Siri Halaas Johnsrud

Elevers modelleringsruter

En kvalitativ studie av tre elevers modelleringsruter i arbeid med modelleringsoppgaver

Masteroppgave i matematikkdidaktikk
Trondheim, mai 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Fakultet for samfunns- og utdanningsvitenskap
Institutt for lærerutdanning

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på min lærerutdanning i Trondheim. Det har vært en utfordrende og lærerik prosess. Jeg har lært mye om det å lese og oppdatere meg på litteratur i matematikkdidaktikk og skrive en så stor oppgave.

Under en krevende prosess er det mange som fortjener en takk. Først vil jeg takke lærer og elever som har stilt opp slik at jeg har fått gjennomført datainnsamlingen. Jeg vil takke veilederen min, Per Gunnar Østerlie, som har gitt gode råd, tilbakemeldinger og oppmuntringer gjennom hele arbeidet. Videre vil jeg takke medstudenter som med mye humor, sarkasme, lange lunsj- og middagspauser som har holdt stemningen oppe helt til innspurten var over. Spesielt takk til Mari, Trude og Kjersti for stor hjelp underveis. Jeg vil også takke Marie for korrekturlesing, god støtte og mye hjelp.

Tilslutt vil jeg takke venner og familie for god støtte og gode ord gjennom hele perioden.

Trondheim, mai 2018
Siri Halaas Johnsrud

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Før arbeidet med denne studien hadde jeg en del spørsmål. Ser elevene sammenhengen mellom oppgavene de regner i matematikktimene på skolen og matematikken de kan bruke utenfor skolesammenheng? Ser elevene forskjellig på matematikken de lærer på skolen og matematikken de bruker i hjemmet? Er ikke matematikk den samme matematikken uansett konteksten? Jeg har arbeidet med Blum og Ferri (2009) sin artikkel før, og dette arbeidet gjorde meg nysgjerrig på hvordan elever forholder seg til matematikken og virkeligheten før, under og etter arbeidet med matematikkoppgaver. Blum og Ferri (2009) har hentet modellen de bruker i sin artikkel hos Blum og Leiss som i sin artikkel refererer til syklusmodellen som en velkjent modell (Blum & Leiss, 2006). I disse artiklene arbeider elevene med modelleringsoppgaver i matematikk.

I rapporten til Ludvigsenutvalget står det at det er et behov for å heve kompetansen hos elevene i blant annet kreativitet, innovasjon, kritisk tenking og problemløsning. Disse behovene er ikke forbeholdt fremtidige akademiske yrker og profesjoner med teoretisk orienterte arbeidsoppgaver. Også fremtidige fagarbeidere vil ha behov for å finne nye løsninger, gjennomføre ideer i praksis og gjøre kritiske vurderinger i det praktiske arbeidet de skal gjennomføre (NOU 2015: 8, s. 21). I problemløsningsoppgaver i matematikk inngår ofte modellering som strategi. Elevene blir nødt til å lage en modell, der kompleksitetsnivået varierer, for å løse oppgaven. Under realistisk matematikkundervisning gjøres det *modelleringer* ved at en tar utgangspunkt i den virkelige verden rundt, og finner en matematisk måte å forholde seg til problemet på (Schou, Skott, Jess & Hansen, 2008).

I Ludvigsenutvalgets rapport heter det at eleven skal trene på å bruke faglig kunnskap i ulike sammenhenger, både alene og i grupper. Det forventes også at eleven har en aktiv rolle i undervisningen (NOU 2015: 8, s. 75-76). Denne utviklingen, undervisningen ved at det forventes at elevene er aktive, kan tyde på at en ønsker at elevene skal gjøre om kunnskapen og ferdighetene de tilegner seg om til sitt eget, slik at de forhåpentligvis ved senere anledninger kan benytte seg av denne kunnskapen. Videre er målene i undervisningen at en tar i bruk det elevene har lært i ulike sammenhenger. For å kunne gjøre dette er det nyttig om elevene er bevisste hensikten med det de lærer og hvilke læringsstrategier som er gunstige i de ulike fagene. Elevene må involveres i læringsprosessen, slik at de selv kan vurdere eget arbeid og kompetanse. På sikt kan et slikt arbeid med egenvurderinger, og felles diskusjoner om hva som kjennetegner godt arbeid i ulike fag, bidra til at elevene utvikler seg på selvregulert læring og evne til metakognisjon (NOU 2015: 8, s. 75-76). Å bruke kunnskapen i ulike sammenhenger kan være gunstig for elevene for å få et eierforhold til det, og for å kunne benytte seg av kunnskapen i praktiske sammenhenger senere i livet. For eksempel ved kjøp av bolig. Her trenger elevene å ha kunnskap om lån, renter og prosent. Et annet eksempel er hvis dette huset skal males og en må beregne hvor mange liter maling en trenger etter størrelse på huset ved areal.

1.2 Tre ulike måter å forholde seg til modellering

Som en innledning i kapittelet *Matematiske modeller og modellering – Hvad er det, og hvorfor undervises der i dem?* skriver Schou, Skott, Jess og Hansen (2008) at en av hensiktene med kapittelet er at leseren skal kunne skille mellom ulike måter å bruke begrepet «matematisk modell» på. D*en første måten å forholde seg til modellering* har å gjøre med matematiske modeller i alle tilfeller der matematikken benyttes for å beskrive eller analysere en situasjon eller et problem fra omverdenen (for eksempel antall elever på skolen, lærerstudenters fagvalg, utviklingen av en kaninbestand og så videre). Den første måten å forholde seg til modellering er et snevert modellbegrep der elevene lager en *modell av* problemet. Schou et al. (2008) definerer *modell av* som den delen i modelleringsprosessen der man utvikler en matematisk tilnærming til problemet som er gitt ved å utarbeide en matematisk modell av situasjonen. *Den andre måten å forholde seg til modellering* har også å gjøre med matematiske modeller når matematikken (en rekke utregninger, en statisk sammenheng, en funksjonsoppskrift) benyttes for å forutsi eller bestemme hvordan et bestemt problem skal håndteres eller en gitt situasjon kan utvikle seg videre. Den andre måten å forholde seg til modellering er et bredt modellbegrep der elevene utvikler en modell fra å være en modell av en bestemt situasjon til å bli en *modell for* å beskrive situasjonen generelt. Schou et al. (2008) definerer *modell for* som den delen i modelleringsprosessen der den første modellen av en gitt situasjon er utviklet og kan brukes i nye situasjoner og sammenhenger. En modell av en gitt situasjon kan på denne måten få et eget liv og bli et verktøy for å bruke som en modell for å finne ut av nye problemer. *En tredje måte å forholde seg til modellering* på er i undervisning. Elevene bør først beherske noen prinsipielt anvendelige matematiske begreper og teknikker, for så å benytte seg av disse begrepene og teknikkene utenfor matematikktimene (Schou et al., 2008). Det tredje forholdet er hele prosessen ovenfor betraktet som en helhet, altså ikke begrenset til en og en modell, men flere modeller som illustrerer en rekke av måter å symbolisere og forholde seg til den gjeldende situasjonen på (Schou et al., 2008). Denne studien tar utgangspunkt i den tredje måten å forholde seg til modellering på. Elevene må benytte en utvidet modell for å kunne revidere modellen sin, og forsøke å finne en generell modell som er utvikles for å kunne brukes i nye situasjoner og sammenhenger. Elevene kan gå veien om å benytte seg av en modell av situasjonen som utvikles til å være en modell for liknende eller nye situasjoner, men betrakte situasjonen som en helhet.

1.3 Formål og forskningsspørsmål

Hensikten med denne oppgaven er å få mer kunnskap om hvordan elever på 9. trinn arbeider med åpne oppgaver. Jeg er interessert i å finne ut mer om hvordan elevene forholder seg til oppgaver som har en rot i virkeligheten. Hvordan forholder de seg til den virkelige verden og den matematiske verden før, under og etter arbeidet med to åpne modelleringsoppgaver? Er det noen overganger en burde være oppmerksom på? Hvilke modeller lager elevene underveis? Benytter de seg av matematikken de skal ha lært på skolen etter LK06, eller bruker de bare egne erfaringer for å løse de gitte problemene, uten å utvikle noen matematiske modeller for å forenkle eller gjøre utregningene mer presise? Jeg ønsker med denne masteroppgaven å se på modellering i en norsk kontekst. Det meste av forskningen som er gjort på modellering tidligere er gjort i andre land enn Norge og står på engelsk, etter hva jeg har erfart. Jeg ønsker derfor å bidra med forskning gjort i norsk kontekst.

Målet med oppgaven blir å undersøke modelleringsrutene til elevene og identifisere mulige utfordringer i denne prosessen. Sahin og Eraslan (2017) har allerede forsket på når elevene møter vanskeligheter i møte med modelleringsoppgaver, også ved hjelp av Blum og Ferri sin modelleringssyklus. I artikkelen har Sahin og Eraslan har sett på hvordan tankeprosessen til 18 fjerdeklassingers mens de arbeider med et bønneproblem, og hvor de eventuelt møter vanskeligheter i dette arbeidet. I denne studien ønsker jeg å fokusere på hvordan tre niendeklassingers modelleringsruter ser ut i den samme modelleringssirkelen, og ikke deres tankeprosesser underveis. Er det overganger i den virkelige verden eller den matematiske verden som elevene ser på som en utfordring? Hvor er det elevene kunne trengt mer erfaring for å kunne mestre modelleringsoppgaver, med tanke på å utvikle modeller av eller for å arbeide videre med et matematisk problem? På grunnlag av dette har jeg utarbeidet følgende problemstilling: **Hvordan er modelleringsrutene til tre elever i 9. klasse i arbeid med to modelleringsoppgaver?**

For å kunne svare på problemstillingen har jeg utviklet tre forskningsspørsmål:

1. Hvordan ser modelleringsrutene til de tre elevene ut sammenliknet med andre elevers modelleringsruter?
2. Hvilke blokader er det elevene eventuelt møter på underveis i arbeid med oppgavene?
3. Hva skal til for å utvikle elevenes modelleringskompetanse?

Det tredje forskningsspørsmålet er med for å svare på hvordan elevene kan utvikle modelleringskompetansen sin, og svarer ikke på problemstillingen direkte. I likhet med virkelighetsnære oppgaver må modelleringsoppgaver ha en rot i virkeligheten, men det finnes også andre krav til en modelleringsoppgave. I tillegg til å ha rot i virkeligheten må modelleringsoppgaver gi elevene muligheten til å utvikle en eller flere modeller for å løse problemet. Lesh, Cramer, Doerr, Post og Zawojewski (2003) har utviklet seks kriterier for å kunne si at en oppgave er en modelleringsoppgave. Disse seks kriteriene vil jeg presentere i kapittelet begrunnelse av valgte oppgaver.

Modelleringssirkelen er en modell utviklet av Blum og Leiss (Blum & Leiss, 2006). Den handler om to separate verdener, en virkelig verden og en matematisk verden. Elevene får en modelleringsoppgave som tar utgangspunkt i den virkelige verden. Elevene er nødt til å utvikle matematiske modeller, eller i det minste benytte seg av matematikk for å løse problemet. Modelleringssirkelen viser sju steg for å løse en modelleringsoppgave. Disse stegene vil jeg forklare nærmere når jeg presenterer modelleringssirkelen i teori- og analysekapittelet.

1.4 Metode

Siden denne oppgaven dreier seg om hvordan tre elever beveger seg mellom den virkelige og den matematiske verden, følte jeg det var naturlig å velge en kvalitativ metode der jeg observerte tre elever mens de arbeidet med to modelleringsoppgaver. Jeg har valgt å observere en gruppe fordi jeg tenkte at trinnene i modelleringssirkelen kommer lettere frem når elevene kommuniserer med hverandre underveis under problemløsingen. Begge modelleringsoppgavene jeg har gitt elevene for å samle inn datamateriale er hentet fra boken *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Henning & Keune, 2007). Senere i oppgaven vil jeg begrunne hvorfor disse to modelleringsoppgavene oppfyller de seks kriteriene Lesh m. fl. har utviklet for å kunne kalle en oppgave for en modelleringsoppgave. For å få utfyllende svar på hvordan elevene tenker når de arbeider med oppgavene har jeg gjennomført et ustrukturert gruppeintervju med oppfølgingsspørsmål etter arbeidet med oppgavene. Jeg hadde på forhånd utarbeidet en intervjuguide for å gjennomføre et ustrukturert gruppeintervju etter at elevene hadde arbeidet seg ferdig med modelleringsoppgavene. Før observasjonen og intervjuet var jeg tilstede i elevenes ordinære undervisning, der jeg fikk dannet meg et inntrykk av hvordan de arbeidet med matematikkoppgaver i klasserommet. I tillegg var det et poeng at elevene skulle bli bedre kjent med meg, slik at de forhåpentligvis ville åpne seg mer og arbeide med oppgavene naturlig selv om jeg var tilstede. Elevene fikk også informasjon om hvordan lydopptakene og filmingen skulle brukes i den ferdige oppgaven.

1.5 Oppgavens oppbygning

Oppgaven starter med en begrepsavklaring og en presentasjon av teori og rammeverk. Deretter vil jeg presentere metodekapittelet, med metoder jeg har brukt ved innsamling av datamateriale til oppgaven. Modelleringsoppgavene som er blitt gitt til de tre elevene analyseres i kapittelet begrunnelse av valgte oppgaver. Jeg vil ta for meg en analyse av datamaterialet ved hjelp av rammeverket modelleringssirkelen utviklet av Blum og Leiss (2007). Deretter vil jeg diskutere funn opp mot problemstillingen ved hjelp av teori. Tilslutt vil jeg konkludere og komme med forslag til videre forskning.

2 Teorikapittel

I dette kapittelet vil jeg redegjøre for hvilke teorier jeg baserer min studie på. Jeg begynner kapittelet med å se på ulike tilnærminger til modellering før jeg definerer hva som blir lagt i begrepene matematisk modell og modellering i denne studien. Deretter vil jeg presentere ulike tilnærminger til modelleringssirkelen, og modelleringssirkelen som er rammeverket for analysen. Deretter vil jeg introdusere begrepet individuelle modelleringsruter og blokader som kan hindre elevene i å fullføre modelleringsrutene sine. Tilslutt vil jeg presentere fire steg som kan hjelpe elevene i å utvikle sin modelleringskompetanse.

2.1 Matematisk modell og modellering

Kapitlene i boka *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* ble først presentert på konferansen ICTMA-13. ICTMA betyr International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications. Denne konferansen blir gjennomført hvert andre år, og ble første gang arrangert i 1983 hos universitetet i Exeter, England. Lesh og Fannewald (2010) skriver i et introduksjonskapittel til boka at det er stor variasjon i meninger om en hensiktsmessig definisjon av begrepet «modell» i tillegg til en hensiktsmessig måte å tenke på type modelleringsaktiviteter. Noen av deltakerne i konferansen mente at denne manglende tydeligheten var et problem som burde være høyt prioritert blant forskersamfunnet som har hevdet de driver med undersøking av modeller og modellering. Lesh og Fannewald er enige i at dette begrepsrotet ikke er hensiktsmessig, særlig hvis det kompliserer kommunikasjonen mellom medlemmer i forskningssamfunnet. De mener imidlertid at det et heldig med et visst mangfold i det tidlige stadiet av teoriutviklingen, på lik linje med for eksempel idémyldring for ingeniører i tidlige stadier i design av skyskrapere eller transportsystemer (Lesh & Fennewald, 2010). Lesh og Fannewald presenterer en første-illustrasjon definisjon av en modell: «A model is a system for describing (or explaining, or designing) another system(s) for some clearly specified purpose." (Lesh & Fennewald, 2010, s. 7). Lesh og Fannewald skriver videre at en «matematisk modell» og «modellering» er definert flere ganger på ulike måter av ulike forskere i matematikkdidaktikksamfunnet.

2.1.1 Ulike tilnærminger til modellering

Kaiser (2006) har synliggjort ulike tilnærminger til modellering og bruksområder ved hjelp av en tabell. Han har delt opp modellering i fem retninger, der alle retningene legger vekt på forskjellige sider ved matematisk modellering.

Navn på tilnærmingen	Sentrale mål	Relasjoner til tidligere tilnærminger	Bakgrunn
Realistisk eller anvendt modellering	Pragmatisk-funksjonelle mål. For eksempel å løse virkelighetsnære problemer, *forstå* den virkelige verden, og fremme modelleringskompetanse	Pragmatisk tilnærming fra Pollak	Anglosaksisk pragmatisme. Handling og anvendt matematikk
Kontekstuell modellering	Fagrelatert og for eksempel å løse problemer med ord?		
Utdannings- modellering; skiller mellom a) **didaktisk** modellering og b) **begrepsmessig** modellering	Pedagogiske og fagrelaterte mål: a) Strukturering av læringsprosessen og dens utvikling b) Introduksjon og utvikling av begreper/konsepter		Didaktiske teorier og læringsteorier
Kognitiv modellering	Psykologiske mål: a) Analyse av kognitive prosesser som skjer under en modelleringsprosess og en *forståelse* av disse kognitive prosessene b) Utvikling av den matematiske tankeprosessen ved å bruke modeller som mentale bilder eller til og med fysiske bilder eller ved å legge vekt på modellering som en mental prosess slik som abstraksjon eller generalisering		Kognitiv psykologi
Epistemologisk eller teoretisk modellering	Teoriorienterte mål, for eksempel forfremmelse av teoriutvikling		Romansk epistemologi

Tabell 1: Klassifisering av nåværende perspektiver om modellering laget av Kaiser (2006). Min oversettelse av tabellen.

Denne studien tar utgangspunkt i to av disse retningene, både utdanningsmodellering og kognitiv modellering. Selv om alle retningene ovenfor er modellering, har de forskjellige fokus innenfor modelleringen. Rammeverket som blir benyttet i analysen bygger på Blum og Leiss (2006) sin modelleringssirkel, som er innenfor kognitiv modellering der modelleringssirkelen blir brukt som et fysisk bilde for å illustrere en abstrakt mental prosess (Kaiser, 2006). I denne studien er definisjonen som er benyttet for modellering er hentet fra undervisningsmodellering, der Blomhøj (2006) forsøker å utvikle definisjonen av modellering slik at den blir mer anvendelig i undervisningssammenheng (Kaiser, 2006).

Tilnærming	**Klassifisering av papirene og – hvis de er nevnt – teoretisk hovedperson som er referert til**
Realistisk eller anvendt modellering	Haines/Crouch [Kaiser (Pollak)]
Kontekstuell modellering	Sriraman (Lesh & Doerr)
Utdannings-modellering; skiller mellom a) **didaktisk** modellering og b) **begrepsmessig** modellering	Vos (Freudenthal) Lingefjärd Henning/Keune (Niss) [Blomhoj (Niss)]
Kognitiv modellering	Blum/Leiss
Epistemologisk eller teoretisk modellering	Garcia/Ruiz (Chevallard) Dorier (Brousseau)

Tabell 2: Klassifisering av papirene presentert på CERME (Congress of European Research in Mathematics Education) 4 laget av Kaiser (2006). Min oversettelse av tabellen.

De teoretiske hovedpersonene under hver tilnærming til modellering er synliggjort i tabell 2 ovenfor. Blum og Leiss, som har utviklet modelleringssirkelen, blir klassifisert som hovedpersoner i kognitiv modellering av Kaiser (2006). Blomhøj blir klassifisert som en av hovedpersonene under utdanningsmodellering av Kaiser (2006).

2.1.2 Definisjoner av matematisk modell og modellering

I en jungel av definisjoner har jeg valgt å forholde meg til Blomhøj (2006) sine definisjoner av en matematisk modell og modellering. Selv om Blum og Leiss (2007) som danner grunnlaget for analysen klassifiseres som kognitiv modellering av Kaiser (2006) har jeg valgt å benytte meg av Blomhøj (2006) sine definisjoner av en matematisk modell og modellering. Grunnen til dette er at en underkategori av utdanningsmodellering er begrepsmessig modellering – noe jeg tolker som et fokus på å utvikle begreper som kan benyttes ved forskning på modellering.

> «Når matematik anvendes til at beskrive, beregne eller forklare forhold uden for matematikken sker det via en eller anden form for modellering. Det betyder, at der – ganske vist ofte implicit – etableres en relation mellem nogle matematiske objekter og relationer (typisk variable, funktioner, ligninger, grafer) på den ene side og nogle størrelser og sammenhænge, der har mere direkte forbindelse til en fysisk virkelighed på den anden side. En matematisk model er altså ikke blot noget matematik, men derimod en relation mellem visse træk ved og opfattelser af virkeligheden og nogle matematiske objekter og deres indbyrdes sammenhænge» (Blomhøj, 2006, s. 85).

Det vil si at i denne studien vil «modellering» betraktes som matematikk som beskriver, beregner eller forklarer forhold som skjer utenfor matematikken. Blomhøj skriver at ved modellering etableres en relasjon mellom en fysisk virkelighet og matematiske objekter og relasjoner. Det samme gjelder en «matematisk modell» fordi den er ikke ren matematikk, men en relasjon mellom en fysisk virkelighet og matematiske objekter. «Netop det, at modelleringsprocessen konstruerer dens eget objekt, er afgørende for forståelse af matematiske modellers rolle i en didaktisk teori for matematisk modellering» (Blomhøj, 2006, s. 87). Dette sitatet tolkes som at i matematisk modellering er den didaktiske rollen til en matematisk modell å konstruere et matematisk objekt. For å konstruere kunnskap i modellering må en vite at modelleringsprosessen konstruerer egne matematiske objekter.

2.2 Modelleringssirkelen

En modell som kan hjelpe til for å analysere kognitiv tankegang ved arbeid med modelleringsoppgaver er modelleringssirkelen. Denne blir blant annet benyttet av Blum og Ferri (2009). Modellen er utviklet av Blum og Leiss (2006), og er ifølge dem en «ideal-typisk» løsningsprosess. Den ble utviklet i 2006, for å forklare en elevs modelleringsrute, eller kognitive tankeprosess, da eleven skulle løse en oppgave (Blum & Leiss, 2006). Modelleringsprosessen krever en oversettelse mellom forhold utenfor matematikken og beskrivelser, beregninger eller forklaringer ved hjelp av matematikken (Blomhøj, 2006). Modelleringssirkelen er utviklet for å kartlegge denne oversettelsen mellom matematikken og virkeligheten (Blum & Ferri, 2009). Det finnes mange illustrasjoner av modelleringsprosessen (Blomhøj, 2006; Kaiser-Messmer, 1986, s. 83), men Blum og Leiss understreker at forståelse av oppgaven er et eget steg. Det er derfor Maass (2010) ønsker å benytte seg av denne illustrasjonen av modelleringssirkelen i sin egen forskning. Blum og Ferri (2009) refererer til Pollak (1979) for å definere virkeligheten, der virkeligheten er «resten av verden» utenfor matematikken, men som inkluderer naturen, samfunnet, hverdagslivet og andre spesifikke disipliner.

2.2.1 Ulike tilnærminger til modelleringssirkelen

Som nevnt ovenfor finnes det flere tilnærminger til modelleringssirkelen. Nedenfor i tabell 3 har Sol, Giménez og Rosich (2011) sammenliknet modelleringssirklene til Blum og Leiss, Voskoglous og Mason. For å kunne sammenlikne modelleringsrutene elevene i denne forskningen har hatt med forskningen de har gjort har jeg valgt å ta med tabellen de har utviklet fordi den viser en overordnet hypotetisk prosess som de tre modelleringssirklene har til felles.

