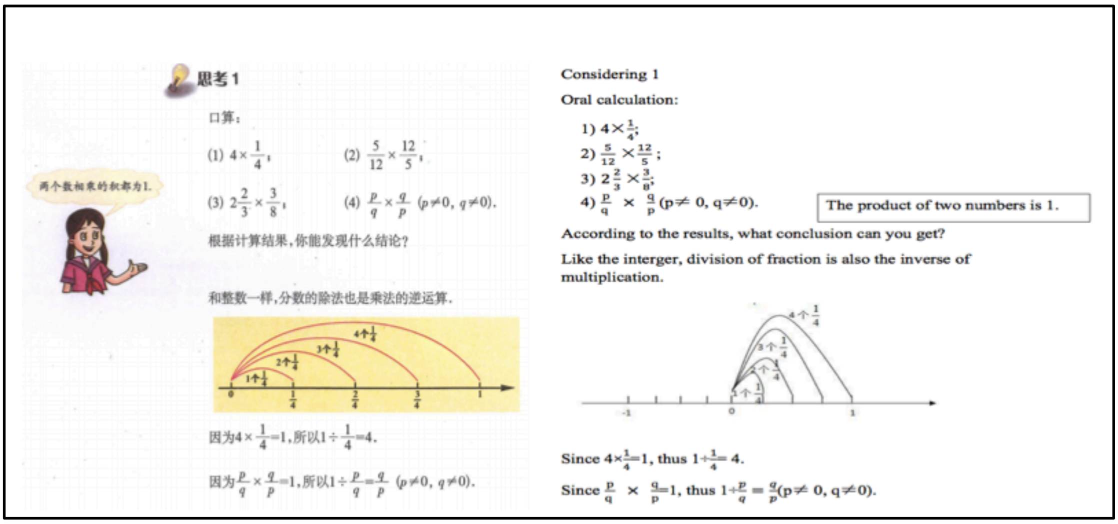
Alle variasjonsaspektene som blir presentert videre går under Gu et al. (2004). sin definisjon av variasjon i konsept ved (1) konseptuell variasjon eller (2) ikke-konseptuell variasjon. Analysematerialet viste til sammen tre ulike variasjonsaspekt; to ulike variasjonsaspekter innenfor kategorien (1) konseptuell variasjon; variasjon i form av bruk av ulike tall og tallplassering og representasjoner, og et variasjonsaspekt innenfor (2) ikke-konseptuell variasjon: variasjon ved bruk av andre konsepter.

4.1.1 En analyse av oppgaver som inneholder variasjon i konsept ved (1) konseptuell variasjon

Analysematerialet viste at bruken av variasjon i konsept i form av Gu et al. (2004). sin kategori (1) konseptuell variasjon la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) definerer som konseptuell forståelse og prosedyremessig flyt.

4.1.1.1 Ved å variere ulike representasjoner legger oppgavene til rette for læringsmuligheter for matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse.

I følge Gu et al. (2004) er det nødvendig å la elevene erfare visuelle og konkrete aspekter ved konseptet for å kunne knytte sammenhenger opp mot den abstrakte siden ved konseptet, og det finnes mange måter for variasjon innenfor det de definerer som (1) konseptuell variasjon. Det første variasjonsaspektet analysematerialet viste, som går under definisjonen (1) konseptuell variasjon, var hvordan både den kinesiske læreboka og den norske læreboka benyttet seg av variasjon i form av ulike representasjoner.

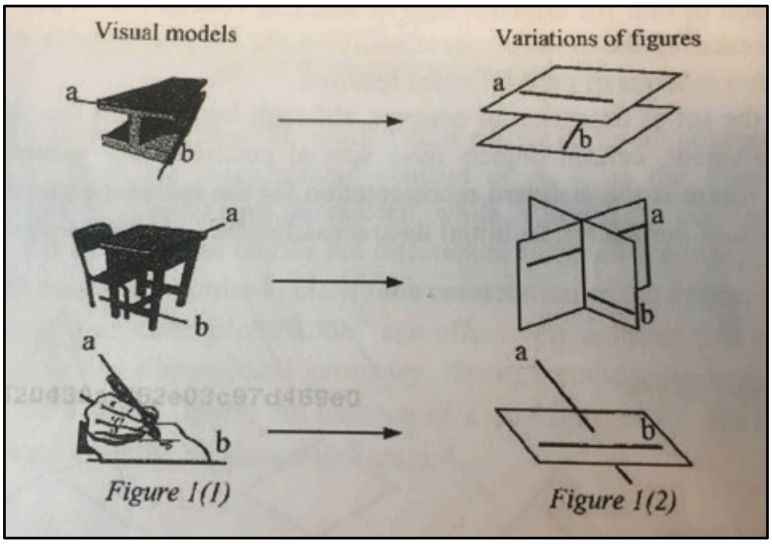


Figur 5. Figuren viser oppgave "Consideration 1" fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på variasjon i konsept i form av bruk av ulike representasjoner (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

Oppgave "Consideration 1" fra den kinesiske læreboka er egentlig helt i grenseland innenfor det jeg har tatt for meg som definisjon på hva en oppgave er, med tanke på at oppgaven er veldig likt et eksempel fremfor en oppgave. Men fordi oppgaven inneholder et spørsmål som oppgaven ikke svarer på selv (kriteriet for å være en oppgave og ikke et eksempel) og fordi oppgaven får frem flere variasjonsaspekt som er typiske for den kinesiske variasjonskulturen velger seg å ta med oppgaven for å få fremheve særegenheten ved kinas variasjonspraksis. Noe av variasjonsaspektene ved oppgaven vil bli presentert i dette delkapittelet og noe videre i senere delkapitler.

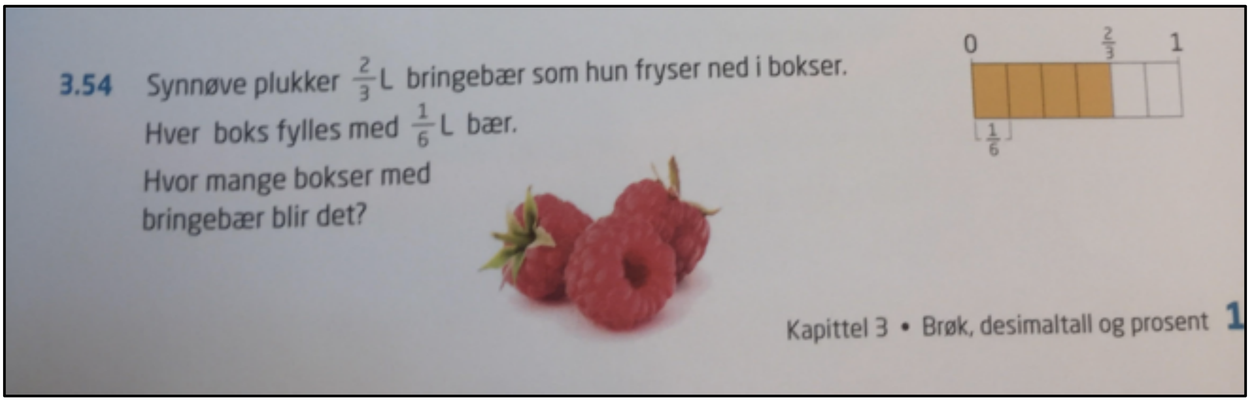
I oppgaven "Consideration 1" fra den kinesiske læreboka, se Figur 5, ser vi et eksempel på hvordan en oppgave benytter seg av ulike representasjoner for å presentere konseptet resiprok. Oppgaven benytter seg av representasjoner i form av tekst, billedlig figur og regnestykker. Etter at elevene skal løse noen oppgaver muntlig presenterer oppgaven lærestoffet i form av tekst. Teksten forklarer at; akkurat som heltall så er divisjon av brøk det omvendte av multiplikasjon. Deretter støtter oppgaven konseptet videre med å vise en billedlig figur som viser denne sammenhengen. Den billedlige figuren får frem hvor mange $\frac{1}{4}$

det er plass til i en hel, og slik knytter multiplikasjon og divisjon med brøk sammen. Til slutt setter oppgaven sammen informasjonen fra teksten og den billedlige figuren til en presentasjon med tekst og regnestykke. Alle de tre representasjonene viser sammenhengen mellom multiplikasjon med brøk og det nye konseptet som skal læres. Oppgaven bruker de tre representasjonene til å hjelpe elevene til å gå fra konkrete erfaringer til et abstrakt konsept, og i følge Gu et al. (2004) er dette hovedpoenget med en slik konseptuell variasjon. Denne formen for variasjon ved å gå fra noe konkret til et abstrakt konsept kan vi se igjen i Gu et al. (2004) sitt eksempel, Figur 6 som er en kopi av Figur 2 fra teorikapittelet.



Figur 6. Figuren viser en kopi av Figur 2 hvor figuren viser hvordan man kan variere med visuelle figurer ved å gå fra en konkret situasjon til et abstrakt konsept (Gu et al., 2004, s 316)

Oppgaven legger slik til rette for en dypere forståelse for det nye konseptet ved å knytte den abstrakte konseptet opp mot noe konkret eleven kan fra før med tre ulike representasjoner. Under delkapittelet 4.2.1.2. variasjon i prosedyre i form av stegvis omgjøring av kjent kunnskap til ukjent kunnskap vil jeg ta for meg videre hvordan denne koblingen, mellom kjent kunnskap og ukjent kunnskap, bidrar til å legge til rette for læringsmuligheter for en matematisk kompetanse. Det at oppgaven benytter seg av ulike representasjoner legger til rette for læringsmuligheter for det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som konseptuell forståelse av divisjon med brøk. Ved at konseptet vises med tre ulike representasjoner bidrar til å bekrefte sammenhengen mellom multiplikasjon med brøk og resiprok på tre måter i form av at elevene får bekreftet sammenhengen tre ganger. Slik legger oppgaven til rette for at eleven får et grunnlag for å gå videre til å lære ny kunnskap, i dette tilfellet divisjon med brøk, noe som er det som kjennetegner konseptuell forståelse i følge Kilpatrick et al. (2001).



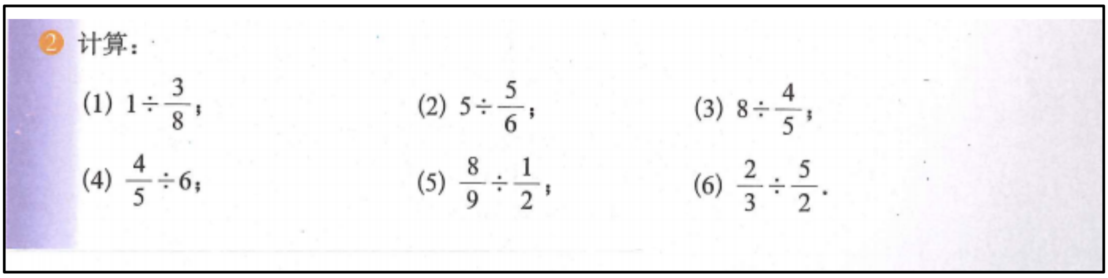
Figur 7. Figuren viser oppgave 3.54 fra den norske læreboka hvor vi ser et eksempel på variasjon i konsept i form av bruk av ulike representasjoner (Tofteberg, Holth, Tofteberg, Grete Normann, & Holth, Børre, 2013 s 175).

Til sammenligning viste også analysematerialet fra den norske lærebok en oppgave hvor ulike representasjoner ble benyttet. I oppgave 3.54, se Figur 7, ser vi bruk av tre ulike representasjoner; tekst med regnestykker og to ulike billedlige figurer. Oppgaven har en skriftlig tekst hvor konseptet divisjon med brøk knyttes opp mot aktiviteten bringebær fra dagliglivet og en billedlig figur i form av tre bringebær som gjentar denne tilknytningen. I tillegg har oppgaven en billedlig figur hvor figuren får frem de ulike delene i brøkene og setter de i sammenheng med hverandre i form av at de er plassert inn i samme figur og delt inn i like deler. Ut i fra figuren legger oppgaven opp til at elevene skal se at det går fire $\frac{1}{6}$ i en $\frac{2}{3}$.

