Ingeborg Broback Rasch

Elevers arbeid med resonnering og bevis

En kvalitativ studie av hva som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn sitt arbeid med resonnering og bevis.

LMM15004

Masteroppgave i matematikkdidaktikk 1-7

Trondheim, mai 2018

FORORD

Masteroppgaven min representerer «siste innsats» og avslutningen på fem innholdsrike studieår ved lærerutdanningen i Trondheim. Arbeidet med oppgaven har vært en utfordring, men også veldig lærerikt. Det å skulle si seg ferdig med tiden som student er en bandet følelse, særlig med tanke på at jeg nå vil møte andre krav og forventninger i min nye rolle som lærer. I løpet av skriveprosessen har jeg til tider vært usikker på om jeg kom til å se lyset i enden av tunnelen, men ved hjelp av en rekke mennesker som både motiverte og støttet meg, ble oppgaven til slutt en realitet og ferdigstilt. Uten deres hjelp hadde dette prosjektet ikke vært mulig.

Først og fremst vil jeg takke veilederen min, Anita Valenta for hennes interesse for prosjektet mitt og alle konstruktive tilbakemeldinger. Videre vil jeg takke familien min, både mamma, pappa, søster og bror. Deres støtte og oppmuntrende ord gjennom oppgaveskrivingen har betydd mye. Jeg vil samtidig gi en spesiell takk til mamma, som har korrekturlest oppgaven utallige ganger. I tillegg vil jeg takke venner og medstudenter, spesielt Marie, Johanne, Siri og Kristin. Takk for alle oppmuntrende og motiverende ord, latterfylte stunder og kunnskapsrike innspill. Jeg vil også rette en stor takk til elevene som deltok i studien min.

Trondheim, mai 2018

Ingeborg Broback Rasch

INNHOLDSFORTEGNELSE

FIGUROVERSIKT

TABELLOVERSIKT

1.0 INNLEDNING

1.1 BAKGRUNN FOR STUDIEN

Arbeid med resonnering og bevis fremheves som en viktig del av matematisk kompetanse innenfor matematikkdidaktisk forskning. Tradisjonelt sett har arbeid med bevis i hovedsak vært tilstede under temaet geometri i videregående pensum, og adskilt fra andre matematiske aktiviteter (Ball & Bass, 2003; Stylianides, 2008). I løpet av de siste tiårene har arbeid med resonnering og bevis fått økt oppmerksomhet i fagmiljøene. Et fokus har vært på integrering av temaet på alle klassetrinn i skolen (Balacheff, 1988; Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2002; Ball & Bass, 2003; Lannin, 2005; Stylianides, 2007; Stylianides, 2010; Stylianides, 2016). Stylianides (2010, s. 39) fremhever at gjennom arbeid med resonnering og bevis, vil elever lære og utvikler kunnskap om matematikk. Han skriver at arbeid med resonnering og bevis er en prosess, der elever først oppdager mønster og deretter setter frem en påstand. Videre i prosessen kreves det at en argumenterer for påstandens gyldighet. Ball et al. (2002, s. 907) mener at bevis er en sentral del av matematikken og bør derfor inngå i en større del av matematikkundervisningen. De påpeker videre at en økt satsning på arbeid med bevis i undervisningen kan begrunnes med at bevis er «hjertet til matematikkundervisningen», og et verktøy som kan brukes til læring og utvikling av ny kunnskap. Hanna og Jahnke (1996, s. 877) skriver at gjennom arbeid med bevis får elever en dypere innsikt i matematiske begreper, noe som er essensielt for at matematisk kunnskap skal utvikles, etableres og formidles. Carpenter et al. (2003, s. 87) understreker at en viktig del av matematikkundervisningen er kunnskapen om «gyldig begrunnelse». De fremhever videre at elevene først må begrunne begrepene og prosedyrene ovenfor seg selv, før de kan forstå meningsinnholdet. Elever må evne å stille spørsmål ved matematiske ideer og deretter avgjøre om ideene gir mening. En påstand må ikke aksepteres som en sannhet, fordi andre medelever mener det.

Arbeid med resonnering og bevis gir et innblikk i hvordan elever undersøker, oppdager og utforsker nye ideer, og samtidig som det gir et bilde av hvordan elever begrunner og beviser påstander innenfor matematikk (Ball & Bass, 2003, s. 30). Stylianides (2016, s. 13) fremhever viktigheten av å oppnå innsikt i resonneringsprosessen elevene gjennomgår når de arbeider med bevis. Han beskriver et bevis som en sammensatt sekvens av forklaringer for eller imot en påstand. Denne sekvensen av forklaringer har han delt inn i tre aspekter, som kan gi en bedre innsikt i elevers arbeid med resonnering og bevis på alle klassetrinn. Det første aspektet ved bevis er at argumentet bygger på tidligere aksepterte sannheter (kjede av aksepterte sannheter) som er sanne og tilgjengelige uten videre forklaring. Et eksempel på en akseptert sannhet er addisjonsalgoritmen eller definisjonen av et oddetall. Det andre aspektet ved bevis er bruk av argumentasjonsformer som er gyldig og kjent i felleskapet. Argumentasjonsformer er en fremgangsmåte som elevene bruker for å bevise en påstand. Et eksempel på en argumentasjonsform kan være å benytte seg av addisjonsalgoritmen, for å kunne bevise en regneoperasjon. Det tredje aspektet ved bevis er at argumentet formidles ved hjelp av en eller flere uttrykksformer. Eksempler på bruk av uttrykksformer, er når en elev begrunner sin påstand ved hjelp av språket og/eller ved bruk av symboler og tabeller.

I tillegg til sin definisjon på bevis presenterer Stylianides (2016) også tre forskjellige bevisoppgaver. Oppgavene som Stylianides viser til er oppgaver om *et tilfelle* (single case), *endelig antall tilfeller* (multiple but finitely many cases) og *uendelig antall tilfeller* (infinitely many cases). Hver av oppgavene kan også tolkes som tre påstander som skal argumenteres for eller imot, og så bevises. En påstand eller oppgave med et tilfelle handler om en oppgave som skal bevises eller en påstand om en spesifikk oppgave. Et eksempel kan være å bevise at en utregning på en oppgave er gyldig, eller at tallet 3 er kvadratroten av tallet 9. En oppgave med endelig antall tilfeller, handler om en spesifikk oppgave som inneholder x antall løsninger, der en må finne riktig antall løsninger, og deretter bevise at det ikke finnes flere løsninger. Et eksempel kan være de ulike måtene en kan skrive tallet 123 på. En må da bevise at en har funnet alle løsningene, og deretter argumenterer for at det ikke finnes flere løsninger. Uendelig antall tilfeller handler om en generell matematisk påstand, som gjelder for en spesifikk mengde med tall. Et eksempel kan være at uansett hvilke to oddetall (positive heltall) en adderer så vil summen alltid bli et partall, eller at alle tall i 6-gangen også finnes i 3-gangen. En skal da bevise at den generelle påstanden er gyldig.

Resultater fra forskningen til Stylianides (2016) viser at de tre aspektene ved arbeid med resonnering og bevis, gir en innsikt i hva som er kjent og tilgjengelig for elevene uten videre forklaring, samtidig som en får tilgang til de argumentasjon- og uttrykksformer som elevene bruker. Carpenter et al. (2003) vektlegger i likhet med Stylianides at arbeidet med gyldig begrunnelse er en sentral del i matematikkfaget. I boken *«Thinking Mathematical»* presenterer de denne bevisoppgaven;

«Ole har sju hamstre hjemme hos seg. Han har to bur som hamsterne kan bevege seg mellom. På hvilke måter kan de sju hamsterne fordele seg i de to burene? Hvilke løsninger kan vi finne?»

(s. 65, egen oversettelse)

Oppgaven som Carpenter et al. beskriver her kan tolkes som en oppgave som består av tre bevispåstander. Først del av oppgaven omhandler et tilfelle. De ulike kombinasjonene en kan finne, for eksempel 6+1, er en løsning på oppgaven, og må derfor bevises. Andre del av oppgaven omhandler endelig antall tilfeller, der en skal bevise at alle løsningene på oppgaven er funnet, ved å begrunne hvorfor dette er riktig. I tillegg legger oppgaven til rette for at en kan oppdage en den generelle sammenhengen mellom antall hamster og antall løsninger. Det vil alltid bli en løsning mer enn antallet hamstre som Ole har fordelt i de to burene. Arbeidet med oppgaver/påstander med uendelig antall tilfeller handler om å oppdage generelle sammenhenger. Generalisering er derfor en sentral del av arbeidet med bevis. Gabriel Stylianides (2010, s. 39) fremhever også generalisering i sin forskning relatert til resonnering og bevis. Han vektlegger at en sentral del av arbeid med resonnering og bevis handler om å oppdage mønster og fremlegg av generelle påstander. Han beskriver i tillegg viktigheten av å undersøke hvordan elever legger frem generelle påstander.

Læreplanen i matematikk vektlegger resonnering som en sentral del av matematikkundervisningen. Under formål blir betydningen av både resonnering og det språklige aspektet ved matematikk fremhevet. I matematikkundervisningen skal elever kunne resonnere, ha en samtale om og formidle matematiske ideer (Kunnskapsdepartementet, 2013b, s. 2.) Det står dessuten skrevet under grunnleggende ferdigheter at elever må stille spørsmål og argumentere for meningsinnholdet i matematiske ideer. Det betyr at elever skal delta i samtaler rundt matematiske problemstillinger, uttrykke sine ideer muntlig og drøfte matematiske problemer, løsninger og strategier med andre elever (s. 4). Matematikkundervisningen innebærer at elever skal gi mening til matematiske objekter og begreper gjennom å arbeide med oppgaver som stimulerer deres evne til resonnering og sammenkobling av matematiske ideer. Kommunikasjon med medelever er også en essensiell del av matematikkundervisningen og vil bidra til at elever kan utvikle ny kunnskap i matematikk.

Kommunikasjon er et sentralt tema i rammeverket til Anna Sfard (2008), som heter *kommognisjon* (commognition). Sfard anser det som viktig at matematikkundervisningen foregår i et fellesskap, der kommunikasjon er en sentral del. Rammeverket hennes vektlegger at elever lærer og utvikler ny kunnskap ved å ta i bruk det matematiske språket, ulike representasjoner og fremlegg av påstander. Hun påpeker i tillegg at innad i et fellesskap vil det utvikles rutiner som styrer hvordan elever arbeider med matematikk.

1.2 FORSKNINGSSPØRSMÅL

I løpet av studietiden min har jeg hatt en stor interesse for arbeid med resonnering og bevis i matematikkundervisningen. Den matematikkdidaktiske forskningen har i de senere år fremhevet arbeid med resonnering og bevis som en viktig del av matematisk kompetanse på alle klassetrinn. Valget av tema for studien, ble tatt på bakgrunn av egen interesse og det økte fokuset som arbeid med resonnering og bevis har fått innenfor forskning de siste årene. Studien min tar utgangspunkt i arbeid med resonnering og bevis hos elever på tredjetrinnet, der jeg ønsker å se nærmere på den resonneringsprosessen som elevene gjennomgår når de arbeider med bevisoppgaver. Jeg anser det som viktig at jeg, som fremtidig lærer i matematikk, får økt innsikt i hvordan elever oppdager matematiske mønstre, uttrykker påstander, se sammenhenger og argumenterer for sine påstander. Jeg har utviklet følgene forskningsspørsmål som jeg vil prøve å belyse i denne studien:

- *Hva kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn sitt arbeid med resonnering og bevis?*

Studien min er en kvalitativ forskningsstudie, fordi jeg ønsker å oppnå økt kunnskap innenfor et avgrenset fagområdet, der små grupper av elever er i fokus (Moen & Karlsdottir, 2011, s 9). Utdrag fra gruppedialogene i form av transkripsjoner og elevarbeid vil bli presentert, analysert og diskutert med den hensikt å angi hva som kjennetegner elevenes arbeid med resonnering og bevis. I undersøkelsen min har jeg valgt å ta utgangspunkt i matematikkoppgaven som er hentet fra Carpenter et al. (2003), som jeg har beskrevet tidligere i innledningen. Denne oppgaven vil jeg bruke som et hjelpemiddel for å finne frem til svarene på forskningsspørsmålet mitt. I studien min har jeg valgt å definere innholdet i denne matematikkoppgaven, som tre forskjellige påstander som skal bevises. Jeg skal studere arbeidet med resonnering og bevis innad i to elevgrupper på tredjetrinn, når de beviser påstander ved et tilfelle, påstander ved endelig antall tilfeller og til slutt en påstand ved uendelig antall tilfeller.. Jeg vil både bruke rammeverket til Stylianides (2016), der han beskriver tre aspekter ved bevis, og rammeverket til Stylianides (2010), hvor han blant annet fokuserer på fremlegg av påstander. Tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons- og uttrykksformer, og fremlegg av påstander vil gi meg en teoretisk bakgrunn og økt innsikt i hva som kan kjennetegne arbeid med resonnering og bevis hos elever på tredjetrinn. I tillegg vil jeg koble funnene mine opp mot rammeverket til Sfard (2008) kommognisjon, der hun fokuserer på at matematikklæring er å delta i et fellesskap der kommunikasjon står sentralt.

1.3 OPPBYGGING AV STUDIEN

Studien min er delt inn i fem kapitler. Etter innledningskapitlet følger et teorikapittel som inneholder teoretiske perspektiver på arbeid med resonnering og bevis i matematikkundervisningen. De neste kapitlene inneholder metodiske valg og refleksjoner, analyse av arbeid med resonnering og bevis, diskusjon av arbeid med resonnering og bevis, og deretter avslutning og veien videre. I teorikapitlet vil jeg først gjøre rede for rammeverket kommognisjon til Sfard. Jeg vil så presentere de fire kjennetegnene ved et matematisk fellesskap; det matematiske språket, visuelle mediatorer, narrativ og rutiner. Videre vil Stylianides (2016) sin forskning på arbeid med bevis presenteres. I denne delen vil jeg først vise til de tre aspekter ved bevis som Stylianides refererer til, og deretter tre eksempler på bevisoppgaver som han presenterer i sin forskning. Begreper som generalisering, mønster, påstander og argumentasjon vil jeg også utdype nærmere. Under kapittelet metodiske valg og refleksjoner vil formål og forskningsdesign blir presentert først. Videre vil jeg belyse studiets troverdighet, gi noen etiske betraktninger og så avslutte med en beskrivelse av selve analyseprosessen min. Selve analysekapitlet er delt i to. Jeg analyserer først hamsteroppgaven som elevene arbeidet med og deretter elevenes utsagn og skriftlige arbeid. Det nest siste kapitlet inneholder en drøfting av elevenes arbeid med resonnering og bevis. I dette kapitlet prøver jeg å finne svar på forskningsspørsmålet mitt, ved å henvise til oppgavens analysekapittel og tidligere forskning. I det siste kapitlet som heter avslutning og veien videre, vil jeg blant annet reflektere over studiens troverdighet og eventuelle bidrag som mitt studie kan tilføre forskningsfeltet.

2.0 TEORETISKE PERSPEKTIVER VED ARBEID MED RESONNERING OG BEVIS

Målet med denne studien er å belyse hva som kjennetegner arbeidet med resonnering og bevis i to elevgrupper på tredjetrinn. Jeg vil benytte meg av noen teoretiske verktøy for å oppnå forståelse og innsikt i hvordan elever arbeider med resonnering og bevis i et fellesskap. Studien min har jeg valgt å plassere inn i et sosiokulturelt læringssyn. og vil derfor benytte meg av rammeverket kommognisjon. Rammeverket bygger på sosiokulturelt læringssyn, og er i tillegg rettet mer spesifikt mot matematikkundervisning. Jeg ønsker å bruke dette rammeverket fordi det vektlegger språk og samhandling, noe som står sentralt i min undersøkelse. Teorikapitlet mitt starter først med en redegjørelse for rammeverket kommognisjon. Oppgavens hovedfokus som er arbeid med resonnering og bevis, blir så presentert og satt i sammenheng med den teoretiske redegjørelsen for arbeid med bevis som generalisering, oppdagelse av mønster, fremlegg av påstander og til slutt gyldig og ikke gyldig argumentasjon.

2.1 MATEMATISK KUNNSKAP LÆRES OG UTVIKLES I ET FELLESSKAP

Det sosiokulturelle synet på læring vektlegger læring i et sosialt fellesskap, der kommunikasjon står sentralt. Anna Sfard har videreutviklet og tilpasset det sosiokulturelle synet på læring til matematikkfaget, og utarbeidet rammeverket *kommognisjon* (commognition). Matematikklæring er ifølge Sfard å delta i en matematisk diskurs, som er et sosialt fellesskap med en særegen form for kommunikasjon. Diskursen er en felles aktivitet som følger felles etablerte regler. En matematisk diskurs, i likhet med andre former for diskurs er avhengig av samordnede kjennetegn. I en matematisk diskurs er slike kjennetegn: *matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativ* og *rutiner*. Matematikklæring er å delta i et matematisk fellesskap, der elever kommuniserer med hverandre ved å benytte seg av disse ulike kjennetegnene (Sfard, 2009 & 2012).

Sfard (2008, s. 133-134) skriver at et særskilt kjennetegn i den matematiske diskursen innebærer bruk av *ord* (keywords). Vanlige ord og ord som benyttes innenfor matematikken får da en spesiell betydning og vil ikke inneha samme meningsinnholdet ved bruk i andre diskurser. Et eksempel på et slikt matematisk ord vil være tallet tre, hvor deltakere innad i fellesskapet sier at tallet tre er halvparten av seks, et oddetall eller kvadratroten av ni. Et annet eksempel kan være begrepet funksjoner, der deltakerne da kan si at funksjoner blant annet omhandler korrelasjon, der to variabler er avhengige av hverandre. Deltakelse i en matematisk diskurs innebærer da bruk av slike matematiske ord. Den matematiske kommunikasjonen innad i diskursen inneholder også *visuelle mediatorer* (visual mediators), som representerer objekter elever benytter seg av når de kommuniserer med hverandre. Symboler, tallinjer, tabeller, grafer eller tekst er alle eksempler på slike visuelle mediatorer. Når elever innad i en matematisk diskurs snakker om for eksempel funksjoner, kan de benytte seg av symboler, tabeller eller grafer som kan representere funksjonsuttrykket i samtalen. Elevene kan vise at to variabler er avhengige av hverandre, ved å ta i bruk en tabell og/eller en graf. Funksjonsuttrykket som representeres gjennom en tabell eller en graf, vil da være avhengig av fellesskapet for å kunne eksistere.

Matematikk i en diskurs kjennetegnes også gjennom *narrativ* (narratives). Narrativ er påstander om egenskaper ved et matematisk objekt, relasjoner mellom objekter eller en påstand om en aktivitet av og med objekter. Narrativ kan bestå av ord og/eller skrift og være teoremer, definisjoner og regneregler, men kan også være en påstand om en spesifikk oppgave. Deltakerne innad i den matematiske diskursen må da bli enige om at påstandene er sanne (godkjent sannhet) eller ikke. Et eksempel på en narrativ kan være når en elev innad i den matematiske diskursen påstår; når en skal fordele 20 kroner på fem personer, vil hver person få fire kroner. Et annet eksempel kan være når en elev påstår at tallet seks er dobbelt så mye som tallet tre. I begge eksemplene er det opptil deltakerne innad i diskursen å bestemme om påstandene skal godkjennes eller ikke. I hamsteroppgaven som jeg introduserte innledningsvis, kan en narrativ være 6+1 er en løsning på oppgaven. En annen narrativ kan være «det er en løsning mer enn antallet hamstre». Fellesskapet må da bestemme seg for om narrativet skal godkjennes eller ikke. Sfard beskriver i sitt rammeverk at narrativ også kan tolkes som påstander som blir formidlet i et gitt fellesskap og deretter må godkjennes av deltakerne i fellesskapet.

Rutiner (routines) er meta-regler som styrer en matematisk diskurs. En rutine handler om hvordan deltakere innad i et matematisk fellesskap arbeider med matematikk. Dette kan være et mønster som gjentar seg, og som er et kjennetegn i en diskurs. Rutiner i en matematisk diskurs kan gjenkjennes gjennom bruk av matematiske ord, visuelle mediatorer og hvordan narrativ legges frem og godkjennes. Et eksempel på en rutine vil være når den eneste begrunnelsen elever benytter seg av ved argumentasjon, er å henvise til fasiten eller det som står i læreboka. En annen rutine kan være når elever som arbeider med generelle påstander og deres gyldighet; altså bevis, og så henviser en kun til spesifikke eksempler uten å vise til generelle strukturer eller egenskaper. I tillegg kan en rutine være når elevene i et gitt fellesskap arbeider med matematikk begrunner de sjeldent sine påstander.

2.2 ARBEID MED BEVIS

Andreas Stylianides (2007, s. 291 og 292) er opptatt av hvordan elever tidlig i barneskolen kan arbeide med bevis i matematikkundervisningen. På bakgrunn av litteratur som omhandler arbeid med bevis og ved å analysere datamaterialet fra klasserom på barnetrinnet, har Stylianides kommet frem til tre aspekter som kan gi et dypere innblikk i elevers arbeid med bevis, uavhengig av klassetrinn. Rammeverket hans er utarbeidet med bakgrunn i tidligere forskning, en forskning som i liten grad har fokusert på arbeid med bevis i barneskolen. Stylianides har utviklet tre aspekter ved bevis som også er tilpasset for bruk i matematikkundervisningen i barneskolen. Han mener selv at rammeverket hans kan hjelpe lærere å utvikle et begrep for bevis som er passende for elever på alle klassetrinn og i tillegg veilede lærere i deres forsøk på å fremme arbeid med bevis hos elever på alle klassetrinn. Stylianides (2016, s. 13) beskriver et bevis som en sammensatt sekvens av forklaringer for eller mot en matematisk påstand, og han deler et bevis inn i disse tre aspektene;

1. Argumentet må bygge på tidligere sannheter som er akseptert av de sosiomatematiske normene i klasserommet (en kjede aksepterte sannheter), og som er sanne og tilgjengelige uten videre forklaring. Aksepterte sannheter kan være definisjoner, aksiomer, teoremer og etablerte regler eller prosedyrer (utregning).