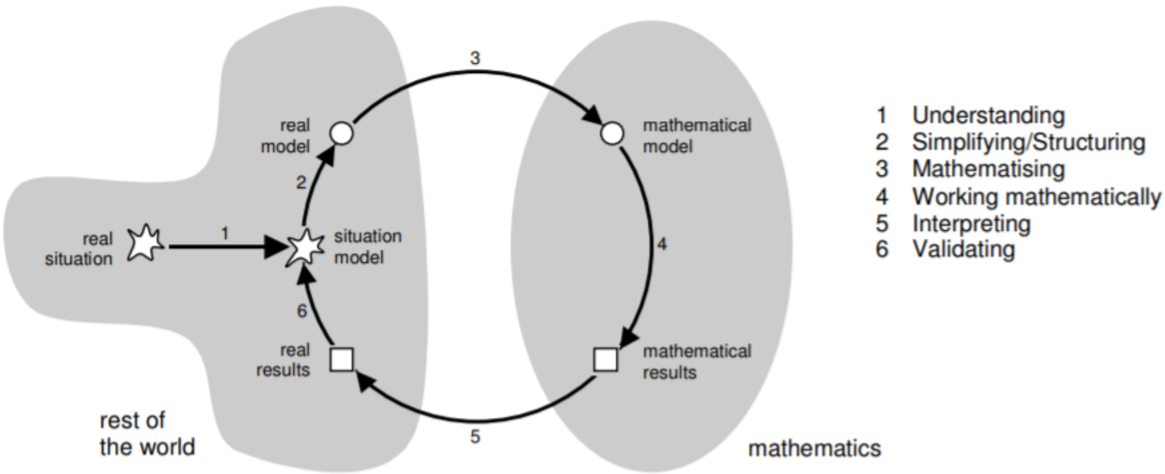
Blum og Leiss' sirkel	**Voskoglous sirkel**	**Masons sirkel**	**Observerbare hypotetiske handlinger**
1, 2	Analyse	Spesifisere	1. Forstå og gjenkjenne et matematisk overkommelig problem 2. Forenkling og strukturering. Gjenkjenne restriksjoner og spesifikasjoner. Ta avgjørelser rundt/om en påstand/mening.
3	Matematisering	Bygge en modell	3. Identifisere objekter og relevante forhold. 4. Velge relevante variabler, skille variablene fra hverandre/fra andre 5. Fastslå antakelser. Å gjenkjenne at en matematisk bakgrunn er tiltrengt. 6. Forklare forhold mellom virkelige objekter og matematisk kunnskap. 7. Sjekke korrelasjonen i et sett med antakelser og matematiske forhold i samsvar med den virkelige situasjonen.
4		Formulere matematisk	8. Fastslå et forhold mellom variabler ved hjelp av et matematisk språk. 9. Formulere hypoteser matematisk. 10. Formulere problemer og/eller underliggende problemer på en matematisk måte.
	Løse og tolke	Finne matematiske løsninger	11. Problemløsningsprosess som inneholder å finne en løsning.
5		Tolke	12. Finne og tolke matematiske løsninger ved hjelp av modellen som er brukt.
6	Validering	Sammenlikne med originalen	13. Gjenkjenne meningen og innholdet i en løsning og konklusjon i den virkelige situasjonen. Elever kan og anslå en modell. 14. Validere modellen. Forandre modellen om det er behov. 15. Reklamere refleksjoner om resultater.
7	---	Skrive en rapport	Kommunisere prosessen og resultatene når modellen er valid.

Tabell 3: Hypotetiske modelleringshandlinger relatert til flere modelleringssykluser laget av Sol et al. (2011).

Disse observerbare hypotetiske handlingene til elevene i modelleringsprosessen er benyttet i forskningen til Sol et al. (2011), og vil brukes i diskusjonskapittelet der elevene møter vanskeligheter med å utføre modelleringssirkelen.

2.2.2 Rammeverk til analysekapittelet

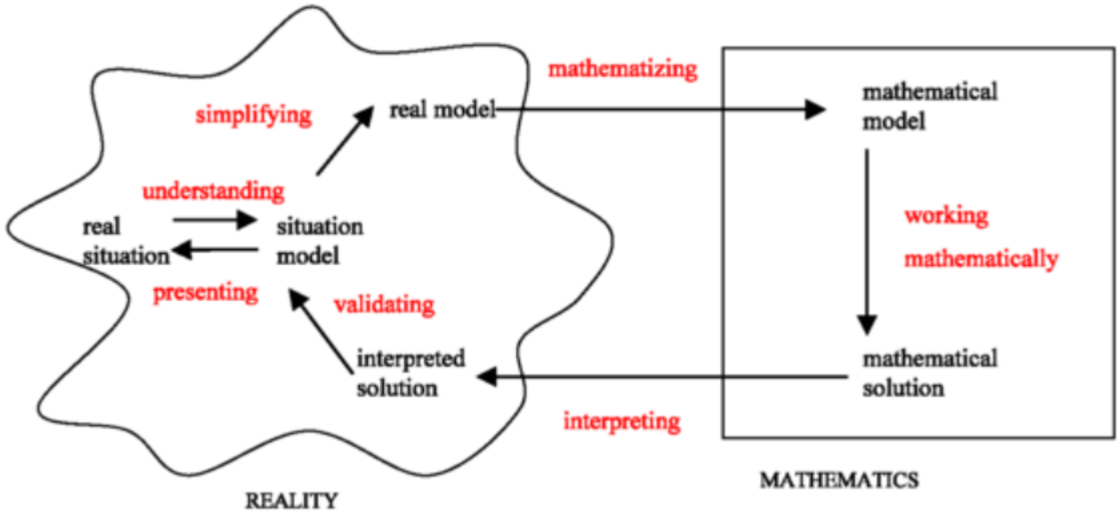
I analysekapittelet i denne studien er det Blum og Leiss sin modelleringssirkel som ligger til grunn (Blum & Leiss, 2006). Modelleringssirkelen viser hvordan elevene kognitivt arbeider med en modelleringsoppgave. Det vil si en hypotetisk *modelleringsrute* for å løse en modelleringsoppgave (se figur 1). Definisjonen av begrepet «modeleringsrute» kommer senere i teorikapittelet. Den består av flere trinn som illustrerer hvordan elevene arbeider med en oppgave fra de får en reell situasjon presentert til de presenterer en løsning de har kommet frem til ved hjelp av å utvikle en virkelighetsnær modell, en matematisk modell for deretter en matematisk løsning som skal valideres. En mer inngående beskrivelse av de forskjellige trinnene vil jeg gå nærmere inn på i kapittel 2.2.3 De ulike begrepene i modelleringssirkelen.



Figur 1: Modelleringssirkelen utviklet av Blum og Leiss (2007)

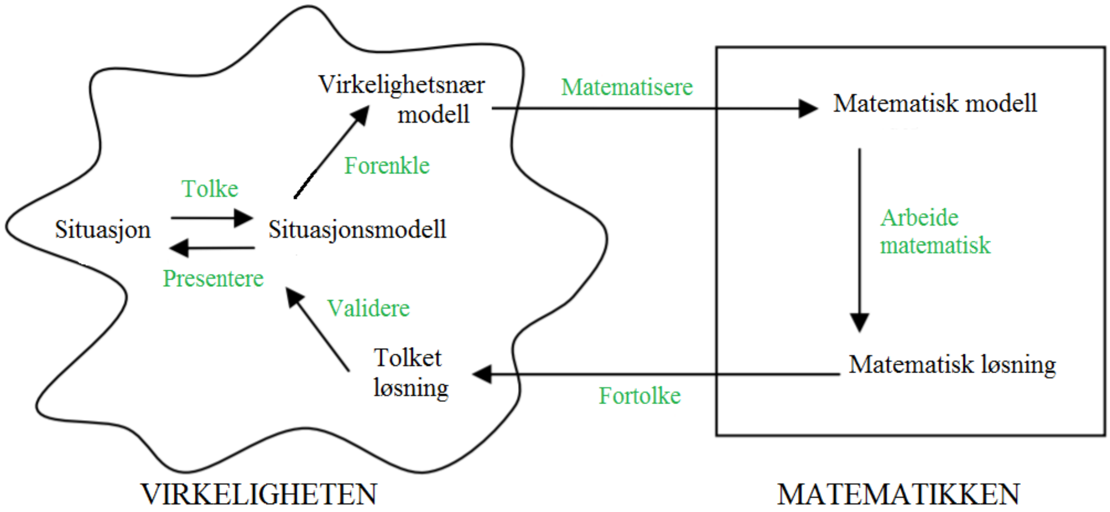
Maass (2010) har videreutviklet modelleringssirkelen ut i fra modelleringssirkelen til Blum og Leiss (Blum & Leiss, 2006). Hun har valgt å benytte seg av modelleringssirkelen til Blum og Leiss fordi hun sier at de understreker viktigheten med å tolke den virkelige situasjonen i et eget steg. Maass mener dette steget er et viktig steg i modelleringssirkelen fordi dette steget har blitt sett på som et spesielt vanskelig steg for elevene, i tillegg til vanskelighetene med steget å lage en virkelighetsnær modell (Maass, 2010). Maass understreker at modelleringssirkelen ikke kan bli sett på som den faktiske modelleringsruten til elevene, men som et idealisert skjema fordi veiene i en modelleringsprosess kan se veldig forskjellige ut

(Maass, 2010). Videre har Maass benyttet seg av modelleringssirkelen til Blum og Leiss, og videreutviklet den i den grad at hun har forandret på estetikken. Hun har skrevet inn de forskjellige trinnene inn i modellen i stedet for å ha de ulike stegene nummerert ved siden av figuren. I tillegg har Maass satt et kvadrat rundt de to modellene i matematikkens verden, og en litt uklar figur rundt den virkelige verden. Hun har også tilført et siste steg: å presentere oppgaven til slutt. Modelleringssirkelen Maass har videreutviklet er illustrert i figur 2.



Figur 2: Modelleringssirkelen videreutviklet av Maass (2010)

Det er ikke store forandringer som er gjort fra Maass sin modelleringssirkel til den jeg har benyttet som et rammeverk. Jeg har oversatt begrepene som blir benyttet i modelleringssirkelen til Maass. Modelleringssirkelen som benyttes i analysekapittelet ser ut som figur 3 som er illustrert nedenfor.



Figur 3: Modelleringssirkelen videreutviklet til rammeverk i denne oppgaven

2.2.3 De ulike begrepene i modelleringssirkelen

I dette delkapittelet vil jeg redegjøre for hva jeg legger i de ulike begrepene i modelleringssirkelen. I følge Maass (2010) begynner hver modelleringsoppgave med en oppgave som er basert på virkeligheten. *Den virkelige situasjonen.* Problemet som blir presentert i en oppgave gitt til oppgaveløseren. For å forstå den virkelige situasjonen må oppgaveløseren gjøre seg kjent med problemet i oppgaven. *Å tolke situasjonen.* Oppgaveløseren gjør seg kjent med problemet i oppgaven. Når oppgaveløseren er blitt kjent med problemet lages det en mental modell av situasjonen hos personen, og det er dette som er situasjonsmodellen. Når problemet blir forstått av oppgaveløseren, blir det konstruert en situasjonsmodell. *Det lages en situasjonsmodell.* En kompleks forståelse av problemet som er presentert. Situasjonsmodellen er ofte så kompleks at oppgaveløseren må strukturere tankene og forenkle modellen i en overgang som kalles forenkling for å få den virkelige modellen. *Å forenkle situasjonsmodellen.* En forenkling og strukturering av tankene rundt situasjonsmodellen. *Det lages en virkelighetsnær modell.* En modell av det presenterte problemet som oppgaveløseren har tolket, forenklet og strukturert. En modell av problemet som blir presentert på oppgaveløserens nivå, med klare formeninger om veien videre for å løse oppgaven. *Å matematisere.* Videre må det skje en matematiseringsprosess der den virkelige modellen blir gjort om til en matematisk modell. Den virkelighetsnære modellen blir introdusert for matematiske elementer. *Det lages en matematisk modell.* En modell av problemet som blir presentert med matematiske elementer. *Å arbeide matematisk.* Manipulasjon av tall som er oppgitt i den matematiske modellen. Arbeid med den matematiske modellen, for eksempel kalkulering, løse likninger og så videre, som føler til en matematisk løsning. *Kommer frem til en matematisk løsning.* Etter et matematisk arbeid får oppgaveløserern en matematisk løsning. Matematikken representerer en løsning på problemet. *Å fortolke.* Denne matematiske løsningen blir så fortolket til en tolket løsning. I denne tolkede løsningen forsøker oppgaveløseren å gi den matematiske løsningen en mening for seg selv. Den matematiske løsningen må tolkes opp mot hva som kan være et rimelig svar i virkeligheten. *Kommer frem til en tolket løsning.* En løsning av problemet som er gitt som kan være reell i en virkelig verden. Kan ofte være mer kjent for oppgaveløseren enn den matematiske løsningen, siden den kan settes inn i en sammenheng. *Å validere.* Oppgaveløseren må bedømme om den matematiske og den tolkede løsningen kan være et gyldig svar, for å se om den passer sammen med den opprinnelige situasjonsmodellen. En må evaluere om løsningen er et svar som kan presenteres som en løsning. *Å presentere.* Til slutt vil hele oppgaven oppgaveløseren har vært igjennom presenteres som den virkelige situasjonen oppgaven tar utgangspunkt i. Prosessen oppgaveløseren har vært gjennom i arbeid med problemet skal presenteres. Hvis løsningen eller den valgte prosessen viser seg å ikke passe inn med oppgaveteksten eller virkeligheten må oppgaveløseren starte hele modelleringsprosessen på nytt, og arbeide seg gjennom de syv stegene igjen.

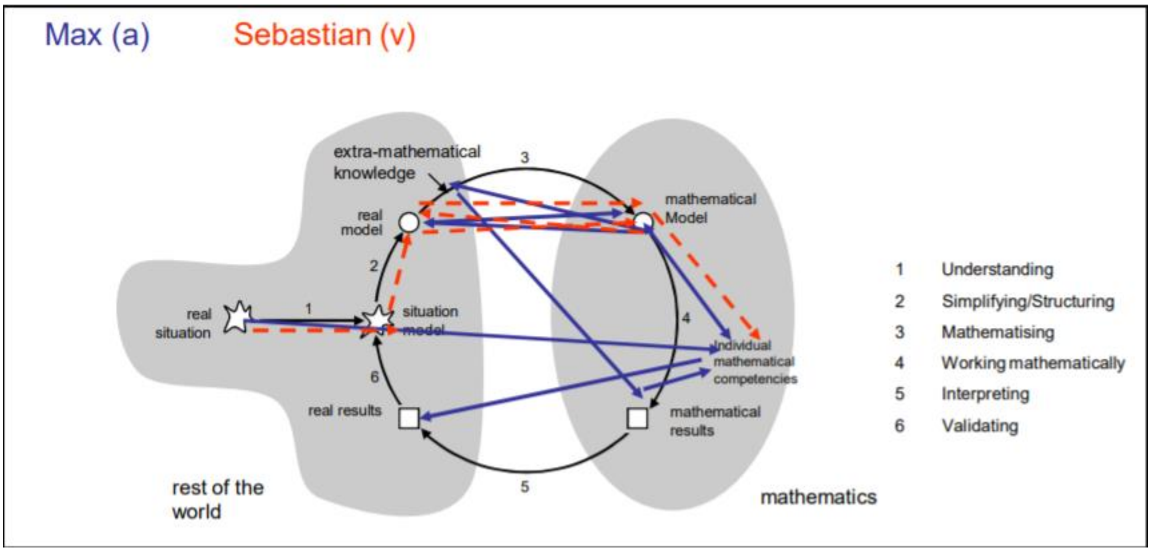
2.3 Mathematical thinking styles og individuelle modelleringsruter

Begrepet modelleringsrute er brukt for å beskrive en spesifikk modelleringsprosess der det refereres til ulike steg som blir gjort i modelleringssirkelen. Modelleringssirkelen blir da et virkningsfullt analyseinstrument. Analyser som Ferri har gjort viser at alle disse stegene kan bli observert, og at de generelt ikke kommer i samme rekkefølge. Det virker som om elever basert på ulike *mathematical thinking styles* (MTS) foretrekker enten å arbeide mer innenfor matematikken eller virkeligheten (Blum, 2011). Ferri (2007) har definert MTS på to måter ved hjelp av to rammeverk. Den første måten hun definerer MTS er som et begrep for å betegne måten et individuelt individ foretrekker å presentere, å opparbeide seg kunnskap om og å tenke gjennom matematiske fakta og sammenhenger ved bruk av intern fantasi og eller eksterne representasjoner. Hun har basert MTS på to komponenter: 1) interne fantasier og eksterne representasjoner og 2) en helhetlig og oppdelt måte å fortsette på. Etter en undersøkelse gjort på 12 elever fra niende og tiendeklasse kunne hun beskrive tre MTS:

1. Visual thinking style (VTS)
2. Analytical thinking style (ATS)
3. Integrated thinking style (ITS)

Etter en spørreundersøkelse utført på de samme elevene kom Borromeo Ferri frem til det andre teoretiske rammeverkets sammenheng: Elever som foretrakk VTS arbeidet lenger med en virkelighetsnær modell eller byttet fra virkeligheten til en matematisk modell oftere enn elever som foretrakk en ATS som var kapabel til å bryte seg vekk fort fra en virkelighetsnær modell og som sjeldent refererte tilbake til konteksten med fakta (Ferri, 2007, s. 261).

Ferri (2007) bruker begrepet modelleringsrute for å betegne den individuelle prosessen på interne og eksterne nivåer. Individene starter prosessen i en viss fase ut i fra hva de foretrekker, for så å gå gjennom ulike faser flere ganger eller bare en gang, med fokus på en fase og ignorerer andre faser (Ferri, 2007, s. 265). Blum og Ferri (2009) har sett på modelleringsrutene til Max og Sebastian, som er illustrert i figur 4. De har beskrevet Max sin individuelle modelleringsrute ved real situation => mathematical model => real model => mathematical model => extra-mathematical knowledge => mathematical result => real results. De har beskrevet Sebastian sin individuelle modelleringsrute ved real situation => situation model => real model => mathematical model => real model => mathematical model (Blum & Ferri, 2009).



Figur 4: Max og Sebastians individuelle modelleringsruter hentet fra Blum og Ferri (2009)

2.3.1 Resultatene i undersøkelse med fokus på individuelle modelleringsruter

Sol et al. (2011) har gjennomført en undersøkelse på en måneds varighet hvor de ser på hvordan elever mellom 12-16 år arbeider med modelleringsoppgaver. På forhånd hadde de skrevet en hypotetisk modelleringsrute (se tabell 3). I deres resultater kommer det frem at flesteparten av modelleringsrutene starter på kategoriene jeg kaller å tolke eller forenkle (Sol et al., 2011). I to av modelleringsrutene som presenteres i analysen starter elevene med å tolke oppgaven, og i to av modelleringsrutene som presenteres starter elevene med å forenkle oppgaven i tråd med funnene til Sol et al. (2011). Resultatene i undersøkelsen til Sol et al. (2011) viser at elevene har vanskeligheter med å formulere situasjoner matematisk. Sol et al. (2011) tolker disse resultatene som at elevene ser på prosjektet som en kjede av små problemer som må løses heller enn et stort sammensatt problem. Altså er ikke elevene klar over modelleringsprosessen som verdensomspennende matematisk prosess, men ser på den som et stort sett med problemløsningsoppgaver. I deres resultater kommer det også frem at flesteparten av modelleringsrutene avsluttes på kategorien som i denne studien kalles å arbeide matematisk ved enten å formulere matematiske problemer og underliggende problemer på en matematisk måte eller ved å gjennomføre en problemløsningsprosess som involverer å finne en løsning. Sol et al. (2011) mener funnet illustrerer en klassisk struktur på en problemløsningsprosess (Sol et al., 2011).

Et annet funn gjort av Sol et al. (2011) er at forklare forhold mellom virkelige objekter og matematisk kunnskap gir elevene vanskeligheter. Elevene kan observere et virkelig objekt, for eksempel når det er snakk om en kakes vekt og form, men objekter som ikke er like konkrete og håndfaste for elevene kan være vanskelig å relatere seg til som et matematisk objekt. Et eksempel på et objekt som ikke er like konkret kan være distanse (Sol et al., 2011). Elevene som er 12-14 år er ikke innom like mange handlinger som det elevene fra 14-16 år gjør. Elevene mellom 12-14 år har også større vanskeligheter med å gjenkjenne variabler og forholdet mellom variablene. Disse elevene trenger også hjelp for å få til de to første trinnene i den hypotetiske handlingsmodellen (se tabell 3). Elevene som er 15-16 år gamle er innom handlingene å velge relevante variabler og forkaste andre variabler, å forklare forholdet mellom virkelige objekter og matematisk kunnskap og fastslå et forhold mellom variabler ved hjelp av et matematisk språk (se tabell 3). Elevene som er 12-13 år gamle er ikke innom disse handlingene. Behovet for å velge relevante variabler og forkaste andre variabler, skjer kun i prosjektene som drives av elevene på 15-16 år (Sol et al., 2011).

Sol et al. (2011) får også resultater som viser at å gjøre antakelser, å forklare forhold mellom et objekt i virkeligheten og matematisk kunnskap, å sjekke kollerasjon i et sett med antakelser og matematiske forhold samsvarende med den virkelige situasjonen er vanskelig for elevene. I tillegg til resultatene at å validere den matematiske modellen og endre modellen hvis det er nødvendig og til slutt reklamere og reflektere rundt resultatene sjeldent skjer modelleringsrutene i deres prosjekt (Sol et al., 2011).

2.4 Blokader som kan hindre elevene i å fullføre modelleringsrutene deres

Det er flere forskere som skriver om elevenes vanskeligheter med modelleringsoppgaver. Jeg skal ta for meg funnene til Blum (2011), Blum (2015), Edo, Ilma og Hartono (2013), Jablonka (2007) og Schaap, Vos og Goedhart (2011). Schaap et al. (2011) har identifisert en rekke ulike blokader elevene kan oppleve i en modelleringsprosess. *Å systematisk skrive ned midlertidige resultater* ble betraktet som en blokade fordi det gjorde det vanskeligere for en elev å formalisere prosessen. *Å gjøre feilaktige antakelser* blir betraktet som en blokade fordi elevene kan ha vanskeligheter med å oversette antakelsen til et matematisk uttrykk, som eleven i undersøkelsen deres som antok at horisonten er lenger unna dersom personen er høyere. *Å ikke gjenkjenne en relevant variabel og å ikke være i stand til å oversette spesifikasjoner fra en relevant variabel over til en annen sammenheng*, ble også identifisert som en blokade. *Å ikke kunne plukke opp problemet i situasjonen* ble betraktet som en blokade fordi elevene i undersøkelsen leter i problemet som er formulert, men ikke forstår hva det blir spurt om. *Manglende algebraiske ferdigheter, å overse viktige elementer i problemteksten, forvirrende problemformuleringer i problemteksten, blokkering i kommunikasjonen, mangel på selvtillit* og *en oppgave som ikke er tiltalende* ble til slutt listet opp som blokader for elevene uten tilknytning til eksempler (Schaap et al., 2011).

Schaap et al. (2011) konkluderer med hvor de ulike blokadene passer inn knyttet til modelleringssirkelen. De har delt det opp i tre faser: å tolke, å strukturere og å formalisere. De har plassert blokadene som er nevnt ovenfor under de tre fasene. I tolkningsfasen har de identifisert *å plukke opp problemet i situasjonen* som de mener er forårsaket av forvirrende problemformuleringer i problemteksten. *Å overse viktige elementer i problemteksten* eller *å forvente hint, retningslinjer og nødvendig data i oppgaveteksten* er også blokader identifisert under tolkningsfasen. I struktureringsfasen har de observert blokadene *å gjøre en feilaktig antakelse* og *å ikke gjenkjenne en relevant variabel*. I formaliseringsfasen har de identifisert *å ikke være i stand til å oversette spesifikasjoner fra en relevant variabel over til en annen sammenheng* og *manglende algebraiske ferdigheter som blokader* (Schaap et al., 2011).

Blum (2015) har identifisert ulike blokader som kan oppstå i de forskjellige stegene i modelleringssirkelen. I steg én, der elevene skal tolke situasjonen og konstruere en situasjonsmodell, er det mange av elevene som står fast fordi de som en del av en skjult læreplan har lært at de kan løse oppgaver de blir tildelt uten for mye innsats som å lese nøye gjennom problemet og tolke konteksten i oppgaven. De plukker heller ut informasjon av teksten og bruker informasjonen i en matematisk modell de kjenner.

> «Instead, they successfully follow a substitute strategy for word problems: «Ignore the context, just extract all data from the text and calculate something according to a familiar schema» (see, e.g., Nesher 1980; Baruk 1985; Schoenfeld 1991; Lave 1992; Reusser and Stebler 1997; Verschaffel et al. 2000; Xin et al. 2007; de Bock, Verschaffel et al. 2010). Schoenfeld and Verschaffel speak of the «suspension of sense-making» when playing the «word problem game». This strategy even becomes more popular with age, and in the school context it may indeed make a lot of sense to follow this strategy in order to pass tests and to survive» (Blum, 2015, s. 79).

Denne strategien fungerer når elevene skal ha en strategi å benytte seg av på for eksempel tester i skolesystemet. Elevene pleier ikke å gjøre antakelser i oppgaver selv, så i steg nummer to mener Blum at å gjøre disse antakelsene gir elevene vanskeligheter. I steg seks er det vanskelig å validere løsningen de har kommet frem til fordi dette er noe de sjeldent gjør i klasserommet, og blir betraktet som lærerens ansvar. Elevene runder sjeldent av tall i klasserommet, og svaret kan bli latterlig nøyaktig i noen sammenhenger (Blum, 2015).