Slik som oppgave "Consideration 1" i den kinesiske læreboka legger oppgave 3.54 til rette for læringsmuligheter for en konseptuell forståelse i form av at konseptet som skal læres; divisjon med brøk, representeres med ulike representasjoner, og slik får bekreftet konseptet gjentatte ganger. Li (2008) påpeker at det å variere representasjonene er en viktig faktor ved innlæring av temaet divisjon med brøk. Det som skiller den kinesiske oppgaven fra den norske er at oppgaven fra den norske læreboka benytter representasjonene til å knytte det som skal læres opp mot dagliglivet, noe som generelt gikk igjen i oppgavene fra den norske læreboka, mens oppgaven fra den kinesiske læreboka har fokus på å bruke representasjonene til å knytte konseptet opp mot kjent kunnskap hos elevene i form av andre matematiske konsept. Tilknyttingen opp mot andre konsept vil jeg utdype nærmere under neste delkapittel 4.1.2.1 Det at den norske læreboka variere med å knytte konseptet divisjon med brøk opp mot dagliglivet er i følge Li (2008) en viktig element ved innlæringen og kan i følge Gu et al. (2004) hjelpe elevene med å forstå meningen med konseptet. Ved å legge til rette for at elevene skal forstå meningen med konseptet legger oppgavene til rette for læringssituasjoner for det det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som en konseptuell forståelse. Det å forstå meningen med konseptet bidrar til å forstå hvorfor konseptet er viktig, og det å forstå hvorfor konseptet er viktig er noe av det som Kilpatrick et al. (2001) beskriver som konseptuell forståelse.

4.1.1.2 Ved å variere ulike tall og tallplasseringer legger oppgavene til rette for læringsmuligheter for matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse og prosedyremessig flyt.

Det andre variasjonsaspektet analysematerialet viste, som går under definisjonen (1) konseptuell variasjon, var hvordan både den kinesiske læreboka og den norske læreboka benyttet seg av variasjon form å variere ulike tall og tallplassering.



2 计算：

(1) $1 \div \frac{3}{8}$； (2) $5 \div \frac{5}{6}$； (3) $8 \div \frac{4}{5}$；

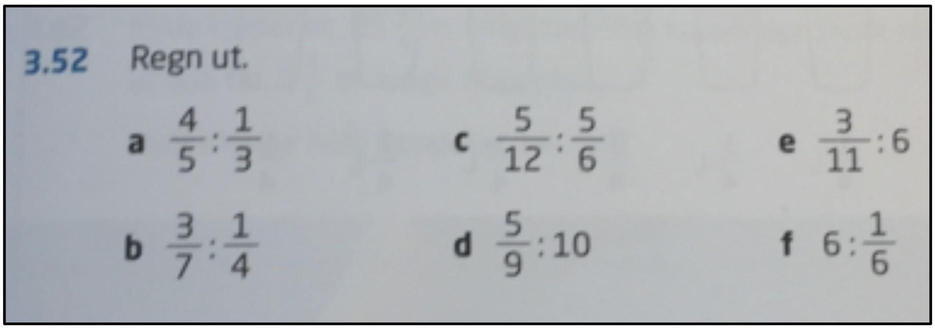
(4) $\frac{4}{5} \div 6$； (5) $\frac{8}{9} \div \frac{1}{2}$； (6) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{2}$.

Figur 8. Figuren viser oppgave 2.6.2(2) fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på flere varianter av variasjon i konsept (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 57)

I oppgave 2.6.2(2), se Figur 8, fra den kinesiske læreboka ser vi at oppgaven varierer med å bruke heltall, ekte brøk og uekte brøk. Vi ser at oppgaven varierer med å plassere heltallet og brøken som dividend og divisor. Oppgaven varierer også med å la deloppgavene dividere et større tall på et mindre tall eller omvendt. I den siste deloppgaven ser vi at det er lagt inn en uekte brøk som et siste variasjonsaspekt.

Ved at oppgaven varierer med å bruke ulike tall og tallplasseringer legger oppgaven til rette for læringsmuligheter for det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse. Kilpatrick et al. (2001) beskriver en av faktorene ved konseptuell forståelse er at elevene skal vite i hvilke situasjoner prosedyren kan benyttes. Hvis elevene kun har benyttet seg av prosedyren i situasjoner uten variasjon i tall og tallplassering risikerer man at elevene knytter prosedyren opp mot noen få situasjoner. For eksempel hvis den kinesiske læreboka kun hadde benyttet seg av oppgaver hvor elevene skulle dividere heltall på ekte brøker, slik som den første deloppgaven i oppgave 2.6.2(2) viser hadde man risikert at elevene ville knyttet prosedyren mot kun denne typen oppstilling av tall og ikke visst hvordan man skulle løst en oppgave hvor for eksempel en ekte brøk skulle blitt dividert på en uekte brøk, slik som siste deloppgave i oppgave 2.6.2(2) viser. Ved å få elevene til å jobbe med ulike tall og tallplasseringer vil oppgavene legge til rette for at elevene ser at prosedyren "å multiplisere med den omvendte brøken" ikke kun fungerer i visse situasjoner, men at de ser at prosedyren kan brukes på alle tall uansett plassering. Slik legger oppgaven til rette for at elevene for muligheten til å oppnå en bedre forståelse for selve konseptet divisjon med brøk, noe som også Kilpatrick et al. (2001) beskriver som en av faktorene ved konseptuell forståelse. Dette bekreftes av studiet til Sun (2011a) hvor også de kom frem til at oppgaver med sammenheng i konsept (OPMC) ble, likt som i dette tilfellet, brukt til solidgjøre det nye konseptet ved å variere ulike kriterier i de ulike deloppgavene slik som oppgavene gjør her.

Oppgaven legger også til rette for det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som matematisk kompetanse i form av prosedyremessig flyt. Kilpatrick et al. (2001) beskriver prosedyremessig flyt som når eleven blant annet klarer å gjennomføre prosedyrene fleksibelt, nøyaktig og hurtig. Ved at oppgaven har flere og relativt lignende deloppgaver får elevene muligheten til å øve seg gjentatte ganger på prosedyren i flere ulike situasjoner slik at de får muligheten til å bedre fleksibelheten, nøyaktigheten og hurtigheten i gjennomføringen. Slik bidrar oppgaven til å legge til rette for flyt i bruken av prosedyren


3.52 Regn ut.

a $\frac{4}{5} : \frac{1}{3}$ **c** $\frac{5}{12} : \frac{5}{6}$ **e** $\frac{3}{11} : 6$

b $\frac{3}{7} : \frac{1}{4}$ **d** $\frac{5}{9} : 10$ **f** $6 : \frac{1}{6}$

Figur 9. Figuren viser oppgave 3.52 fra den norske læreboka hvor vi ser et eksempel på flere varianter av variasjon i konsept (Tofteberg, Holth, Tofteberg, Grete Normann, & Holth, Børre, 2013 s 175).

Til sammenligning ser vi i oppgave 3.52, se Figur 9, fra den norske læreboka mye av den samme bruken av det Gu et al. (2004) beskriver som variasjon i konsept som i den kinesiske læreboka. Vi ser den samme bruken av variasjon i form av at det blir benyttet; både heltall og brøk, og det blir variert med om det er det største eller minste tallet som er dividend eller divisor. Slik legger også den norske læreboka til rette for læringsmuligheter for Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon av konseptuell forståelse og prosedyremessig flyt.

Det aspektet som gjør at de kinesiske oppgavene skiller seg ut er at oppgaven drar inn et siste variasjonsaspekt i form av uekte brøk. Dette utgjør at oppgavene legger til rette for en enda høyere konseptuell forståelse, i form av at elevene får sett konseptet knyttet opp mot enda en situasjon. Skal vi tro Kilpatrick et al. (2001) rett så handler ikke matematisk kompetanse om alt eller ingenting, men at alle ideer kan forstås på ulike nivå. Desto flere situasjoner vi knytter et konsept opp mot desto høyere nivå av forståelse kan vi argumentere for at vi legger til rette for fordi eleven får sett enda en situasjon hvor prosedyren kan benyttes i.

4.1.2 En analyse av oppgaver som inneholder variasjon i konsept ved (2) ikke-konseptuell variasjon

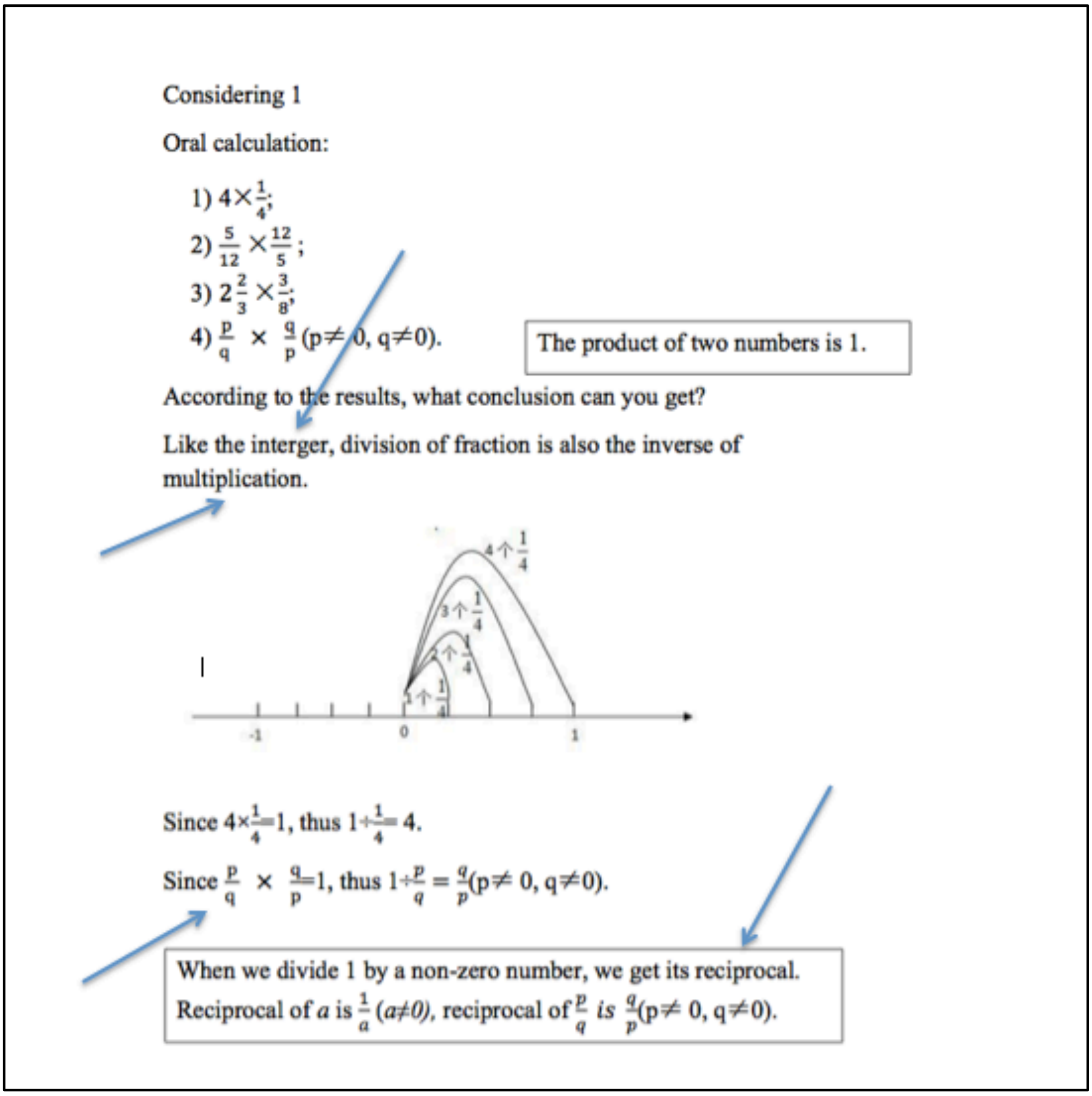
Analysematerialet viste at bruken av variasjon i konsept i form av Gu et al. (2004) sin kategori (2) ikke-konseptuell variasjon la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) definerer som konseptuell forståelse.

4.1.2.1 Ved å variere med å bygge sammenhenger mellom ulike konsept legger oppgavene til rette for læringsmuligheter for matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse.

Det tredje variasjonsaspektet analysematerialet viste, det første aspektet som går under definisjonen (2) ikke-konseptuell, var hvordan den kinesiske læreboka varierte med å bygge sammenhenger mellom ulike konsept.