2. Argumentet må anvende en form for resonnering (argumentasjonsform) som er gyldig og kjent, eller som er innenfor den begrepsmessige rekkevidden for de sosiomatematiske normene i klasserommet. Argumentasjonsform referer her til hvordan det som er kjente og tilgjengelige blir benyttet. Eksempelvis hvordan bruke addisjonsalgoritmen for å bevise at en utregning er riktig. Et annet eksempel kan være systematisk tenkning, der løsninger som er kjent og tilgjengelig uten videre forklaring

settes i et system og systemet blir et bevis på at det ikke finnes flere løsninger på en spesifikk oppgave.

3. Det matematiske argumentet må formidles ved hjelp av uttrykksformer som er passende og kjent, eller innenfor den begrepsmessige rekkevidden for de sosiomatematiske normene i klasserommet. En uttrykksform kan være å begrunne en utregning gjennom språket, og/eller ved å benytte seg av tabeller, symboler eller en grafer.

(egen oversettelse)

Rammeverket til Stylianides gir på den ene side et innblikk i elevers arbeid med resonneringen og bevis, der en kan identifisere hvilke utgangspunkt argumentet bygger på og hvilke argumentasjons - og uttrykksformer elever bruker. På den andre side understreker rammeverket at elevers arbeid med bevis, vil være avhengig av det fellesskapet som elever deltar i. All resonnering avhenger av hvilke aksepterte sannheter, argumentasjons - og uttrykksformer som er utviklet i et gitt fellesskap. Stylianides (2007, s.293) skriver at selv om matematiske ideer er utviklet i et fellesskap, betyr det ikke at alle deltakerne har samme individuelle oppfatning av ideene.

Til tross for at Stylianides definisjon på bevis fokuserer på det som ofte blir ansett som sluttproduktet i matematisk utforskning, så påpeker han også at definisjonen ikke undervurderer viktigheten av resonnering der en oppdage mønster og fremlegger påstander, da dette arbeidet ofte innleder og støtter utviklingen av bevis. Et klasseroms fellesskap som Stylianides refererer til består i hovedsak av elever og der læreren har en spesiell rolle, fordi han representerer matematikken som fagfelt. Stylianides understreker at selv om elever bygger sitt argument på sannheter, anvender argumentasjonsformer som er aksepterte og kjente, formidler argumentet ved hjelp av aksepterte uttrykksformer - er det i tillegg spesifikke betingelser som må oppfylles før argumentet kan anses som et bevis. Det er to viktige faktorer en må ta i betraktning. Det er matematikken som fagfelt representert av læreren og læring og utvikling i matematikk hos elevene (2007, s. 292 og 293). Stylianides skriver;

> Reguarding the consieration of mathematics as a disciplin, the definition reguires that proofs use true statements, valid modes of argumentation, and appropriate modes of

> representation, where the term «true», «valid» and «appropritate» should be understood in the context of what is typically agreed on in the field of matematics. Regarding the cosideration of students as mathematical learners, the definintion reguires that proof depend on what is accepted by, or what is known of conceptually accessible to, a classroom commutity at a given time. (Stylianides, 2016, s. 13)

Stylianides (2016, s. 14) har laget en oversikt over hva et argument må inneholde for å bli ansett som et gyldig bevis. Argumentet må bygge på en kjede av aksepterte sannheter eksempelvis; definisjoner, aksiomer og etablerte prosedyrer som er kjent og tilfredsstiller kravene for et bevis. Argumentasjonsformen må anvendes riktig i forhold til de regler som er fastsatt innenfor det aktuelle matematikkdidaktiske fagfeltet, og følge en logisk tanke rekke. Uttrykksformene må være kjent og passende for fellesskapet.

Stylianides (2016) sin definisjon på et bevis kan også ses i sammenheng med Sfard (2008) sitt rammeverk kommognisjon, der hun beskriver en matematisk diskurs som bruk av; matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativ og rutiner. Narrativ har to betydninger når det knyttes til Stylianides sitt rammeverk. En betydning av narrativ er; en påstand med et meningsinnhold som er kjent, altså en akseptert sannhet. En annen betydning av narrativ er et overordnet utsagn, eksempelvis den påstanden eller bevisoppgaven som elevene arbeider med. Hele resonneringsprosessen handler om å godkjenne påstanden, og da bruker en også aksepterte påstander som utgangspunkt. Argumentasjonsformer er bruk av rutiner som er utviklet i fellesskapet. Når det matematiske argumentet blir formidlet ved hjelp av matematiske språk og/eller ved bruk av visuelle mediatorer, er begge måtene eksempler på uttrykksformer som formidler argumentet.

Ball og Bass (2003, s. 30) beskriver arbeidet med resonnering og bevis i matematikk som et verktøy for å undersøke, oppdage og utforske nye ideer. Dette arbeidet handler i tillegg om argumentasjon; der hensikten er å bevise påstander innenfor matematikk. I likhet med Stylianides har Ball og Bass også forsket på arbeid med resonnering og bevis hos elever i barneskolen. Fokuset deres var også på det som allerede er kjent i et fellesskap, som spesifikke ideer, aksepterte prosedyrer, vilkår og fremgangsmåter for utforskning og argumentasjon. De understreker i likhet med Stylianides at til tross for at matematiske ideer er utviklet og fremkommet i et fellesskap, betyr dette ikke at deltakerne i fellesskapet har samme individuelle oppfatningen av ideene.

Undersøkelsen til Ball og Bass foregikk i løpet av et år og de forsket på arbeid med bevis hos tredjeklassinger (8-9 år). Ved å sammenligne arbeidet som klassens utførte på forskjellige tidspunkt, observerte Ball og Bass at i løpet av denne perioden var en bedring i elevenes evne til resonnering. De merket at argumentasjonsformene i arbeid med resonnering og bevis til elevene endres seg. Et resultat av denne forskningen var at når elevene i starten av skoleåret arbeidet med en bevisoppgave som handlet om et endelig antall tilfeller, brukte de en fremgangsmåte som ikke var passende for oppgaven. Elevene mente at siden de hadde brukt opp mulige tallkombinasjoner, kunne det ikke finnes flere løsninger. Argumentasjonsformen kan tolkes som en slags uttømming. Senere i skoleåret systematiserte elevene løsningene, og hadde dermed et argument som kunne brukes som bevis for at alle løsningene på oppgaven var funnet. Forskningen til Ball og Bass viser i dette tilfellet at matematisk resonnering kan utvikles og dermed læres. De påpeker viktigheten av at læreren må velge oppgavetyper som skaper behov og muligheter for matematisk resonnering hos elevene slik at det utvikles en felles kunnskap hos elevene i gruppen. En viktig faktor for å lykkes i dette er; etablering av en klasseromskultur der interessen og respekten for de matematiske ideer og forslag til løsninger som fremkommer fra medelever står sentralt. De fremhever i likhet med Stylianides at arbeid med resonnering og bevis må ses i sammenheng med det fellesskapet elevene deltar i.

2.2.1 TRE TYPER BEVISOPPGAVER

Stylianides (2016) beskriver tre bevisoppgaver i sin forskning relatert til arbeid med bevis. Oppgavene som Stylianides henviser til kan også anses som påstander om *et tilfelle* (single case), *endelig antall tilfeller* (multiple but finitely many cases) og *uendelig antall tilfeller* (infinitely many cases), og der alle påstandene skal bevises. Hans forskning viser at i alle tre bevisoppgavene benytter elevene seg av både tidligere aksepterte sannheter, argumentasjonsformer og uttrykksformer. Stylianides beskriver i sin forskning en oppgave som omhandler et tilfelle. Elever på fjerdetrinn skal løse oppgaven; «Find the missing digits to make the following addition correct. Prove your answer» (s. 73).

	1		1
+		1	
=	9	0	0

Figur 1: Finn tallene som mangler

	1	8	1
+	7	1	9
=	9	0	0

Figur 2: En mulig løsning på oppgaven

En oppgave med endelig antall tilfeller er når elever på tredjetrinn arbeider i grupper med oppgaven; «I have pennis, nickels, and dimes in my pocket. Suppose I pull out two coins. How much money might I have? » (s. 91). Oppgaven handler om å finne frem til alle mulige løsninger, og så kunne bevise at det ikke finnes flere løsninger. En oppgave med uendelig mange tilfeller som Stylianides beskriver i sin forskning, er når elever på fjerdetrinn arbeidet med oppgaven «I think when you multiply two numbers together, the answer gets bigger» (s. 123).

Stylianides viser i sin studie at det fremkommer aksepterte sannheter, argumentasjonsformer og uttrykksformer, i alle tre bevisoppgavene. I oppgaven med et tilfelle vil en tidligere akseptert sannhet være regneregler for addisjon, altså addisjonsalgoritmen. Argumentasjonsform i denne oppgaven handler om hvordan en bruker addisjonsalgoritmen for å bevise at utregningen er riktig. Uttrykksform er både å henvise til utregningen ved bruk av symboler, men også hvordan addisjonsstykket er stilt opp. I tillegg kreves det at en bruke det muntlige språket til å argumentere for utregningens gyldighet. De ulike aspektene ved bevis vil likevel være avhengige av hvilken oppgave elevene arbeider med. I oppgaven med endelig antall tilfeller kan en argumentasjonsform være å systematisere de ulike kombinasjonene. Systematikken kan bevise at det ikke finnes flere løsninger. I oppgaven med uendelig antall tilfeller vil derimot en argumentasjonsform være å teste ut om påstanden alltid stemmer. Dette utprøves ved å lete etter eksempler der påstanden ikke stemmer.

Carpenter et al. (2003) presenterer i boken sin «Thinking mathematically» en oppgave som inneholder de tre typene bevisoppgaver som Stylianides (2016) beskriver i sin forskning. Oppgaven er *«Ole har sju hamstre hjemme hos seg. Han har to bur som hamstrene kan bevege seg mellom. På hvilke måter kan de sju hamsterne fordele seg i de to burene? Hvilke løsninger kan vi finne?»* (egen oversettelse, s. 65).

I min forskning har jeg tatt utgangspunkt i denne oppgaven og delt den inn i de tre bevisoppgavene. Siste del av oppgaven er en påstand om et uendelig antall tilfeller, der det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre. Det er en generell påstand om en generell egenskap ved oppgaven. En vesentlig del av algebra i skolen, er arbeidet med generalisering og argumentasjonen for å bevise gyldigheten til en påstand (Kaput & Blanton, 2001a, s. 345). Når elever arbeider med generalisering, vil det være påstander som omhandler generelle sammenhenger, altså en generell matematisk påstand. Hamsteroppgaven inneholder dermed også algebraisk resonnering.

2.3 ALGEBRAISK RESONNERING

Kaput og Blanton (2001 & 2011) har analysert hva algebraisk resonnering i skolen handler om. De fremhever at generalisering er en sentral del av algebraisk resonnering, og understreker at algebraisk resonnering bør integreres allerede fra første klassetrinn. Når en da skal introdusere elever for algebraisk resonnering, er generalisering essensielt. En måte å arbeide med generalisering i barneskolen på, er gjennom de to tilnærmingene; generalisert aritmetikk og funksjonstekning. Algebraisk resonnering og generalisering henger tett sammen, og generalisering er kjernen i både generalisert aritmetikk og funksjonstekning. Det er relevant for meg å henvise til generalisering både som generalisert aritmetikk og som funksjonstekning, fordi hamsteroppgaven som jeg benytter meg av i studien min inneholder begge tilnærmingene.

Kaput og Blanton (2001 & 2011) skriver at generalisert aritmetikk og funksjonstekning handler om å oppdage og uttrykke generelle sammenhenger, og argumentere for dem. Algebraisk resonnering som generalisert aritmetikk retter fokuset mot generelle egenskaper og sammenhenger ved tall og regneoperasjoner. I arbeidet med generalisert aritmetikk prøver en å se på strukturer og relasjoner til tall og talloperasjoner, og hvorfor disse egenskaper gjelder for alle tall. Tallet 0 og den kommutative egenskapen i addisjon er eksempler på generalisert aritmetikk. Uansett hvilket tall 0 adderes med, vil summen fortsatt være den samme, og dermed har tallet 0 en generalisert egenskap. Den kommutative egenskapen i addisjon er også et eksempel på generalisert aritmetikk. Den tillater at rekkefølgen på de to tallene som skal adderes kan endres, men summen vil fortsatt bli den samme. Det vil si at 1+6, og 6+1 gir samme sum, uavhengig av hvilket tall som blir addert først. En kan også arbeide med den generaliserbare egenskapen «en opp og en ned». Dette betyr at øker det ene tallet i et addisjonsstykke med en og minker det andre tallet med samme verdi, vil summen fortsatt være den samme. Et eksempel med en opp og en ned, kan ses i sammenheng med algebraisk resonnering som funksjonstekning. Funksjonstenkning handler om å oppdage mønster og generere sammenhenger og korrelasjon, ved å ta i bruk språklige begreper og representasjonsverktøy. Den generaliserbare egenskapen «en opp og en ned», handler om en korrelasjon, der to variabler er avhengig av hverandre.

Blanton & Kaput (2011, s.20) fremhever at i situasjoner der elever arbeider med generalisering, må læreren etablere en klasseromskultur der det å oppdage sammenhenger, legge frem påstander, generalisering og argumentasjon står sentralt. Elevene må innse viktigheten av å argumentere, fordi det er gjennom argumentasjon at en utvikler troverdig kunnskap. Kaput og Blanton har forsket på tidlig algebra knyttet til funksjonstekning i barneskolen. En oppgave som omhandlet korrelasjon, altså sammenhengen mellom variabler, var når elever på første klassetrinn i barneskolen arbeidet med «*håndhilsnings-problemet*».

> If 3 people are in a group, how many total handshakes would there be if every person shook hands with all people in the group once? How many handshakes would there be if there were 4 people in the group? Five people? Six people? Twenty people? Can you find a relationship between the number of people in the group and the total number of handshakes*?* (Blanton & Kaput, 2011, s. 10)

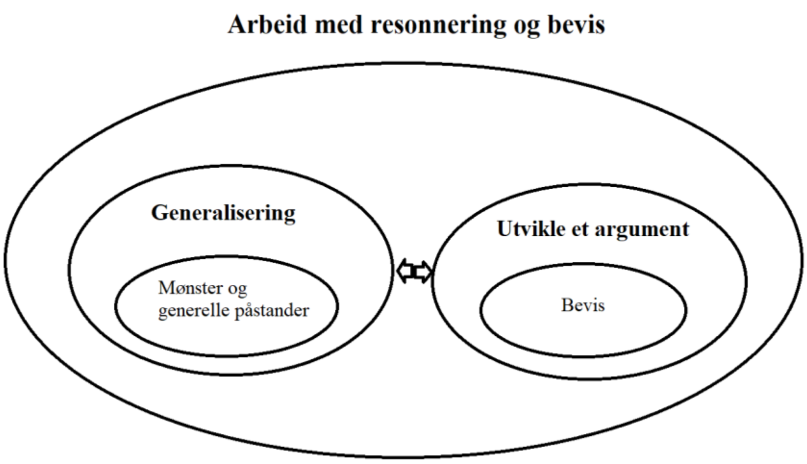
Håndhilsnings-problemet handler om sammenhengen mellom antall personer i en gruppe og det totale antallet håndhilsninger som er mulig å oppnå i gruppen. Et resultat fra Kaput og Blanton sin forskning viser at en viktig del av elevenes matematiske resonnering er å ta i bruk funksjonstabell. I håndhilsnings-problemet skrev elevene opp antall personer i den ene kolonnen og antall håndhilsninger i den andre kolonnen, altså en systematisk oppstilling. Elever kan allerede fra første klasse begynne å se sammenhenger og gi en mening til funksjonstabellen. Tabellen er et verktøy for å oppnå oversikt over tall og et tydelig objekt som kan brukes til å vise matematiske sammenhenger i en oppgaveløsning. Blanton & Kaput (2011, s. 20) påpeker at funksjonstekning krever at elever må få tilgang til komplekse matematiske ideer, utvikle nye notasjonssystemer, og samtidig forstå viktigheten av å bruke representasjonsverktøy. Det er viktig at elevene selv deltar aktivt i utviklingen av generelle påstander, uttrykker argumenter og utvikler generaliseringer. Bruk av algebraisk notasjon, språk og resonneringsverktøy for funksjoner (tabeller, grafer og funksjonsuttrykk), er sentrale hjelpemidler som elevene må kunne benytte seg av.

Hamsteroppgaven som jeg brukte i min studie inneholder generaliseringer knyttet til både generalisert aritmetikk og funksjonstekning. Når det gjelder generalisert aritmetikk kan den kommutative egenskapen fremkomme i arbeidet med denne oppgaven. For eksempel ved at 6+1 og 1+6 gir summen 7. Et annet eksempel er den generaliserbare egenskapen «en opp og en ned», som ved å minke tallet 6 til 5, og øke tallet 1 til 2, fremkommer 5+2 som en ny løsning på oppgaven. Van De Walle, Karp og Bay-Williams (2014, s. 277-278) skriver at ved å arbeide med en kombinasjonsoppgave slik som hamsteroppgaven, kan elever lære å utforske addisjons-familier. Eksempelvis; må en finne hvilke to tall en må en addere for å få summen sju, samtidig som en lærer hvordan en deler opp tall og setter sammen tall igjen. Oppgaven gir en mulighet til å se forskjellige muligheter for oppdeling av sifferet sju, men også hvordan en kan utforske generaliserbare egenskaper ved denne oppdelingen. Eksempelvis vil det å øke antallet hamstere i det ene buret med et dyr, bety at en må minske antallet i det andre buret med dyr. Oppgaven åpner for en lang rekke løsninger, løsninger som vil representere ulik forståelse av oppgavetekstens innhold. I det første nivået vil elever stoppe når de ikke finner flere løsninger, og dermed lages det ikke flere løsninger. I neste nivå, vil elever strategisk bruke tall fra 0-7 i det ene buret, og tilsvarende tall i det andre buret slik at summen blir sju. Elever som oppdager at hvert tall fra 0 til 7 er en egen løsning, trenger ikke lengre å dele opp tallet sju i forskjellige deler (finne løsninger ved å addere), men lager heller generaliseringer for hvordan en kan bestemme antall løsninger uten å notere dem ned. I dette tilfellet kan eleven si «det er alltid en løsning mer enn antallet hamstre». En slik resonnering kan anvendes til andre tall, og er et viktig steg i generaliseringsprosessen der en senere tar i bruk symboler.

Funksjonstekning kommer til uttrykk ved at elever kan oppdage korrelasjon, en sammenheng mellom antallet hamstre og antallet løsninger. Antallet løsninger og antall hamstre er gjensidig avhengig av hverandre. En kan se antallet hamstere i det ene buret som en funksjon av antallet hamstere i det andre buret. Hvis det er x antall dyr i det ene buret, så er det 7-x dyr i det andre buret. En kan da også benytte seg av en funksjonstabell som representasjonsverktøy, slik at en systematiserer løsningene på en enkel måte og lettere kan finne frem til alle løsningene. Oppgaven gir elevene også muligheten til å oppdage funksjonsuttrykket x+1, der x representerer antallet hamstre og tallet 1 angir at det alltid vil være en løsning mer enn antallet hamstre fordelt i to bur.

2.4 GENERALISERING OG ARGUMENTASJONSFORM

Når elever arbeider med algebra, henger generalisering og argumentasjon tett sammen, og Radford (1996, s.109) påpeker at arbeid med generalisering må ses i sammenheng med gyldighet. Stylianides (2010, s. 39) vektlegger at generalisering er en essensiell del av arbeidet med resonnering og bevis i skolen. Han beskriver i sitt rammeverk at arbeidet med resonnering og bevis er en prosess der en først oppdager mønster, for deretter å sette frem en generell påstand. Videre i prosessen kreves det at en argumenterer for påstandens gyldighet. Resonneringsprosessen angir hvordan en kommer frem til påstander for så å bevise at påstanden er gyldig ved hjelp av argumentasjon. I følge Stylianides er det gjennom en slik prosess at elever lærer og utvikler ny kunnskap i matematikk. Figuren under viser prosessen; arbeid med resonnering og bevis.



Figur 3: Arbeid med resonnering og bevis

(Stylianides, 2010, s. 39)

Figuren viser at en viktig del av arbeid med resonnering og bevis er å oppdage mønster og å komme frem til generelle påstander. For å kunne begynne å argumentere, må en ha en påstand som en skal argumentere for eller imot. Stylianides (2010, 39) fremhever dermed at en viktig del av arbeid med resonnering og bevis, er å få innsikt i hvordan en påstand kan legges frem. Han understreker at det å kunne oppdage mønster og så ha evne til å uttrykke generelle påstander, vil legge grunnlaget for elevenes mulighet til å utvikle generaliseringer. I følge

Carpenter et al. (2003, s. 53) er det å legge frem påstander en viktig del av matematikkundervisningen, selv om elever ikke kan bevise påstandene. Når elever oppdager mønster og da legger frem en påstand, handler påstandene om viktige ideer innenfor matematikk. Denne tankeprosessen gir også elevene makt og eierskap til å lære og utvikling av ny matematisk kunnskap, løsning av matematiske problemer, samtidig som den gi mening til den matematikken de lærer og bruker. I hamsteroppgaven som elevene i min studie arbeidet med, vil Stylianides (2010) sitt rammeverk passe inn i den siste bevisoppgaven; der det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre. Denne bevisoppgaven handler om en generell påstand, en bevisoppgave med uendelig antall tilfeller (Stylianides, 2016).