Edo et al. (2013) har tatt for seg 26 elever fra niendeklasses vanskeligheter med modelleringsoppgaver hentet fra PISA-undersøkelser på nivå 5 og 6. De forklarer først at det matematiske rammeverket PISA struktureres etter kan deles inn i matematisk lese- og skrivedyktighet, innhold, kontekst og kompetanse. Edo et al. (2013) definerer matematisk lese- og skrivedyktighet som den individuelle sin evne til å formulere, anvende og tolke matematikk. Matematisk lese- og skrivedyktighet en anvendelig og meningsfylt struktur gir elevene muligheter til å beskrive hva de gjør i en matematisk prosess, å knytte sammen konteksten til problemet med matematikken, og kunne løse det matematiske problemet (Edo et al., 2013). Funnene i denne undersøkelsen var at elevene hadde vanskeligheter med å forklare fremgangsmåten de hadde brukt. Elevene hadde vanskeligheter med å formulere situasjoner matematisk; det vil si å gjenkjenne matematisk struktur som forhold, mønstre og regelmessigheter eller representere en situasjon matematisk. Elevene hadde vanskeligheter med å evaluere rimeligheten til en matematisk løsning i en kontekst med en virkelighetsbasert oppgave. Elevene hadde ikke vanskeligheter med å løse matematiske problem de allerede har konstruert. Flesteparten av elever som ble kategorisert med høy måloppnåelse klarer ikke å løse en ukjent oppgave tilstrekkelig, fordi de ikke kunne å formulere problemet matematisk.

Elever som ble kategorisert med middels måloppnåelse klarte å løse oppgaver ved å bruke sine egne teknikker som de selv kaller: «instinkt», «prøve og feile», eller «bruke egen logikk». Elever som ble kategorisert med lav måloppnåelse fikk ikke til å løse de to matematiske problemene fordi de ikke kunne finne en passende matematisk formel som de kunne benytte seg av og problemet krevde logiske resonnementer elevene ikke fikk til (Edo et al., 2013).

Blum (2011) har listet opp typiske eksempler på vanskeligheter med modelleringsoppgaver for elevene som er hentet fra DISUM-studier. Disse vanskelighetene er delt inn i seks kategorier, hvor hver kategori har et navn hentet fra steg i modelleringssyklusen (Blum, 2011). Første kategori er tolking. Blum mener at en velkjent løsningsstrategi er «ignorer teksten, bare trekk ut all informasjon fra teksten og gjør noe med denne informasjonen i samsvar med kjente operasjoner og modeller, som ofte er velfungerende i hverdagsklasserommet for å løse tekstoppgaver korrekt (Blum, 2011). Andre kategori er forenkling. Elevene kan konstruere en passende situasjonsmodell, men er ikke kjent med å ta antakelser. I Blum sitt eksempel er det snakk om å fylle opp tanken til en bil med drivstoff fordi eleven ikke vet hvor mye bilen bruker av drivstoff for å kjøre til bensinstasjonen, men heller ikke hvor mye eieren ønsker å fylle opp (Blum, 2011). Tredje kategori er matematisering. Etter en suksessfull konstruksjon av en virkelighetsnær modell av et problem, kan elever ofte glemme å inkludere en variabel inn i modellen deres. I Blum sitt eksempel er det elever som har glemt å legge til høyden på motoren til en brannbil (Blum, 2011). Fjerde kategori er en matematisk del, som ifølge Blum kan være vilkårlig vanskelig. Femte kategori er tolkning. Etter å ha fullført de første tre stegene i modelleringen kan elevene være fornøyd med svaret, kan svaret være merkelig nøyaktig og variabler kan være glemt, slik at elevene kan ha glemt hva kalkulasjonene de har gjort betyr i virkeligheten (Blum, 2011). Sjette kategori er validering. Å se om det matematiske svaret passer overens med virkeligheten kan fort bli glemt. I Blum sitt eksempel med gigantsko-oppgaven mener han at det er selvsagt at elevene har glemt å validere når kjempen som skal ha på seg skolene bare er to og en halv gang høyere enn skoen sin lengde (Blum, 2011).

Å rekontekstualisere, altså å trekke ut en mening eller tegn fra sin originale kontekst og benytte meningen eller tegnene inn i en annen kontekst, har en velkjent effekt mener Jablonka (2007). Hun skriver at det oppstår et problem for elever når de skal løse typiske matematiske «ordproblemer» som en kan finne i tekstbøker eller i tester over alt i verden (Jablonka, 2007). Det blir vanskelig å vite om en skal bruke en hverdagskunnskap for å løse en oppgave med et hverdagslig og praktisk innhold eller om en skal bruke matematisk kunnskap for å løse en oppgave med et akademisk innhold i disse «ordproblemene». Det er ikke lett å plassere i den ene eller den andre kategorien (Jablonka, 2007). Problemer med disse autentiske oppgavene kan også oppstå når elevene ikke kjenner seg igjen på grunn av kulturelle betingelser:

> «Some examples deal with a mathematical analysis of cultural artefacts, such as shapes of ice cream, of hats and umbrellas, of churches, modem bridges and airport buildings, of dress designs by Sonia Delaunay and the surface of a Porsche. It is easy to imagine that these contexts reflect or advocate a lifestyle, which is not that of the majority of the students' families» (Jablonka, 2007, s. 194).

Det vil si at oppgaven presenterer en situasjon som kunne vært autentisk for elevene, men som ikke oppleves som autentisk fordi elevene ikke kjenner seg igjen i den bestemte livsstilen. Autentiske matematikkoppgaver portretterer vanlig kontekster og gir ingen ferdiglagde algoritmer. Det legges vekt på realistisk informasjon som er uferdige eller ikke-konsekvente. En vil da unngå ferdiglagde arbeidshefter, gi mye informasjon om situasjonen som beskrives, inkludere komplekse matematiske data, gi oppgaver der det finnes flere fremgangsmåter som bygges på bred matematisk kunnskap og vide matematiske ferdigheter, og ofte vil de som løser disse autentiske oppgavene bli bedt om å bruke ulike representasjoner i løsningene (Kramarski, Mevarech & Arami, 2002).

2.5 Hvordan kan elevene utvikle egne modeller?

Gilbert (2004) skriver at undervisning i modeller og modellering må gi elevene muligheter for å kunne utvikle sin egen kompetanse ved å produsere og teste deres egne modeller. Denne utviklingsprosessen skjer ofte via fire steg.

1. Kompetanse om å bruke modeller – elevenes kompetanse til å velge å bruke en modell i en kontekst der resultatet er positivt. Et positivt resultat er når modellen representerer det matematiske fenomenet på en suksessfull måte.
2. Kompetanse om å revidere modeller – elevene forandrer en modell de allerede har lært, så modellen kan representere et fenomen i en annen kontekst enn modellen var ment til å brukes. Slik kan modellen brukes til andre formål enn den originalt er utviklet for.
3. Kompetanse om å rekonstruere modeller – elevene må lage en modell der de ikke vet detaljene, men de vet at modellen eksisterer. Elevene må i tillegg skrive individuelle

evalueringer av modellene de har produsert, og relatere de til «standardmodellen» de har tatt utgangspunkt i.

4. Kompetanse om å konstruere egne modeller – arbeid med grunnleggende emner ved hjelp av praktisk arbeid, gjøre antakelser, sette inn disse antakelsene inne i en modell konstruert på en datamaskin, «kjøre» modellen som er produsert for å sammenlikne den med modellene som er produsert med enighet innen fagmiljøet. Det trengs en lang tidsskala for å utvikle modelleringskompetanse, samt en utvikling i bruken av forklaringer, prognoser og evalueringer av modellene som konstrueres (Gilbert, 2004).

Gilbert (2004) skriver at eksempler på elever som gjennomfører disse fire stegene ikke har blitt utviklet enda. Han skriver også at suksessfull læring i modellering kan deles opp i tre.

> The only valid reason for teaching is to bring about learning. Thus, in considering the challenges to be faced in teaching the model-based curriculum, it is necessary to consider what successful learning in the field might entail. This may be divided, if only for convenience, into «having an acceptable understanding of what a model is», «having a developed capacity to mentally visualise models» and «having an acceptable understanding of the natures of metaphor and analogy» (Gilbert, 2004, s. 122)

Det vil si at Gilbert (2004) mener suksessfull læring i modellering kan deles i tre: å ha en akseptabel forståelse av hva en modell er, å ha utviklet kapasitet til å kunne visualisere en modell og å ha akseptabel forståelse mateforens og analogiens natur.

English (2003) har kommet frem til fire punkter som omhandler at elever har vanskeligheter med å bruke en kjent modell eller løsningen på oppgaven i et nytt problem. English mener at det er en flersidig aktivitet å bruke en kjent modell eller en løsning på et nytt problem som gjør elevene i stand til å:

1. Konstruere modeller som omfatter nødvendige strukturelle elementer som gjør elevene i stand til å argumentere for likheten mellom modellene.
2. Vite når en skal se etter relaterte strukturer når en arbeider med et problem
3. Vite når og hvordan en anvender/benytter de eksisterende modellene elevene vet om inn i nye problemer som skal løses. I dette tilfellet understreket Kolodner (1997) hvor viktig det var at elevene kunne forutse hvordan en situasjon muligens kunne benyttes.
4. Kunne gjøre de nødvendige modifikasjonene med en eksisterende modell når den anvendes i et nytt problem.

Diskusjoner der læreren kan veilede elevene er viktig når elevene skal konstruere kunnskap der de gjør sine egne modeller til «eksplisitte objekter av tanken» (English, 2003).

2.6 Oppsummering av teorikapittel

I dette kapittelet har jeg presentert begreper relevante for min studie som modell, modellering, modelleringssirkelen, modelleringsrute og blokader i modellering. Redegjørelsen er gjort fordi jeg videre skal analysere elevenes modelleringsruter med modelleringssirkelen som rammeverk. Etter denne analysen vil jeg drøfte funnene opp mot andre elevers modelleringsruter og blokader elevene kan møte undervis i modellering beskrevet i teorikapittelet. I neste kapittel skal jeg se på metoder benyttet i denne studien.

3 Metodekapittel

I dette metodekapittelet vil jeg begrunne de metodiske valgene jeg har gjort underveis for å svare på problemstillingen min: Hvordan er modelleringsrutene til tre elever i 9. klasse i arbeid med to modelleringsoppgaver? Og forskningsspørsmålene: Hvordan ser modelleringsrutene til de tre elevene ut sammenliknet med andre elevers modelleringsruter? Hvilke blokader er det elevene eventuelt møter på underveis i arbeid med oppgavene? Hva skal til for å utvikle elevenes modelleringskompetanse?

3.1 Epistemologisk og faglig utgangspunkt

Epistemologi handler om kunnskapens natur, det vil si hva vi kan vite om virkeligheten og hvordan vi kan gå frem for å skaffe oss denne kunnskapen. Altså teori om hva kunnskap er (Johannessen, Christoffersen & Tufte, 2010). Å begrunne mine epistemologiske utgangspunkt handler derfor om å klargjøre mitt kunnskapssyn, hva kunnskap er og hvordan en kan skaffe seg denne kunnskapen. Denne oppgaven er skrevet med et sosiokulturelt læringssyn. Tolkningen av datamaterialet jeg har samlet inn har en hermeneutisk innfallsvinkel.

Ettersom studien min dreier seg om hvordan elevene arbeider, hva de legger vekt på i oppgaven og hva de kan se på som vanskelig vil det for meg være et naturlig valg å plassere denne studien innenfor hermeneutikken, da jeg blir nødt til å fortolke systematisk de datamaterialene jeg får samlet inn under arbeidet (Nyeng, 2012, s. 45). Siden jeg skal forske på sosiale forhold og mennesker vil det bli naturlig for meg å holde meg innenfor hermeneutisk forskning. Jeg vil ikke falle inn under positivistisk forskning der de ser på fakta og har en verdifri og nøytral tolkning av datamaterialet, fordi mine erfaringer og holdninger vil påvirke den kommende analysen (Halvorsen, 2008, s. 23-24). Det er viktig at jeg som forsker reflekterer rundt og er bevisst mine egne erfaringer og fordommer, slik at de i minst mulig grad påvirker min fortolkning av datamaterialet og hva jeg legger vekt på i datamaterialet.

Denne studien er preget av et sosiokulturelt kunnskapssyn. Vygotskij skriver at utviklingens natur har forandret seg fra å være en biologisk utvikling til å bli en sosiohistorisk utvikling. Mennesket er ikke medfødt en naturlig form for atferd med språklig tenkning. Den språklige tenkingen bestemmes ved en historisk-kulturell prosess, der det finnes spesifikke lover og egenskaper som ikke finnes i de naturlige formene til tenking og tale (Vygotskij, 2001, s. 95). Han skriver også at virkelige begreper ikke er mulige uten ord, og at utenfor den språklige tenkningen eksisterer ikke begrepstenking. Å bruke ordene som spesifikke «redskaper» er derfor den sentrale faktoren for begrepsdannelsen og setningsoppbygging (Vygotskij, 2001, s. 104). Det er grunnleggende for barnet å mestre sin egen oppførsel, så barnet begynner å mestre omgivelsene sine ved hjelp av tale. Denne talen produserer nye relasjoner med omgivelsene, men også en ny organisering av oppførsel i seg selv (Vygotskij, 1978, s. 25). I denne oppgaven finner en igjen dette synet ved elevenes samarbeid ved oppgavene. At elevene arbeider sammen for å komme frem til en felles forståelse av problemet, og en felles løsning på problemet. Dette kunnskapssynet kan også påvirke min utvelgelse av teori, metode, analyse og diskusjon for å belyse problemstillingen, samt ha påvirket mitt valg av tema for forskningsprosjektet.

Siden mitt faglige utgangspunkt er med på å påvirke min datainnsamling, analyse og diskusjon, er det et poeng å reflektere rundt dette faglige utgangspunktet. Johannessen et al. (2010) skriver at forskerens faglige utgangspunkt legger føringer for innholdet og vektleggingen i forskningsprosjektet. De skriver også at det faglige utgangspunktet forskeren har gjerne kommer fra bakgrunnen og utdanningen til forskeren. Min faglige bakgrunn er nyutdannet adjunkt, med undervisningskompetanse i matematikk, naturfag, musikk og internasjonalt samarbeid for 5-10 trinn. Etter denne utdannelsen gikk jeg rett over i en master i matematikkdidaktikk, og har derfor en begrenset erfaring med arbeid i skolen som lærer. Min kompetanse som lærer begrenser seg til praksisen jeg har gjennomført gjennom utdanningen jeg har, derfor har jeg mest kompetanse i diskusjon rundt forskning, teorier og matematikkdidaktikk. Siden min erfaring fra praksisfeltet er begrenset har jeg ikke klare forventninger til hva jeg vil finne ut av ved hjelp av datainnsamlingen. Etter flere år under utdanning har min interesse rundt elevenes erfaringer knyttet til den faglige undervisningen påvirket både valg av tema og perspektiver i denne oppgaven. Under observasjon og intervju har jeg forsøkt å holde meg objektiv og ikke la mine personlige meninger skinne gjennom. Arbeidssituasjonen elevene var satt i kan ha blitt påvirket av at de visste at jeg hadde en lærerbakgrunn, og at elevene forsøkte å svare på oppgavene som ble gitt dem «korrekt» ut i fra hva de tenkte at jeg forventet av dem. Ut av et rikt datamateriale må jeg velge ut deler av transkripsjonen som jeg velger å ta med i oppgaven min, og her må jeg være bevisst at denne prosessen kan være partisk. For det andre skjer all datainnsamling i en «sosial setting» som involverer en dobbelt hermeneutisk prosess, der jeg som forsker tolker data fra deltakerne som allerede har tolket data fra deres verden, som jeg igjen kan relatere meg til som leser av deres ord (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 540).

3.2 Tilnærming til studien

Jeg har tidligere i masterløpet kommet over artikkelen til Blum og Ferri (2009), og bestemte meg for å finne ut mer om hvordan elevenes modelleringsruter ser ut i modelleringssirkelen inspirert av denne artikkelen. Siden fant jeg ut at Blum og Leiss har utformet denne modellen sammen noen år tidligere (Blum & Leiss, 2006). Siden har jeg utformet forskningsspørsmålet mitt basert på disse to artiklene. Jeg har gått fra teori til empiri, og denne typen tilnærming kalles deduktiv (Johannessen et al., 2010). Jeg har altså gått fra en generell figur til konkrete innsamlede data.

3.3 Valg av metode

I studien min ønsker jeg å få en helhetlig forståelse av prosessen når elevene arbeider med modelleringsoppgaver. Jeg ønsker ikke å få en oversikt over en klasse sin forståelse av modelleringsoppgaver. Ifølge Larsen (2016) er det å foretrekke å benytte seg av en kvalitativ metode når en ønsker å få en helhetlig forståelse. Johannessen et al. (2010) skriver at kvalitativ metode er særlig hensiktsmessig når en skal undersøke fenomener en ikke kjenner så godt til fra før av, fenomener det er forsket lite på, og når vi ønsker å undersøke fenomener grundigere. Siden forskningen min skal handle om at jeg skal se nærmere på hvordan elever arbeider med modelleringsoppgaver vil det være naturlig for meg å tenke at jeg velger kvalitativ metode når det skal fokuseres på å forstå en bestemt handling elevene gjør (Nyeng, 2012, s. 71). Det er forsket en del på modellering fra før av, men det er lite norsk forskning på området av det jeg kjenner til. Det er i tillegg ikke forsket mye på bevegelse innenfor modelleringssirkelen til Blum og Leiss, av det jeg vet, slik at det er mulig å få mer kunnskap om modelleringsprosessen til elevene grundigere med mer forskning på området. Nå skal det sies av denne forskningen er gjort på tre elever på et niende trinn, og kan ikke si noe generelt om hvordan andre elever på niende trinn sin modelleringsprosess er.

I studien er det ikke noe behov for å beskrive eller bekrefte en allmenn teori, men å se på hvordan elever arbeider med modelleringsoppgaver innenfor et sosialt fellesskap (Nyeng, 2012, s. 71). Slik faller metodevalget på observasjon og intervju av en gruppe elever. Informantenes handlinger og svar blir senere tolket av forskeren, der det er et mål at forskningen skal objektiv og gjennomsiktig. For å oppnå denne objektiviteten og gjennomsiktigheten er det et poeng at forskeren presiserer og tydeliggjør hvilke valg som blir gjort underveis og grunngir disse valgene til enhver tid, slik at relabiliteten i forskningen blir styrket. For å oppnå dette følger det derfor en redegjørelse for ulike valg som er blitt gjort innenfor metodene kvalitativ observasjon og intervju.

Når en planlegger en observasjon er det to ulike strukturer som kan velges, ut ifra hva som er mest egnet til å besvare problemstillingen. Siden det ikke er klare trekk jeg skal observere for å besvare problemstillingen har jeg valgt *etnografisk og naturalistisk observasjon* (Cohen et al., 2011, s. 464-465). Cohen et. al skriver at hensikten med etnografisk og naturalistisk observasjon er å observere deltakerne i naturlige situasjoner, dagligdagse sosiale situasjoner og oppførselen til deltakerne i disse situasjonene. Deltakende observasjoner er nyttig for å få innsikt og observere hendelser eller oppførsel som ikke blir nevnt i et intervju, slik at en skal samle date om sensitive temaer eller temaer det ikke snakkes om like naturlig i en annen sammenheng (Cohen et al., 2011, s. 465). Under observasjonen skal jeg være deltakende i minst mulig grad, slik at jeg ikke blir en stor del av det sosiale systemet som skal studeres (Halvorsen, 2008, s. 134-135). Jeg skal forklare oppgavene hvis det er noe som er utydelig, men det er ikke mine tanker, hva jeg selv legger vekt på i oppgavene og hva jeg synes er vanskelig som er interessant for oppgaven. Derfor vil jeg forsøke å være en minst mulig del av det sosiale systemet. En kan si at observasjonen er en blanding av strukturert og ustrukturert observasjon. Oppgavene er valgt ut på forhånd, men det er ikke bestemt på forhånd hvilke elementer som skal observeres (Halvorsen, 2008, s. 134-135). Elevene får vite på forhånd at studien ikke går ut på å kartlegge deres kunnskaper i matematikk, men et ønske om å se på hvordan de tenker, vektlegging av ulike elementer i oppgavene eller hva de synes er utfordrende ved oppgavene. Hva som er hensikten med forskningen skal også komme frem i et informasjonsskriv til elever og foresatte sammen med et samtykkeskjema (se vedlegg 4).

En kan ikke forske på verden uten å være en del av den, og forskerens rolle i dette prosjektet var en observatør-som-deltaker. Det vil si at en ikke er et medlem av gruppen, men en kan delta i aktiviteten i gruppen der en har en klar rolle som forsker (Cohen et al., 2011, s. 457). Jeg var synlig under observasjonen, så jeg må være oppmerksom på at elevene kan ha en viss endret atferd da de ble observert. Selv om det er en viss mulighet for at elevene endrer atferd under observasjonen, synes jeg ikke det er en mulighet å gjennomføre datainnsamlingen i et lukket laboratoriet (Halvorsen, 2008, s. 135-137). I et lukket laboratoriet blir forskeren blir skjult for deltakerne, men det blir en uvant situasjon for elevene å sitte på laboratoriet i sammenliknet med et grupperom som de kjenner til. I tillegg er det en økonomisk utfordring knyttet til at jeg ikke har mulighet til å leie laboratorier, vil det være en utfordring å ta elevene ut av skolen en helt dag for å transportere de frem og tilbake til eventuelle laboratorier.

Alternativt kunne jeg benyttet meg av strukturert observasjon med oppførsel som skjer over tid, og som ikke er en enkelthendelse. Observatøren må lage et observasjonsskjema som inneholder hele perioden, og ikke en enkelthendelse (Cohen et al., 2011, s. 463). Det vil si at jeg kunne laget forskjellige kategorier på forhånd og krysset av for hver gang elevene befant seg under de ulike kategoriene i modelleringssirkelen til Blum og Leiss. Denne strukturerte observasjonen kan gi numeriske data som er brukbare, men kan utelate bakgrunnen for hvorfor denne hendelsen finner sted eller man kan anta at den observerte hendelsen er et bevis på underliggende følelser (Cohen et al., 2011, s. 463). Underveis i observasjonen ville dette kanskje ha vært en gunstig fremgangsmåte, der det ville være oversiktlig å se hvor mange ganger elevene er innenfor de forskjellige stegene i modellen. Samtidig ønsker jeg å se på hvor elevene er i modelleringsmodellen underveis, hvilke steg de gjør i hvilken rekkefølge og hvordan de beveger seg i modellen generelt, som det vil være mer gunstig å lete etter ved en ustrukturert observasjon.

Ved å observere elevene vil det være en begrensning der jeg ikke vil få innsikt i elevenes tanker og holdninger til oppgavene de arbeider med. Derfor vil jeg i tillegg til å se hvordan situasjonen utspiller seg naturlig ved observasjon, benytte meg av et intervju der jeg forhåpentligvis vil få mer innsikt i elevenes meninger om, erfaringer med og opplevelse av oppgaver om modellering (Nilssen, 2012, s. 23-24). Likså planlegging av observasjon, kan en når en planlegger et intervju en kan velge mellom ulike strukturer ved innsamling av datamateriale. Denne studien benytter en intervjuguide der temaer og problemer er skrevet ned på forhånd, men spørsmålene blir delvis utformet underveis under intervjuet. Fordelene med en slik intervjuform er et hull i innsamlingen av datamateriale kan tettes underveis, intervjuet forblir for det meste som en samtale og situasjons nær og datainnsamlingen får et systematisk oppsett for hver deltaker. Ulempene med en slik intervjuform er at viktige temaer kan bli utilsiktet utelatt og at fleksibiliteten i spørsmålene kan redusere sammenliknbare svar (Cohen et al., 2011, s. 413). Siden dette forskningsprosjektet bare inneholder et intervju ser jeg bort i fra ulempene med å ikke kunne sammenlikne utsagn med andre intervjuer.

Fordelen med gruppeintervju er at det gir muligheter for en utvikling av diskusjoner imellom deltakerne, samtidig som det kan gi rom et bredere omfang av utsagn. Å ha flere deltakere i intervjuet kan bidra til flere synspunkter av samme hendelse og derfor ha en slags *dobbeltsjekk-effekt*, i tillegg til at deltakere kan komplimentere andres poeng. På den andre siden kan det være at en deltaker tar en dominerende rolle i intervjuet, eller at gruppen utvikler en «gruppetankegang», som det blir vanskelig å være uenig i (Cohen et al., 2011, s. 432). Dessuten er det nok lurt om jeg er oppmerksom på at deltakerne ikke kommer til å formulere seg på en slik måte at deres meninger og erfaringer kommer frem på en hensiktsmessig måte. Derfor tenker jeg at det kan være hensiktsmessig å supplere med observasjon for et rikere datamateriale.