Den kinesiske læreboka knyttet konseptet divisjon med brøk opp mot konseptet multiplikasjon med heltall, multiplikasjon med brøk, inverse operasjoner, resiprok, likninger og det generelle ved konseptet. Til sammenligning knyttet den norske læreboka divisjon med brøk opp mot det å omgjøre blandet tall til uekte brøk og forkorting. I følge Sun (2011a) gjelder dette generelt de fleste europeiske lærebøker i form av at de i store trekk gjør seg ferdig med et tema før de beveger seg videre til et annet og at kinetiske lærebøker vektlegger det å jobbe parallelt med flere konsept samtidig for å se sammenhenger og generellere relasjoner.

I Figur 9 ser vi hvordan oppgave ”Consideration 1” knytter konseptet opp mot inverse operasjoner i form av divisjon og multiplikasjon med heltall og brøk. ”Consideration 1” starter med multiplikasjon av brøk, noe som er kjent kunnskap hos elevene og kombinerer det med også tidligere kunnskap om multiplikasjon med heltall og inverse operasjoner i form av at akkurat sånn som heltall, så er divisjon med brøk det motsatte av multiplikasjon med brøk. Vi ser også hvordan oppgaven knytter konseptet divisjon med brøk opp mot det generelle ved konseptet, i form av at oppgaven starter med deloppgaver med spesifikke tall og utvikler med å avslutte med en deloppgave hvor de spesifikke tallene er byttet ut med generelle bokstaver. Oppgaven avslutter også med en kunnskapsboks hvor elevene blir presentert for begrepet resiprok og hvordan konseptet resiprok blir brukt generelt. Oppgaven legger slik opp til at elevene skal ha en forståelse for hva begrepet resiprok er før de begynner å jobbe med konseptet ”å multiplisere med den omvendte brøken”.



Considering 1

Oral calculation:

1) $4\times\frac{1}{4}$;
2) $\frac{5}{12}\times\frac{12}{5}$;
3) $2\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$;
4) $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}$ ($p\neq0$, $q\neq0$).

The product of two numbers is 1.

According to the results, what conclusion can you get?

Like the interger, division of fraction is also the inverse of multiplication.

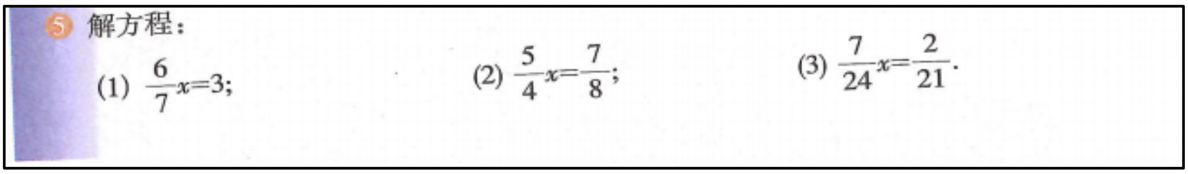
Since $4\times\frac{1}{4}=1$, thus $1\div\frac{1}{4}=4$.

Since $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1$, thus $1\div\frac{p}{q}=\frac{q}{p}$ ($p\neq0$, $q\neq0$).

When we divide 1 by a non-zero number, we get its reciprocal.
Reciprocal of a is $\frac{1}{a}$ ($a\neq0$), reciprocal of $\frac{p}{q}$ *is* $\frac{q}{p}$ ($p\neq0$, $q\neq0$).

Figur 10. Figuren viser oppgave ”Consideration 1” fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på variasjon i konsept i form av ikke-konseptuell variasjon (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

I oppgaven 2.6.5(2), se Figur 11, ser vi et eksempel på hvordan en oppgave fra den kinesiske læreboka knytter konseptet opp mot konseptet likning ved å la elevene dividere med brøk for å kunne løse likningen.

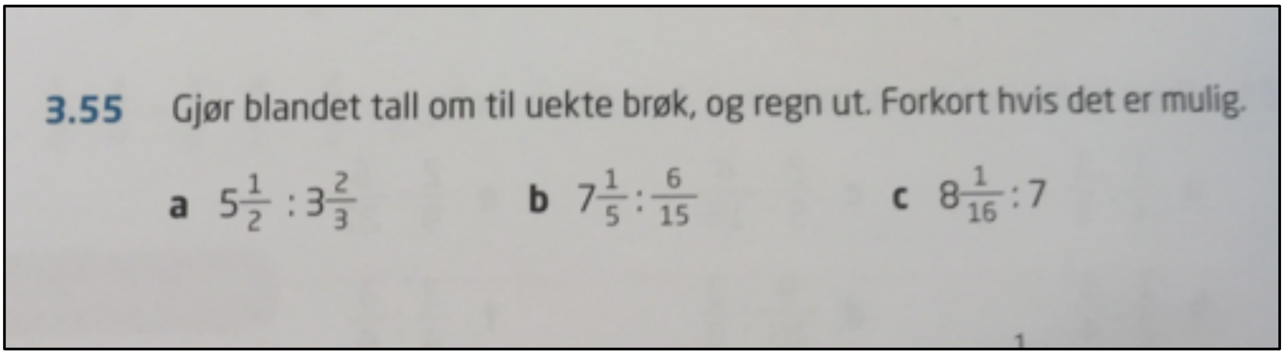


⑤ 解方程：

(1) $\frac{6}{7}x=3$; (2) $\frac{5}{4}x=\frac{7}{8}$; (3) $\frac{7}{24}x=\frac{2}{21}$.

Figur 11. Figuren viser oppgave 2.6.5(2) fra den kinesiske læreboka hvor vi ser er eksempel på konsept i form av ikke-konseptuell variasjon i (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 58)

Hvis vi ser på Figur 12 ser vi hvordan den norske læreboka hadde en oppgave hvor de oppfordret elevene til å gjøre om de blandede tallene til uekte brøk også forkorte brøkene, før de starter med å løse deloppgavene. Dette var den eneste oppgaven som nevnte noe om andre konsept enn konseptet divisjon med brøk.

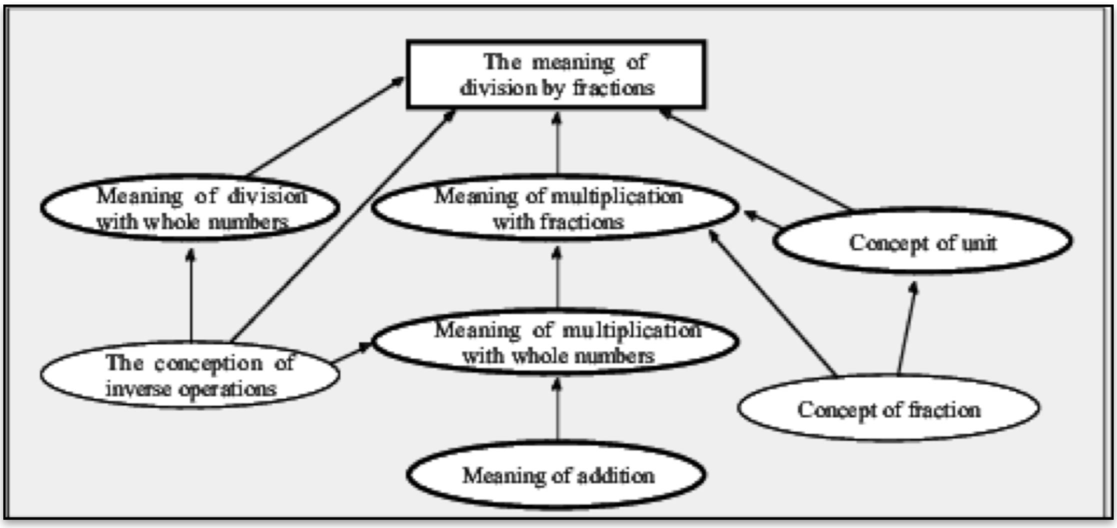


3.55 Gjør blandet tall om til uekte brøk, og regn ut. Forkort hvis det er mulig.

a $5\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$ **b** $7\frac{1}{5} : \frac{6}{15}$ **c** $8\frac{1}{16} : 7$

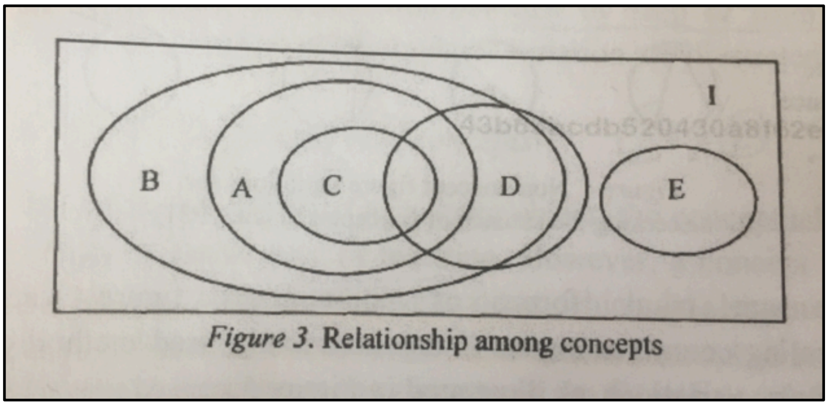
Figur 12. Figuren viser oppgave 3.55 fra den norske læreboka hvor vi ser er eksempel på konsept i form av ikke-konseptuell variasjon i (Tofteberg, Holth, Tofteberg, Grete Normann, & Holth, Børre, 2013 s 176).

Den kinesiske læreboka inneholdt fire oppgaver som omhandlet det forstå konseptet resiprok før den presenterte oppgave ”Consideration 1” hvor elevene skulle benytte seg av kunnskapen de hadde lært om resiprok til å komme frem til konseptet ”å multiplisere med den omvendte brøken”. Til sammenligning starter den norske læreboka med oppgaver som gikk direkte på konseptet ”å multiplisere med den omvendte brøken”. Skal vi tro Ma (2010) rett så er det å lære inn et konsept ikke å se på som et kunnskapspunkt, men en kunnskapspakke. Hvis vi ser på Ma (2010) sin kunnskapspakke med tanke på konseptet divisjon med brøk ser vi hvordan konseptet henger nøye sammen med forståelse av både; multiplikasjon med brøk, multiplikasjon med heltall, divisjon med heltall og inverse operasjoner, se Figur 13. Li (2008) påpeker også viktigheten av å knytte temaet divisjon med brøk opp mot andre konsepter under innlæringen. Det at oppgave ”Consideration 1” i den kinesiske læreboka starter med å bygge en forståelse for konseptet divisjon med brøk, ved å dra inn det som skal være tidligere lært kunnskap, skal i følge Ma (2010) fungere som en støtte for det nye konseptet som skal læres og samtidig blir den tidligere lærte kunnskapen forsterket. Vi ser også at oppgave ”Consideration 1” starter med å ha gjentatte deloppgaver på multiplikasjon med brøk, noe som Ma (2010) poengterer at er en av nøkkelfunksjonene i kunnskapspakken til divisjon med brøk. Dette ser vi tydelig i Figur 13 ved at boksen med multiplikasjon med brøk er nært knyttet til den øverste boksen med selve meningen med divisjon med brøk, og ved at flere av de andre kunnskapsboksene har piler igjennom kunnskapsboksen om multiplikasjon med brøk. Slik bidrar oppgaven med å knytte ulike konsepter sammen slik vi ser i kunnskapspakken til Ma (2010).



Figur 13. Figuren viser en kopi av Figur 1 som viser hvilke konseptet som henger sammen og som ligger til grunn for å forstå konseptet divisjon med brød (Ma, 2010, s 77)

Gu et al. (2004) får også frem hvordan en slik (2) ikke-konseptuell variasjon bidrar til å se sammenhenger mellom ulike konsept, og ser vi på Figur 14 som er en kopi av Figur 3 fra teorikapittelet ser vi hvordan en slik bruk av variasjon bidrar å sette konseptene i sammenheng med hverandre.



Figur 14. Figuren viser en kopi av Figur 3 hvor figuren viser hvordan ulike konsepter henger sammen (Gu et al., 2004 s 318)

Disse funnene går overens med studiet til Sun (2011a) hvor også hennes funn viste hvordan oppgaver innenfor det de definerte som oppgaver som varierer kriteriene rundt konseptet, bidro til å få frem en kunnskapspakke og ikke kun et kunnskapspunkt. Med å knytte konseptene sammen legger oppgaven til rette for at elvene kan se sammenhenger mellom ulike konsepter, og det er noe av det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som konseptuell forståelse. Når elevene får muligheten til å se konseptet i sammenheng med andre konsepter legger det i følge Kilpatrick et al. (2001) grunnlaget for å kunne lære ny kunnskap og løse nye problemer. Slik legger også i følge Kilpatrick et al. (2001) oppgavene til rette for et utgangspunkt for at elevene kan bevege seg mot et høyere nivå av konseptuell forståelse.