2.4.1 GENERALISERING: MØNSTER OG GENERELLE PÅSTANDER

Stylianides (2010, s. 40) definere mønster *som en generell matematisk sammenheng som passer til en gitt mengde opplysninger*. I hamsteroppgaven kan et mønster være når elevene systematiserer løsningene sine slik;

0+7
1+6
2+5

Her kan de oppdage mønsteret ved at tallet på venstre side øker med et hamster for hver linje nedover, mens tallet på høyre side samtidig minker med en hamster. Et annet eksempel kan være når elevene oppdager mønsteret som angir at det vil bli en løsning mer enn antallet hamstere (sju hamstere gir 8 løsninger). Det å stille løsningene opp systematisk kan være et hjelpemiddel for å oppdage slike mønstre. Stylianides (2010, s. 41) definerer en generell påstand, som en påstand om en generell matematisk sammenheng. Et eksempel fra hamsteroppgaven vil være når en elev har oppdaget mønstret som nevnt ovenfor og derfor kommer med påstanden «*det vil alltid bli en løsning mer enn antallet hamstre*». En slik generell påstand er som tidligere nevnt en bevisoppgave med uendelig antall tilfeller, som Stylianides (2016) beskriver i sin forskning.

2.4.2 ARGUMENTASJONSFORM

I arbeider med resonnering og bevis viser flere undersøkelser at elever ofte bruker konkrete eksempler som argumentasjonsform, når de skal bevise sine generaliseringer (Balacheff, 1988;

Ball & Bass, 2003; Lannin; 2005; Stylianides, 2007;). Carpenter et al. (2003) fremhever at når barneskoleelever utforsker en påstand som gjelder for alle tall, mangler de ofte språk og begreper som kan hjelpe dem til å uttrykke de generelle egenskapene ved tall og talloperasjoner. Ofte må de gå tilbake og henvise til et spesifikt tilfelle. Mason (1996, s. 67) påpeker at når en lærer viser til et eksempel for elevene, er elevenes erfaringsgrunnlag ofte helt forskjellig fra erfaringsgrunnlaget til læreren. Læreren oppfatter at dette ene eksempelet representerer en egenskap som kan belyse og forklare et generelt begrep eller en generell uttrykksform. Når læreren så gjennomgår egenskapene og strukturen til dette spesifikke tallet (eksemplet), innehar tallet kun en rolle som plassholder, der forskjellige egenskaper og strukturer som er generelle for flere tall kan belyses. Elevene oppfatter på sin side tallet som et eksempel på et helt og fullstendig begrep, og ikke som en illustrasjon på en generell egenskap ved eksemplet. De egenskapene og strukturene som læreren viser til brukes kun til å eksemplifisere de generelle egenskapene ved eksemplet. Disse generelle egenskapene er for mange elever vanskelig å skille fra de spesifikke egenskapene som gjelder kun dette eksemplet.

I arbeid med resonnering og bevis skiller Stylianides (2010, s. 41) mellom et argument som er et gyldig bevis og et argument som ikke er et gyldig bevis. Han har utviklet et rammeverk der det stilles spesifikke krav for at et argument skal anses som gyldig. Et gyldig argument kan ses i sammenheng med Andreas Stylianides (2016) sine tre aspekter på et bevis. Gabriel Stylianides (2010) går nærmere inn på hvilke typer argumentasjonsformer som er gyldige og ikke-gyldige når elever arbeider med generelle påstander. Han definerer et gyldig bevis til å være et argument basert på aksepterte sannheter for eller imot en matematisk påstand. Ved «aksepterte sannheter» mener han aksiomer, teoremer, definisjoner, eller andre påstander som blir ansett som en felles sannhet uten begrunnelse og gitt i et fellesskap på et bestemt tidspunkt.

Rammeverket til Stylianides (2010, s. 42) inneholder to argumentasjonsformer som er knyttet til konkrete eksempler, og der er *empirisk argumentasjon* (empirical argument) og *generisk argumentasjon* (generic argument). Det er kun generisk argumentasjon anses som en gyldig argumentasjonsform. Empirisk argumentasjon handler om at elever kun viser til noen eksempler når de skal argumentere for sin matematiske påstand (Balacheff, 1988, s. 218). Et eksempel på empirisk argumentasjon i hamsteroppgaven, er den generelle påstanden om at det alltid vil være en løsning mer enn antallet hamstre fordi dette stemmer ved fordeling av eksempelvis sju, åtte og ni hamstre i to bur. Argumentet er basert på et mønster som gjentar seg, og henviser ikke til noen generell sammenheng, kun til noen spesifikke eksempler.

Generisk argumentasjon involverer bruk av et eksempel for å finne generelle egenskaper og strukturer, slik at eksemplet kan representere det generelle prinsippet (Balacheff, 1988, s. 219). I hamsteroppgaven vil et generisk eksempel være når en elev tar utgangspunkt i et eksempel, for så å bevise at det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre. Et eksempel kan være oppgaven der Ole har sju hamstre fordelt i to bur. Da vil utgangspunktet være de åtte løsningene på oppgaven, altså at tallet sju kan skrives på åtte forskjellige måter som summen av to positive heltall. Argumentasjonsform vil være å systematisere de åtte løsningene. Ved å starte på 7+0, deretter 6+1 og helt til 0+7.

0+7
1+6
2+5
3+4
4+3
5+2
6+1
7+0

Uttrykksformen vil her være den systematiske oppstillingen av løsningene og det muntlige språket. I tillegg til tabellen med løsninger kreves det at en argumenterer for at når vi starter med 0 og øker videre med en hel tallverdi helt opp til antallet hamstre vi startet med, så er alle løsningene funnet. På samme måte som vi starter med 0 i dette eksemplet, vil vi starte med 0 uansett hvilket positivt heltall som er med i oppgaven. Det vil si at antall løsninger = det tallet vi startet med +1. I en generisk argumentasjon tar et utgangspunkt i et konkret eksempel, og henviser tilbake til egenskaper ved dette eksemplet når en skal bevise den generelle påstanden.

Rammeverket til Stylianides (2010, s. 42) om arbeid med resonnering og bevis involverer også argumentasjonsformer som ikke tar utgangspunkt i ett eller flere eksempler. Han skiller mellom *redegjørelse* (rationales) og en *generell logisk slutning* (demonstrasjon), der kun generell logisk slutning blir ansett som gyldig argumentasjonsform. En generell logisk slutning er ikke avhengig av et eksempel for å kunne henvise til det generelle. Her kan en vise til det generelle ved bruk av algebraisk notasjon. En generell logisk slutning i hamsteroppgaven vil være at tallet x er antallet hamstre i oppgaven og antallet løsninger er x+1. Tallene fra 0, 1, 2 og helt opp til x, representerer her ulike løsninger og vil gi forskjellige fordelinger av hamstrene mellom to bur. En akseptert sannhet her vil være at når en skal nedtegne addisjonsstykket som har tallet x, så kan det være 0+x, 1+x helt opp til x+0. Det er en akseptert sannhet at alle disse løsningene gir svaret x, som er antall hamster en startet med. En argumentasjonsform er å systematisk bygge opp et mønster, som hele tiden også representerer en generell egenskap. Uttrykksformene vil da være den systematiske listen med løsninger og det muntlige språket. En kan dermed argumentere for at uansett hvilket antall hamstre Ole har i to bur, så vil løsningene alltid bli en mer enn antallet hamstre, altså antall løsninger= antall hamster +1, altså x+1.

Stylianides (2010, s. 42) skriver at redegjørelse er en argumentasjonsform der argumentet inneholder hull, og som dermed mangler alle logiske detaljer. Redegjørelsen er nært tilknyttet en generell logisk slutning, men argumentet kan ikke anses som gyldig, fordi argumentet mangler logiske detaljer. I hamsteroppgaven vil en bruke redegjørelse som argumentasjonsform når en sier «et tall kan deles på flere måter enn tallet» eller når en sier «du starter på 0 og så går du oppover, og derfor vil det være en mer». En tidligere akseptert sannhet kan i likhet med en logisk slutning være at alle løsningene gir svaret x, men utfordringen ligger i hvordan en går fra et steg til neste steg i den pågående resonneringsprosessen. Argumentasjonsformen inneholder hull, den gir ikke en logisk forklaring. Uttrykksformene viser til eksempler på de ulike løsningene og bruke av det muntlig språk i argumentasjonen.

3.0 METODISKE VALG OG REFLEKSJONER

I kapitlet metodiske valg og refleksjoner skal jeg begrunne de valgene jeg har tatt i forbindelse med innsamlingen, bearbeidingen og analysen av datamaterialet mitt. Innledningsvis vil jeg presentere forskningsdesignet og formålet med studien min. Deretter vil jeg beskrive forskningsmetoden gruppeintervju, som er den kvalitative metoden jeg har valgt å bruke. Videre vil jeg redegjøre for innsamlingsprosessen og beskrive hvordan jeg samlet inn datamaterialet mitt. Jeg vil også vise til refleksjoner som jeg har hatt i sammenheng med studiens troverdighet og de etiske forhåndsregler. Til slutt vil jeg beskrive hvordan jeg har analysert datamaterialet i studiet ved bruk av abduktiv metode.

3.1 FORMÅL OG FORSKNINGSDESIGN

Et sentralt kjennetegn ved kvalitativ forsking er at forskeren øker sin kunnskap om hvorfor og hvordan en prosess oppstår innenfor et begrenset område (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 227). Som kvalitativ forsker ønsker jeg å oppnå økt kunnskap innenfor et avgrenset fagområde i matematikk, der små grupper av elever er i fokus (Moen & Karlsdottir, 2011, s 9). Hensikten med min studie er å belyse hva som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn, når de arbeider med resonnering og bevis. Jeg har valgt kvalitativ forskningsmetode i form av gruppeintervju, for bedre å kunne gi svar på mitt forskningsspørsmål. I løpet av denne kvalitative forskningsprosessen har jeg erfart at studiens formål og design har endret seg, både med tanke på teoretiske rammeverk og type fokusområde. Jeg har som en del av forskningsprosessen, endret problemstilling og teoretisk forankring en rekke ganger, på bakgrunn av funn i mitt datamateriale (Thagaard, 2013, s. 31).

Ved bruk av kvalitativ forskningsmetode, blir virkeligheten og kunnskapen konstruert i møte mellom forskeren og de som deltar i studien, sett fra et ontologisk og epistemologisk perspektiv. Relasjonene mellom meg som forsker og de elevene jeg intervjuet vil derfor har stor betydning for datamaterialet og de resultatene som jeg legger frem til slutt (Nilssen, 2012, s. 25). Mine kunnskaper og min forståelse av virkeligheten har jeg også med meg inn i studien som forsker. Teoretiske rammeverk sammen med min erfaringsbakgrunn og kunnskap bidro til at jeg kunne forstå og finne en mening i datamaterialet. (Nilssen, 2012, s. 26). Jeg har derfor en fortolkende rolle i analyseprosessen min, der jeg skal identifisere kjennetegn som også kan knyttes opp mot tidligere forskning. Resultatet av analysen min vil dermed være en tolkning av sannheten, og ikke den eneste sannheten (Thagaard, 2013, s. 41).

Et spørsmål som ofte dukker opp når en gjennomfører kvalitativ forsking knyttet til intervju, er om funnene er generaliserbare (Kvale & Brinkman, 2009, s. 264-265). Da jeg i min forskning kun har gått i dybden på arbeid med resonnering og bevis hos to elevgrupper, kan resultater fra min forskning ikke generaliseres. Selv om resultatene fra forskningsprosjektet ikke er generaliserbare, kan jeg og andre lærere likevel få et innblikk i læringsprosessen hos elever på tredjetrinn. Refleksjonene over mine funn kan være nyttig ved at de påvirker mine egne tanker om læring og undervisning innenfor temaet resonnering og arbeid med bevis i matematikkfaget på barneskolen.

3.1.1 GRUPPEINTERVJU SOM KVALITATIV FORSKNINGSMETODE

Som tidligere nevnt valgte jeg å bruke intervju som kvalitativ forskningsmetode. Kvale og Brikmann (2009, s. 21) påpeker at «Det kvalitative forskningsintervjuet søker å forstå verden sett fra intervjupersonenes side. Å få frem betydningen av folks erfaringer og å avdekke deres opplevelser av verden, forut vitenskapelige forklaringer, er et mål». Valget av intervju som metode kan bidra til at jeg som forsker oppnår økt forståelse og innsikt den prosessen som elevene gjennomgår, når de arbeider med resonnering og bevis. I min studie valgte jeg å intervjue to elevgrupper, der den ene gruppen besto av tre elever og den andre gruppen besto av to elever. De to elevgruppene som deltok i undersøkelsen min arbeidet med hamsteroppgaven som er nevnt i teorikapitlet ovenfor. Undersøkelsen varte i omtrent 30 minutter og elevene fikk spørsmål underveis, mens de arbeidet med oppgaven.

Gruppeintervju som kvalitativ forskningsmetode gav meg et innblikk i hvordan to elevgrupper på tredjetrinn resonnerte og argumenterte for sine påstander, når de arbeidet med en bevisoppgave. Jeg fikk studere hvordan elevene i mine grupper resonnerte seg frem til de ulike løsningene på hamsteroppgaven. Jeg ble i tillegg kjent med hvordan elevene uttrykte påstander, argumenterte for dem, sa seg enige og/eller uenige med hverandre, og hvordan relasjonene utviklet seg mellom elevene innad i hver gruppe. Faren ved denne type intervju og en konsekvens av elevsamarbeid i et gruppefellesskap, kan være at elever sier seg enig med resten av gruppen, uten reelt å være enig. Det kan for enkelte elever være «skummelt og ubehagelig» å uttrykke sin mening for medelevene, noe som medfører at enkelte elever unngår å fremføre ett alternativt løsningsforslag. Et gruppeintervju kan samtidig motivere elever til interaksjon og samarbeid, og dermed være med på å gjøre intervjusituasjonen mindre skremmende for elevene (Cohen et al., 2001, s. 432-433).

Gruppeintervju som metode gav meg muligheten til å stille elevene spørsmål mens de arbeidet med oppgavene. Dermed kunne jeg tilpasse spørsmålene etter den situasjonen som oppsto i hver gruppe. Cohen et al. (2011, s. 414-415) karakteriserer en slik type intervju som *ustrukturert intervju*, der forskerrollen innehar stor grad av har frihet og fleksibilitet. Ved å bruke et ustrukturert intervju, hadde jeg mulighet til å stille elevene de spørsmålene som var naturlige i situasjonen. Jeg bestemte også når spørsmålene skulle stilles og hvilket innhold spørsmålene skulle ha. Det mest hensiktsmessige for meg var å stille spørsmålene etterhvert som de «dukket opp», fordi det var vanskelig å forestille seg hvordan resonneringsprosessen i hver elevgruppe ville utvikle seg.

3.2 DATAINNSAMLINGSPROSESSEN

I denne delen av metodekapitlet vil jeg belyse innsamlingsprosessen av dataene mine som ble innsamlet og brukt i oppgaven min. I tidsrommet fra starten av oktober til midten av november 2017 planla jeg å gjennomføre både en pilotundersøkelse og innsamlingen av den endelige empirien i samarbeid med to lærere som arbeidet ved skoler i Trondheim kommune. I midten av november gjennomførte jeg de to gruppeintervjuene på elevene, noe som jeg henviser til i analysekapitlet mitt. Jeg vil først presentere valg av skole og klassetrinn, deretter pilotundersøkelsen jeg gjennomførte og til slutt gjennomføringen av de to gruppeintervjuene.

3.2.1 VALG AV SKOLE OG TRINN

Veilederen min hjalp meg til å komme i kontakt med to skoler i Trondheim kommune. Jeg avtalte å gjennomføre undersøkelsen på elever fra tredjetrinn ved begge skolene. En lærer på tredjetrinn ved hver av skolene sa seg villig til å la meg utføre forskning på elevene i sin klasse. Jeg brukte e-mail i den videre kontakten med de aktuelle lærerne ved de to skolene. Lærerne delte ut samtykkeskjema en måned før jeg skulle gjennomføre intervjuene. Elevene var satt sammen i grupper på 2 til 3 stykker, der elevene og deres foresatte på forhånd hadde godkjent deltagelsen i studiet mitt. Elevene hadde også mulighet til å trekke seg fra studiet når som helst underveis, dersom de ønsket det. Kravet til gruppesammensetningen var at elevene skulle jobbe godt sammen og være muntlig aktive. Jeg bestemte meg tidlig for at studien min skulle være rettet mot elever på småtrinnet, da jeg alltid har vært interessert i hvordan elevene arbeider med matematikk på de lavere klassetrinnene. Jeg mener også at det er viktig å rette forskningen innenfor dette fagområdet mot småtrinnet, da det er i denne aldersgruppen det viktige grunnlaget for matematikk legges. Jeg hadde samtidig funnet en oppgavetype (hamsteroppgaven) som jeg hadde lyst å teste ut på elever, en oppgave som var tilpasset elever på småtrinnet (2-3. trinn).

3.2.2 PILOTUNDERSØKELSEN

Robson (2002, s. 185) skriver at en pilotstudie er en liten forundersøkelse, der en i praksis prøver ut den forskningen som en har planlagt å gjennomføre på et senere tidspunkt. Målsetningen ved et pilotprosjekt kan være å teste ut og sjekke om den metoden en har planlagt å bruke fungerer slik som en forventer. Resultatet av min pilotstudie ville gi nyttig informasjon om hva min endelige datainnsamling ville gi som resultat. I etterkant av pilotundersøkelsen måtte jeg vurdere hva som eventuelt kunne endres før den siste datainnsamlingen skulle gjennomføres. Cohen et al. (2011, s. 492) skriver at en pilotundersøkelse kan utføres på forskjellige måter. Jeg gjennomførte pilotundersøkelsen i starten av oktober ved en av skolene i Trondheim kommune. Elevgruppene besto av 2 til 3 elever i hver gruppe. Hensikten med pilotundersøkelsen min var å teste ut antallet elever i hver gruppe, tidsbruk, hvilke spørsmål som var hensiktsmessig å stille elevene underveis og valg av type matematikkoppgaver.

Erfaringene mine etter gjennomført pilotundersøkelse var blant annet at antallet på 2-3 elever i hver gruppe var stort nok. Dette elevantallet medførte at hver elev fikk mye oppmerksomhet i gruppa og ikke så lett kunne melde seg ut av samtalen. Elevene arbeidet med to oppgaver knyttet til arbeid med bevis, der den tidligere nevnte hamsteroppgaven var en av oppgavene. I løpet av arbeidsprosessen merket jeg at elevene ble ukonsentrerte og mistet interessen for videre arbeid med oppgavene, etter omtrent 30 minutter. Dette resulterte i at elevene fikk tid til et konsentrert og grundig arbeid med en av oppgavene. På bakgrunn av dette bestemte jeg meg for kun å benytte meg av hamsteroppgaven i den videre forskningen, slik at jeg fikk brukbare datamaterialer fra en av oppgavene. Elevene var også mest engasjerte og ivrige under arbeidet med hamsteroppgaven, noe som var årsaken til at jeg valgte denne oppgaven i det videre arbeidet med den endelige datainnsamlingen. Pilotundersøkelsen var ei nyttig erfaring for meg. Jeg fikk testet ut hvilken type matematikkoppgave som kunne gi meg et brukbart datamateriale til min forskning. Jeg fikk også erfart hvilke situasjoner som oppstår og kan oppstå underveis i ei elevgruppe mens forskning pågår.

3.2.3 GRUPPEINTERVJUENE

I hovedundersøkelsen min valgte jeg å gjennomføre et gruppeintervju med fem forskjellige elevgrupper. Alle elevene i de fem elevgruppene hadde sagt seg villige til å delta i undersøkelsen. Jeg hadde planlagt å bruke både lydopptak, videoopptak og innsamling av skriftlig arbeid. Bakgrunnen for at jeg valgte å gjennomføre undersøkelsen på hele fem grupper, var for å sikre en viss størrelse på datamaterialet. Intervjuene ble gjennomført i midten av november, ved en av skolene i Trondheim kommune. I samarbeid med kontaktlæreren på det aktuelle klassetrinnet, ble vi enige om hvilke elever som skulle delta i de ulike gruppene. Gruppene var basert på hvilke elever som jobbet godt sammen og som i tillegg var muntlig aktive. Elevenes kompetanse i matematikk hadde ingen betydning for sammensetningene. Jeg valgte grupper med et lite antall på 2-3 elever, på bakgrunn av at det da ville være lettere å få hele gruppen til å samarbeide under arbeidsprosessen med oppgaveløsning. Det var i tillegg viktig for meg å unngå for store grupper, da dette kunne medføre nye grupperinger innenfor gruppen.