3.4 Valg av informanter til observasjon og intervju

Ordlyden i problemstillingen styrer utvelgelsen av informanter til tre elever som går på ungdomsskolen i 9. klasse. Undersøkelsen er gjennomført på en mellomstor ungdomsskole utenfor bykjernen. Jeg har vært i kontakt med en kontaktlærer i området av der oppgaven blir skrevet, og har fått låne så mange elever jeg ønsker til en undersøkelse, samt elever og foresatte samtykker at jeg får låne elevene som informanter. Jeg var inne i klassen på forhånd for å observere elevene da de arbeider med matematikk, og velge ut deltakere på grunnlag av observasjoner i klasserommet og en diskusjon med kontaktlærer (Nilssen, 2012, s. 21-23). Altså skjer ikke utvelgelsen av elever tilfeldig, men i forbindelse med observasjon i løpet av en skoledag, og ved hjelp av innspill fra kontaktlæreren i klassen. Halvorsen (2008) sier at observasjon burde skje etter at forskeren har satt av en del tid til å bli kjent med deltakerne i studien. Ettersom en mastergradstudier har en relativt kort tidsramme sammenliknet med andre større studier, vil det å bruke en del måneder på å bli akseptert av gruppen som skal observeres uoverkommelig (Halvorsen, 2008, s. 135-137). Jeg satte av en skoledag til å følge elevene, for at jeg ikke skulle være en helt fremmed person for elevene da jeg kom på skolen for å gjøre datainnsamlingen i januar.

3.5 Utarbeidelse av oppgaver gitt til elevene

Opprinnelig skulle oppgavene til datainnsamlingen være oppgaver hentet fra artiklene til Blum og Ferri (2009) og Blum (2015). Etter en diskusjon med ulike veiledere ble oppgavene endret til de som er benyttet i undersøkelsen fordi de kunne gi elevene en mulighet til å koble inn matematikk på en annen måte enn oppgavene som opprinnelig var valgt ut. På begge oppgavene benyttet av Blum og Ferri kunne elevene besvare oppgaven uten å benytte seg av matematikk i det hele tatt, men bare benytte seg av logisk resonnering. Oppgaven hentet fra Blum (2015) kunne liknet mye på en oppgave der en standard algoritme kunne benyttes, og for å unngå at elevene bare skulle bruke en velkjent modell uten å reflektere rundt den byttet jeg oppgaver til de som ble benyttet under datainnsamlingen. Begge modelleringsoppgavene jeg har gitt elevene for å samle inn datamateriale er hentet fra boken Modelling and Applications in Mathematics Education (Henning & Keune, 2007).

3.6 Utarbeidelse av intervjuguide til intervjuet

Inspirert av Lesh, Cramer, Doerr, Post og Zawojewski (2003) sine kriterier til modelleringsoppgaver og Blum og Leiss (2006) sin modelleringssirkel ble intervjuguide utarbeidet før det ustrukturerte intervjuet (se vedlegg 3). Det vil si at noen av spørsmålene ble skrevet med tanke på å stille elevene oppfølgingsspørsmål etter arbeidet med oppgavene som kunne gi utfyllende informasjon om hvorfor de eventuelt ikke har kommet frem til en matematisk modell eller hvordan de begrunner denne matematiske modellen. Intervjuguiden inneholder også noen punkter om vanskeligheter elevene kan møte på som er utviklet med bakgrunn i blokader som det står om i teorikapittelet.

3.7 Forskerens rolle og forskningseffekt

Jeg må også være oppmerksom på det Halvorsen kaller *effekten av begrenset perspektiv.* Selv om jeg ikke er læreren til disse elevene, og bare er innom for en kort periode, vil jeg fortsatt være en voksenperson. For deltakerne vil jeg derfor kunne ha en rolle som voksen, som ikke nødvendigvis får full tilgang til det sosiale miljøet til deltakerne (Halvorsen, 2008). Jeg tror ikke det er noen fare for at jeg har observert deltakerne i en så lang tidsperiode at jeg har begynt å identifisere meg med deltakerne, slik at jeg mister min kritiske distanse til deltakerne (Halvorsen, 2008, s. 135-137). Selv om jeg føler jeg ikke kommer til å observere deltakerne over så lang tid, må jeg huske å være oppmerksom på å ha kritisk distanse til deltakerne. Jeg ønsker ikke å benytte meg av tekststudier i forskningen der det kan bli vanskelig å gjennomføre en studie der ungdomsskoleelever skriver en logg underveis når de løser en oppgave som etter min oppfatning er autentisk. Jeg ønsker heller ikke at teksten elevene forhåpentligvis vil skrive som et svar på oppgaven de har fått skal tale for seg selv (Nilssen, 2012, s. 24-25).

3.8 Etisk refleksjon

All forskning må forholde seg til forskningsetikken, og jeg vil i dette avsnittet reflektere rundt temaet og redegjøre hvordan jeg selv har forholdt meg til forskningsetikken under forskningsprosjektet. De nasjonale forskningsetiske komiteene har skrevet forskjellige rapporter og bøker om etiske retningslinjer innenfor ulike fagfelt. Innenfor feltet samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi har de skrevet følgende om forskningsetikk:

> «Universiteter og høyskoler har et lovpålagt ansvar for at forskning, utdanning og faglig og kunstnerisk utviklingsarbeid holder et høyt nivå «og utøves i overensstemmelse med anerkjente vitenskapelige, kunstfaglige, pedagogiske og etiske prinsipper.» I tillegg finnes lov om behandling av etikk og redelighet i forskning (forskningsetikkloven), som «skal bidra til at all forskning i offentlig eller privat regi skjer i samsvar med anerkjente etiske normer.»» (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016, s. 6).

Det vil si at denne forskningen som skjer i tråd med etiske retningslinjer ved et universitet må utøves i tråd med anerkjente etiske prinsipper, og at forskningsetikkloven styrer denne forskningen slik at må skje i tråd med forskningsetikkloven. Cohen et. al. har skrevet en del om etikk innenfor forskning, blant annet at forskere må beregne effektene av forskning med deltakere. Det vil si at forskerne har et ansvar for at deltakerne ved å oppføre seg på en måte slik at deltakerne beholder verdigheten sin som mennesker etter studien (Cohen et al., 2011, s. 84). Under dette forskningsprosjektet er det viktig for meg som forsker å tenke over hvordan deltakerne blir fremstilt i forskningen. Å være bevisst hvordan deltakerne blir presentert, og presentere datamateriale på en slik måte at deltakerne ikke blir hengt ut på noen som helst måte er viktig i henhold til etiske retningslinjer i forskning.

Behovet for konfidensialitet for deltakerne er et viktig prinsipp i forskning. Informasjon gitt av deltakerne skal på ingen måte kunne spores tilbake til deltakernes identitet (Cohen et al., 2011, s. 91). Det vil si at i forskningen er det viktig å ikke referere til deltakerne ved navn, men heller lage pseudonymer slik at deltakernes identitet ikke kan avsløres ved navnet deres. I tillegg til å ikke avsløre bostedet, skole eller andre opplysninger som kan være med på å gjøre det mulig å spore deltakernes identitet.

Forskeren må forholde seg til sin *informasjonsplikt*. Forskeren er pliktig å informere deltakerne om forskningsfeltet, hva som er formålet med forskningen, hvordan resultatene i forskningen er planlagt å brukes, eventuelt hvem som finansierer prosjektet, hvilke følger det har å delta i prosjektet og hvem som får tilgang til å lese forskningen (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016, s. 13). Rektor på skolen og kontaktlærer på trinnet ble først informert om dette forskningsprosjektet ved e-post. Deretter fikk deltakerne i forskningsprosjekt et informasjonsskriv som de skulle ta med hjem til foresatte (se vedlegg 4). I tillegg er samtykke fra deltakerne en viktig del av de etiske retningslinjene. I forskningsetiske retningslinjer heter det at: «Kravet om samtykke skal forebygge krenkelser av personlig integritet og sikre forskningsdeltakernes frihet og selvbestemmelse» (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016, s. 14). Basert på dette har jeg skrevet et samtykkeskjema der foresatte kunne skrive under på om barnet deres kunne delta i forskningen (se vedlegg 4). Dette skulle leveres tilbake til kontaktlærer ved en gitt tidsfrist. Samtykket som gis av deltakerne skal være basert på noe, så derfor er det er krav om at: «Samtykket skal være basert på informasjon om prosjektets formål, metode, risiko, mulig ubehag og andre konsekvenser som kan ha betydning for deltakerne» (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016, s. 14). I informasjonsskrivet som ble gitt til deltakerne ble det blant annet informert om prosjektets formål og metode. Det skal forhåpentligvis ikke være konsekvenser for deltakerne som ubehag, risiko eller av annen betydning, så dette er unnlatt å informere om.

Ved å sende inn valgene jeg har tatt og fått en godkjenning av disse valgene hos personvernombudet for forskning Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste A/S (NSD) har det forekommet en kvalitetsvurdering av gitte valg. Alle valg og stadier i studien er blitt gjennomgått og godkjent av NSD (se vedlegg 5).

3.9 Relabilitet og validitet

Relabilitet er knyttet datamaterialet i undersøkelsen. Det vil si hvilke data som brukes, hvordan innsamlingen av dataene er gjort, og bearbeidingen av disse dataene. Observasjoner er klart verdiladet og avhengige av konteksten. Det vil være vanskelig for en forsker å gjennomføre en lik kvalitativ undersøkelse. I tillegg blir forskeren selv brukt som et instrument. Ingen andre kan tolke datamateriale på samme måten, fordi ingen har samme erfaringsbakgrunn som forskeren selv (Johannessen et al., 2010). Måten å styrke relabiliteten i en kvalitativ studie er å gi leseren en nøyaktig og inngående beskrivelse av fremgangsmåter gjennom hele forskningsprosessen. Gjennom å gi leseren en mulighet til å spore forskerens dokumentasjoner av datamateriale, metoder som er benyttet og avgjørelser som er tatt underveis i prosjektet, og tilslutt det endelige resultatet kan styrke forskningens relabilitet (Johannessen et al., 2010). For at en forskning skal være troverdig må den demonstrere at om en lik gruppe med informanter skulle i samme kontekst ville det gitt det samme resultatet (Cohen et al., 2011, s. 199). Premissene for realistiske studier inneholder særegenheter og unikhetene i situasjonen kan ikke situasjonen bli repetert eller kopiert, og dette er blir sett på som en styrke og ikke en svakhet (Cohen et al., 2011, s. 202). Det må være opp til leseren selv å vurdere om avgjørelsene, resultatene, metoder og dokumentasjoner i denne forskningen kan være noe de kjenner seg igjen i, eller om de synes funnene vil gjelde for flere elever. Selv om situasjonen i denne studien ikke kan kopieres kan leseren se at fremgangsmåtene og resultatene er beskrevet på en slik måte at forskningen fortsatt vil bli sett på som troverdig.

Validitet handler om at studien undersøker det som var hensikten å undersøke. I kvalitative studier kan validitet handle om i hvilken grad fremgangsmåtene i forskningen og funnene reflekterer formålet i studien, og i hvilken grad funnene representerer virkeligheten (Johannessen et al., 2010). Validiteten handler i tillegg om i hvor stor grad den kan overføres til andre områder enn det som studeres. I kvalitative undersøkelser snakkes det heller om en overføring av kunnskapen om etablerte beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer enn en generalisering (Johannessen et al., 2010). Økologisk validitet undersøker og refererer til spesifikke karakteristikker i en spesiell situasjon, og krever spesifikke faktorer å forske på som for eksempel skoler, universiteter, regioner og så videre som må regnes med i en undersøkelse. Det er et fundamentalt premiss i kvalitativ forskning at forskeren ikke skal manipulere variabler eller forhold i forskningen, og at situasjonen i forskingen skal skje naturlig. For en økologisk validitet er det viktig å inkludere så mange faktorer og karakteristikker som mulig i situasjonen. Vanskeligheter med å inkludere så mange faktorer og karakteristikker vanskeligheter med å etterstrebe prinsippene i mye av forskning nemlig at det ikke skal være mulig å spore opp, det skal være anonymt og ikke identifiserbart. Økologisk validitet er en form for ekstern validitet; knyttet til hvilke karakteristikker i en observertoppførsel eller situasjon kan overføres eller generalisert til en ny situasjon. Dette blander kvalitetene til en spesifikk omstendighet med grensen for hvor mye situasjonen kan sammenliknes med andre situasjoner (Cohen et al., 2011, s. 195). Det må være opp til leseren selv å vurdere om beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer er tilfredsstillende. Jeg håper studien har gitt så mye informasjon som mulig, uten at det går an å spore opp eller identifisere deltakerne i studien.

3.10 Gjennomføring av datainnsamling

Jeg har plukket ut tre elever for å se hvordan modelleringsrutene deres når de beveger seg mellom den virkelige og den matematiske verden. Forholdet mitt til deltakerne i forskningsprosessen ble valgt fordi de er i nærheten av studiestedet mitt, og fordi jeg har hatt tilgang til å arbeide med elever i en bestemt klasse via tidligere bekjente kollegaer. Distansen til der studien skal gjennomføres er ikke for lang, samtidig som studien skal gjennomføres på en skole der jeg ikke har vært før og ikke kjenner elevene fra før (Larsen, 2016, s. 22-23). Jeg har transkribert alle lydfilene fordi jeg vil se transkripsjonene i en sammenheng og ikke gå glipp av deler av modelleringsrutene. Observasjonen skjer på et grupperom med tre elever og intervjuer. Det gjennomføres et lydopptak, et videoopptak og innsamling av elevsvar på papir. Videoopptaket og elevsvarene på pair blir ikke brukt videre i analysen. Dette valget ble gjort på grunnlag av at lydopptakene ga tilstrekkelig informasjon. Datainnsamlingen hadde en tidsramme på 60 minutter. Materialer elevene hadde tilgang til var mobil, skrivesaker og kladdeark.

3.11 Analysemetode

Det å analysere blir beskrevet som å dele opp noe i elementer eller biter. Målet med analysen er å finne et budskap, en mening og finne et mønster blant elementene en har funnet under datainnsamlingen (Johannessen et al., 2010, s. 164). Datamaterialet som er innsamlet må håndteres, ved å redusere informasjonsmengden og lage ulike kategorier for å kunne fremlegge funn på en oversiktlig måte. De innsamlede dataene kan ikke stå for seg selv, de må tolkes (Johannessen et al., 2010, s. 163).

Etter å ha utført observasjon og ustrukturert intervju transkriberte jeg så fort som mulig, en lydfil hver dag i tre dager. Jeg gjorde dette for å huske på så mye som mulig og ha gjennomføringen av innsamlingen friskt i minnet. Utsagnene til elevene ble oversatt fra deres opprinnelige dialekt og skrevet ned på bokmål. Først definerte jeg hva jeg la i de ulike kategoriene i rammeverket jeg har analysert ut i fra. Deretter kodet jeg jeg utsagnene inn under de ulike kategoriene. Utsagnene ble markert med farger der alle utsagnene innenfor samme kategori ble markert med samme farge. Ved første koding var jeg usikker på en del av utsagnene ved koding og hvilken kategori de tilhørte. Kategoridefinisjonene ble endret og skrevet om slik at jeg hadde mer kunnskap om kategoriene. Derfor prøvde jeg å kode datamaterialet en gang til. Helt til slutt gikk jeg gjennom datamaterialet en siste gang for å se ekstra nøye på noen utsagn som jeg var usikker på hvilken kategori de tilhørte. Hva jeg legger i de ulike kategoriene er redegjort for i analysekapittelet.

Etter å ha kodet alle elevutsagnene i transkripsjonen inn i kategoriene i rammeverket ville jeg illustrere modelleringsrutene ut i fra rammeverket. I den første oppgaven illustrerte jeg hver deloppgave sin modelleringsrute inn i en egen modelleringssirkel for seg selv. I den siste oppgaven illustrerte jeg alle deloppgavene sine modelleringsruter inn i en modelleringssirkel fordi det var vanskelig å skille dem i ulike modelleringssirkler. Deretter tolket jeg disse modelleringsrutene etter hvilke tendenser jeg så ut i fra illustrasjonene.

3.12 Oppsummering av metodekapittel

I dette kapittelet har jeg sett på hvilke metoder jeg har benyttet i innsamlingen av datamateriale. Dette er relevant fordi jeg videre skal presentere analysen jeg har gjort ut i fra denne datainnsamlingen. Det er også relevant for å gjøre studien troverdig og gjennomsiktig. I neste kapittel skal jeg se på begrunnelser for hvorfor oppgavene jeg har brukt i datainnsamling kan betegnes som modelleringsoppgaver.

4 Begrunnelse av valgte oppgaver

Lesh, Hoover, Hole, Kelly, Post (2003) har kommet frem til at det er seks kriterier som må oppfylles for at oppgaven skal kunne kalles en modelleringsoppgave. Som tidligere nevnt er disse seks kriteriene referert til av flere, blant annet Lesh, Cramer, Doerr, Post og Zawojewski (2003) og Schou, Skott, Jess og Hansen (2008) og (2013). Disse kriteriene går ut på seks prinsipper.

Første prinsipp er at oppgaven må være personlig meningsfylt. Dette prinsippet kan også kalles virkelighetsprinsippet. En må stille en rekke spørsmål som kan svare på om oppgaven gir mening i eleven sin virkelighet. Problemet som er skissert for eleven, kunne det hendt i elevens virkelighet? Vil oppgaven legge til grunn for at elevene skal kunne benytte seg av personlige erfaringer eller bli oppfordret til å trekke egne meninger ut av situasjonen som er oppgitt? Blir elevene tvunget til å tenke på en bestemt måte som læreren ser på som den «riktige måten», eller blir elevens egne ideer bli tatt seriøst?

Andre prinsipp for å kalles modelleringsoppgave er modellkonstruksjonsprinsippet. Elevene må kjenne på et behov for å utvikle en modell for å løse problemet. Denne modellen må kunne konstrueres, modifiseres, utvides og reorganiseres. Oppgaven må ikke ha fokus på en overflateinformasjon, men heller gjentakelser og underliggende mønstre. Dette strukturerte systemet må kunne konstrueres, beskrives, forklares, manipuleres, forutsies og kontrolleres.

Det tredje er selvvurderingsprinsippet. Kriteriene i oppgaven må være så klare at eleven selv kan se nytten av å løse oppgaven. Kan eleven selv se om egen respons er god nok og bedømme egen innsats? Eleven må kunne se hvorfor resultatene er viktige, men også hvem resultatene er viktige for og når resultatene er viktige.

Eksternmodellprinsippet er det fjerde prinsippet. Prinsippet kan også kalles modelldokumentasjonsprinsippet. Vil oppgaven kreve en spesifikk besvarelse fra elevene som viser hvordan de har tenkt, hva de har lagt vekt på og hvilke strategier eleven har benyttet for å løse problemet? Spør oppgaven etter hvordan eleven bruker gitt informasjon, mål og mulige løsningsstrategier? Spør oppgaven etter hvilke matematiske systemer elevene benytter seg av? Eksempel på matematiske systemer kan være matematiske objekter, relasjoner, operasjoner, mønstre og gjentakelser.

Det femte prinsippet er at det elevene må lage enkle prototyper. Situasjonen som blir gitt til eleven må være så enkel som mulig, men samtidig må eleven ha et behov for å finne en modell for å løse oppgaven. Kan eleven bruke denne prototypen fra den gitte situasjonen for å løse liknende situasjoner? Vil erfaringen ved å løse denne oppgaven gi eleven en forklarende opplevelse, slik at det er mulig å overføre denne opplevelsen over i liknende situasjoner?

Det sjette prinsippet er generaliseringsprinsippet. Det må være et behov for å konstruere begrepsverktøy ved å løse den gitte oppgaven, som eleven kan bruke i denne ene relevante situasjonen eller i andre modifiserte og utvidede situasjoner. De opparbeidete begrepsverktøyene må kunne overføres til en bredere rekkevidde av situasjoner. Blir eleven utfordret på å løse et enkelt problem, eller blir eleven utfordret til å tenke på en måte som gjør at eleven må produsere modeller som er gjenbrukbare, formbare og modifiserte til å løse liknende situasjoner?

4.1 Analyse av alarmoppgaven

Den første oppgaven som ble gitt elevene er alarmoppgaven (se vedlegg 1). I dette underkapittelet skal alarmoppgaven vurderes opp mot de seks vurderingskriteriene for modelleringsoppgaver utviklet av Lesh et al. (2003).

Det første prinsippet er om oppgaven skal være personlig meningsfylt. Alarmoppgaven handler om at politiet har laget en oversikt over antall innbrudd i en by. Jeg går ut i fra at elevene har en innbruddsalarm hjemme i husholdningen, eller vet om en venn som har alarm hjemme hos seg. Oppgaven kan oppleves relevant fordi de kanskje har lest i nyhetene om innbrudd eller at foreldrene har et alarmsystem i huset som de må slå av når de kommer hjem fra skolen. Eventuelt har elevene sett en alarm bli slått av hos en venn. Elevene blir oppfordret til å trekke sine egne meninger ut av situasjonen, der de blir bedt om å begrunne en påstand hvor de mest sannsynlig vil bruke egne erfaringer i tillegg til matematikken for å begrunne påstanden. Når en oppgave blir gitt der elevene må begrunne en påstand kan det i teorien være mange ulike svar som med «riktig begrunnelse» kan sees på som korrekte svar. I tillegg kan elevene stole på sine egne tanker og meninger når oppgaven spør spesifikt «Hvorfor tror dere at produsentene har valgt ut akkurat disse dataene?», der oppgaven spør spesifikt etter elevenes meninger.

Alarmoppgaven må inneholde et behov for å konstruere en modell for å løse oppgaven. I alarmoppgaven er det et behov for å utvikle et funksjonsuttrykk for å kunne svare matematisk på oppgaven. Eventuelt videreutvikle og tolke tabellen som er blitt oppgitt eller tegne en graf. For å kunne begrunne slagordet fra et matematisk ståsted må en eller flere av disse matematiske modellene være på plass på forhånd. Elevene vil kanskje gjenkjenne at slagordet eller modellen må reorganiseres eller at slagordet må utvides for å slemme opp med realiteten. Dette vil være en kontroll av et strukturert system, og elevene kan ikke bare fokusere på overflatekunnskap, men må ned i dybden for å finne et underliggende mønster og begrunne sine egne utregninger.

Selvvurderingsprinsippet er det tredje prinsippet alarmoppgaven må inneholde. Siden oppgaven som ble gitt elevene handler om å begrunne sine egne utregninger, må elevene se på sine egne utregninger og argumentere for at de har rett. For å kunne gjøre denne argumenteringen, må de gjennomgå svarene de har gitt tidligere, og dette kan være en slags kvalitetssikring av svarene. Når elevene går gjennom oppgavene en gang nummer to vil de kunne se om de er enige i det de svarte første gangen eller om de vil gjøre noen endringer. Jeg ser for meg at elevene klarer å bedømme om responsen deres er god nok, fordi det for meg er vanskelig å stoppe før en har kommet frem til en god matematisk forklaring på oppgaven. De er nødt til å finne en begrunnelse om de mener at slagordet til alarmsystemet er god nok, og for å kunne begrunne dette ser jeg for meg at de ikke tar tak i oppgaven overfladisk. Jeg ser for meg at de kan se nytten av oppgaven ved å bli mer kritiske til reklamer, og kanskje bli motiverte til å etterprøve andre utsagn eller lese det som står i liten skrift i reklamer. At elevene må vurdere hvem disse tabellene og resultatene er viktige for, og når disse resultatene kan brukes. Klarer de å se om alarmselskapet kan bruke det som et salgstriks?