4.2 En analyse av oppgaver fra den kinesiske og den norske læreboka med utgangspunkt i variasjon i prosedyre

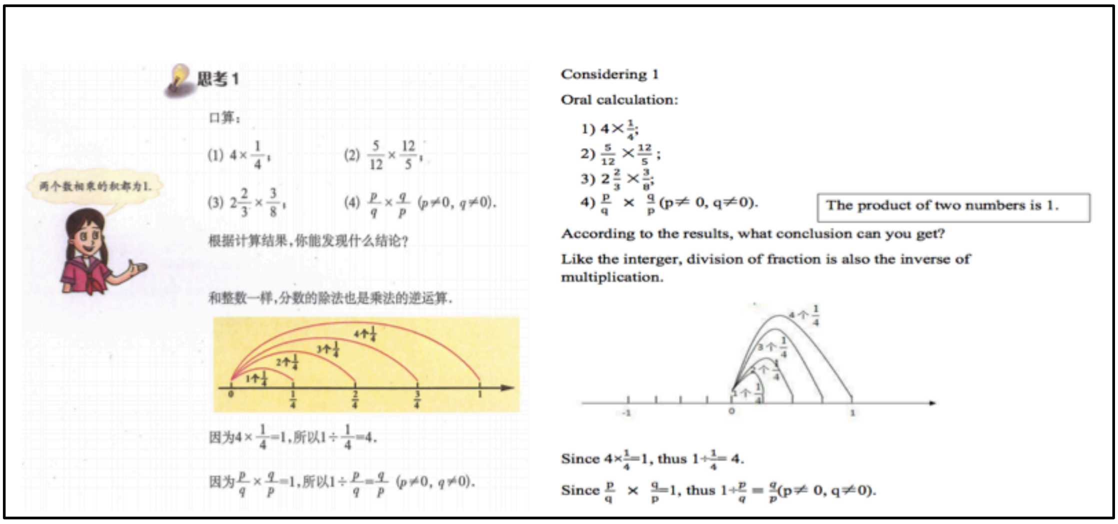
Alle variasjonsaspektene som blir presentert videre går under Gu et al. (2004). sin definisjon av variasjon i prosedyre. Analysematerialet fra den kinesiske læreboka viste tre ulike variasjonsaspekter innenfor kategorien. Analysematerialet fra den norske læreboka viste kun en oppgave med variasjon i prosedyre som gikk under Stein et a. (2009) sin definisjon på oppgave. I tillegg inneholdt den norske læreboka en tilhørende forklaring til en av oppgavene som inneholdt variasjon i prosedyre. Jeg valgte å ta med denne forklaringen under delkapittelet 4.2.1.2 som et eksempel på rettferdiggjøring av algoritmen, for å belyse særegenheten ved bruk av variasjon i en slik prosedyre i en typisk oppgave fra den kinesiske læreboka.

4.2.1 En analyse av oppgaver som inneholder variasjon i prosedyre ved (1) ulike steg mot en løsning

Analysematerialet viste at bruken av variasjon i prosedyre i form av Gu et al. (2004). (1) ulike steg mot en løsning, la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) definerer som konseptuell forståelse, strategisk kompetanse og adaptiv resonering. Denne formen for variasjon inneholder det Gu et al. (2004) beskriver som ”scaffolding” også kalt ”pudian” i den kinesiske variasjonspraksisen.

4.2.1.1 Ved å stegvis omgjøre et kjent problem til et ukjent problem legger oppgavene til rette for matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse og adaptiv resonering

Det første variasjonsaspektet, innenfor det Gu et al. (2004) beskriver som variasjon i prosedyre, analysematerialet viste var hvordan den kinesiske læreboka benyttet seg av variasjon i form av (1) ulike steg mot en løsning ved å stegvis omgjøre kjent kunnskap til ukjent kunnskap.



Figur 15. Figuren viser en kopi av Figur 5 fra analysen hvor figuren viser oppgave "Consideration 1" fra den kinesiske læreboka vi ser er eksempel på variasjon i prosedyre i form av omgjøring av kjent kunnskap til ukjent kunnskap (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

Ser vi på Figur 15 med oppgave "Consideration 1" ser vi hvordan oppgaven tar utgangspunkt i kunnskap som allerede skal være kjent for elevene: multiplikasjon med brøk og heltall, og bygger videre på denne kunnskapen ved å knytte den opp mot konseptet resiprok som skal være ny og ukjent kunnskap for elevene

思考 1

口算：

(1) $4\times\frac{1}{4}$；　(2) $\frac{5}{12}\times\frac{12}{5}$；

(3) $2\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$；　(4) $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}$ ($p\neq0$, $q\neq0$).

Considering 1

Oral calculation:

1) $4\times\frac{1}{4}$;

2) $\frac{5}{12}\times\frac{12}{5}$;

3) $2\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$;

4) $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}$ ($p\neq 0$, $q\neq0$).

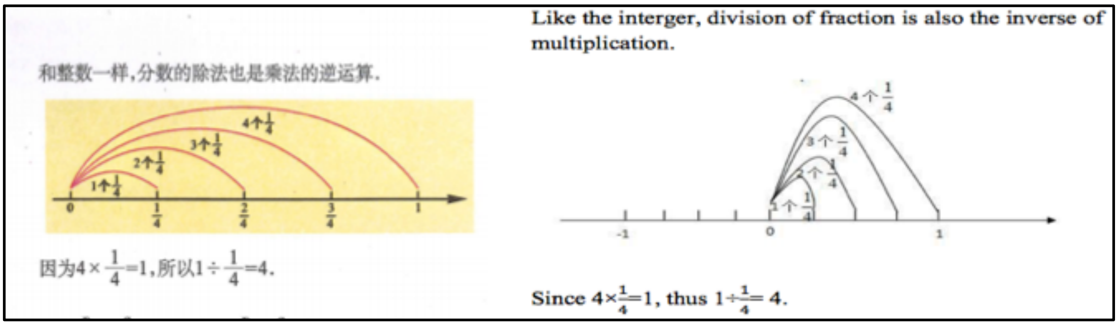
Figur 16. Figuren viser et ”Utklipp 1” fra ”Consideration 1” fra den kinesiske læreboka hvor vi ser er eksempel på steg en i omgjøringsprosessen fra kjent kunnskap til ukjent kunnskap (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

Som vi ser på Figur 16 med ”Utklipp 1” starter oppgaven med å få elevene til å jobbe med multiplikasjon med brøk og heltall, noe som skal være kjent kunnskap for elevene. Slik starter oppgaven med kjent kunnskap som steg en i det Gu et al. (2004) og Zhang et al. (2017) beskriver som den tradisjonelle kinesiske omgjøringsprosessen ”pudian”, vestens ”scaffolding”.

根据计算结果，你能发现什么结论？ According to the results, what conclusion can you get?

Figur 17. Figuren viser ”Utklipp 2” fra oppgave ”Consideration 1” fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på steg to i omgjøringsprosessen fra kjent kunnskap til ukjent kunnskap (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindengarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

Deretter, som vi ser på Figur 17 med ”Utklipp 2”, får så oppgaven elevene til å reflektere over hva resultatene de har jobbet med hittil viser, med mål om at elevene skal komme frem til at et tall (heltall eller brøk) multiplisert med det omvendte tallet blir èn, som utgjør det neste steget av variasjon i ”scafffoldingen”.



Figur 18. Figuren viser "Utklipp 3" fra "Consideration 1" fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på steg tre i omgjøringsprosessen fra kjent kunnskap til ukjent kunnskap (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

Hvis vi ser på Figur 18 med "Utklipp 3" presenterer oppgaven deretter ny midlertidig kunnskap, som utgjør det tredje steget av variasjon, som knytter multiplikasjon og divisjon sammen. Oppgaven knytter kunnskapene sammen ved å ta i bruk en tre ulike representasjoner i form av tekst, billedlig figur og en kombinasjon av tall og tekst, se delkapittel 4.1.1.1 som omhandler bruk av variasjon ved ulike representasjoner.

因为$\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1$,所以$1\div\frac{p}{q}=\frac{q}{p}$ $(p\neq0, q\neq0)$.	Since $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1$, thus $1\div\frac{p}{q}=\frac{q}{p}(p\neq 0, q\neq 0)$.

Figur 19. Figuren viser "Utklipp 4" fra "Consideration 1" fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på steg fire i omgjøringsprosessen fra kjent kunnskap til ukjent kunnskap (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindengarden) curriculum reform committee, 2005 s 54)

Tilslutt presenter oppgaven det som var målet at elevene skulle lære, det generelle ved konseptet resiprok. Se Figur 19 med "Utklipp 4", som blir siste steget i "scaffoldingen".

Denne formen for variasjon i prosedyre ved bruk av stegvis endre kunnskapen i form av "scaffolding" ser vi igjen i Figur 20 som er en kopi av Figur 4 fra teorikapittelet om Gu et al. (2004) sin definisjon på variasjon i prosedyre.

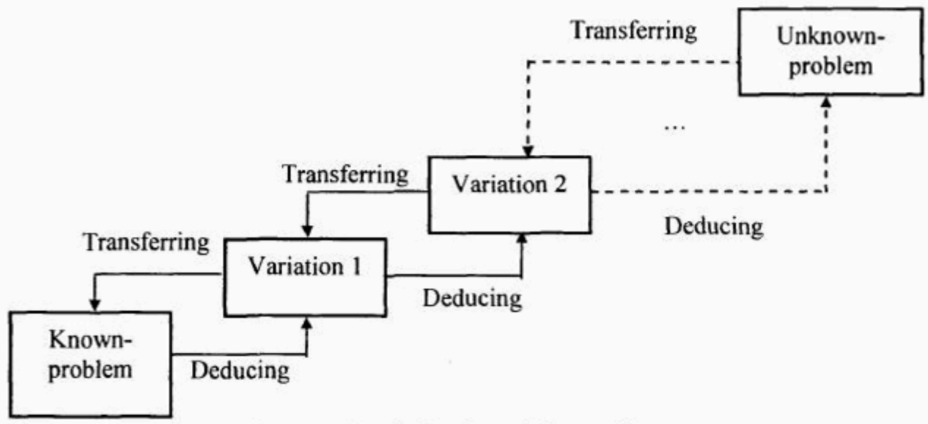


Figure 6. Variation for solving problems

Figur 20. Figuren viser en kopi av Figur 4 som viser hvordan man kan variere med ”scaffolding” ved å stegvis omgjøre et kjent problem til ukjentproblem og omvendt (Gu et al., 2004 s 322)

Med en slik bruk av ”scaffolding” skaper oppgaven det Gu et al. (2004) beskriver flere ”potensielle avstander”. Denne avstanden mellom kjent og ukjent kunnskap som oppstår mellom hvert steg under en slik ”scaffolding” er i følge Gu et al. (2004) avgjørende for hvilke læringsmuligheter som legges til rette for. Hvis vi ser på de ulike ”potensielle avstandene” mellom de ulike stegene kan vi se det
Gu et al. (2004) skriver om hvordan en størrelsen på avstanden påvirker hvilke læringsmuligheter som blir lagt til rette for.