I kvalitativ forskning er «evnen til å skape tillit og etablere og vedlikeholde gode relasjoner også av stor betydning for forskeren i sin forskning» (Nilssen, 2012, s. 29). På bakgrunn av at jeg var en ny og helt ukjent person for elevene på disse to skolene, bestemte jeg meg for å være sammen med klassen en hel dag, før undersøkelsen. Det var viktig for meg å kunne skape relasjoner med elevene i klassen, og spesielt de elevene jeg skulle velge til forskningsgruppene mine. Etter å ha vært sammen med klassen en hel dag, gjennomførte jeg de fem gruppeintervjuene i løpet av de to neste dagene. Intervjuene foregikk i hovedsak i et lukket møterom, mens resten av elevene i klassen hadde matematikkundervisning. Varigheten på intervjuene varierte mellom 25 til 35 minutter. Det ble gjort lydopptak, videoopptak, innsamling av skriftlige materialer som elevene produserte under intervjuene og mine egne notater som kom i tillegg. Hvert intervju startet med en liten samtale om hva som skulle skje i løpet av den aktuelle dagen. Hamsteroppgaven ble deretter utdelt og jeg leste oppgaven muntlig opp for elevene. Elevene fikk beskjed om å tenke over hvordan de ville løse oppgaven individuelt og deretter skulle vi arbeide med oppgaven sammen. Årsaken til at elevene først skulle tenke over oppgaven individuelt, var fordi jeg ønsket at alle elevene skulle få tid til å tenke over hvordan de på egen hånd ville ha tolket og løst oppgaven.

Jeg prøvde for egen del å unngå en for aktiv rolle i gruppeprosessen, da dette kunne virke negativt inn på studieresultatet. Datamaterialet skulle i mest mulig grad gjenspeile elevenes utvikling av tanker og ideer under arbeidet med resonnering og bevis. Jeg valgte likevel å delta i noen grad ved å spørre tilleggsspørsmål når noen elever uttrykte seg utydelig eller når elever skulle utdype sine påstander. I løpet av intervjuet var det viktig for meg å få tak i elevenes forslag til oppgaveløsninger, deres meninger, påstander og argumentasjon og i tillegg observere hvordan gruppen som helhet arbeidet med oppgaven. Det var blant annet viktig for meg å observere om det i hovedsak var en elev som tok styringen og avgjørelsene i gruppa, eller om det foregikk et felles resonneringsarbeid.

3.3 STUDIENS TROVERDIGHET

Kvalitativ forskning vil alltid være påvirket av ulike momenter, spesielt med tanke på forskerens virkelighetsforståelse, erfaringsbaserte kunnskap og sosiale bakgrunn (Nilssen, 2012, s. 137). I neste avsnitt vil jeg drøfte de sidene ved studiet mitt som omhandler validitet, reliabilitet og generalisering. Mitt mål som kvalitativ forsker er å sikre at forskningen min angir et riktig bilde av studiens design og innhold, samtidig som mulighetene for mistolkninger er minst mulig. Det er viktig for meg som forsker, at datafunnene som presenteres for leseren er troverdige og bare er relatert til det datamaterialet som jeg samlet inn i forbindelse med den aktuelle forskningskonteksten (Nilssen, 2012, s. 141).

Reliabilitet i kvalitativ forskning omhandler forskningsresultatenes sammensetning og troverdighet. Et spørsmål som ofte dukker opp i sammenheng med reliabilitet er hvorvidt et resultat kan reproduseres av andre forskere og på andre tidspunkt. Det handler altså om hva intervjupersonen(e) i min studie ville ha svart i et gruppeintervju med en annen forsker (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 250). De valgene jeg har foretatt underveis i forskningsprosessen har vært styrt av mine forskningsspørsmål, noe som betyr at jeg innvirket på resultatene i studien min. En annen forsker ville nok hatt en annen relasjon til elevene i d forskjellige gruppene, eller benyttet seg av andre forskningsmetoder. Mine forskningsresultater og resultatene til en annen forsker ville derfor ikke vært entydige. I et gruppeintervju er forskeren i stadig interaksjon med deltakerne i studiet, noe som vil påvirke både forskningskonteksten og datamaterialet (Nilssen, 2012, s. 139 og 141). Det innsamlede datamaterielt fra mine elevgrupper, der intervjueren var en annen forsker, ville mest sannsynlig gitt et annet forskningsresultat.

Validitet innenfor samfunnsvitenskapelig forskning handler om at forskningsprosedyren skal være gjennomsiktig, resultatene skal være åpenbare, og studiens konklusjon skal være overbevisende (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 264). Ved å bruke intervju som min forskningsmetode, er det en mulighet for at jeg har valgt å tolke og fokusere på enkeltsituasjoner som jeg anså som viktige, og dermed utelate andre situasjoner. Det å selv være deltager i intervjuprosessen, kan føre til redusert fokus på forskerollen, og medføre utelatelse av viktige elementer i dialogene eller viktige oppfølgingsspørsmål i en spesifikk situasjon. Selv om jeg benyttet både lyd og videopptak i begge intervjuene, kan lydkvalitet og plassering i rommet påvirke et opptak. Enkelte utsagn kan være vanskelig å oppfatte, da flere elever snakker samtidig og/eller snakker lavt. I tillegg kan kamera med stativ i seg selv være et uromoment for elevene, og dermed ta oppmerksomheten bort fra gruppearbeidet.

Et spørsmål som ofte blir stilt i forbindelse med intervjustudier, er hvorvidt disse funnene er generaliserbare. Dersom sluttresultatene i en studie vurderes som rimelig pålitelige og gyldige, gjenstår spørsmålet som resultatene har overføringsverdi til andre og lignende grupper, antall personer og/eller situasjoner. En vanlig innvending mot intervjuforskning er at studiene ofte inneholder få intervjupersoner, slik at resultatene ikke kan generaliseres (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 264-265). Min studie består av et relativt lite utvalg av elever. Funnene mine vil derfor ikke kunne generaliseres, fordi resultatet bare er relatert til de elevene som ble intervjuet i studiet mitt. Kvale og Brinkmann (2009, s. 265) påpeker at dersom en ønsker å oppnå en generalisert overføringsverdi av sin forskning, bør en flytte fokuset fra spørsmålet om intervjuresultater kan generaliseres, og heller fokusere på om kunnskapen som produseres i en spesifikk intervjusituasjon, kan overføres til andre lignende situasjoner. Det kan bety at resultater fra min forskning, også kan ansees som en nyttig form for informasjon.

3.4 ETISKE FORHÅNDSREGLER

Kvale og Birnkmann (2009, s. 80) skriver at i løpet av en forskningsprosess, kan det oppstå flere etiske problemstillinger som en kvalitativ forsker må ta hensyn til. Etiske problemstiller kan oppstå før, underveis og etter en trer inn som forsker i et klasserom. I tillegg til innsamlet skriftlig elevarbeid, brukte jeg i min studie både lydopptak og videoopptak av gruppeintervjuene som ble gjennomført. Prosjektet mitt ble derfor meldt inn til prosjektvernsforbundet for norsk forskning ved Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD). En forsker som skal behandle personopplysninger i sin forskning, er pålagt kravet om å melde inn sitt prosjekt til NSD. Mitt prosjekt ble godkjent av NSD (vedlegg 3) etter noen uker behandlingstid, og kort tid etterpå sendte jeg ut et informasjonsskriv og samtykkebrev til de to aktuelle kontaktlærerne til de elevene som deltok i studiet. Lærerne sendte informasjonsskrivet og samtykkebrevet videre til de involverte foresatte (vedlegg 2). Informasjonen til de to lærerne og elevenes foresatte, inneholdt opplysninger om studien min og hvordan vi skulle løse matematikkoppgaver i små grupper der barnet kunne trekke seg fra deltakelse, når som helst i løpet av studieprosessen. De foresatte hadde mulighet til å ta kontakt med meg og min veileder, dersom de hadde spørsmål. Samtykket til intervju, lydopptak, videoopptak og innsamling av elevarbeid ble gitt, ved at de foresatte krysset av på samtykkebrevet dersom de godkjente at barnet deres skulle delta i studiet.

Samtykkebrevet ble gitt ut til flere elever enn nødvendig, for å sikre at jeg hadde nok informanter. Med bakgrunn i de kriteriene jeg hadde oppgitt, ble det også lettere for kontaktlærer å sette sammen grupper når det var mange elever å velge mellom. Elevene fikk utlevert informasjonsbrevet - mens innholdet i samtykkebrevet som var adressert til de foresatte, ble lest opp muntlig til elevene. Elevene fikk da forklart innholdet i brevet, der de kunne trekke seg fra deltakelse når som helst de måtte ønske det. Den samme informasjonen ble gitt i forkant av hvert gruppeintervju. Alle navn på skriftlig arbeid ble endret, for å sikre konfidensialitet. Hver elev fikk i tillegg et eget pseudonym. Lydopptak, videoopptak og skriftlig arbeid ble slettet i etterkant av innlevering av masteroppgaven, noe som er i henhold til NSD sine retningslinjer.

3.5 BEARBEIDING OG ANALYSE AV DATAMATERIALET

3.5.1 TRANSKRIPSJON OG ETTERARBEID

Gruppeintervjuene som jeg gjennomførte ble transkribert, også de gruppeintervjuene jeg ikke benyttet meg av i analysedelen. Nilssen (2012, s.46) skriver at når en som forsker skal skrive ned tekster, slik som transkripsjoner, vil det aldri bli en helt nøyaktig gjenspeiling av situasjonen som beskrives. En forsker vil tolke og velge ut selv hva som skal anses som viktig. I tillegg kan mimikk, tonefall, kroppsspråk, gjester og lignede forsvinne, når en omgjør menneskelige relasjoner i forskjellige situasjoner, til tekst. Da jeg skulle transkribere gruppeintervjuene var jeg nøye med å få skrevet ned best mulig gjengivelse av utsagnene til elevene. Dette var viktig for at jeg i størst mulig grad skulle oppnå forståelse og innsikt i gruppeprosessen forut for de påstandene som elevene uttrykte, deres valg av argumentasjonsform og de interaksjonene som oppsto mellom elevene innad i gruppene. Transkripsjonene ble gjennomført kort tid i etterkant av intervjuene, slik at elevarbeidet som ble utført under intervjuene kunne knyttes sammen med de verbale utsagnene fra hver gruppe. Jeg så også på alle videoopptakene, og noterte ned de hendelsene som ikke var mulig å oppfatte på samme lydopptak. Underveis i innsamlingsprosessen noterte jeg ned mine egne tanker om denne prosessen og de samtaler jeg hadde med lærerne som jeg hadde vært i kontakt med i løpet av datainnsamlingen. I transkripsjonen omtaler jeg meg selv som «intervjuer» og ikke med eget navn, slik at det kom tydeligere frem hva som var elevenes utsagn.

I transkripsjonen av de ulike gruppeintervjuene brukte jeg ulike former for tegnsetting. Dette ble gjort for å markere enkelte spesielle elementer fra samtalen:

(tekst i parentes)	Informasjon om situasjonen /ikke verbal handling
[…]	Hopper over situasjoner som ikke er relevant

3.5.2 ANALYSEPROSESSEN

Da jeg var ferdig med innsamlingen av datamaterialet fra gruppeintervjuene, var neste steg å analysere materialet, etter ulike koder og i forskjellige kategorier. Når en forsker skal analysere et kvalitativt datamateriale, vil han vanligvis inneha en fortolkende rolle. Det er derfor viktig å ta hensyn til at det er flere mulige tolkninger av det innsamlede datamaterialet (Cohen et al., 2011, s. 427). I analyseprosessen av et intervju er det å ivareta helheten en utfordring, da en ofte fokuserer mest på de situasjonene i intervjuet som en selv synes er interessante. Cohen et al. (2011, s. 427) påpeker at «The great tension in data analysis is maintaing a sense of the holism of the interview (…) In interview often the whole is greater than the sum of the part». Det er viktig for meg at helheten i hvert intervju og ikke bare deler av intervjuet kommer til syne i min forskning. Jeg lyttet til lydopptakene og videopptakene flere ganger i etterkant av de fem intervjuene. Det var viktig for meg å forsikre meg om at gjengivelsen av situasjonene i de intervjuene jeg skulle bruke videre i studiet var riktige og nøyaktige, slik at helheten kom til syne i gjengivelsen av de ulike situasjonene. Jeg valgte ut til studien min de to gruppeintervjuene der elevene innad i hver gruppe var aktive og engasjerte i oppgaveløsningen, og arbeidet konsentrert med to eller alle tre delene i hamsteroppgaven. I analysedelen i studien min vil jeg henvise til ulike gruppesituasjoner, som jeg mener gir et helhetlig bilde av den resonneringsprosessen som er relatert til elevenes arbeid med hamsteroppgaven.

Jeg analyserte hamsteroppgaven først, for deretter å analysere de to gruppeintervjuene. Analysedelen min er derfor todelt. Min analyse av hamsteroppgaven viser at oppgaven inneholder påstandene; et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. Påstandene er ulike oppgavetyper innenfor arbeid med resonnering og bevis (Stylianides, 2016). Jeg ble også oppmerksom på at oppgaven la til rette for at jeg kunne få et innblikk i elevenes tidligere aksepterte sannheter, deres argumentasjonsform og uttrykksform, de tre aspekter ved bevis som Stylianides (2016) mener kan gi meg en innsikt i elevers arbeid med bevis. Etter å ha analysert deloppgavene i hamsteroppgaven, analyserte jeg de to gruppeintervjuene ved hjelp av transkripsjoner.

Jeg benyttet meg av en abduktiv tilnærming i analyseprosessen min. Thagaard (1998, s.175) skriver at en abduktiv tilnærming innebærer en teori som utvikles på grunnlag av systematiske og dyptpløyende analyser, der forskerens teoretiske bakgrunn også kan gi perspektiver for tolkning av datamaterialets meningsinnhold. Dette betyr at en «abduktiv tilnærming starter fra empirien (som induksjon) men aksepterer betydningen av teorier og perspektiver i forkant og/eller i løpet av forskningsprosessen» (Tjora, 2017, s. 254). I løpet av denne analyseprosessen oppdaget jeg at mitt datamateriale var i samsvar med de tre aspektene som står sentralt hos Stylianides (2016), når elever arbeider med bevis. Mitt datamateriale viste at elevene benyttet seg av tidligere aksepterte sannheter, argumentasjonsformer og uttrykksformer. Jeg oppdaget også et nytt aspekter i mitt datamateriale, i tillegg til de tre aspektene som Stylianides angir som viktig i elevers arbeide med bevis. Det nye aspektet var hvordan påstander ble lagt frem innad i gruppene. I arbeid med resonnering og bevis er Gabriel Stylianides (2010) opptatt av hvordan elever kommer frem til en generell påstand, og han anser denne delen av prosessen som viktig. Sfard (2008) understreker også at en viktig del av matematikklæring i et fellesskap er hvordan påstander blir uttrykt. Selv om Stylianides kun viser til generelle påstander, er jeg opptatt av hvordan alle typer påstander legges frem i arbeidet med resonnering og bevis. Her vil jeg fokusere på hva som er årsaken til at påstanden som også skal bevises, legges frem.

Med bakgrunn i ovenfor nevnte teori og mitt eget datamateriale, har jeg funnet frem til et analyseverktøy som kan hjelpe meg til å gå dypere inn i dataene mine. Jeg fant frem til disse fire aspektene

1. Legge frem en påstand
2. Tidligere aksepterte sannhet
3. Argumentasjonsform
4. Uttrykksformer

Etter å ha identifisert de fire aspektene som er nevnt ovenfor, gikk jeg tilbake til datamaterialet mitt, og analyserte det ved bruk av åpen koding (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 104). Jeg gikk åpent inn i datamaterialet mitt, hvor jeg identifiserte og kodet hva som kjennetegnet fremlegg av påstander, tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons - og uttrykksformer, i oppgaven med et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. Jeg utviklet da et skjema, hvor ulike koder ble plassert under hver av de fire aspektene. Tabellen på neste side viser de ulike kodene jeg har plassert under hvert av de fire aspektene. En utfordrende del av analyseprosessen har vært å skille mellom hva som kjennetegner hvert av de fire aspektene, fordi elevenes arbeid med resonnering er en sammensatt prosess og aspektene henger derfor sammen.

Sette frem en påstand	**Tidligere aksepterte sannheter**	**Argumentasjonsform**	**Uttrykksform**
Påstanden legges frem etter oppfordring fra intervjueren Eleven legger frem en påstand selv Elevene utfyller hverandre	Addisjonsfakta Oppgavens kontekst Resultater fra oppgaven med et tilfelle Resultater fra oppgaven med endelig antall tilfeller	Ingen Bytte om på tallene i løsninger som allerede er akseptert En opp og en ned Uttømming Empirisk argumentasjon Generisk argumentasjon Samspill mellom elevene Gjentakelse Nye påstander Argumentasjonsformen utvikles i fellesskap	Systematisk liste Symboler Upresist språk

Tabell 1:Viser oversikt over de ulike kodene jeg knyttet til hver av de fire aspektene

4.0 ANALYSE AV ELEVERS ARBEID MED RESONNERING OG BEVIS

Innledningsvis i denne studien stilte jeg følgene forskningsspørsmål: *hva kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinnet sitt arbeid med resonnering og bevis?* I dette analysekapitlet ønsker jeg å besvare forskningsspørsmålet. Jeg vil først å analysere hamsteroppgaven som elevene arbeidet med og deretter utdrag fra elevarbeidet i de to gruppene. I første del av analysen vil jeg begrunne hvorfor jeg valgte hamsteroppgaven og deretter redegjøre for at oppgaven inneholder påstander om et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. Videre vil jeg beskrive hvilke påstander som kan legges frem, hvilke tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons – og uttrykksformer en kan bruke i hver av de tre deloppgavene. Etter analysen av hamsteroppgaven, vil jeg analysere utdrag fra elevarbeidet i de to gruppene. Jeg belyser hva som kjennetegner fremlegg av påstander, tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons- og uttrykksformer i hver av de to elevgruppene.

4.1 ANALYSE AV HAMSTEROPPGAVEN

Før jeg gjennomgår analysen av det innsamlede datamaterialet, vil jeg se nærmere på oppgaven som elevene i de to gruppene arbeidet med. Oppgaven er hentet fra boken *«Thinking Mathematically»* som er skrevet av Carpenter et al. (2003, s. 65). Jeg har tatt utgangspunkt i oppgaven, men tilpasset den til mitt eget forskningsprosjekt, og dermed anvender jeg oppgaven forskjellig fra beskrivelsen til Carpenter et al. Oppgaven som elevene i min studie arbeidet med er;

«Ole har sju hamstre hjemme hos seg. Han har to bur som hamsterne kan bevege seg mellom. På hvilke måter kan de sju hamsterne fordele seg i de to burene? Hvilke løsninger kan vi finne?» (egen oversettelse)

Hamsteroppgaven er utformet slik at den kan gi elever mulighet til å oppdage mønster, utforske og beskrive sammenhenger, og i tillegg å ta i bruk ulike uttrykksformer som skal representere matematiske sammenhenger i oppgaven. I et av kompetansemålene for matematikk etter gjennomført fjerdetrinn, står det skrevet at elever blant annet skal lære å «kjenne att, eksperimentere med, beskrive og vidareføre strukturar i talmønster, og bruke matematiske symboler […], og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske sammenhengar i oppgaveløysning» (utdanningsdirektoratet, 2013a). Jeg antok derfor at oppgaven ville passe fint for elever på tredjetrinn, noe jeg også fikk bekreftet ved å gjennomføre en pilotundersøkelse. Jeg oversatte oppgaven til norsk og gikk nøye gjennom den, for å oppnå en bedre forståelse for den prosessen elevene skulle gjennomgå når de arbeidet med resonnering og bevis.

Elevene fikk spørsmål underveis mens de jobbet med oppgaven, og spørsmålene som ble stilt var avhengige av hvilken del av oppgaven elevene arbeidet med. Hamsteroppgaven er som tidligere nevnt delt inn i tre deler som angir; et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. Målet med å dele oppgaven inn i tre deler, er å oppnå en bedre innsikt i elevenes arbeid med resonnering og bevis. Hver av delene i oppgaven handler om å bevise en påstand. Tabellen under viser inndelingen, og hvilke spørsmål jeg stilte underveis.

Et tilfelle	**Endelig antall tilfeller**	**Uendelig antall tilfeller**
Hvilke løsninger på oppgaven kan dere finne? Hvilke løsninger har dere funnet? Har dere funnet flere løsninger?	Hvor mange løsninger har vi funnet? Er det flere løsninger? Hvordan kan vi være sikker? Hvordan kan vi være sikker på at det ikke er en niende løsning?	Hvorfor blir det slik? Går det an å finne ut hvorfor det blir slik? Er det flere løsninger da? Enn hvis Ole har 20 hamster?

Tabell 2: Viser de ulike spørsmålene jeg stilte elevene i hver av deloppgavene

I oppgaven med et tilfelle stilte jeg ikke oppfølgingsspørsmål, når elevene skulle begrunne hvorfor påstandene de la frem var en løsning på oppgaven. Min rolle kan derfor ha påvirket om elevene begrunnet sine løsninger eller ikke. En av årsakene til at jeg valgte hamsteroppgaven, var fordi den inneholdt tre forskjellige påstander som skulle bevises; et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig med tilfeller. Jeg kunne da se nærmere på hele prosessen fra oppgaven med et tilfelle, til endelig antall tilfeller og til slutt uendelig antall tilfeller. Ved å ta utgangspunkt i Stylianides (2016) sine tre aspekter knyttet til bevis, ville jeg ha mulighet til å oppnå et innblikk i elevenes arbeid med resonnering og bevis i denne bevisoppgaven. Oppgaven ville også gi meg innsikt i hvordan påstanden som skal begrunnes legges frem

(Stylianides, 2010). Eleven kan legge frem en påstand på bakgrunn av en sammenheng i oppgaven, eller eleven legger frem en påstand som er et resultat av intervjuerens oppfølgingsspørsmål. I tillegg kan jeg få en innsikt i hvordan elevene innad i et fellesskap godkjenner påstandene som legges frem, ved å benytte meg av de tre aspektene til Stylianides.