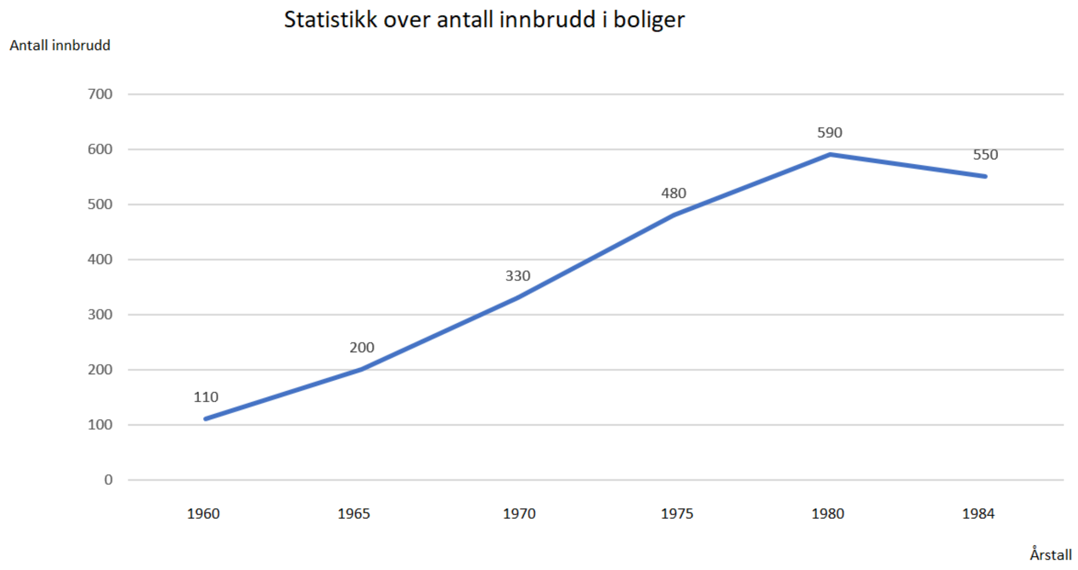
Det fjerde prinsippet alarmoppgaven må oppfylle er eksternmodellprinsippet. Elevene blir nødt til å dokumentere mulige løsningsstrategier, som eventuelt å skrive ned utregning underveis, det kan hende at elevene velger å lage en tabell med tall som passer inn i funksjonsuttrykket de har kommet frem til. Det kan også hende at de ser på antall innbrudd i hus som et objekt for hvert år, eller antall innbrudd som en helhet, det vil si et helt objekt. Ser elevene om det er dobbelt så mange innbrudd eller trippelt så mange innbrudd som er begått for hvert år, de kan jo se på dette som relasjoner mellom tallene. Setter elevene opp et funksjonsuttrykk eller en graf for å forklare situasjonen? Oppgaven gir vel ikke rom for så mange ulike modeller, men et funksjonsuttrykk og en graf kan være spesifikke modeller for å besvare oppgaven.

Alarmoppgaven må inneholde et behov for å konstruere enkle prototyper. Oppgaven inneholder ikke tall som er uvesentlige for oppgaven. Den inneholder bare en tabell som representerer problemet. Oppgaven kan være gjeldene i andre type problemer som inneholder andre statistikker som er presentert, for eksempel i andre reklamer. Historien kan benyttes videre kan jo være andre alarmsystemer eller statistikker. Elevene får erfaringer med å kunne lese av, tolke og benytte seg av en tabell, slik at de kan overføre denne kunnskapen til senere anledninger der elevene kan bli presentert liknende tabeller. I tillegg kan elevene få erfaringer ved å benytte seg av funksjonsuttrykk eller en graf som de kan benytte seg av i møte med andre type oppgaver, eller liknende oppgaver, der de har kunnskap om ulike representasjoner og bruksområder.

Alarmoppgaven må oppfylle det sjette prinsippet utviklet av Lesh et al. (2003), generaliseringsprinsippet. Å kunne konstruere en lineær funksjon kan brukes i andre sammenhenger, både i matematikkundervisningen når elevene blir presentert tabeller i oppgaveboken, eller i hverdagen da de kan regne ut timelønn, bruk av bensin eller kostnaden per boks hakkede tomater. Da kan de forandre på funksjonsuttrykket sitt slik at det kan bli benyttet i andre sammenhenger, altså ideen funksjonsuttrykk brukt i andre sammenhenger.

Funksjonsuttrykk kan brukes i andre sammenhenger i møte med matematikkoppgaver i klasserommet, eventuelt for å få en oversikt eller kunne uttrykke seg matematisk korrekt i samspill med andre elever, lærere og matematikere. I denne oppgaven kan det produseres modeller som kan brukes for å løse et liknende problem, for eksempel salg av andre varer enn en alarm, eller at tallene i tabellen kan skiftes ut slik at det blir en tilsvarende oppgave. På denne måten kan metoden som elevene kommer opp med kunne brukes flere ganger i nye tabeller eller liknende oppgaver.

Under kommer et løsningsforslag for alarmoppgaven. Oppgaven kunne vært illustrert ved et lineært funksjonsuttrykk: $F(x) = 73x + 110$. Eller slik som i illustrasjonen under der tabellen som blir presentert i oppgaven fremstilt som en graf. Både grafen og funksjonsuttrykket er mulige modeller av problemet.



Figur 5: Illustrasjon av mulig løsning på alarmoppgaven (se vedlegg 1)

4.2 Analyse av skolekonsert-oppgaven

Den andre oppgaven som ble gitt til elevene var skolekonsert-oppgaven (se vedlegg 2). I dette underkapittelet er det skolekonsertoppgaven som må oppfylle de seks kriteriene utviklet av Lesh et al. (2003) for å kunne kalles en modelleringsoppgave.

Det første prinsippet skolekonsertoppgaven må oppfylle er virkelighetsprinsippet. Det blir arrangert konserter eller andre kulturelle innslag på skoler, som for eksempel den kulturelle skolesekken som har som et prinsipp å ha et regelmessig tilbud på alle klassetrinn (Kulturtanken, 2017). Elevene kan ta i bruk egne erfaringer eller søke informasjon fra egen skole med hensyn til antall elever på egen skole, antall elever på naboskolen og størrelsen på gymsalen, slik at situasjonen blir basert på personlig erfaring. Elevene velger hvem som skal komme for å spille på dere skole som dette «berømte bandet» det blir referert til i oppgaveteksten (se vedlegg 2). Om elevenes svar blir tatt seriøst eller ikke, kan avhenge av undertegnedes respons på elevsvar og muligens av hva elevene er vant til å få av tilbakemeldinger fra egen lærer. Oppgaveteksten legger ikke opp til noen føringer av oppgaven i retning av «feil måte» eller «riktig måte» å løse oppgaven da oppgaveteksten er vid og kan løses ut i fra elevenes tidligere informasjon om skolen, fiktive tall eller innsamlet informasjon av elevene.

Skolekonsertoppgaven må også oppfylle prinsippet for modellkonstruksjon. Det er rom for å utvikle en modell i oppgaven, men det kan hende at elevene ikke ser på dette som et behov. Det kan være behov for en kontrollering av systemet elevene har satt opp, men behovet i oppgaven blir vel helst at elevene beskriver slik de har sett situasjonen i den siste oppgaven der de skal sette opp en kort presentasjon for ledelsen av skolen. Elevene må også kunne forutse hvor mange elever det er plass til i gymsalen, og kanskje konstruere en modell i form av en tegning av gymsalen der de også må huske å føre inn scenen i beregningene. Det kan være behov for å sette opp et budsjett for å finne ut om det går an å få besøk av bandet elevene har valgt. I tillegg kan det være behov for å finne ut hvor store arealer konsertlokalet har.

Selvvurderingsprinsippet må være tilstede i skolekonsertoppgaven. For å vurdere sitt eget arbeid må elevene evaluere om de har fullført alle trinnene i oppgaven. Først en strukturering av oppgaven. Så en utførelse og til slutt en beskrivelse av oppgaven som er utført. Elevene kan se nytten i oppgaven i den grad at de kan synes det er spennende å arbeide med en slik type oppgave kontra oppgaver fra en tekstbok. De kan se nytten i den grad at denne oppgaven kanskje vil forberede de mer til et arbeidsliv enn en oppgave med bestemte løsningsstrategier og en riktig løsning. Elevene kan bedømme om sin egen respons er god nok om en eventuell organisator kunne brukt deres utregninger til en planlegging av en konsert. De kan dessuten vurdere sitt svar opp mot hvor mange mennesker de pleier å være i gymsalen eller konsertlokalet til vanlig, og videre vurdere om konsertarenaen er full eller om det er plass til flere mennesker. Slik kan de vurdere om deres svar kan være realistisk, ved å ta utgangspunkt i hvor mange som pleier å være med på liknende arrangement og sammenlikne med sine egne løsningsforslag.

Det fjerde prinsippet for modelleringsoppgaver er eksternmodelleringsprinsippet. I følge Lesh m. fl. (2003) vil en modelleringsoppgave bestå av en del der elevene må gi en spesifikk besvarelse av fremgangsmåte eller løsningsstrategier ved besvarelse av oppgaven som er gitt. I skolekonsertoppgaven vil elevene kunne presentere matematiske objekter som utregning, tankeprosesser og relasjoner knyttet til planlegging av utførelsen i den siste deloppgaven der de skal presentere stikkord for ledelsen (se vedlegg 2). I oppgaven blir elevene spurt om å «skrive ned de nødvendige trinnene» og til slutt skal hvordan de har arbeidet presenteres. Det kunne hende at oppgaven skulle spurt mer konkret etter en matematisk modell som skulle blitt presentert til slutt, i stedet for å spørre om en såpass åpen fremgangsmåte.

Enkle prototyper-prinsippet er det femte prinsippet som må være tilstede for at skolekonsertoppgaven kan kalles en modelleringsoppgave. Skolekonsertoppgaven møter kriteriene om at det melder seg et behov for en modell som kan benyttes i andre sammenhenger (Lesh et al., 2003). Løsningene elevene finner kan mest sannsynlig overføres til andre situasjoner der det skal være en konsert i et gitt areal, og det er behov for å finne ut hvor mange billetter en kan selge og hvor mange publikummere det er plass til. Det kunne i tillegg blitt satt opp et budsjett, slik at elevene blir vant til å lage en slik økonomisk oversikt, som kan overføres til for eksempel personlig økonomi ved en senere anledning.

Det siste prinsippet skolekonsertoppgaven må oppfylle er generaliseringsprinsippet. Begrepsverktøyet som utvikles i denne oppgaven kan være algebra. En kan skrive en generell formel for å løse liknende konsertoppgaver med for eksempel denne formelen:

$$\left(l \bullet b - \frac{1}{5} \bullet l \bullet b\right) \bullet 2 = antall\ elever$$

Den kan bli revidert etter hvor stor plass scenen skal ta som i dette tilfellet $\frac{1}{5}$ av gymsalen, og hvor mange elever som kan stå per kvadratmeter. Det kan også lages en mer kompleks modell ved å ta hensyn til andre hindringer eller begrensninger i gymsalen, som ribbevegg, søyler, nødutgang osv.

I tillegg til et algebraisk uttrykk kan elevene sette opp et budsjett for konserten. Det står i læreplanen at elevene skal «gjere berekningar om forbruk, bruk av kredittkort, inntekt, lån og sparing, setje opp budsjett og rekneskap ved å bruke rekneark og gjere greie for berekningar og presentere resultata» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Et potensielt budsjett for eksempel kunne sett tilsvarende ut:

Utgifter: Leie lokale (for eksempel skolens gymsal) Leie band	 Gratis 40 000 kr
Inntekter: Billettinntekter	 7 000 kr

Spons fra et lokalt firma	10 000 kr
Sum	-23 000 kr

Tabell 4: Illustrasjon av mulig løsning på skolekonsertoppgaven (se vedlegg 2)

5 Analysekapittel

Dette kapittelet begynner med en forklaring av hva jeg legger i de ulike begrepene i modelleringssirkelen. Deretter vil det komme eksempler på hvordan datamaterialet er tolket under de ulike kategoriene. Til slutt vises en oversikt over modelleringsrutene til elevene i modelleringssirkelen ved arbeid med to oppgaver bestående av tre deloppgaver hver.

I analysen er det kun referert til syv av stegene i modelleringssirkelen. De ulike kategoriene der elevene får oppgaven eller har laget ferdig den matematiske modellen blir ikke referert til i analysen. Det er fordi det er mer synlig når elevene beveger seg mellom de ulike kategoriene i stegene på veien dit, enn når de er i de ulike modellene.

5.1 Eksempler på tolket datamateriale

For å gjøre denne oppgaven gjennomsiktig vil jeg presentere noen utvalgte sekvenser som jeg mener illustrerer hvordan jeg har tolket datamaterialet mitt inn i de ulike kategoriene.

5.1.1 Tolke

Jeg har tolket datamaterialet slik at når elevene leser oppgaven for å få klarhet i hva den vil ha svar på, eller kommuniserer med hverandre der de forsøker å sette ord på hva oppgaven spør om, så er de under kategorien *tolke*. I eksempelet under forsøker Sofie å sette ord på hva oppgaveteksten spør etter ved å lese oppgaveteksten høyt for seg selv om resten av gruppa.

80 Sofie: Okei. Hva var en? (Leser fra oppgaven). Planlegg hvordan dere vil gå frem for å løse problemet, og skriv ned de nødvendige trinnene for å for å finne en løsning.

Et annet eksempel på min tolkning av kategorien *tolke* er der Mathias spør de andre elevene indirekte om hvor mange det er plass til i gymsalen.

59 Mathias: Det står jo ikke her da, hvor mange det er plass til i gymsalen. I hvert fall ikke som jeg har fått med meg.

60 Sofie: Det spørs hvor stor gymsalen er.

I eksempelet over spør Mathias indirekte de andre elevene om de har sett at det sto noe i oppgaven om hvor mange det var plass til i gymsalen (se vedlegg 2). Han lurer på hvor det står noe om hvor mange som får plass i gymsalen, og er pleier kanskje å finne alle opplysninger for å kunne løse en oppgave i oppgaveteksten. Mathias tolker oppgaven i den grad at han forsøker å finne ut hva oppgaven spør etter og om oppgaven gir alle opplysningene de trenger for å løse den.

5.1.2 Forenkle

Jeg har tolket kategorien *forenkle* slik at når elevene snakker om hvilke elementer som bør være med i oppgaven og hvilke elementer som er overflødige har de valgt ut informasjon som de mener må være med for å besvare oppgaven. Denne kategorien inneholder også elementer av der informasjonen de har valgt ut eller utelukket settes i en sammenheng til oppgaven. Første eksempel som jeg har tolket inn i denne kategorien er en samtalesekvens der elevene snakker om hvor mange elever de er på skolen og hvor mange som skal få komme på konserten (se vedlegg 2).

93	Sofie:	2… Jeg vet ikke? Er vi ikke 300?
94	Mathias:	260 eller noe sånt tror jeg?
95	Sofie:	200-300. Det spørs.
96	Mathias:	Men det er jo sånn da. Hvis de kommer da, vet jeg ikke om første klasse skal være med liksom. Første og andre og tredje.
97	Emil:	Hvis vi tar 5-7 og 8-10 da?

Som vi kan se over diskuterer elevene hvor mange elever de er på skolen, og om alle klassene skal være invitert til konserten. De forsøker å finne ut hvilke elementer som skal være med for å besvare oppgaven, og om de vil invitere alle elevene på skolen eller om det holder at femteklasse til og med tiendeklasse er invitert.

5.1.3 Matematisere

Å gi en matematisk sammenheng til oppgaven, altså å nevne eller begrunne ulike tall eller matematiske elementer som bør være med i oppgaven har jeg kategorisert som å *matematisere*. Noen eksempler som går under denne kategorien er presentert under. Det første eksempelet er der elevene diskuterer hva tabellen i alarmoppgaven viser (se vedlegg 1). Elevene snakker om tidsintervallet mellom tallene som er representert i tabellen.

10	Mathias:	På den her statistikken er det hvert femte år.
13	Sofie:	Åja. Nei, men. Hvert tiende år.
14	Mathias:	Hvert tiende da er det fra 1960 til 1970, og 1970 til 1980 liksom …

Elevene forsøker å bli enige om hva tabellen viser, altså hvilke tidsintervaller som blir presentert. De diskuterer hvilke tall som burde være med for å kunne svare på oppgaven. Eksempelet ovenfor på kategorien å matematisere er tatt med for å vise at kategorien å matematisere ikke trenger å være en ferdig utviklet matematisk modell av elevene, men veien til denne matematiske modellen. I eksempelet over henviser elevene til tidsintervaller og tolker en matematisk tabell, der de må ha matematiske bakgrunnskunnskaper for å ha muligheter til å tolke modellen. Elevene har ikke utviklet en ferdig matematisk modell, men holder på å tolke den matematiske tabellen og snakker om hvilke matematiske elementer som hører til tabellen, i dette tilfellet tidsintervaller. I det andre eksempelet diskuterer elevene hvor arealet på gymsalen (se vedlegg 2). De forsøker å bli enige om hvor lange sidene i gymsalen er, slik at de kan regne ut antall kvadratmeter.

158 Emil: Det er sånn 24 meter rundt … Nei kortsiden og sånt.

159 Mathias: Kortsiden er cirka tjue, 40 langsiden vil jeg tro.

160 Sofie: Den er 42.

Her forsøker elevene å bli enige om verdiene til lengden og bredden i gymsalen de skal bruke i oppgaveløsningen. De nevner flere tall de mener kan representere lengden og bredden i gymsalen de vil benytte seg av. Dette eksempelet på min tolkning av matematisering viser at jeg ikke mener at kategorien matematisering er inn under en matematisk modell, men matematiske elementer som tilføres av elevene rett før de har funnet den matematiske modellen. Elevene ønsker å benytte seg av utregningen av arealet til gymsalen. De har ikke satt opp den matematiske modellen $l * b = areal$ enda, men er på vei til å finne tallene som skal representere verdiene for lengde og bredde.

5.1.4 Arbeide matematisk

Tolkningen min av denne kategorien er når elevene bearbeider tall eller matematiske sammenhenger, der matematikken blir satt inn i en sammenheng. Som regel er dette utregninger der elevene utfører regneoperasjoner. I eksemplet under gjør eleven et overslag der han runder et tall oppover, for deretter å presentere et multiplikasjonsstykke for å finne arealet til gymsalen (se vedlegg 2).

167 Mathias: 45 og 24 da. Da må vi sikkert regne om det til 25 da. 45 gange 25 i kvadratmeter.

Tallet 24 blir avrundet til 25, og Mathias presenterer samtidig multiplikasjonsstykket 45 multiplisert med 25 for de to andre i gruppen. Nå er ikke tallene bare nevnt lenger, men de er satt inn i sammenhengen ved at Mathias ønsker å multiplisere med hverandre. Dette er tall som skal bli multiplisert med hverandre, men i transkripsjonen kommer det ikke frem noe svar ved utregning av den matematiske modellen. Elevene har satt opp en matematisk modell der arealet skal regnes ut ved $l * b = areal$, men det er ikke noe tydelig svar som kommer frem ved samtale, bare skriftlig ved at de tre elevene skrev utregningen og svaret på utregningen ned på hvert sitt ark.

5.1.5 Fortolke

Jeg tolker elevenes utsagn i kategorien *fortolkning* når elevene tolker en matematisk løsning som opp mot en løsning som er reell i den virkelige verden. I denne kategorien har jeg ingen eksempler, siden jeg ikke har tolket noen av elevutsagnene under transkriberingen inn i denne kategorien (se figur 6, 7 og 8). Noe som kunne vært et eksempel på denne kategorien hadde vært hvis elevene hadde diskutert videre rundt utregningene av arealet av gymsalen (se vedlegg 2). Hvis elevene hadde diskutert den matematiske løsningen av arealet av gymsalen reell på deres skole eller naboskolen, kunne det falt innunder denne kategorien.

5.1.6 Validere

Jeg har tolket datamaterialet slik at når elevene kontrollerer løsningene de kommer frem til opp mot oppgaveteksten som er blitt gitt er dette *validering*. Altså en revurdering av løsningene. I det første eksempelet har de svart på at de skal bruke sin egen gymsal, men Mathias tar det opp en gang til (se vedlegg 2).

140 Mathias: Men hvis vi tar hele gymsalen da. Hvis vi skal ha One Direction på besøk. Så tror jeg vi bør ha hele gymsalen. Og jeg vet ikke jeg. Skal vi stå liksom? Fylle opp hele greia?

141 Emil: Det er jo plass til 300 stykker da.

142 Mathias: Spørsmålet er vel hvor mye det tåler da. Altså det er jo hult under gulvet der tror jeg.

De har blitt enige om å bruke hele gymsalen på skolen sin, men så oppdager Mathias at han vil ta høyde for at de må tenke på hvor mye gymsalen tåler. Han tolker det slik at de også må tenke på vekt når de skal utarbeide en løsning på oppgaven. Senere i samme oppgave blir det igjen diskutert hvor mange som skal få plass på konserten. Elevene har først kommet frem til at det går an å gi deltakerne på konserten sitteplasser, men så revurderer de valget.

190 Mathias: Er det om å gjøre å få trykt inn flest folk da?

191 Sofie: Ja.

192 Mathias: Det blir jo solgt ut på konserter.

193 Sofie: Vi må jo få flest folk. Folk vil jo komme.

194 Mathias: Jaja. Da står vi da.

De har først blitt enige om sitteplasser på konserten, men så kommer Mathias på at det er om å gjøre å få solgt flest billetter til en konsert, og Sofie er enig om at det er mange som har lyst til å komme på konsert og at de må få komme inn. Mathias konkluderer med at det er best å ha ståplasser til deltakere, slik at de får plass til flest mulig folk på konserten.

5.1.7 Presentere

Den siste kategorien går ut på å *presentere* en løsning, altså å svare på oppgaven. Inn under denne kategorien har jeg tolket det elevene snakker om at de skal svare på oppgavene. For eksempel spør Sofie de andre to om de skal skrive det Mathias akkurat har sagt da de arbeider med alarmoppgaven (se vedlegg 1).

14 Mathias: Hvert tiende da er det fra 1960 til 1970, og 1970 til 1980 liksom. … Så da vil jeg tro at det er riktig da.

15 Sofie: Ja, skal vi skrive det da?

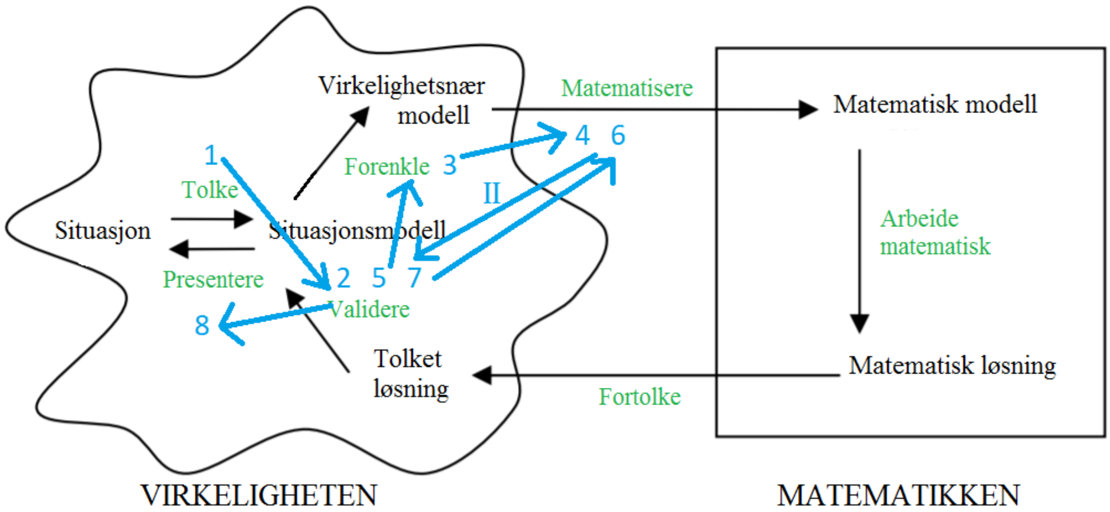
Etter at Sofie har spurt om det er dette de skal svare skriver elevene ned det Mathias har sagt, altså «det er riktig». Jeg har tolket det slik at det Sofie sier er å presentere en løsning på oppgaven, sammen med det at Mathias tror at det er riktig. Det er en direkte sammenheng til det elevene skriver ned og svarer på arket sitt. I en annen sammenheng er det en ny løsning som Mathias presenterer, og Sofie er enig.