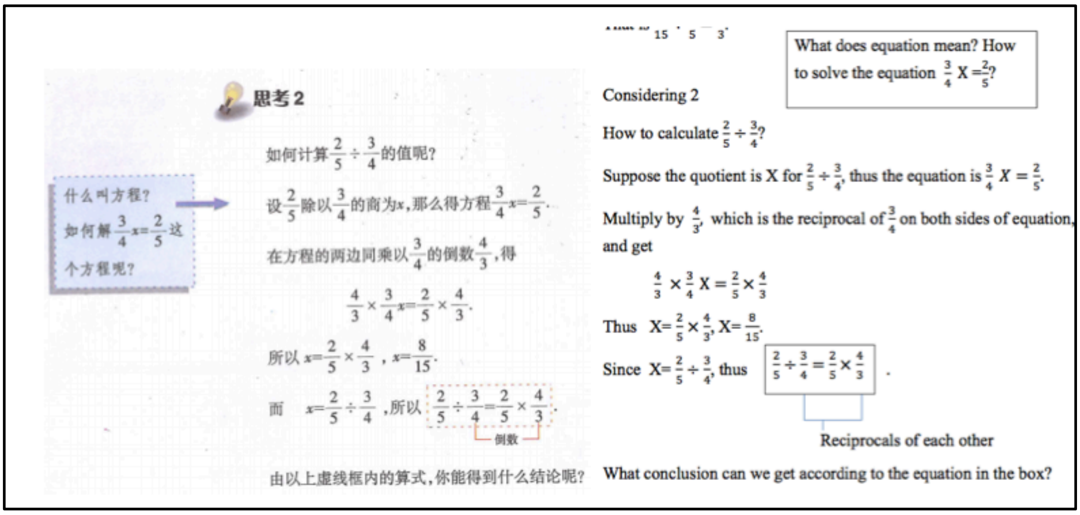
Mellom ”Utklipp 1” og ”Utklipp 2” ser vi hvordan en lengre avstand bidrar til å legge til rette for å utvikle utforskende kunnskap. Vi kan reflektere rundt lengden på ”den potensielle avstanden” ut i fra det Gu et al. (2004) beskriver som forskjellen på lengre og kortere ”potensielle avstander”. I følge Gu et al. (2004) vil en kortere avstand hjelpe eleven å forstå ny kunnskap, mens en lengre avstand kan være nyttig for å utvikle utforskende kunnskap. Avstanden mellom ”Utklipp 1” og ”Utklipp 2” utgjør at elevene må selv utforske seg frem til i form av å se hente ut fakta fra hvert enkelt regnestykke og se sammenhengen mellom faktaene. Slik benytter oppgaven seg av en lengre ”potensiell avstand” til å legge til rette for utvikling av det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som matematisk kompetanse i form adaptiv resonering. Elevene blir gitt muligheten til å utvikle sin matematiske kompetanse i form av adaptiv resonering ved å utvikle sin evne til å utforske og se matematiske sammenhenger.

Studiet til Zhang et al. (2017) kom også frem til hvordan en slik variasjon i prosedyre i form av en stegvis prosess med variasjon i enkle konsepter, formler og figurer fra kjente situasjoner til noe helt ukjent bidrar til å utvikle, noe likt som adaptiv resonering, det de definerer som matematiske ferdigheter. De definerer matematiske ferdigheter som blant annet det å kunne prosessere informasjonen som blir gitt i en oppgave og benytte seg av denne informasjonen konstruktivt, ganske gjenkjennbart som det Kilpatrick et al. (2001) definerer som deler av den matematiske kompetansen adaptive resonering.

I oppgave ”Consideration 1” Vi ser også eksempler på hvordan en kortere avstand legger til rette for at elevene skal forstå den nye kunnskapen. Hvis vi ser på avstanden mellom ”Utklipp 2” og ”Utklipp 3” ser vi hvordan en kortere avstand legger til rette for at elevene skal forstå den nye kunnskapen. Den tidligere kunnskaper er i dette tilfellet det elevene fant ut i forrige ledd ”Utklipp 1”, altså at et tall (heltall eller brøk) multiplisert med det omvendte tallet blir èn og den nye kunnskapen, altså at likt som heltall så er divisjon med brøk er det omvendte av multiplikasjon med brøk. Elevene trenger ikke å utforske noe selv, men får den nye kunnskapen vist i form av figur og tekst og slik ser vi hvordan en kortere ”potensiell avstand” bidrar til det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse. Det samme ser vi mellom ”Utklipp 3” og ”Utklipp 4”. Elevene blir i det siste utklippet, likt som i ”Utklipp” 3 presentert for ny kunnskap og elevene trenger ikke å gjøre noe aktivt og utforskende selv.

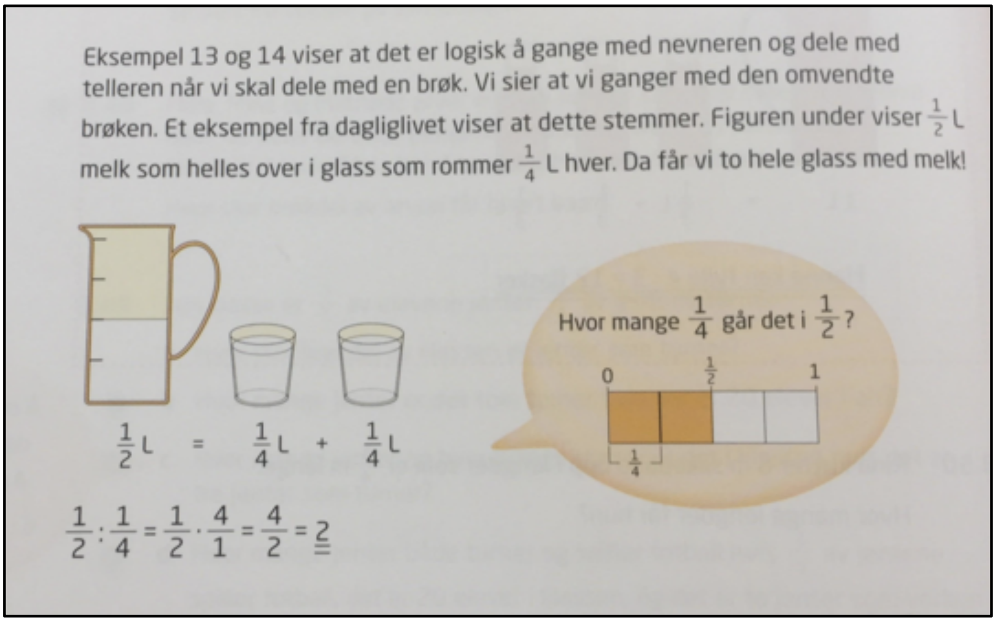
4.2.1.2 Ved å stegvis rettferdiggjøre prosessen bak algoritmen legger oppgaven til rette for matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse og adaptiv resonering

Det andre variasjonsaspektet innenfor det Gu et al. (2004). beskriver som variasjon i prosedyre, analysematerialet viste var hvordan den kinesiske læreboka benyttet seg av variasjon i form (1) ulike steg mot en løsning ved å stegvis rettferdiggjøre algoritmen, en variasjonsform som også inneholder ”scaffolding”. I dette eksempelet har jeg ikke valgt å rette fokuset mot ”scaffoldings”-prosessen, men mot selve rettferdiggjøringen av prosessen og derfor har jeg ikke valgt å trekke frem de ulike kunnskapsstegene eller de ”potensielle avstandene” med utgangspunkt i at det blir mye gjentagelser fra delkapittelet over.



Figur 21. Figuren viser oppgave ”Consideration 2” fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på variasjon i prosedyre i form av stegvis rettferdiggjøring av prosessen bak algoritmen (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 56)

Vi ser et slikt eksempel på rettferdiggjøring av algoritmen i Figur 21 med oppgave ”Consideration 2”. Oppgaven starter med å spørre elevene hvordan man kan regne ut $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}$. Deretter viser oppgaven hvordan regnestykket kan regnes ut ved å sette det opp som en likning. Så setter oppgaven sammen informasjonen de fikk fra å løse det som en likning og utgangspunktet til likningen, og viser dette i en uthevet boks. Til slutt spør oppgaven elevene om hvilken konklusjon kan vi komme frem til med tanke på den uthevede boksen. Oppgaven legger slik opp til at elevene selv skal komme frem til algoritmen “å multiplisere med den omvendte brøken”. Også studiet til Sun (2011a) kom frem til at kineiske oppgaver med variasjon innenfor løsningsmetodene hadde som rolle å rettferdigjøre prosedyren bak algoritmen, og slik et fokus på forståelsen for hvordan algoritmen fungerer og ikke fokus på memorering av en algoritme.


Eksempel 13 og 14 viser at det er logisk å gange med nevneren og dele med telleren når vi skal dele med en brøk. Vi sier at vi ganger med den omvendte brøken. Et eksempel fra dagliglivet viser at dette stemmer. Figuren under viser $\frac{1}{2}$ L melk som helles over i glass som rommer $\frac{1}{4}$ L hver. Da får vi to hele glass med melk!

Figur 22. Figuren viser en forklaring til en oppgave fra den norske læreboka hvor en algoritme som er blitt benyttet i flere tidligere oppgaver begrunnes (Tofteberg, Holth, Tofteberg, Grete Normann, & Holth, Børre, 2013 s 174).

I eksempelet over, se Figur 22, ser vi hvordan den Gu et al. (2004) beskriver som variasjon i prosedyre i form av (1) rettferdiggjøring av algoritmen. Oppgaven forklarer hvorfor det er logisk å multiplisere med den omvendte brøken ved å ta for seg et eksempel med melk som skal fordeles i glass. Oppgaven benytter seg også av en figur som legger opp til at eleven skal kunne se hvor mange $\frac{1}{4}$ det går i $\frac{1}{2}$.

Det som skiller forklaringen i den norske læreboka fra forklaringen i den kinesiske er at den kinesiske legger opp til at elvene skal komme frem til en generell regel basert på eksempelet som oppgaven viser, mens forklaringen i den norske læreboka er en forklaring på en regel som allerede er blitt presentert for elevene. Med en rettferdiggjøring av algoritmen legger begge lærebøkene til rette for muligheter for utvikling av matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som konseptuell forståelse. Begge oppgavene fokuserer på hvorfor det å dividere med brøk fungerer med å multiplisere med den omvendte brøken og slik vil legge til rette for en bedre forståelse for konseptet å multiplisere med dem omvendte brøken. Det at den kinesiske læreboka fokuserer på at elevene skal komme frem til algoritmen selv legger til rette for det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som den matematiske komponenten adaptiv resonering. I følge Kilpatrick et al. (2001) omhandler adaptiv resonering det å kunne navigere mellom blant annet fakta, prosedyrer, konsepter og løsninger og slik se hvordan ting henger sammen. Når elevene blir stilt spørsmålet "What conclusion can we get according to the equation in the box?" i oppgave "Consideration 2" må elevene analysere situasjonen og hente ut fakta, finne ut av hva de har gjort for å komme frem til informasjonen i boksen, se det i sammenheng med konseptet å dividere med hvilken som helst brøk og prøve å finne ut av hvordan alt henger sammen. Elevene må kunne bruke all informasjonen oppgaven gir og resonere seg frem til algoritmen selv. Slik legger oppgaven til rette for læringsmuligheter for matematiske kompetanse i form av adaptiv resonering. Til sammenligning kom ikke læringsmuligheter for denne komponenten av elevenes utvikling av matematisk kompetanse frem i eksempelet fra den norske læreboka på grunn av at elevene får forklart prosessen bak konseptet i stedet for å skal kunne komme frem til algoritmen selv. Det at elevene selv må benytte seg av adaptiv resonering for å kunne løse oppgaven gikk igjen i flere oppgaver i den kinesiske læreboka. I følge en undersøkelse gjort av Xu (2012) skal denne formen for oppgaver være typisk for kinesiske lærebøker. Xu (2012) studerte hvordan innholdet i både tyske, kinesiske og engelske lærebøker ble fremstilt og kom frem til at oppgaver i kinesiske lærebøker ofte ble fremstilt med slike åpne oppgaver med spørrende setninger som vi ser eksempler på i oppgave "Consideration 2".

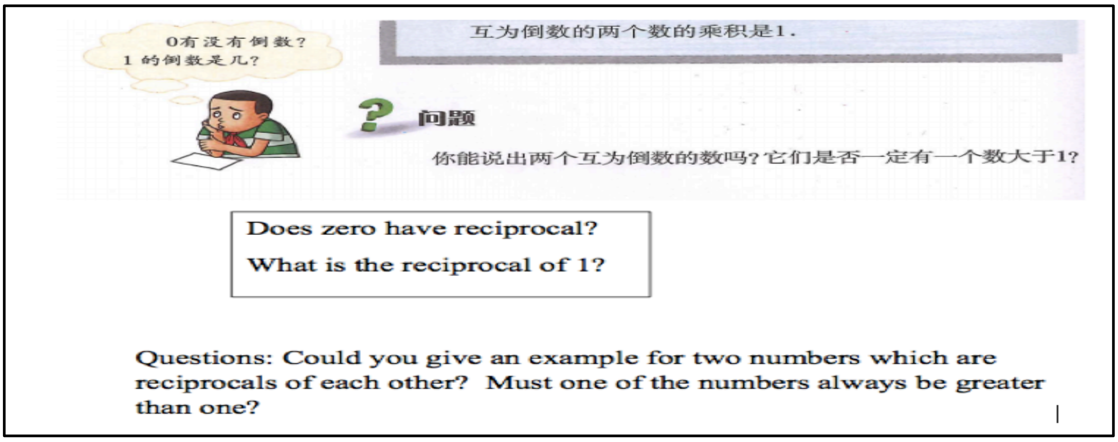
4.2.2 En analyse av oppgaver som inneholder variasjon i prosedyre ved (2) ulike måter å løse problemet på

Analysematerialet viste at bruken av variasjon i prosedyre i form av Gu et al. (2004) (2) ulike måter å løse problemet på la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) definerer som strategisk kompetanse, adaptiv resonering og produktiv disponering.