Tabellen underviser hvordan jeg analyserte hver del av hamsteroppgaven.

Et tilfelle	**Endelig antall tilfeller**	**Uendelig antall tilfeller**
Sette frem en påstand	Sette frem en påstand	Sette frem en påstand
Tidligere akseptert sannhet	Tidligere akseptert sannhet	Tidligere akseptert sannhet
Argumentasjonsform	Argumentasjonsform	Argumentasjonsform
Uttrykksform	Uttrykksform	Uttrykksform

Tabell 3: Viser hvordan jeg har analysert hamsteroppgaven

Første del av hamsteroppgaven handler om hvilke løsninger en kan finne når Ole skal fordele 7 hamstre i to bur. Det er ikke bare en løsning på denne oppgaven, men åtte ulike løsninger. Hver av påstandene som fremkommer i løpet av oppgaven, vil kunne kategoriseres som et tilfelle, og handler om en bestemt påstand som er relatert til oppgaven. Selv om en kan finne flere løsninger på oppgaven, så vil hver løsning anses som et tilfelle. Et eksempel på en påstand er; det kan være seks hamstre i det ene buret og ett hamster i det andre buret. Et annet eksempel kan være hvordan en tolker oppgaven. Er 6+1 og 1+6 to like løsninger eller to forskjellige løsninger på oppgaven?

Oppgaven legger til rette for at jeg kan få et innblikk i hvordan elevene resonnerer seg frem til de ulike løsningene og hvordan løsningene godkjennes innad i hver gruppe. I oppgaven med et tilfelle kan en av de tidligere aksepterte sannheter være addisjonsfakta, altså at 6+1 gir summen 7, og samtidig være avhengig av hvordan elevene tolker oppgaven. Argumentasjonsformen i denne delen av oppgaven handler om å bevise at påstandene som legges frem er løsninger på oppgaven. På bakgrunn av at løsningene som fremkommer kan være kjent og tilgjengelig uten videre forklaring, vil påstandene i denne delen av hamsteroppgaven mest sannsynlig ikke ha noen argumentasjonsform. Uttrykksformer kan blant annet være å uttrykke påstanden muntlig og/eller nedtegning av løsninger med symboler. En kan for eksempel si [seks pluss en] eller [seks pluss en er en løsning, fordi du kan ha seks hamstre i det ene buret og en hamster i det andre buret]. Siden jeg ikke stilte oppfølgingsspørsmål der elevene måtte begrunne de ulike løsningene som ble lagt frem, kan resultatet være at de ulike løsningene ikke blir begrunnet. I denne delen av oppgaven vil en annen uttrykksform være å systematisere løsningene i en tabell etter den generaliserbare egenskapen «en opp og en ned».

Etter at elevene har funnet ulike løsninger på oppgaven, vil neste steg for dem være å bevise at det ikke finnes flere løsninger. Ball og Bass (2003, s. 38) påpeker at når elever arbeider med bevisoppgaver der de skal argumentere for at alle løsningene er funnet, er det å finne antall riktige løsninger ikke er det samme som å bevise at dette totalt sett er alle løsningene på oppgaven. En tidligere akseptert sannhet vil her være resultatet fra oppgaven med et tilfelle, altså de åtte løsningene som elevene i fellesskap er enige om er løsninger på oppgaven. Løsningene er da kjent og tilgjengelig uten videre forklaring. Argumentasjonsformen i denne delen av oppgaven handler om å bevise at det ikke finnes flere enn åtte løsninger på oppgaven der Ole har sju hamstre som skal fordeles i to bur. Her vil en passende og gyldig argumentasjonsform være å systematisere løsningene etter den generaliserbare egenskapen en opp og en ned, der løsningene blir listet opp slik;

7+0

6+1

5+2

4+3

3+4

2+5

1+6

0+7

Eksempel på uttrykksform vil her være både henvisning til den systematiske oppstillingen av de åtte løsningene og så argumentere for at det ikke finnes flere løsninger. Her lister en opp løsningene etter et system, og systemet vil være en uttrykksform. Det muntlige språket som brukes vil også være en uttrykksform, fordi språket brukes som utrykk for argumentet at det ikke finnes flere løsninger. En kan argumentere med at siden vi starter fra og med heltallet 0, kan ei løsning ikke være et tall under 0, da kun positive heltall gir mening i konteksten. I tallrekken etter tallene null og sju, blir neste tall en og seks, da en ikke kan bruke annet enn hele tall når det gjelder levende dyr. En må også begrunne at siden vi minker tallverdien i det ene buret med en (7 til 6), så må vi øke tallverdien i det andre buret med en (0 til 1), slik at summen fortsatt blir sju.

Hamsteroppgaven legger også til rette for at elevene kan oppdage et mønster der det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre i oppgaven. Det vil si at uansett hvor mange hamstre Ole har til sammen i de to burene, så vil det alltid være en løsning mer enn antallet hamstre. Oppgaven inneholder dermed også en generell påstand om uendelig antall tilfeller. Ved å prøve ut flere hamstre i to bur, kan en utforske sammenhengen mellom antall hamstre i to bur og antall løsninger på oppgaven (korrelasjon). En kan da oppdage sammenhengen selv og uttrykke påstanden *«det vil alltid bli en løsning mer enn antallet hamstre»*. I denne delen av oppgaven kan en bruke resultatene i oppgaven med endelig antall tilfeller som utgangspunkt. Dermed vil tidligere aksepterte sannheter være at i oppgaven med for eksempel sju og åtte hamstere ble det også en løsning mer enn antallet hamstre. En argumentasjonsform kan her være generisk argumentasjon, når en tar utgangspunkt i oppgaven der Ole har ni hamstre fordelt i to bur.

9+0
8+1
7+2
6+3
5+4
4+5
3+6
2+7
1+8
0+9

En uttrykksform vil være når en tar utgangspunkt i eksemplet med ni hamstre fordelt i to bur og så argumenterer for at det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre, uansett antall hamstre en starter med i det systematiske oppsettet. En vil dermed benytte seg av både den systematiserte listen med løsninger og det muntlige språket som uttrykksform. I tillegg kreves det at en argumenterer med at når vi starter med tallet 0, så øker vi videre opp til tallet en og øker så videre helt opp til antallet hamstre vi startet med i oppgaven. Plasseringen av tallet 0 i den systematiske rekken ovenfor i dette eksemplet, vil gjelde uansett hvilket positivt heltall det er i oppgaven. Det vil si at antallet løsninger = antall hamster vi startet med +1.

4.2 ANALYSE; ELEVERS ARBEID MED RESONNERING OG BEVIS

Hensikten med analysekapitlet mitt er å belyse hva som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinnet sitt arbeid med resonnering og bevis. Siden jeg skal se nærmere på resonneringsprosessen innad i begge gruppene, har jeg valgt å analyse gruppene hver for seg. Det vil da være lettere å få et innblikk i hva som kjennetegner arbeidet i hver enkel gruppe. Analysen er strukturert etter (1) et tilfelle, (2) endelig antall tilfeller og (3) uendelig antall tilfeller, fordi hamsteroppgaven legger til rette for en slik kronologisk rekkefølge når elevene arbeidet med den. I hver del av oppgaven vil jeg identifisere disse fire aspektene;

1. Sette frem en påstand
2. Tidligere aksepterte sannheter
3. Argumentasjonsformer
4. Uttrykksformer

Kjennetegn på elevenes arbeid med resonnering og bevis vil bli presentert under hvert aspekt. For å finne svar på forskningsspørsmålet mitt har jeg analysert datamaterialet mitt i form av transkripsjoner og skriftlig materiale, som er hentet fra situasjoner i de to elevgruppene. En grundig gjennomgang av transkripsjonene, er bakgrunnen for mine valg av aktuelle elevsituasjoner som kan hjelpe meg å finne frem til kjennetegn ved elevenes arbeid med resonnering og bevis.

4.2.1 ELEVGRUPPE 1

Elevene i den første gruppen er Ida, Alex og Pål. Elevene fikk først noen minutter til å tenke over hvordan de ville løse oppgaven hver for seg. Deretter skulle elevene dele sine løsninger med resten av gruppen. Ida, Alex og Pål kom ikke frem til oppgaven med uendelig antall tilfeller. Analysedelen min fra denne gruppen, relateres derfor kun til deloppgavene med et tilfelle og endelig antall tilfeller. I begge bevisoppgavene vil jeg analysere hvordan en påstand legges frem, og hvilke tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons- og uttrykksformer elevene innad i gruppen benytter seg av.

ET TILFELLE

Denne elevsituasjonen handler om at elevene innad i gruppen prøver å finne ulike løsningskombinasjoner av oppgaven, der Ole har sju hamstere som skal fordeles i to bur. I starten av samtalen får vi et innblikk i hvordan de ulike påstandene legges frem. Utdraget starter med at Ida fremlegger en påstand, mens hun, Alex og Pål sitter og jobber individuelt. Hun har skrevet løsningene 4+3, 5+2 og 6+1 på arket sitt.

8 Ida: Jeg tror det bare er tre måter (4+3, 5+2 og 6+1)
9 Alex: Det er ikke bare tre måter, det er en-to-tre-fire (4+3, 6+1, 5+2 og 7+0)
10 Intervjuer: Tenk litt mer
11 Ida: Nå er det fire (skriver ned 7+0)
12 Alex: Ja, det er fire
13 Ida: Hvis ikke må jeg jo bytte om på de
14 Pål: Ja, nei det går ikke
15 Intervjuer: Så dere mener det er fire løsninger?
16 Alle: Ja.
17 Intervjuer: Skal vi skriv dem ned da. Hvilke løsninger har vi?
18 Pål: 6+1
19 Alex: 7+0, 4+3 og 5+2

Påstandene som handler om et tilfelle legges frem helt i slutten av sekvensen. I linje 17 stiller Intervjueren spørsmålet [hvilke løsninger har vi?], da legger Pål i linje 18 frem påstanden [6+1] og Alex legger i linje 19 frem påstandene [7+0, 4+3 og 5+2]. I denne situasjonen legger elevene frem en påstand, fordi intervjueren stiller et spørsmål som omhandler hvilke løsninger på oppgaven elevene har funnet. De ulike løsningene som Pål og Alex legger frem tar utgangspunkt i noe som er kjent. Både 6+1, 7+0, 4+3 og 5+2 er addisjonsstykker som gir summen sju, og oppgaven handler om å finne ulike løsninger der to positive heltall gir summen sju. Tidligere aksepterte sannheter som brukes her er derfor addisjonsfakta.

Argumentasjonsformen handler om å bevise at de ulike løsninger på oppgaven som elevene legger frem, er alle løsninger på oppgaven. Det kan virke som om løsningene som legges frem er kjente og tilgjengelige fra før av, og dermed benytter ikke elevene seg av en argumentasjonsform, for å bevise dem. Uttrykksformer som brukes er det muntlige språket, ved at elevene sier ulike løsninger på oppgaven. Både Ida og Alex har også skrevet ned løsningene de kan finne med symboler på et ark. Med henblikk på hvordan løsningene er skrevet ned og fremlegges, kan det i tillegg virke som det er en felles enighet om at det største tallet skal være først i addisjonsstykket og det minste tallet sist. Ingen av elevene begrunner eksplisitt hvorfor påstandene som legges frem er løsninger på oppgaven, og de krever heller ingen begrunnelse når medelevene legger frem sine påstander. Påstandene blir ikke argumentert for og intervjueren stiller heller ingen oppfølgingsspørsmål som krever en videre forklaring på hvorfor 6+1, 7+0, 4+3 og 5+2 er løsninger på oppgaven.

Etter at både Ida, Alex og Pål er enige om at 6+1, 7+0, 4+3 og 5+2 er løsninger på oppgaven der Ole har sju hamstre som skal fordeles i to bur, prøver Ida igjen å foreslå at de kan bytte om på tallene på de løsningene de allerede har funnet og akseptert. Dialogen under viser at det er spesielt Ida og Pål som diskuterer hvordan de skal tolke oppgaven.

21 Ida: Det er jo bare å bytte om på dem
22 Pål: At eneren går dit og sekseren går dit?
23 Ida: Ja!
24 Pål: Ja, men det er jo nesten akkurat det samme som der (peker på 6+1)
25 Intervjuer: Så, er det samme da, eller ikke?
26 Ida: Ikke det samme (skriver ned en ny løsning)
27 Intervjuer: Har dere funnet noen flere løsninger?
28 Alex: 3+4, 0+7 og 2+5
29 Ida: Og 1+6

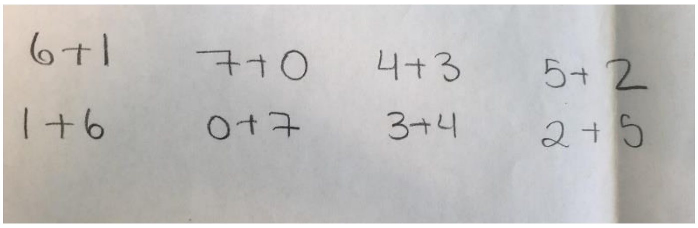
Situasjonen ovenfor starter med at Ida i linje 21 legger frem påstanden [det er jo bare å bytte om på dem]. Hennes påstand legges frem på bakgrunn av tidligere resultater, som er de fire løsningene på oppgaven, og som elevene i fellesskap har godkjent som riktige løsninger på oppgaven. Påstanden hun legger frem kan tolkes som om hun mener at dersom de bytter om på sifrene i de fire løsningene de allerede har funnet og akseptert, vil det fremkomme nye løsninger på oppgaven. Løsningene tidligere i oppgaven blir her brukt som utgangspunkt for den nye påstanden. Tidligere aksepterte sannheter er de fire løsningene 3+4, 0+7, 2+5 og 1+6, som elevene tidligere i prosessen ble enige om, og en annen akseptert sannhet er i tillegg hvordan både Ida og Pål tolker oppgavens kontekst. Argumentasjonsformen i denne situasjonen handler om det gir mening å bytte om på tallene i de løsningene de allerede har funnet, eller om det ikke gir mening med tanke på oppgavens kontekst. Det kan virke som at argumentasjonsformen i denne situasjonen er å bytte om på tallene i de fire løsningene som allerede er akseptert av fellesskapet, og at det da vil det fremkomme nye løsninger. Begrunnelsen til både Ida og Pål kan også tolkes som nye påstander, ved at de ikke gir en forklaring på hvorfor 6+1 og 1+6 er samme løsning eller to forskjellige.

Uttrykksformene som blir brukt i denne situasjonen er både de nedtegnede løsningene med symboler og det muntlige språket. Språket til både Ida og Pål er veldig upresist og utydelig formulert. Det kan nesten virke som om elevene snakker forbi hverandre. Det blir ikke eksplisitt sagt hva problemet er og det er uklart om elevene egentlig forstår hverandre. Måten påstanden til Ida legges frem på, kan også være årsaken til at Pål fremstår som usikker, og stiller spørsmålet [At eneren går dit og sekseren går dit?]. Påstanden i seg selv er utydelig uttrykt og definert, og dermed må han forsikre seg om at han har tolket påstanden riktig. En konsekvens av at elevene bruker upresist språk, er utfordringen å ikke vite om påstanden som legges frem blir godkjent innad i fellesskapet. Argumentet som både Ida og Pål legger frem kan også tolkes som nye påstander. Når Ida sier [ikke det samme], så gjentar hun egentlig bare påstanden hun la frem i linje 21, om å bytte om på løsningene. Når Pål sier i linje 24 [Ja, men det er jo nesten akkurat det samme som der], påstår han at 6+1 og 1+6 er nesten det samme. Han gir ingen eksplisitt begrunnelse, og det kan derfor være vanskelig å vite om han er enig eller uenig med Ida.

Det som kjennetegner elevenes arbeid med deloppgaven et tilfelle er at påstandene som skal bevises, legges frem etter oppfordring fra intervjueren. Tidligere aksepterte sannheter er både addisjonsfakta, oppgavens kontekst og de fire løsningene som både Ida, Alex og Pål ble enige om i starten av oppgaveløsningen. Elevene gir heller ingen eksplisitt begrunnelse på hvorfor de ulike løsningene som legges frem, er løsninger på oppgaven. Det bli enten ikke gitt en begrunnelse eller så legger elevene frem nye påstander. Uttrykksformene som blir brukt er nedskrevne løsninger med symboler og det muntlige språket. I den siste delen av deloppgaven er språket til både Pål og Ida upresist.

ENDELIG ANTALL TILFELLER

Etter at Pål, Ida og Alex har funnet åtte løsninger (4+3, 6+1, 5+2, 7+0, 3+4, 0+7, 2+5 og 1+6) på oppgaven der Ole har sju hamstre som skal fordeles i to bur, spør intervjueren om det er flere løsninger på oppgaven. Samtalen under starter med at Ida legger frem en påstand der hun mener at det ikke er flere løsninger. Intervjueren har her skrevet ned løsningene de har funnet frem til, på et ark.



Figur 4: Intervjueren har skrevet ned løsningene elevene har funnet

34 Intervjuer: Er det flere løsninger?
35 Ida: Nei
36 Intervjuer: Hvordan kan vi være sikker?
37 Pål: Fordi det bare er tall under 7 og 7
38 Intervjuer: Tall under 7 og 7, hva mener du?
39 Pål: Det må være tall under 7 eller 7, fordi 7+0, det er 7, og 5+2 det er under 7.
[…]
42 Intervjuer: Hvordan kan vi være sikker på at det ikke er en niende løsning?
43 Pål: Sjekke.
44 Intervjuer: Hvordan kan jeg sjekke det?
45 Pål: Sjekke om alt blir sju.
46 Intervjuer: Hvordan gjør jeg det?
47 Alex: Det der er alle tier-venner til 7
48 Pål og Ida: Ja

Situasjonen starter med at intervjueren i linje 34 stiller spørsmålet [er det flere løsninger?] og Ida svarer på spørsmålet til intervjueren i linje 35, og legger dermed frem påstanden [nei]. Påstanden som skal argumenteres for og bevises er at det er åtte løsninger, når Ole har sju hamstre som skal fordeles i to bur. Resultater fra oppgaven med et tilfelle blir her brukt som utgangspunkt. Tidligere aksepterte sannheter som elevene tar utgangspunkt i er de åtte løsningene 4+3, 6+1, 5+2 og 7+0, 3+4, 0+7, 2+5 og 1+6, som de i fellesskap fant frem til og deretter godkjente som løsninger på oppgaven.

Argumentasjonsformen handler om å bevise påstanden, når Ole har sju hamstre som skal fordeles i to bur er det kun åtte løsninger på oppgaven. Fremgangsmåten som blir brukt i denne situasjonen kan tolkes som en slags uttømming. Det kan virke som om Pål mener at siden de har skrevet opp alle mulige måter der tallet 7 kan deles i to positive heltall, kan det ikke finnes flere løsninger på oppgaven. Siden tallene de har benyttet seg av enten er tallet 7 eller tall under 7, så kan det ikke finnes flere løsninger. I tillegg påpeker Pål at ved å ta en sjekk om alle løsningene de har funnet gir summen sju, kan de være sikker på at det ikke er flere løsninger. Det er et samspill mellom elevene i gruppen. Først er det Ida som legger frem påstanden, deretter er det Pål som begynner å argumentere for den og til slutt utfyller Alex argumentet til Pål. Det er i starten av dialogen påstanden til Ida argumenteres for. Mot slutten av samtalen kan det virke som både Pål og Alex legger frem nye påstander, og begrunner ikke hvorfor en kan være sikker på at det ikke finnes flere løsninger.

Uttrykksformen som blir brukt er de åtte nedtegnede løsningene med symboler som vises i figur 4 og det muntlige språket. I denne situasjonen bruker elevene også et upresist språk. I starten av dialogen kan det virke som Pål er i ferd med å gi en god begrunnelse på hvorfor det ikke er flere løsninger. I linje 37 sier Pål [fordi det bare er tall under 7 og 7] og utdyper sin forklaring i linje 39, da han sier [Det må være tall under 7 eller 7, fordi 7+0, det er 7, og 5+2 det er under 7]. Selv om han ikke viser til en systematisk oppstilling av løsningene, er argumentet hans basert på en slags uttømming. Siden de har brukt opp alle positive heltall mellom 0 og 7, kan det ikke finnes flere løsninger på oppgaven. Det er et godt argument, men språket er upresist og han gir ingen eksplisitt forklaring på hvorfor det ikke kan være flere løsninger. Resonneringen til Pål gir mening, men samtidig er språket utydelig og resulterer i at kan det være vanskelig å tolke nøyaktig hva han mener. Det er i hovedsak i starten av samtalen at påstanden til Ida argumenteres for. I slutten av sekvensen legger både Pål og Alex frem nye påstander. I linje 45 sier Pål [Sjekke om alt blir sju] og Alex utfyller påstanden til Pål, og sier i linje 47 [Det der er alle tier-venner til 7]. De gir ikke en eksplisitt begrunnelse for hvordan de kan være sikre på at det ikke kan fremkomme en ny løsning. De påstår heller at løsningene de allerede har funnet gir summen sju.