47 Mathias: Fordeler kan jo være at folk slipper å være redd. For veldig masse innbrudd liksom.

48 Sofie: Ja.

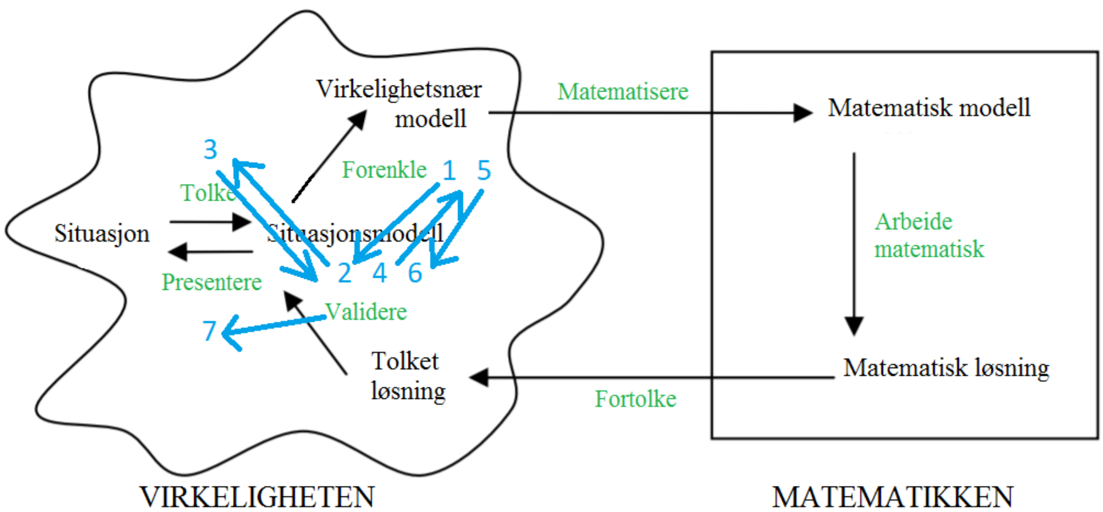
Ovenfor presenterer Mathias en løsning som Sofie sier seg enig i. Etter Sofies bekreftelse skriver alle tre ned løsningen som Mathias har presentert.

5.2 Modelleringssirklene som illustrerer modelleringsrutene til elevene



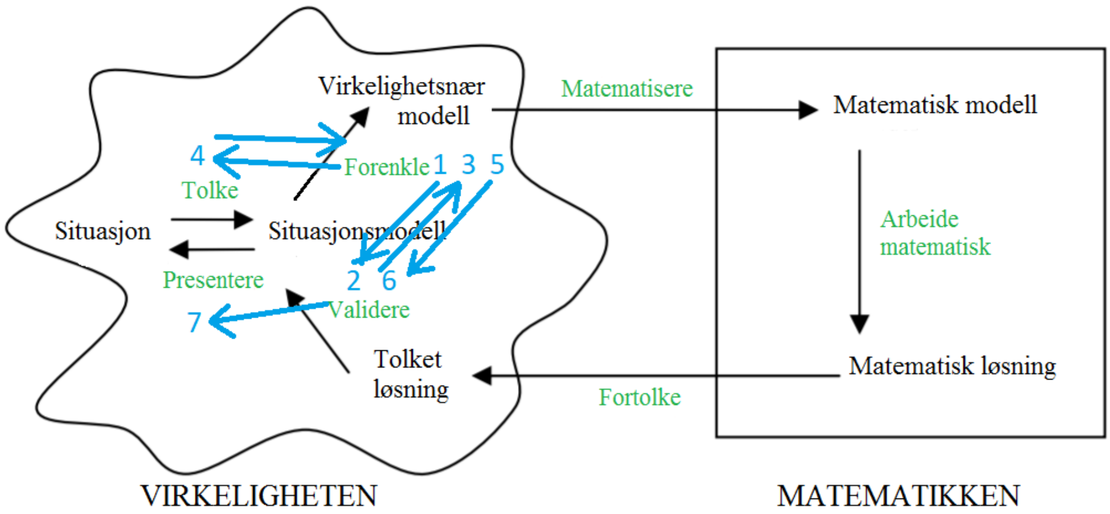
Figur 6: Illustrasjon av modelleringsruten til elevene i oppgave 1 del 1

I figur 6 er modelleringsruten til elevene illustrert med piler og tall som sier noe om stegene i ruten. Romertallet viser antall ganger pilen det er plassert med går den veien. I illustrasjonen over er det en kobling mellom å matematisere og validere. Kategoriene å tolke og å validere er med i de første tankeprosessene til elevene. En kan ut i fra illustrasjonen se at elevene har arbeidet i en slags sirkel-syklus, der det andre steget et innom å validere i stedet for å gå rett fra å tolke til å forenkle, og der å arbeide matematiske og å fortolke uteblir fra syklusen i tillegg til at elevene går en ekstra gang mellom kategoriene å validere og å matematisere. Den siste pilen leder mot kategorien å presentere.



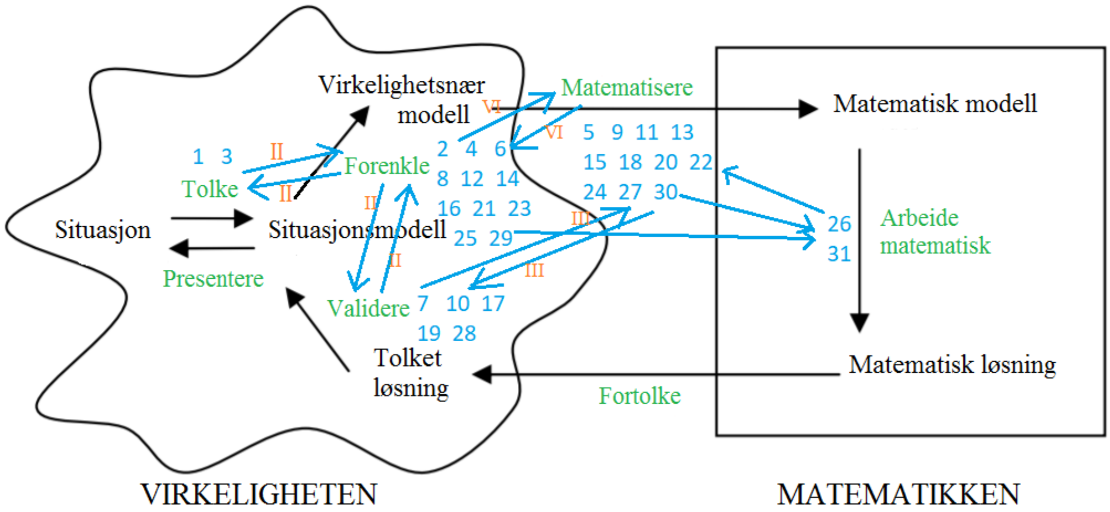
Figur 7: Illustrasjon av modelleringsruten til elevene i oppgave 1 del 2

I modelleringsruten vist ovenfor starter illustrasjonspilen fra kategorien å forenkle. I løpet av modelleringsruten er elevene innom kategorien å validere flest ganger. Den siste pilen i illustrasjonen av modelleringsruten illustrerer at elevenes modelleringsrute avsluttes ved kategorien å presentere. Elevenes modelleringsrute er i oppgave 1 del 2 ikke innom matematikkens verden i det hele tatt, hverken å matematisere, å arbeide matematisk eller å fortolke. Elevene er ikke engang innom kategorien å matematisere som fører fra den virkelige verden over til den matematiske verden i denne modelleringsruten. Denne modelleringsruten ser ikke ut som en sirkel, men går heller frem og tilbake mellom noen kategorier. Noen eksempler der elevene går frem og tilbake mellom kategorier er da de gikk frem og tilbake mellom kategoriene å validere og å tolke, da de gikk frem og tilbake mellom kategoriene å validere og forenkle.



Figur 8: Illustrasjon av modelleringsruten til elevene i oppgave 1 del 3

Illustrasjonen av modelleringssirkelen ovenfor viser at elevene starter modelleringsruten sin med oppgave 1 del 3 med å forenkle problemet. De har beveget seg fra kategorien å forenkle videre til kategorien å validere, for så å gå tilbake til kategorien å forenkle. Denne modelleringsruten er relativt lik modelleringsruten for oppgave 1 deloppgave 2. Det vil si at modelleringsruten ikke er innom kategoriene å matematisere, å arbeide matematisk eller å fortolke. Modelleringsruten er ikke innom matematikkens verden i det hele tatt, ikke engang kategorien å matematisere som fører fra den virkelige verden over til den matematiske verden. Denne modelleringsruten ser heller ikke ut som en sirkel, men går heller frem og tilbake mellom noen kategorier. Modelleringsruten går for eksempel frem og tilbake mellom kategoriene å validere og å tolke, i tillegg til at den går frem og tilbake mellom kategoriene å validere og forenkle. Den siste pilen viser at elevene avslutter i kategorien der de presenterer arbeidet sitt.



Figur 9: Illustrasjon av modelleringsruten til elevene i oppgave 2 del 2

Alt elevene svarer på i oppgave to om skolekonserten har jeg tolket som et svar på deloppgave to. På illustrasjonsbildet ovenfor kan en se at elevene har startet modelleringsruten sin med å bevege seg fra kategorien å tolke over i å forenkle, tilbake til kategorien å tolke og til å forenkle igjen. Vi ser ut i fra illustrasjonene av pilene peker frem og tilbake mellom kategoriene å matematisere og å validere, men også mellom å matematisere og å forenkle. Det vil si to ganger frem og tilbake mellom å tolke og å forenkle, det vil si det første, andre, tredje og fjerde trinnet i illustrasjonen. På illustrasjonen er det illustrert med romertall hvor mange ganger elevene beveger seg i retningen pilen peker i løpet av hele illustrasjonen. Det vil si at elevene beveger seg to ganger fra kategorien å tolke over i kategorien å forenkle i illustrasjonen ovenfor. Tilsvarende beveger elevene seg seks ganger mellom kategoriene å forenkle og å matematisere. Denne illustrasjonen oppfattes av meg som at modelleringsruten ikke er syklisk. Det ser ut som om elevene beveger seg frem og tilbake mellom to kategorier like mange ganger. Modelleringsruten til elevene avsluttes med kategorien å arbeide matematisk.

5.3 En oppsummering av funn i analysekapittelet

Alle illustrasjonene av modelleringsrutene viser at elevene enten starter på kategorien å tolke eller på kategorien å forenkle. Begge disse kategoriene er i starten av modelleringssirkelen, altså de to første kategoriene i modelleringssirkelen.

Elevene arbeider kun innenfor den virkelige verden i tre av fire modelleringsruter. De er innom den matematiske verden ved å arbeide matematisk i den ene modelleringsruten, men da kun to ganger. Elevene er ikke innom kategorien å fortolke en eneste gang i noen av modelleringsrutene. Elevene arbeider mest innenfor tre av kategoriene: å forenkle, å matematisere og å validere. Foruten i modelleringsrute nummer to er kategorien å matematisere en av kategoriene elevene er innom flest ganger i arbeid med modelleringsoppgavene. Kategoriene å forenkle og å validere forekommer flest antall ganger i alle de fire modelleringsrutene. Det vil si at elevene er innom disse kategoriene flere ganger enn å forenkle, å validere, å arbeide matematisk og å validere. Ofte er det en sammenheng mellom kategoriene å forenkle og å matematisere og mellom kategoriene å matematisere og å validere. Mange av pilene går mellom disse tre kategoriene, det vil si at elevene går fra for eksempel å forenkle til å matematisere for deretter å gå tilbake til å forenkle. Elevene går ofte fra en kategori til en annen for så å gå tilbake til den de kom fra. Dette skjer spesielt i den fjerde modelleringsruten.

I følge modelleringsrute nummer to og tre går elevene rett fra å forenkle problemet til å validere det de har kommet frem til ved forenklingen. Det vil si at elevene forenkler og strukturerer informasjonen de har fra situasjonen som er gitt dem, og konkluderer ut i fra denne informasjonen uten å lage en matematisk modell å konkludere ut i fra. De er heller ikke innom en matematisk sammenheng ved å matematisere før de konkluderer. I tre av modelleringsrutene avslutter elevene med å presentere en løsning. Dette er den siste kategorien i modelleringssirkelen, og arbeidet kan sees på som «ferdig» eller startes opp igjen med en ny runde i modelleringssirkelen. I den siste modelleringsruten der elevene er innom kategorien å arbeide matematisk avslutter de ikke i kategorien å presentere. I modelleringsrute nummer fire avslutter elevene modelleringsruten sin i kategorien å arbeide matematisk. Det er kun den ene modelleringsruten som er innom kategorien å arbeide matematisk. I de andre tre modelleringsrutene holder elevene seg i den virkelige verden, og kommer aldri til kategoriene å arbeide matematisk eller å fortolke.

Den første modelleringsruten følger kategoriene nesten i «riktig rekkefølge» sammenliknet med malen som Blum og Ferri har presentert modelleringssirkelen. I denne modelleringsruten følger elevene den hypotetiske modelleringsruten som Blum og Ferri har satt opp, bort sett fra at de ikke er innom kategoriene å arbeide matematisk og å fortolke. I de tre siste modelleringsrutene går ikke modelleringsrutene i en sirkel slik som modelleringssirkelen er konstruert. Modelleringsrutene går mye frem og tilbake mellom kategoriene i den virkelige verden. Ofte går modelleringsrutene fra en kategori til den neste for så å gå tilbake til den første kategorien.

6 Modelleringsrutene til tre elever

I dette kapittelet skal jeg se nærmere på følgende problemstilling: Hvordan er modelleringsrutene til tre elever i 9. klasse i arbeid med to modelleringsoppgaver? I tillegg vil jeg diskutere forskningsspørsmålene: Hvordan ser disse modelleringsrutene ut sammenliknet med andre elevers modelleringsruter? Hvilke blokader er det elevene eventuelt møter på underveis i arbeid med oppgavene? Hva skal til for å utvikle elevenes modelleringskompetanse? Jeg vil begynne med å se på funn jeg har gjort i analysekapittelet, for deretter å ta for meg lærebøkene elevene benytter på skolen, og tilslutt å se på hva som skal til for å utvikle elevenes modelleringskompetanse.

6.1 Starter i kategoriene å tolke eller å forenkle

Alle de fire modelleringsrutene i analysen startet i kategoriene å tolke eller å forenkle. Blum og Ferri (2009) har sett på to modelleringsruter. Selv om de har benyttet seg av modellen litt annerledes enn jeg har, ved at de bruker modellene i syklusen som trinn i stedet for overgangene slik jeg har gjort, starter begge elevene syklusen sin i starten av illustrasjonen ved virkelighetsnær modell. Dette trinnet kan overføres til min kategori å tolke. I to av tilfellene viser mitt eget datamateriale at elevene starter i denne kategorien, ved at de tolker oppgaven. Dette kan tyde på at det er naturlig for elevene å starte å løse en oppgave ved å finne ut hva oppgaven spør etter. Også ved en senere anledning har Blum (2015) beskrevet en modelleringssyklus, denne gangen som et løsningsforslag på en oppgave der det blir spurt om det lønner seg å kjøpe en suvenir t-skjorte i sentrum eller å kjøpe den samme t-skjorten på et kjøpesenter litt utenfor til en billigere pris. I denne artikkelen foreslår Blum en fremgangsmåte trinn for trinn basert på modelleringsmodellen han og Leiss har utarbeidet noen år i forveien. Det første trinnet består av «We construct a mental model of the situation», der Blum henviser til et bilde av et kart over strekningen mellom sentrum og kjøpesenteret. Det kan hende at det finnes ulike måter å tolke dette trinnet på, men jeg tenker at det ikke er det mentale kartet som burde være under dette trinnet, men at elevene ser for seg hva de skal løse. I Blum sitt tilfelle ville det kanskje vært å få det klart for seg hva oppgaven spør etter? Den ene t-skjorten er dyrere enn den andre, her må man regne ut prisforskjell. I tillegg kommer det andre elementer inn i bildet slik som kostnad for reisen, og hvilket fremkomstmiddel en skal benytte seg av. I tillegg kan elevene se for seg dette mentale bildet av kartet som Blum illustrerer i figur nummer tre (Blum, 2015). Altså også i denne forskningen mener Blum det har det vært naturlig å starte modelleringsruten i tolkning av oppgaven slik som elevene i datainnsamlingen har gjort to ganger.

6.2 Modelleringsrutene er innenfor den virkelige verden

I følge de fire modelleringsrutene i analysen arbeider elevene mest innenfor den virkelige verden, og lite innenfor den matematiske verden. Schaap et al. (2011) skriver at å bygge egne matematiske modeller er vanskelig for elevene. De mener at formler blir gitt elevene i tester som er skrevet på forhånd, og at strategier for å bygge sine egne matematiske modeller ikke er med i undervisningen. Konsekvensene blir at elevene ikke lærer å lage sine egne matematiske modeller (Schaap et al., 2011). De tre elevene som var med i undersøkelsen utviklet ikke en universell matematisk modell, og de arbeidet mest med å finne ut forhold fra den virkelige verden. For eksempel brukte elevene lang tid på å finne ut hvor mange elever de har på skolen og hvor mange elever de var per trinn.

88	Mathias:	Da må vi skrive opp alle trinnene da. Og så tenk cirka hvor mange det er.
89	Sofie:	Skal vi regne ut med 8-10 her óg?
90	Mathias:	Ja. Det er jo for alle skolene da.
91	Emil:	Hvor mange elever er vi her da?
92	Mathias:	300?
93	Sofie:	2.. Jeg vet ikke? Er vi ikke 300?
94	Mathias:	260 eller noe sånt tror jeg?
95	Sofie:	200-300. Det spørs.

Det virker som om elevene i undersøkelsen synes det er vanskelig å gjøre antakelser i denne situasjonen (Blum, 2011; Sol et al., 2011). Mathias, Emil og Sofie fokuserer ikke på å lage en matematisk modell der de kunne skiftet ut de ulike variablene. I likhet med elevene i undersøkelsen til Sol et al. (2011) har elevene vanskeligheter med å gjenkjenne variabler og forholdet mellom disse. Elevene i Sol et al. (2011) undersøkelse kunne trengt hjelp med de to første trinnene i den hypotetiske handlingsmodellen (se tabell 3). Elevene i denne undersøkelsen kunne også med fordel fått hjelp til de to første trinnene i den hypotetiske handlingsmodellen. Da ville de kanskje i større grad kunne tenke seg til at når de har utviklet en matematisk modell for situasjonen kan variabler som antall på skolen eller areal på gymsalen byttes ut for å løse oppgaven.

Elevene forklarer aldri hvordan de kommer frem til løsningene sine hverken til hverandre eller som et svar på oppgaven. Edo et al. (2013) har forsket på hva elever i 9. klasse synes er vanskelig når de arbeider med modelleringsoppgaver i PISA-modellen 5 og 6. De har kommet frem til at det er vanskelig for elevene å forklare fremgangsmåtene de bruker. Da de spør hvorfor elevene ikke skriver hvordan de kommer frem til svaret svarer en elev «I find it hard to write regularly, I just think in head and count it directly[sic]» (Edo et al., 2013, s. 49) og en annen elev svarer «I do not know how to write it» (Edo et al., 2013, s. 50). De kom frem til følgende konklusjoner: for det første har elevene vanskeligheter med å formulere situasjoner matematisk, som innebærer å representere situasjonen matematisk og å gjenkjenne matematisk struktur i problemer (som inkluderer regelmessigheter, forhold og mønstre). Elevene som var med i undersøkelsen kan også ha hatt vanskeligheter med å formulere situasjonen matematisk da de i arbeid med alarmoppgaven (se vedlegg 1), i de tre første modelleringsrutene arbeidet mest innenfor å tolke, å forenkle og å validere.

Jablonka (2007) skriver at mange elever opplever er problem med en typisk tekstoppgave som en kan finne over hele verden i lærerbøker og i tester. Disse tekstoppgavene kan hverken sies å tydelig tilhøre en hverdagspraktisk kontekst, som kan sees på som en hverdagskunnskap, eller bli identifisert med at de tydelig tilhører en akademisk kontekst som vil vise at poenget er at de skal løses matematisk (Jablonka, 2007). Slike oppgaver som ikke er tydelig identifisert innenfor en hverdagspraktisk kontekst eller en akademisk kontekst kan gjøre at elevene føler at oppgavene hverken gir mening i deres hverdag eller i matematikklasserommet. Jablonka (2007) skriver også at selv om en kan lage en liste over verdensbaserte modelleringsoppgaver om miljøproblemer, migrasjon, økonomisk ulikhet og våpenteknologi, kan en ikke anta at disse problemene vil være like relevante for alle. Da det er forskjeller i kulturell bakgrunn og noen av problemene kan havne i konflikt med lokale prioriteringer (Jablonka, 2007). Dette kan en se ut i fra et utsagn fra transkripsjonen der det virker som om oppgavene som blir gitt til elevene ikke gir mening i deres hverdag.

238 Mathias: Masse mer sånn. Lærer på skolen tre pluss tre. Kommer på matteprøve. Per har en seng på 14 meter. Hva er omkretsen av solen?

Dette utsagnet kan tolkes som om Mathias ikke synes oppgavene som gjøres på skolen, oppgavene som gjøres som hjemmelekse og oppgavene som kommer på prøven ikke samsvarer.

6.3 Kategoriene å forenkle, å matematisere og å validere

Schaap et al. (2011) skriver også om tre mulige faser det kan oppstå blokader i modelleringssirkelen. En kan tenke på disse fasene som en overordning eller strukturering av de elleve blokadene i modelleringsprosessen. I fasen der elevene skal identifisere problemet, altså blokaden *å ikke kunne plukke opp problemet i situasjonen*, mener de at det kan ligge flere grunner bak. Blant annet forvirrende formuleringer i problemteksten, å overse viktige elementer i problemteksten, eller en forventning om hint, retningslinjer og nødvendig informasjon i problemformuleringen.

8 Mathias: Du ser at i første setningen er slagordet korrekt. De har funnet på sitt eget slagord for reklamen. At hvert tiende år dobles eller triples antall innbrudd i boliger.

9 Sofie: Å ja.

10 Mathias: På den her statistikken er det hvert femte år.

11 Sofie: Da er det ikke korrekt da.

12 Mathias: Da er det jo korrekt da.

13 Sofie: Å ja. Nei, men. Hvert tiende år.

14 Mathias: Hvert tiende da er det fra 1960 til 1970, og 1970 til 1980 liksom. … Så da vil jeg tro at det er riktig da.

I eksempelet over, hentet fra transkripsjonen, ser det ut til at elevene blir forvirret av at oppgaveteksten viser til slagordet som opererer med hvert tiende år, mens tabellen viser økningen hvert femte år. Mathias, Sofie og Emil forenkler hvilke matematiske elementer som skal være med, forholder seg til opplysningene og tallene som er gitt i oppgaven og validerer så vidt til slutt ved å se over tallene i tabellen for å se om de dobles eller triples i løpet av ti år. I tillegg til blokaden presentert av Sol et al. (2011) med forvirrende formuleringer i problemtesten som nevnt ovenfor, virker det som om elevene har en oppfatning av at oppgaven gir dem nødvendig informasjon og hint. De trekker ikke inn ny informasjon eller gjør noen individuelle utregninger, men baserer svaret sitt på informasjonen og hintene de får i oppgaveteksten. Blum (2011) mener at en velkjent løsningsstrategi for elevene er at elevene trekker ut all informasjon de ser på som relevant for oppgaven og ignorerer resten av teksten. Strategien går ut på å gjøre noe med informasjonen i samsvar med kjente operasjoner og modeller. Mathias, Sofie og Emil trekker ut informasjonen de mener er relevant, men bruker ikke denne informasjonen i kjente operasjoner eller modeller. De validerer informasjonen ut ifra slagordet i oppgaven (se vedlegg 1).

Hvis elevene ofte møter blokadene Sol et al. (2011) beskriver som vanskeligheter med forvirrende formuleringer i problemteksten, å overse viktige elementer i problemteksten eller en forventning om hint, retningslinjer og nødvendig informasjon i problemformuleringen, virker det som om elevene ikke ser behovet for å utvikle en matematisk modell, og validerer denne manipulasjonen de gjør med det de anser som nødvendig informasjon i problemteksten. Dette kan være en mulig forklaring på hvorfor disse tre kategoriene å forenkle, å matematisere og å validere forekommer relativt ofte i datamateriale hentet fra analysen i denne undersøkelsen. Samtidig står det som et læringsmål i LK 06 at elevene skal være i stand til å: «analysere samansette problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar, gjennomføre berekningar og presentere resultata på ein formålstenleg måte» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det vil si at å lese sammensatte problemstillinger og koble sammen sammensatte problemstillinger til kjente løsningsmetoder er kompetansekrav etter tiende trinn. Altså noe elevene skal ha uavhengig av deres modelleringskompetanse.