4.2.2.1 Ved å benytte seg av oppgaver som ikke kan løses ved kun en fremgangsmetode legger oppgaven til rette for læringsmuligheter for matematisk kompetanse i form av strategisk kompetanse, adaptiv resonering og produktiv disposisjon.

Det tredje variasjonsaspektet, innenfor det Gu et al. (2004) beskriver som variasjon i prosedyre, analysematerialet viste var hvordan den kinesiske læreboka benyttet seg av variasjon i form av (2) ulike måter å løse et problem på ved å benytte seg av oppgaver som ikke kan løses ved å kun benytte en løsningsmetode.

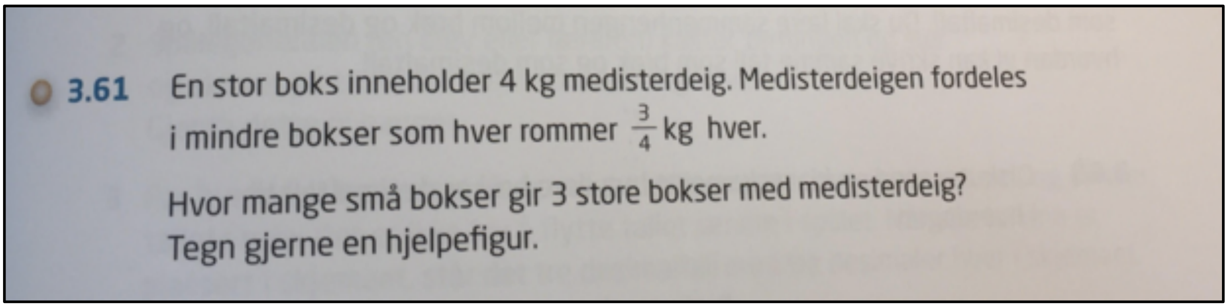
Et eksempel på en oppgave fra den kinesiske læreboka hvor elevene selv må finne en løsningsstrategi er oppgave "Question", vist i Figur 23. Oppgaven ber elevene om å reflektere rundt konseptet resiprok i form av at oppgaven spør om elevene kan komme med et eksempel på to tall som er resiprok av hverandre og om det ene tallet alltid må være større enn en hel. Oppgaven har også en hjelpefigur som spør om tallet 0 har en resiprok og om hva resiprok av tallet 1 er. Elevene har i forkant fått en innføring i hva resiprok er i "Consideration 1", men ikke fått servert noen løsningsstrategi på en slik oppgave.



Figur 23. Figuren viser oppgave ”Question” fra den kinesiske læreboka hvor vi ser et eksempel på variasjon i prosedyre i form av ikke-rutinebaserte oppgaver (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 55)

Det er ikke mulig å løse alle oppgavene i den kinesiske læreboka ved å kun benytte seg av en løsningsstrategi. Noen av oppgavene kan elevene løse med å benytte seg av algoritmen ”å dividere med den omvendte brøken”, men mange av oppgaven er lagt opp slikt at elevene må sette seg inn i oppgavene for å finne ut av hvilken løsningsstrategi som lønner seg å benytte. Slik må elevene selv finne ut av hvordan de skal komme seg frem til et svar på oppgaven.

Til sammenligning viser analysen av oppgavene i den norske læreboka at elevene kan løse alle oppgavene, ved unntak av en oppgave, ved å ta i bruk fremgangsmetoden de ble presentert helt på starten av kapitelet, ”multiplisere med den omvendte brøken”. Oppgaven som skiller seg ut fra de andre oppgavene i den norske læreboka er oppgave 3.61, se Figur 24. Her må elevene først multiplisere 3 med 4 før de kan benytte seg av algoritmen ”multiplisere med den omvendte brøken”. Elevene må sette seg inn i oppgaven i form av analyse teksten og sortere informasjonen for å finne ut av at de må multiplisere 3 med 4.



3.61 En stor boks inneholder 4 kg medisterdeig. Medisterdeigen fordeles i mindre bokser som hver rommer $\frac{3}{4}$ kg hver.

Hvor mange små bokser gir 3 store bokser med medisterdeig? Tegn gjerne en hjelpefigur.

Figur 24. Figuren viser oppgave 3.61 fra den norske læreboka hvor vi ser et eksempel på noe som minner om variasjon i prosedyre i form av ikke-rutinebaserte oppgaver (Tofteberg, Holth, Tofteberg, Grete Normann, & Holth, Børre, 2013 s 174).

Når elevene får muligheten til å løse slike oppgaver hvor de må analysere informasjonen de blir gitt i oppgaven og må bruke informasjonene til å vurdere hvilken løsningsstrategi de kan benytte seg av legger oppgaven til rette læringsmuligheter for utvikling av matematisk kompetanse både i form av konseptuell forståelse, adaptiv resonering, strategisk kompetanse og det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som den siste komponenten av matematisk kompetanse; produktiv disposisjon.

Oppgaven ”Question” i den kinesiske læreboka spør om svaret elevene har kommet frem til alltid må være større enn 1. Ved å bli stilt slike spørsmål må elevene begrunne og slik rettferdiggjøre valgene sine ved å forklare hvorfor eller hvorfor ikke det ene tallet alltid må være større enn 1. Slik bidrar oppgavene til å legge til rette for utvikling av det Kilpatrick et al. (2001) beskriver som adaptiv resonering. Elevene blir da gitt muligheten til å forklare avgjørelsene sine og slik kan adaptiv resonering bli benyttet til å avklare eventuelle misforståelser mellom elever eller lærer elev. Studiet til Zhang et al. (2017) kom også frem til hvordan variasjon i prosedyre bidrar til at elevene må vurdere og ta beslutninger basert på ulike faktorer, noe som de definere som deler av den matematiske kunnskapen matematiske tenkemetoder. Kunnskapen matematiske tenkemetoder har slik en del likhetstrekk med den matematiske komponenten adaptiv resonering.

Slike oppgaver som ”Question” som ikke kun baserer seg på rutine vil i følge Kilpatrick et al. (2001) også bidra til at elever utvikler sin strategiske kompetanse i form av at elevene må selv finne ut av hvilken løsningsstrategi de ønsker å benytte seg av og hvorfor. Elevene kan ikke løse oppgaven ved å kun benytte en memorert algoritme, men elevene må sette seg inn i oppgaven og finne ut av selv hvilken løsningsstrategi som er mest hensiktsmessig å benytte for akkurat dette problemet. Kilpatrick et al. (2001) poengterer også hvordan slike oppgaver som ikke kun er basert på en løsningsmetode bidrar til å legge til rette for utviklingen av komponenten produktiv disposisjon med utgangspunkt i at oppgaven gir elevene muligheten til å erfare lønnsomheten ved å faktisk forstå og ikke kun memorere enn algoritme. Ved å kun memorere en algoritme klarer ikke elevene å løse alle oppgavene de blir presentert for i den kinesiske læreboka, det blir lagt opp til oppgaver i forkant av innlæringen av algoritmen som legger til rette for forståelse for hvorfor algoritmen fungerer. Oppgave ”Question” er et godt eksempel på dette. Fordi oppgaven er bygd på konseptet resiprok som er et av hovedelementene i algoritmen ”å multiplisere med den omvendte brøken” blir elevene nødt til å sette seg inn hva som menes med resiprok før de kan ta i bruk konseptet i algoritmen senere. Studiet til Sun (2011, a) viste, også denne særegenheten ved oppgaver i kinesiske lærebøker. Sun (2011a) kom frem til hvordan slike oppgaver som ikke er basert på kun en løsningsmetode ikke hadde fokus på kun en spesifikk algoritme, men fokus på et pensum ved å benytte flere oppgaver som må løses med ulike fremgangsmetoder.

Oppgave ”Question” er også et godt eksempel på hvorfor jeg har valgt å bruke begrepet potensielle læringsituasjoner og ikke kun læringssituasjoner. Elevene kan fint svare på flere av spørsmålene oppgaven stiller med kun ”Ja” eller ”Nei”, og slik kan elevene unngå å forklare avgjørelsene sine, benytte noen som helst løsningsstrategi eller erfare lønnsomheten ved å faktisk forstå fremgangsmetoden og oppgaven skaper slik liten læringsmuligheten for både adaptiv resonering, strategisk kompetanse og produktiv disposisjon. Her kommer lærerens rolle tydelig inn i bildet og hvilke forventinger og krav læreren har klart å skape rundt arbeid med slike oppgaver blir avgjørende for hvorvidt oppgavens potensial blir benyttet.

5. Drøfting: å variere innenfor variasjonen

Med denne oppgaven har målet vært å kunne svare på forskningsspørsmålet:

”Hvordan legger bruken av variasjon i konsept og prosedyre i oppgaver til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse på temaet divisjon med brøk?”

Med dette avsluttende kapittelet skal jeg oppsummere hovedfunnene i analysedelen og diskutere studiet mitt opp mot tidligere forskning på både tekstbøker og temaet divisjon med brøk. Videre vil jeg rette et kritisk blikk mot valget mitt av forskningsdesign, og helt slutt vil jeg si noe om hvorfor det kan være nyttig å være åpne for å lære av andre kulturer og hva det er vi kan ta med oss fra den kinesiske variasjonspraksisen inn i den norske skolen.

5.1 Mine hovedfunn

Alle hovedfunnene mine vil jeg presenter videre i form av Tabell 4 og Tabell 5, hvor jeg setter funnene av ulike variasjoner i en sammenheng med analyseguiden for variasjon i konsept og prosedyre og de fem matematiske komponentene av matematisk kompetanse. Deretter vil jeg gi en mer omfattende presentasjon av hovedfunnene hvor jeg først tar for meg hovedfunnene for variasjon i konsept og deretter hovedfunnene for variasjon i prosedyre. Til slutt vil jeg presentere en kort oppsummering.

Variasjon i konsept	Ulike variasjoner analysen viste og hvilke komponenter av matematisk kompetanse de ulike variasjonene legger til rette for
(1) Konseptuell variasjon: Variasjon av visuelle og konkrete aspekter ved objekter.	- Variasjon ved bruk av ulike representasjoner legger til rette for den matematiske komponenten konseptuell forståelse - Variasjon ved bruk av ulike tall og tallplasseringer legger til rette for de matematiske komponentene konseptuell forståelse og prosedyremessig flyt
(2) Ikke-konseptuell variasjon: Variasjon ved å ta i bruk objekter som er utenfor konseptet	- Variasjon ved å knytte konseptet opp mot andre konsepter legger til rette for den matematiske komponenten konseptuell forståelse

Tabell 4. Tabellen viser en oversikt over hvilke variasjoner i konsept analysen viste og hvilke matematiske komponenter disse variasjonene legger til rette for

Variasjon i prosedyre	Ulike variasjoner analysen viste og hvilke komponenter av matematisk kompetanse de ulike variasjonene legger til rette for
(1) Ulike steg mot en løsning	- Variasjon ved rettferdiggjøring av algoritmen legger til rette for de matematiske komponentene konseptuell forståelse og adaptiv resonering - Variasjon ved å omgjøre kjente problemer til ukjente problemer legger til rette for de matematiske komponentene konseptuell forståelse og adaptiv resonering
(2) Ulike måter å løse problemer på	- Variasjon ved å benytte oppgaver som ikke er basert på kun en løsningsmetode legger til rette for de matematiske komponentene konseptuell forståelse, strategisk kompetanse, adaptiv resonering og produktiv disponering.

Tabell 5. Tabellen viser en oversikt over hvilke variasjoner i prosedyre analysen viste og hvilke matematiske komponenter disse variasjonene legger til rette for

5.1.1 Hovedfunnene innenfor variasjon i konsept

Analysen viste at bruken av variasjon som går innenfor det Gu et al. (2004) definere som variasjon i konsept i form av (1) konseptuell variasjon la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) definerer som konseptuell forståelse og prosedyremessig flyt ved å variere ulike representasjoner og ulike tall og tallplasseringer. Et hovedtrekk ved de kinesiske oppgavene var at de knytter representasjonene opp mot andre matematiske konsepter og tidligere lært kunnskap, mens de norske oppgavene knytter opp mot dagliglivet. De kinesiske oppgavene benyttet flere variasjonsfaktorer i form av at de for eksempel hadde flere ulike tall og tallplasseringer.