Hele dialogen mellom Ida, Alex og Pål handler om hvordan gruppen begrunner påstanden om at det i denne deloppgaven kun finnes åtte løsninger. I starten av dialogen virker det som om Pål er inne på en begrunnelse som kan bevise at det ikke finnes flere løsninger på oppgaven. Selv om han ikke viser til en systematisk oppstilling av løsningene, begrunner han dette med at siden tallene under 7 og 7 er brukt opp, kan det ikke finnes flere løsninger på oppgaven. Når Intervjueren stiller spørsmålet [Hvordan kan vi være sikker på at det ikke er en niende løsning?], skifter resonneringen til Pål skifter da retning. Han klarer ikke å gå videre på argumentet han startet på. Det kan tyde på at Pål tolker spørsmålet fra intervjueren som om de skal sjekke summen på løsningene. Dermed kan det virke som om det er spørsmålet til intervjueren og påstanden om å sjekke, som endrer retningen på resonnementet til Pål.

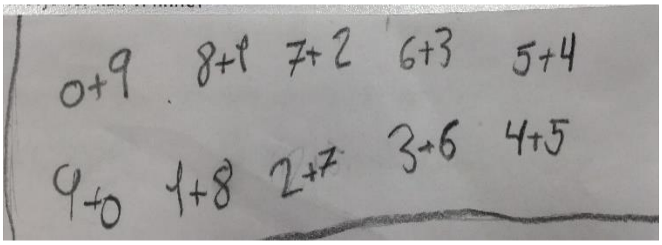
Det som kjennetegner denne delen av hamsteroppgaven er at påstanden som skal bevises, legges frem etter oppfordring fra intervjueren. Resultatene fra oppgaven med et tilfelle, blir brukt som et utgangspunkt. Argumentasjonsformen som elevene bruker er uttømming, og ved å sjekke at løsningene blir sju til sammen, vil det ikke kunne finnes flere løsninger. Uttrykksformene er både de nedskrevne løsningene med symboler og det muntlige språket. Språket til Alex og Pål er også upresist i denne delen av oppgaven, og mot slutten av samtalen legger de frem nye påstander. De gir ingen eksplisitt begrunnelse på hvorfor det ikke kan finnes flere løsninger.

Etter at Alex, Ida og Pål mener at de har funnet alle løsningene på oppgaven med sju hamstre, får de beskjed om å finne alle løsninger på oppgaven med åtte og ni hamstre. Dialogen under viser at Ida og Alex argumenterer for at de har funnet alle løsninger på ni hamstre som skal fordeles i to bur. Samtalen starter med at Ida og Alex teller opp hvor mange løsninger de har funnet.

53 Ida og Alex: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
54 Intervjuer: 10 løsninger, er dere sikker på at dere har funnet alle løsningene da?
55 Alex: Ja, det er tier-venner
56 Ida: Ja, alt blir ni til sammen
57 Intervjuer: Alt blir ni til sammen. Kan dere finne en ny løsning?
58 Ida og Alex: Nei.

59 Intervjuer: Det er dere helt sikker på?

60 Ida og Alex: Ja



Figur 5: Ida sine løsninger på 9 hamster som skal fordeles i to bur

Situasjonen starter med at intervjueren stiller spørsmålet [10 løsninger, er dere sikker på at dere har funnet alle løsningene da?] og da legger Alex frem påstanden [Ja, det er tiervenner]. Påstanden som legges frem er et resultat av at intervjueren stiller et spørsmål som omhandler oppgaven elevene arbeider med. Elevene tar utgangspunkt løsningene 0+9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+4, 9+0, 1+8, 2+7, 3+6, 4+5, som de i fellesskap er enige er løsninger på oppgaven. Argumentasjonsformen elevene bruker i denne oppgaven er også uttømming, ved å bruke opp alle tallene mellom 0 og 9, og deretter bytte om på tallene. Elevene benytter seg av dem argumentasjonsformen som de i fellesskap utviklet i oppgaven med sju hamstre. Det er et samspill mellom elevene også i denne situasjonen. Alex legger først frem påstanden, og etterpå gir både han og Ida en forklaring på hvorfor det ikke kan fremkomme flere løsninger. Argumentet til både Ida og Alex kan også her tolkes som nye påstander, siden de påpeker at løsningene de har funnet gir summen ni.

Uttrykksformene som blir brukt er å vise til nedskrivingen av løsningene med symboler som vises i figur 5, men også bruk av det muntlige språket. I linje 55 sier Alex [ja, det er tiervenner] og Ida utfyller hans forklaring og sier i linje 56 [ja, alt blir ni til sammen]. Språket til både Alex og Ida er også her upresist. Det kan virke som Alex har generalisert begrepet tiervenner, slik at det kan brukes om to tall der summen er antallet hamstre en starter med i oppgaven. I likhet med oppgaven med sju hamstre, kan forklaringene til både Ida og Alex tolkes som nye påstander, og de svarer egentlig ikke på spørsmålet til intervjueren. Ingen av elevene argumenterer for hvordan en kan være sikker på at det ikke finnes flere løsninger, de gjentar bare at løsningene de har funnet gir summen ni, og er dermed løsninger på oppgaven.

Det som kjennetegner denne delen av hamsteroppgaven er at påstanden som skal bevises legges frem etter oppfordring fra intervjueren. Elevene benytter seg av argumentasjonsformen, som de i fellesskap utviklet i oppgaven med sju hamstre, uttømming. Elevene gir heller ikke i denne delen av oppgaven en eksplisitt begrunnelse på hvorfor det ikke finnes flere løsninger. Uttrykksformene de bruker er å henvise til de nedskrevne løsningene med symboler, og påpeker at løsningene gir summen ni.

4.2.2 ELEVGRUPPE 2

Elevene i den andre gruppen er Kristian og Line. Elevene fikk først noen minutter til individuelt å tenke over hvordan de ville løse oppgaven, og deretter arbeidet vi med oppgaven i fellesskap. Line og Kristian arbeidet med bevisoppgavene; et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig med tilfeller. Jeg vil analysere hvordan påstander legges frem og hvilke tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons- og uttrykksformer elevene innad i gruppen benytter seg av.

ET TILFELLE

Denne elevsituasjon handler om at Line og Kristian prøver å finne ulike tallkombinasjoner, når sju hamstre skal fordeles i to bur. Line har skrevet 4+3 på arket sitt, mens Kristian har skrevet 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5 og 6+1. Utdraget fra situasjonen starter med at intervjueren stiller Kristian spørsmålet om hvilke løsninger han har funnet.

4 Intervjuer: Hvilke løsninger har du funnet Kristian?
5 Kristian: Tre og fire
6 Line: Fire og tre
7 Intervjuer: Tre og fire, og fire og tre. Det er to forskjellige løsninger?
8 Kristian: Ja.
9 Intervjuer: Hva tenker du, Line?
10 Line: Ja.
11 Intervjuer: Har dere funnet flere løsninger?
12 Kristian: 6+1 og 5+2 og 4+3
13 Intervjuer: 4+3 har vi skrevet der, men jeg kan skrive den på nytt igjen under her.
14 Kristian: 3+4 og 2+5
15 Intervjuer: Ja, finner dere flere?
16 Kristian: 1+6

Line oppdager at de enda ikke har funnet alle løsningene.

20 Line: Vi mangler en løsning

21 Intervjuer: Mangler vi en løsning?

22 Line: Ja, fordi det er sju hamstre og ikke seks

Etter en liten tenkepause finner Line løsningene som mangler.

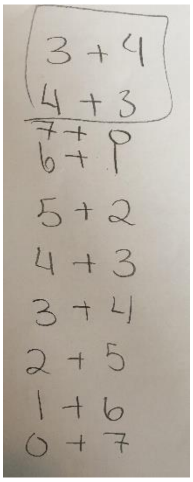
34 Line: 7+0. Jeg tror du må skrive den der oppe (peker over 6+1)

35 Intervjuere: Det er en løsning?

36 Kristian: Ja

[…]

42 Line: 0+7, og den må stå nederst



Figur 6: Intervjueren har skrevet ned løsningene elevene har funnet

I dette utdraget fremkommer det flere påstander som handler om et tilfelle. I linje 4 stiller intervjueren spørsmålet [Hvilke løsninger har du funnet Kristian?], og da legger både Ida og Kristian frem de ulike løsningene på oppgaven de har funnet. Påstandene som fremkommer er et resultat av spørsmålet til intervjueren. De ulike løsningene på oppgaven som både Ida og Kristian legger frem i løpet av dialogen, blir ikke eksplisitt begrunnet og ingen av dem krever heller noen videre forklaring. Det kan dermed tyde på at løsningene som legges frem er tidligere aksepterte sannheter og er kjent og tilgjengelig uten videre forklaring. Både 7+0 ,6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6, og 0+7 er addisjonsstykker som gir summen sju, og oppgaven handler om å finne ulike løsninger der to positive heltall gir summen sju.

Argumentasjonsformen handler om å bevise at de ulike hvilke løsninger på oppgaven som elevene legger frem, er løsninger på oppgaven. Siden løsningene som legges frem er kjente og tilgjengelige fra før av, er det ingen argumentasjonsform i denne delen av hamsteroppgaven. Intervjueren stiller heller ingen oppfølgingsspørsmål som krever en videre forklaring på de ulike løsningene som legges frem. Uttrykksformen som Line og Kristian bruker er både det muntlige språket og de løsningene som er skrevet med symboler på som vises i figur 6. Slik Kristian har skrevet ned løsningene og legger dem frem muntlig, kan det virke som om han har oppdaget et mønster. De seks løsningene han legger frem er systematisk oppstilt og virker som om de er organisert etter den generaliserbare egenskapen «en opp og en ned». Intervjueren skriver ned løsningene som Kristian legger frem og løsningene er skrevet ned slik;

6+1

5+2

4+3

3+4

2+5

1+6

På slutten av dialogen legger Line frem to nye løsninger på oppgaven, og påpeker da at 7+0 må stå øverst og 0+7 må stå nederst. Selv om den systematiske oppstillingen ikke er en argumentasjonsform i denne delen av oppgaven, kan det virke som om elevene bruker oppstillingen for få en oversikt over de ulike løsningene noe som også kan angi at de har funnet alle mulige kombinasjoner. Det kan i tillegg tyde på at Line benyttet seg av oppstillingen, da hun oppdaget at de enda ikke hadde funnet en løsning med sju hamstre i det ene buret. Oppstillingen var da et hjelpemiddel for å oppdage hvilke løsninger de manglet.

Det som kjennetegner elevenes arbeid med denne delen av hamsteroppgaven er at påstandene legges frem etter oppfordring fra intervjueren. Påstandene som legges frem kan tolkes som tidligere aksepterte sannheter, siden elevene ikke gir en eksplisitt begrunnelse, og dermed bruker de heller ikke en argumentasjonsform. Uttrykksformene som Line og Kristian bruker er både det muntlige språket og de nedskrevne løsningene med symboler.

ENDELIG ANTALL TILFELLER

Etter at Line og Kristian er enige om at de har funnet alle løsningene på oppgaven der Ole har sju hamstre som skal fordeles i to bur, skal de bevise at de har funnet alle løsningene på oppgaven.

53 Intervjuer: Men hvor mange løsninger har vi funnet da? (Både Line og Kristian begynner å telle)

54 Kristian: Åtte

55 Line: 2-4-6-8

56 Intervjuer: Åtte løsninger. Er vi sikker på at vi har funnet alle løsningene nå?

57 Kristian: Ja

58 Intervjuer: Men hvordan kan vi være sikker på at vi har funnet alle mulige løsninger?

59 Line: Fordi der begynner vi med 0 og der slutte vi med 0. Og da kan vi ikke ta flere ned på der eller oppå der heller.

I linje 53 stiller intervjueren spørsmålet [åtte løsninger. Er vi sikker på at vi har funnet alle løsningene nå?], og etterpå legger Kristian i linje 57 frem påstanden [ja]. Påstanden hans er et resultat av spørsmålet som intervjueren stilte. Resultater fra oppgaven med et tilfelle blir her brukt som utgangspunkt. Tidligere aksepterte sannheter er løsningene 7+0, 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6 og 0+7, som både Line og Kristian fant i fellesskap og godkjente som løsninger på oppgaven. Argumentasjonsformen handler om å bevise at det ikke finnes flere løsninger på oppgaven. Elevene bruker den systematiske oppstillingen av løsningene, hvor de har benyttet seg av den generaliserbare egenskapen en opp og en ned, som bevis for at det ikke finnes flere løsninger. Her er det et samspill mellom Kristian og Line, der Kristian først legger frem påstanden og deretter begrunner Line den.

Uttrykksformen som blir brukt er både den systematiske oppstillingen av løsningene og det muntlige språket som Line bruker for å begrunne hvorfor det ikke finnes flere løsninger. I linje 59 sier hun [Fordi der begynner vi med 0 og der slutte vi med 0. Og da kan vi ikke ta flere ned på der eller oppå der heller]. Line henviser tilbake til den systematiske oppstillingen av løsningene i argumentet sitt. Begrunnelsen hennes er forståelig, men også her blir argumentet upresist da noe mangler. Det er riktig at systematikken starter og avslutter med tallet 0, men i tillegg må hun presisere at etter null og sju, blir neste tall en og seks, fordi en bruker bare hele tall når det gjelder levende dyr. En må også begrunne at siden vi minker tallverdien i det ene buret med en (7 til 6), så må vi øke tallverdien i det andre buret med en (0 til 1), slik at summen fortsatt blir sju. Argumentet hennes inne holder hull, slik at det ikke blir en logisk tankerekke.

Det som kjennetegner denne delen av arbeidet med hamsteroppgaven er at Line og Kristian benytter seg av resultatene i oppgaven med et tilfelle som utgangspunkt for denne delen av oppgaven. Påstanden som skal bevises, legges frem etter oppfordring fra intervjueren.

Argumentasjonsformen som elevene bruker er den generaliserbare egenskapen en opp og en ned, og det er et samspill mellom elevene. Uttrykksformer er både den systematiske oppstillingen av løsningene og det muntlige språket. Argumentet til Line er upresist, og hun mangler noen viktige detaljer.

Etter at Line og Kristian var enige om at de hadde funnet alle løsningene på oppgaven med sju hamstre fordelt i to bur, får de beskjed av intervjueren om å finne alle mulige løsninger på oppgaven med åtte hamstre i to bur. Figur nr. 5 viser løsningene som de i fellesskap kom frem til og samtalen under viser hvordan Line begrunner at det ikke finnes flere løsninger på oppgaven.

83 Intervjuer: har vi funnet alle løsningene?

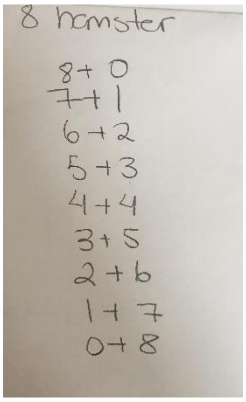
84 Kristian: Ja, jeg tror det

85 Intervjuer: Men hvordan kan vi vite det?

86 Line: Fordi der starter vi også med 0. Fordi hvis man, som jeg sa i stad. Der står det jo 0+8, også er det ikke noen tall mindre enn null. Og da går det ikke.

87 Intervjuer: Ja, okei. Men hvor mange løsninger har vi funnet?

88 Line og Kristian: 9



Figur 7: Intervjueren har skrevet ned løsningene elevene har funnet.

Situasjonen starter med at intervjueren i linje 83 stiller spørsmålet [har vi funnet alle løsningene?] og Kristian svarer i linje 84 og legger frem påstanden [ja, jeg tror det]. Påstanden til Kristian er et resultat av spørsmålet som intervjueren stilte. Elevene tar utgangspunkt i de ni løsningene som de tidligere kom frem til i fellesskap. Tidligere aksepterte sannheter som er kjente og tilgjengelige uten videre forklaring, er løsningene 8+0, 7+1, 6+2, 5+3, 4+4, 3+5, 2+6, 1+7 og 0+8. Argumentasjonsformen handler også om å bevise at det ikke finnes flere enn ni løsninger på oppgaven. Elevene bruker den systematiske oppstillingen av løsningene, der de benytter seg av den generaliserbare egenskapen en opp og en ned. I oppgaven med sju hamstre utviklet Line og Kristian en argumentasjonsform, som de også bruker i denne oppgaven. Det kan tyde på at innad i gruppen er det en enighet om at ved å systematisere løsningene med en opp og en ned, vil en kunne bevise at det ikke finnes flere løsninger. Det er også i denne oppgaven et samspill mellom Line og Kristian. Når Kristian legger frem påstanden, er det Line som begrunner den.

Uttrykksformen som Line bruker er også i denne oppgaven den systematiske oppstillingen av løsningene som figur 7 viser og det muntlige språket. I linje 86 sier hun [Fordi der starter vi også med 0. Fordi hvis man, som jeg sa i stad. Der står det jo 0+8, også er det ikke noen tall mindre enn null. Og da går det ikke]. I likhet med argumentet i oppgaven med sju hamstre, er språket hennes også her upresist og begrunnelsen mangler viktige detaljer. Til forskjell fra oppgaven med sju hamstre, påpeker hun her at det ikke er tall mindre enn 0 og at det står 0+8. Begrunnelsen hennes her er mer utfyllende, men fortsatt upresis. Siden argumentet til Line både i oppgaven med sju og åtte hamstre er nokså like, kan det virke som om hun opplever at begrunnelsen hennes er tilstrekkelig. Da Kristian i tillegg ikke kommenterer hennes begrunnelse, kan dette tolkes som om han er enig i hennes forklaring. Når Line ikke får motstand i hennes argument i oppgaven med sju hamstre, vil hun kanskje tolke det som om hennes begrunnelse er riktig og dermed bruke den videre i oppgaven med åtte hamstre.

Det som kjennetegner denne delen av arbeidet med hamsteroppgaven er at påstanden legges frem etter oppfordring fra intervjueren. Line og Kristian bruker løsningene de i fellesskap har funnet og akseptert, som utgangspunkt. I oppgaven med sju hamstre utviklet de argumentasjonsformen en opp og en ned, som de også benytter i denne oppgaven. Uttrykksformene som elevene bruker er den systematiske listen med løsninger og det muntlige språket. Språket til Line er også upresist i denne oppgaven, og hun mangler viktige detaljer i sitt argument.

UENDELIG ANTALL TILFELLER

Etter at Line og Kristian har funnet alle mulige løsninger på oppgaven med åtte hamstre som skal fordeles i to bur, fremlegger Kristian en påstand som omhandler relasjonen mellom antallet hamstre og antallet løsninger.

89 Kristian: Også hvis vi skal ta nieren, så bli det 10, hehe.
90 Intervjuer: Også hvis vi tar ni, så blir det 10. Men hvorfor sier du det?
91 Kristian: Siden der var det 8, og den var det 9 (peker på sju og åtte hamstre)
92 Line: Da burde det bli 10.
93 Intervjuer: Men hvorfor blir det slikt da?
94 Kristian og Line: jeg vet ikke
95 Intervjuer: Men går det an å finne ut hvorfor det blir slik?
96 Line: Fordi at der er det jo åtte, og der blir det ni. Og siden det er sju der, så blir det en mer på løsninger.

I linje 89 legger Kristian frem påstanden [Også hvis vi tar nieren, så bli det 10, hehe]. Han finner frem til generaliseringen, uten at han blir spurt om det. Påstanden han legger frem handler om relasjonene mellom antall hamstre og antall løsninger på oppgaven. I tillegg kan det virke som om Line legger frem en generell påstand i slutten av linje 96, da hun sier [så blir det en mer på løsninger]. Begge påstandene legges frem fordi elevene oppdager en sammenheng i oppgaven, altså sammenhengen mellom antallet løsninger og antallet hamstre.

Line og Kristian bruker her resultater fra oppgaven med endelig antall løsninger som utgangspunkt. Tidligere aksepterte sannheter er altså; oppgaven med sju hamstre gav åtte løsninger og oppgaven med åtte hamstre gav ni løsninger. Argumentasjonsformen handler her om å bevise at det vil bli 10 løsninger dersom Ole har ni hamstre i to bur. Elevene bruker empirisk argumentasjon som fremgangsmåte. De tar utgangspunkt i tidligere resultater, og oppdager et mønster som gjentar seg. I de to tidligere oppgavene, ble det en løsning mer enn antallet hamstre de startet med. Det vil derfor bli det samme om Ole har ni hamstre i to bur. Elevene viser ikke til generelle strukturer eller egenskaper, men kun til spesifikke eksempler. I denne situasjonen er det også et samspill mellom Line og Kristian, da det først er Kristian som oppdager en sammenheng mellom antallet hamstre og antallet løsninger og så generaliserer denne sammenhengen til oppgaven med ni hamstre. Line gjentar begrunnelsen til

Kristian, og bygger videre på hans påstand, ved at hun mener det generelt vil bli en løsning mer enn antallet hamstre.

Uttrykksformen som elevene bruker er både det muntlige språket og henvisning til den systematiske listen med løsninger i oppgaven med sju og åtte hamstre. I linje 91 sier Kristian [Siden der var det åtte, og den var det ni] og peker på den systematiske listen med sju og åtte hamstre. I linje 96 sier Line [Fordi at der er det jo åtte, og der blir det ni. Og siden det er sju der, så blir det en mer på løsninger]. Språket til Line og Kristian er upresist, men det oppfattes som om begge mener at siden det ble en løsning mer enn antallet hamstre i oppgaven med sju og åtte hamstre, så må dette også gjelde for oppgaven med ni hamstre. Line gjentar argumentet til Kristian og legger til en ny påstand i slutten av argumentet sitt. Hun sier noe generelt om antallet løsninger, og da kan det virke som hun har oppdaget en generell sammenheng mellom antallet løsninger og antallet hamstre.