6.4 Sammenheng mellom kategoriene å forenkle, å matematisere og å validere

Elevene viser i analysen at modelleringsruten deres ofte går fra kategorien å matematisere og å validere. Kan dette komme av at elevene har vanskeligheter med å formulere situasjonen matematisk, og holder seg derfor i den virkelige verden, altså validerer antakelser basert på virkeligheten? Elever har ingen problemer med å løse matematiske problemer de allerede har konstruert (Edo et al., 2013). Problemet som kan ha oppstått hos elevene i denne sammenhengen kan være at de ikke har klart å formulere situasjonen over til en matematisk modell som de kan løse. Det vil si at om elevene i min undersøkelse hadde hatt en matematisk modell å gå ut i fra eller om de hadde kommet frem til en matematisk modell ville de kanskje klart å løse oppgavene som ble gitt med en matematisk begrunnelse. Resultatene i undersøkelsen til Sol et al. (2011) viser at elevene har vanskeligheter med å formulere situasjoner matematisk. Denne studien underbygger også vanskelighetene elever har med å formulere et problem matematisk når de ikke får oppgitt en matematisk modell. Sol et al. (2011) tolker disse resultatene som at elevene ser på prosjektet som en kjede av små problemer som må løses heller enn et stort sammensatt problem. Altså er ikke elevene klar over modelleringsprosessen som verdensomspennende matematisk prosess, men ser på den som et stort sett med problemløsningsoppgaver. Det at elevene kan se på oppgavene som ble gitt i datainnsamlingen som en kjede av problemer kan samsvare med hvordan de har løst alarmoppgaven (se vedlegg 1). I denne oppgaven gjør de seg ferdig med ett og ett punkt i oppgaven. Alarmoppgaven blir løst av elevene så oppstykket at resultatet i analysen ble en modelleringsrute per deloppgave. Elevene vil gjøre seg ferdige med en oppgave for å starte på neste oppgave. Et eksempel på en slik avslutning av oppgaven kan være etter første del på alarmoppgaven. Her blir elevene enige om hva de skal svare på denne oppgaven, før de leser neste problemformulering. Etter de har skrevet ned et svar fortsetter de med å lese neste deloppgave mer eller mindre uavhengig av forrige svar og opplysninger.

14 Mathias: Hvert tiende da er det fra 1960 til 1970, og 1970 til 1980 liksom. … Så da vil jeg tro at det er riktig da.

15 Sofie: Ja, skal vi skrive det da?

(Alle skriver ned svaret hver for seg)

(Alle leser i oppgaveteksten)

16 Mathias: Det vet jeg faktisk ikke.

17 Sofie: Det hadde jo ikke vært lov og sånn.

Sofie trekker inn om produsentene har lov eller ikke til å fremstille akkurat disse dataene, uavhengig av å tenke på om dette har noe å gjøre med svaret på forrige deloppgave der dataene passer utmerket godt med slagordet. I deloppgave to er det derimot ikke en sammenheng mellom kategoriene å matematisere og å validere, da kategorien å matematisere ikke forekommer i denne modelleringsruten.

Modelleringsrutene i analysen viser at elevene relativt ofte går mellom de to kategoriene å forenkle og å validere. I alle de fire modelleringsrutene har elevenes modelleringsruter gått fra å validere til å forenkle eller begge veier. I følge resultater av en undersøkelse gjort av Edo et al. (2013) viser det seg at elever har vanskeligheter med å formulere situasjoner matematisk. I dette inngår å representere en situasjon matematisk og gjenkjenne matematiske strukturer som mønstre, matematiske forhold og regelmessigheter (Edo et al., 2013). Dette kan stemme overens med funnene i mine datamaterialer da de tre første modelleringsrutene ikke er innom en matematisk modell eller en matematisk løsning. Stegene som blir hyppig repetert er de som tolkes klassisk som problemløsningsoppgaver, nemlig stegene å formulere problemer eller underliggende problemer på en matematisk måte, problemløsningsprosess som involverer å finne en løsning og å gjenkjenne meningen og innholdet i løsningene og konklusjonene i den virkelige verden (Sol et al., 2011). Samtidig viser datamaterialet at elevene konstruerer en matematisk modell der de finner arealet på gymsalen de vil benytte som konsertlokale. Til tross for utregningen av arealet i gymsalen kan det virke som om elevene forsøker å formulere problemet i kategorien å forenkle, for deretter å forsøke å finne en løsning og godkjenne innholdet i løsningen i kategorien å validere.

Jablonka (2007) mener at modelleringsoppgaver krever avgjørelser og evaluering av kvalitativ informasjon og underliggende matematiske modeller hyppig. For å kunne gjøre disse avgjørelsene og evalueringene krever det kunnskap om konteksten, politisk kunnskap og avgjørelser basert på verdier i tillegg til matematisk begrepskunnskap (Jablonka, 2007). Selv om ikke elevene i undersøkelsen min alltid baserte evalueringene sine på matematisk begrepskunnskap, evaluerte de forenklingene de hadde kommet frem til hyppig. Som for eksempel når de skulle løse deloppgave tre på alarmoppgaven.

40 Sofie: Fordelene er vel at folk ikke blir tvunget til å kjøpe alarmsystem.

41 Mathias: Bør jo ha det da. Det kan jo være mer at dem ikke (Sofie avbryter)

42 Sofie: Vi har ikke det. Men det er jo fordi dem rekker ikke hit uansett. Tyvene er borte hvis dem skal komme seg hit.

43 Mathias: Ja, men den reagerer jo med en gang da.

44 Sofie: Ja, men uansett. Det tar jo litt tid for det begynner å pipe.

45 Mathias: Overvåkningsgreier da …

46 Sofie: Ja, men vi har ikke det heller. Vi har ikke noe.

47 Mathias: Fordeler kan jo være at folk slipper å være redd. For veldig masse innbrudd liksom.

I eksempelet over snakker hverken Sofie eller Mathias om matematiske begreper eller modeller. De evaluerer og validerer mulige løsninger. Edo et al. (2013) konkluderer sin undersøkelse med at elevene har vanskeligheter med å evaluere rimelige matematiske løsninger i sammenheng med et virkelighetsnært problem (Edo et al., 2013). De fire modelleringsrutene som blir presentert i analysen viser at elevene validerer mulige løsninger flere ganger. Det de derimot ikke validerer er matematiske løsninger. I den fjerde modelleringsruten (se figur 9) arbeider elevene matematisk, men de evaluerer ikke den matematiske løsningen. Det de derimot validerer er forenklinger de har gjort i de andre tre modelleringsrutene (se figur 6, 7 og 8).

6.5 Avsluttes i kategorien å presentere

Datamaterialet viser at de tre elevene avslutter arbeidet på kategorien å arbeide matematisk en gang. I Blum og Ferri sin undersøkelse avslutter en av elevene modelleringssyklusen sin i mellom mine kategorier å fortolke og å validere, på det de kaller «real results» og jeg kaller en tolket løsning (Blum & Ferri, 2009). Ikke noen av mine data kan tyde på det samme, noe som kan underbygge påstanden om at elevene har forskjellige modelleringsruter innenfor syklusen. Den andre eleven i Blum og Ferri (2009) sin undersøkelse avslutter modelleringsruten på det som Blum og Ferri kaller «mathematical model», som ligger mellom de kategoriene jeg kaller å matematisere og å arbeide matematisk. Denne avslutningen på modelleringsruten kan muligens likne på mine datamaterialer som avslutter i kategorien å arbeide matematisk. Elever har vanskeligheter med å evaluere hvor fornuftige en matematisk løsning er i en virkelighetsnær kontekst (Edo et al., 2013). Dette kan være hvorfor elevene ikke har evaluert den matematiske løsningen de kommer frem til.

Den første modelleringsruten til elevene (se figur 6) kan det se ut til at elevene har arbeidet i en salgs sirkel. I de andre tre modelleringsrutene (se figur 7, 8 og 9) ser det ut som om elevene heller går frem og tilbake mellom kategoriene. Samtidig er det vanskelig å si noe om at den første modelleringsruten går i en sirkel, siden modelleringsruten består av få steg og at utfallet kunne vært annerledes hvis modelleringsruten hadde bestått av en lenger sekvens. Selv om en del teori forklarer modelleringsrutene til elevene som prosess i en sirkel (se Blum og Leiss (2006) og modelleringssirklene til Voskoglous og Mason beskrevet av Sol et al. (2011) viser funnene i analysen at elevene nødvendigvis følger rekkefølgen i disse modelleringssirklene.

6.6 Å arbeide matematisk

Det er bare en av de fire modelleringsrutene presentert i analysen som er innom kategorien å arbeide matematisk. Edo et al. (2013) fant ut at hvis elevene allerede har konstruert et matematisk problem, har de ingen vanskeligheter med å løse dette problemet. Det virker derimot som at å konstruere dette matematiske problemet er vanskelig for elevene. Under intervjuet etter arbeid med oppgavene svarte elevene at det var vanskelig å knytte matematikk til oppgavene.

221 Intervjuer: Ehm … Hva var det dere synes egentlig, hvor var det de oppgavene ble vanskelig? Hva var det som gjorde de oppgavene her vanskelig?

222 Sofie: Når vi, hvert fall på den, så var det når vi ikke fikk, at vi måtte ta å finne tall selv da.

223 Mathias: Når det ikke er noen, på en måte fasit. Til, oppgaven. Så en må regne det ut sånn. Så hvis det hadde vært på en stor skole, der det er liksom sånn, 300 elever på hvert trinn også.

Utsagnet til Mathias kan tyde på at han ikke er bevisst at en kan lage en generell matematisk modell i en modelleringsoppgave. Det kan virke som om han redd for å gjøre antakelser om hvor mange elever som går på skolen, og ikke bevisst på at dette kan være en variabel i en modell som kan endres. Sol et al. (2011) får resultater som viser at å gjøre antakelser, å forklare forhold mellom et objekt i virkeligheten og matematisk kunnskap, å sjekke kollerasjon i et sett med antakelser og matematiske forhold samsvarende med den virkelige situasjonen, å validere den matematiske modellen og endre modellen hvis det er nødvendig og til slutt reklamere og reflektere rundt resultatene sjeldent skjer modelleringsrutene i deres prosjekt (Sol et al., 2011). Resultatene til Sol et al. (2011) gjelder også i min undersøkelse der i tillegg til at det virker som om Mathias er redd for å gjøre antakelser, er modelleringsrutene til elevene lite innom matematisk kunnskap og matematiske forhold. Samtidig tar elevene utgangspunkt i sin egen skole når de antar hvor mange elever som er invitert på konserten og når de antar at konserten skal gjennomføres i gymsalen på skolen.

Ingen av de elevene Blum og Ferri (2009) har fulgt modelleringssyklusen til ender opp i å presentere oppgaven som siste punkt, men det gjør elevene tre av fire tilfeller i mine datamaterialer. Også i Blum (2015) sin fremgangsmåte for å løse t-skjorte-problemet ender han opp med å foreslå en fremgangsmåte for dette trinnet, nemlig «Step 7: In the end, we write down the whole sulution» (Blum, 2015, s. 76). Siden modelleringssyklusen er lagt opp til at presentasjon av oppgaven er den siste kategorien, er det muligens forventet at elevene avslutter en modelleringsoppgave i denne kategorien. Om elevene arbeidet innenfor hvert punkt i modelleringssirkelen ville det vært en naturlig avslutning på modelleringsoppgavene de arbeider med.

Det er kun en av elevenes modelleringsruter som er innom kategorien å arbeide matematisk. Elevene utviklet ikke en generell matematisk modell, men de har satt matematikken inn i en sammenheng der de snakker om hvor mange elever som får plass per kvadratmeter. Ferri (2007) har kommet frem til tre *mathematical thinking* styles (MTS). Det kan virke som om elevene i denne studien har en *visual thinking style* (VTS) der de arbeidet lenger med en virkelighetsnær modell. Selv om elevene ikke brøt seg fort vekk fra en virkelighetsnær modell slik som elevene som foretrakk *analytical thinking style* (ATS), har elevene satt matematikken inn i en sammenheng der de snakker om hvor mange elever som får plass per kvadratmeter. Mathias, Sofie og Emil snakker også om matematiske sammenhenger der de regner ut arealet av gymsalen, og tilslutt finner en løsning på hvor mange elever som kan oppholde seg i gymsalen under konserten. Schaap et al. (2011) mener at konsekvensene av at strategier for å utvikle matematiske modeller ikke blir gjennomgått i undervisning er at elevene ikke lærer å utvikle sine egne matematiske modeller. Sofie, Mathias og Emil har benyttet seg av en formel for areal som de er kjent med fra før, men de klarer ikke å utvikle modellen slik at den blir generaliserbar. Schaap et al. (2011) har identifisert en del mulige blokader som kan være grunnen til at elevene ikke utvikler den matematiske modellen. Elevene kan mangle algebraiske ferdigheter, ikke gjenkjenne en relevant variable eller så kan det hende at elevene ikke er i stand til å oversette spesifikasjoner fra en relevant variabel over til en annen sammenheng. I Edo et al. (2013) sine undersøkelser fant de ut at elevene hadde vanskeligheter med å løse oppgaver der det var et «unormalt» problem. Elevene får problemer med slike oppgaver fordi de ikke får til å formulere problemet matematisk. I arbeid med alarmoppgaven (se vedlegg 1) kan det se ut som om Emil og Mathias har problemer med å formulere seg matematisk for å løse oppgaven.

32 Emil: Hva kan ulemper være da?

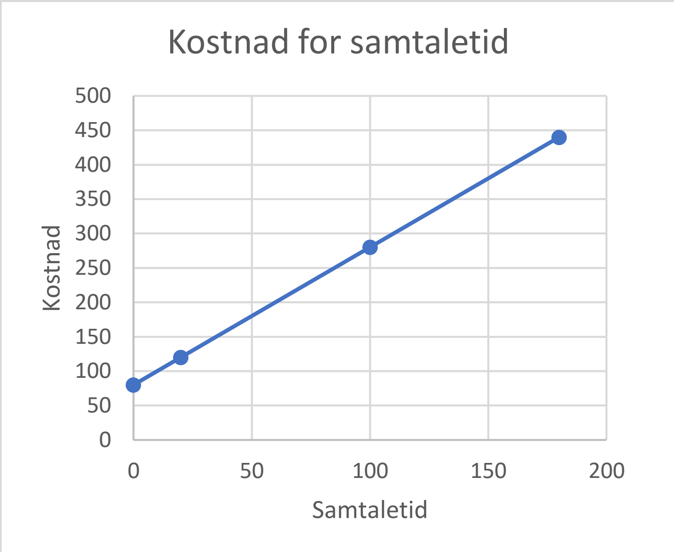
33 Mathias: Ulemper kan jo sikkert være at de ikke kan får finne ut om det har blitt bedre oppover årene eller dårligere oppgaver årene. Om det faktisk har hjulpet med disse alarmsystemene.

Emil og Mathias forsøker å løse alarmoppgaven, men begrunner ikke svaret sitt matematisk. Edo et al. (2013) skriver at elevene får til å løse matematiske problemer ved hjelp av sine egne metoder, slik som «å bruke instinktet», «prøve og feile» og «å bruke egen logikk». I eksempelet fra alarmoppgaven ovenfor kan det virke som om Emil og Mathias bruker egen logikk for å svare på problemet ved å tenke seg til en mulig grunn som kan passe inn i deres virkelige verden.

6.7 En repetisjonsoppgave fra læreboka

Ville repetisjonsoppgaver fra læreboken gjort at elevene hadde arbeidet med matematisk modeller og gir det matematisk løsninger? Fremmer repetisjonsoppgavene elevene har i læreboka si utvikling i modelleringskompetanse? Jeg har sett på hvordan en repetisjonsoppgave hentet fra læreboka til elevene som var med i undersøkelsen oppfyller kriteriene til modelleringsoppgaver utviklet av Lesh et al. (2003). Oppgaven hentet fra læreboka til elevene er repetisjonsoppgave 30. Den står på side 204 i Tetra 9 og er gjengitt nedenfor (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006b).

x Samtaletid i min	y Kostnad i kr
0	$80 + 2 \cdot 0 = 80$
20	$80 + 2 \cdot 20 = 120$
100	$80 + 2 \cdot 100 = 280$
x	$80 + 2 \cdot x$



Bruk sammenhengen $y = 80 + 2x$ eller diagrammet og regn ut hvor mye du må betale for en måned da du har ringt i

a) 100 minutter b) 300 minutter c) 4 timer

I repetisjonsoppgave 30 er det snakk om prisen for å ringe med en mobiltelefon. I Lesh m. fl. (2003) sine kriterier for å oppfylle kravene til en modelleringsoppgave må oppgaven være personlig meningsfylt for elevene. Telefonabonnement har gått bort fra å ta betalt for antall minutter en ringer. Telefonabonnement elevene kjenner til har fri SMS og tale og brukeren betaler for antall MB eller GB i måneden. Siden telefonabonnement har utviklet seg i denne retningen kan det være vanskelig for elevene å relatere seg til denne oppgaven. Med mindre elevene bruker kontantkort, er det ikke lenger fokus på å betale for antall minutter en har snakket i telefonen. Jablonka (2007) skriver i sin artikkel er det mange modelleringsoppgaver som er laget for undervisning i klasserommet der det originale innholdet ikke lenger er aktuelt, slik som å betale en minuttpris i dette tilfellet. I denne oppgaven kan eleven hverken benytte seg av personlige erfaringer eller komme med sine egne meninger for å kunne løse oppgaven. Elevene vil heller ikke kjenne på behovet for å utvikle en modell, siden det er utviklet to modeller for elevene fra før av. En algoritme for å regne ut problemet, alt elevene trenger å gjøre er å benytte seg av tallene i a, b og c og fylle inn verdiene for x. Det er allerede konstruert en graf som viser at funksjonen er lineær. Repetisjonsoppgaven spør heller ikke om en modelldokumentasjon, slik det fjerde kriteriet til Lesh m. fl. (Lesh et al., 2003). Elevene vil muligens heller ikke kjenne behovet for å utvikle en enkel prototype for å løse oppgaven, eller generalisere situasjonen slik at en modell de skulle ha utviklet som ifølge kriteriene for modelleringsoppgaver skal kunne brukes igjen på et tilsvarende problem. Modellen er allerede utviklet for elevene.

Hvis undervisningen elevene har hovedsakelig følger lærerboka de har, vil arbeidsvanene være repetisjonsoppgaver med et tillegg med noen samarbeidsoppgaver, grubleoppgaver og PC-oppgaver. Fokuset til lærerboka ligger på gjennomgang av arbeidsmetoder og algoritmer etterfulgt av mengdetrening. Dette kan ha påvirket hvordan elevene har arbeidet med modelleringsoppgavene de fikk utdelt i innsamlingen av datamateriale. Ettersom elevene har flest repetisjonsoppgaver i lærerboken sin, går jeg ut i fra at dette er arbeidsoppgavene elevene har mest erfaringer med, siden disse oppgavene er lett tilgjengelig. I avsnittet ovenfor skrev jeg om hvordan disse repetisjonsoppgavene utfylte Lesh m. fl. (2003) krav til modelleringsoppgaver. Elevene som var med i min datainnsamling bruker læreverket Tetra 9 – Matematikk for ungdomstrinnet skrevet av Det norske samlaget. Repetisjonsoppgavene fra boka oppfylte ikke kravet modellkonstruksjonsprinsippet, der elevene selv må kjenne på et behov for å utvikle en matematisk modell (Hagen et al., 2006b; Lesh et al., 2003). Jeg mener derfor at en ikke kan forvente at elevene har kompetanse i å utvikle en matematisk modell på egenhånd. Dette kan være med å forklare hvorfor de tre elevene som var med i undersøkelsen ikke har kommet opp med en eneste matematisk modell på de tre første deloppgavene, altså alarmsystemoppgaven (se vedlegg 1).

Ut i fra målene i Tetra 8 i kapittelet om statistikk skal elevene kunne «hente fakta ut av tabeller. Lese av, tolke og lage ulike diagrammer. Finne median, typetall, gjennomsnitt og variasjonsbredde» (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006a, s. 7). Det kan hende at det ble en utfordring for elevene å tolke tabellen å skrive et funksjonsuttrykk ut i fra den, siden det ikke er før i niende klasse elevene skal kunne «tolke ulike lineære sammenhenger. Forstå begrepet funksjon. Tolke og tegne grafen til lineære funksjoner. Lage funksjonsuttrykk som beskriver sammenhenger fra dagliglivet» ifølge lærerboka (Hagen et al., 2006b, s. 195). Lærerboka elevene bruker tilbyr forskjellige regneoppgaver. Som regel er boka lagt opp til repetisjonsoppgaver, der læreren gjennomgår en algoritme elevene bruker på å løse x-antall oppgaver til de mestrer algoritmen. Det er også oppgaver med stjerner, som forfatterne av boka forklarer som oppgaver som krever ekstra tankevirksomhet hos elevene. Boka inneholder også PC-oppgaver, der beregnet bruk er en øvelse for elevene i å kunne bedømme når en PC som hjelpemiddel er egnet eller ikke. I tillegg er det noen samarbeidsoppgaver i hvert kapittel der elevene må diskutere mulige svar og kanskje tenke litt annerledes enn repetisjonsoppgavene. Tilslutt har det laget sant eller usant-oppgaver, som skal være en rask repetisjon før kapittelet hvor elevene kan teste seg selv (Hagen et al., 2006b). Ut ifra hvordan læreboka til elevene er bygget opp kan det være vanskelig for elevene å utvikle modelleringskompetansen sin, med mindre læreren deres legger vekt på denne typen kompetanse i undervisningen. I undervisningssammenheng vet elevene hvilket tema de arbeider med, og kan derfor tenke seg ulike metoder og løsninger ut i fra hva temaet de siste ukene. De oppgavene elevene fikk i denne studien var oppgaver de ikke nødvendigvis visste det matematiske temaet til. De hadde ikke arbeidet med noe liknende på forhold, og visste ikke hvilket matematisk tema det lå innunder. I tillegg pleier kanskje elevene å få en innføring i en algoritme som kan brukes når de arbeider med repetisjonsoppgaver i undervisningen. Modelleringsoppgavene elevene fikk av meg hadde ingen opplysninger eller algoritmer på forhånd.

6.8 Hvordan kan elevene utvikle egne matematiske modeller?

En kan anta at elevene som deltok i denne undersøkelsen har kompetanse om å benytte seg av matematiske modeller. Som nevnt tidligere lærerboka er bygget opp på en måte slik at elevene skal lære seg en algoritme, for deretter å ta den i bruk ved repetisjonsoppgavene (Hagen et al., 2006b). I datamaterialet prøver Mathias å finne en modell han kan bruke for å løse oppgaven om alarmer.

290 Mathias: Mm. Det dobbelte hvert tiende år da. Ish. Blir det ikke det? 110 blir til 330, da tredobles det. 330 blir til 590. Dobles nesten. 200 blir til 480, 480 blir til 550. Det er riktig i starten, men ikke på slutten.

Utsagnet til Mathias er tolket slik at han har kompetanse til å utføre en matematisk modell om dobling og tredobling, men han har ikke modellkompetanse til å kunne utvikle en modell han allerede har lært eller å sette disse opplysningene inn i en sammenheng ved å rekonstruere en modell han vet at eksisterer.

I rapporten Ludvigsenutvalget har lagt frem står det at elevene må involveres i læringsprosessen. Og at på sikt kan et slikt arbeid med egenvurderinger, og felles diskusjoner om hva som kjennetegner godt arbeid i ulike fag, bidra til at elevene utvikler seg på selvregulert læring og evne til metakognisjon (NOU 2015: 8, s. 75-76). Det kan virke som om elevene i undersøkelsen kunne trengt mer kompetanse og erfaring i å utvikle egne matematiske modeller. Da elevene skulle svare på hva de synes var utfordrende med å løse oppgavene de ble tildelt utspilte følgende dialog seg.

228 Sofie: Da hadde vi ikke noen fasit.

229 Mathias: Det blir så mye knoting og knaking for å finne ut om det og det og…

230 Sofie: Og hvordan tall.

231 Mathias: Ja. Vanskelig å finne fram til tallene som du føler er riktig da.

232 Emil: Vi måtte gjøre mye mer.

233 Mathias: For hvis det hadde stått sånn, så mange elever. Så kunne du bare regna ut hvor mange elever det hadde blitt, og…

Samtalen mellom elevene kan tyde på at elevene ikke har så mye erfaring med å arbeide med å utvikle egne matematiske modeller, da de synes det var utfordrende å finne relevante tall for oppgaven. Sofie kommenterer også at det var utfordrende at det ikke var noen fasit på oppgavene. Det virker som om Emil mener at oppgavene krever mer av elevene da han sier at de måtte gjøre mer for å løse oppgavene. Disse utsagnene kan underbygge påstanden om at elevene kunne trengt mer kompetanse og erfaring i å utvikle egne matematiske modeller.

Gilbert (2004) skriver at undervisning i modeller og modellering må gi elevene muligheter for å kunne utvikle sin egen kompetanse ved å produsere og teste deres egne modeller. Denne utviklingsprosessen skjer ofte via fire steg. Det første steget handler om elevenes kompetanse om å bruke modeller i en kontekst der resultatet er positivt. Et positivt resultat er når modellen representerer det matematiske fenomenet på en suksessfull måte (Gilbert, 2004). Det virker som om Mathias, Emil og Sofie har kompetanse i å bruke modeller, da de i skolekonsertoppgaven (se vedlegg 2) benytter seg av formelen for areal. I tillegg til at elevene bruker formelen for areal i alarmoppgaven, ser det ut som om Mathias kan en formel for addisjon eller multiplikasjon når de snakker om hvor mange elever som kommer på konserten på skolen.