Analysen viste at bruken av variasjon som går innenfor variasjon i konsept i form av (2) ikke-konseptuell variasjon la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av konseptuell forståelse ved å variere med å knytte divisjon med brøk opp mot andre konsept. De kinesiske oppgavene knyttet divisjon med brøk opp mot både multiplikasjon med heltall, multiplikasjon med brøk, inverse operasjoner, resiprok, likninger og det generelle aspektet. De kinesiske oppgavene knytter konseptet slik opp mot en kunnskapspakke, mens de norske oppgavene knyttet konseptet opp mot mer et kunnskapspunkt fordi de ikke benyttet seg av en slik variasjon av andre konsept i samme grad.

5.1.2 Hovedfunnene innenfor variasjon i prosedyre

Analysen viste at bruken av variasjon som går under det Gu et al. (2004) definerer som variasjon i prosedyre i form av (1) ulike steg mot en løsning, la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form av det Kilpatrick et al. (2001) definerer som konseptuell forståelse og adaptiv resonering ved stegvis rettferdiggjøring av algoritmen og stegvis omgjøring av kjent kunnskap til ukjent kunnskap. Analysen fikk frem de ulike kunnskapsstegene som Gu et al. (2004) beskriver som ”Pudian”, vestens ”Scaffolding”, en måte å bygge opp oppgavene på som er karakteristisk for oppgaver i kinesiske lærebøker. De kinesiske oppgavene tok utgangspunkt i tidligere kjent kunnskap hos elevene og bygde stegvis videre på denne kunnskapen opp mot ny kunnskap. Analysen fikk også frem hvordan disse kunnskapsstegene bidro til ulike potensielle avstander som igjen la til rette for ulike læringsmuligheter opp mot matematisk kompetanse. Denne formen for variasjonen var det kun den kinesiske læreboka som viste. De kinesiske oppgavene la opp til at elevene skulle komme frem til kunnskapen selv, i dette at man kunne multiplisere med den omvendte brøken, mens de norske oppgavene presenterte fremgangsmetoden først og kom med en forklaring på algoritmen i etterkant.

Analysematerialet viste at bruken av variasjon som går under variasjon i prosedyre i form av (2) ulike måter å løse problemet på la til rette for potensielle læringsmuligheter med tanke på matematisk kompetanse i form konseptuell forståelse, strategisk kompetanse, adaptiv resonering og produktiv disponering ved å benytte oppgaver som ikke kan løses ved å kun benytte en fremgangsmetode. Denne variasjon var det også nesten utelukkende den kinesiske læreboka som viste. Ved å benytte en slik form for variasjon gir de kinesiske oppgavene elevene mulighet til å selv avgjøre og finne ut av hvilken løsningsstrategi de tenker er mest hensiktsmessig å bruke, mens de norske oppgavene legger opp til at den samme løsningsstrategien skal benyttes på alle oppgavene.

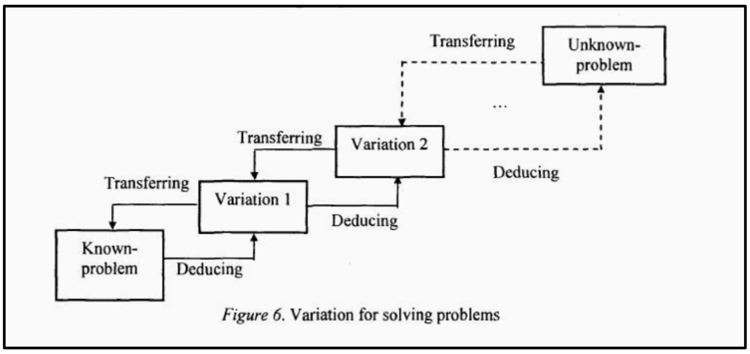
5.1.3 Oppsummering av hovedfunnene

Ut i fra hovedfunnene ser vi at bruken av variasjon som går under variasjon i konsept legger til rette potensielle læringsmuligheter for matematisk kompetanse ved å variere ulike representasjoner, ulike tall og tallplasseringer og med knytte opp mot andre konsept. Bruken av variasjon som går under definisjonen variasjon i prosedyre legger til rette potensielle læringsmuligheter for matematisk kompetanse ved benytte variasjon i form av rettferdiggjøring av algoritme, omgjøring av ukjent problem til kjent problem og oppgaver som ikke kan løses med kun en fremgangsmetode. Analysen viste at disse ulike måtene å variere på skapte ulike læringssituasjoner for matematisk kompetanse. Bruken av de ulike variasjonsaspektene innenfor variasjon i konsept la til rette for læringsmuligheter for de matematiske komponentene: konseptuell forståelse og prosedyremessig flyt, og bruken av variasjon i prosedyre la til rette for læringsmuligheter for de matematiske komponentene: konseptuell forståelse, strategisk kompetanse, adaptiv resonering og produktiv disponering. Med dette ser vi at bruken av variasjon innenfor konsept og bruken av variasjon innenfor prosedyre legger til rette for ulike læringsmuligheter med tanke på de matematiske komponentene ved matematisk kompetanse.

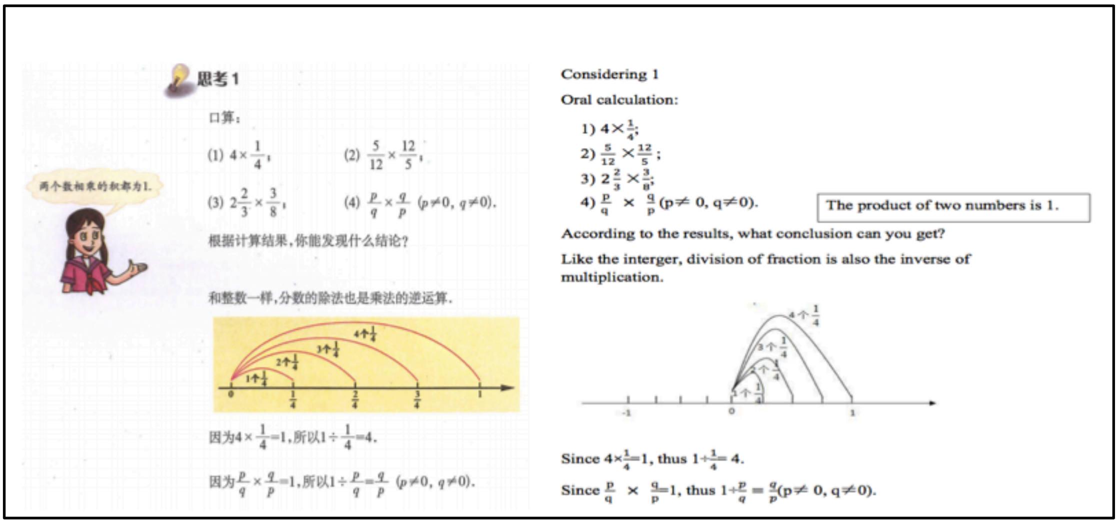
5.2 Å se Gu et al. (2004) sin variasjonspraksis opp mot Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon på matematisk kompetanse

Med utgangspunkt i at det allerede er gjort flere studier med bakgrunn i Gu et al. (2004) sitt rammeverk på variasjon kan man diskutere om det er nyttig å gjøre enda flere studier med samme utgangspunkt. Derfor ønsket jeg å se rammeverket i sammenheng med et annet rammeverk som ikke har blitt satt i sammenheng med Gu et al. (2004) sitt rammeverk tidligere. Slik bidrar studiet mitt til å se nye sammenhenger og bekrefte tidligere sammenhenger fra en ny synsvinkel.

Et eksempel på de at studiet mitt bekrefter tidligere funn og ser disse funnene i nye sammenhenger ser vi hvis vi tar for oss Figur 24 hvor vi ser hvordan Gu et al. (2004) viser hvordan man kan bevege seg stegvis fra et kjent problem til et ukjentproblem og omvendt. Ser vi på Figur 26 med et eksempel fra delkapittel 4.2.1.1 ser vi hvordan en slik variasjon i prosedyre i form av (1) ulike steg mot en løsning også kom frem som et funn i analysen. Analysen får frem videre hvordan en slik variasjon bidrar til å legge til rette for potensielle læringsmuligheter for matematisk kompetanse.



Figur 25. Figuren viser en kopi av Figur 4 fra teorikapittelet hvor figuren viser hvordan man kan variere med "scaffolding" ved å stegvis omgjøre et kjent problem til ukjentproblem og omvendt (Gu et al. 2004 s 322)



Figur 26. Figuren viser en kopi av Figur 5 fra analysen hvor figuren oppgave ”Consideration 1” fra den kinesiske læreboka vi ser er eksempel på variasjon i prosedyre i form av omgjøring av kjent kunnskap til ukjent kunnskap (Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee, 2005 s 54

Det analysen min bidrar med her er å bekrefte funn fra Gu et al. (2004) sitt studie og sette denne formen for variasjon i sammenheng med Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk på matematisk kompetanse. Det å sette de ulike eksemplene på variasjon i sammenheng med de ulike komponentene av matematisk kompetanse utgjør at man får sett variasjonspraksisen fra en ny synsvinkel og får et enda mer reflektert forhold til bruken av variasjon når det kommer til oppgaver og da spesifikt på temaet divisjon med brøk.

Det samme ser vi om vi tar for oss Figur 2 fra teorikapittelet som omhandler å bruke flere representasjoner til gå fra et konkret situasjon til et abstrakt konsept og Figur 5 i delkapittel 4.1.1.1 som viser en slik variasjon i konsept i form av (1) konseptuell variasjon, og om vi ser på Figur 3 fra teorikapittelet som omhandler det å variere med konsept utenfor konseptet slik at man får en sammenheng mellom ulike konsept, og opp mot Figur 10 og Figur 11 fra delkapittel 4.1.2.1 som viser to forskjellige oppgaver som benytter seg av variasjon i konsept i form av (2) ikke-konseptuell variasjon.

5.3 Mitt studie opp mot tidligere forskning på tekstbøker

Denne oppgaven setter den omdiskuterte variasjonspraksisen til Kina inn i en norsk undervisingssetting hvor man får sett en norsk lærebok opp mot en undervisingskultur som har som tradisjon å skape elever med svært gode resultater. Slik får vi sett på hvilke momenter av variasjon den kinesiske læreboka benytter som den norske læreboka eventuelt inneholder eller ikke. Oppgaven får bekreftet funn fra tidligere forskning som går på særegenheten til kinas variasjonspraksis med enda flere eksempel og får satt variasjonspraksisen i sammenheng med rammeverket til Kilpatrick et al. (2001). Som nevnt tidligere kan oppgaven slik bidra til en enda mer reflektert forhold til bruken av variasjon i undervisningssammenheng.

5.2.1 Min analyse opp mot studie til Sun (2011a)

I analysen så vi det Sun (2011a) kom frem til hvordan kinesiske oppgaver varierer ulike kriterier i oppgaver, i dette tilfellet tall og tallplasseringer, til å solidgjøre det nye konseptet og slik bidra til læringsmuligheter for en bedre konseptuell forståelse. Analysen fikk også frem det som påpekes som et generelt trekk ved kinesiske lærebøker, at de vektlegger det å jobbe parallelt med flere konsept samtidig for skape sammenhenger og se generelle relasjoner, og at det er typisk for europeiske lærebøker å gjøre seg ferdig med et tema før de beveger seg videre til et annet. Slik fikk vi sett hvordan de kinesiske oppgavene fikk frem det Sun (2011a) beskriver som en kunnskapspakke og ikke kun et kunnskapspunkt. I tillegg så vi hvordan oppgavene hadde et fokus på rettferdiggjøre prosedyren bak algoritmen og ha fokus på et pensum og ikke kun memorering av en algoritme, noe som Sun (2011a) påpeker som en av rollene ved slike oppgaver med variasjon i løsningsmetodene.