Det som kjennetegner elevenes arbeid med denne delen av oppgaven er at både Line og Kristian legger frem påstandene som skal bevises. Elevene tar utgangspunkt av resultatene i oppgaven med sju og åtte hamstre. Argumentasjonsformen som de bruker er empirisk argumentasjon og det er samspill mellom elevene. Uttrykksformene er både å henvise til løsningene på oppgaven med sju og åtte hamstre, men også det muntlige språket. Språket til både Line og Kristian er upresist.

I denne situasjonen tester Kristian og Line ut sine påstander, der det vil bli 10 løsninger på oppgaven når Ole har 9 hamster som skal fordeles i to bur, og generaliseringen om at det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre.

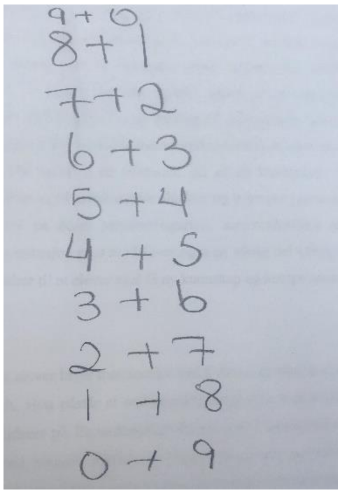
114 Intervjuer: Er det flere løsninger da?

115 Line og Kristian: nei

116 Line: Åh, det er 10. Jeg tror jeg har en ide. Siden at 0, den skal egentlig ikke være med. Så derfor får vi en mer, fordi vi startet egentlig på en mer. Uten 0, hadde det blitt 9, men vi tar med 0. Da får vi en løsning mer, og da blir det 10.

117 Intervjuer: Hva tenker du om det, Kristian?

118 Kristian: Fordi 0. Uten 0 blir det 9.



Figur 8: Intervjueren har skrevet ned løsningene elevene har funnet

I linje 114 stiller intervjueren spørsmålet [er det flere løsninger da?], og der Ida og Kristian legger dermed frem påstanden ved å svare intervjueren [nei]. Påstanden som legges frem er et resultat av spørsmålet til intervjueren. Elevene tar utgangspunkt i de 10 løsningene på oppgaven som de i fellesskap har kommet frem til. Tidligere aksepterte sannheter er derfor løsningene 9+0, 8+1, 7+2, 6+3, 5+4, 4+5, 3+6, 2+7, 1+8 og 0+9. Løsningene er kjente og tilgjengelige, og trenger dermed ingen videre forklaring. Argumentasjonsformen handler her om å bevise at det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre. Line bruker generisk argumentasjon som argumentasjonsform. Hun bruker oppgaven med ni hamstre som et spesifikt eksempel, for å bevise en generell egenskap ved den systematiske oppstillingen av løsningene. I denne situasjonen er det også et samspill mellom Line og Kristian, der begge er enige om at det ikke kan være flere løsninger. Line gir da en begrunnelse for den generelle påstanden og Kristian gjentar deler av argumentet til Line.

Uttrykksformene som blir brukt er den systematiske oppstillingen av løsningene som vises i figur 8, men også det muntlige språket. I begrunnelsen til Line snakker hun generelt, og språket hennes er her upresist, da hun sier [Åh, det er 10. Jeg tror jeg har en ide. Siden at 0, den skal egentlig ikke være med. Så derfor får vi en mer, fordi vi startet egentlig på en mer. Uten 0, hadde det blitt 9, men vi tar med 0. Da får vi en løsning mer, og da blir det 10.]. I argumentet sitt viser Line til eksemplet med 9 løsninger, og det virker som hun henviser tilbake til dette konkretet eksemplet for bedre å tydeliggjøre argumentasjonen hun bruker. Hun påpeker ikke tydelig nok at uansett hvor mange hamstre Ole har, så vil antallet løsninger = antallet hamstre vi startet med +1. Selv om språket til Line er upresist, så får hun frem at det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre, ved å henvise tilbake til oppgaven med 9 løsninger og så vise en generaliserbar egenskap ved den systematiske listen. Argumentet til Kristian er enda mer upresist og det kan virke som han bare gjentar deler av argumentet til Line, da han sier i linje 118 [Fordi 0. Uten 0 blir det 9.].

Det som kjennetegner denne delen av oppgaven er at påstanden som skal bevises legges frem etter oppfordring fra intervjueren. Line og Kristian tar utgangspunkt i de 10 løsningene på oppgaven som de i fellesskap har kommet frem til. Argumentasjonsformen er generisk argumentasjon, og det er et samspill mellom elevene. Uttrykksformene er både den systematiske listen, men også det muntlige språket. Språket til både Line og Kristian er upresist.

I etterkant av dialogen der det fremkommer at Line vet hvorfor det blir en løsning mer enn antallet hamstre og Kristian sier seg enig med henne, stiller intervjueren et nytt spørsmål om relasjonen mellom antallet hamstre og antallet løsninger.

127 Intervjuer: Enn hvis Ole har 20 hamster?
128 Line: 21
129 Intervjuer: Hvorfor blir det 21?
130 Line: Fordi at vi har 20 hamster, da må vi skriv dem opp sånn der og pluss nullen må det bli en til. Så da blir det en mere.
131 Kristian: jeg vet at hvis du hadde tatt 999, så hadde det blitt
132 Begge: 1000

I linje 127 stiller intervjueren spørsmålet [Enn hvis Ole har 20 hamster?] og Line svarer og legger frem påstanden sin [21]. Påstanden til Line er et resultat av spørsmålet til intervjueren. I linje 131 legger også Kristian frem påstanden [jeg vet at hvis du hadde tatt 999, så hadde det blitt, og så svarer både Kristian og Line i linje 132 [1000]. Påstanden som legges frem i 131-132, legger Kristian frem selv på bakgrunn av tidligere resultater. Line og Kristian tar utgangspunkt i resultatet fra oppgaven med 9 hamstre. En tidligere akseptert sannhet som de også benytter seg av, er at det vil bli en løsning mer enn antallet hamstre. Argumentasjonsformen handler her om å vise sin matematiske forståelse ved at de benytter seg av sammenhengen mellom antallet hamster og antallet løsninger. De trenger ikke lengre å skrive opp løsningene etter en systematisk liste, fordi det alltid vil bli en løsning mer enn antallet hamstre.

Uttrykksformen som elevene bruker er i hovedsak kun det muntlige språket. De trenger ikke lengre å henvise til en systematisk oppstilling av løsningene. Antallet løsninger = antallet hamstre +1. I linje 130 gi Line begrunnelsen [Fordi at vi har 20 hamster, da må vi skriv dem opp sånn der og pluss nullen må det bli en til. Så da blir det en mere]. Hun resonnerer seg frem til svaret på spørsmålet til intervjueren, uten å skrive ned en systematisk liste av de ulike løsningene. I linje 131 sier [Kristian jeg vet at hvis du hadde tatt 999, så hadde det blitt] og både han og Line sier samtidig [1000] i linje 132. Her kommer det frem at både Line og Kristian benytter seg av det mønsteret som viser at det vil bli en løsning mer enn antallet hamstre. Det er på bakgrunn av eget initiativ, at de resonnerer seg frem til og bruker sammenhengen mellom antallet hamstre og antallet løsninger. Begge elevene er enige i at det bli en løsning mer enn antall hamstre.

Det som kjennetegner denne delen av oppgaven er at den ene påstanden som skal bevises legges frem etter oppfordring fra intervjueren, og den andre påstanden legges frem både av Line og Kristian. Elevene tar utgangspunkt i resultatet fra oppgaven med ni hamstre, at det blir en løsning mer enn antallet hamstre. Argumentasjonsformen her er antall hamster +1= antall løsninger, og elevene trenger ikke lengre å lage en systematisk liste over de ulike løsningene. Uttrykksformer er i hovedsak det muntlige språket.

4.3 OPPSUMMERING

Avslutningsvis har jeg oppsummert det som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn sitt arbeid med resonnering og bevis i deloppgaven med; et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. Under hver bevisoppgave vil jeg belyse hva som kjennetegner elevenes fremlegg av påstander, tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons- og uttrykksformer. Inndelingen gjelder for begge gruppene samlet.

ET TILFELLE			
Sette frem en påstand	Tidligere aksepterte sannheter	Argumentasjonsform	Uttrykksform
Påstanden legges frem etter oppfordring fra intervjueren En elev legger frem en påstand selv	Addisjonsfakta Oppgavens kontekst Tidligere resultater	Ingen Bytte om på tallene i løsninger som allerede er akseptert Nye påstander	Systematisk liste Symboler Upresist muntlig språk

Tabell 4: Viser kjennetegn ved deloppgaven et tilfelle

ENDELIG ANTALL TILFELLER			
Sette frem en påstand	Tidligere aksepterte sannheter	Argumentasjonsform	Uttrykksform
Påstanden legges frem etter oppfordring fra intervjueren	Resultater fra oppgaven med et tilfelle	En opp og en ned Uttømming Argumentasjonsformen utvikles i fellesskap Nye påstander	Systematisk liste Symboler Upresist muntlig språk

Tabell 5: Viser kjennetegn ved deloppgaven endelig antall tilfeller

UENDELIG ANTALL TILFELLER			
Sette frem en påstand	Tidligere aksepterte sannheter	Argumentasjonsform	Uttrykksform
En elev legger frem en påstand selv Elevene utfyller hverandre Påstanden legges frem etter oppfordring fra intervjueren	Resultater fra oppgaven med endelig antall tilfeller	Empirisk argumentasjon Generisk argumentasjon Argumentasjonsformen utvikles i fellesskap Gjentakelse	Systematisk liste Upresist muntlig språk

Tabell 6: Viser kjennetegn ved deloppgaven uendelig antall tilfeller

I drøftingsdelen ser vil jeg se nærmere på disse kjennetegnene og belyse dem utfra tidligere forskning på arbeid med resonnering og bevis. Jeg vil da gå inn på hva som kjennetegner hvert aspekt i hver deloppgave, i begge elevgruppene samlet, og da diskutere 6 overordene kjennetegn som jeg mener har vært sentrale i elevenes arbeid med resonnering og bevis.

5.0 DRØFTING: ELEVERS ARBEID MED RESONNERING OG BEVIS

Jeg startet denne studien med å stille følgende forskningsspørsmål:

- *Hva kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn sitt arbeid med resonnering og bevis?*

I dette avsluttende kapitlet vil jeg med bakgrunn i studiens teori og analysedel, drøfte og belyse hvordan min analyse av arbeidet med hamsteroppgaven i de to elevgruppene på tredjetrinn, kan gi svar på forskningsspørsmålet mitt. Funnene fra studien min kan gi meg en indikasjon på hvordan to elevgrupper arbeider med resonnering og bevis, og dermed bedre min innsikt og forståelse for prosessen som elevene gjennomgår. I sammenheng med de fire aspektene ved arbeid med bevis deles dette kapitlet inn i fire deler; sette frem en påstand, tidligere aksepterte sannheter, argumentasjons- og uttrykksformer. Jeg vil se på disse fire aspektene i begge gruppene samlet. Innenfor hvert aspekt vil jeg belyse hva som kjennetegner arbeidet i hver av deloppgavene; et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. Helt til slutt i kapitlet vil jeg gi en oppsummering, der de 6 overordnende kjennetegnene ved de fire aspektene vil bli presentert. Det må tas med i betraktningen at det å skille mellom hva som kjennetegner hvert av de fire aspektene har vært en utfordring, fordi elevenes arbeid med resonnering og bevis er en sammensatt prosess. Noen av kjennetegnene handler også om den helhetlige prosessen i elevenes arbeid med resonnering og bevis.

Sette frem en påstand. I arbeidet med deloppgavene et tilfelle og endelig antall tilfeller ble påstandene som skulle bevises, i hovedsak lagt frem fordi jeg stilte elevene spørsmål relatert til deloppgaven. I oppgaven med et tilfelle gav jeg elevene beskjed om at de først skulle tenke over hvordan de ville løse oppgaven individuelt, og deretter skulle de dele sine løsninger med resten av gruppen. Det var derfor naturlig at løsningene ble lagt frem i etterkant av min oppfordring. En årsak til at påstandene som skulle bevises i oppgaven med endelig antall tilfeller først ble lagt frem etter oppfordring fra meg, kan være fordi det er unaturlig for elevene å bevise at det ikke finnes flere løsninger. Et viktig kjennetegn er påstandene som skulle bevises i oppgaven med endelig antall tilfeller ble lagt frem etter oppfordring fra meg.

Carpenter et al. (2003) fremhever viktigheten av at elevene legger frem påstander selv, fordi denne tankeprosessen gir dem makt og eierskap til påstandene som skal bevises. Stylianides (2010) vektlegger også at en sentral del av arbeid med resonnering og bevis handler om hvilke mønster og sammenhenger elever oppdager selv, noe som danner grunnlaget for at en generell påstand legges frem. I oppgaven med uendelig antall løsninger var det Kristian som først oppdaget relasjonen mellom antallet hamstre og antallet løsninger og der Line fortsatte prosessen og videreutviklet hans påstand. Hun oppdaget den generelle sammenhengen, at uansett hvor mange hamstre Ole har fordelt i to bur vil antallet løsninger = antall hamtser+1. Et viktig kjennetegn ved resonnementet deres er at både Line og Kristian tok utgangspunkt i et mønster som de hadde oppdaget, tidligere arbeid med oppgaven.

Tidligere aksepterte sannheter. Et av de tre aspektene i rammeverket til Stylianides (2016) om arbeid med resonnering og bevis, handler om at elever tar utgangspunkt i noe som er kjent og tilgjengelig uten videre forklaring. I arbeidet med både et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller, benyttet elevene seg av tidligere og kjente resultater som et utgangspunkt i neste del av oppgaven. Dette kom spesielt til syne i oppgaven med endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller. I oppgaven med endelig antall tilfeller henviste elevene til tidligere resultatene fra oppgaven med et tilfelle, i oppgaven med uendelig antall tilfeller viste elevene tilbake til resultatene fra oppgaven med endelig antall tilfeller. Et sentralt kjennetegn er at resultater fra den ene delen av oppgaven blir brukt som utgangspunkt i neste deloppgave.

Argumentasjonsformer. I arbeid med resonnering og bevis påpeker både Stylianides (2010) og Stylianides (2016) at når elever skal bevise en påstand, må de benytte seg av en fremgangsmåte som er kjent og tilgjengelig i et gitt fellesskap, og argumentasjonsformen må også være gyldig. Et annet viktig kjennetegn som fremkom når eleven arbeidet med resonnering og bevis er at elevene i begge gruppene utviklet i fellesskap de argumentasjonsformen som de benyttet seg av i arbeid med hamsteroppgaven. Argumentasjonsformene som ble brukt av elevene i oppgaven med endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller, kjennetegnes også ved at de var sterkt tilknyttet konkrete eksempler. Resultater fra tidligere forskning viser også at elever ofte støtter seg til spesifikke eksempler når de skal bevise en påstand (Balacheff, 1988; Mason, 1996; Ball & Bass, 2003; Lannin, 2005; Stylianides, 2007). I oppgavene med endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller viser elevene i sin begrunnelse tilbake til konkrete eksempler. I oppgaven med endelig antall tilfeller benytte elevene i gruppe 1 seg av uttømming, der de pekte tilbake på spesifikke løsninger. Elevene i gruppen 2 benyttet seg av den generaliserbare egenskapen en opp og en ned, der de påpekte hvordan løsningene var stilt opp. Det var kun elevene i gruppe 2 som utviklet en argumentasjonsform som både var kjent og tilgjengelig, og samtidig ansett som gyldig. Resultater fra forskningen min er i tråd med resultater fra forskningen til Ball og Bass (2003). Elevene som deltok i deres undersøkelse benytte seg også av en systematisk oppstilling og uttømming som argumentasjonsform, når de arbeidet med en oppgave med endelig antall tilfeller.

I oppgaven med uendelig antall tilfeller benyttet elevene i gruppe 2 seg av både empirisk argumentasjon og generisk argumentasjon som argumentasjonsform. Carpenter et al. (2003) mener at når elever i barneskolen arbeider med bevis, støter de ofte på utfordringer når de legger frem en påstand som skal gjelde for alle tall. Elevene mangler ofte språk og begreper som kan hjelpe dem til å uttrykke generelle egenskaper ved tall og talloperasjoner. Dermed henviser de ofte tilbake til spesifikke eksempler. Mason (1996) skriver også at i arbeidet med generelle påstander så oppfatter elever på sin side et eksempel som et helt og fullstendig begrep, og ikke som en illustrasjon på en generell egenskap ved eksemplet. Elevene i forskningen min startet argumentasjonsformen med å henvise tilbake til spesifikke eksempler ved bruk av empirisk argumentasjon. Senere i prosessen brukte både Line og Kristian generisk argumentasjon. Elevene brukte dermed empirisk argumentasjon som et utgangspunkt i starten av arbeidet, mens de i løpet av prosessen utviklet og endret fremgangsmåten for å bevise den generelle påstanden, og benyttet da generisk argumentasjon som argumentasjonsform.

Stylianides (2007) påpeker at en ikke bør ha en negativ holdning til empirisk argumentasjon, selv om argumentasjonsformen ikke er gyldig. Fremgangsmåten er ofte et utgangspunkt for noe mer, og dette kommer også til syne i undersøkelsen min. I min studie startet elevene med empirisk, og gikk så over til generisk argumentasjonsform mot slutten av prosessen. Ball og Bass fremhever at selv om empirisk argumentasjon ikke blir ansett som en gyldig argumentasjonsform, kan den gi elever motivasjon til å videreføre arbeidet med viktige matematiske ideer.

Blanton og Kaput (2011) skriver at elever må innse viktigheten av å argumentere, fordi det er gjennom argumentasjon en utvikler troverdig kunnskap. Et viktig kjennetegn i arbeidet med hamsteroppgaven ga ingen elever begrunnelser for de påstandene som ble lagt frem, uten at jeg stilte dem et oppfølgingsspørsmål. En årsak til at elevene ikke ga en eksplisitt begrunnelse kan være, fordi de ikke er vant til å gi en begrunnelse for sine påstander. Resultatet blir da at elevene ikke begrunner påstandene de selv legger frem og heller krever en videre forklaring av påstandene fra medelevene. Når elevene i min studie begynte å gi begrunnelser etter oppfordring fra meg, var språket ofte upresist, og i tillegg oppsto det situasjoner der det heller ble lagt frem nye påstander. Det kan dermed tyde på at elevene trenger videre opplæring og trening i argumentasjon og bevis av påstander som legges frem. Resultater fra forskningen min er i samsvar med forskningen til Lannin (2005) om generalisering og argumentasjon. Elevene som deltok i forskningen hans, begrunnet heller sjeldent sine generaliseringer i gruppediskusjoner.

Uttrykksformer. En sentral del i arbeidet med alle tre delene av hamsteroppgaven er at elevene i begge gruppene brukte det muntlige språket og de nedskrevne løsningene som uttrykksformer. Sfard (2008) påpeker at en viktig del av matematikklæringen er språket som elevene benytter seg av. Et viktig kjennetegn som fremkom i arbeidet med hamsteroppgaven var at det muntlige språket til begge elevgruppene var i hovedsak upresist og utydelig. Upresis bruk av det muntlige språket, kan ha innvirkning på hvordan resonneringsprosessen i elevgruppene utvikler seg. Upresise og utydelige fremlegg av påstander og forklaringer kan medvirke til at medelever har vanskelig for å oppfatte meningsinnholdet, og de fremlagte påstandene og begrunnelsene kan lett bli mistolket. Elevene kan også miste engasjementet og motivasjonen til å uttrykke seg gjennom muntlig språk og det kan da tolkes som akseptasjon av påstander og begrunnelser.

Som nevnt ovenfor var elevenes argumentasjonsformer sterkt knyttet til konkrete eksempler, og det kom til syne i deres argumentasjon. I oppgaven med endelig antall tilfeller henvise elevene i gruppe 1 til konkrete eksempler, mens elevene i gruppe 2, hadde den systematiske oppstillingen av løsningene i fokus. Sfard (2008) mener at kommunikasjonen innad i et fellesskap inneholder visuelle mediatorer. I arbeidet med hamsteroppgaven vil den systematiske listen med løsninger som Line og Kristian benytter seg av, være en visuell mediator som de bruker som en form for matematisk kommunikasjon med hverandre. Den systematiske listen representerer den generaliserbare egenskapen en opp og en ned, der Line og Kristian kommuniserer med hverandre ved å henvise til den eksterne representasjonen. Et viktig kjennetegn i arbeidet med hamsteroppgaven at den systematiske listen som også er en sentral del av elevens resonnering. Listen med løsninger ble brukt som et hjelpemiddel for å bevise at det ikke finnes flere løsninger, og den ble også brukt for å vise relasjonen mellom antallet hamstre og antallet løsninger. Resultater fra undersøkelsen til Blanton og Kaput (2011) viser at elevene innenfor deres forskning, også benyttet seg av en systematisk oppstilling som verktøy. Min studie viser at elevene i gruppe 2 benyttet en systematisk liste som verktøy for å lage en oversikt over alle løsningene de hadde funnet. Den systematiske listen ble brukt til å bevise at alle løsningene i oppgaven med endelig antall løsninger var funnet. Listen ble også brukt som et verktøy for å oppdage korrelasjonen mellom antallet hamstre og antallet løsninger i oppgaven med uendelig antall løsninger.