117 Emil: Også hvis vi kommer. For når de tre skolene skal slåes sammen til ungdomskolen. Da er det sikkert tjue cirka fra hver skole.

118 Mathias: Ja.

119 Sofie: Hva tror du det var?

120 Mathias: Tjue cirka fra hver skole. For at tjue, tjue, tjue blir jo seksti.

I utdraget ovenfor legger Mathias sammen tjue tre ganger for å vite at det er seksti elever på hvert trinn. English (2003) skriver at det er flersidige aktiviteter med matematiske modeller som gjør elevene i stand til å vite når og hvordan elevene skal benytte seg av eksiterende modeller i nye problemer som skal løses. Mathias har benyttet seg av formelen for addisjon eller multiplikasjon inn i konteksten med skolekonsert.

Det andre steget handler om elevenes kompetanse om å revidere modeller. Elevene forandrer en modell de allerede har lært, så modellen kan representere et fenomen i en annen kontekst enn modellen var ment til å brukes. Slik kan modellen brukes til andre formål enn den originalt er utviklet for (Gilbert, 2004). Mathias, Sofie og Emil har ikke revidert hverken formelen for areal, addisjon eller multiplikasjon. Det kan hende de ikke har sett et behov for å utvikle modellen de har kommet frem til, da de kommer frem til en løsning de virker fornøyde med. English (2003) skriver at det er viktig med diskusjoner der læreren veileder elevene mot å konstruere kunnskap om å gjøre egne modeller om til «eksplisitte objekter av tanken». Med veiledning av lærer kunne Mathias, Sofie og Emil utviklet modellene de har benyttet seg av i oppgaveløsingen. Det tredje steget handler om elevenes kompetanse til å rekonstruere modeller. Elevene må lage en modell der de ikke vet detaljene, men de vet at modellen eksisterer. Elevene må i tillegg skrive individuelle evalueringer av modellene de har produsert, og relatere de til «standardmodellen» de har tatt utgangspunkt i (Gilbert, 2004). I det tredje steget kunne elevene for eksempel skrevet en generell formel som ble presentert i kapittelet med begrunnelse av valgte oppgaver.

$$\left(l \bullet b - \frac{1}{5} \bullet l \bullet b\right) \bullet 2 = antall\ elever$$

I modellen over er det tatt utgangspunkt i at scenen dekker $\frac{1}{5}$ av gymsalen, og at det er plass til to elever per kvadratmeter. English (2003) har et eget punkt der elevene skal kunne konstruere modeller som omfatter strukturelle elementer som gjør elevene i stand til å argumentere for likheten mellom modellene. Dette punktet kan sammenliknes med det tredje steget Gilbert (2004) har kommet frem til, der elevene må relatere modellene de har rekonstruert til «standardmodellen» de har tatt utgangspunkt i. Elevene har arbeidet med arealet til gymsalen, men ikke utviklet en generell modell som kunne sammenliknes med «standardmodellen» slik som eksempelet over.

Det kan virke som om elevene ikke har kompetanse i å revidere formelen for areal, da de ikke nevner dette i arbeidet med oppgaven. Å revidere formelen for areal ville da vært neste steg i prosessen for å utvikle modelleringskompetanse. De to neste stegene beskrevet av Gilbert (2004) å ha kompetanse om å rekonstruere modeller eller konstruere egne modeller kunne vært et naturlig steg å se videre på i undervisning av modellering for Mathias, Emil og Sofie. Hvordan kan en da vite om elevene har utviklet nok modelleringskompetanse? Gilbert (2004) skriver at suksessfull læring i modellering kan deles opp i tre.

> «The only valid reason for teaching is to bring about learning. Thus, in considering the challenges to be faced in teaching the model-based curriculum, it is necessary to consider what successful learning in the field might entail. This may be divided, if only for convenience, into «having an acceptable understanding of what a model is», «having a developed capacity to mentally visualise models» and «having an acceptable understanding of the natures of metaphor and analogy»» (Gilbert, 2004, s. 122)

Det kan virke som om elevene i undersøkelsen hadde kunnskap om hva formelen for areal er og hva den kan brukes til, ettersom de benyttet seg av denne modellen i en hensiktsmessig situasjon. Om elevene så modellen for areal for seg visuelt og om de har en akseptabel kompetanse om metaforenes natur er vanskelig å si noe om. English (2003) mener at ved allsidig aktivitet kan elevene oppnå kunnskap om å gjøre nødvendige modifikasjoner i en eksisterende modell slik at den kan brukes i et nytt problem. Denne kunnskapen kan sammenliknes med det andre steget i utviklingen av kompetanse om modellutvikling, der elevene skal kunne revidere en modell og bruke modellen inn i en ny kontekst. Selv om Gilbert (2004) skriver tre aspekter ved en suksessfull læring i modellering, kan det være nyttig for en lærer å forholde seg til de fire mer konkrete stegene Gilbert har utviklet for å se om elevene utvikler nyttig modelleringskompetanse. Fordi stegene kan være mer målbare enn de tre aspektene, og kan dermed være enklere å forholde seg til for en lærer.

7 Konklusjon

I det forrige kapittelet har jeg sett på og diskutert funn fra analysen opp mot teorien i teorikapittelet. I tillegg har jeg sett på en repetisjonsoppgave fra læreboka elevene benytter seg av og hvordan elevene kan utvikle modelleringskompetansen sin. Hensikten med denne studien har vært å svare på problemstillingen *hvordan er modelleringsrutene til tre elever i 9. klasse i arbeid med to modelleringsoppgaver*? For å se nærmere på denne problemstillingen har jeg skrevet to forskningsspørsmål som skal hjelpe meg å svare på den. I tillegg har jeg et forskningsspørsmål som kan si noe om hvordan elevene kan utvikle modelleringskompetansen sin.

I det første forskningsspørsmålet ønsket jeg å se nærmere på *hvordan elevenes modelleringsrutener ser ut sammenliknet med andre elevers modelleringsruter*. Det kan virke som om det er mange likheter mellom elevers modelleringsruter. Det kan se ut som at mange modelleringsruter starter i kategoriene å tolke og å forenkle, noe som kanskje vil være naturlig for at elevene skal kunne finne ut av hva oppgaven spør etter. Elevene som deltok i studien har arbeidet mest innenfor den virkelige verden, og ikke så mye innenfor den matematiske verden. Modelleringsruter jeg har sammenliknet med viser at andre elever har arbeidet innenfor den matematiske verden i sine modelleringsruter (Blum & Ferri, 2009). Elevene i denne undersøkelsen konstruerte få matematiske modeller, men klarte å løse oppgavene da de hadde funnet en hensiktsmessig matematisk modell. Dette samsvarer med funn i tidligere forskning (Sol et al., 2011). Elevene konkluderte og validerte mye ut i fra egne antakelser, og ikke så med bakgrunn i matematiske begrunnelser. Kategoriene å forenkle, å matematisere og å validere er hyppig representert i elevenes modelleringsruter.

I det andre forskningsspørsmålet ønsket jeg å se nærmere på *hvilke blokader elevene eventuelt møter på underveis i arbeid med oppgavene*. Elevene møter en del blokader i arbeidet med de to modelleringsoppgavene. Noen av blokadene elevene møter underveis i arbeidet er at de har vanskeligheter med *å bygge egne matematiske modeller*, *å gjøre egne antakelser*, *å gjenkjenne variabler og forholdet mellom disse* og *å formulere situasjonen matematisk* (Schaap et al., 2011). En mulig løsning kunne vært å hjelpe elevene med den første delen av modelleringssirkelen, slik at de har en matematisk modell å gå ut i fra. Studien Edo et al. (2013) har gjort viser at elevene har kompetanse til å løse de matematiske modellene når modellene allerede er konstruert for elevene. Elevene møter også tekstoppgaver som ikke gir mening i deres hverdag (Jablonka, 2007). Det er ikke nødvendigvis en blokade i seg selv, men hvis elevene ikke kan relatere seg til tekstoppgavene kan det føre til blokadene *å ikke kunne plukke opp problemet i situasjonen*, *overse viktige elementer i problemteksten* eller *forvirrende problemformuleringer i problemteksten* (Schaap et al., 2011). Lærere må være obs på blokader elevene kan møte underveis i modelleringsprosessen, slik at de kan hjelpe elevene videre mot en høyere modelleringskompetanse.

I det tredje spørsmålet ønsker jeg å få et svar på *hva som skal til for å utvikle elevenes modelleringskompetanse*. Ifølge Gilbert (2004) skjer utviklingsprosessen i modellering ofte via fire steg. Elevene må først ha kompetanse om å benytte seg av matematiske modeller. Deretter kan elevene utvikle kompetanse om å revidere matematiske modeller de allerede er kjent med. Det tredje steget er når elevene har kompetanse i å rekonstruere modeller de allerede vet eksisterer. Til slutt kan elevene utvikle kompetanse i å konstruere egne matematiske modeller (Gilbert, 2004). I tillegg til flersidige aktiviteter ved å benytte seg av kjente modeller og løsninger inn i nye problemer er diskusjoner der læreren kan veilede elevene når de endrer sine egne modeller (English, 2003).

For å svare på problemstillingen *hvordan er modelleringsrutene til tre elever i 9. klasse i arbeid med to modelleringsoppgaver* vil jeg bruke funn og drøftinger i forbindelse med de tre forskningsspørsmålene. Mitt svar på problemstillingen innebærer at elevene i undersøkelsen arbeidet mye innenfor den virkelige verden. De hadde utfordringer med å konstruere matematiske modeller, men klarte å løse oppgavene når de kunne benytte seg av hensiktsmessige matematiske modellene. Det er en del blokader som kan oppstå underveis, som det kan være hensiktsmessige at matematikklærerne er oppmerksomme disse blokadene presentert av Schaap et al. (2011). Elevene har vanskeligheter med å revidere, rekonstruere og konstruere egne matematiske modeller. For å kunne utvikle elevenes modelleringsruter til å inneholde reviderte, rekonstruerte og egenkonstruerte matematiske modeller kan det en mulighet at læreren legger vekt på de fire stegene som Gilbert (2004) har utviklet.

7.1 Fremtidens undervisning av modellering

Fremtidens undervisning kan ha nytte av å legge vekt på modelleringsundervisning fordi modelleringskompetanse er et aktuelt tem. Rapporten Ludvigsenutvalget har skrevet inneholder kjerneelementene de presenterer problemløsningsoppgaver, noe som kan kobles inn mot kompetanse i modellering (NOU 2015: 8, 2015). Blomhøj (2006) skriver at elevene må utvikle modelleringskompetanse basert på tre prinsipper. Det primære siktet er at elevene skal utvikle modelleringskompetanse, men i denne prosessen kan også modelleringsarbeidet være et middel for å lære matematikk.

> «I forhold til udviklingen af en didaktisk teori for matematisk modellering kan der anlægges (mindst) tre forskellige perspektiver (…) *Det samfundsmæssige perspektiv* handler om at afdække den rolle som matematisk modellering spiller i samfundet og på grundlag heraf at vurdere samfundets uddannelsesmæssige behov. (…) *Det undervisningsmæssige perspektiv* handler overordnet om at begrunde og konkret udforme matematisk modellering som indhold i matematikfaget på de forskellige niveauer af uddannelsessystemet. (…) *Det læringsmæssige perspektiv* handler om at analysere hvilke muligheder og vanskeligheder, der er forbundet med at placere relationen mellem matematik og virkelighed som centrum for læreprocessen. Det primære sigte er, at eleverne skal udvikle modelleringskompetence, men arbejdet med modellering kan i høj grad også tjene som middel til at lære matematik» (Blomhøj, 2006, s. 89-93).

De tre perspektivene presentert av Blomhøj (2006) peker på at under utviklingen av den didaktiske teorien for matematisk modellering skal vurdere samfunnets utdanningsbehov, utforme matematisk modellerings som innhold i matematikkfaget og analysere hvilke muligheter og vanskeligheter som er forbundet med å plassere relasjoner mellom matematikken og virkeligheten. Både lærere som underviser i grunnskolen og fremtidens lærere kan ha nytte av å øke kompetansen sin i hvordan elevene kan utvikle modelleringskompetansen. Funnene fra min undersøkelse viser at elevene har problemer med å revidere, rekonstruere og konstruere matematiske modeller. For å kunne hjelpe elevene med å oppnå høyere kompetanse i modellering vil det være nyttig for lærere å sette seg inn i de fire stegene om hvordan elevene kan utvikle modelleringskompetansen sin (Gilbert, 2004). Undervisningen må gi elevene gode forutsetninger for å kunne løse modelleringsoppgaver. Lærere vil ha fordel av å i tillegg sette seg inn i blokader elevene kan møte underveis i modelleringsprosessen for å kunne forebygge disse og hjelpe elevene i arbeidet underveis. I tillegg til undervisningen og lærernes fokus, vil det være nyttig om fremtidige læreplaner spesifikt etterspørre modelleringskompetanse hos elevene. Lærebøker må legge opp til at elevene skal kunne løse flere modelleringsoppgaver uten at det er lærerens kompetanse om modelleringsoppgaver som avgjør hvilke oppgaver som tilbys elevene, da dette kan legge til rette for mer modellering i skolen.

7.2 Forslag til videre forskning

I denne studien har jeg sett på modelleringsrutene til tre elever fra 9. klasse. Tidlig i fasen da jeg orienterte meg i fagfeltet fant jeg ikke norsk forskning på elevers modelleringsruter. Det er imidlertid gjort studier på elevers modelleringsruter utenfor Norge der 9. klassinger er deltakere. Videre forskning kunne dermed være å se på modelleringsrutene til elever fra andre trinn for å undersøke om de får tilsvarende funn som denne undersøkelsen. Eller gjøre en utvidelse av denne studien ved å se på elevers modelleringsruter i arbeid med læreverket de benytter seg av i hverdagen, for å se om elevenes modelleringsruter vil være tilsvarende i den matematiske verden som modelleringsrutene i denne undersøkelsen i all hovedsak var i den virkelige verden. Et annet forslag til videre forskning er hvordan en kan undervise i modellering slik at modelleringsprosessen til elevene utvikles. Oppsummert viser studien at det kan være behov for mer forskning på norske elevers modelleringsruter og hvordan undervisningen kan tilrettelegge for en utvikling av modelleringsprosessen. Dette vil være svært relevant for undervisningsfaget matematikk sin fremtid ettersom det legges vekt på slike prosesser i nye stortingsmeldinger. Denne studien har på denne måten vært et nyttig bidrag til fagfeltet.

8 Referanseliste:

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne Det Tænkes?* (s. 80-109). Danmark: Malling Beck.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 15-30): Springer.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education*, 73-96.

Blum, W. & Ferri, R.B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. & Leiss, D. (2006). *„Filling Up "-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks.* Innlegg holdt ved CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). Abingdon: Routledge.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Oslo: Oktan Oslo AS.

Edo, S.I., Ilma, R. & Hartono, Y. (2013). Investigating secondary school students' difficulties in modeling problems PISA-model level 5 and 6. *Journal on Mathematics Education, 4*(1), 41-58.

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. I S.J. Lamon, W.A. Parker & K. Houston (red.), *Mathematical Modelling: A Way of Life–ICTMA 11* (s. 3-17). Philadelphia, USA: Elsevier.

Ferri, R.B. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics–ICTMA 12* (s. 260-270): Elsevier.

Gilbert, J.K. (2004). Models and modelling: Routes to more authentic science education. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(2), 115-130.

Hagen, M.B., Carlsson, S., Hake, K.-B. & Öberg, B. (2006a). *Tetra 8 : Matematikk for ungdomstrinnet* (Bokmål utg.). Oslo: Det norske samlaget.

Hagen, M.B., Carlsson, S., Hake, K.-B. & Öberg, B. (2006b). *Tetra 9 : matematikk for ungdomstrinnet* (Bokmål utg.). Oslo: Det norske samlaget.

Halvorsen, K. (2008). *Å forske på samfunnet : en innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Oslo: Cappelen akademisk forlag

Henning, H. & Keune, M. (2007). Levels of Modelling Compentencies. I W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (red.), *Modelling and applications in mathematics education : The 14th ICMI Study* (Vol. 10, s. 225-232). New York: Springer.

Jablonka, E. (2007). The relevance of modelling and applications: Relevant to whom and for what purpose? *Modelling and applications in mathematics education* (s. 193-200): Springer.

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P.A. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Oslo: Abstrakt.

Kaiser-Messmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathemetikunterricht*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. (2006). *Introduction to the working group "Applications and Modelling".* Innlegg holdt ved Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).

Kramarski, B., Mevarech, Z.R. & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational studies in mathematics, 49*(2), 225-250.

Kulturtanken. (2017). Nasjonal satsing på kunst og kultur til alle elevar. Hentet 28.11.2017, fra http://www.denkulturelleskolesekken.no/om-skolesekken

Larsen, A.K. (2016). *En enklere metode : veiledning i samfunnsvitenskapelig forskningsmetode*. Bergen: Fagbokforlaget.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H.M., Post, T. & Zawojewski, J.S. (2003). Model Development Sequences. I R. Lesh & H.M. Doerr (red.), *Beyond constructivism : models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (s. 35-58). London: Lawrence Earlbaum.

Lesh, R. & Fennewald, T. (2010). Introduction to Part I Modeling: What Is It? Why Do It? I R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines & A. Hurford (red.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (s. 5-10). Dordrecht: Springer.

Maass, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311.

Nilssen, V.L. (2012). *Analyse i kvalitative studier : den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole*. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/sec1.

Nyeng, F. (2012). *Nøkkelbegreper i forskningsmetode og vitenskapsteori*. Bergen: Fagbokforlaget.

Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 137-146): Springer, Dordrecht.

Schou, J., Jess, K., Hansen, H.C. & Skott, J. (2013). *Matematik for lærerstuderende : Tal, algebra og funktioner : 4.-10. klasse* (2. utg.). Fredriksberg: Samfundslitteratur.

Schou, J., Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008). *Matematik for lærerstuderende : Omega : 4.-10. klassetrin* (2. utg.). Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Sol, M., Giménez, J. & Rosich, N. (2011). Project modelling routes in 12–16-year-old pupils *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (s. 231-240): Springer.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget.

Vygotskij, L.S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes* (M. Cole, red.). Cambridge: Harvard University Press.

Vygotskij, L.S. (2001). *Tenking og tale*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Vedlegg 1: Oppgave gitt elevene

Modelleringsoppgave – alarmsystemer

Hvert år laget politiet en statistikk over hvor mange innbrudd i boliger det har vært i byen deres. Ut i fra disse statistikkene har produsentene av et alarmsystem trukket ut følgende år.

År	1960	1965	1970	1975	1980	1984
Antall innbrudd	110	200	330	480	590	550

Produsentene har brukt disse dataene til å lage følgende slagord i egne reklamer: Hvert tiende år dobles eller trippes antallet innbrudd i boliger! Kjøp et alarmsystem nå! Helst før det skjer et innbrudd i huset ditt også.

1) Er den første setningen i slagordet korrekt? Begrunn påstanden din.
2) Hvorfor tror dere at produsentene har valgt ut akkurat disse dataene?

Forestill dere at foreldrene deres er politi og forteller dere at politiet ikke skal samle inn og slage slike statistikker i fremtiden.

3) Forklar kort fordeler og ulemper med en slik statistikk.

Oppgaven er hentet fra boka Modelling and Applications in Mathematics Education (Henning & Keune, 2007).

Vedlegg 2: Oppgave gitt elevene

Modelleringsoppgave – Skolekonsert

Det har blitt annonsert at et berømt band skal spille konsert i gymsalen på en skolekonsert på deres skole. Nesten alle elevene fra deres skole og mange av elevene fra naboskolen ønsker å gå på konserten. De som organiserer konserten har gitt dere oppgaven å regne ut maks antall elever som kan dra på konserten i gymsalen.

1) Planlegg hvordan dere vil gå frem for å løse problemet og skriv ned de nødvendige trinnene for å finne en løsning.
2) Fullfør oppgaven dere fikk av de som organiserer konserten. Hvis noen av detaljene mangler kan dere gjøre et overslag eller bruke et tall dere tenker kan passe.

De som organiserer konserten vil at dere skal lage en kort presentasjon av hvordan dere har arbeidet for å vise det til ledelsen på skolen.

3) Lag noen stikkord som dere kunne presentert til ledelsen på skolen.

Oppgaven hentet fra boka Modelling and Applications in Mathematics Education (Henning & Keune, 2007).

Vedlegg 3: Intervjuguide

Intervjuguide

Begrunnelse av svar på oppgaven(e)

Begrunne valg av algoritme

Elevens tanker rundt matematikk i den virkelige verden

Elevenes forhold til matematikk utenfor skolen

Hvor ble det vanskelig?

Hva ble vanskelig?

Hvorfor ble det vanskelig?

Vedlegg 4: Informasjonsskriv og samtykkeskjema til elever og foresatte

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Bevegelse mellom den virkelige og den matematiske verden i arbeid med modelleringsoppgaver

Bakgrunn og formål

Formålet med denne studien er å få mer kunnskap om hvordan elever tenker når de arbeider med modelleringsoppgaver. Modelleringsoppgaver er oppgaver der elevene enten lager en modell av en situasjon i virkeligheten ved hjelp av matematikk, eller lager en modell for å løse et matematisk problem. Jeg ønsker å se på hva elevene tenker, hva de legger vekt på og hva som kan være vanskelig når de arbeider med slike matematikkoppgaver. Prosjektet er en mastergradstudie ved grunnskolelærerutdanningen ved NTNU avdeling Trondheim.

Dette utvalget av elever er trukket ut fordi elever på ungdomsskoletrinnet har forutsetninger for å kunne løse modelleringsoppgaver i matematikk. De har vært gjennom mange kompetansemål i matematikk som tilsier at de mest sannsynlig har en kompetanse innenfor matematikk til å modellere. I tillegg til kompetansemålene vil elevene på ungdomsskoletrinnet mest sannsynlig benytte seg av matematikk i deres daglige liv.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien innebærer observasjon av elever som arbeider med åpne modelleringsoppgaver. Elevene kan bli spurt om å utdype tankegang underveis av arbeider med oppgavene og bli stilt oppfølgingsspørsmål i et gruppeintervju etter arbeid med oppgavene. Tidsramme for undersøkelsen er satt til cirka 80-90 minutter. Datainnsamlingen vil bestå av filmopptak som vil filme hendene til elevene og notater de gjør seg underveis.

Hvis foresatte ønsker er det mulighet for å se oppgavene som blir gitt ved undersøkelsen.

Hva skjer med informasjonen?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Personer som vil ha tilgang til personopplysningene er studenten som skriver masteroppgaven og veileder for prosjektet. Personopplysningene vil bli lagret på en personlig datamaskin som er passordbeskyttet, og vil bli slettet når transkripsjonen er gjennomført. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i den endelige publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 01.06.2018.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli slettet umiddelbart.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med mastergradsstudent Siri Halaas Johnsrud, sirihjo@stud.ntnu.no, tlf. 95455504 eller veileder Per Gunnar Østerlie, per.g.osterlie@ntnu.no, tlf. 73412788.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS, med prosjektnummer 55822.

Samtykke til deltakelse i studien

Foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet *bevegelse mellom den virkelige og den matematiske verden i arbeid med modelleringsoppgave.*

Elevens navn: ____

Jeg samtykker i at:

☐ Mitt barn deltar i en arbeidssituasjon der det gjøres filmopptak av hendene til transkribering og analyse. Anonymiserte sitater fra barnet, der barnets ikke identifiseres, brukes i publikasjon.

☐ Det kan tas kopi av skriftlige elevarbeider fra barnet. Arbeidene kan publiseres i anonymisert form slik at det ikke er mulig å kjenne igjen barnet.

Sted og dato: ____

Foresattes underskrift: ____

Vennligst lever skjemaet til kontaktlærer innen 22. desember. Informasjonen vil bli gitt videre til Siri Halaas Johnsrud.

Tusen takk!

Vedlegg 5: Godkjenning fra NSD

NSD

Per Gunnar Østerlie

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 13.10.2017 Vår ref: 55822 / 3 / AGL Deres dato: Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 11.09.2017 for prosjektet:

55822	*Modellering med åpne oppgaver på ungdomsskoletrinnet*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Gunnar Østerlie*
Student	*Siri Halaas Johnsrud*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Ved prosjektslutt 01.06.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Katrine Utaaker Segadal

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07 / audun.lovlie@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Siri Halaas Johnsrud, sirihjo@stud.ntnu.no