5.2.2 Min analyse opp mot studie til Zhang et al. (2017)

Analysen viste at oppgaver med variasjon i konsept og variasjon i prosedyre la til rette for ulike læringsmuligheter. For å skape læringsmuligheter for den matematiske komponentene prosedyremessig flyt viste analysen at det krevdes variasjon i konsept og for å skape læringsmuligheter for de matematiske komponentene strategisk kompetanse, adaptiv resonering og produktiv disponering viste analysen at det krevdes oppgaver med variasjon i prosedyre. Studiet til Zhang et al. (2017) viste også hvordan bruk av variasjon skaper ulike læringsmuligheter. Analysen deres viste at bruken av variasjon i prosedyre er vesentlig for å utvikle forståelse for deler av det de definerer som matematiske kunnskap. For å utvikle det de momentene av matematisk kunnskap som Zhang et al. (2017) beskriver som matematiske ferdigheter og matematiske tenkemetoder er variasjon i prosedyre en avgjørende faktor i undervisningen. Studiet deres viste at det var i stor grad eller utelukkende bruk av variasjon i prosedyre når oppgavene la til rette for læringsmuligheter for forståelse av disse to kunnskapene. Det som skilte mine resultater fra deres var det at min analyse kom frem til at for å bygge sammenhenger mellom ulike konsept ble det benyttet variasjon i konsept i form av (2) ikke-konseptuell variasjon, mens resultatene til Zhang et al. (2017) viser at for å bygge slike sammenhenger og kunnskapsnettverk ble det benyttet variasjon i prosedyre. Det at vi kan vise til ulike resultater kan både komme av at vi har tolket Gu et al. (2004) sitt rammeverk ulikt, altså at vi har tolket definisjonen på variasjon i konsept og variasjon i prosedyre forskjellig, og på grunn av deres analyse er basert på ni forskjellige kinesiske læreverk og min analyse er kun basert på et kinesisk læreverk og et norsk. Dette skal jeg videre utdype under delkapittelet som omhandler kritikk rundt valget av forskningsdesign.

5.4 Mitt studie opp mot tidligere forskning på temaet divisjon med brøk

Fokuset og min interesse for denne oppgaven har lik så mye vært på det generelle ved bruk av variasjon i oppgaver som det spesifikke temaet divisjon med brøk, men for å kunne ta for meg bruken av variasjon var det hensiktsmessig å knytte det opp mot et tema for å ha noe spesifikt å se på. Analysen fikk frem flere aspekter ved innlæringen av divisjon med brøk som det er nyttig at vi som lærere har et reflektert forhold til når vi skal undervise temaet. Likt som analyseresultatene mine poengterer Ma (2010) og Li (2008) at innlæringen av temaet divisjon med brøk er komplekst i form av at flere andre konsepter bør og kan undervises parallelt for å knytte sammenhenger og få frem generelle aspekter ved konseptet. Både Ma (2010) og Li (2008) får frem viktigheten av å danne en slik kunnskapspakke og ikke kun et kunnskapspunkt. Dette viste analysen at de kinesiske oppgavene la til rette for ved å variere med å knytte konseptet opp mot flere av kunnskapene i Ma (2010) sin kunnskapspakke på temaet divisjon med brøk. Studiet mitt bidrar med å komme med spesifikke eksempler på hvordan man kan benytte seg av variasjon innenfor både det Gu et al. (2004) definerer som variasjon i konsept og variasjon i prosedyre når man skal la elevene jobbe med oppgaver. Studiet bidrar også med å få sett innlæringen av temaet divisjon med brøk fra to kulturelle synsvinkler, hvor den ene kulturen har tradisjon med å produsere elever med svært gode internasjonale resultater. Slik settes studiet fokuset på hva vi i den norske skolen kan ta med oss fra den kinesiske variasjonspraksisen når vi skal undervise temaet divisjon med brøk.

5.5 Kritikk til valget mitt av forskningsdesign og forslag til videre forskning

Gjennom mitt studie har jeg tatt for med et lite kapittel i to lærebøker som består av mye mer enn bare disse kapitlene. Slik kan det argumenteres for at lærebøkene kan, og helt sikkert, inneholder mange variasjonsaspekt, som igjen skaper mange potensielle læringsmuligheter, som ikke er kommet frem i løpet av denne oppgaven. Hadde jeg tatt for meg flere lærebøker og slik fått analysert mange flere oppgaver innenfor samme tema hadde jeg mest sannsynlig fått frem flere variasjonsaspekt og slik fått vist enda flere likhetstrekk ved resultatene til både Sun (2011a) og ikke minst Zhang et al. (2017) som har basert forskningen sin på seks hele lærebøker. Målet med oppgaven var ikke å finne flest mulig variasjonsaspekt, men å se på et lite avgrenset tema og se på hvordan variasjonen i oppgavene la til rette for læringsmuligheter for akkurat dette temaet. Dette handler både om oppgavens tidsomfang og om at jeg har prøvd å unngå å kun se på forskjellers og likheter på overflaten av lærebøkene, men heller prøvd å gå i dybden av oppgavene. Dette er noe, som nevnt tidligere, Li et al. (2009) etterlyser ved tidligere forskning som et mer finjustert verktøy som går dypere enn å kun se på forskjeller og likheter i hvordan en lærebok har presenterer et tema.

For videre forskning hadde det vært interessant å gå enda dypere og videre med fokus på oppgaver å la noen norske lærere testet ut et sett med oppgaver som ikke er basert på en spesifikk fremgangsmetode i en norsk klasse. Deretter hadde det vært interessant å fått høste deres erfaring rundt en slik måte å jobbe med temaet divisjon med brøk. Det hadde vært interessant å fått sett på deres erfaring og refleksjon rundt bruken av variasjon i oppgaver både før og etter en slik uttesting. Det hadde vært interessant å satt fokuset på denne typen oppgaver nettopp fordi dette er noe som kjennetegner den kinesiske variasjonskulturen og noe som den norske læreboka ikke inneholdt.

5.6 Didaktiske implikasjoner

Ved å studere kinas variasjonspraksis ga det meg muligheten til å få et innblikk i en urgammel og tradisjonell undervisningsmetode som er bygd på andre undervisingsprinsipper enn her hjemme. Ved å sammenligne en kinesisk lærebok og en nyere oppdatert norsk lærebok ga det meg muligheten til å se på det særegne med variasjon aspektet i den kinesiske variasjonskulturen og slik se på hvilke læringsmuligheter som skapes med en slik variasjonskultur sammenlignet med nyere norsk lærebok.

"The fish is always the last one to understand water" Runesson, U., & Mok, I. (2005, s 1). Ordtaket sier noe om fordelene ved å sammenligne to ulike kulturer og får frem hvordan slike sammenligningsstudier kan være med på å få frem en bedre forståelse for matematikkundervisningen i de respektive landene *(*Runesson, U., & Mok, I., 2005). Ved å ta studere to lærebøker, fra to forskjellige læringskulturer, har jeg erfart det Sun (2011a) påpeker om hvordan ulike utdanningssystemer kan lære av hverandre og hvor nyttig det er så se på andre læringskulturer med et åpent sinn om hva vi kan ta med oss av nyttig lærdom inn i vår egen undervisningspraksis. Ved å sammenligne den norske læreboka med en lærebok fra en annen kultur erfarte jeg viktigheten av å ha et bevisst og reflektert forhold til læringsmateriellet vi benytter oss av. Særegenheten ved den kinesiske variasjonskulturen utgjorde at jeg ble mer bevisst på at ved å kun benytte oss av et læringsmateriell, selv om det skal være helt nytt og oppdatert, kan vi gå glipp av gode potensielle læringsmuligheter for elevene våre.

"I en lærende skole vil empiriske forskningsfunn være grunnlaget for lærernes pedagogisk refleksjon, fortolkning og faglige veivalg." (Utdanningsdirektoratet, 2017 s 125) Med min masteroppgave med fokus på hvilke læringsmuligheter som skapes med variasjon i oppgaver vil resultatene mine kombinert med tidligere forskning være med å bidra til at lærere blir med reflekterte ovenfor sine pedagogiske refleksjoner, fortolkninger og faglige veivalg slik Utdanningsdirektoratet (2017) beskriver det. Skal vi tro både Hierbert et al. (1997) og Utdanningsdirektoratet (2017) rett så handler lærerens rolle nå om å tilrettelegge for læring, noe som innebærer blant annet å velge ut oppgaver elevene skal løse. Forskningsresultatene mine kombinert med forskningsresultatene til Zhang et al. (2017) viser at når vi velger ut oppgaver til

elevene våre må vi forsikre oss om at de både får muligheten til å løse oppgaver med variasjon i konsept og oppgaver med variasjon i prosedyre, nettopp fordi disse variasjonsaspektene skaper ulike læringsmuligheter. Vi som lærere må ha et reflektert forhold til hvilken type variasjon oppgaven inneholder og hvilke potensielle læringsmuligheter vi igjen da legger til rette for hos elevene våre. En slik bevissthet rundt bruk av variasjon i oppgavene blir ekstra viktig for oss lærere i skoler som ikke har læreverk som bygger nettopp på denne typen variasjon. Vi blir nødt til å selv ta ansvar for at elevene våre får muligheten til å løse oppgaver med slike læringsmuligheter og kan ikke blindt stole på at læreverkene har tatt disse forholdene i betraktning når de har lagd og valgt ut oppgaver, nettopp fordi vi ikke har en tradisjon for en slik variasjonspraksis i den norske skolen.

6. Referanser

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., & Bell, R. (2011). *Research methods in education.* London: Routledge.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: D. C. HEATH & CO.

Economic Co-operation and Development (OECD) (2016) *PISA 2015 Results in focus. Hentet 15.06.17 fra:* http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf

Fan, L., Zhu, Z., & Miao, Z. (2013) Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45, (5), 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x

Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with Variation: A Chinese Way of Promoting Effective Mathematics Learning. I F. Lianghuo, W. Ngai-Ying & C. Jinfa (Red.), *How Chinese Learn Mathematics: perspectives From Insiders* (pp. 309-347). Singapore: World Scientific.

Hiebert, J. (1997). *Making sense : Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up- Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

Li, Y. (2008). What Do Students Need to Learn about Division of Fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 546-552.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of frection division. *ZDM Mathematics Education,* 41(6), 809-826. doi: 10.1007/s11858-009-0177-5

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics : Teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the united states* (Anniversary ed., Studies in mathematical thinking and learning). Milton Park, Abingdon, Oxon: Routledge.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren.* Oslo: Universietsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Runesson, U., & Mok, I. (2005). The teaching of fractions: A comparative study of a Swedish and a Hong Kong Classroom. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 10*(2), 1-15.

Shanghai elementary and secondary schooling (including kindergarden) curriculum reform committee (2005). *The nine-year compulsory education textbook: Mathematics, Grade six, Term two (Experimental verion)*. The second edition. Shanghai: Shanghai Educational Publishing House.

Stein, M., & Hiebert, J. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction : A casebook for professional development* (2nd ed. foreword by James Hiebert. ed.). Reston,Va.: National Council of Teachers of Mathematics Teachers College Press.

Stein, K. M., Remillars, J. & Smith, S. M. (2007) How curriculum influences student learning. *Information Age Publishing,* 8, 319-367

Sun, X. (2011a). 'Variation problems' and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 65–85. doi: 10.1007/s10649-010-9263-4

Sun, X (2011b) An Insider´s Perspective: "Variation Problems" and Their Cultural Grounds in Chinese Curriculum Practice. *Journal of Mathematics Education* 4(1), 101-114.

Sun, X. (2013). THE FUNDAMENTAL IDEA OF MATHEMATICAL TASK DESIGN IN CHINA: ORIGIN AND DEVELOPMENT. *ICMI STUDY 22: Task design in mathematics education*, 1-22

Tofteberg, Holth, Tofteberg, Grete Normann, & Holth, Børre. (2013). *Maximum : Matematikk for ungdomstrinnet : [8. trinn] Grunnbok* (Bokmål[utg.]. ed.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Utdanningsdirektoratet (2017). *Statistikk om grunnskolen.* Hentet 15.06.17 fra: https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/tema/elever-og-ressurser-i-grunnskolen/

Utdanningsdirektoratet (2017). *Læreren som leder. Hentet 01.08.17 fra:* https://www.udir.no/Upload/Rapporter/forebyggende_innsatser/5/Forebyggende_innsatser_larer_som_leder.pdf

Xu, B (2012) The analytical framework of analyzing inquiry content in senior high school mathematics textbooks and its preliminary. *Curriculum, Teaching and Method*, 10, 35-40.

Zhang. J., Wang. R., Huang. R & Kimmins. D. (2017). Strategies for Using Tasks in Selected Mathematics Textbooks in China. D. Huang, R., & Li, Y. (red.), *Teaching and learning mathematics through variation : Confucian heritage meets western theories* (s. 213-240). Rotterdam: Sense