Sfard (2008) skriver at elever følger etablerte regler som styrer hvordan de arbeider med matematikk i et gitt fellesskap. Siden elevene i min forskning kun arbeidet med hamsteroppgaven, er det vanskelig å hevde at elevene ble styrt av felles etablerte regler i sitt arbeid med resonnering og bevis. Viktige felles kjennetegn for begge gruppene var at ingen elever ga en eksplisitt begrunnelse for de påstandene som ble lagt frem, med mindre jeg stilte dem et oppfølgingsspørsmål. Elevenes argumentasjons- og uttrykksformer var sterkt tilknyttet konkrete eksempler. Det kan derfor virke som om elevenes bruk av konkrete eksempler som argumentasjons- og uttrykksformer og fraværet av eksplisitte begrunnelser uten oppfordring fra meg, var mønstre som gjentok seg underveis i arbeidet med denne spesifikke bevisoppgaven.

På bakgrunn av analysen og drøftingen av hva som kjennetegner de fire aspektene, har jeg kommet frem til disse 6 overordnede kjennetegnene;

1. Resultater fra en tidligere del av hamsteroppgaven blir brukt som utgangspunkt i neste del av oppgaven
2. I oppgaven med endelig antall tilfeller fremlegges påstanden frem som skal bevises etter oppfordring fra meg, mens i oppgaven med uendelig antall tilfeller fremlegges i påstandene som skal bevises i hovedsak av elevene
3. Elevene gir ingen eksplisitt begrunnelse, med mindre jeg stiller dem oppfølgingsspørsmål
4. Det muntlige språket til elevene er upresist
5. Elevenes argumentasjons- og uttrykksformer er sterkt tilknytte konkrete eksempler og en systematisk liste blir benytte som et nyttig verktøy og hjelpemiddel
6. Argumentasjonsformene som elevene benyttet, ble utviklet i fellesskap

Det har som tidligere nevnt vært en utfordring å skulle plassere hvert kjennetegn under et av de fire aspektene. Noen av kjennetegnene handler også om den helhetlige prosessen i elevenes arbeid med resonnering og bevis. Jeg har valgt ut disse seks kjennetegnene fordi jeg mener at disse funnene fremstår som mest sentrale og viktige i den prosessen som beskriver elevgruppenes arbeid med resonnering og bevis.

6.0 AVSLUTNING OG VEIEN VIDERE

I starten av studien min stilte jeg et forskningsspørsmål som omhandlet elevers arbeid med resonnering og bevis. Forskningen min skulle gi meg en bedre forståelse og et økt innblikk i hva som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinnet når de arbeider med resonnering og bevis. I dette avsluttende kapitlet vil jeg først besvare forskningsspørsmålet mitt. Deretter vil jeg diskutere studiens troverdighet, didaktiske implikasjoner og til slutt studiens bidrag til forskningsfeltet og veien videre.

En gjennomgang av de seks ovenfor nevnte kjennetegn ved to elevgruppers arbeid med resonnering og bevis, viser at elevene benytter seg av resultater fra en tidligere del av oppgaven som utgangspunkt når de skal bevise neste del av oppgaven. I endelig antall tilfeller fremlegges påstandene som skal bevises etter oppfordring fra meg, og uendelig antall tilfeller er det i hovedsak elevene selv som oppdager og legger frem påstandene som skal bevises. Elevene gir ingen eksplisitt begrunnelse for sine fremlagte påstander, med mindre jeg stiller dem oppfølgingsspørsmål. Det muntlige språket til elevene i begge gruppene er upresist, og en systematisk liste blir brukt som et nyttig verktøy og hjelpemiddel. Argumentasjons- og uttrykksformer som ble benyttet i begge gruppene ble sterkt knyttet til konkrete eksempler, og de argumentasjonsformene som elevene brukte i løpet av arbeidet med hamsteroppgaven, ble utviklet i gruppefellesskapet.

6.1 METODEKRITIKK

Innenfor kvalitativ forskning fordyper forskeren seg i et avgrenset fagområde, noe som medfører at muligheten for generalisering av forskningsresultatene kan være begrenset. Funnene mine som er relatert til 5 elever i to grupper på tredjetrinnet, kan derfor i liten grad overføres til lignende grupper eller situasjoner. I løpet av forskningsprosessen har jeg med bakgrunn i de teoretiske perspektiver på arbeid med resonnering og bevis samlet inn mitt datamateriale, analyser dette materialet og deretter kommet frem til en form for konklusjon. Jeg har forsøkt å gjøre forskningsprosjektet mitt transparent, ved å gi en grundig beskrivelse av konteksten, innsamlingen av datamaterialet og gjennomgangen av analyseprosessen. Med bakgrunn i dette håper jeg at forskningsprosedyren i studien min skal oppleves som gjennomsiktig og at resultatene anses som åpenbare og har en konklusjon som er overbevisende. Jeg kan likevel ikke hevde at dersom andre forskere hadde gjennomført samme studie, ville de ha fått samme konklusjon som meg. Jeg ønsker nå å presentere en kritikk av forskningsmetoden jeg brukte, da dette er viktig for at studiet mitt skal være transparent.

Postholm og Jacobsen (2011, s. 65-66) påpeker at ved bruk av gruppeintervju som kvalitativ forskningsmetode, kan det innad i gruppene oppstå vanskelige situasjoner og uheldige gruppeprosesser. De skriver at en av metodens åpenbare svake sider er at enkeltpersoner innad i gruppene kan opptre fullstendig dominerende, og dermed resulterer i at enkelte gruppemedlemmer unngår å komme frem med sine synspunkter. For å unngå slike uheldige situasjoner, settes det krav til den forskeren som skal lede og gjennomføre gruppeintervjuet. I løpet av begge gruppeintervjuene opplevde jeg at det var elever som var mer aktive og ga sterkere uttrykk for sine synspunkter enn de andre elevene i gruppen. Alle elevene fikk likevel en mulighet til å si sin mening. Jeg prøvde å legge til rette for at alle elevene i hovedsak fikk formidlet sine meninger og lagt frem sine påstander, men til tross for dette kan enkelte elever likevel ha unngått å uttrykke seg i spesifikke situasjoner. Det var en utfordring for meg som intervjuer, å klare og oppfatte om en elev faktisk er enig i medelevenes påstander, eller om noen elever unngår å legge frem egne påstander fordi de opplever at maktfordelingen innad i gruppen er ujevn.

Jeg har reflektert en del over hva som kunne vært gjort annerledes, dersom jeg skulle ha gjennomført undersøkelsen min på nytt. En tanke som har opptatt meg er at det ville vært enklere å gjennomføre forskningen min på elever på mellomtrinnet, fordi jeg da i hovedsak ville ha fokusert på oppgaven med uendelig antall tilfeller. Det ville mest sannsynlig vært enklere for eldre elever å oppdage den generelle sammenhengen mellom antallet hamstre og antallet løsninger. Jeg kunne da i hovedsak benyttet meg av rammeverk til Stylianides (2010), som kun fokuserer på generelle påstander i arbeidet med resonnering og bevis. En utfordring som oppstod da jeg skulle analysere elevens arbeid med hamsteroppgaven var elevens upresise og utydelige språkbruk. Konsekvensen av dette var at muligheten for mistolkninger av elevens påstander og begrunnelser økte. Et av de seks funnene som jeg oppdaget i forbindelse med elevens arbeid med hamsteroppgaven, var at elevene brukte resultater fra en tidligere del av oppgaven som utgangspunkt i den neste delen av oppgaven. Hamsteroppgaven legger til rette for at elevene kan benytte seg av tidligere resultater som et utgangspunkt for neste del av oppgaven. Det er derfor vanskelig å vite om elevene ville ha brukt tidligere resultater som utgangspunkt, dersom oppgaven ikke hadde lagt til rette for det.

Oppgaveteksten i hamsteroppgaven la til rette for at elevene kunne arbeide med bevisoppgaver knyttet til et tilfelle, endelig antall tilfeller og uendelig med tilfeller. Deloppgaven med et tilfelle krevde i hovedsak ingen begrunnelse, fordi påstanden som elevene la frem også kunne oppfattes som tidligere aksepterte sannheter. Jeg stilte heller ingen videre oppfølgingsspørsmål, da de ulike løsningene ikke trengte noen videre begrunnelse. I resonneringsprosessen som etterhvert utviklet seg i begge gruppene, var det ingen av elevene som argumenterte for sine påstander og heller ingen av medelevene som krevde utdypende forklaringer. Siden det ikke var nødvendig å begrunne påstandene som fremkom i første del av oppgaven, kan det som en konsekvens av dette ha oppstått en tilbøyelighet hos elevene til også å akseptere påstander som ikke var åpenbare, også i deloppgaven med endelig antall tilfeller og uendelig antall tilfeller, der påstandene krevde begrunnelse.

Det var kun elevene i gruppe 2 som arbeidet med deloppgaven med uendelig antall tilfeller. En årsak til at elevene i gruppe 1 ikke oppdaget sammenhengen mellom antallet hamstre og antallet løsninger, kan være nedsatt konsentrasjon og/eller engasjement når det gjelder denne oppgavedelen. En kan ikke forvente at alle elevene oppdager de sammenhengene som oppgavene legger til rette for. På bakgrunn av at noen elever ikke hadde oppdaget den generelle egenskapen en opp og en ned, og relasjonen mellom antallet hamster og antallet løsninger, kunne en mulig løsning vært, å fortsette arbeidet i elevgruppene også den påfølgende dagen.

Siden jeg har vært en aktiv deltaker under elevenes arbeid med hamsteroppgaven, kan jeg ha påvirket forskningsresultatene. Det kan derfor stilles spørsmål ved hvor hensiktsmessig det har vært å være deltaker i elevenes arbeid med oppgaven. Til tross for risikoen for at jeg kunne påvirke forskningsresultatene, så opplevde jeg likevel et behov for å kunne stille elevene spørsmål og oppfølgingsspørsmål, mens de arbeidet med hamsteroppgaven.

6.2 DIDAKTISKE IMPLIKASJONER

Innledningsvis i kapitlet om metodekritikk nevnte jeg at funnene mine i liten grad kunne generaliseres, da jeg går i dybden på et avgrenset fagområde. Selv om de 6 funnene mine ikke kan generaliseres, mener jeg likevel at forskningsresultatet mitt kan være nyttig både for meg og andre lærere. Min studie kan hjelpe andre lærere til å reflektere over hva som kjennetegner deres elever i arbeidet med resonnering og bevis. Funnene fra min studie kan sammenlignes med resultatene fra annen tilsvarende forskning, slik at andre som har interesse innenfor samme fagfelt, kan dra nytte av mine tolkninger og funn. Andre lærere og forskere kan benytte seg av mine funn, for å se om de oppnår lignende resultater. Da det kun var elevene i gruppe 2 som oppdaget passende argumentasjonsformer og relasjonen mellom antallet løsninger og antallet hamstre, så viser dette at lærere må regne at det kan oppstå tilfeller der elever ikke oppdager de sammenhengene som en oppgave legger til rette for. Slik jeg ser det, ville kanskje elevene i gruppe 1 hatt muligheten for å oppdage den generelle egenskapen en opp og en ned og relasjonen mellom antallet hamster og antallet løsninger, dersom elevene i gruppen hadde hatt mulighet til å arbeide lengre med oppgaven.

To sentrale kjennetegn som jeg identifiserte i elevers arbeid med resonnering og bevis var at språket til elevene var upresist og de ga ingen eksplisitt begrunnelse for påstandene som fremkom uten min oppfordring. Som lærer er det viktig å hjelpe elever med å utviklingen av et mer presist matematisk språk, Blanton og Kaput (2011) påpeker at elever må innse viktigheten av å argumentere, fordi det er gjennom argumentasjon en utvikler troverdig kunnskap. Jeg anser det som essensielt at læreren utvikler en klasseromskultur der argumentasjon står sentralt og der elever begrunner sine påstander og fremgangsmåter uten at det kommer en oppfordring fra læreren. Elever må selv innse at begrunnelse er en sentral del av arbeidet med matematikk.

6.3 STUDIES BIDRAG TIL FORSKNINGSFELTET OG VEIEN VIDERE

Stylianides (2016) viser i sin forskning at ved å benytte seg av hans tre aspekter på bevis, kan lærere oppnå økt innsikt i elevenes arbeid med resonnering og bevis. Lærere vil samtidig får en større forståelse for hvordan elever på alle klassetrinn kan arbeide med bevis. Rammeverket til Stylianides var en viktig hjelp for meg i min streben etter en dypere forståelse for hva som kjennetegner arbeid med resonnering og bevis i to elevgrupper på tredjetrinn. Jeg har brukt de tre aspektene hans i analysen av dataene mine, for bedre å forstå hva som skjer i denne prosessen, der fremsatte påstander argumenteres for og godkjennes innad i et gitt fellesskap. Det har i tillegg vært viktig for meg å få en innsikt i hvordan påstander legges frem i et fellesskap (Stylianides, 2010). Selv om jeg kun har forsket på hva som kjennetegner to elevgrupper på tredjetrinn, setter studien teoriestiske perspektiver på arbeid med resonnering og bevis inn i en norsk kontekst. Studien gir informasjon om hvordan de to elevgruppene arbeidet med hamsteroppgaven i et fellesskap. Forskningen min bekrefter også at Stylianides (2016) sine aspekter på bevis, kan gi en økt innsikt i elevers arbeid med resonnering og bevis. Jeg lagt i tillegg lagt til aspekter i hans definisjon på et bevis, da jeg mener i likhet med Stylianides (2010) at det også er viktig å studere hvordan påstandene som skal bevises, blir lagt frem.

Videre forskning innenfor temaet elevers arbeid med resonnering og bevis kunne ha økt fokuset på elevenes utvikling av fremgangsmåter. I studien til Ball og Bass (2003) studerte de elever på tredjetrinn sitt arbeid med resonnering og bevis i løpet av et år. Ved å sammenligne arbeidet som klassen utførte på forskjellige tidspunkt, merket de en utvikling i elevens evne til resonnering, med det resultatet at argumentasjonsformene til elevene endret seg. Det kunne vært spennende å sammenligne norske elever sitt arbeid med resonnering og bevis på forskjellige tidspunkter.

Som avsluttende kommentar vil jeg påpeke at det har vært veldig lærerikt og interessant å forske på arbeid med resonnering og bevis med to elevgrupper fra tredjetrinn. De seks kjennetegnene jeg til slutt endte opp med gir meg både et innblikk i resonneringen til elevene, og en indikasjon på hvordan elever på tredjetrinn kan arbeide med resonnering og bevis. Det er viktig at jeg som lærer matematikkfaget legger til rette for at elever arbeider med oppgavetyper som skaper behov og mulighet for matematisk resonnering. Målet mitt må også være å skape en klasseromskultur der oppdagelser mønster, fremlegg av påstander, generaliseringer og argumentasjon er viktige og sentrale temaer i undervisningen. Stylianides (2010) påpeker, at det er nettopp gjennom denne sammensatte prosessen at elever lærer og utvikler ny kunnskap i matematikk.

REFERANSELISTE

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm, (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick., W. G. Martin., & D. Schifter (Red.), *A Research Companion to Principles and Standards for school Mathematics* (s. 27-44). Reston, VA: National Council of Teaching of Mathematics.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of proof. I L.I, Tatsien (Red.), *Proceedinga of the International Congress of Mathematics* (3), s.907-920. Beijing: Higher Education Press.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. I J. Cai., & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 5-23). Berlin, Heidelberg: Springer.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* London: Routledge.

Hanna, G., & Jahnkie, H. N. (1996). Proof and proving. I A.J. Bishop., K. Clements., C. Keitel., J. Kilpathric., & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (s. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001) Algebrafying the elementary mathematics experience. I H. Chick., K. Stacey., J. Vincent., & J. Vincent (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (1), 57-94. Melbourne: ICMI.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* (2.utg). Gyldendal Norsk Forlag.

Lannin, J. K.(2005). Generalization and justification: The challenge og introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning: An International Journal* (25), 299-317

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz., C. Kieran., & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for researches and teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic.

Moen, T., & Karlsdottir, R. (2011). *Sentrale aspekter ved kvalitativ forskning*. Tapir akademisk.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D.I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz., C. Kieran., & L, Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for researches and teaching* (s. 107-111). Dordrecht: Kluwer Academic.

Robson, C. (2002). *Real world research: A Resource for Social Scientist and Practioner-Researches.* (2.utg). USA: Blackwell Publishing.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education* 36 (3), 289-321. National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford university press

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics* 28 (1), 9-16

Stylianides, G. J. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematical Teaching* (219), 39-44

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human Development, The Growth of Discourses, and Mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2009). Moving between discourses: From learning-as-acquisition to learning as-participation. *AIP Conference proceedings* 1179 (55), 55-58.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse- Some insights form communicational research. *International Journal of Educational research* (51-52), 1-9

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode.* (4.utg). Fagbokforlaget.

Thagaard, T. (1998). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode.* Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder: i praksis.* (3.utg, 1 oppl.). Gyldendal Norsk Forlag.

Utdanningsdirektoratet. (2013a). *Kompetansemål etter 4.årssteg.* (MAT1- 04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arssteget-

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Læreplan i matematikk fellesfag –Føremål.* Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Læreplan i matematikk fellesfag – Grunnleggjande ferdigheiter.* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2014). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (8. utg.). Essex: Pearson Education Limited.

VEDLEGG 2: INFORMASJONSKRIV OG SAMTYKKESKJEMA

Informasjonsskriv og samtykkeskjema

NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet «hvordan argumenterer elever for matematiske sammenhenger?»

Bakgrunn og formål

Formålet med studiet er å få en bedre forståelse for hvordan elever på barneskolen (3.trinn) argumenterer for matematiske sammenhenger. Et foreløpig forskningsspørsmål er «hvilke typer bevis et utvalg elever på 3.trinn bruker når de skal argumentere for ulike sammenhenger innenfor matematikk? Forskningsprosjektet er en mastergradsstudiet ved NTNU, som går over et år. I prosjektet skal jeg samarbeide med en lærer ved din skole, og elevene som blir brukt i forskningsprosjektet er tilfeldig valgt utfra kjennskap til deres lærer.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Jeg vil gjennomføre forskningen min med 3 elevgrupper, hvor jeg tar ut 2-3 elever av gangen. De skal arbeide med 3-4 oppgaver i matematikk, og jeg vil observere og samtidig stille spørsmål som handler om matematiske sammenhenger. Et eksempel kan være «vil dette alltid være tilfellet?» I tillegg til min observasjon vil det bli tatt egne notater, lydopptak og videoopptak og jeg vil samle inn elevarbeidene som er gjort gruppevis og individuelt.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Det samles ikke inn personopplysninger utover alder og kjønn. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Tilgang til datamaterialet som samles inn vil kun være tilgjengelig for meg. Bearbeidet data (anonymisert) vil være tilgjengelig for min veileder ved NTNU. Data som publiseres vil være anonymisert og vil ikke kunne knyttes til enkeltdeltakere. Prosjektet skal etter planen avsluttes 01.06.18. Alle data vil da bli fullstendig anonymisert, og lyd-og videoopptak vil bli slettet.

Frivillig deltagelse

Det er frivillig å delta i studien, hvor der er foreldre og barn som skal gi tillatelse, men kun barn som deltar. Hvis foresatte er positive, og har hatt en samtale med barnet for å se om barnet er villig til å delta. Skulle enten foresatte eller barnet ombestemme seg, kan samtykket trekkes og alle opplysninger om barnet vil bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med masterstudent ved NTNU Ingeborg Broback Rasch, ingeborg.broback@gmail.com, tlf [redacted] eller førsteamanuensis Anita Valenta, anita.valenta@ntnu.no, tlf [redacted]

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD – Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Foreldres/foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter at jeg har lest informasjonsarket og har snakket med mitt barn om deltakelsen i studien. Barnet er positivt og jeg samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet *hvordan argumenterer elever for matematiske sammenhenger?*

Barns navn/klasse: ____

Jeg samtykker i at: (kryss av der det passer)

☐ Det tas videoopptak av barnet, som en del av matematikkforskning. Videoopptaket kan brukes av forskeren. Videoopptaket skal ikke offentliggjøres.

☐ Det tas lydopptak av barnet, som en del av matematikkforskning. Lydopptaket kan brukes av forskeren. Lydopptaket skal ikke offentliggjøres.

☐ Det kan tas kopi av skriftlige elevarbeider fra barnet. Arbeidet kan publiseres i anonymisert form slik at det ikke er mulig å kjenne igjen barnet.

Sted og dato____

Foreldres/foresattes underskrift____

Vennligst lever skjemaet til ___________________

Tusen takk!

VEDLEGG 3: BEKREFTELSE FRA NSD

Anita Valenta

7491 TRONDHEIM

Vår dato: 04.10.2017 Vår ref: 55665 / 3 / BGH Deres dato: Deres ref:

Tilbakemelding på melding om behandling av personopplysninger

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 04.09.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

55665	*Hvilke bevisnivå bruker et utvalg elever på 3.trinn når de skal argumentere for ulike sammenhenger innenfor matematikk?*
Behandlingsansvarlig	*NTNU, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Anita Valenta*
Student	*Ingeborg Broback Rasch*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.07.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Dersom noe er uklart ta gjerne kontakt over telefon.

Vennlig hilsen

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Marianne Høgetveit Myhren

Belinda Gloppen Helle

Kontaktperson: Belinda Gloppen Helle tlf: 55 58 28 74 / belinda.helle@nsd.no
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Ingeborg Broback Rasch, ingeborg.broback@gmail.com